АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

14

НОВОСИБИРСК - 1969

1969 г. Оптимальное планирование Выпуск 14

УДК 513.88: 513.83

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НАД ВЫПУКЛЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

С.С.Кутателадзе

При анализе некоторых экстремальных задач изопериметрического типа, при изучении простейших неравенств между линейными относительно операций Минковского характеристиками выпуклых поверхностей, а также в ряде других вопросов возникает задача о представлении положительного функционала над выпуклыми компактами. Иными словами, нужно иметь обозримое описание конуса, сопряженного к конусу сублинейных функций. При этом последнее множество естественно рассматривать в пространстве борелевских мер.

В настоящей работе поляра конуса сублинейных функций характеризуется в терминах отношения порядка, родственного так называемой сильной упорядоченности Люмиса. Однако, идея доказательства близкой теоремы Картье-Фелла-Мейе [1] в данном случае, по-видимому, не пригодна.

Напомним ситуацию (детали приводятся в [2]). Пусть R^n есть n-мерное арифметическое пространство с евклидовой нормой $|\cdot|$. Обозначим через $Sub(R^n)$ совокупность сублинейных (непрерывных, положительно однородных, выпуклых, определенных на всем R^n)функций. Наделим этот конус топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах R^n и упорядочим $Sub(R^n)$ обычным способом. Обозначим через V_n совокупность выпуклых компактных подмножеств R^n. Пусть еще отображение $I: Sub(R^n) \to V_n$ действует по формуле

$$h \to I_h \triangleq \bigcap_{y \in R^n} \{x \in R^n : (x,y) \leq h(y)\}.$$

Знак $\triangleq$ здесь и в дальнейшем означает "по определению".

Хорошо известно, что соответствие I биективно, причем обратное к нему отображение переводит выпуклый компакт из V_n

в его опорную функцию. Как обычно, под конусом выпуклых множеств мы будем понимать множество $\mathcal{W}_n$ с топологической, алгебраической и порядковой структурами, полученными переносом при помощи биекции I соответствующих структур из $Sub(R^n)$.

Известно, что упорядоченное нормированное пространство разностей сублинейных функций изометрично некоторой всюду плотной подструктуре пространства $C(Z_n)$ непрерывных функций с чебышевской нормой. Здесь Z_n – единичная сфера с центром в нуле в пространстве R^n. При этом изоморфизм, о котором идет речь, задается отождествлением функции, являющейся разностью двух сублинейных, с её следом на Z_n. В частности, элементы $Sub(R^n)$ переходят в точки конуса H_n, определенного соотношением:

$$H_n \triangleq \left\{h \in C(Z_n): |x|\, h\left(\frac{x}{|x|}\right)+|y|\, h\left(\frac{y}{|y|}\right)-|x+y|\, h\left(\frac{x+y}{|x+y|}\right) \geq 0 \ \ (x,y \in R^n)\right\}.$$

В последней формуле если $z=0$, то $|z|\, h\left(\frac{z}{|z|}\right) \triangleq 0$. С этого момента символ $\mathcal{W}_n$ будет использоваться для обозначения каждого из трех объектов $\mathcal{W}_n$, $Sub(R^n)$ и H_n.

Из всего сказанного следует, что искомое множество $\mathcal{W}_n^*$ положительных линейных относительно операций Минковского функционалов над выпуклыми поверхностями описывается соотношением:

$$\mathcal{W}_n^* = \{\mu \in C^*(Z_n): \mu(x) \geq 0 \ \ (x \in \mathcal{W}_n)\}.$$

Здесь $C^*(Z_n)$ есть пространство, сопряженное к $C(Z_n)$. При этом мы будем считать уже проведенным отождествление мер Радона с борелевскими мерами на Z_n.

Введем некоторые обозначения. Пусть $x, y \in \mathcal{W}_n$. Запись $x \underset{T}{\geq} y$ означает, что найдется вектор $u \in R^n$ такой, что $x \supset y + u$. Запись $x \underset{T}{\gtrsim} y$ (словами: y "T – предшествует" x) означает, что для всякого выпуклого тела $z \in \mathcal{W}_n$ выполняется соотношение $V_1(x, z) \geq V_1(y, z)$, где $V_1(\cdot,\cdot)$ соответствующий смешанный объем [3]. Для меры (числа) μ через μ^+ и μ^- будем обозначать соответственно положительную и отрицательную вариации (части) μ. Договоримся еще обозначать через ε_z $(z \in Z_n)$ меру из $C^*(Z_n)$, порожденную единичной массой, расположенной в точке z.

О п р е д е л е н и е I. Пусть μ и ν меры из $C^*(Z_n)$. Говорят, что μ линейно эквивалентна ν $(\mu \underset{L}{\sim} \nu)$, если $\mu(\overset{i}{z})=\nu(\overset{i}{z})$ $(i=1,2,\ldots,n)$, где $\overset{i}{z} \in C(Z_n)$ – функция, сопоставляющая каждому вектору из Z_n его i -тую компоненту.

Определение 2. Пусть μ и ν неотрицательные меры. Говорят, что μ линейно сильнее ν ($\mu \underset{L}{\gg} \nu$) , если для любого конечного набора мер $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s \geq 0$ таких, что $\sum\limits_{k=1}^{s} \nu_k = \nu$ (коротко: " для любого разбиения ν "), найдется разбиение $\mu_k \geq 0$; $\sum\limits_{k=1}^{s} \mu_k = \mu$ меры μ , обладающее тем свойством, что $\mu_k \underset{L}{\succsim} \nu_k$ $(k=1,2,\dots,s)$. Это определение введено Ю.Г.Решетняком в [4].

Предложение I.

I. $(\mu \geq \nu \geq 0$ и $\mu \underset{L}{\succsim} \nu) \Longrightarrow \mu \underset{L}{\gg} \nu$.

2. $(\mu \geq 0$ и $\mu \sim \varepsilon_z) \Longrightarrow \mu \underset{L}{\gg} \varepsilon_z$.

3. $(\mu_1 \underset{L}{\gg} \nu_1$ и $\mu_2 \underset{L}{\succsim} \nu_2) \Longrightarrow \mu_1 + \mu_2 \underset{L}{\gg} \nu_1 + \nu_2$.

4. Пусть $\mu, \nu, \delta \geq 0$, причем носитель меры δ конечен, тогда если $\mu + \delta \underset{L}{\gg} \nu + \delta$, то и $\mu \underset{L}{\gg} \nu$.

Доказательство. Проверим лишь последнее утверждение. Достаточно, очевидно, рассмотреть случай $\delta = \varepsilon_z$.

Пусть $\nu_k \geq 0$; $\sum\limits_{k=1}^{s} \nu_k = \nu$ - разбиение меры ν , тогда для разбиения $\varepsilon_z, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$ меры $\nu + \delta$ найдется разбиение μ_0, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ меры $\mu + \delta$ такое, что $\mu_0 \underset{L}{\succsim} \varepsilon_z$ и $\mu_k \underset{L}{\succsim} \nu_k$ $(k=1,2,\dots,s)$. По теореме Радона-Никодима найдутся измеримые по Борелю функции $f_0, f_1, \dots, f_s$, удовлетворяющие условиям:

$$0 \leq f_0,\ f_k \leq 1; \qquad f_0 + \sum_{k=1}^{s} f_k = 1;$$

$$\mu_k = f_k(\mu + \delta) = f_k \mu + f_k \delta = f_k \mu + f_k(z)\delta;$$

$$\mu_0 = f_0(\mu + \delta) = f_0 \mu + f_0 \delta = f_0 \mu + f_0(z)\delta;$$

Если $f_0(z) = 1$, то $f_0 \mu \underset{L}{\succsim} 0$ и $f_k \mu \underset{L}{\succsim} \nu_k$ $(k=1,2,\dots,s)$, т.е. требуемое разбиение меры μ дают меры

$$\tilde{\mu}_k \triangleq f_k \mu + \frac{1}{s} f_0 \mu \qquad (k=1,2,\dots,s).$$

Если $f_0(z) < 1$, то функция $\frac{f_k(z) f_0}{1 - f_0(z)}$ измерима по Борелю и требуемое разбиение меры μ определяется формулой:

$$\bar{\mu}_k \triangleq \left(f_k + \frac{f_k(z) f_0}{1 - f_0(z)}\right)\mu \qquad (k=1,2,\dots,s).$$

Так как для ν было взято произвольное разбиение, то $\mu \underset{L}{\gg} \nu$.

Предложение 2. Пусть $\mu \underset{L}{\gg} \nu$, тогда $\mu - \nu \in W_n^*$.

Доказательство. Пусть h произвольный элемент W_n . Как легко понять, найдется последовательность элементов $h_t \in W_n$, равномерно сходящаяся к h , причем $h_t = \sup\limits_{1 \leq k \leq p_t} \ell_k^t$ и ℓ_k^t линейные функционалы над R^n. Теперь, очевидно, достаточно показать, что для функций вида $\tilde{h} \triangleq \sup\limits_{1 \le k \le s} \ell_k$, где $\ell_k \in R^n$ $(k = 1, 2, \dots, s)$ из условия $\mu \underset{L}{\gg} \nu$ вытекает неравенство $\mu(\tilde{h}) \ge \nu(\tilde{h})$.

Пусть $E_k \triangleq \{ z \in Z_n : \tilde{h}(z) = \ell_k(z) \}$ $(k = 1, 2, \dots, s)$. Ясно, что E_k – борелевское множество. Положим еще

$$E_1' \triangleq E_1 ;\ E_2' \triangleq (Z_n \setminus E_1') \cap E_2 ; \dots ;\ E_s' \triangleq (Z_n \setminus \bigcup_{k=1}^{s-1} E_k') \cap E_s .$$

Ясно, что $E_1', E_2', \dots, E_s'$ – борелевские непересекающиеся множества, причем $\bigcup\limits_{k=1}^{s} E_k' = Z_n$. Кроме того, на множестве E_k' функция $\tilde{h}$ совпадает с ℓ_k.

Пусть теперь $\nu_k \triangleq \nu_{/E_k'}$ – ограничение меры ν на множество E_k', тогда $\nu_k \ge 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{s} \nu_k = \nu$. Следовательно, найдется разбиение $\mu_k \ge 0$, $\sum\limits_{k=1}^{s} \mu_k = \mu$ меры μ такое, что $\mu_k \underset{L}{\sim} \nu_k$. $(k = 1, 2, \dots, s)$. Тогда

$$\nu(\tilde{h}) = \Big(\sum_{k=1}^{s} \nu_k \Big) (\tilde{h}) = \sum_{k=1}^{s} \nu_k(\ell_k) = \sum_{k=1}^{s} \mu_k(\ell_k) \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{s} \mu_k(\tilde{h}) = \mu(\tilde{h}).$$

Таким образом, $(\mu - \nu)(\tilde{h}) \ge 0$ что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е . Отношение $\underset{L}{\gg}$ является частичным порядком.

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_p$ ненулевые векторы из R^n, причем для любой сублинейной функции $h \in W_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} h(x_k) \ge \sum_{k=1}^{p} h(y_k) , \tag{I}$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k| \, \varepsilon_{\frac{x_k}{|x_k|}} \underset{L}{\gg} \sum_{k=1}^{p} |y_k| \, \varepsilon_{\frac{y_k}{|y_k|}} .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не нарушая общности, можно считать, что $m = p$. В противном случае, если, например, $m > p$, то перейдем к набору

$$y_1' \triangleq y_{p+1}' \triangleq \dots \triangleq y_m' \triangleq \frac{1}{m-p+1} y_1 ;\quad y_2' \triangleq y_2, \dots, y_p' \triangleq y_p .$$

Введем теперь в рассмотрение следующее множество:

$$S \triangleq \Big\{ Z = (z_1, \dots, z_p) \in (R^n)^p : z_k = \sum_{s=1}^{p} \alpha_s^k x_s ;\ \alpha_s^k \ge 0 ;\ \sum_{k=1}^{p} \alpha_s^k = 1 \Big\} .$$

Ясно, что S – выпуклый компакт, так как S есть образ множества N квадратных стохастических матриц при отображении

$$N \ni \|\alpha_k^s\| \longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k^1 x_k, \sum_{k=1}^{p}\alpha_k^2 x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{p}\alpha_k^p x_k\right) \in (R^n)^p.$$

Допустим, что набор $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ не принадлежит S. Из теоремы отделимости следует, что найдется вектор $C=(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ из $(R^n)^p$ такой, что для любого набора $Z=(z_1, z_2, \ldots z)\in S$ справедливо неравенство:

$$\sum_{k=1}^{p}(c_k, z_k) < \sum_{k=1}^{p}(c_k, y_k).$$

Пусть P есть выпуклый многогранник в R^n, натянутый на точки $c_1, c_2, \ldots, c_p$. Возьмем теперь $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ – произвольную точку из $P^p \subset (R^n)^p$, тогда

$$\sum_{k=1}^{p}(x_k, u_k) < \sum_{k=1}^{p}(c_k, y_k). \qquad (2)$$

В самом деле, $u_k=\sum_{s=1}^{p}\beta_s^k c_s$ $(k=1,2,\ldots,p)$, где $\beta_s^k \geq 0$ и $\sum_{s=1}^{p}\beta_s^k=1$ откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^{p}(x_k, u_k) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{p}(c_s, \beta_s^k x_k) = \sum_{s=1}^{p}\left(c_s, \sum_{k=1}^{p}\beta_s^k x_k\right) < \sum_{s=1}^{p}(c_s, y_s),$$

т.к. вектор $\left(\sum_{k=1}^{p}\beta_1^k x_k, \sum_{k=1}^{p}\beta_2^k x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{p}\beta_p^k x_k\right)$ лежит в S.

Пусть теперь векторы $\bar{u}_k \in \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$ таковы, что $(\bar{u}_k, x_k) = \max_{1\leq s\leq p}(c_s, x_k)$. Для каждого $k=1,2,\ldots,p$ тогда, очевидно,

$$P \subset \{z\in R^n : (z, x_k) \leq (\bar{u}_k, x_k)\}. \qquad (3)$$

Кроме того, $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_p \in P$. Обозначим через h опорную функцию многогранника P, тогда в силу (I), (2) и (3) имеем:

$$\sum_{k=1}^{p}h(x_k) \leq \sum_{k=1}^{p}(\bar{u}_k, x_k) < \sum_{k=1}^{p}(c_k, y_k) \leq \sum_{k=1}^{p}h(y_k) \leq \sum_{k=1}^{p}h(x_k).$$

Полученное противоречие доказывает, что $Y\in S$, откуда следует существование чисел $\alpha_k^s \geq 0$; $\sum_{s=1}^{p}\alpha_k^s=1$ $(k=1,2,\ldots,p)$ таких, что

$$|y_s|\,\mathcal{E}_{\frac{y_s}{|y_s|}} \underset{L}{\sim} \sum_{k=1}^{p}\alpha_k^s |x_k|\,\mathcal{E}_{\frac{x_k}{|x_k|}} \qquad (s=1,2,\ldots,p).$$

Теперь требуемый результат непосредственно следует из предложения 1.

П р е д л о ж е н и е 4. Пусть μ и ν неотрицательные меры из $C^*(Z_n)$, такие что $\mu-\nu\in W_n^*$ и носитель меры μ конечен, тогда $\mu \underset{L}{\geqslant} \nu$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\nu_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{S}\nu_k=\nu$ –разбиение ν. Для каждого $k=1,2,\ldots,S$ отображение

$R^n \ni z \longrightarrow \nu_k(z) \in R$ определяет линейный функционал над R^n. Таким образом, найдется вектор $u_k \in R^n$ такой, что $(u_k, z) = \nu_k(z)$ для всех $z \in R^n$. Из предложений I,2 вытекает, что для каждой сублинейной функции $h \in W_n$ выполняется соотношение

$\nu_k(h) \geqslant h(u_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$. Отсюда

$$\mu(h) \geqslant \nu(h) = \sum_{k=1}^{s} \nu_k(h) \geqslant \sum_{k=1}^{s} h(u_k) \qquad (h \in W_n).$$

Так как мера μ дискретна, то по предложению 3 найдется разбиение $\mu_k \geqslant 0$; $\sum_{k=1}^{s} \mu_k = \mu$ такое, что $\mu_k(z) = (z, u_k)$ $(k=1,2,\ldots,s;\ z \in R^n)$.

Таким образом, $\mu_k \underset{L}{\sim} \nu_k$ $(k=1,2,\ldots,s)$. Так как для ν было взято произвольное разбиение, то $\mu \underset{L}{\geqslant} \nu$.

Применением обычной аппроксимации многогранниками, теперь получается следующая основная

Т е о р е м а I. $W_n^* = \{\mu \in C^*(Z_n) : \mu^+ \underset{L}{\geqslant} \mu^-\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проверить, что из условия $\mu^+(h) \geqslant \mu^-(h)$ для всякой $h \in W_n$ следует соотношение $\mu^+ \underset{L}{\geqslant} \mu^-$. Заметим, прежде всего, что для $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\mu^+(\overset{i}{z}) = \mu^-(\overset{i}{z}) = -\Big(\sum_{k=1}^{n} \big[\mu^+(\overset{k}{z})\big]^+ \varepsilon_{-e_k} + \big[\mu^+(\overset{k}{z})\big]^- \varepsilon_{e_k}\Big)(\overset{i}{z}) \triangleq -(\delta)(\overset{i}{z}).$$

Здесь $e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{k}, 0, \ldots, 0)$ $(k=1,\ldots,n)$ – базисный орт. Пусть теперь $\bar\mu \triangleq \mu^+ + \delta + \nu$, а $\bar\nu \triangleq \mu^- + \delta + \nu$, где ν -поверхностная функция симплекса, натянутого на точки $0, e_1, e_2, \ldots, e_n$. Ясно, что $\bar\mu - \bar\nu \in W_n^*$. Значит, если мы докажем, что $\bar\mu \underset{L}{\geqslant} \bar\nu$, то по предложению I это будет означать, что $\mu^+ \underset{L}{\geqslant} \mu^-$. Итак, проверим, что $\bar\mu \underset{L}{\geqslant} \bar\nu$.

Отметим, прежде всего, что мера $\bar\mu$ удовлетворяет условиям известной теоремы А.Д. Александрова о восстановлении выпуклого тела по его поверхностной функции [3]. Пусть $\varkappa \in W_n$ таков, что $\mu(\varkappa) = \bar\mu$. Здесь $\mu : W_n \longrightarrow C^*(Z_n)$ - отображение, переводящее выпуклый компакт в его поверхностную функцию.

Пусть теперь $\{\varkappa_m\}$ последовательность многогранников, аппроксимирующая $\varkappa$, причем такая, что $2\varkappa \supset \varkappa_m \supset \varkappa$. Как известно, в этой ситуации $\{\mu(\varkappa_m)\}$ сходится в смысле ослабленной топологии пространства $C^*(Z_n)$ к $\mu(\varkappa)$. Кроме того, ввиду монотонности смешанных объемов, $\mu(\varkappa_m)(h) \geqslant \mu(\varkappa)(h)$ для всякой $h \in W_n$. Таким образом, $\mu(\varkappa_m) - \bar\nu \in W_n^*$. В силу предложения 4 $\mu(\varkappa_m) \underset{L}{\geqslant} \bar\nu$. Теперь нужный результат получается непос редственным предельным переходом, если вспомнить, что ограниченные множества в $C^*(Z_n)$ относительно компактны в ослабленной топологии.

Введем теперь в рассмотрение следующее множество мер, которые естественно назвать "неравенствами сублинейности":

$$NS \triangleq \left\{ |x|\,\mathcal{E}_{\frac{x}{|x|}} + |y|\,\mathcal{E}_{\frac{y}{|y|}} - |x+y|\,\mathcal{E}_{\frac{x+y}{|x+y|}} \;;\; x, y \in R^n \right\},$$

если $z = 0$, то по определению $|z|\,\mathcal{E}_{\frac{z}{|z|}} \triangleq 0$.

Уверенность в том, что никаких неравенств над сублинейными функциями, кроме "следствий" неравенств сублинейности, быть не должно, подтверждает простое

Предложение 5. Замыкание в ослабленной топологии пространства $C^*(Z_n)$ конической выпуклой оболочки $K(NS)$ множества NS совпадает с W_n^*.

Доказательство. Прежде всего, ясно, что $\overline{K(NS)} \subset W_n^*$. Допустим теперь, что существует $\mu_0 \in W_n^*$, не лежащая в $\overline{K(NS)}$. Посмотрим на пространства $C(Z_n)$ и $C^*(Z_n)$ со слабой и ослабленной топологиями соответственно как на пару, дуальную относительно внутреннего произведения:

$$\langle f, \mu \rangle \triangleq \mu(f) = \int_{Z_n} f \, d\mu \qquad (f \in C(Z_n)\ ;\ \mu \in C^*(Z_n)).$$

Тогда по теореме отделимости, найдется функция $h \in C(Z_n)$ такая, что $\langle h, \mu \rangle \geqslant 0$ для всех $\mu \in \overline{K(NS)}$ и $\langle h, \mu_0 \rangle < 0$. Так как $\mu(h) \geqslant 0$, в частности, для всяких $\mu \in NS$, то h есть след сублинейной функции на Z_n, а тогда по определению W_n^* имеем $\mu_0(h) \geqslant 0 > \langle h, \mu_0 \rangle = \mu_0(h)$ – противоречие. Легко проверяется, что

$$K(NS) \subset \{ \mu \in C^*(Z_n) : \mu^+ \underset{L}{\gg} \mu^- \} \subset W_n^*.$$

Значит, основная теорема мгновенно следует из замкнутости среднего множества. К сожалению, последний факт в лоб доказать не удалось. Интересно, что аналогичные соображения справедливы и для случая поляры конуса выпуклых функций. Однако, Картье, Фелл и Мейе также не пошли по этому пути.

Из основной теоремы и результатов работы [2] вытекают несколько связей между упорядоченностью "линейно сильнее" и отношением " T – предшествования".

Теорема 2. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ выпуклые поверхности из W_n. Тогда неравенство

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z) \geqslant V(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z)$$

справедливо для всякого выпуклого компакта $z \in W_n$ тогда и только тогда, если

$$\mu(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}) \underset{L}{\geqslant} \mu(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1}).$$

Здесь $V(\cdot, \ldots, \cdot)$ и $\mu(\cdot, \ldots, \cdot)$ соответственно смешанный объем и смешанная поверхностная функция [3].

Т е о р е м а 3. $\mathfrak{x} \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y} \Longleftrightarrow \mu(\mathfrak{x}) \underset{L}{\geqslant} \mu(\mathfrak{y})$.

Т е о р е м а 4. $\mathfrak{x}_k \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y}_k \ (k=1,2,\ldots,n-1) \Longrightarrow \mu(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}) \underset{L}{\geqslant}$

$\underset{L}{\geqslant} \mu(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1})$.

Т е о р е м а 5. Пусть $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in W_2$. Тогда $\mathfrak{y}$ можно поместить путем параллельного переноса в $\mathfrak{x}$ в том и только том случае, если поверхностная функция $\mathfrak{x}$ линейно сильнее поверхностной функции $\mathfrak{y}$.

В частности, если $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ многоугольники, ненулевые стороны которых имеют соответственно длины X_k, Y_s и внешние единичные нормали U_k, V_s (здесь $k=1,2,\ldots,p; s=1,2,\ldots,t$), то $\mathfrak{x} \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y}$ если и только если совместна система неравенств

$$\begin{cases} \alpha_k^s \geqslant 0 & (k=1,2,\ldots,p;\ s=1,2,\ldots,t); \\ \sum\limits_{s=1}^{t} \alpha_k^s = 1 & (k=1,2,\ldots,p); \\ Y_s V_s = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k^s X_k U_k & (s=1,2,\ldots,t). \end{cases}$$

Из последней теоремы, например, следует, что разность поверхностных функций плоских выпуклых фигур $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ определяет линейный по Минковскому положительный функционал над симметричными выпуклыми плоскими компактами тогда и только тогда, если некоторая трансляция симметризации Минковского фигуры $\mathfrak{y}$ содержится в симметризации Минковского фигуры $\mathfrak{x}$.

Приятный долг автора принести благодарность А.М.Рубинову.

Л и т е р а т у р а

1. Р.Фелпс. Лекции по теоремам Шоке. "Мир", М., 1969.
2. С.С.Кутателадзе, А.М.Рубинов. Задачи типа изопериметра в пространстве выпуклых тел. Наст. сборник, стр. 61-79.
3. Г.Буземан. Выпуклые поверхности. "Наука", М., 1964.
4. Ю.Г.Решетняк. Канд. диссертация. Л., 1954.

Поступила в редакцию

19.VI.1969 г.