АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ТОМ 19
ВЫПУСК 4
•
АПРЕЛЬ
1976

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 19, № 4 (1976), 615—622

УДК 513.88

О МЕРАХ СИММЕТРИИ

С. С. Кутателадзе

Изучается вопрос о восстановлении сверхминимальной меры симметрии по ее значениям на неразложимых многогранниках. Библ. 6 назв.

0^0. Известна задача Грюнбаума об описании мер симметрии, удовлетворяющих так называемому условию сверхминимальности [1]. В настоящей заметке устанавливается связь задач такого типа с теорией Шоке — теорией интегральных представлений компактов [2]. В частности, дается в известном смысле полное описание классов мер симметрии, удовлетворяющих более сильному, чем сверхминимальность, условию супераддитивности относительно сложения Бляшке. Выбор этого сложения, а не стандартного сложения поверхностей по Минковскому, определяется прежде всего теоремой Шепарда [3], утверждающей отсутствие нетривиальных аппроксимирующих классов в конусе более чем двумерных выпуклых компактов. Этот факт означает бесперспективность классификации мер симметрии по принимаемым ими значениям на множестве неразложимых многогранников.

1°. Пусть $\mathfrak{V}_n$ — множество выпуклых компактов в R^n и $\mathfrak{V}_n/R^n$ — фактор $\mathfrak{V}_n$ по отношению эквивалентности, определяемому равенством поверхностей с точностью до параллельного переноса. Пусть, далее, Z_n — единичная евклидова сфера в R^n и $\mathfrak{A}_n$ — множество положительных регулярных борелевских мер на Z_n, ортогональных к следам линейных функций на Z_n. Последнее свойство мер называется инвариантностью относительно сдвигов.

Между $\mathfrak{V}_n/R^n$ и $\mathfrak{A}_n$ существует естественная биекция. Именно, класс точек отождествляется с нулевой мерой.

Классу, содержащему отрезок с концами x, y, сопоставляется мера $|x-y|\,(\varepsilon_{(x-y)/|x-y|}+\varepsilon_{(y-x)/|x-y|})$, где $|\cdot|$ — евклидова длина, а ε_x — мера Дирака, т. е. единичная масса в точке x. Наконец, если размерность аффинной оболочки $A(\mathfrak{x})$ представителя $\mathfrak{x}$ класса поверхностей из $\mathfrak{V}_n/R^n$ больше единицы, то считается, что $A(\mathfrak{x})$ — подпространство R^n и класс отождествляется с поверхностной функцией $\mathfrak{x}$ в $A(\mathfrak{x})$, являющейся в данном случае некоторой мерой на $Z_n \cap A(\mathfrak{x})$. Продолжая эту меру тривиальным способом до меры на Z_n, получаем меру из $\mathfrak{A}_n$, отвечающую классу, порожденному $\mathfrak{x}$. Биективность такого соответствия может быть установлена с помощью теоремы Александрова о восстановлении поверхности по ее поверхностной функции (ср. [4]).

Структура векторного пространства в пространстве регулярных борелевских мер индуцирует в $\mathfrak{A}_n$ и, следовательно, в $\mathfrak{V}_n/R^n$ структуру конуса (точнее, структуру R_+-операторной коммутативной полугруппы с сокращением). Эта структура в $\mathfrak{V}_n/R^n$ называется *структурой Бляшке* (см. [5]).

В дальнейшем, как правило, различие между выпуклым компактом, соответствующим классом в $\mathfrak{V}_n/R^n$ и отвечающей этому классу мерой в $\mathfrak{A}_n$ проводиться не будет.

2°. Пусть теперь $C(Z_n)/R^n$ — фактор-пространство пространства $C(Z_n)$ непрерывных на Z_n функций по подпространству следов линейных функций на Z_n и $\mathfrak{A}_n$ — $\mathfrak{A}_n$ — пространство инвариантных относительно сдвигов мер. Указанные пространства находятся в каноничеcкой двойственности. Наделим $\mathfrak{A}_n$ топологией, индуцированной слабой топологией $\sigma(\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}_n,\ C(Z_n)/R^n)$ пространства $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}_n$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{A}_n^1 = \{\mu \in \mathfrak{A}_n : \mu(Z_n) = 1\}$ вероятностных инвариантных относительно сдвигов мер. Отметим, что $\mathfrak{A}_n^1$ — компактное основание конуса $\mathfrak{A}_n$. На геометрическом языке $\mathfrak{A}_n^1$ — множество компактов, площадь поверхности которых (подсчитанная в соответствующей аффинной оболочке) равна единице.

Мерой симметрии (точнее, супераддитивной мерой симметрии) называется функция $f : \mathfrak{A}_n^1 \to R$ такая, что

(1) f — вогнутая функция;

(2) f — полунепрерывная сверху функция;

(3) $0 \leqslant f(\mathfrak{x}) \leqslant 1$ для всех $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_n^1$;

(4) $f(\mathfrak{x}) = 1$ в том и только в том случае, если $\mathfrak{x}$ — центрально-симметричная поверхность.

Отметим, что множество центрально-симметричных поверхностей в $\mathfrak{A}_n$ реализуется как множество симметричных мер (мера μ на Z_n симметрична, если для всякого борелевского множества $e \subset Z_n$ справедливо $\mu(e) = \mu(-e)$).

Замечание 1. Меры симметрии обычно определяют, не фиксируя выбора компактного основания в $\mathfrak{V}_n/R^n$ или в $\mathfrak{A}_n$. Поскольку при этом требуется инвариантность мер относительно растяжений, то выбор основания фактически не существен.

Пример. Пусть $\mathfrak{x}$ — произвольный компакт (мера) из $\mathfrak{A}_n^1$. Рассмотрим множество $S(\mathfrak{x})$ таких симметричных компактов $\mathfrak{y}$, что $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} \in \mathfrak{A}_n$. Отметим, что это множество непусто. Положим

$$f_{\min}(\mathfrak{x}) = \sup \{\mathfrak{y}(Z_n) \colon \mathfrak{y} \in S(\mathfrak{x})\}.$$

Очевидно, что $f_{\min}$ является вогнутой функцией, удовлетворяющей условию (3). Нетрудно видеть, что $f_{\min}$ — мера симметрии. Этот факт можно извлечь из приводимой ниже теоремы, однако проще провести его проверку непосредственно. Проверим только справедливость условия (4). (Формально этот факт удобно использовать при доказательстве основной теоремы.) Достаточно установить, что если $f_{\min}(\mathfrak{x}) = 1$, то $\mathfrak{x}$ — центрально-симметрично. В силу компактности множества $S(\mathfrak{x})$ найдется $\mathfrak{y} \in S(\mathfrak{x})$, для которого $f_{\min}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{y}(Z_n) = 1$. Мера $\mathfrak{y}$ симметрична, причем $\mathfrak{y} \leqslant \mathfrak{x}$. Кроме того, площади поверхности $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ совпадают. Таким образом, мера $\mathfrak{x} - \mathfrak{y}$ входит в конус, двойственный к конусу допустимых направлений, к конусу поверхностей в структуре Минковского, к единичному шару. Так как шар — регулярная поверхность, то по предложению 4.1.1 из [6] $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}$. Отметим в заключение, что мера симметрии $f_{\min}$ является подобно инвариантной, т. е. для любого движения D пространства R^n выполняется

$$f_{\min}(D\mathfrak{x}) = f_{\min}(\mathfrak{x}).$$

Замечание 2. Важность меры симметрии $f_{\min}$ определяется тем обстоятельством, что, как мы увидим ниже, любая (подобно инвариантная) мера симметрии мажорирует $f_{\min}$.

3°. Как известно, вогнутые функции в некотором смысле определяются своими значениями на границе Шоке пространства аффинных функций — на множестве крайних точек компакта. Чтобы воспользоваться этим положением для анализа мер симметрии, установим почти очевидное

Предложение. *Замыкание множества* ex $(\mathfrak{A}_n^1)$ *крайних точек* $\mathfrak{A}_n^1$ *состоит из симплексов (включая вырожденные), т. е. из вероятностных дискретных мер на* Z_n *с носителем не более чем в* $n+1$ *точках. Множество крайних точек симметричных компактов из* $\mathfrak{A}_n^1$ *замкнуто и совпадает с множеством отрезков.*

Доказательство. Замкнутость множества симплексов и отрезков в топологии $\sigma(\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}_n, C(Z_n)/R^n)$ очевидна. Действительно, множество отрезков из $\mathfrak{A}_n^1$ есть непрерывный образ сферы Z_n, а множество симплексов есть образ компакта

$$\left\{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in (R^n)^{n+1} : \sum_{k=1}^{n+1} z_k = 0, \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| = 1\right\}$$

при непрерывном отображении

$$(z_1, \ldots, z_{n+1}) \mapsto \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| \varepsilon_{z_k/|z_k|},$$

где считается, что $|z| \varepsilon_{z/|z|} = 0$ при $z = 0$.

Справедливость предложения следует теперь, например, из мильмановского обращения теоремы Крейна—Мильмана и теорем Грюнбаума и Фаэри о разложении многогранников [4].

ТЕОРЕМА. *Пусть* O *— множество отрезков в* $\mathfrak{A}_n^1$ *и* $T = \text{ex}(\mathfrak{A}_n^1) \setminus O$ *— множество невырожденных симплексов, а* g *— полунепрерывная сверху функция на* ex $(\mathfrak{A}_n^1)$, *причем* g *положительна, обращается в нуль вне замкнутого подмножества* ex $(\mathfrak{A}_n^1)$ *и*

$$g(\mathfrak{x}) = 1 \quad \text{для} \quad \mathfrak{x} \in O,$$
$$g(\mathfrak{x}) \leqslant 1 - \varepsilon \quad \text{для} \quad \mathfrak{x} \in T$$

при некотором $\varepsilon > 0$. *Тогда*

(а) *найдется мера симметрии* f *такая, что сужение* $f|_{\text{ex}(\mathfrak{A}_n^1)}$ *меры* f *на* ex $(\mathfrak{A}_n^1)$ *совпадает с* g;

(б) *среди мер симметрии f таких, что* $f|_{\mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)} = g$, *существует наименьшая мера симметрии* $g_{\min}$, *причем*

$$g_{\min}(\mathfrak{x}) = \sup_{\mu} \int_{\mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)} g\, d\mu,$$

где супремум берется по всем вероятностным мерам на $\mathfrak{A}_n^1$, *представляющим точку* $\mathfrak{x}$ (*т. е. с барицентром в* $\mathfrak{x}$);

(в) *мера симметрии* $f_{\min}$ — *наименьший элемент множества всех мер симметрии.*

Доказательство. (а) и (б). Пусть $g_0(\mathfrak{x}) = g(\mathfrak{x})$ для $\mathfrak{x} \in \mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)$ и $g_0(\mathfrak{x}) = 0$ для $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_n^1 \setminus \mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)$. Очевидно, что g_0 — полунепрерывная сверху функция. Рассмотрим верхнюю огибающую $\hat{g}_0$ функции g_0, т. е.

$$\hat{g}_0(\mathfrak{x}) = \inf\{h(\mathfrak{x}) : h \in A,\ h \geqslant g_0\},$$

где A — множество непрерывных аффинных функций на $\mathfrak{A}_n^1$. По теореме Эрве [2] имеем, что $\hat{g}_0|_{\mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)} = g$, при этом

$$\hat{g}_0(\mathfrak{x}) = \sup_{\mu} \int_{\mathfrak{A}_n^1} g_0\, d\mu = \sup_{\mu} \int_{\mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)} g\, d\mu,$$

где супремум вычисляется по всем вероятностным мерам на $\mathfrak{A}_n^1$, представляющим точку $\mathfrak{x}$. Поскольку $\hat{g}_0$ — наименьшая вогнутая полунепрерывная сверху функция, принимающая значения g на границе $\mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)$, то для доказательства (а) и (б) следует проверить только, что $\hat{g}_0$ — мера симметрии. Следует установить справедливость (4).

Пусть сначала $\mathfrak{x}$ — симметричный компакт из $\mathfrak{A}_n^1$. По теореме Шоке найдется максимальная мера на множестве симметричных компактов, представляющая точку $\mathfrak{x}$. Поскольку множество крайних точек O является замкнутым, то μ сосредоточена на O.

Итак,

$$\hat{g}_0(\mathfrak{x}) \geqslant \int_{\mathfrak{A}_n^1} g_0\, d\mu = \int_O g\, d\mu = \mu(O) = 1.$$

Так как, очевидно,

$$\hat{g}_0(\mathfrak{x}) \leqslant 1, \quad \text{то} \quad \hat{g}_0(\mathfrak{x}) = 1.$$

(б) *среди мер симметрии* f *таких, что* $f|_{\mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)} = g$, *существует наименьшая мера симметрии* $g_{\min}$, *причем*

$$g_{\min}(\mathfrak{x}) = \sup_{\mu} \int_{\mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)} g\,d\mu,$$

где супремум берется по всем вероятностным мерам на $\mathfrak{A}_n^1$, *представляющим точку* $\mathfrak{x}$ (*т. е. с барицентром в* $\mathfrak{x}$);

(в) *мера симметрии* $f_{\min}$ — *наименьший элемент множества всех мер симметрии.*

Доказательство. (а) и (б). Пусть $g_0(\mathfrak{x}) = g(\mathfrak{x})$ для $\mathfrak{x} \in \mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)$ и $g_0(\mathfrak{x}) = 0$ для $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_n^1 \setminus \mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)$. Очевидно, что g_0 — полунепрерывная сверху функция. Рассмотрим верхнюю огибающую $\hat{g}_0$ функции g_0, т. е.

$$\hat{g}_0(\mathfrak{x}) = \inf \{h(\mathfrak{x}) \colon h \in A,\ h \geqslant g_0\},$$

где A — множество непрерывных аффинных функций на $\mathfrak{A}_n^1$. По теореме Эрве [2] имеем, что $\hat{g}_0|_{\mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)} = g$, при этом

$$\hat{g}_0(\mathfrak{x}) = \sup_{\mu} \int_{\mathfrak{A}_n^1} g_0\,d\mu = \sup_{\mu} \int_{\mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)} g\,d\mu,$$

где супремум вычисляется по всем вероятностным мерам на $\mathfrak{A}_n^1$, представляющим точку $\mathfrak{x}$. Поскольку $\hat{g}_0$ — наименьшая вогнутая полунепрерывная сверху функция, принимающая значения g на границе $\mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)$, то для доказательства (а) и (б) следует проверить только, что $\hat{g}_0$ — мера симметрии. Следует установить справедливость (4).

Пусть сначала $\mathfrak{x}$ — симметричный компакт из $\mathfrak{A}_n^1$. По теореме Шоке найдется максимальная мера на множестве симметричных компактов, представляющая точку $\mathfrak{x}$. Поскольку множество крайних точек O является замкнутым, то μ сосредоточена на O.

Итак,

$$\hat{g}_0(\mathfrak{x}) \geqslant \int_{\mathfrak{A}_n^1} g_0\,d\mu = \int_O g\,d\mu = \mu(O) = 1.$$

Так как, очевидно,

$$\hat{g}_0(\mathfrak{x}) \leqslant 1, \quad \text{то} \quad \hat{g}_0(\mathfrak{x}) = 1.$$

Пусть, наоборот, $\hat{g}_0(\mathfrak{x}) = 1$ для некоторого $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_n^1$. Как известно, найдется вероятностная мера μ с барицентром в точке $\mathfrak{x}$ такая, что $\hat{g}_0(\mathfrak{x}) = \mu(g_0)$.

Имеем

$$1 = \int_{\mathfrak{A}_n^1} g_0\,d\mu = \int_{\mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)} g_0\,d\mu = \int_T g\,d\mu + \int_O g\,d\mu \leqslant$$
$$\leqslant (1-\varepsilon)\,\mu(T) + \mu(O) = \mu(\mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)) - \varepsilon\mu(T) \leqslant 1 - \varepsilon\mu(T) \leqslant 1.$$

Следовательно, сужение μ на O является вероятностной мерой, представляющей точку $\mathfrak{x}$ и по доказанному предложению $\mathfrak{x}$ — центрально-симметричное множество.

(в) Пусть $(\chi_O)_{\min}$ — мера симметрии, построенная для характеристической функции χ_O множества отрезков с помощью пункта (б) теоремы. Если f — мера симметрии и $\mathfrak{x}$ — точка из $\mathfrak{A}_n^1$, то для меры μ, представляющей $\mathfrak{x}$, имеем

$$\mu(f) \leqslant f(\mathfrak{x}).$$

Отсюда следует, что

$$\mu(O) \leqslant f(\mathfrak{x}).$$

Итак,

$$(\chi_O)_{\min}(\mathfrak{x}) = \sup_\mu \int_{\mathrm{ex}(\mathfrak{A}_n^1)} \chi_O\,d\mu = \sup_\mu \mu(O) \leqslant f(\mathfrak{x}),$$

т. е. мера $(\chi_O)_{\min}$ — наименьшая мера симметрии.

Осталось проверить, что $(\chi_O)_{\min}$, совпадает с построенной в примере мерой симметрии $f_{\min}$.

Пусть $f_{\min}(\mathfrak{x}) = t$. Если $t = 1$, то $\mathfrak{x}$ — симметрично и $(\chi_O)_{\min}(\mathfrak{x}) = 1$. Допустим, что $1 > t > 0$. Найдется элемент $\mathfrak{y} \in S(\mathfrak{x})$ такой, что $f_{\min}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{y}(Z_n)$. Положим $\mathfrak{z} = \mathfrak{x} - \mathfrak{y}$, и пусть μ_1 — мера, сосредоточенная на O и представляющая $\mathfrak{y}/t$, а μ_2 — мера, представляющая $\mathfrak{z}/(1-t)$. Поскольку $\mathfrak{x} = t(\mathfrak{y}/t) + (1-t)(\mathfrak{z}/(1-t))$, то мера $t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ представляет $\mathfrak{x}$. Следовательно,

$$(\chi_O)_{\min}(\mathfrak{x}) \geqslant (t\mu_1 + (1-t)\mu_2)(O) \geqslant t\mu_1(O) = t = f_{\min}(\mathfrak{x}).$$

Итак, положив $(\chi_O)_{\min}(\mathfrak{y}) = t_1$, имеем, что $1 > t_1 > 0$. Пусть теперь μ — вероятностная мера, представляющая

$\mathfrak{x}$ и такая, что $\mu(O) = t_1$. Рассмотрим меры μ_1 и μ_2 — следы μ на O и $\mathfrak{A}_n^1 \setminus O$ соответственно. Имеем

$$\mu = t_1 (\mu_1/t_1) + (1 - t_1) (\mu_2/ (1 - t_1)).$$

Пусть $\mathfrak{y}$ — центрально-симметричная поверхность, представляемая мерой μ_1/t_1. Тогда тело

$$t_1\mathfrak{y} \in S(\mathfrak{x}).$$

Следовательно,

$$f_{\min}(\mathfrak{x}) \geqslant t_1\mathfrak{y}(Z_n) = t_1 = (\chi_O)_{\min}(\mathfrak{x}).$$

Таким образом, фактически доказано, что если одно из чисел $f_{\min}(\mathfrak{x})$ и $(\chi_O)_{\min}(\mathfrak{x})$ не нуль, то эти числа совпадают. Теорема доказана полностью.

Замечание 3. Наделим $\mathfrak{B}_n/R^n$ стандартной структурой Минковского, порожденной алгебраическим сложением множеств, и топологией, порожденной метрикой Бляшке (см., например, [5]). В качестве компактного основания Q_n локально компактного конуса $\mathfrak{B}_n/R^n$ возьмем множество поверхностей единичной интегральной ширины. Если в определении меры симметрии теперь заменить компакт $\mathfrak{A}_n^1$ на Q_n и вогнутость понимать в структуре Минковского, то получается также непустой класс мер симметрии, удовлетворяющих условию сверхминимальности. Действительно, пусть $\hat{\mathfrak{x}}$ — наибольшая центрально-симметричная фигура, содержащаяся в $\mathfrak{x}$ (тело Ковнера — Безиковича). Положим

$$f : \mathfrak{x} \mapsto (\text{интегральная ширина } \hat{\mathfrak{x}}).$$

Ясно, что f — подобно инвариантная мера симметрии. Эту функцию называют также F_σ^* мерой симметрии Фаэри [1].

Уместно отметить, что мера f, разумеется, не наименьшая. Вопрос о минимальной мере симметрии (который решает при $n = 2$ приведенная выше теорема) в случае $n \geqslant 3$ представляется необозримым на языке теории Шоке. Дело в том, что граница Шилова компакта Q_n в этом случае совпадает с Q_n, иными словами, в Q_n плотны крайние точки (см. [3]).

Институт математики
СО АН СССР

Поступило
14. I. 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Грюнбаум Б., Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел, М., «Наука», 1971.

[2] Alfsen E., Compact convex sets and boundary integrals, Berlin — Heidelberg — New York, Springer, 1971.

[3] Shephard G., Approximation problems for convex polyhedra, Mathematika, **11**, № 1 (1964), 9—18.

[4] Firey W., Grünbaum B., Addition and decomposition of convex polytopes, Israel J. Math. **2**, № 2 (1964), 91—100.

[5] Кутателадзе С. С., Структура Бляшке в программировании изопериметрических задач, Матем. заметки, **14**, № 5 (1973), 767—775.

[6] Кутателадзе С. С., Рубинов А. М., Двойственность Минковского и ее приложения, Успехи матем. наук, **27**, № 3 (1972), 127—176.