ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1983

ТОМ 272 № 3

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

.Доклады Академии наук СССР

1983. Том 272, № 3

УДК 512.8 + 513.83 МАТЕМАТИКА

С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ

СПУСКИ И ПОДЪЕМЫ

(Представлено академиком А.Д. Александровым 10 I 1983)

Булевозначные модели теории множеств [1–3] в последние годы нашли новые приложения в задачах анализа (см., например, [4–8]). Такие приложения основаны на изучении способа изображения исследуемых объектов в нестандартном универсуме с помощью обычных множеств. Указанное изучение связано с естественными функториальными процедурами – спуском и подъемом. При спуске булевозначного объекта описывается набор составляющих его множеств. При подъеме решается обратная задача: ищутся условия, при которых исходный объект порождает булевозначное множество с необходимой структурой. Основной результат при этом состоит в реализации программы спуск–подъем, т.е. в обнаружении критериев систем, изоморфных спускам аналогичных образований в булевозначной модели. В настоящее время спуск–подъем осуществлен для булевых алгебр [9], для поля вещественных чисел [5], для K-пространств [10, 11] и в некоторых родственных случаях. Цель настоящей работы – реализация программы спуск–подъем для общих алгебраических систем.

Спуск и подъем множеств. Начнем с вспомогательных замечаний. Рассмотрим полную булеву алгебру B и обозначим $V^{(B)}$ отделимый универсум, построенный над B. Для формулы φ теории множеств Цермело–Френкеля фраза "x удовлетворяет φ внутри $V^{(B)}$" означает, что x – элемент $V^{(B)}$ и при этом $[\![\varphi(x)]\!] = 1$. Здесь, как обычно, $[\![\varphi]\!]$ – элемент алгебры B, представляющий оценку истинности φ, а 1 – единица B. Спуском элемента X из $V^{(B)}$ называют подмножество $X\!\downarrow$ в $V^{(B)}$ (символически: $X\!\downarrow \in \mathcal{P}(V^{(B)})$), определенное соотношением $X\!\downarrow := \{x \in V^{(B)}: [\![x \in X]\!] = 1\}$. В свою очередь, для $X \in \mathcal{P}(V^{(B)})$ определяют подъем $X\!\uparrow \in V^{(B)}$ как выделенный представитель класса, содержащего функцию $X \times \{1\}$. Очевидно, что для непустого внутри $V^{(B)}$ множества X будет $X\!\downarrow\uparrow = X$. В то же время множество $X\!\downarrow\uparrow$ для $X \in \mathcal{P}(V^{(B)})$ состоит из всевозможных перемешиваний элементов X, отвечающих разбиениям единицы в B. Это множество называют сильно циклической оболочкой X. В дальнейшем нам понадобятся элементы $\{x\}^B := \{x\}\!\uparrow$, $\{x, y\}^B := \{x, y\}\!\uparrow$, $\langle x, y\rangle^B := \{\{x\}^B, \{x, y\}^B\}\!\uparrow$ и т.п., связанные с $x, y \in V^{(B)}$ и представляющие в $V^{(B)}$ соответствующие классы. Индекс B в подобных записях ниже иногда опущен. Отметим здесь же, что символом $x^\wedge$ обозначается стандартное имя множества x, определенное схемой рекурсии $x^\wedge := X\!\uparrow$, $X := \{y^\wedge : y \in x\}$.

Спуск и подъем соответствий. Прежде всего напомним, что для соответствия F из X в Y, т.е. для подмножества F в $X \times Y$, и для любого подмножества A в X поляра $\pi_F(A)$ определена правилом

$$\pi_F(A) := \{y \in Y: F^{-1}(y) \supset A\} = \{y \in Y: (\forall a \in A)\langle a, y\rangle \in F\}.$$

Предложение 1. *Пусть F – соответствие из X в Y внутри $V^{(B)}$. Существует и притом единственное соответствие $F\!\downarrow$ из $X\!\downarrow$ в $Y\!\downarrow$ такое, что для любого непустого подмножества A множества X внутри $V^{(B)}$ выполнено $F(A)\!\downarrow = F\!\downarrow(A\!\downarrow)$.*

При этом $\pi_F(A)\downarrow = \pi_{F\downarrow}(A\downarrow)$ *и, кроме того,* $[\![\langle x, y\rangle^B \in F]\!] = 1 \leftrightarrow \langle x, y\rangle \in F\downarrow$.

Соответствие $F\downarrow \subset X\downarrow \times Y\downarrow$ называют с п у с к о м F. Нетрудно видеть, что спуск можно рассматривать как ковариантный функтор из категории соответствий внутри $V^{(B)}$ в обычную категорию соответствий.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* $X, Y \in \mathcal{P}(V^{(B)})$ *и* F *– соответствие из* X *в* Y. *Существует и притом единственное соответствие* $F\uparrow$ *из* $X\uparrow$ *в* $Y\uparrow$ *внутри* $V^{(B)}$ *такое, что* $F\uparrow(A\uparrow) = F(A)\uparrow$ *для каждого* $A \subset X$ *в том и только том случае, если* F *экстенсионально, т.е. удовлетворяет условию*

$$y_1 \in F(x_1) \to [\![x_1 = x_2]\!] \leqslant \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![y_1 = y_2]\!].$$

Соответствие $F\uparrow$ порождается подъемом множества $F' := \{\langle x, y\rangle^B : \langle x, y\rangle \in F\}$, т.е. $F\uparrow = F'\uparrow$ и называется п о д ъ е м о м F. Полезно отметить, что суперпозиция $G \circ F$ экстенсиональных соответствий экстенсиональна и при этом $G \circ F\uparrow = G\uparrow \circ F\uparrow$.

П р е д л о ж е н и е 3. *Для непустого внутри* $V^{(B)}$ *соответствия* F *выполнено* $F\downarrow\uparrow = F$. *Для каждого экстенсионального соответствия* $F \subset X \times Y$ *и элемента* $x \in X$ *верно* $F\uparrow\downarrow(x) = F(x)\uparrow\downarrow$. *При этом для непустого подмножества* A *в* X *справедливы равенства*

$$\pi_{F\uparrow\downarrow}(A) = \pi_{F\uparrow}(A\uparrow)\downarrow, \quad \pi_{F\uparrow\downarrow}(A)\uparrow = \pi_{F\uparrow}(A\uparrow).$$

П р е д л о ж е н и е 4. *Пусть* F *– соответствие из* $X\downarrow$ *в* $Y\downarrow$ *для* $X, Y \in V^{(B)}$. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) F *экстенсионально и* $F\uparrow\downarrow = F$;

2) *имеет место равенство* $F' = F'\uparrow\downarrow$;

3) *для каждого* $x \in X\downarrow$ *верно* $F(x) = F(x)\uparrow\downarrow$ *и при* $b \in B$ *будет* $F \circ \sigma_{X\downarrow}(b) \subset \sigma_{X\downarrow}(b) \circ F$, *где* $\sigma_Z(b) := \{\langle z_1, z_2\rangle \in Z^2 : [\![z_1 = z_2]\!] \geqslant b\}$.

Указанные в этом пункте факты естественным образом обобщаются на случай многоместных соответствий.

Э к с т е н с и о н а л ь н ы е а л г е б р ы. Перейдем к реализации программы спуск–подъем для алгебраических систем. Удобно начать со случая универсальных алгебр.

Пусть $\Sigma := \langle F, \mu\rangle$ – некоторая сигнатура и $\mathfrak{X} := \langle X, \nu^{\mathfrak{X}}\rangle$ – алгебра сигнатуры Σ с носителем X и интерпретацией $\nu^{\mathfrak{X}}$. Иными словами, F – множество символов операций, а $\mu: F \to \omega$ – отображение, указывающее целое числое – арность – $\mu(f)$ операции $\nu^{\mathfrak{X}}(f)$ в множестве X для каждого $f \in F$. Алгебру $\mathfrak{X}$ называют э к с т е н с и о н а л ь н о й, если X является подмножеством универсума $V^{(B)}$ и, кроме того, для каждого $f \in F$ функция $\nu^{\mathfrak{X}}(f): X^{\mu(f)} \to X$ экстенсиональна.

П р е д л о ж е н и е 5. *Алгебра* $\mathfrak{X}$ *с носителем* X *является экстенсиональной в том и только том случае, если отображение* $\rho_{\mathfrak{X}}: b \to \sigma_X(b')$, *где* b' *– дополнение* b, *действует из алгебры* B *в множество* $\mathrm{Cong}(\mathfrak{X})$ *конгруэнций* $\mathfrak{X}$. *При этом отображение* $\rho_{\mathfrak{X}}$ *сохраняет произвольные непустые пересечения*: $\phi \neq B_0 \subset B \to \rho_{\mathfrak{X}}(\inf B_0) = \cap\{\rho_{\mathfrak{X}}(b_0) : b_0 \in B_0\}$ *и множество* $\rho_{\mathfrak{X}}(0)$ *совпадает с тождественным отношением* I_X (*здесь* $0 := 1'$ *– наименьший элемент* B).

Приведенное предложение в некотором смысле можно обратить.

П р е д л о ж е н и е 6. *Пусть* $\mathfrak{Y}$ *– некоторая алгебра сигнатуры* Σ *с носителем* Y. *Пусть, далее, задано отображение* $\rho: B \to \mathrm{Cong}(\mathfrak{Y})$, *сохраняющее произвольные непустые пересечения и такое, что* $\rho(0) = I_Y$.

Тогда существуют экстенсиональная алгебра $\mathfrak{X}$ *сигнатуры* Σ *и мономорфизм* χ *из алгебры* $\mathfrak{Y}$ *в алгебру* $\mathfrak{X}$, *для которых*

$$\langle y_1, y_2\rangle \in \rho(b) \leftrightarrow \langle \chi(y_1), \chi(y_2)\rangle \in \rho_{\mathfrak{X}}(b)$$

при каждом $b \in B$ *и произвольных* $y_1, y_2 \in Y$.

Спуск и подъем алгебраических систем. Разберем теперь общую конструкцию.

Пусть $\Sigma := \langle R, F, \mu\rangle$ – некоторая сигнатура и $\mathfrak{X}$ представляет собой алгебраическую систему сигнатуры $\Sigma^\wedge$ внутри $V^{(B)}$. Иначе говоря, $\mathfrak{X}$ – это объект булевозначного универсума $V^{(B)}$, являющийся B-парой: $\mathfrak{X} = \langle X, \nu^{\mathfrak{X}}\rangle^B$, где элементы $X, \nu^{\mathfrak{X}} \in V^{(B)}$ играют соответственно роли носителя $\mathfrak{X}$ и интерпретации $\Sigma^\wedge$ в X внутри $V^{(B)}$. Для $r \in R$ и $f \in F$ ясно, что

$[\![\nu^{\mathfrak{X}}(r^\wedge)$ – это $\mu^\wedge(r^\wedge)$-местное отношение в $X]\!] = 1$;

$[\![\nu^{\mathfrak{X}}(f^\wedge)$ – это $\mu^\wedge(f^\wedge)$-местная операция на $X]\!] = 1$.

Определяем теперь отображение ν, полагая

$$\nu\downarrow(r) := \nu^{\mathfrak{X}}(r^\wedge)\downarrow, \quad \nu\downarrow(f) := \nu^{\mathfrak{X}}(f^\wedge)\downarrow,$$

где $\nu^{\mathfrak{X}}(r^\wedge)\downarrow$ и $\nu^{\mathfrak{X}}(f^\wedge)\downarrow$ – спуски отношения $\nu^{\mathfrak{X}}(r^\wedge)$ и функции $\nu^{\mathfrak{X}}(f^\wedge)$ внутри $V^{(B)}$ соответственно. Возникающая алгебраическая система сигнатуры Σ с носителем $X\downarrow$ и с интерпретацией $\nu\downarrow$ называется с п у с к о м исходной системы $\mathfrak{X}$ и обозначается $\mathfrak{X}$. Таким образом, $\mathfrak{X}\downarrow = \langle X\downarrow, \nu\downarrow\rangle$.

Полезно подчеркнуть, что в спущенной алгебраической системе возникают дополнительные операции – перемешивания элементов и дополнительные отношения эквивалентности – "равенства B-множеств на элементе $b \in B$". Таким образом, спущенная система богаче исходной – она представляет собой некоторое ее расширение посредством булевой алгебры B. Дадим точное определение.

Алгебраическую систему $\mathfrak{H} := \langle Y, \nu^{\mathfrak{H}}\rangle$ сигнатуры $\Sigma := (R, F, \mu)$ называют расширенной с помощью полной булевой алгебры B и отображения ρ, или, короче, B-р а с ш и р е н н о й п о с р е д с т в о м ρ, если ρ действует из B в множество конгруэнций $\mathrm{Cong}(\mathfrak{H})$ (универсальной алгебры, ассоциированной с $\mathfrak{H}$) и при этом выполнены следующие условия:

1) отображение ρ сохраняет произвольные непустые пересечения и, кроме того, $\rho(0) = I_Y$;

2) $\mathfrak{H}$ является ρ-с и л ь н о ц и к л и ч е с к о й а л г е б р о й, т.е. для любого разбиения $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ единицы в B, т.е. семейства элементов b_ξ алгебры B, для которого $b_\xi \wedge b_\eta = 0$ при $\xi \neq \eta$ и $\sup_{\xi\in\Xi} b_\xi = 1$, и произвольного семейства $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов носителя Y существует единственный элемент y из Y, удовлетворяющий соотношениям $\langle y, y_\xi\rangle \in \rho(b'_\xi)$ для $\xi \in \Xi$ и называемый ρ-п е р е м е ш и в а н и е м $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$;

3) для каждого $r \in R$ отношение $\nu^{\mathfrak{H}}(r)$ является ρ-с и л ь н о ц и к л и ч е с к и м, т.е. устойчивым относительно всевозможных покоординатных ρ-перемешиваний семейств своих элементов.

Т е о р е м а. *Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторая B-расширенная посредством ρ алгебраическая система сигнатуры Σ. Существуют алгебраическая система $\mathfrak{X}$ сигнатуры $\Sigma^\wedge$ внутри $V^{(B)}$ и изоморфизм χ системы $\mathfrak{H}$ на спуск $\mathfrak{X}\downarrow$ такие, что выполнено условие согласования*:

$$\langle y_1, y_2\rangle \in \rho(b) \leftrightarrow \langle \chi(y_1), \chi(y_2)\rangle \in \rho_{\mathfrak{X}\downarrow}(b)$$

для произвольного $b \in B$ и любых y_1, y_2 из носителя $\mathfrak{H}$. Система $\mathfrak{X}$ единственна с точностью до изоморфизма внутри $V^{(B)}$, т.е. любая алгебраическая система X сигнатуры $\Sigma^\wedge$ внутри $V^{(B)}$, для которой имеется изоморфизм $\mathfrak{H}$ на спуск $X\downarrow$, удовлетворяющий условию согласования, обладает изоморфизмом на $\mathfrak{X}$ внутри $V^{(B)}$.

Институт математики Сибирского отделения
Академии наук СССР, Новосибирск

Поступило
20 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bell J.* Boolean-valued models and independence proofs in set theory. Oxford: Clarendon Press, 1979. 126 p. 2. *Takeuti G., Zaring W.* Axiomatic set theory. B.; H.; N.Y.; Springer, 1973. 238 p. 3. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973. 148 с. 4. *Takeuti G.* Two applications of logic to mathematics. Tokyo: Iwanami, 1978. 137 p. 5. *Гордон Е.И.* – ДАН, 1977, т. 237, № 4, с. 773–775. 6. *Гордон Е.И., Любецкий В.А.* – ДАН, 1981, т. 256, № 5, с. 1037–1041. 7. *Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.* – ДАН, 1982, т. 265, № 5, с. 1061–1064. 8. *Кусраев А.Г.* – ДАН, 1982, т. 266, № 6, с. 1312–1316. 9. *Solovay R., Tennenbaum S.* – Ann. Math., 1971, vol. 94, № 2, p. 201–240. 10. *Гордон Е.И.* – ДАН, 1981, т. 258, № 4, с. 777–780. 11. *Кусраев А.Г.* Некоторые применения теории булевозначных моделей в функциональном анализе. Новосибирск, 1982. 42 с.