АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

14

НОВОСИБИРСК-1969

УДК 513 + 516 + 513.88 : 513.83

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С.С.Кутателадзе

п.1. В работе рассматривается один способ сведения некоторых задач на построение в геометрии выпуклых тел к задачам линейного программирования.

Приведем несколько примеров простейших задач такого сорта:

1.Вписать в многогранник фигуру, подобную данной (под подобием здесь и ниже понимается композиция гомотетии и сдвига).

2.Найти центр многогранника, т.е.такую его точку, для которой достигает максимума минимальное расстояние до граней.

3.Вписать в многогранник два тела,подобных данным, разделенных гиперплоскостью с заданной нормалью, так, чтобы сумма интегральных ширин вписанных тел была максимальной.

4. Описать вокруг шара многогранник с гранями, имеющими данные нормали.

Для простоты будем различать два типа задач на построение. К первому типу отнесем задачи, в которых не фигурируют условия выбора гиперплоскости из семейства параллельных гиперплоскостей (например, задачи 1,2); ко второму типу отнесем задачи, в которых присутствуют условия такого рода (задачи 3,4). Дальнейшее изложение не упростится, если ограничиться конечномерным случаем, поэтому ниже, где возможно, будет использоваться наиболее общая терминология.

п.2. Основным аппаратом работы служит схема Минковского - Фенхеля связи выпуклых множеств и сублинейных функций. Напомним соответствующую конструкцию.

Пусть X - полурефлексивное локально выпуклое пространство, X^* - сопряженное к X , наделенное сильной топологией (все пространства считаются вещественными). Обозначим через $W = W_K(X)$ совокупность ограниченных замкнутых выпуклых под-множеств X. В W вводится структура полугруппы с операторами из R_+ порожденная так называемыми операциями Минковского, то есть алгебраическим сложением множеств и умножением на неотрицательный скаляр. Полуупорядочение в W вводится по включению.

Опорной функцией (функционалом Минковского) множества $\mathfrak{x} \in W$ называют отображение $\varphi_{\mathfrak{x}} : X^* \to R$, определенное соотношением:

$$\varphi_{\mathfrak{x}}(Y) = \sup_{x \in \mathfrak{x}} Y(x) \qquad (Y \in X^*).$$

Ниже, там, где это не вызывает недоразумений, будем без оговорок обозначать множество и его опорную функцию одним и тем же символом.

Через $S = Sub(X^*)$ обозначим множество сублинейных (непрерывных, положительно однородных и субаддитивных) функционалов над X^*, наделенное естественными структурами конуса и частичного порядка. Нетрудно видеть, что отображение $\varphi(\mathfrak{x}) = \varphi_{\mathfrak{x}}$ есть вложение $\varphi : W \to S$. Для каждого $t \in S$ определим индикатриссу $I_t \in W$ формулой $I_t = \bigcap_{Y \in X^*} H^-_{t(Y)}(Y)$. Пусть $I : S \to W$ таково, что $I(t) = I_t$.

Здесь и ниже приняты обозначения ($c \in R$, $Y \in X^*$):

$$H^-_c(Y) = \{x \in X : Y(x) \le c\};$$

$$H_c(Y) = \{x \in X : Y(x) = c\};$$

$$H^+_c(Y) = \{x \in X : Y(x) \ge c\}.$$

Приведем формулировку основной теоремы [2,3].

Т е о р е м а I (Фенхель). Отображения φ, I есть изоморфизмы упорядоченных полугрупп с операторами, причем

$$I \circ \varphi = \mathbb{1}_W; \qquad \varphi \circ I = \mathbb{1}_S$$

(Здесь $\mathbb{1}_M$ есть тождественное отображение множества M на себя).

Эта теорема, очевидно, позволяет однозначно переходить от выпуклых множеств к сублинейным функциям и наоборот.

п.3. Встречающаяся ниже фраза "пусть задано выпуклое $\mathfrak{x} \in W$ "подразумевает существование эффективной процедуры определения значения опорной функции $\mathfrak{x}(Y)$ для каждого фиксированного $Y \in X^*$. Последняя задача есть задача максимизации ли нейного функционала на выпуклом слабом компакте, т.е. в ряде случаев – линейная программа.

Отметим некоторые важные случаи, когда опорная функция выписывается явно:

I. Опорная функция точки $x \in X$ есть $\{x\}(Y) = Y(x)$.

2. Если X – нормированное, то опорная функция единичного шара $S_X = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ есть $S_X(Y) = \|Y\|_{X^*}$.

3. Если X – нормированное пространство, то опорная функция внешнего ε – параллельного множества A_ε к множеству A, т.е. множество точек, отстоящих от A не дальше, чем на $\varepsilon > 0$, есть $A_\varepsilon(Y) = A(Y) + \varepsilon \cdot S_X(Y)$.

Под линейным по Минковскому функционалом понимается отображение $g : \mathcal{W} \to R$ такое, что

I. $g(\alpha x) = \alpha g(x)$ $\quad (\alpha > 0;\ x \in \mathcal{W})$;

2. $g(x + y) = g(x) + g(y)$ $\quad (x, y \in \mathcal{W})$.

Фраза "пусть заданы тела $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{W}$ и линейный по Минковскому функционал g "означает, что известны числа $g(x_i)$. Через $K(\cdot, \cdot, \ldots, \cdot)$ будем обозначать выпуклую коническую оболочку в $\mathcal{W}$ перечисленных множеств.

п. 4. Рассмотрим следующую пару экстремальных задач.

Заданы:

тела $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{W}$

функционалы $Y_1, \ldots, Y_n \in X^*$;

вектор $b \in R^n$;

линейный по Минковскому функционал μ.

ЗАДАЧА I. Ищется тело $x \in \mathcal{W}$ из условий:

I. $x \in K(x_1, \ldots x_m)$;

2. $x \subset H^-_{b_j}(Y_j)$ $\quad (j = 1, 2, \ldots, n)$;

3. $\mu(x)$ – достигает максимума.

ЗАДАЧА Iа. Ищется вектор $y \in R^n$ из условий:

I. $y_j \geq 0$ $\quad (j = 1, 2, \ldots, n)$ (т.е. $y \in R^n_+$);

2. $H^+_{\mu(x_i)}(Y) \cap x_i \neq \Lambda$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, m)$; $\quad Y = \sum_{j=1}^{n} y_j Y_j$;

3. $\nu(y) - (b, y)$ – достигает минимума.

Т е о р е м а 2. Пара задач (I, Iа) эквивалентна некоторой паре двойственных задач линейного программирования.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждому вектору $x \in R^m_+$ ставим в соответствие тело $x = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot x_i$ и, наоборот, каждому

$\varkappa \in K(\varkappa_1,\dots,\varkappa_m)$ поставим в соответствие вектор $x \in R^m_+$, компоненты которого есть коэффициенты в представлении $\varkappa = \sum_{i=1}^{m} x_i \varkappa_i$ *)
Положим $a_{ij} = \varkappa_i(Y_j)$; $c_i = \mu(\varkappa_i)$ $(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$ и составим пару двойственных задач линейного программирования:

А. Найти $x \in R^m$ такой, что	Аа. Найти $y \in R^n$ такой, что
1. $x_i \geq 0 \quad i=(1,2,\dots,m)$;	1. $y_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n)$;
2. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \quad b_j \, (j=1,2,\dots,n)$;	2. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \quad c_i \quad (i=1,2,\dots,m)$;
3. $\mu(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i - max$	3. $\nu(y) = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j - min$.

Заметим, прежде всего, что для любых $B \in W$; $Z \in X^*$; $c \in R$ справедливы соотношения:

1. $B \subset H^-_c(Z)$ тогда и только тогда, когда $B(Z) \leq c$;
2. $B \cap H^+_c(Z) \neq \Lambda$ тогда и только тогда, когда $B(Z) \geq c$.

Используя теперь теорему Фенхеля, получим

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i(Y_j) x_i = \Big(\sum_{i=1}^{m} x_i \varkappa_i\Big)(Y_j) = \varkappa(Y_j) \quad (j=1,2,\dots,n);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \varkappa_i(Y_j) = \varkappa_i\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j Y_j\Big) = \varkappa_i(Y) \quad (i=1,2,\dots,m).$$

Таким образом, установлены эквивалентности :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \leq b_j \iff \varkappa \subset H^-_{b_j}(Y_j) \quad (j=1,2,\dots,n);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geq c_i \iff \varkappa_i \cap H^+_{\mu(\varkappa_i)}(Y) \neq \Lambda \quad (i=1,2,\dots,m);$$

следовательно, пара задач (А,Аа) эквивалентна паре задач (I,Iа).

п.5. Перейдем теперь к задачам второго типа. Сначала дадим

О п р е д е л е н и е. Пусть $Q = \bigcap_{i=1}^{p} H^-_{b_i}(Y_i)$ – многогранник. Текущим многогранником Q_u, порожденным многогранником Q, назовем любой непустой элемент семейства

$$\Big\{ Q_u = \bigcap_{i=1}^{p} H^-_{b_i - u_i}(Y_i) \Big\}_{u \in R^p}.$$

Поставим пару экстремальных задач, нарочито приведенных здесь не в самой рафинированной форме.

Заданы :

тела $\quad \varkappa_i^t \in W \quad (i=1,2,\dots,m(t);\ t=1,2,\dots,s)$;

---

*) Тела $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_m$ предполагаются конически независимыми, если их рассматривать как точки W

функционалы $Y_j^t \in X^*$ $(j=1,2,\ldots,n(t),\ t=1,2,\ldots,s)$;

$$Z_p^t \in X^* \quad (p=1,2,\ldots,\ell(t);\ t=1,2,\ldots,s);$$

векторы $b^t \in R^{n(t)}$; $c^t, d^t \in R^{\ell(t)}$ $(t=1,2,\ldots,s)$; $e \in R^s$,

линейные по Минковскому функционалы q^t $(t=1,2,\ldots,s)$.

Положим для $t=1,2,\ldots,s$:

$$K^t = K(x_1^t, x_2^t, \ldots, x_{m(t)}^t);$$

$$V^t = \bigcap_{j=1}^{n(t)} H^-_{b_j^t}(Y_j^t); \qquad Q^t = \bigcap_{p=1}^{\ell(t)} H^-_{c_p^t}(Z_p^t).$$

ЗАДАЧА II. Ищутся тела $x^t \in X$ и текущие многогранники $Q^t_{u^t}$, удовлетворяющие условиям:

1. $x^t \in K^t$ $(t=1,2,\ldots,s)$;
2. $x^t \subset V^t \cap Q^t_{u^t}$; $(d^t, u^t) \leq e_t$ $(t=1,2,\ldots,s)$;
3. $\mu(x^1,\ldots,x^s) = \sum_{t=1}^{s} q^t(x^t)$ – достигает максимума.

ЗАДАЧА IIа. Ищутся векторы $y^t \in R^{n(t)}$; $z^t \in R^{\ell(t)}$ $(t=1,\ldots,s)$; $v \in R^s$, удовлетворяющие условиям:

1. $y_j^t \geq 0$ $(j=1,2,\ldots,n(t))$; $v_t \geq 0$; $(t=1,2,\ldots,s)$;
   $z_p^t \geq 0$ $(p=1,2,\ldots,\ell(t))$;
2. $x_i^t \cap H^+_{q^t(x_i^t)}(Y^t+Z^t) \neq \Lambda$; $(i=1,2,\ldots,m(t);\ t=1,2,\ldots,s)$;
   $$Y^t = \sum_{j=1}^{n(t)} y_j^t Y_j^t; \qquad Z^t = \sum_{p=1}^{\ell(t)} z_p^t Z_p^t; \quad (t=1,2,\ldots,s);$$
   $$z_p^t + v_t d_p^t = 0; \qquad (p=1,2,\ldots,\ell(t);\ t=1,2,\ldots,s);$$
3. $\nu(y^1,\ldots,y^s;z^1,\ldots,z^s;v) = (e,v) + \sum_{t=1}^{s}[(y^t,b^t)+(z^t,c^t)]$ – достигает минимума.

Аналогично теореме 2 устанавливается

Т е о р е м а 3. Пара задач (II,IIа) эквивалентна некоторой паре двойственных задач линейного программирования.

п.6. Приведем теперь примеры задач на построение в R^n, укладывающихся в эти схемы.

1. Вписать в многогранник, заданный пересечением полупространств, фигуру, подобную данной фигуре T. В этом случае в первой схеме $x_0 = T$; $x_j = \{e_j\}$; $x_{n+j} = \{-e_j\}$ $(j=1,2,\ldots,n)$; здесь $e_j = (\overbrace{0,\ldots,0,1}^{j},0,\ldots,0)$ – базисный орт. Максимизируется τ_0 – коэффициент растяжения тела T.

2. Сдвигая фиксированное тело T внутри выпуклой многогран-

ной поверхности V , расположить его так, чтобы достигала максимума величина $\min\limits_{x\in V,\, y\in T} \|y\ x\|$. В этом случае в первой схеме

$\mathfrak{x}_0 = T$; $\mathfrak{x}_1 = \{x \in R^n : \|x\| \leq 1\}$; $\mathfrak{x}_{1+j} = \{e_j\}$; $\mathfrak{x}_{n+1+j} = \{-e_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

Максимизируется коэффициент x_1 .

3.Пусть задана решетка размера $m \times n$,образованная прямыми на плоскости, выпуклый многоугольник V и выпуклые компакты A_{ij} $(i = 1,2, \ldots, m;\ j = 1,2,\ldots,n)$. Считаем, что образующие решетки могут перемещаться параллельно себе. Требуется вписать тело A_{ij} в клетку решетки (i,j) , а полученную фигуру вписать в многоугольник V ,подобно себе так, чтобы максимизировалась сумма коэффициентов растяжений. Ясно, что эта задача точно вписывается в схему II (здесь текущими многогранниками являются клетки решетки).

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, что наложение линейных ограничений на коэффициенты x_i в представлении $\mathfrak{x} = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \mathfrak{x}_i$ н[е] меняет линейно-программного характера задач I,II. Приведем д[ва] примера таких задач:

4. Вписать в многогранник параллелотоп с данным отношени[ем] ем измерений и фиксированным направлением сторон.

5. Заданы тела $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_K$ и гиперплоскости $H_1, \ldots, H_{[K]}$ требуется построить максимальное тело, подобное данному, так чт[о]бы гиперплоскость, параллельная H_i , отделяла это тело от м[но]жества $\mathfrak{A}_i$.

З а м е ч а н и е 2. Двойственные задачи Iа, IIа показывают, что условие пересечения тела с заданным полупространство (возможно, текущим) сводится к линейному неравенству.Следовательно, к приведенным задачам можно добавлять требования касания вписанным телом фиксированных граней многогранника и аналогичные условия.

З а м е ч а н и е 3. Условие принадлежности искомого тела конусу позволяет в ряде случаев упростить вычисление опорных фу[нк]ций. Например, в задаче вписывания цилиндра с основанием T и данным направлением образующей можно положить $\mathfrak{x}_1 = T$ и $\mathfrak{x}_2 =$ некоторому отрезку образующей.

З а м е ч а н и е 4. Следует помнить, что в задачах с многогранниками большой сложности численно целесообразно решать дв[ой]ственную задачу.

п.7. Очевидно, что линейно программный характер задач I,II не изменится при добавлении любых ограничений вида $g(\mathfrak{x}) \leq c$,где g - линейный по Минковскому функционал. В связи с этим напомним, что для полугруппы с операторами $\mathcal{V}_K(R^n)$ общ[ий] вид такого функционала дается формулой:

$$g(x) = \int_{Z_n} x(u)\, d\mu(u);$$

здесь Z_n - сфера направлений, μ - мера на Z_n (см [5]). Отметим, что единственным инвариантным относительно движений функционалом в $\mathcal{W}_K(R^n)$ является норма выпуклого тела, т.е.интегральная ширина.

Известная теорема А.Д.Александрова [I] утверждает, что для любого функционала g , порожденного неотрицательной, инвариантной относительно сдвигов, не сосредоточенной ни на одной из больших подсфер мерой найдется тело $y \in \mathcal{W}_K(R^n)$, такое что $g(x) = V_1(y, x)$ - первый смешанный объем. Таким образом, обычные дополнительные ограничения в задачах I, II имеют вид:

$$V_1(y_K\ x) \leq b_k \quad (k=1,2,\ldots,p);$$

где $y_1,\ldots,y_p$ - заданные тела.

п.8. В случае бесконечномерного пространства представляется интересным рассмотреть бесконечные аналоги задач I, II. Для простоты рассмотрим схему I в счетной постановке.

Заданы:

тела $x_1,\ldots,x_m \in \mathcal{W}$;

функционалы $Y_j \in X^*$ $(j=1,2,\ldots)$;

числа $b_j \in R$ $(j=1,2,\ldots)$;

линейный по Минковскому функционал μ .

ЗАДАЧА I*. Ищется тело $x \in \mathcal{W}$, удовлетворяющее условиям:

I. $x \in K(x_1,\ldots,x_m)$;

2. $x \subset H^-_{b_j}(Y_j)$ $(j=1,2,\ldots)$;

3. $\mu(x)$ - достигает максимума

Оказывается, что при достаточно естественных для задач на построение условиях у задачи I* есть "чебышевская" подзадача типа I. Именно, имеет место

Теорема 4. Пусть

I) множество $\{(Y_j - b_j) \in X^* \times R;\ j=1,2,\ldots\}$ компактно в естественной топологии произведения $X^* \times R$;

2)существует допустимое решение задачи I* x_0 такое, что

$$x_0 \cap H_{b_j}(Y_j) = \Lambda \qquad (j=1,2,\ldots);$$

тогда задача I* эквивалентна некоторой своей конечной подзадаче.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим, как обычно, $a_{ij}=x_i(Y_j)$; $c_i=\mu(x_i)$; $(i=1,\dots,m;\ j=1,2,\dots)$ и отождествим $x\in K(x_1,\dots,x_m)$ с тем $x\in R^m_+$, для которого $x=\sum_{i=1}^{m}x_i$, тогда получим систему линейных неравенств (Δ), эквивалентную задаче I*.

$$
\begin{aligned}
&1.\quad x_i\geqslant 0 \qquad (i=1,2,\dots,m);\\
&2.\quad \sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i\leqslant b_j \qquad (j=1,2,\dots);\\
&3.\quad \mu(x)=\sum_{i=1}^{m}c_ix_i-max.
\end{aligned}
\qquad (\Delta)
$$

В силу условия I множество $A=\{(a_{1j},a_{2j},\dots,a_{mj},-b_j)\in R^{m+1};\ j=1,2,\dots\}$ ограничено и замкнуто в R^{m+1}. В силу условия 2 система (Δ) устойчиво совместна. Как известно [4], в этом случае система (Δ) имеет такую конечную подсистему, на множестве решений которой достигается максимум функции $\mu(x)$. Применяя теорему 2, получим требуемое.

Теорема такого типа имеет место и для бесконечного аналога задачи II.

Автор признателен Г.Ш.Рубинштейну за советы и А.М. Рубинову за обсуждение.

Л и т е р а т у р а

1. Г.Буземан. Выпуклые поверхности. Изд. "Наука" М. 1964.
2. Д.А.Райков. Векторные пространства. Физматгиз. М., 1962.
3. А.М.Рубинов. О некоторых свойствах сублинейных функционалов. Сб. "Оптимальное планирование", Н.1967, 9, 77-86.
4. С.Н.Черников. Линейные неравенства. Изд. "Наука" М.,1968,
5. С.С.Кутателадзе, А.М.Рубинов. Задачи типа изопериметра в пространстве выпуклых тел. Наст.сборник, 61-79.

Поступила в редакцию
19.VI 1969 г.