АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ТОМ 13
ВЫПУСК 1
ЯНВАРЬ
1973

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 13, № 1 (1973), 55—65

УДК 513. 88

СУПРЕМАЛЬНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ И СХОДИМОСТЬ НЕРАСТЯГИВАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

С. С. Кутателадзе

Устанавливаются необходимые и достаточные признаки элементов, на которых имеет место сходимость последовательности нерастягивающих операторов при условии ее сходимости на заданном подпространстве. Библ. 7 назв.

1°. В работе [1] отмечается, что известный эффект (см. [2], [3]) определенности сходимости некоторых последовательностей положительных операторов их сходимостью на подпространствах имеет место и для некоторых других операторов.

Первые общие результаты в этом направлении для нерастягивающих операторов в пространствах непрерывных функций получены в работе [4], послужившей поводом для этой заметки.

В настоящей работе излагается одна элементарная конструкция, позволяющая получать различные результаты такого сорта, отправляясь от понятия супремального генератора [5]. При этом сохраняются основные преимущества последнего подхода. Именно, результаты носят локальный характер, т. е. устанавливаются необходимые и остаточные признаки тех функций, для которых имеет место сходимость исследуемой последовательности при условии ее сходимости на данном подпространстве (конусе). Кроме того, как обычно, использование генераторов часто позволяет перейти от условий равенства к неравенствам.

Дальнейшее изложение (в части, касающейся собственно нерастягивающих операторов) приспособлено главным образом для пространств непрерывных функций. Дело в том, что наибольший интерес представляют конечные генераторы, которые, как хорошо известно, бывают только в K-линеалах ограниченных элементов.

Ниже, как правило, без дополнительных пояснений используются результаты [5], [6] и терминология [7].

Напомню лишь одно основное определение. Пусть X — векторное подпространство K-пространства Y и H — конус (-выпуклый конус) в X. Элемент $y \in Y$ называется H-выпуклым, если $y = \sup \{h \in H : h \leqslant y\}$. Конус H называется супремальным генератором пространства X относительно K-пространства Y, если любой элемент $x \in X$ является H-выпуклым.

2°. Итак, пусть X есть некоторый K-линеал ограниченных элементов, порядок в котором индуцирован из некоторого K-пространства Y, а H — конус в X. Через $\tilde{H}$ обозначим конус в $X \times X$, натянутый на множество $\{(h, -h) : h \in H\}$ и элемент $(-\mathbf{1}, -\mathbf{1})$ в $Y \times Y$ (здесь $\mathbf{1}$ — единица в X).

Если T — положительный оператор, действующий из X в некоторое K-пространство Z (множество таких операторов обозначается через $\mathscr{L}^+(X, Z)$ и, кроме того, оператор $\hat{T}$: $\mathscr{L}^+(X \times X, Y \times Y)$, определенный соотношением $\hat{T} : (x, y) \longmapsto (Tx, Ty)$, перестановочен на $\tilde{H}$ с операцией sup, то T называется перемешиванием.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть H — подпространство, причем $\tilde{H}$ является супремальным генератором пространства $X \times X$ относительно K-пространства $Y \times Y$ и $T \in \mathscr{L}^+(X, Z)$ — перемешивание. Тогда для любой последовательности (T_n) (регулярных) операторов $T_n : X \to Z$, такой, что $(0) - \lim\limits_n T_n h = Th$ для всех $h \in H$ и, кроме того, абстрактная норма $|T_n|$ не превосходит абстрактной нормы $|T|$ (т. е. $|T_n| \mathbf{1} \leqslant T\mathbf{1}$), то $(0) - - \lim\limits_n T_n x = Tx$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Пусть f — некоторый нормированный линейный положительный функционал над X (считаем, что X наделен стандартной для K-линеалов ограниченных элементов топологией). Рассмотрим тензорное произведение

$$W_n = \frac{1}{n} f \otimes (|T| - |T_n|).$$

т. е. $W_n : x \longmapsto \frac{1}{2} f(x) (|T| - |T_n|) \mathbf{1}$. Заметим, что $W_n \in \mathcal{L}^+ (X, Z)$. Для $x, y \in X$ теперь положим

$$\tilde{T}_n (x, y) = (T_n^+ x + T_n^- y + W_n (x + y),$$
$$T_n^- x + T_n^+ y + W_n (x + y)).$$

Тогда $\tilde{T}_n \in \mathcal{L}^+ (X \times X, Z \times Z)$ и, кроме того,

$$\tilde{T}_n (h, -h) = (T_n^+ h - T_n^- h, T_n^- h - T_n^+ h) = (T_n h, -T_n h).$$

Помимо этого,

$$\tilde{T}_n(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = (|T_n| + 2W_n\mathbf{1}, |T_n| + 2W_n\mathbf{1}) = (T\mathbf{1}, T\mathbf{1}),$$

поскольку $W_n\mathbf{1} = \frac{1}{2}(T - |T_n|)\mathbf{1}$.

Таким образом, на супремальном генераторе построена последовательность линейных положительных операторов, (o)-сходящаяся на элементах этого генератора к оператору, перестановочному с операцией sup. Следовательно, имеет место (o)-сходимость на всем пространстве, т. е. $(o) - \lim\limits_n \tilde{T}_n (x, y) = \hat{T} (x, y)$ для всех $x, y \in X$. В частности, на элементах $(x, -x)$ имеем $\tilde{T}_n (x, -x) = (T_n x, -T_n x)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если конус $\bar{H}$ натянут на не более чем счетное число образующих, то (o)-сходимость в этой теореме можно заменить на $(*)$-сходимость (см. [5]).

З а м е ч а н и е 2. Доказательство остается справедливым, если потребовать только, чтобы все элементы вида $(x, -x)$, где $x \in X$, были H-выпуклыми.

Установленный результат, в частности, позволяет получить ряд теорем о сходимости в пространствах измеримых функций, типа изложенных в [1], [5] для случая положительных операторов. Для иллюстрации приведу лишь один пример такого сорта.

Рассмотрим пространство $C(Q)$ непрерывных функций на компактном (для удобства,— метрическом) пространстве Q. Пусть на Q задана некоторая положительная борелевская мера μ и через $S(Q)$ обозначено соответствующее пространство измеримых функций. Будем считать компакт Q реализованным в сопряженном пространстве $C^*(Q)$,

$\varepsilon_x : f \mapsto f(x)$. Положим $\hat{Q} = Q \cup (-Q)$. Пусть для любого борелевского множества $e \subset \hat{Q}$ $\hat{\mu}(e) = \mu(e \cap Q) + \mu(-(e \cap Q))$ и $S(\hat{Q})$ — соответствующее пространство измеримых функций. Натянем теперь конус $\hat{H}$ в $C(\hat{Q})$ на функцию -1 ($1 : x \mapsto 1$, $x \in \hat{Q}$) и множество

$$\{\hat{h} \in C(\hat{Q}) : h \in H,\ \hat{h}(\varepsilon_x) = h(x),\ \hat{h}(-\varepsilon_x) = -h(x)\},$$

где H — некоторое подпространство в $C(Q)$.

Подпространство H в $C(Q)$ назовем двойным генератором (относительно $S(Q)$), если граница Шоке конуса $\tilde{H}$ содержит множество Q' полной меры (т. е. $\hat{\mu}(Q') = \hat{\mu}(\hat{Q}) = 2\mu(Q)$). Нетрудно видеть, что $\tilde{H}$ является тем самым супремальным генератором $C(\hat{Q})$ относительно $S(\hat{Q})$, а значит, и относительно любого K-пространства Z, нормально вложенного в $S(\hat{Q})$ и содержащего $C(\hat{Q})$. Таким образом, теорема 1 в данной ситуации выглядит, как

ТЕОРЕМА 2. *Пусть Z_1, Z_2 — банаховы пространства, содержащиеся в $S(Q)$ и содержащие $C(Q)$, причем $C(Q)$ плотно в Z_1 и Z_2 является KB-пространством, нормально вложенным в $S(Q)$. Пусть, далее, H является двойным генератором, $T \in \mathcal{L}^+(Z_1, Z_2)$ — перемешивание и последовательность (T_n) регулярных операторов из Z_1 в Z_2 такова, что $|T_n| \leqslant |T|$ и, кроме того, $\| T_n h - Th \| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ для всех $h \in H$. Тогда $\| T_n x - Tx \| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ для всех $x \in Z_1$.*

Для доказательства следует только заметить, что в KB-пространстве $(*)$-сходимость совпадает со сходимостью по норме, что $\| T_n \| \leqslant \| \, |T_n| \, \| \leqslant \| T \|$ и сослаться на [5].

В известном смысле, теорема 1 допускает обращение. Именно,

ТЕОРЕМА 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\tilde{H}$ — супремальный генератор пространства $X \times X$ относительно K-пространства $Y \times Y$.

(2) Каждый элемент вида $(x, -x)$, где $x \in X$, является $\tilde{H}$-выпуклым.

(3) Для любой последовательности операторов (T_n), действующих из X в Y, такой, что $|T_n| \leqslant 1$ и

$(o) - \lim\limits_n T_n h = h$ *для всех* $h \in H$, *следует, что* $(o) - \lim\limits_n T_n x = x$ *для всех* $x \in X$.

(4) *Для любого оператора* T, *такого, что абстрактная норма* $|T| \leqslant 1$ *и* $Th = h$ *для* $h \in H$, *следует, что* $T = E$ *).

Доказательство. Нуждается в проверке лишь импликации $(4) \Rightarrow (1)$. Следует проверить, что положительный росток оператора $\hat{E}$ тождественного вложения пространства $X \times X$ в K-пространство $Y \times Y$ совпадает с $\{\hat{E}\}$. Итак, пусть $T \in \mathscr{L}^+(X \times X, Y \times Y)$; $T(h, -h) = (h, -h)$ для $h \in H$ и, кроме того, $T(1, 1) \leqslant (1, 1)$. Обозначим через Pr_1 (соответственно Pr_2) проектор $Y \times Y$ на первый (соответственно второй) сомножитель и положим

$$T_1^1 : x \mapsto Pr_1 [T(x, 0)]; \qquad T_2^1 : x \mapsto Pr_2 [T(x, 0)],$$
$$T_1^2 : y \mapsto Pr_1 [T(0, y)]; \qquad T_2^2 : y \mapsto Pr_2 [T(0, y)].$$

Тогда для $h \in H$ получим

$$(T_1^1 - T_1^2) h = Pr_1 [T(h, 0)] + Pr_1 [T(0, -h)] = Pr_1 [T(h, -h)] = h,$$
$$(T_2^2 - T_2^1) h = -Pr_2 [T(0, -h)] - Pr_2 [T(h, 0)] = -Pr_2[T(h, -h)] = h.$$

Помимо этого,

$$(T_1^1 + T_1^2)\, 1 \leqslant 1; (T_2^2 + T_2^1)\, 1 \leqslant 1.$$

Следовательно, так как $|T_i^1 - T_i^2|\, 1 \leqslant (T_i^1 + T_i^2)\, 1 \leqslant 1$ $(i = 1, 2)$, то

$$(T_1^1 - T_1^2)\, x = x; \; (T_2^2 - T_2^1)\, x = x \qquad (x \in X).$$

Заметим теперь, что $1 \leqslant T_1^1 1 \leqslant T_1^1 1 + T_1^2 1 \leqslant 1$. Таким образом, $T_1^2 = 0$. Аналогично, $T_2^1 = 0$. Окончательно получаем, что $T_1^1 x = x$, $T_2^2 y = y$ $(x, y \in X)$. Следовательно, $T(x, y) = (T_1^1 x + T_1^2 y,\; T_2^1 x + T_2^2 y) = (x, y)$. Теорема доказана.

---

*) Как обычно, E — оператор тождественного вложения X в Y.

Вообще говоря, желательно в этой теореме заменить абстрактную норму на обыкновенную. К сожалению, этого в общем случае нельзя сделать, даже когда Y является KB-пространством с аддитивной нормой. Соответствующий пример может быть легко построен.

Возьмем в качестве Q кусок окружности $Q = \{x \in \in R^2_+, \|x\| = 1\}$ *), а в качестве H пространство следов линейных функций на Q. Нетрудно показать, что любой оператор, действующий из $C(Q)$ в пространство $L(Q)$ суммируемых (по мере Лебега) на Q функций, совпадающий с тождественным на H и абстрактная норма которого не превосходит 1, тождествен ($\widetilde{H}$ является супремальным генератором пространства $C(Q) \times C(Q)$ относительно K-пространства $B(Q) \times B(Q)$, где $B(Q)$ — пространство ограниченных на Q функций, т. е. H заведомо является двойным генератором). С другой стороны, положив

$$(T1)\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}, & x_1 \geqslant x_2, \\ \dfrac{15}{4\pi}, & x_1 < x_2, \end{cases}$$

и $Th = h$ для $h \in H$, а затем, распространив оператор T по теореме Хана — Банаха — Канторовича на $C(Q)$, получим нетождественный оператор из $C(Q)$ в $L(Q)$, совпадающий с тождественным на H и с нормой единица.

Однако для пространств ограниченных функций дело обстоит иначе. Имеет место

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть T — линейный оператор, действующий из $C(Q)$ в пространство $B(Q)$. Тогда* $\mathbf{|}T\mathbf{|} \leqslant \mathbf{1}$ *в том и только том случае, если T — нерастягивающий оператор (т. е. $\|T\| \leqslant 1$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, $\| \, |T| \, \mathbf{1}\| = \| \, |T| \, \|$. С другой стороны,

$$\| \, |T| \, \| = \sup_{|f| \leqslant 1} \| \, |Tf| \, \| = \sup_x \{[\sup_{\|f\| \leqslant 1} |Tf|]\,(x)\} =$$

$$= \sup_x \sup_{\|f\| \leqslant 1} (|Tf|\,(x)) = \sup_x \sup_{\|f\| \leqslant 1} |(Tf)\,(x)| =$$

$$= \sup_{\|f\| \leqslant 1} \sup_x |(Tf)\,(x)| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \|Tf\| = \|T\|.$$

---

*) R^n_+ — неотрицательный ортант n-мерного числового пространства R^n, $\|x\|$ — евклидова норма вектора x.

Таким образом, можно получить следующий факт.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть H — подпространство $C(Q)$. Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *H — супремальный генератор пространства $C(Q) \times C(Q)$ относительно K-пространства $B(Q) \times B(Q)$.*

(2) *Для любой последовательности (T_n) нерастягивающих операторов, T_n: $C(Q) \to B(Q)$ такой, что равномерный $\lim\limits_n T_n h = h$ для всех $h \in H$ следует, что последовательность (T_n) сходится (в сильной операторной топологии) к оператору тождественного вложения.*

(3) *Для каждого нерастягивающего оператора T такого, что $Th = h$ для всех $h \in H$, следует, что $T = E$.*

Доказательство. Следует проверить только импликацию $(1) \Rightarrow (2)$. Для этого достаточно повторить рассуждения теоремы 1, заметив предварительно, что супремальный генератор в данной ситуации характеризуется через равномерную сходимость [5].

3°. Изучим теперь детальнее случай пространства непрерывных функций. Условимся прежде всего для $z \in Q$ символом $\widetilde{\varepsilon}_z$ обозначать функционал $\widetilde{\varepsilon}_z : (f, g) \mapsto f(z)$, где $(f, g) \in C(Q) \times C(Q)$ *).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть H — конус в $C(Q)$. Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *$\widetilde{H}$ является супремальным генератором пространства $C(Q) \times C(Q)$ относительно функционала $\widetilde{\varepsilon}_z$ (т. е. $\widetilde{\varepsilon}_z(f, g) = \sup\{\widetilde{\varepsilon}_z(u, v) : (u, v) \in \widetilde{H},\ (u, v) \leqslant (f, g)\}$ для всех f, $g \in C(Q)$).*

(2) *Для любых $f, g \in C(Q)$ и $\varepsilon > 0$ найдутся $\alpha \geqslant 0$ и функция $h \in H$ такие, что*

$$f \geqslant h - \alpha 1;\ g \geqslant -h - \alpha 1; \quad f(z) < h(z) + \varepsilon - \alpha.$$

(3) *Для каждой последовательности мер (μ_n) такой, что $\|\mu_n\| \leqslant 1$ и $\varliminf\limits_n \mu_n(h) \geqslant h(z)$ для всех $h \in H$, последовательность (μ_n) слабо сходится к ε_z.*

(4) *Для каждой меры μ такой, что $\|\mu\| \leqslant 1$ и $\mu(h) \geqslant h(z)$ для всех $h \in H$, следует, что $\mu = \varepsilon_z$.*

Доказательство. Эквивалентность $(1) \Leftrightarrow (2)$ очевидна.

---

*) В данной ситуации также удобнее работать в пространстве пар $C(Q) \times C(Q)$, а не в его очевидной реализации.

(1) $\Rightarrow$ (3). Положим $\widetilde{\nu}(f, g) = \nu(f)$; $\underset{\sim}{\nu}(f, g) = \nu(g)$, где $\nu \in C^*(Q)$, $\nu \geqslant 0$. Тогда $\widetilde{\nu}$, $\underset{\sim}{\nu}$ — положительные функционалы на $C(Q) \times C(Q)$. При этом для элементов $h \in \in H$ имеем

$$\widetilde{\varepsilon}_z(h, -h) = h(z) \leqslant \varliminf_n \mu_n(h) = \varliminf_n (\mu_n^+ - \mu_n^-)(h) =$$
$$= \varliminf_n (\widetilde{\mu}_n^+ + \underset{\sim}{\mu_n^-})(h, -h)$$

Кроме того,

$$\varliminf_n (\widetilde{\mu}_n^+ + \underset{\sim}{\mu_n^-})(-1, -1) = \varliminf_n |\mu_n|(-1) =$$
$$= -\varlimsup_n \|\mu_n\| \geqslant -1 = \widetilde{\varepsilon}_z(-1, -1).$$

Так как $\widetilde{H}$ — супремальный генератор относительно функционала $\widetilde{\varepsilon}_z$, то последовательность $(\widetilde{\mu}_n^+ + \underset{\sim}{\mu_n^-})$ слабо сходится к $\widetilde{\varepsilon}_z$. В частности,

$$\lim_n \mu_n(f) = \lim_n (\widetilde{\mu}_n^+ + \underset{\sim}{\mu_n^-})(f, -f) = \widetilde{\varepsilon}_z(f, -f) = f(z).$$

(3) $\Rightarrow$ (4). Очевидно.

(4) $\Rightarrow$ (1). Следует проверить, что положительный росток функционала $\widetilde{\varepsilon}_z$ на $\widetilde{H}$ совпадает с $\{\widetilde{\varepsilon}_z\}$, т. е. если $\mu \geqslant 0$, $\mu(h, -h) \geqslant \widetilde{\varepsilon}_z(h, -h)$ $(h \in H)$ и $\mu(1, 1) \leqslant 1$, то $\mu = \widetilde{\varepsilon}_z$.

Положим $\mu_1(f) = \mu(f, 0)$ и $\mu_2(g) = \mu(0, g)$ $(f, g \in \in C(Q))$. Тогда, для всех $h \in H$ получим, что

$$\mu_1(h) - \mu_2(h) = \mu(h, 0) + \mu(0, -h) = \mu(h, h) \geqslant$$
$$\geqslant \widetilde{\varepsilon}_z(h, -h) = h(z).$$

Аналогично, $\mu_1(1) + \mu_2(1) = \mu(1, 0) + \mu(0, 1) = = \mu(1,1) \leqslant 1$. Так как в свою очередь $\|\mu_1 - \mu_2\| = = |\mu_1 - \mu_2|(1) \leqslant (\mu_1 + \mu_2)(1) \leqslant 1$, то по условию $\mu_1 - \mu_2 = \varepsilon_z$. Отсюда следует, что $\mu_2 = 0$ и $\mu_1 = \varepsilon_z$. Теорема доказана.

Замечание 3. В доказательстве (1) $\Rightarrow$ (3) соотношение (2) фактически использовано лишь для пар вида $(f, -f)$. Таким образом, условие (2) можно заменить эквивалентным:

(2′) *Для всяких* $f \in C(Q)$ *и числа* $\varepsilon > 0$ *найдется функция* $h \in H$ *такая, что* $f(z) - h(z) < \varepsilon - \|f - h\|$.

Полезность приведенной теоремы заключается, в частности, в том, что существуют конечные конусы H, обладающие указанными в ней свойствами. Приведу простой, но (как показывают, например, результаты [5]) типичный пример.

Пусть $Q = \{x \in R^n_+;\ \|x\| = 1\}$. Будем считать пространство R^n реализованным как гиперподпространство $\hat{R}^n = \{z \in R^{n+1}: \sum_{k=1}^{n+1} z_k = 0\}$ пространства R^{n+1}. Не составляет труда убедиться, что конус H, натянутый на следы координатных функций R^{n+1} на $\hat{Q}$ (образ Q при данной реализации R^n), таков, что $\tilde{H}$ является супремальным генератором пространства $C(\hat{Q}) \times C(Q)$ относительно любого функционала $\tilde{\varepsilon}_z$. Укажем попутно, что минимальное число таких функций в точности равно увеличенному на единицу супремальному рангу ([5]) компакта Q. Следующие простые предложения позволяют сопоставить теоремы 4 и 5.

Предложение 2. *Пусть H — подпространство. Если $\tilde{H}$ является супремальным генератором относительно функционала $\tilde{\varepsilon}_z$, то $\tilde{H}$ является супремальным генератором относительно функционала $\varepsilon_z : (f, g) \mapsto g(z)$.*

Доказательство. Пусть $\mu(h, -h) = \varepsilon_z(h, -h)$, $\mu \geqslant 0$ и $\mu(1, 1) \leqslant 1$. Положим $\hat{\mu}(f, g) = \mu(g, f)$. Тогда $\mu(1,1) \leqslant 1$ и при этом

$$\hat{\mu}(h, -h) = \mu(-h, h) = \varepsilon_z(-h, h) = h(z) = \tilde{\varepsilon}_z(h, -h).$$

Поскольку $\hat{H}$ является генератором относительно $\tilde{\varepsilon}_z$, то $\hat{\mu}(f, g) = \tilde{\varepsilon}_z(f, g)$ для всех $f, g \in C(Q)$. Таким образом, получаем

$$\mu(f,g) = \hat{\mu}(g,f) = g(z) = \varepsilon_z(f,g).$$

Предложение 3. *Конус N в $C(Q) \times C(Q)$ является супремальным генератором пространства $C(Q) \times C(Q)$ относительно $B(Q) \times B(Q)$ в том и только в том случае, если N является супремальным генератором $C(Q) \times C(Q)$ относительно всех функционалов $\tilde{\varepsilon}_z$, где $z \in Q$.*

Доказательство можно провести непосредственно, или же воспользоваться реализацией $C(Q) \times C(Q)$ как пространства непрерывных функций на компакте $\hat{Q}$, определенном после замечания 2.

С л е д с т в и е. *$\hat{H}$ является супремальным генератором $C(Q) \times C(Q)$ относительно $B(Q) \times B(Q)$ в том и только в том случае, если $\hat{H}$ является супремальным генератором $C(Q) \times C(Q)$ относительно любого функционала $\tilde{\varepsilon}_z$, где $z \in Q$.*

Теперь уже можно провести сопоставление теорем 4 и 5. Проведем его в обещанной локальной форме. Условимся только еще об одном обозначении. Если H — подпространство $C(Q)$, то символом $\underline{H}$ будет обозначаться коническая оболочка $\hat{H}$ и вектора $(1, 1)$.

ТЕОРЕМА 6. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Функции $(f, -f)$ и $(-f, f)$ являются $\hat{H}$-выпуклыми.*

(2) *Функции $(f, -f)$ и $(-f, f)$ являются $\underline{H}$-выпуклыми.*

(3) *Для каждой точки $z \in Q$ и любой последовательности мер (μ_n), такой, что $\|\mu_n\| \leqslant 1$ и $\lim\limits_n \mu_n(h) = h(z)$ для всех $h \in H$, последовательность $(\mu_n(f))$ сходится к $f(z)$.*

(4) *Для каждой точки $z \in Q$ и любой меры μ, такой, что $\|\mu\| \leqslant 1$ и $\mu(h) = h(z)$ для всех $h \in H$, следует, что $\mu(f) = f(z)$.*

(5) *Для любой последовательности нерастягивающих операторов (T_n), такой, что равномерный $\lim\limits_n T_n h = h$ для всех $h \in H$, следует, что последовательность $(T_n f)$ равномерно сходится к f.*

(6) *Для любого нерастягивающего оператора T, такого, что $Th = h$ для всех $h \in H$, следует, что $Tf = f$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существенно новым здесь является только условие (2). Поскольку импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна, то достаточно установить соотношение (2) $\Rightarrow$ (5). Этот факт мгновенно следует из конструкции доказательства теоремы 1 и теоремы 4.

З а м е ч а н и е 4. Эквивалентность (4) $\Leftrightarrow$ (5) фактически установлена в [4].

З а м е ч а н и е 5. Специфическое внимание, уделяемое мере Дирака и оператору тождественного вложения, в основном дань традиции. Нетрудно видеть, что изложенные выше результаты с очевидными изменениями справедливы для любой меры с нормой, не превосходящей единицы и для любого нерастягивающего оператора.

Институт математики
СО АН СССР

Поступило
19.VIII.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Принцип сходимости последовательностей линейных положительных операторов, Studia math., 31 (1968), 455—468.
[2] Гаркави А. Л., Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах, Сб. «Матем. анализ» (1967), Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР, 1969, 75—132.
[3] Васильев Р. К., Сходящиеся последовательности линейных операторов в полуупорядоченных пространствах, Матем. заметки, 8, № 4 (1970), 475—486.
[4] Шашкин Ю. А., О сходимости нерастягивающих операторов, Mathematica (R.S.R.); 11 (34), № 2 (1969), 355—360.
[5] Кутателадзе С. С., Рубинов А. М., Супремальные генераторы и сходимость последовательностей операторов, Оптимизация, 3, № 20 (1971), 114—148.
[6] Кутателадзе С. С., Рубинов А. М., Некоторые классы *H*-выпуклых функций и множеств, Докл. АН СССР, 197, № 6 (1971), 1261—1263.
[7] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961.