ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1985

ТОМ 284 № 3

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

УДК 513.83 МАТЕМАТИКА

С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ

НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ КАСАТЕЛЬНЫХ КОНУСОВ

(Представлено академиком А.Д. Александровым 18 VII 1984)

Построение Кларком субдифференциала липшицевой функции [1] положило начало поиску новых способов локальной аппроксимации произвольных функций и множеств. Возникающие касательные конусы и отвечающие им субдифференциалы определяются громоздкими, трудно обозримыми формулами [2–8]. Каков статут имеющихся аппроксимаций? Откуда возник конус Кларка? Как регулярно строить аппроксимирующие конусы и оперировать с ними? Цель настоящей статьи – дать ответы на эти вопросы. Точнее говоря, ниже удалось показать, что для исследования субдифференциалов произвольных функций наиболее приспособлен нестандартный анализ, представляющий собой эффективную технику убивания кванторов. В работе приводятся компактные нестандартные критерии классических аппроксимирующих конусов и описываются неизвестные ранее касательные, в том числе и кларковского типа.

П р е д в а р и т е л ь н ы е с о г л а ш е н и я. В дальнейшем мы работаем в подходящей нестандартной модели анализа с достаточно сильной степенью насыщения. Для определенности можно считать, что всё происходит в рамках теории внешних множеств Хрбачека [9] с сильной аксиомой идеализации. При этом для экономии места параметры формальной записи следующего текста считаются стандартными.

Итак, пусть X – вещественное векторное пространство, F – некоторое его подмножество и x', h' – точки X (в соответствии со сделанным соглашением эти объекты – стандартные множества). В X выделены два фильтра N_σ и N_τ, составленные из некоторых надмножеств нуля. Пусть, далее $\mu(\sigma)$ и $\mu(\tau)$ – м о н а д ы указанных фильтров, т.е. пересечения их стандартных элементов. Пишем $x \approx_\sigma x'$ вместо $x - x' \in \mu(\sigma)$. Аналогично понимаем запись $h \approx_\tau h'$. Наконец бесконечную малость скаляра α обозначаем обычным символом: $\alpha \approx 0$. Ниже считается, что N_σ порождает векторную топологию σ в X, а фильтр N_τ задает в X структуру п о ч т и - т о п о л о г и ч е с к о г о в е к т о р н о г о п р о с т р а н с т в а. Последнее означает, что монада $\mu(\tau)$ является внешним векторным пространством над внешним полем стандартных вещественных чисел. Условимся также о следующих сокращениях:

$$\forall x\, \varphi := \forall_\sigma x\, \varphi := \forall x\ (x \in F \wedge x \approx_\sigma x') \to \varphi;$$

$$\forall h\, \varphi := \forall_\tau h\, \varphi := \forall h\ (h \in X \wedge h \approx_\tau h') \to \varphi;$$

$$\forall \alpha\, \varphi := \forall \alpha\ (\alpha > 0 \wedge \alpha \approx 0) \to \varphi.$$

Двойственным образом вводятся кванторы $\exists x$, $\exists h$, $\exists \alpha$.

К о н у с Б у л и г а н а – конус внешних касательных – определяется соотношением

$$\mathrm{Bo}(F, x') := \bigcap_{\substack{U \in N_\sigma(x') \\ \alpha'}} \mathrm{cl}_\tau \bigcup_{\substack{x \in F \cap U \\ 0 < \alpha \leqslant \alpha'}} \frac{F - x}{\alpha},$$

где $N_\sigma(x') := x' + N_\sigma$. Конус Булигана представляет собой стандартизацию $\exists\exists\exists$- к онуса, т.е. для стандартного элемента h' выполняется

$$h' \in \mathrm{Bo}(F, x') \longleftrightarrow \exists x\, \exists \alpha\, \exists h \quad x + \alpha h \in F.$$

Конус Адамара – конус внутренних касательных

$$\mathrm{Ha}(F, x') := \bigcup_{\substack{U \in N_\sigma(x') \\ \alpha'}} \mathrm{int}_\tau \bigcap_{\substack{x \in F \cap U \\ 0 < \alpha \leqslant \alpha'}} \frac{F - x}{\alpha}$$

– это стандартизация $\forall\forall\forall$-конуса, т.е.

$$h' \in \mathrm{Ha}\,(F, x') \longleftrightarrow \forall x\, \forall \alpha \forall h \quad x + \alpha h \in F.$$

Конус Кларка задается соотношением

$$\mathrm{Cl}\,(F, x') := \bigcap_{V \in N_\tau} \bigcup_{\substack{U \in N_\sigma(x') \\ \alpha'}} \bigcap_{\substack{x \in F \cap U \\ 0 < \alpha \leqslant \alpha'}} \left(\frac{F - x}{\alpha} + V \right)$$

и является стандартизацией $\forall\forall\exists$-конуса, т.е.

$$h' \in \mathrm{Cl}\,(F, x') \longleftrightarrow \forall x\, \forall \alpha\, \exists h \quad x + \alpha h \in F.$$

Конусы классического инфинитезимального ряда. Взгляд на приведенные нестандарные критерии конусов Булингана, Адамара и Кларка показывает, что эти конусы взяты из перечня восьми возможных конусов с инфинитезимальной приставкой $Qx\, Q\alpha\, Qh$ (здесь Q – либо $\forall$ либо $\exists$). Ясно, что для полного описания всех этих конусов достаточно привести стандартные представления для стандартизаций $\forall\exists\exists$-конуса и $\forall\exists\forall$-конуса. В очевидных образных обозначениях в первом случае имеем

$$\forall\exists\exists(F, x') = \bigcap_{\substack{\alpha' \\ V \in N_\tau}} \bigcup_{U \in N_\sigma(x')} \bigcap_{x \in F \cap U} \left(V + \bigcup_{0 < \alpha \leqslant \alpha'} \frac{F - x}{\alpha} \right).$$

Во втором случае ситуация сложнее: справедливы оценки

$$\exists U \in N_\sigma(x') \quad \exists V \in N_\tau \quad \exists \alpha\colon F \cap U \to (0, 1] \quad \lim_{N_\sigma(x')} \alpha(x') = 0$$

$$\forall x \in F \cap U \quad \forall h \in h' + V \quad x + \alpha(x) h \in F \to h' \in \forall\exists\forall(F, x') \to$$

$$\to \forall \alpha' \;\; \exists U \in N_\sigma(x') \quad \exists V \in N_\tau \quad \exists \alpha\colon F \cap U \to (0, \alpha']$$

$$\forall x \in F \cap U \quad \forall h \in h' + V \quad x + \alpha(x) h \in F.$$

Конусы полного инфинитезимального ряда. Помимо указанных восьми инфинитезимальных конусов имеется еще девять пар конусов, содержащих конус Адамара и лежащих в конусе Булигана. Такие конусы, понятно, порождаются изменением порядка кванторов. Шесть новых пар устроены сложным образом по типу $\forall\exists\forall$-конуса. Прочие порождаются перестановками и дуализациями конуса Кларка и $\forall\exists\exists$-конуса. Например,

$$\forall \alpha\, \forall h\, \exists x(F, x') = \bigcap_{U \in N_\sigma(x')} \bigcup_{\alpha'} \mathrm{int}_\tau \bigcap_{0 < \alpha \leqslant \alpha'} \bigcup_{x \in F \cap U} \frac{F - x}{\alpha};$$

$$\exists h\, \forall x\, \forall \alpha(F, x') = \bigcup_{\substack{U \in N_\sigma(x') \\ \alpha'}} \mathrm{cl}_\tau \bigcap_{\substack{0 < \alpha \leqslant \alpha' \\ x \in F \cap U}} \frac{F - x}{\alpha}.$$

Последний конус уже конуса Кларка и выпуклый, если $\mu(\sigma) + \alpha\mu(\tau) \subset \mu(\sigma)$ для каждого положительного бесконечно малого α.

О б о б щ е н н ы й к о н у с К л а р к а. С качественной точки зрения аппроксимирующие конусы представляют собой результаты разглядывания множества в микроскопе. Таким образом, говорить о точном вхождении элемента в множество не вполне естественно. В этой связи фиксируем еще один стандартный фильтр N_θ надмножеств нуля и соответствующее внешнее отношение $\approx_\theta$.

Положим

$$\mathrm{Cl}^{\approx}(F, x') := \bigcap_{\substack{V \in N_\tau \\ W \in N_\theta}} \ \bigcup_{\substack{U \in N_\sigma(x') \\ \alpha'}} \ \bigcap_{\substack{x \in F \cap U \\ 0 < \alpha \leqslant \alpha'}} \left(\frac{F + W - x}{\alpha} + V \right).$$

Иными словами, справедливо утверждение

$$h' \in \mathrm{Cl}^{\approx}(F, x') \longleftrightarrow \forall x \, \forall \alpha \, \exists h \, \exists y \in F \quad x + \alpha h \approx_\theta y.$$

Очевидно, что введенный конус шире конуса Кларка, τ-замкнут и совпадает с конусом Кларка, если N_θ – фильтр всех надмножеств нуля. Полезно подчеркнуть, что если фильтр N_θ недостаточно тонок (= содержит мало множеств), конус $\mathrm{Cl}^{\approx}(F, x')$ чересчур широк (= совпадает с X).

Пусть для любого положительного бесконечно малого α *выполнено* $\mu(\sigma) + \alpha\mu(\tau) + \mu(\theta) \subset \mu(\sigma)$. *Тогда конус* $\mathrm{Cl}^{\approx}(F, x')$ *выпуклый и справедлива формула Рокафеллара*

$$\forall\forall\forall\exists(F, x') + \mathrm{Cl}^{\approx}(F, x') \subset \forall\forall\forall\exists(F, x'),$$

где выпуклый конус $\forall\forall\forall\exists(F, x')$ *определен соотношением*

$$h' \in \forall\forall\forall\exists(F, x') \longleftrightarrow \forall x \, \forall \alpha \, \forall h \, \exists y \in F \quad x + \alpha h \approx_\theta y.$$

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
2 VIII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Clarke F.* – Trans. Amer. Math. Soc., 1975, vol. 205, p. 247–262. 2. *Sachs E.* – Math. Oper. Stat., 1978, vol. 9, № 4, p. 497–513. 3. *Hiriart-Urruty J.* – Math. Oper. Res., 1979, vol. 4, № 1, p. 79–97. 4. *Rockafellar R.* – Canad. J. Math., 1980, vol. 32, № 2, p. 257–280. 5. *Ioffe A.* – Trans. Amer. Math. Soc., 1981, vol. 266, № 1, p. 1–56. 6. *Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.* В кн.: Современные проблемы математики. М., 1982, т. 19, с. 156–207. 7. *Dolecki Sz.* – Ann. mat. pure ed appl., 1982, vol. 80, № 4, p. 223–255. 8. *Penot J.-P.* – J. Math. Anal. Appl., 1983, vol. 93, № 2, p. 400–417. 9. *Hrbacek K.* – Fund. math., 1978, vol. 98, № 1, p. 1–24.