В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ
ПРОСТРАНСТВАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА"
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Под редакцией *Г. П. Акилова*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск, 1977

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПОРЯДОЧЕННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Г. П. Акилов, С. С. Кутателадзе

Теория упорядоченных векторных пространств, вступившая в свое пятое десятилетие, занимает достойное место в здании функционального анализа. Разумность концепций, положенных в ее основу, многообразие разветвлений, глубина и простота понятий и результатов, наконец, наличие естественных порядков во многих классических пространствах — объектах анализа делают эту теорию жизненной. В то же время взаимодействие теории упорядоченных векторных пространств с другими разделами функционального анализа далеко не всегда отвечает реальным потребностям в нем. С нашей точки зрения, последние годы характеризуются упрочением и углублением связей различных разделов анализа. Этот процесс заметен и в области упорядоченных пространств. Подчеркнуть некоторые из таких связей, наметить возникающие перспективы — вот цель настоящего обсуждения.

Разумеется, последующий текст ни в коей мере не претендует на полноту и в большинстве случаев на оригинальность. Оригинальное и полное раскрытие избранной нами темы вряд ли вообще возможно. Здесь мы ограничиваемся лишь немногими из задач, входящих в последнее время в круг наших личных интересов. При этом основное внимание мы старались уделить качественной стороне дела. Этим объясняются незначительное число формальных рассуждений и сознательная тривиализация примеров.

1. Проблема продолжения. Одними из самых первых и ярких приложений теории упорядоченных векторных пространств к задачам классического анализа в банаховых пространствах явились результаты о роли структуры порядка в проблеме продолжения линейных операторов.

Исследования в этом направлении интенсивно ведутся и в последние годы. Такое положение связано с фундаментальной ролью теоремы Хана — Банаха — одного из основных принципов современного линейного анализа.

Напомним, что при рассмотрении операторов, в отличие от функционалов, две основные формы теоремы Хана — Банаха: теорема о мажорируемом продолжении и теорема о продолжении с сохранением нормы,— расслаиваются. Если первая форма теоремы сохраняется для операторов, действующих в произвольные *пространства Канторовича* (K-пространства), то вторая имеет место лишь для специального класса таких пространств — K-пространств ограниченных элементов, т. е. пространств непрерывных функций на экстремальных компактах. Более того, указанные свойства являются характеристическими. Вот формальное описание положения дел.

Теорема 1.1. *Пусть Y — векторное пространство, упорядоченное с помощью конуса K. Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *Каковы бы ни были векторное пространство X, подпространство X_0 в X, сублинейный оператор $p : X \to Y$ и линейный оператор $T_0 : X_0 \to Y$ такой, что $T_0 x_0 \leqslant p(x_0)$ для всех $x_0 \in X_0$, существует продолжение $T : X \to Y$ оператора T_0 такое, что $Tx \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$.*

(2) *Каковы бы ни были упорядоченное векторное пространство X, мажорирующее подпространство X_0 в X и положительный оператор $T_0 : X_0 \to Y$, существует положительное продолжение оператора T_0 на пространство X.*

(3) *Конус K вполне миниэдрален, т. е. каждое ограниченное сверху множество в Y имеет верхнюю грань.*

Утверждение (1) называют *теоремой Хана — Банаха — Канторовича*, а утверждение (2) — *теоремой Канторовича*.

Как ни удивительно, теорема 1.1 в приведенной форме установлена сравнительно недавно. Дело в том, что долгое время не удавалось доказать, что свойство (1) влечет линейную замкнутость конуса K. В предположении же последней теорема 1.1 известна давно и доказывается достаточно просто.

Более ранним и, может быть, более замечательным является следующий факт.

Теорема 1.2. *Для банахова пространства Y эквивалентны утверждения*:

(1) *Y является $\mathscr{P}_1$-пространством, т. е. каково бы ни было банахово пространство X, содержащее Y в качестве подпространства, существует проектор единичной нормы из X на Y.*

(2) *Каковы бы ни были банахово пространство X, подпространство X_0 в X и ограниченный линейный оператор $T_0: X_0 \to Y$, существует линейное продолжение $T: X \to Y$ оператора T_0 такое, что $\|T\| = \|T_0\|$.*

(3) *Y является K-пространством ограниченных элементов (со стандартной нормировкой).*

(4) *Каждое семейство попарно пересекающихся шаров в Y имеет не пустое пересечение.*

Самое значительное достижение последнего времени в проблеме продолжения линейных операторов, безусловно, представляет следующая *теорема Линденштраусса*.

Теорема 1.3. *Для банахова пространства Y следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Сопряженное пространство Y' изометрично пространству $L^1(\mu)$ для некоторой меры μ.*

(2) *Второе сопряженное пространство Y'' является K-пространством ограниченных элементов.*

(3) *Каковы бы ни были банаховы пространства X, содержащее Y, и Z и компактный оператор $T_0: Y \to Z$, существует компактное продолжение $T: X \to Z$, для которого $\|T\| = \|T_0\|$.*

(4) *Каковы бы ни были число $\varepsilon > 0$, банахово пространство X, его подпространство X_0 и компактный оператор $T_0: X_0 \to Y$, существует компактное продолжение $T: X \to Y$ такое, что $\|T\| \leqslant (1+\varepsilon)\|T_0\|$.*

(5) *Каждое четырехэлементное семейство попарно пересекающихся шаров в Y имеет не пустое пересечение.*

В связи с этой замечательной теоремой пространства, преддвойственные к $L^1(\mu)$, называются *пространствами Линденштраусса*. Отметим, что теорема 1.3 до сих пор не получила версии в категории упорядоченных пространств. В то же время очевидно, что в классе векторных решеток существует вариант этой теоремы, характеризующий пространства типа M.

Теорема Линденштраусса доставляет много материала для разнообразных размышлений и допускает различные модификации. Отметим здесь только один из недавних результатов Лазара, имеющий любопытный геометрический вид (кстати сказать, и геометрическое доказательство, основанное на использовании *свойства Лима* — наличия достаточного числа непрерывных барицентрических координат у конечномерных многогранников).

Теорема 1.4. *Для банахова пространства Y следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Y — пространство Линденштраусса, конечномерные сечения единичного шара которого многогранны.*

(2) *Каковы бы ни были банахово пространство X, подпространство X_0 в X и компактный оператор $T_0: X_0 \to Y$, существует компактное продолжение $T: X \to Y$ оператора T_0 такое, что $\|T\| = \|T_0\|$.*

Пространства Линденштраусса в настоящее время исследуются в основном методами теории интегральных представлений выпуклых компактов — методами граничной теории Шоке. Последняя, как отметим ниже, имеет глубокие связи с теорией упорядоченных векторных пространств. Это обстоятельство косвенно свидетельствует в пользу порядкового характера теорем типа Линденштраусса и Лазара.

2. Сублинейные операторы. Факты, приведенные в предыдущем пункте, показывают область применимости операторных аналогов теорем типа Хана — Банаха. Справедливость таких теорем в полном объеме накладывает весьма жесткие требования на класс допускаемых к рассмотрению пространств. В то же время в приложениях имеется целый ряд вопросов, исследование которых требует существенно меньшего, чем общие операторные формы теорем о продолжении. Одним из основных примеров таких вопросов служит теория сублинейных операторов. Интерес к последним не случаен — достаточно отметить здесь ту роль, которую такие операторы играют в метрической теории функций и в теории экономической динамики.

Конкретные классы сублинейных операторов, как правило, имеют своей областью значений упорядоченное пространство, не являющееся, вообще говоря, K-пространством. Более того, такие операторы в силу очевидных причин часто могут быть заданы не на всем рассматриваемом векторном пространстве, а лишь на некотором конусе в нем. Иначе говоря, в приложениях приходится рассматривать как операторы с бесконечными значениями, так и операторы, действующие в общие упорядоченные пространства. Так, модели экономической динамики формально представляют собой сублинейные операторы, определенные на конусе и принимающие значения в K-линеале ограниченных элементов. Таким образом, исследование этих операторов должно основываться на соображениях принципиально иной природы, нежели общие операторные варианты теорем о продолжении.

При изучении сублинейных операторов возникают основные *задачи теории двойственности Минковского*. Именно, требуется выяснить

(а) *условие существования опорного* линейного оператора у заданного сублинейного оператора p;

(б) *условие непустоты субдифференциала*, т. е. условие существования (опорного) оператора A такого, что $Ax \leqslant p(x)$ для всех элементов x из области определения оператора p, и, кроме того, удовлетворяющего соотношению $Ax_0 = p(x_0)$ в заданной точке x_0;

(в) *условие справедливости двойственности Минковского*, т. е. выполнения соотношения $p(x) = \sup\{Ax : A \in U_p\}$, где U_p — опорное множество оператора p, иными словами, совокупность всех опорных к p линейных операторов;

(г) *внутренние характеристики множеств* линейных операторов, *служащих опорными множествами* сублинейных операторов данного класса.

Трудность указанных задач не вызывает сомнений — любая информация об общих сублинейных операторах мгновенно может быть трансформирована в разнообразные и зачастую сильные утверждения классического анализа. Несмотря на это, в последние годы предпринимались небезуспешные попытки частичного анализа описанных задач теории сублинейных операторов. Остановимся здесь лишь на некоторых из них.

М. М. Фельдман исследовал ряд случаев, относящихся к задаче (б). Именно он показал, что одномерный вариант теоремы Хана — Банаха — Канторовича справедлив для сублинейных операторов, принимающих значения в так называемых пространствах со свойством цепной полноты. Напомним соответствующее определение.

Говорят, что упорядоченное векторное пространство обладает *свойством цепной полноты*, если любая ограниченная сверху цепь элементов в нем имеет верхнюю грань. Разумеется, что среди K-линеалов свойством цепной полноты обладают только K-пространства. В действительности класс таких пространств существенно более широк. Так,

пространство линейных операторов, действующих из упорядоченного векторного пространства в пространство со свойством цепной полноты, также обладает этим свойством (при каноническом упорядочении с помощью конуса положительных операторов). Еще один класс примеров доставляют банаховы пространства с конусом, на котором определен строго монотонный функционал. К последнему типу относится, в частности, пространство ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве с конусом положительно определенных операторов.

К сожалению, свойство цепной полноты не эквивалентно сформулированному в (б) свойству точной аппроксимации. Вопрос о необходимых и достаточных условиях остается здесь открытым.

Новый подход к изучению сублинейных операторов, действующих в K-линеалы ограниченных элементов, предложил Ю. Э. Линке. В частности, им установлено, что ограниченный сублинейный оператор, действующий из сепарабельного банахова пространства X в пространство $C(Q)$, непрерывных на компакте Q функций, допускает представление в виде верхней огибающей опорных линейных операторов (условие (в)). Отметим, что условие (б) в пространстве $C(Q)$, как правило, не выполнено.

Основной предложенный метод исследования сублинейных операторов $p : X \to C(Q)$ состоит в изучении свойств многозначного отображения $\Phi_p : Q \to 2^{X'}$, определенного соотношением $\Phi_p(t) = U_{p_t}$, где $p_t : x \to p(x)(t)$ — сублинейный функционал $\varepsilon_t \circ p$ и U_{p_t} — его опорное множество. На языке отображения Φ_p исследование вопросов теории двойственности для оператора p сводится к изучению специальных селекторов многозначного отображения.

Уместно подчеркнуть, что и теорема Линденштраусса также в известной мере эквивалентна теореме о существовании селекторов многозначных отображений. Однако до сих пор совершенно неясно, как получать указанные результаты без аппелирования к технике сечений — к теоремам типа Майкла и Хасуми. В то же время Ю. Э. Линке показал, как простейшие факты теории упорядоченных векторных пространств можно применять для получения новых теорем о сечениях. В частности, им существенно усилена известная *теорема Тонга* об эквивалентности геометрической симплициальности конуса ограниченных полунепрерывных сверху функций нормальности топологического пространства, служащего областью определения рассматриваемых функций. В качестве примера возникающих здесь нерешенных вопросов отметим задачу (в) для операторов со значениями в упорядоченных пространствах типа M. Здесь указанная задача эквивалентна теореме о существовании специального типа селекторов многозначных отображений.

Что касается задачи (г) о внутренних характеристиках опорных множеств, то здесь почти ничего не известно даже для случая операторов, действующих в K-пространства. Отметим здесь только недавний результат А. М. Рубинова, представляющий интерес в связи с возможностями новых постановок в теории Шоке.

Если K-пространство Y находится в двойственности со своим сопряженным по Накано (т. е. с пространством вполне линейных функционалов на Y), то множество регулярных операторов является опорным к некоторому сублинейному оператору в том и только в том случае, если оно операторно выпукло и замкнуто в некотором достаточно специальном смысле. Напомним, что множество операторов U, действующих в K-пространство Y, называется *операторно выпуклым*, если $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 \in U$ для любых $T_1, T_2 \in U$ и положительных операторов $\alpha_1, \alpha_2 : Y \to Y$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = E$. Здесь и ниже E — тождественное отображение Y на себя.

3. Конкретные сублинейные операторы. Наряду с исследованием общих свойств сублинейных операторов в духе теории двойственности Минковского существенное значение имеет вычисление в явном виде опорных множеств конкретных сублинейных операторов. Хорошо известна роль аналогичных результатов о строении субдифференциалов выпуклых функций и в особенности выпуклых интегральных функционалов. Эти классические задачи выпуклого анализа являются вариантами соответствующих вопросов для сублинейных операторов. В указанном направлении получены существенные и практически окончательные результаты. Положение дел исчерпывающим образом освещено в работах А. Д. Иоффе и В. Л. Левина, поэтому здесь на таких задачах мы останавливаться не будем. Наша цель при упоминании этих результатов состояла в том, чтобы подчеркнуть ту роль, которую играют хорошо построенные конкретные сублинейные операторы. Роль эта определяется тем, что факт непустоты опорного множества сублинейного оператора — это очень удобная форма чистой теоремы существования. В этой связи становится ясным отсутствие в предыдущем пункте обсуждения задачи (а).

Отметим здесь же теорему Мазура — Орлича, доказательство которой прекрасно иллюстрирует значение построения конкретного сублинейного оператора. Уместно подчеркнуть, что эта теорема незаслуженно не является столь же популярной у потребителей, как (эквивалентная ей) теорема Хана — Банаха — Канторовича.

Полезные конкретные сублинейные операторы возникают при исследовании общих *линейных задач выпуклого анализа*. На одном из таких операторов мы остановимся подробно.

Пусть X — некоторый K-линеал, Y — некоторое K-пространство и $T \in \mathscr{L}_+(X, Y)$ — положительный линейный оператор, $T : X \to Y$. Сублинейный оператор $\check{T} : X^n \to Y$, действующий из соответствующей степени X по формуле $\check{T}(x_1, \ldots, x_n) = T(x_1 \vee \ldots \vee x_n)$, называется *сверхразбиением* оператора T. Это оправдано тем, что линейный оператор $\hat{T} : X^n \to Y$ опорен к $\check{T}$ в том и только в том случае, если $\hat{T}$ представляет собой *разбиение* оператора T. Последнее означает, что оператор $\hat{T}$ положителен, причем $\hat{T}\Delta = T$ для оператора Δ, вкладывающего X в диагональ пространства X^n.

Теорема 3.1. *Пусть $S, T \in \mathscr{L}_+(X, Y)$ и H — конус в X^n. Сверхразбиение оператора S мажорирует сверхразбиение оператора T на конусе H в том и только в том случае, если каждое разбиение оператора T мажорируется на этом конусе некоторым разбиением оператора S.*

Этот факт, носящий название *теоремы декомпозиции*, решает основную массовую задачу выпуклого анализа — задачу конструктивного описания упорядоченностей типа Шоке, связанных с конусами функций или множеств. Так, в задачах теории выпуклых поверхностей эта теорема становится в буквальном смысле слова эффективной, превращаясь в утверждение типа леммы Коши о разместимости параллельным переносом одного выпуклого многоугольника в другом. В нашу задачу не входит здесь обсуждение прикладных аспектов теоремы 3.1. Мы сформулируем сейчас ее полезную форму, необходимую при исследовании конкретных функциональных пространств.

Пусть $[\omega_0, \omega_1]$ — отрезок $\{\omega\in\Omega : \omega_0\leqslant\omega\leqslant\omega_1\}$ некоторого вполне упорядоченного множества Ω. Отображение $\omega\to T(\omega)$ множества Ω в некоторое K-пространство называется *согласованным*, если оно возрастает и для всякого предельного трансфинита $\omega\in[\omega_0, \omega_1]$ выполняется $T(\omega)=\sup\{T(\omega') : \omega_0\leqslant\omega'<\omega\}$. Пусть теперь X — некоторый K-линеал, Y — K-пространство, а конус H — верхняя решетка в X. Символом $\succ$ обозначается *упорядоченность Шоке* в конусе $\mathscr{L}_+(X, Y)$, т. е. $S\succ T$ для операторов S и T означает, что $Sh\geqslant Th$ для всех $h\in H$.

Лемма о согласованных разбиениях. *Пусть $\omega\to T(\omega)$ — согласованное семейство операторов из $\mathscr{L}_+(X, Y)$ и оператор $S\in\mathscr{L}_+(X, Y)$ таков, что $S\succ T(\omega_1)$. Тогда существует согласованное семейство $\omega\to S(\omega)$ операторов из $\mathscr{L}_+(X, Y)$ такое, что*

$$S\geqslant S(\omega);\quad S(\omega)\succ T(\omega);\quad S-S(\omega)\succ T(\omega_1)-T(\omega)$$

для всех $\omega\in[\omega_0, \omega_1]$.

В такой форме теорема декомпозиции оказывается удобной в приложениях. Вот несколько примеров.

Предложение 3.2. *Если правильное подпространство K-пространства дополняемо, то оно и монотонно дополняемо.*

Предложение 3.3. *Положительная форма, определенная на замкнутом подлинеале KB-линеала, допускает положительное продолжение с сохранением нормы.*

Следующее утверждение менее тривиально.

Предложение 3.4. *Пусть X — некоторый K-линеал, Y — некоторое K-пространство и $T\in\mathscr{L}_+(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *T — решеточный гомоморфизм X в Y;*

(2) *для всякого оператора T' такого, что $0\leqslant T'\leqslant T$, существует оператор $\alpha : Y\to Y$ такой, что $0\leqslant\alpha\leqslant E$, для которого $T'=\alpha T$.*

В связи с последним предложением, а также с указанным в предыдущем пункте описанием опорных множеств сублинейных операторов возникают весьма интригующие (и, очевидно, очень нетривиальные) задачи о нахождении теорем типа Крейна — Мильмана для множеств операторов, в которых в роли скаляров выступают операторы α, для которых $0\leqslant\alpha\leqslant E$. Напомним в этой связи, что в случае $Y=R$ в предложении 3.4 речь идет о крайних лучах конуса положительных форм.

Существует и еще один комплекс задач, связанный с исследованием конкретных сублинейных операторов.

4. Правильные подпространства и пространства Гротендика. Рассмотрим некоторое правильное подпространство X_0 в K-пространстве X. Из простейших алгебраических соображений следует, что X_0 можно представлять себе как пространство кусочно-постоянных функций в соответствующей функциональной реализации. Таким образом, указанные подпространства устроены достаточно просто и обозримо. В то же время, как ни удивительно, такие подпространства играют существенную роль в геометрической теории классических банаховых пространств.

Теорема 4.1. *KB-линеал X обладает тем свойством, что каждый его замкнутый подлинеал является областью значений проектора с единичной нормой, в том и только в том случае, если X с точностью до изометрии есть одно из пространств $c_0(\Gamma)$ или $L^p(\mu)$, где $1\leqslant p<\infty$.*

Существует и изоморфная версия этого результата.

Теорема 4.2. *KB-линеал X изоморфен одному из пространств $c_0(\Gamma)$ или $L^p(\mu)$, где $1\leqslant p<\infty$, в том и только в том случае, если любой его замкнутый подлинеал дополняем.*

Эти сравнительно недавние результаты делают естественным вопрос об описании дополняемых правильных подпространств в произвольных K-пространствах. К сожалению, продвижения к решению этого вопроса (принадлежащего Х. Шеферу) сравнительно незначительны.

К указанному вопросу тесно примыкает задача о строении дополняемых пространств Гротендика, представляющих собой в известном смысле пространства кусочно-постоянных нечетных функций.

Точнее, подпространство X_0 в K-линеале X называется *пространством Гротендика*, если для любых двух элементов $x_1, x_2\in X_0$ выполняется $x_1\vee x_2\vee 0+x_1\wedge x_2\wedge 0\in X_0$. Такие пространства были введены Гротендиком в случае $X=C(Q)$, как примеры не решеточных пространств Линденштраусса. При этом определение Гротендика состояло в явном указании поляры к X_0. Эквивалентность исходного определения Гротендика в $C(Q)$ приведенному установлена Линденштрауссом и Вулбертом.

Если K-линеал X — архимедов и подпространство X_0 является замкнутым относительно сходимости с регулятором, то, как легко видеть, для любого конечного множества A в X_0 выполняется $\sup A+\inf A\in X_0$. Последнее соотношение позволяет установить явные связи подлинеалов и пространств Гротендика. В то же время прямого и простого доказательства эквивалентности приведенных определений нет. Найти его — это задача Линденштраусса. Отметим, что до сих пор не известно, существует ли комбинаторное тождество, выражающее $\sup A+\inf A$ через аналогичные характеристики подмножеств A. Можно показать, что поставленные вопросы легко сводятся к исследованию конкретных сублинейных операторов (определенных на всем пространстве), что позволяет оптимистически смотреть на перспективы их решения.

5. Варианты граничной теории Шоке. Значительные возможности приложений и новых постановок доставляет граничная теория Шоке. Мы наметим здесь наиболее общую схему построения этой теории.

Пусть X — некоторый K-линеал, а Y — некоторое K-пространство. Будем считать все встречающиеся упорядоченные пространства регулярно упорядоченными. В пространстве X фиксируется некоторый конус H_0, являющийся верхней решеткой. Символом $\succ$ обозначим упорядоченность Шоке, связанную с конусом H_0. Оператор $T\in\mathscr{L}(X, Y)$ называется *согласованным* (относительно конуса H в X), если для всякого оператора $T'\in\mathscr{L}_+(X, Y)$ такого, что $T'\succ|T|$, выполняется $T'h\geqslant|T|h$ для всех $h\in H$. Множество всех согласованных операторов обозначается $\mathfrak{B}_H(Y)$. В случае, когда $H=X$, согласованные операторы называются *максимальными*. Максимальные операторы представляют собой наиболее подробно изученный класс согласованных операторов.

П р е д л о ж е н и е 5.1. *На конусе H_0 существуют согласованные относительно конуса H операторы со значениями в некотором (а тогда и в любом) регулярно упорядоченном K-пространстве в том и только в том случае, если $\overline{H_0+X_+}\supset H$.*

Ниже всегда предполагается, что указанное этим предложением соотношение на конусы H_0 и H выполнено. Из леммы о согласованных разбиениях следует

Т е о р е м а 5.2. *Множество $\mathfrak{B}_H(Y)$ представляет собой компоненту в K-пространстве регулярных операторов $\mathscr{L}(X, Y)$.*

Эта теорема устанавливает K-пространственный характер теории Шоке. Действительно, основная задача этой

теории состоит в описании множества $\mathfrak{B}_H(Y)$. Идея метода границ состоит в замене условия „оператор согласован“ условием „оператор обращается в нуль вне некоторой границы“. Иными словами, речь идет об аппроксимации компоненты согласованных операторов компонентами простейшего типа — компонентами, порожденными проекторами в области определения рассматриваемых операторов. К сожалению, даже если X является K-пространством, таких компонент недостаточно для описания базы пространства операторов. В то же время существует некоторая естественная аппроксимационная процедура, описывающая важные классы операторов. Наметим эту процедуру.

Фиксируем некоторое K-пространство Z и способ $T_0\in\mathscr{L}_+(X, Z)$ вложения X в Z. Оператор $T\in\mathscr{L}_+(Z, Y)$ называется *T_0-согласованным* (относительно конуса H в X), если $TT_0\in\mathfrak{B}_H(Y)$. Оказывается, что в множестве T_0-согласованных (K-пространственных) проекторов в Z существует наибольший элемент. Этот элемент называется *проектором Шоке*, а компонента $\mathrm{Ch}_H(T_0)$, служащая областью значений указанного проектора, называется *компонентой Шоке* или *границей Шоке*.

Т е о р е м а 5.3. *Сужение T_0-согласованного оператора на дизъюнктное дополнение границы Шоке анормально. При этом $\mathrm{Ch}_H(T_0)$ совпадает с дизъюнктным дополнением общей части ядер всех T_0-согласованных операторов.*

Этот алгебраический факт исчерпывает вопрос об описании вполне линейных согласованных операторов. В то же время задача полного описания произвольных согласованных операторов далека от завершения. Необходимость исследования этой задачи очевидна. Достаточно сказать, что примерами согласованных операторов служат обычные границы Шоке, экстремальные подмножества выпуклого множества, меры, сосредоточенные на гранях конуса в смысле Мейс, общие операторы Дирихле (в частности, интеграл Пуассона и обобщенное решение задачи Дирихле) и т. п. Этот список, конечно, неполон — легко понять, что в некотором смысле любой оператор является соответствующим способом согласованным. Однако перечисленные случаи дают примеры задач, в которых интерес представляют исключительно *граничные свойства* — расположение ядра относительно соответствующей границы Шоке. Мы проиллюстрируем последнее положение примером одного интересного класса операторов.

Оператор $T \in \mathscr{L}_+(X, Y)$ называется *экстремальным*, если для всякого $S \in \mathscr{L}_+(X, Y)$ такого, что $S \succ T$, выполняется $N(S) \supset N(T)$, где $N(T) = \{x \in X : T|x| = 0\}$ — нулевая решетка T.

Из леммы о согласованных разбиениях вытекает, что экстремальные операторы заполняют правильный вверх конус в K-пространстве $\mathscr{L}(X, Y)$. Однако нормальным множеством этот конус, как правило, не бывает. В то же время эти операторы, представляющие существенный интерес в ряде задач анализа, оказываются возможным исследовать с помощью соответствующего варианта граничной теории. Достаточно заметить, что оператор T является экстремальным в том и только в том случае, если T согласован относительно конуса $N(T)$. Применяя теорему 5.3, получаем следующие граничные свойства.

Теорема 5.4. *Справедливы утверждения*:

(1) *Сужение T_0-экстремального оператора T на дизъюнктное дополнение границы Шоке* $\mathrm{Ch}_{N(TT_0)}(T_0)$ *анормально.*

(2) *Проектор на компоненту* $\mathrm{Ch}_{N(TT_0)}(T)$ *является T_0-экстремальным для всякого вполне линейного T_0-экстремального оператора T.*

(3) *Если конус H_0 кониициален X, то оператор является T_0-экстремальным в том и только в том случае, если T_0-экстремален проектор на компоненту его существенной положительности.*

Большое значение для приложений имеет перенесение приведенных результатов на случай произвольных положительных операторов. К сожалению, в последнем направлении результаты за редкими исключениями отсутствуют. Более того, в исключительных случаях используется исключительная техника. Такое положение, разумеется, связано с отсутствием в настоящее время детальной информации о строении базы пространства операторов. Вот один из простейших вопросов, ответ на который нам не известен.

Пусть $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ — полные булевы алгебры, Q_1 и Q_2 — их стоуновские компакты и $\mathfrak{B}$ — булева алгебра компонент K-пространства регулярных операторов $\mathscr{L}(C(Q_1), C(Q_2))$. Как явно построить $\mathfrak{B}$, зная $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$?

Представляется, что анализ подобных вопросов (в том числе нахождение реализационных теорем для K-пространств, служащих пространствами операторов между заданными парами классических банаховых пространств) окажется плодотворным.

6. Литературные указания. Формализованное изложение затронутых нами вопросов и источники, необходимые для дальнейшего чтения, можно найти в [1—7].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., ГИФМЛ, 1959. 684 с.
2. **Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.— Л., ГИТТЛ, 1950. 548 с.
3. **Lindenstrauss J., Tzafriri L.** Classical Banach spaces. B.—H.—N. Y., Springer, 1973. 243 p.
4. **Lacey E.** The isometric theory of classical Banach spaces. B.—H.— N. Y., Springer, 1974. 270 p.
5. **Schaefer H.** Banach lattices and positive operators. B.—H.—N. Y., Springer, 1974. 376 p.
6. **Кутателадзе С. С.** Границы Шоке в K-пространствах.— «Успехи мат. наук», 1975, т. 30, № 4, с. 107—146.
7. **Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.** Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск, «Наука», 1976. 252 с.