ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1980

ТОМ 252 № 4

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ

МОДУЛИ, ДОПУСКАЮЩИЕ ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

(Представлено академиком С.Л. Соболевым 31 I 1980)

Цель настоящей работы – дать полное описание упорядоченных унитарных модулей над решеточно-упорядоченными кольцами, в которых имеет место выпуклый анализ. Проблема построения выпуклого анализа в модулях выдвинута потребностями классической скалярной теории экстремальных задач. Дело в том, что преобразования Юнга выпуклых операторов обладают свойством модульной выпуклости над идеальным центром области значений. Отражением этого факта служит операторная выпуклость субдифференциалов. Понятно, что любой вопрос выпуклого анализа в модулях – это, в конечном счете, проблема мажорированного продолжения модульного гомоморфизма (ср. ([1])). Имеется ряд теорем такого сорта (см. ([2])). Общий дефект имеющихся теорем указывается ниже. Именно, устанавливается, что никакого специфического модульного выпуклого анализа просто не существует. Точнее говоря, с учетом элементарных оговорок выпуклый анализ имеет место в том и только том случае, когда речь идет о K-пространствах, рассматриваемых как модули над кольцами ортоморфизмов; при этом аддитивные опорные модульно-сублинейного оператора автоматически оказываются модульными гомоморфизмами.

1°. Пусть Y – некоторое K-пространство, I_Y – тождественный оператор в Y. Компонента, порожденная I_Y в K-пространстве регулярных операторов $L^r(Y)$, обозначается $\mathrm{Orth}(Y)$. Элементы $\mathrm{Orth}(Y)$ называются о р т о м о р ф и з м а м и ([3]). В $\mathrm{Orth}(Y)$ выделяются наименьшее нормальное подпространство $Z(Y)$, содержащее I_Y. Это подпространство называется и д е а л ь н ы м ц е н т р о м Y. Отметим, что относительно естественных структур $\mathrm{Orth}(Y)$ и $Z(Y)$ являются функциональными алгебрами; при этом $Z(Y)$ служит фундаментом в $\mathrm{Orth}(Y)$, а $\mathrm{Orth}(Y)$ – централизатором $Z(Y)$ в кольце $L^r(Y)$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Для положительного оператора $T \in L^r(Y)$ эквивалентны утверждения*:

(1) *T является ортоморфизмом*;

(2) *$T + I_Y$ является решеточным гомоморфизмом;*

(3) *$T + I_Y$ обладает свойством Магарам.*

2°. Пусть A – произвольное решеточно-упорядоченное кольцо (с положительной единицей). Пусть, далее, X является A-модулем, а Y – упорядоченным A-модулем. Все модули в этой работе считаются унитарными. Присоединим к Y наибольший элемент $+\infty$, положим $Y^\cdot = Y \cup \{+\infty\}$ и наделим $Y^\cdot$ естественной структурой A^+-полумодуля. Оператор $p\colon X \to Y^\cdot$ называется A-с у б л и н е й н ы м, если

$$p(\pi_1 x_1 + \pi_2 x_2) \leqslant \pi_1 p(x_1) + \pi_2 p(x_2), \quad x_1, x_2 \in X; \quad \pi_1, \pi_2 \in A^+.$$

Оператор p называется A^+-о д н о р о д н ы м, если $p(\pi x) = \pi p(x)$ для всех $x \in X$ и $\pi \in A^+$. Символом $\mathrm{Hom}_A(X, Y^\cdot)$ обозначим совокупность таким A-сублинейных операторов $p\colon X \to Y^\cdot$, что $\mathrm{dom}(p) = \{x \in X\colon p(x) < +\infty\}$ является подмодулем в X и след p на $\mathrm{dom}(p)$ является A-гомоморфизмом. Множество $\mathrm{Hom}_A(X, Y^\cdot)$ также наделяется естественной структурой A^+-полумодуля. Для произвольного сублинейного оператора $p\colon X \to Y^\cdot$ определим с у б д и ф ф е р е н ц и а л и с у б д и ф ф е р е н ц и а л в т о ч к е:

$$\partial^A(p) = \{T \in \mathrm{Hom}_A(X, Y^\cdot)\colon \ Tx \leqslant p(x), \ x \in X\};$$

$$\partial_x^A(p) = \{T \in \partial^A(p)\colon \ Tx = p(x)\}.$$

Поскольку X и Y являются $\mathbf{Z}$-модулями, то определен субдифференциал $\partial^{\mathbf{Z}}(p)$, который обозначается просто $\partial(p)$.

Говорят, что A-модуль Y обладает свойством A-продолжения, если для любого A-сублинейного оператора $p\colon X \to Y^{\cdot}$ такого, что $\mathrm{dom}(p) = X$, и любого A-подмодуля X_0 в X имеет место несимметричная формула Хана–Банаха

$$\partial^A(p + \delta_Y(X_0)) = \partial^A(p) + \partial^A(\delta_Y(X_0)),$$

где, как обычно, $\delta_Y(X_0)$ – индикаторный оператор X_0. Если при этом для всякого $x \in X$ субдифференциал $\partial_x^A(p)$ не пуст, то говорят, что A-модуль Y допускает выпуклый анализ.

3°. Группы, получающиеся из К-пространств при игнорировании умножений на вещественные числа, называются стертыми К-пространствами.

Условимся символом Y_b обозначать группу $Y^+ - Y^+$, где Y^+ – полугруппа положительных элементов в Y.

Предложение 2. *Если упорядоченный A-модуль Y обладает свойством A-продолжения, то Y_b является стертым К-пространством.*

Предложение 3. *Если A-модуль Y обладает свойством A-продолжения и для всех $y \in Y^+$ выполняется*

$$\pi_1\pi_2^+ y = (\pi_1\pi_2)^+ y, \quad \pi_2^+\pi_1 y = (\pi_2\pi_1)^+ y, \quad \pi_1 \in A^+, \quad \pi_2 \in A,$$

то естественное линейное представление A в Y_b является решеточным гомоморфизмом. При этом для всякого $\pi \in A^+$ имеет место свойство Магарам: $\pi[0, y] = [0, \pi y]$, $y \in Y^+$.

Замечание. Аналог предложения 2 в теории вееров установил А.Д. Иоффе. О случае $A = \mathbf{Z}$ см. также ([4]).

4°. Из наивного подхода к формуле Хана–Банаха ([5]) вытекает справедливость следующего необходимого в дальнейшем утверждения.

Предложение 4. *Пусть X – абелева группа ($\mathbf{Z}$-модуль), а Y – упорядоченный $\mathbf{Z}$-модуль, причем Y_b является К-пространством. Если $p\colon X \to Y^{\cdot}$ – некоторый $\mathbf{Z}$-сублинейный оператор, причем $\mathrm{dom}(p) = X$, то оператор $p_h(x) = \sup\{Tx\colon T \in \partial(p)\}$ является $\mathbf{Z}$-сублинейным и $\mathbf{Z}^+$-однородным. При этом*

$$\mathrm{dom}(p_h) = \mathrm{dom}(p), \quad \partial(p) = \partial(p_h), \quad \partial(p)(x) = [-p_h(-x), p_h(x)].$$

Более того, для каждого $x \in X$ множество $\partial_x(p_h)$ не пусто и

$$\partial_x(p_h) = \partial((p_h)'(x)), \quad (p_h)'(x)(x') = \inf_{m \in \mathbf{N}} (p_h(mx + x') - p_h(mx)).$$

Следствие. *Множество $\partial(p)$ является наименьшим субдифференциалом, содержащим все крайние точки $\partial(p)$ (ср. ([6])).*

5°. В этом пункте Y – упорядоченный A-модуль, причем Y_b является К-пространством, а A – подкольцом и подрешеткой кольца ортоморфизмов Y_b, естественно действующим в Y_b. Как обычно, символом $(Y^{\mathfrak{A}})_\infty$, где $\mathfrak{A}$ – произвольное множество, обозначается множество ограниченных Y-значных функций на $\mathfrak{A}$. Это множество наделяется естественной структурой A-модуля (A-подмодуля произведения $Y^{\mathfrak{A}}$).

Предложение 5. *Пусть положительный оператор $\alpha\colon (Y^{\mathfrak{A}})_\infty \to Y$ таков, что $\alpha\Delta_{\mathfrak{A}} = I_Y$, где $\Delta_{\mathfrak{A}}\colon Y \to (Y^{\mathfrak{A}})_\infty$ – естественное отождествление Y с диагональю $Y^{\mathfrak{A}}$. Тогда α является $\mathrm{Orth}(Y_b)$-гомоморфизмом.*

Предложение 6. *Для любого A-сублинейного оператора $p\colon X \to Y^{\cdot}$ такого, что $\mathrm{dom}(p) = X$, выполняется*

$$\partial(p) = \partial^A(p) = \partial^A(p_h) = \partial(p_h).$$

Следствие. *Оператор p_h является A^+-однородным.*

П р е д л о ж е н и е 7. *Пусть A-сублинейные операторы* p_1, p_2: $X \to Y^{\cdot}$ *таковы, что их эффективные множества* $\mathrm{dom}(p_1)$ *и* $\mathrm{dom}(p_2)$ *находятся в общем положении усиленно, т.е. для любого A-подмодуля* X_0 *в* X, *содержащего* $\mathrm{dom}(p_1) \cap \cap \mathrm{dom}(p_2)$, *выполняется*

$$X_0 = \mathrm{dom}(p_1) \cap X_0 - \mathrm{dom}(p_2) \cap X_0.$$

Имеет место симметричная формула Хана–Банаха

$$\partial^A(p_1 + p_2) = \partial^A(p_1) + \partial^A(p_2).$$

П р е д л о ж е н и е 8. *Пусть* $\pi \in A^+$ *и* $\pi \geqslant I_{Y_b}$. *Для* $\gamma \in A^+$ *положим*

$$[\pi^{-1}]\gamma = \inf\{\delta \in A^+ : \ \delta\pi \geqslant \gamma\}.$$

Тогда $[\pi^{-1}]$ – *возрастающий A-сублинейный оператор, причем* $\gamma = [\pi^{-1}]\pi\gamma$ *для всех* $\gamma \in A^+$.

Кольцо A называется п о ч т и-р а ц и о н а л ь н ы м, если для всякого $m \in \mathbf{N}$ найдется убывающая сеть (π_ξ) элементов A такая, что

$$0 \leqslant \pi_\xi \leqslant I_{Y_b}, \quad o\text{-}\lim_{\xi} \pi_\xi y = (1/m)y, \qquad y \in Y_b.$$

П р е д л о ж е н и е 9. *Пусть кольцо A почти-рационально. Тогда любой A-сублинейный оператор* $\mathbf{Z}^+$*-однороден.*

6°. С помощью приведенных выше предложений получаются следующие основные результаты.

Т е о р е м а 1. *Пусть A является d-кольцом, т.е.* $\pi_1\pi_2^+ = (\pi_1\pi_2)^+$ *и* $(\pi_2\pi_1)^+ = \pi_2^+\pi_1$ *для* $\pi_1 \in A^+$, $\pi_2 \in A$.

Упорядоченный A-модуль Y обладает свойством A-продолжения в том и только том случае, если Y_b *является стертым* К*-пространством и естественное представление A в* Y_b *является кольцевым и решеточным гомоморфизмом на подкольцо и подрешетку кольца ортоморфизмов* $\mathrm{Orth}(Y_b)$. *При этом имеет место симметричная формула Хана–Банаха. Более того, для любого A-сублинейного оператора* p: $X \to Y^{\cdot}$ *такого, что* $\mathrm{dom}(p) = X$, *выполняется* $\partial(p) = \partial^A(p)$.

З а м е ч а н и е. Условие на кольцо A можно изменить, но не ослабить, если желательно сохранить A^+-однородность $\mathbf{Z}^+$-однородного A-сублинейного оператора. Отметим также, что равенство $\partial(p) = \partial^A(p)$, в частности, означает, что свойство продолжения имеет место в усиленном виде, т.е. аддитивный оператор, определенный на подгруппе и мажорируемый p, допускает мажорированное продолжение до модульного гомоморфизма.

Т е о р е м а 2. *Упорядоченный A-модуль Y допускает выпуклый анализ в том и только том случае, если* Y_b *является стертым* К*-пространством и естественное линейное представление A в* Y_b *является решеточным гомоморфизмом на почти рациональное кольцо ортоморфизмов.*

Институт математики Сибирского отделения
Академии наук СССР, Новосибирск

Поступило
11 II 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *С.С. Кутателадзе*, УМН, т. 34, № 1, 167 (1979). [2] *W. Breckner, E. Scheiber*, Mathematica (RSR), v. 19, № 1, 13 (1977). [3] *W. Luxemburg, A. Schep*, Indag, math., v. 81, № 3, 357 (1978). [4] *A. Bigard*, Mathematica (RSR), v. 15, № 1, 15 (1973). [5] *F. Topsoe*, Comment. Math., Tomus Specialis, № 1, 316 (1978). [6] *С.С. Кутателадзе*, ДАН, т. 242, № 5, 1001 (1978).