ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТОМ VIII, № 4

Отдельный оттиск

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА И ТЕХНИКА»

МИНСК 1972

АПРЕЛЬ 1972 г., ТОМ VIII, № 4

УДК 517.913

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ, А. М. РУБИНОВ

В работах [1, 2] Р. Беллман и Р. Калаба предложили для исследования и решения некоторых дифференциальных уравнений так называемый метод квазилинеаризации. В частности, для задачи Коши

$$y'=f(y)+p(x)y+g(x);\quad y(x_0)=y_0,$$

где f—вогнутая гладкая функция, этот метод позволяет явно выписать решение с помощью квадратур и перехода к минимуму (операции «min»).

В настоящей заметке рассматривается задача Коши

$$y'=f(x,y);\ y(x_0)=y_0, \tag{1}$$

где f—функция, определенная в прямоугольнике $[a, b]\times[c, d]$, непрерывная там и имеющая непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Предполагается также, что на промежутке $[a, b]$ задача (1) имеет решение. Показано, что решение этой задачи может быть явно выражено через квадратуры и операцию «max min». При этом, помимо техники квазилинеаризации, используется тот факт, что конус вогнутых квадратных трехчленов на отрезке $[c, d]$ супремально порождает пространство $C([c, d])$.

Последнее означает, что для любой непрерывной на $[c, d]$ функции g найдется множество G, состоящее из квадратных трехчленов $h(y)=a_1y^2+a_2y+a_3$, где $a_1\leqslant 0$ такое, что

$$g(y)=\sup_{h\in G} h(y)\quad (y\in[c, d]).$$

Если, кроме того, g дважды непрерывно дифференцируема, то для $y\in[c, d]$ имеет место следующее легко проверяемое тождество:

$$g(y)=\max_{c<t<d}[-k(y-t)^2+g'(t)(y-t)+g(t)], \tag{2}$$

где $k\geqslant \max\left\{0, \max\limits_{c<y<d}\left[-\frac{1}{2}g''(y)\right]\right\}$. При этом максимум в (2) реализуется при $t=y$.

Рассмотрим функцию f, фигурирующую в (1), и пусть K—произвольное положительное число, обладающее лишь тем свойством, что

$$K\geqslant \max_{a<x<b,\ c<y<b}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right].$$

Тогда, как следует из (2),

$$f(x, y)=\max_{c<t<d}\left[-K(y-t)^2+\frac{\partial f}{\partial y}(x, t)(y-t)+f(x, t)\right]$$

$$(a\leqslant x\leqslant b;\quad c\leqslant y\leqslant d).$$

Полученное равенство позволяет переписать задачу (1) в виде

$$y'=\max_{v\in V}\left[-K(y-v)^2+\frac{\partial f}{\partial y}(x, v)(y-v)+f(x, v)\right];\ y(x_0)=y_0, \tag{3}$$

где V—совокупность всех непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $[a, b]$ и со значениями в $[c, d]$. При этом максимум в (3) достигается на функции y, являющейся решением задачи (1). Из теоремы Пикара следует, что найдется отрезок $[a', b']$ ($x_0 \in [a', b'] \subset [a, b]$) такой, что при каждом $v \in V$ уравнение Риккати

$$z' = -K(z-v)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)(z-v) + f(x, v)$$

имеет решение z_v, удовлетворяющее начальному условию $z_v(x_0) = y_0$ и определенное на $[a', b']$. Указанное решение, следуя Беллману и Калабе [2], представимо в виде

$$z_v(x) = \min_{w \in W} u(v, w, x), \tag{4}$$

где $u = u(v, w, x)$ есть решение (при начальном условии $u(x_0) = y_0$) следующего линейного уравнения:

$$u' = \left[-2K(v-w) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)\right]u + K(w^2 - v^2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)v + f(x, v), \tag{5}$$

а множество W совпадает с пространством $C^1([a', b'])$ всех непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $[a', b']$.

Как следует из (3), при любом $v \in V$ задача (1) может быть записана в виде

$$y' = -K(y-v)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)(y-v) + f(x, v) + p(x),\ y(x_0) = y_0,$$

где p — неотрицательная непрерывная функция. Снова применяя квазилинеаризацию, получим, что

$$y(x) = \min_{w \in W} u_p(v, w, x), \tag{6}$$

где $u_p = u_p(v, w, x)$ есть решение (при начальных данных $u_p(x_0) = y_0$) линейного уравнения, отличающегося от (5) лишь новым слагаемым $p(x)$, добавленным к правой части. Используя (4) и (6), имеем

$$y(x) = \min_w u_p(v, w, x) = \min_w \, u(v, w, x) +$$

$$+ \left(\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\left[K(w-v) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)\right]dx\right) \times\right.$$

$$\left.\times \int_{x_0}^{x} p(x)\left(\exp\int_{x_0}^{x}\left[2K(w-v) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)\right]dx\right)dx\right) \geqslant \min_w u(v, w, x) = z_v(x). \tag{7}$$

Таким образом, для всех $v \in V$

$$y(x) \geqslant z_v(x).$$

Заметим теперь, что $y \in V$, причем поскольку максимум в (3) реализуется при $v = y$, то $z_y = y$. Из сказанного вытекает соотношение

$$y(x) = \max_{v \in V} z_v(x). \tag{8}$$

Мы показали, таким образом, что имеет место следующая

Теорема. *Решение y задачи (1), определенное на промежутке $[a', b']$, имеет вид*

$$y(x) = \max_{v \in V} \ \min_{w \in W} u(v, w, x), \tag{9}$$

где V—совокупность всех непрерывно дифференцируемых функций, отображающих $[a', b']$ в $[c, d]$, $W = C^1([a, b])$, $u(v, w, x)$ — решение линейного уравнения (5) при начальном условии $u(x_0) = y_0$. При этом максмин в формуле (9) достигается при $v = w = y$.

Сделаем теперь несколько замечаний.

Замечание 1. Из представления (8) немедленно могут быть получены оценки решения задачи (1) через решение уравнений Риккати.

Замечание 2. Используя те или иные априорные оценки решения задачи (1), множества V и W, фигурирующие в формуле (9), можно сузить.

Замечание 3. Из представления (8) можно извлечь следующую итеративную («риккатизированную») схему:

$$y'_{n+1} = -K(y_{n+1}-y_n)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y_n)(y_{n+1}-y_n) + f(x,\ y_n),\quad y_{n+1}(x_0) = y_0.$$

Замечание 4. Конструкция, излагаемая в работе, может быть приложена и к ряду уравнений в частных производных (ср. с [1]).

Замечание 5. Переход от задачи (1) к уравнениям Риккати существенно опирался на то обстоятельство, что конус вогнутых квадратных трехчленов супремально порождает пространство $C([c,\ d])$. Отметим, что в $C([c,\ d])$ существуют и другие конусы вогнутых функций, натянутые на конечное число образующих и супремально порождающие $C([c,\ d])$. Например, на промежутке $\left[\varepsilon,\ \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$ $\left(0<\varepsilon<\frac{\pi}{4}\right)$ вместо квадратных трехчленов можно рассматривать функции $a_1\sin x + a_2\cos x + a_3$ $(a_1,\ a_2 \geqslant 0)$.

Литература

1. Kalaba R. On nonlinear differential equations, the maximum operation and monotone convergence. J. Math. Mech. 8, 4, 519—574, 1959.

2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., «Мир», 1968.

Поступила в редакцию
27 ноября 1970 г.

Институт математики СО
АН СССР