АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ТОМ 14
ВЫПУСК 5
•
НОЯБРЬ
1973

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 14, № 5 (1973), 745—754

УДК 513.9

СТРУКТУРА БЛЯШКЕ В ПРОГРАММИРОВАНИИ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

С. С. Кутателадзе

Рассматриваются вопросы программирования задач изопериметрического типа в геометрии выпуклых поверхностей с использованием векторной структуры, порожденной сложением множеств по Бляшке. Библ. 7 назв.

1°. Анализ экстремальных задач, в частности геометрических задач изопериметрического типа, существенно связан с выбором параметризации — векторного пространства, в которое погружаются исходные задачи. Такой выбор во многом определяет класс поддающихся решению задач и качество критериев оптимальности — уравнений Эйлера — Лагранжа.

Для выпуклых поверхностей наиболее естественными векторными параметризациями являются структура Минковского, порожденная отождествлением выпуклой поверхности и ее опорной функции, и структура Бляшке, порожденная отождествлением выпуклой поверхности и ее поверхностной функции. Первое отождествление вкладывает геометрические экстремальные задачи в пространство непрерывных функций на сфере, а второе — в пространство борелевских мер на этой сфере.

Метод использования структуры Минковского и класс поддающихся решению задач достаточно подробно описаны в [1]. К сожалению, ряд интересных геометрических задач, в том числе классическая проблема изопериметра, за исключением случая плоскости, не являются задачами выпуклого программирования при сложении множеств по Минковскому, что приводит к дефектам уравнений Эйлера — Лагранжа — их решения не обязаны быть решениями исходных задач.

Идею преодоления этой трудности высказал Бляшке [2], см. также [3], [4]. Именно, он обратил внимание на то обстоятельство, что складывая вместо поверхностей их поверхностные функции, можно превратить изопериметрическую задачу в выпуклую. Само по себе это замечание не позволяет решать экстремальные задачи. Для формализации идеи Бляшке необходимо описать нужную дуальную пару пространств, получить представление конусов, двойственных к конусам возможных направлений, и, что является наиболее сложным, описать субдифференциал объема (дело в том, что в отличие от случая структуры Минковского, в структуре Бляшке объем не является однородным полиномом).

В настоящей заметке реализуется указанная программа и приводятся необходимые примеры, иллюстрирующие особенности программирования экстремальных задач в структуре Бляшке. В частности, разбираются обобщенная изопериметрическая задача и задача Линделёфа.

2°. Пусть R^n есть n-мерное числовое пространство с евклидовой нормой $|\cdot|$. Через $\mathfrak{V}_n$ обозначается конус выпуклых компактов в R^n, а через $\mathfrak{V}O_n$ — конус выпуклых тел из $\mathfrak{F}_n$. Удобно пользоваться стандартной двойственностью Минковского и отождествлять элемент $\mathfrak{x}$ из $\mathfrak{V}_n$ с его опорной функцией

$$\bar{\mathfrak{x}}:\ y \mapsto \max_{x\in\mathfrak{x}} (x, y),$$

а последнюю — с ее следом на сфере $Z_n = \{x \in R^n : |x| = 1\}$.

Структуру, индуцированную в $\mathfrak{V}_n$ решеткой $C(Z_n)$ непрерывных функций на Z_n, называют *структурой Минковского*.

Помимо отождествления опорных функций с компактами, мы будем пользоваться отождествлением класса $\{\mathfrak{x}\}$, совпадающих с $\mathfrak{x}$ с точностью до параллельного переноса выпуклых тел, с соответствующей поверхностной функцией $\mu(\mathfrak{x})$. В дальнейшем знак $\{\ \}$ у обозначения класса будет без оговорок опускаться. Класс $\mu(\mathfrak{x}) + \mu(\mathfrak{y})$ называют суммой Бляшке $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ и обозначают $\mathfrak{x} \# \mathfrak{y}$. Все указанные отождествления подчеркиваются для соответствующих объектов (поскольку это не приводит к путанице).

Пусть $\mathfrak{A}_n$ — множество всех невырожденных инвариантных относительно сдвигов положительных борелевских мер на Z_n (напомним, что под инвариантностью меры относительно сдвигов понимают ее ортогональность одноточечным множествам в R^n). Через $[\mathfrak{A}_n]$ обозначается линейная оболочка $\mathfrak{A}_n$ в сопряженном пространстве $C'(Z_n)$. Таким образом, $[\mathfrak{A}_n]$ составлено из инвариантных относительно сдвигов мер. Далее, через $[\widetilde{\mathfrak{V}O}_n]$ обозначим фактор-пространство $C(Z_n)$ по подпространству R^n. Таким образом, элементами $[\widetilde{\mathfrak{V}O}_n]$ служат классы функций, отличающихся на след на сферу линейного функционала над R^n (другими словами, на точку). Будем наделять пространство $[\mathfrak{A}_n]$ слабой топологией и пространство $[\widetilde{\mathfrak{V}O}_n]$ — фактор-топологией ослабленной топологии в $C(Z_n)$. Нетрудно проверить, что пространства $[\mathfrak{A}_n]$ и $[\widetilde{\mathfrak{V}O}_n]$ приводятся в двойственность посредством билинейной формы

$$\langle \mu, f\rangle = \frac{1}{n}\int_{Z_n} f\, d\mu,$$

совпадающей на множестве $\mathfrak{A}_n \times \widetilde{\mathfrak{V}O}_n$ со смешанным объемом $V_1(\cdot,\ \cdot)$ (см. [5]).

Структуру, индуцированную $[\mathfrak{A}_n]$ в $\mathfrak{A}_n$ (и в $\mathfrak{V}O_n$), называют *структурой Бляшке* (в конусе выпуклых тел).

Описание двойственных конусов в данной структуре не составляет труда. Действительно, имеют место следующие простые утверждения.

Предложение 1. *Двойственный конус $\mathfrak{A}_n^*$ является конусом положительных элементов в $[\widetilde{\mathfrak{V}O}_n]$.*

Предложение 2. *Пусть $\bar{\mathfrak{x}} \in \mathfrak{A}_n$. Для конуса $\mathfrak{A}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}^*$, двойственного к конусу возможных направлений в точке $\bar{\mathfrak{x}}$, имеет место представление*

$$\mathfrak{A}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}^* = \{f \in \mathfrak{A}_n^*\colon \langle \bar{\mathfrak{x}}, f\rangle = 0\}.$$

Менее тривиально

Предложение 3. *Пусть $\bar{\mathfrak{x}} \in \mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{y} \in \mathfrak{V}O_n$. Если $\mathfrak{y} - \bar{\mathfrak{x}} \in \mathfrak{A}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}^*$, то $\mathfrak{y} = \bar{\mathfrak{x}}$.*

Доказательство. Действительно, в силу (1)

$$\hat{p}(\bar{\mathfrak{x}}) = \inf_{\mathfrak{y} \in \mathfrak{V}O_n} \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y} \rangle \, p^{-1}(\mathfrak{y}),$$

т. е. $\hat{p}$ есть поточечный инфимум семейства опорных линейных функционалов $\mathfrak{z} \mapsto \langle \mathfrak{z}, \mathfrak{y} \rangle p^{-1}(\mathfrak{y})$ $(\mathfrak{y} \in \mathfrak{V}O_n)$.

Следствие (теорема Герглотца). *Функция p, определенная на выпуклом множестве $\mathfrak{A}_n$, является вогнутой.*

Замечание 1. Поскольку площадь поверхности $\mathfrak{x}$ записывается в виде $n \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_n \rangle$, где $\mathfrak{z}_n = \{x \in R^n : |x| \leqslant 1\}$ — единичный шар, то изопериметрическая задача в структуре Бляшке превращается в задачу выпуклого программирования. Таким образом, поскольку двойственные конусы описаны, дело сводится к нахождению опорного множества производной объема в структуре Бляшке.

Положим

$$S_{\bar{\mathfrak{x}}} = \{f \in [\widetilde{\mathfrak{V}}O_n] : \langle \mathfrak{z}, f \rangle \geqslant \hat{p}(\mathfrak{z}) \, p(\bar{\mathfrak{x}}) \quad (\mathfrak{z} \in \mathfrak{A}_n),$$
$$\langle \bar{\mathfrak{x}}, f \rangle = \langle \bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{x}} \rangle\}.$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Функция f входит в $S_{\bar{\mathfrak{x}}}$ в том и только том случае, если $f \geqslant \bar{\mathfrak{x}}$ и, кроме того, $f(z) = \bar{\mathfrak{x}}(z)$ для всех z из носителя $s(\bar{\mathfrak{x}})$.*

Доказательство. Достаточность. Имеем

$$\langle \mathfrak{z}, f \rangle \geqslant \langle \mathfrak{z}, \bar{\mathfrak{x}} \rangle \geqslant \hat{p}(\mathfrak{z}) \, p(\bar{\mathfrak{x}}) \qquad (\mathfrak{z} \in \mathfrak{A}_n)$$

и, кроме того,

$$\langle \bar{\mathfrak{x}}, f \rangle = \frac{1}{n} \int_{Z_n} f \, d\bar{\mathfrak{x}} = \frac{1}{n} \int_{s(\bar{\mathfrak{x}})} f \, d\bar{\mathfrak{x}} = \frac{1}{n} \int_{s(\bar{\mathfrak{x}})} \bar{\mathfrak{x}} \, d\bar{\mathfrak{x}} = \langle \bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{x}} \rangle.$$

Необходимость. Не нарушая общности, можно считать, что $p(\bar{\mathfrak{x}}) = 1$. Положим

$$S = \{\mathfrak{y} \in \widetilde{\mathfrak{V}}O_n : \ p(\mathfrak{y}) = 1\};$$
$$\widetilde{S} = S + \mathfrak{A}_n^*.$$

Это предложение получается, например, из представляющей самостоятельный интерес теоремы 1. Прежде чем ее сформулировать, условимся для экономии места пользоваться следующими обозначениями:

$$p\colon \mathfrak{x} \mapsto \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle^{\frac{1}{n}};$$

$$\hat{p}\colon \mathfrak{x} \mapsto \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle^{\frac{n-1}{n}}.$$

Отметим, что в силу принятых обозначений объем $V(\mathfrak{x})$ тела $\mathfrak{x}$ записывается в виде $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle$ и неравенство Минковского [5] переписывается в виде

$$\langle \mathfrak{y}, \mathfrak{x}\rangle \geqslant \hat{p}(\mathfrak{y})\, p(\mathfrak{x}). \tag{1}$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\bar{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{y} \in \mathfrak{V}O_n$ *и* $\mathfrak{V}^*_{n,\bar{\mathfrak{x}}}$ — *конус, сопряженный (в* $C'(Z_n)$*) к конусу возможных направлений в точке* $\bar{\mathfrak{x}}$. *Если* $\mu(\mathfrak{y}) - \mu(\bar{\mathfrak{x}}) \in \mathfrak{V}^*_{n,\bar{\mathfrak{x}}}$, *то* $\mathfrak{y} = \bar{\mathfrak{x}}$.

Доказательство. Имеем, что $\mathfrak{y}$ T-предшествует $\bar{\mathfrak{x}}$, причем $V(\bar{\mathfrak{x}}) = V_1(\mathfrak{y}, \bar{\mathfrak{x}})$ (см. [1]). Из (1) имеем $\hat{p}(\bar{\mathfrak{x}}) \geqslant \hat{p}(\bar{\mathfrak{x}})\, p(\bar{\mathfrak{x}})$, т. е. $p(\bar{\mathfrak{x}}) \geqslant p(\mathfrak{y})$. Помимо этого,

$$\langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}\rangle \geqslant \hat{p}(\bar{\mathfrak{x}})\, p(\mathfrak{y}) \geqslant \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y}\rangle \geqslant \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}\rangle$$

(соотношение $\langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y}\rangle \geqslant \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}\rangle$ следует из того, что $\mathfrak{y}$ T-предшествует $\bar{\mathfrak{x}}$). Поскольку в неравенстве Минковского имеет место равенство, имеем, что $\mathfrak{y} = \bar{\mathfrak{x}}$.

В качестве самостоятельного приложения теоремы 1 установим уточнение теоремы 4.4.1 из [1].

ТЕОРЕМА 2. *Допустимое тело* $\bar{\mathfrak{x}}$ *является решением обобщенной задачи Урысона*: (а) $V_1(\mathfrak{y}_j, \mathfrak{x}) \leqslant b_j$ ($j = 1, \ldots, m$), (б) $V(\mathfrak{x})$ *достигает максимума в том и только том случае, если найдутся обладающие свойством дополняющей нежесткости числа* $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m \in R_+$ *такие, что* $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\alpha}_1\mathfrak{y}_1 \# \bar{\alpha}_2\mathfrak{y}_2 \# \ldots \# \bar{\alpha}_m\mathfrak{y}_m$.

Доказательство. Действительно, уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$\bar{\alpha}_1\mathfrak{y}_1 \# \ldots \# \bar{\alpha}_m\mathfrak{y}_m - \bar{\mathfrak{x}} \in \mathfrak{V}^*_{n,\bar{\mathfrak{x}}}.$$

Имеет место важная теорема, по-видимому, известная еще Минковскому и отмеченная при $n = 3$ в [4].

ТЕОРЕМА 3. *Функционал* $\hat{p}$, *определенный на конусе* $\mathfrak{A}_n$, *суперлинеен*.

Проверим, что $\widetilde{S}$ — выпуклое замкнутое множество. Заметим прежде всего, что если $u \in \widetilde{S}$ и $\alpha \geqslant 1$, то $\alpha u \in \widetilde{S}$. Действительно, если $u = \mathfrak{y} + g$ $(\mathfrak{y} \in S,\ g \in \mathfrak{A}_n^*)$, то $\alpha u = \mathfrak{y} + (\alpha - 1)\mathfrak{y} + \alpha g$. Пусть теперь $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$; $\alpha_1, \alpha_2 \in R_+$; $u_1 = \mathfrak{y}_1 + g_1$; $u_2 = \mathfrak{y}_2 + g_2$, где $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2 \in S$ и $g_1, g_2 \in \mathfrak{A}_n^*$. Элемент $p^{-1}(\alpha_1\mathfrak{y}_1 + \alpha_2\mathfrak{y}_2)$ $(\alpha_1\mathfrak{y}_1 + \alpha_2\mathfrak{y}_2)$ входит в S. При этом по теореме Брунна—Минковского

$$p(\alpha_1\mathfrak{y}_1 + \alpha_2\mathfrak{y}_2) \geqslant \alpha_1 p(\mathfrak{y}_1) + \alpha_2 p(\mathfrak{y}_2) = 1.$$

И, так как

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = p(\alpha_1\mathfrak{y}_1 + \alpha_2\mathfrak{y}_2)\left(\frac{\alpha_1\mathfrak{y}_1 + \alpha_2\mathfrak{y}_2}{p(\alpha_1\mathfrak{y}_1 + \alpha_2\mathfrak{y}_2)} + \frac{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2}{p(\alpha_1\mathfrak{y}_1 + \alpha_2\mathfrak{y}_2)}\right),$$

то по доказанному выше $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in \widetilde{S}$.

Установим теперь замкнутость $\widetilde{S}$. Пусть $f = \lim\limits_m (\mathfrak{y}_m + g_m)$ (где предел берется в фактор-топологии сильной топологии в $C(Z_n)$.

Поскольку существует m_0 такое, что при $m \geqslant m_0$ справедливы неравенства

$$\mathfrak{y}_m \leqslant \mathfrak{y}_m + g_m \leqslant f + \mathfrak{z}_n,$$

то последовательность $\{\mathfrak{y}_m\}$ ограничена и, в силу локальной компактности $\mathfrak{B}_n$, можно считать, что $\{\mathfrak{y}_m\}$ сходится.

Проверим теперь, что f входит в $\widetilde{S}$. В противном случае по теореме отделимости найдется элемент $\tilde{\mathfrak{y}}$ из $[\mathfrak{A}_n]$ такой, что

$$\inf_{t \in \widetilde{S}} \langle \tilde{\mathfrak{y}}, t \rangle > \langle \tilde{\mathfrak{y}}, f \rangle.$$

Очевидно, что $\tilde{\mathfrak{y}}$ — положительная инвариантная относительно сдвигов мера. Помимо этого,

$$\inf_{t \in \widetilde{S}} \langle \bar{\mathfrak{x}}, t \rangle = \langle \bar{\mathfrak{x}}, f \rangle.$$

Действительно, для $t = \mathfrak{y} + g$ имеем

$$\langle \bar{\mathfrak{x}}, t \rangle \geqslant \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y} \rangle \geqslant \hat{p}(\bar{\mathfrak{x}})\, p(\mathfrak{y}) = 1 = \langle \bar{\mathfrak{x}}, f \rangle.$$

Следовательно, переходя, если нужно, к мере $\tilde{\mathfrak{y}} + \bar{\mathfrak{x}}$, можно считать, что $\hat{\mathfrak{y}} \in \mathfrak{A}_n$. Положим $\hat{\mathfrak{y}} = p^{-1}(\tilde{\mathfrak{y}})\tilde{\mathfrak{y}}$. Тогда в силу условия

$$1 = \langle \hat{\mathfrak{y}}, \hat{\mathfrak{y}} \rangle > \langle \hat{\mathfrak{y}}, f \rangle \geqslant \hat{p}(\mathfrak{y})\, p(\bar{\mathfrak{x}}) = 1.$$

Получаем противоречие. Таким образом, $f \in \widetilde{S}$, т. е. найдется элемент $\mathfrak{y}$ из $\mathfrak{A}_n$ такой, что

$$p(\mathfrak{y}) = p(\bar{\mathfrak{x}}) \text{ и } f \geqslant \mathfrak{y}.$$

Имеем

$$1 = \langle \bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{x}} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{x}}, f \rangle \geqslant \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y} \rangle \geqslant \hat{p}(\bar{\mathfrak{x}})\, p(\mathfrak{y}) = 1$$

и, следовательно, $\mathfrak{y} = \bar{\mathfrak{x}}$. Поскольку по условию $\langle \bar{\mathfrak{x}}, f \rangle = \langle \bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{x}} \rangle$ и, кроме того, $f \geqslant \bar{\mathfrak{x}}$, то $f(z) = \bar{\mathfrak{x}}(z)$ для всех z из $s(\bar{\mathfrak{x}})$. Теорема доказана.

Обозначим теперь через $p_{\bar{\mathfrak{x}}}$ замыкание производной функционала $\mathfrak{y} \mapsto \hat{p}(\mathfrak{y})\, p(\bar{\mathfrak{x}})$ в точке $\bar{\mathfrak{x}}$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $g \in \mathfrak{A}_{n, \bar{\mathfrak{x}}}$. *Имеет место представление*

$$p_{\bar{\mathfrak{x}}}(g) = \langle g, \bar{\mathfrak{x}} \rangle.$$

Доказательство. В соответствии с общей теорией [6] имеем

$$p_{\bar{\mathfrak{x}}}(g) = \inf_{f \in S_{\bar{\mathfrak{x}}}} \langle g, f \rangle.$$

Заметим, что $g = \mathfrak{y} - \bar{\mathfrak{x}}$, где $\mathfrak{y} \in \mathfrak{A}_n$. При этом по теореме 4 для $f \in S_{\bar{\mathfrak{x}}}$ имеем, что $f \geqslant \bar{\mathfrak{x}}$ и, кроме того, $\langle \bar{\mathfrak{x}}, f \rangle = \langle \bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{x}} \rangle$. Следовательно,

$$p_{\bar{\mathfrak{x}}}(g) = \inf_{f \in S_{\bar{\mathfrak{x}}}} (\langle \mathfrak{y}, f \rangle - \langle \bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{x}} \rangle) = \langle \mathfrak{y}, \bar{\mathfrak{x}} \rangle - \langle \bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{x}} \rangle = \langle g, \bar{\mathfrak{x}} \rangle.$$

Теорема доказана.

Теперь уже можно переходить к примерам программирования в структуре Бляшке.

3°. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1 (обобщенная изопериметрическая задача). Заданы тела $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_m$ и числа $b_1, \ldots, b_m$. Требуется среди фигур, удовлетворяющих неравенствам $V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_j) \leqslant b_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, найти тело, доставляющее максимум объему $V(\mathfrak{x})$.

ТЕОРЕМА 6. *Допустимое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ является решением обобщенной изопериметрической задачи в том и только том случае, если найдутся обладающие свойством дополняющей нежесткости числа $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m \in R_+$ такие, что*

$$\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\alpha}_1\mathfrak{y}_1 + \bar{\alpha}_2\mathfrak{y}_2 + \ldots + \bar{\alpha}_m\mathfrak{y}_m.$$

Доказательство. В силу теоремы 3 поставленная задача эквивалентна задаче выпуклого программирования в $[\mathfrak{A}_n]$. Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$\varphi(\mathfrak{x}, \alpha) = V^{\frac{1}{n}}(\bar{\mathfrak{x}})\, V^{\frac{n-1}{n}}(\mathfrak{x}) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (b_j - V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_j))$$

и определена на $\mathfrak{A}_n \times R_+^m$. Условие Слейтера, очевидно, выполнено, а потому из обычных рассуждений следует эквивалентность седлового неравенства $\varphi(\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\alpha}) \geqslant \varphi(\mathfrak{x}, \bar{\alpha})$ $(\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_n)$ условию

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{\alpha}_j\mathfrak{y}_j - p_{\bar{\mathfrak{x}}} \in \mathfrak{A}^*_{n, \bar{\mathfrak{x}}}.$$

По предложению 3 и теореме 5 это и означает требуемое.

Замечание 2. На примере задачи 1 хорошо видны различия в программировании в структуре Бляшке и в структуре Минковского.

В последней (при $n \geqslant 3$) задача 1 — не выпуклая и, как известно (см. [1]), необходимое условие экстремума для нее имеет вид

$$\mu(\bar{\mathfrak{x}}) = \mu_1\left(\bar{\mathfrak{x}}, \sum_{j=1}^{m} \bar{\alpha}_j\mathfrak{y}_j\right), \qquad (2)$$

где $\mu_1(\cdot,\cdot)$ — соответствующая смешанная поверхностная функция. Извлечь из (2) требуемое представление решения удается лишь в предположении априорной регулярности тел $\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_m$.

В качестве еще одного типичного примера рассмотрим следующую задачу с операторным ограничением на кривизны. Для экономии места ограничимся лишь одним ограничением общего вида.

Задача 2 (задача Линделёфа). Пусть $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}$ — заусловиям

$$\text{(а)}\ \mu(\mathfrak{x}) \leqslant \mu(\mathfrak{x}_0), \quad \text{(б)}\ V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \leqslant V_1(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}),$$

найти фигуру, доставляющую максимум объему.

Замечание 3. Программирование задачи с ограничением вида (а) непосредственно в структуре Минковского при $n \geqslant 3$ затруднительно в связи с невыпуклостью соответствующей допустимой области.

ТЕОРЕМА 7. *Допустимое тело* $\bar{\mathfrak{x}}$ *является решением задачи Линделёфа, если найдется* $\bar{\alpha} \geqslant 0$ *такое, что для*

$$\bar{\mathfrak{x}} \geqslant \bar{\alpha}\mathfrak{y} \ \text{и}\ \bar{\mathfrak{x}}(z) = \bar{\alpha}\mathfrak{y}(z)$$

всех z *из носителя меры* $\mu(\mathfrak{x}_0) - \mu(\bar{\mathfrak{x}})$.

Доказательство. Функция Лагранжа соответствующей задачи выпуклого программирования определена на $\mathfrak{A}_n \times \mathfrak{A}_n^* \times R_+$ и имеет вид

$$\varphi(\mathfrak{x}, f, R_+) =$$
$$= V^{\frac{1}{n}}(\bar{\mathfrak{x}})\, V^{\frac{n-1}{n}}(\mathfrak{x}) + \alpha(V_1(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}) - V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})) + (\mu(\mathfrak{x}_0) - \mu(\mathfrak{x}))(f).$$

Положив $\bar{f} = \bar{\mathfrak{x}} - \bar{\alpha}\mathfrak{y}$, убеждаемся, что в точке $(\bar{\mathfrak{x}}, \bar{f}, \bar{\alpha})$ функция φ имеет седло.

В качестве примера применения этой теоремы покажем, что среди многогранников, имеющих заданную площадь поверхности и фиксированные направления внешних нормалей $(n-1)$-мерных граней, наибольший объем имеет многогранник, описанный вокруг шара (теорема Линделёфа, [7]). В самом деле, положим в задаче 2 $\mathfrak{x}_0 = c\,\tilde{\mathfrak{x}}$, где $\tilde{\mathfrak{x}}$ — произвольный многогранник с носителем в фиксированных направлениях, а константа c достаточно велика. Кроме того, пусть $\mathfrak{x} = \mathfrak{z}_n$. Поскольку условие $\mu(\mathfrak{x}) \leqslant \mu(\mathfrak{x}_0)$ как раз и означает, что допустимый класс составляют многогранники с фиксированными направлениями $(n-1)$-мерных граней, то признак теоремы 7 означает оптимальность описанного вокруг шара многогранника.

4°. Автор искренне признателен В. М. Тихомирову за конструктивные критические замечания и С. Б. Стечкину за внимание к этой работе.

Институт математики
Сибирского отделения АН СССР

Поступило
2.X.1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Кутателадзе С. С., Рубинов А. М., Двойственность Минковского и ее приложения, Успехи матем. наук, **27**, 3 (1972), 127—176.

[2] Бляшке В., Круг и шар, М., 1967.

[3] Firey K. J., Grünbaum B., Addition and decomposition of convex polytopes, Israel J. Math., **2**, № 2 (1964), 91—100.

[4] Firey W. J., Blaschke sums of convex bodies and mixed bodies, Proc. Collog. Convexity (Copenhagen, 1965), Copenhagen, 1967, 94—101.

[5] Буземан Г., Выпуклые поверхности, М., 1964.

[6] Демьянов В. Ф., Рубинов А. М., Приближенные методы решения экстремальных задач, Л., 1968.

[7] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, М., 1966.