ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1982

ТОМ 265 № 5

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

УДК 517.11 + 517.43 МАТЕМАТИКА

А.Г. КУСРАЕВ, С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ

АНАЛИЗ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ С ПОМОЩЬЮ БУЛЕВОЗНАЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

(Представлено академиком С.Л. Соболевым 19 I 1982)

Субдифференциал выпуклой функции (по внутренней точке) – это выпуклое слабо компактное множество. Значит, элементы наименьшего субдифференциала, содержащего слабо ограниченное множество, получаются последовательным применением операций взятия выпуклой оболочки и перехода к слабому пределу. При этом крайние точки возникающего субдифференциала лежат в замыкании исходного множества. Найти операторные варианты приведенных утверждений – это известная проблема локально-выпуклого анализа [1]. В настоящей работе дается ее решение с помощью явного представления элементов субдифференциала и его крайних точек особого рода "дисперсными интегралами" o-крайних точек [2]. Метод исследования – теория булевозначных моделей [3–5], связь которых с K-пространствами обнаружена в [6]. Доказательство основной теоремы использует выводимость теоремы Мильмана в ZFC и в этом смысле нестандартно. Стоит подчеркнуть, что большая часть приводимых ниже фактов обоснована обычными средствами. Можно сказать, что в работе показано, как центральные понятия субдифференциального исчисления для операторов возникают при внешней расшифровке соответствующих скалярных предшественников в подходящей модели теории множеств.

1°. Пусть X – вещественное векторное пространство, Y – некоторое K-пространство и $\mathcal{L}(X, Y)$ – пространство линейных операторов из X в Y. Сеть (T_ξ) в $\mathcal{L}(X, Y)$ называют поточечно r-сходящейся (соответственно o-сходящейся) к T из $\mathcal{L}(X, Y)$, если для каждого $x \in X$ сеть $(T_\xi x)$ сходится с регулятором (соответственно o-сходится) к Tx в Y. Для сублинейного оператора P: $X \to Y$ символом $\partial(P)$ обозначен субдифференциал P, т.е. $\partial(P) := \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : x \in X \to Tx \leqslant Px\}$. Субдифференциал $\partial(P)$ замкнут относительно поточечной r-сходимости. Возьмем разбиение единицы в Y, т.е. семейство (e_ξ) положительных попарно дизъюнктных проекторов такое, что $\sum\limits_\xi e_\xi = 1$, где 1 – единичный элемент базы $B := \mathbf{B}(Y)$ – тождественный оператор в Y. Если (T_ξ) – семейство в $\mathcal{L}(X, Y)$ и $Tx = \sum\limits_\xi e_\xi T_\xi x$ для всех $x \in X$, то T называют перемешиванием (T_ξ), отвечающим разбиению (e_ξ). Множество крайних точек $\mathrm{Ch}(P)$ субдифференциала $\partial(P)$ является сильно циклическим (= совпадает со своей сильно циклической оболочкой), т.е. выдерживает произвольные перемешивания своих элементов. Отметим, что множество $\mathcal{E}_0(P)$, составленное из o-крайних точек, не является, как правило, даже циклическим. Отметим также, что $\partial(P)$ является сильно операторно выпуклым множеством (= совпадает со своей сильно операторно выпуклой оболочкой), т.е. выдерживает образование комбинаций $\sum\limits_\xi \alpha_\xi T_\xi$, где $0 \leqslant \alpha_\xi \leqslant 1$, $T_\xi \in \partial(P)$ и $\sum\limits_\xi \alpha_\xi = 1$.

Рассмотрим произвольное непустое множество $\mathcal{A}$ и пусть $l_\infty(\mathcal{A}, Y) := (Y^{\mathcal{A}})_\infty$ – пространство, составленное из порядково ограниченных Y-значных функций на $\mathcal{A}$. Это пространство наделено естественной структурой модуля над кольцом ортоморфизмов Y. Символом $\epsilon_{\mathcal{A}}$ обозначают канонический (модульно) сублинейный оператор: $\epsilon_{\mathcal{A}}(f) := \sup f(\mathcal{A})$ для $f \in l_\infty(\mathcal{A}, Y)$. Соответственно для $a \in \mathcal{A}$ символом ϵ_a обозначена δ-функция $\epsilon_a(f) := f(a)$. Перемешивания семейства $(\epsilon_a)_{a \in \mathcal{A}}$ называют чистыми состояниями на $\mathcal{A}$. Полезно иметь в виду, что $\mathrm{Ch}(\epsilon_{\mathcal{A}}) = \mathcal{E}_0(\epsilon_{\mathcal{A}})$. Элементы указанного субдифференциала – это решеточные гомоморфизмы, сохраняющие константы [2].

2°. Пусть $V^{(B)}$ – универсум, построенный над булевой алгеброй B – базой (максимального расширения) K-пространства Y. В дальнейшем $V^{(B)}$ считается отделимым. Для $v \in V^{(B)}$ полагаем $v{\downarrow} := \{u \in V^{(B)} : [\![u \in v]\!] = 1\}$. Здесь, как обычно, $[\![\varphi]\!]$ – оценка формулы φ языка теории множеств. Отметим, что $v{\downarrow}$ является множеством, т.е. $v{\downarrow} \in V$, где V – универсум фон Неймана. Если, в свою очередь, $A \in V$ и $A \subset V^{(B)}$, то определим элемент $A{\uparrow}$ соотношением $\operatorname{dom} A{\uparrow} := A$, $\operatorname{rang} A{\uparrow} := 1$ (точнее говорить, что $A{\uparrow}$ – это выделенный представитель класса $\{v \in V^{(B)} : [\![v = A{\uparrow}]\!] = 1\}$). Для u, $v \in V^{(B)}$ и отображения f: $\operatorname{dom} u \to \operatorname{dom} v$, удовлетворяющего условию экстенсиональности $[\![a_1 = a_2]\!] \leqslant [\![f(a_1) = f(a_2)]\!]$, как известно [7], существует элемент $f{\uparrow} \in V^{(B)}$, для которого $[\![f{\uparrow} : u \to v]\!] = 1$ и $f{\uparrow}(a) = f(a)$ при $a \in \operatorname{dom} u$.

Пусть теперь $\mathcal{A} \in V$ и $\mathcal{A}^\vee$ – стандартное имя $\mathcal{A}$ в $V^{(B)}$, определенное схемой рекурсии: $\phi^\vee := \phi$, $\operatorname{dom} \mathcal{A}^\vee := \{a^\vee : a \in \mathcal{A}\}$, $\operatorname{rang} \mathcal{A}^\vee := 1$. Если $f: \mathcal{A} \to v{\downarrow}$, то, учитывая равенство $v = v{\downarrow}{\uparrow}$, можно считать f отображением $\operatorname{dom} \mathcal{A}^\vee$ в $\operatorname{dom} v$. Ясно, что f экстенсионально, а потому имеет смысл говорить о $f{\uparrow}$ из $V^{(B)}$. Отметим, что $[\![f\uparrow : \mathcal{A}^{\vee} \to v]\!] = 1$ и при этом для всякого $g \in V^{(B)}$, удовлетворяющего условию $[\![g : \mathcal{A}^{\vee} \to v]\!] = 1$, найдется единственное отображение $f : \mathcal{A} \to v\downarrow$, для которого $g = f\uparrow$.

3°. В силу принципа максимума в $V^{(B)}$ имеются объекты $\mathcal{R}$, $l_{\infty}(\mathcal{A}^{\vee}, \mathcal{R})$, $l_{\infty}(\mathcal{A}^{\vee}, \mathcal{R})^{\#}$, $\epsilon_{\mathcal{A}^{\vee}}$, ϵ_a, $\partial(\epsilon_{\mathcal{A}^{\vee}})$, для которых справедливо:

$[\![\mathcal{R}$ – это K-пространство вещественных чисел$]\!] = 1$;

$[\![l_{\infty}(\mathcal{A}^{\vee}, \mathcal{R})$ – это K-пространство ограниченных функций из $\mathcal{A}^{\vee}$ в $\mathcal{R}]\!] = 1$;

$[\![l_{\infty}(\mathcal{A}^{\vee}, \mathcal{R})^{\#}$ – это сопряженное к $l_{\infty}(\mathcal{A}^{\vee}, \mathcal{R})$ пространство$]\!] = 1$;

$[\![\epsilon_{\mathcal{A}^{\vee}}$ – это канонический оператор на $l_{\infty}(\mathcal{A}^{\vee}, \mathcal{R})]\!] = 1$;

$[\![\epsilon_a$ – это δ-функция в точке a из $\mathcal{A}^{\vee}]\!] = 1$;

$[\![\partial \subset \epsilon_{\mathcal{A}^{\vee}})$ – это субдифференциал $\epsilon_{\mathcal{A}^{\vee}}]\!] = 1$.

Известно [6], что $\mathcal{R}\downarrow$ "снижением операций" превращается в расширенное K-пространство над B. Отметим также, что

$$f\uparrow \in l_{\infty}(\mathcal{A}^{\vee}, \mathcal{R})\downarrow \Leftrightarrow f \in l_{\infty}(\mathcal{A}, \mathcal{R}\downarrow).$$

При этом $l_{\infty}(\mathcal{A}^{\vee}, \mathcal{R})\downarrow$ можно рассматривать, с одной стороны, как еще одну реализацию пространства $l_{\infty}(\mathcal{A}, \mathcal{R}\downarrow)$, а, с другой стороны, как $\operatorname{dom} l_{\infty}(\mathcal{A}^{\vee}, \mathcal{R})$. В частности,

$$\mu\uparrow \in l_{\infty}(\mathcal{A}^{\vee}, \mathcal{R})^{\#}\downarrow \Leftrightarrow \mu \text{ – это } \mathcal{R}\downarrow\text{-гомоморфизм } l_{\infty}(\mathcal{A}, \mathcal{R}\downarrow) \text{ в } \mathcal{R}\downarrow.$$

Кроме того, вычисления оценок показывают следующее:

$$\forall f \in l_{\infty}(\mathcal{A}, \mathcal{R}\downarrow) \ \ (f\uparrow(\mathcal{A}^{\vee}) = f(\mathcal{A})\uparrow \wedge \epsilon_{\mathcal{A}^{\vee}}(f\uparrow) = \epsilon_{\mathcal{A}}(f));$$

$$[\![\exists a \in \mathcal{A}^{\vee} \ (\mu\uparrow = \epsilon_a)]\!] = 1 \leftrightarrow \mu \text{ – чистое состояние на } \mathcal{A};$$

$$[\![[0, \mu\uparrow] = [0, 1^{\vee}]\mu\uparrow]\!] = 1 \Leftrightarrow [0, \mu] = [0, 1]\mu; \quad \mu\uparrow \in \partial(\epsilon_{\mathcal{A}^{\vee}})\downarrow \leftrightarrow \mu \in \partial(\epsilon_{\mathcal{A}}).$$

Основная теорема. *Каждая крайняя точка субдифференциала канонического оператора является поточечным r-пределом сети чистых состояний. Каждый элемент субдифференциала канонического оператора является поточечным r-пределом сети элементов сильно операторно выпуклой оболочки множества δ-функций.*

4°. Учитывая, что любой сублинейный оператор лишь "линейной заменой переменной" отличается от канонического оператора, с помощью основной теоремы можно получить искомые описания внутреннего строения субдифференциалов операторов.

Теорема 1. *Всякая крайняя точка служит поточечным r-пределом сильно циклической оболочки множества o-крайних точек.*

Теорема 2. *Крайние точки наименьшего субдифференциала, содержащего данное слабо порядково ограниченное множество $\mathcal{A}$, представляют собой поточечные r-пределы подходящих сетей перемешиваний $\mathcal{A}$.*

Теорема 3. *Слабо порядково ограниченное множество является субдифференциалом в том и только том случае, если оно операторно выпукло и поточечно o-замкнуто.*

Теорема 4. *Слабо порядково ограниченное множество является субдифференциалом в том и только том случае, если оно сильно циклично, выпукло и поточечно r-замкнуто.*

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
2 II 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.* – В кн.: Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1981, т. 19, с. 156–207. 2. *Кутателадзе С.С.* – Сиб. матем. журн., 1980, т. 21, № 1, с. 130–140. 3. *Takeuti G., Zaring W.* Axiomatic set theory. B.–H.–N.Y.: Springer, 1973, 238 p. 4. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973, 148 с. 5. *Манин Ю.И.* Доказуемое и недоказуемое. М.: Сов. радио, 1979, 166 с. 6. *Гордон Е.И.* – ДАН 1977, т. 237, № 4, с. 773–775. 7. *Takeuti G.* Two applications of logic to mathematics. Tokyo: Iwanami, 1978, 137 p.