ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1980

ТОМ 251 № 2

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

Следствие 4. *Пусть X – строго выпуклое банахово пространство и $M \in \mathcal{F}(X)$. Тогда, если $E(M) \cap USC(M) \in$ (II) (в частности, если M аппроксимативно компактно), то $T(M) \in$ (II).*

В самом деле,

$$T(M) \supset (E(M) \cap USC(M)) \cap (Q(M) \cup C(USC(M))) \in (\mathrm{II}).$$

Сильно выпуклым называется строго выпуклое банахово пространство Ефимова–Стечкина. Из теоремы 3, любого из следствий 3 или 4 и утверждения о существовании в любом не строго выпуклом X гиперплоскости $M \subset X$, для которой $Q(M) = M$ ([3]), вытекает следующий критерий.

Теорема 8. *Для того чтобы в банаховом пространстве X при любом $M \in \mathcal{F}(X)$ множество $T(M)$ было плотным в X (множеством II категории в X), необходимо и достаточно, чтобы X было сильно выпуклым.*

Учитывая, что на $T(M) \cap AC(M)$ метрическая проекция однозначна и непрерывна, из теорем 3 и 8 мы выводим

Следствие 5. *В сильно выпуклом банаховом пространстве X для любого $M \in \mathcal{F}(X)$ метрическая проекция P_M однозначна и непрерывна на некотором подмножестве II категории в X.*

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
2 XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н.В. Ефимов, С.Б. Стечкин*, ДАН, т. 140, № 3, 522 (1961). [2] *R.C. James*, Studia Math., v. 23, № 3, 205 (1964). [3] *С.Б. Стечкин*, Rev. Math. pure et appl., v. 8, № 1, 5 (1963). [4] *I. Singer*, Rev. Roum. Math. pure et appl., v. 9, № 2, 167 (1964). [5] *Е.В. Ошман*, ДАН, т. 195, № 3, 555 (1970). [6] *А.Л. Гаркави*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, № 4, 799 (1964). [7] *Л.П. Власов*, УМН, т. 28, № 6, 3 (1973). [8] *M. Edelstein*, J. Approx Theory, v. 18, № 1, 1 (1976). [9] *K.-S. Lau*, ibid., v. 21, № 4, 319 (1977). [10] *S. Cobzas*, Math. Rev. and Numér. et théor. approx., v. 7, № 2, 141 (1978). [11] *K.-S. Lau*, Ind. Univ. Math. J., v. 27, № 5, 791 (1978). [12] *S. Trojanski*, Studia Math., v. 37, № 2, 173 (1971). [13] *М.И. Кадец*, Изв. высш. учебн. завед., № 6, 51 (1959). [14] *С.В. Конягин*, ДАН, т. 239, № 2, 261 (1978). [15] *L. Zajiček*, Comment math. Univ. Carol., v. 19, № 3, 513 (1978).

УДК 513.88 + 519.95 МАТЕМАТИКА

А.Г. КУСРАЕВ, С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ

СВЕРТКА РОКАФЕЛЛАРА И ХАРАКТЕРИСТИКА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

(Представлено академиком С.Л. Соболевым 23 X 1979)

В настоящей заметке анонсируются формулы для вычисления преобразования Юнга и ϵ-субдифференциала свертки Рокафеллара (композиции бифункций ([1])) и связанные с ними характеристики оптимальных траекторий в динамических задачах ([2],[3]). Показывается, как естественная квалификация общего положения ([4]) выпуклых множеств в псевдотопологических векторных пространствах гарантирует применимость развитой в ([5],[6]) алгебраической техники локального анализа выпуклых операторов в непрерывном случае.

Предварительные соглашения. Всюду в дальнейшем термин векторное пространство означает псевдотопологическое векторное пространство. Аналогично, под К-пространством понимается псевдотопологическое К-пространство с нормальным конусом положительных элементов. Термин линейный оператор означает непрерывный линейный оператор. Символами $\mathcal{L}(X, Y)$ и $\mathcal{L}^{+}(X, Y)$ обозначаются соответственно множество линейных операторов и множество положительных линейных операторов, действующих из X в Y.

Пространство $\mathcal{L}(X_1, Y) \times \mathcal{L}(X_2, Y)$ отождествляется с пространством $\mathcal{L}(X_1 \times X_2, Y)$ правилом $(A_1, A_2)(x_1, x_2) = A_1 x_1 - A_2 x_2$.

Для К-пространства Y символом $Y^{\cdot}$ обозначается Y с присоединенным наибольшим элементом; при этом для отображения $F\colon\ X \to Y^{\cdot}$, как обычно, определяется $\operatorname{dom}(F) = \{x \in X\colon\ Fx \in Y\}$ – эффективное множество F.

Общее положение выпуклых множеств. Пусть H_1, H_2 – конусы в векторном пространстве X. Конусы H_1 и H_2 находятся в общем положении, если, во-первых, они находятся в общем положении алгебраически, т.е. $H_1 - H_2 = H_2 - H_1$, во-вторых, пространство $X_0 = H_1 - H_2$ дополняемо в X и, в-третьих, каждый сходящийся к нулю в X_0 фильтр содержит фильтр с базисом, образованным множествами

$$(G \cap H_1 - G \cap H_2) \cap (G \cap H_2 - G \cap H_1),$$

где G пробегает базис фильтра в X_0, сходящегося к нулю.

Выпуклые множества G_1 и G_2 в пространстве X находятся в общем положении, если в общем положении находятся их преобразования Хермандера, т.е., по определению, конические оболочки множеств $G_1 \times \{1\}$ и $G_2 \times \{1\}$ в пространстве $X \times R$. Последние представляют собой эффективные множества преобразований Хёрмандера индикаторных операторов данных множеств G_1 и G_2.

Естественным образом, как и в ([5]), определяется общее положение произвольного конечного семейства множеств $G_1, \ldots, G_n$. Отметим, в частности, что достаточным условием общего положения множеств $G_1, \ldots, G_n$ служит наличие в их пересечении внутренней точки каждого, за исключением, быть может, одного, из этих множеств. Хорошо известно также, что в пространстве Фреше X алгебраическое общее положение замкнутых конусов H_1, H_2 таких, что подпространство $H_1 - H_2$ дополняемо в X, обеспечивает общее положение конусов $\check{H}_1$ и H_2 в указанном выше смысле.

Формула Моро. *Общее положение надграфиков выпуклых операторов $F_1, \ldots, F_n\colon\ X \to Y^{\cdot}$ обеспечивает точность формулы Моро в классе непрерывных линейных операторов. Иными словами, если*

$$F^{*}A = \sup\{Ax - Fx\colon\ x \in \operatorname{dom}(F)\}, \quad A \in \mathcal{L}(X, Y),$$

– преобразование Юнга оператора F, то для любого $A \in \operatorname{dom}((F_1 + \ldots + F_n)^{*})$ существуют операторы $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ такие, что выполняются соотношения

$$A = A_1 + \ldots + A_n, \qquad (F_1 + \ldots + F_n)^{*}A = F_1^{*}A_1 + \ldots + F_n^{*}A_n.$$

Свертка Рокафеллара. Пусть X, X_1, X_2 – векторные пространства, Y – некоторое К-пространство и

$$F_1\colon\ X_1 \times X \to Y^{\cdot}, \qquad F_2\colon\ X \times X_2 \to Y^{\cdot}$$

– выпуклые операторы. Допустим, что формула

$$F_1 \,\Delta\, F_2(x_1, x_2) = \inf_{x \in X}\,(F_1(x_1, x) + F_2(x, x_2))$$

определяет оператор из $X_1 \times X_2$ в Y с эффективной областью

$$\operatorname{dom}(F_1 \,\Delta\, F_2) = \operatorname{dom}(F_2) \circ \operatorname{dom}(F_1).$$

Ясно, что оператор $F_1 \triangle F_2$ является выпуклым. Этот оператор называется сверткой Рокафеллара операторов F_1 и F_2:

Если в пространстве $X_1 \times X \times X_2 \times Y$ множества

$$\{(x_1, x, x_2, y): \ y \geqslant F_1(x_1, x)\}, \qquad \{(x_1, x, x_2, y): \ y \geqslant F_2(x, x_2)\}$$

находятся в общем положении, то выполняется

$$(F_1 \triangle F_2)^* = F_1^* \triangle F_2^*.$$

При этом последняя формула является точной, т.е. для любых $A_1 \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ и $A_2 \in \mathcal{L}(X_2, Y)$ найдется $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ такой, что

$$(F_1 \triangle F_2)^*(A_1, A_2) = F_1^*(A_1, A) + F_2^*(A, A_2).$$

Если, кроме того, свертка Рокафеллара $F_1 \triangle F_2$ точна в некоторой точке $(x_1, x_2) \in \operatorname{dom}(F_1 \triangle F_2)$, т.е. для некоторого $x \in X$ такого, что $(x_1, x) \in \operatorname{dom}(F_1)$ и $(x, x_2) \in \operatorname{dom}(F_2)$, выполняется

$$F_1 \triangle F_2(x_1, x_2) = F_1(x_1, x) + F_2(x, x_2),$$

то для всякого положительного элемента ϵ из Y справедливо

$$\partial_\epsilon(F_1 \triangle F_2)(x_1, x_2) = \bigcup_{\substack{\epsilon_1 \geqslant 0,\ \epsilon_2 \geqslant 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon}} \partial_{\epsilon_2}(F_2)(x, x_2) \circ \partial_{\epsilon_1}(F_1)(x_1, x).$$

Здесь, как обычно, для оператора $F: \ X \to Y^{\cdot}$ определено множество

$$\partial_\epsilon(F)(x) = \{A \in \mathcal{L}(X, Y): \ Ax_0 - Ax \leqslant Fx_0 - Fx + \epsilon, \quad x_0 \in X\},$$

называемое ϵ-субдифференциалом F в точке $x \in \operatorname{dom}(F)$.

Справедливость формул локального выпуклого анализа. При отождествлении выпуклого процесса с его индикаторным оператором суперпозиции выпуклых процессов отвечает свертка Рокафеллара. Кроме того, надграфик суперпозиции выпуклого оператора с возрастающим выпуклым оператором совпадает с суперпозицией надграфиков рассматриваемых операторов. Таким образом, приведенные выше факты о свертке Рокафеллара содержат правило для вычисления преобразования Юнга суперпозиции и соответствующее цепное правило для нахождения субдифференциалов. Это позволяет сделать следующий вывод.

Все формулы локального выпуклого анализа – правила замены переменных в преобразовании Юнга, формулы для вычисления ϵ-субдифференциалов, критерии оптимальности для выпуклых программ и т.п. – справедливы в псевдотопологических векторных пространствах. Формулировки этих формул, приведенные в ([5], [6]), дословно сохраняются в общем случае с учетом сделанных выше предварительных соглашений.

Характеристика оптимальных траекторий. Рассмотрим, простоты ради, конечношаговую терминальную выпуклую динамическую задачу в форме ([3]). Пусть $X_0, X_1, \ldots, X_n$ – векторные пространства и $G_i \subset X_{i-1} \times X_i$ – выпуклые процессы, $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим возникающее динамическое семейство процессов

$$G_{i,j} = G_j \circ \ldots \circ G_{i+1}, \quad j > i + 1$$

$$G_{i,\, i+1} = G_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Как обычно, траекторией данного семейства называется набор элементов $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ такой, что $x_j \in G_{i,j}(x_i)$ для $i < j \leqslant n$. Пусть $F: \ X \to Y^{\cdot}$ – выпуклый оператор, ϵ – положительный элемент пространства Y и $x_0 \in X_0$. Рассмотрим программу

$$x \in G_{0,n}(x_0), \qquad Fx \to \inf.$$

Соответствующие ϵ-решениям указанной программы траектории называются *ϵ-оптимальными траекториями* исходного динамического семейства процессов. Иными словами, траектория $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ является ϵ-оптимальной в том и только в том случае, если для любой траектории $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ имеет место неравенство $Fx_n \leqslant Ft_n + \epsilon$. Набор линейных непрерывных операторов $(A_1, \ldots, A_n)$, где $A_i \in \mathcal{L}(X_i, Y)$, называется *$\epsilon$-характеристикой* траектории $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, если найдутся положительные элементы $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ такие, что выполняется

$$\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_n \leqslant \epsilon,$$

$$A_i x - A_j t \leqslant A_i x_i - A_j x_j + \epsilon_{i+1} + \ldots + \epsilon_{j+1}, \qquad (x, t) \in G_{i,j}.$$

Предположим, что, во-первых, в общем положении находятся надграфик оператора F и множество $G_{0,n}(x_0) \times Y$, во-вторых, в общем положении находятся множества $G_{0,n}$ и $X_0 \times \{x_n\}$, в-третьих, для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ в общем положении находятся множества $G_i \times X_n$ и $X_{i-1} \times G_{i,n}$. При сделанных допущениях о регулярности выполняется следующее утверждение.

Траектория $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ является ϵ-оптимальной в том и только в том случае, если для некоторого $0 \leqslant \delta \leqslant \epsilon$ она допускает δ-характеристику $(A_1, \ldots, A_n)$ такую, что $A_n \in \partial_{\epsilon - \delta}(F)(x_n)$.

Институт математики Сибирского отделения
Академии наук СССР, Новосибирск

Поступило
11 XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Р.Т. Рокафеллар,* Выпуклый анализ, М., 1973. [2] *В.Л. Макаров, А.М. Рубинов,* Математическая теория экономической динамики и равновесия, М., 1973. [3] *А.М. Рубинов,* Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам, М., 1980. [4] *А.Г. Кусраев,* О субдифференцировании негладких операторов, Новосибирск, 1979. [5] *С.С. Кутателадзе,* УМН, т. 34, № 1, 167 (1979). [6] *С.С. Кутателадзе,* ДАН, т. 245, № 5, 1048 (1979).

УДК 517.43 МАТЕМАТИКА

Г.В. РАДЗИЕВСКИЙ

О БАЗИСАХ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ПРОИЗВОДНЫХ ЦЕПОЧЕК, ОТВЕЧАЮЩИХ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

(Представлено академиком С.Л. Соболевым 15 X 1979)

В статье использованы понятия и обозначения из ([1]).

Пусть область Ω содержит сколь угодно большие по модулю точки λ, подпространство $\mathfrak{N} \subseteq \bigoplus_{l=1}^{m} \mathfrak{H}_{1,l}$, а оператор-функции $L(\lambda)$ и $Q_1(\lambda), \ldots, Q_m(\lambda)$ аналитически зависят от $\lambda \in \Omega$, причем $L(\lambda)$ и $Q_l(\lambda)$ принимают значения в множестве операторов, действующих из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$ и из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_{1,l}$, а $\mathfrak{D}(L) \subseteq \mathfrak{D}(Q_l)$. Если $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{P}(L(\lambda); Q_1(\lambda), \ldots, Q_m(\lambda); \Omega) \subseteq \bigoplus_{l=1}^{m} \mathfrak{H}_{2,l}$, где $\mathfrak{H}_{2,l}$ – некоторые гильбертовы пространства, то соотношение

$$(1) \qquad L(\lambda) \in \mathfrak{B}\,[Q_1(\lambda), \ldots, Q_m(\lambda); \Omega; \mathfrak{N}; \bigoplus_{l=1}^{m} \mathfrak{H}_{2,l}]$$