АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ISSN 0134-3998

МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЭКОНОМИКИ

ОПТИМИЗАЦИЯ 33 (50)

НОВОСИБИРСК, 1983

Выпуск 33(50) О П Т И М И З А Ц И Я 1983 г.
Выпуклый анализ

УДК 517.982+510.644+512.58

О ТЕХНИКЕ СПУСКОВ И ПОДЪЕМОВ

С.С.Кутателадзе

В последние годы выпуклый анализ интенсивно обогащается аппаратом соседних разделов математики. В свою очередь, аппарат выпуклого анализа и прежде всего субдифференциальное исчисление интенсивно проникает в теорию и численные методы программирования, в математическую экономику, в теорию принятия решений и т.п.[I]. В самое последнее время в выпуклом анализе нашли существенные применения булевозначные модели теории множеств [2-7]. С их помощью, в частности, были решены долго стоявшие проблемы дезинтегрирования [8] и внутреннего описания субдифференциалов [9]. Приложения булевозначных моделей к анализу или, как еще говорят, приложения булевозначного анализа основаны на изучении способа изображения исследуемых объектов в "нестандартном универсуме" - в булевозначной модели - с помощью обычных множеств. Указанное изучение связано с естественными функториальными процедурами - спуском и подъемом. При спуске булевозначного объекта описывается набор составляющих его множеств. При подъеме решается обратная задача: ищутся условия, при которых исходный объект порождает булевозначное множество с заданной структурой. Основной результат при этом состоит в реализации програмы спуск-подъем, т.е. в обнаружении критериев систем, изоморфных спускам аналогичных образований в булевозначной модели. В настоящее время спуск-подъем осуществлен для ряда систем, важных в анализе и в его приложениях, в частности для K-пространств [6-I4]. Особо выделим работу [I4], наметившую категорный подход к програме спуск-подъем. Однако говорить о полной ясности в очерченном круге вопросов, конечно же, преждевременно. В то же время уже сейчас перспективность булевозначного анализа в приложениях к субдифференциальному исчислению и к близким разделам теории экстремальных задач бесспорна. В этой связи хочется надеяться, что достижение конкретной цели статьи – детализация программы спуск-подъем для общих алгебраических систем – будет полезно и для решения актуальной задачи популяризации булевозначного анализа.

§1. Вспомогательные сведения о булевозначных моделях

1.0. Дадим очерк основных фактов о построении и правилах работы с булевозначными моделями, оттенив необходимые нам подробности. Детали в [2-7].

1.1. Пусть B – полная булева алгебра. Для ординала α положим

$$V_\alpha^{(B)} := \{x : (\exists \beta \in \alpha)\, dom(x) \in V_\beta^{(B)} \wedge x : dom(x) \to B\}.$$

В более подробной записи это рекурсивное определение означает

$$V_0^{(B)} := \varnothing, \quad V_{\alpha+1}^{(B)} := \{x : dom(x) \subset V_\alpha^{(B)} \wedge x : dom(x) \to B\},$$

$$V_\alpha^{(B)} := \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{(B)} \quad \text{при } \alpha = \sup [0,\alpha).$$

Булевозначный универсум $V^{(B)}$ определяют соотношением

$$V^{(B)} := \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha^{(B)},$$

где On – класс всех ординалов. Элементы класса $V^{(B)}$ называют B-значными множествами. Стоит подчеркнуть, что $V^{(B)}$ состоит только из функций.

1.2. Используя способ построения $V^{(B)}$, определяют две функции:

$$x, y \in V^{(B)} \mapsto \llbracket x \in y \rrbracket \in B;$$

$$x, y \in V^{(B)} \mapsto \llbracket x = y \rrbracket \in B.$$

При этом элемент $\llbracket x \in y \rrbracket$ называют оценкой или оценкой истинности принадлежности B-значного множества x – элемента булевозначного универсума – B-значному множеству y. Аналогично, элемент $\llbracket x = y \rrbracket$ называют оценкой равенства x и y в $V^{(B)}$. Указанные функции определены схемой совместной рекурсии:

$$\llbracket x \in y \rrbracket := \bigvee_{z \in dom(y)} y(z) \wedge \llbracket z = x \rrbracket;$$

$$\llbracket x = y \rrbracket := \bigwedge_{z \in dom(x)} x(z) \Rightarrow \llbracket z \in y \rrbracket \wedge \bigwedge_{z \in dom(y)} y(z) \Rightarrow \llbracket z \in x \rrbracket.$$

1.3. Имея оценки истинности атомарных формул, нетрудно приписать такую оценку каждой формуле формальной теории множеств. В самом деле, такие формулы представляют собой конечные тексты, полученные из атомарных формул применениями пропозициональных связок $\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$, кванторов $\forall$, $\exists$ и разумной расстановкой скобок. Таким образом, если φ и ψ – оцененные формулы и $\llbracket \varphi \rrbracket, \llbracket \psi \rrbracket \in B$ – их оценки, то полагают

$$\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket := \llbracket \varphi \rrbracket \wedge \llbracket \psi \rrbracket := \llbracket \varphi \rrbracket \llbracket \psi \rrbracket; \quad \llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket := \llbracket \varphi \rrbracket \vee \llbracket \psi \rrbracket;$$

$$\llbracket \varphi \to \psi \rrbracket := \llbracket \varphi \rrbracket \Rightarrow \llbracket \psi \rrbracket; \quad \llbracket \neg \psi \rrbracket := \neg \llbracket \psi \rrbracket := \llbracket \psi \rrbracket';$$

$$\llbracket \forall x\, \varphi(x) \rrbracket := \bigwedge_{x \in V^{(B)}} \llbracket \varphi(x) \rrbracket; \quad \llbracket \exists x\, \varphi(x) \rrbracket := \bigvee_{x \in V^{(B)}} \llbracket \varphi(x) \rrbracket.$$

Здесь $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $'$ означают также соответствующие операции в алгебре B. Указанные определения обеспечивают единичную оценку для классических тавтологий.

1.4. Универсум $V^{(B)}$ с указанным правилом оценивания формул является моделью теории множеств в том смысле, что для любой теоремы φ теории ZFC (теории множеств Цермело – Френкеля с аксиомой выбора) выполнено $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$ или, как говорят, φ истинно внутри $V^{(B)}$. Приведенный факт часто называют принципом переноса.

Стоит отметить здесь же, что для формулы $\varphi(\cdot)$ теории ZFC и элемента $x \in V^{(B)}$ фраза "$\varphi(x)$ внутри $V^{(B)}$" или, более полно, "x удовлетворяет φ внутри $V^{(B)}$" означает равенство $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = 1$.

Для элемента $x \in V^{(B)}$ и произвольного $b \in B$ определена функция

$$bx : z \mapsto bx(z) \quad (z \in dom(x)).$$

Эта запись подразумевает, что $b\varnothing := \varnothing$ для $b \in B$.

I.5. Для B-значных множеств x и y и элемента $b \in B$ выполнено:

$$\llbracket x \in by \rrbracket = b\llbracket x \in y \rrbracket;$$

$$\llbracket bx = by \rrbracket = b \Rightarrow \llbracket x = y \rrbracket;$$

$$\llbracket x = bx \rrbracket = \llbracket b'x = \varnothing \rrbracket = b' \Rightarrow \llbracket x = \varnothing \rrbracket.$$

◁ В самом деле, привлекая определения, имеем

$$\llbracket x \in by \rrbracket = \bigvee_{z \in dom(y)} (by)(z) \wedge \llbracket x = z \rrbracket =$$

$$= \bigvee_{z \in dom(y)} b \wedge y(z) \wedge \llbracket x = z \rrbracket = b\llbracket x \in y \rrbracket.$$

Отсюда последовательно выводим:

$$\llbracket bx = by \rrbracket = \bigwedge_{z \in dom(y)} \neg by(z) \vee \llbracket z \in bx \rrbracket \wedge \bigwedge_{z \in dom(y)} \neg bx(z) \vee$$

$$\vee \llbracket z \in by \rrbracket = \bigwedge_{z \in dom(y)} (\neg b \vee \neg y(z) \vee b\llbracket z \in x \rrbracket) \wedge \bigwedge_{z \in dom(x)} (\neg b \vee \neg x(z) \vee b\llbracket z \in y \rrbracket) =$$

$$= \bigwedge_{z \in dom(y)} (\neg b \vee \neg y(z) \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg y(z) \vee \llbracket z \in x \rrbracket) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{z \in dom(\cdot)} (\neg b \vee \neg x(z) \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg x(z) \vee \llbracket z \in y \rrbracket) = \neg b \vee \llbracket x = y \rrbracket.$$

Из принципа переноса и аксиомы экстенсиональности

$$\llbracket x = bx \rrbracket = \llbracket \forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in bx) \rrbracket.$$

Кроме того, $\llbracket z \in bx \rrbracket = b\llbracket z \in x \rrbracket \le \llbracket z \in x \rrbracket$, т.е. $\llbracket z \in bx \to z \in x \rrbracket = 1$. Отсюда выводим:

$$\llbracket x = bx \rrbracket = \bigwedge_z \llbracket z \in x \rrbracket \Rightarrow \llbracket z \in bx \rrbracket =$$

$$= \bigwedge_z (\neg \llbracket z \in x \rrbracket \vee (b \wedge \llbracket z \in x \rrbracket)) = \bigwedge_z (\neg \llbracket z \in x \rrbracket \vee b) \wedge (\neg \llbracket z \in x \rrbracket \vee \llbracket z \in x \rrbracket) =$$

$$= \bigwedge_z \neg \llbracket z \in x \rrbracket \vee b = b \vee \bigwedge_z \neg \llbracket z \in x \rrbracket = b \vee \llbracket \forall z\ \neg(z \in x) \rrbracket =$$

$$= b \vee \llbracket x = \varnothing \rrbracket = b' \Rightarrow \llbracket x = \varnothing \rrbracket = \llbracket b'x = b'\varnothing \rrbracket = \llbracket b'x = \varnothing \rrbracket. \ \triangleright$$

I.6. В булевозначном универсуме $V^{(B)}$ соотношение $\llbracket x = y \rrbracket = 1$ совсем не означает, что функции x и y совпадают. Например, нулевая функция на любом слое $V_\alpha^{(B)}$ играет роль пустого множества внутри $V^{(B)}$. В этой связи осуществляют переход к отделимому булевозначному универсуму $\bar{V}^{(B)}$. Для определения $\bar{V}^{(B)}$ в классе $V^{(B)}$ рассматривают отношение $x \sim y := \llbracket x = y \rrbracket = 1$, которое, бесспорно, является эквивалентностью. Выбирая в каждом классе эквивалентных функций элемент представителя наименьшего ранга ("прием Фреге – Рассела – Скотта"), приходят к отделимому универсуму $\bar{V}^{(B)}$. Очевидно, что для формулы φ теории ZFC будет $\llbracket x = y \rrbracket = 1 \to \llbracket \varphi(x) \rrbracket = \llbracket \varphi(y) \rrbracket$. Таким образом в отделимом универсуме можно вычислять оценки формул, не задумываясь о способе выбора представителя класса эквивалентности. В этой связи в дальнейшем без оговорок осуществляют отождествление $V^{(B)} := \bar{V}^{(B)}$. Подчеркнем, что в $V^{(B)}$ корректно определен элемент bx для $x \in V^{(B)}$ и $b \in B$. В самом деле, в силу I.5

$$\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket = 1 \to \llbracket bx_1 = bx_2 \rrbracket = b \Rightarrow \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket = 1.$$

Это обстоятельство позволяет, в частности, использовать запись $0 = \varnothing$, имея в виду, что $0\varnothing = \varnothing = 0x$ для $x \in V^{(B)}$.

I.7. В $V^{(B)}$ справедлив следующий принцип максимума.

Для каждой формулы φ теории ZFC имеется B-значное множество x, для которого

$$\llbracket \exists x\ \varphi(x) \rrbracket = \llbracket \varphi(x) \rrbracket.$$

В частности, для элементов $x, y \in V^{(B)}$ определены элементы $\{x\}^B, \{y\}^B, \{x, y\}^B, \langle x, y \rangle^B$, играющие соответственно роли множеств $\{x\}, \{y\}, \{x, y\}$ и $\langle x, y \rangle$ внутри $V^{(B)}$.

I.8. В $V^{(B)}$ справедлив следующий принцип перемешивания.

Пусть $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ – разбиение единицы в B, т.е. $\xi_1 \ne \xi_2 \to b_{\xi_1} \wedge b_{\xi_2} = 0 \wedge \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi = 1$. Для любого семейства

$(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов универсума $V^{(B)}$ существует, и притом единственное, перемешивание $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, т.е. элемент x отделимого универсума, обозначаемый $\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi$, такой, что $[\![x=x_\xi]\!]\geq b_\xi$ для всех $\xi\in\Xi$. При этом выполнено

$$x=\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi \longleftrightarrow (\forall \xi\in\Xi)\ b_\xi x = b_\xi x_\xi .$$

I.9. Для любых двух элементов $x,y\in V^{(B)}$ внутри $V^{(B)}$ имеет место равенство

$$b<x,y>^B = b<bx,by>^B.$$

$$\lhd\ [\![b<x,y>^B=b<bx,by>^B]\!]=b\Rightarrow[\![<x,y>^B=<bx,by>^B]\!]=$$

$$=b\Rightarrow([\![x=bx]\!]\wedge[\![y=by]\!])=b\Rightarrow(b'\Rightarrow[\![x=\varnothing]\!]\wedge b'\Rightarrow[\![y=$$

$$=\varnothing]\!])=b'\vee((b\vee[\![x=\varnothing]\!])\wedge(b\vee[\![y=\varnothing]\!]))=$$

$$=(b'\vee b\vee[\![x=\varnothing]\!])\wedge(b'\vee b\vee[\![y=\varnothing]\!])=1.\ \rhd$$

I.10. Пусть $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ – разбиение единицы, $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ – семейства элементов $V^{(B)}$, тогда

$$\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi <x_\xi,y_\xi>^B=<\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi,\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi y_\xi>^B.$$

$\lhd$ Положим

$$x:=\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi;\quad y:=\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi y_\xi .$$

Тогда, привлекая I.8 и I.9, имеем

$$b_\xi<x,y>^B=b_\xi<b_\xi x,b_\xi y>^B=b_\xi<b_\xi x_\xi,b_\xi y_\xi>^B=b_\xi<x_\xi,y_\xi>^B.\ \rhd$$

I.II. Схема рекурсии

$$V_\alpha:=\{x:(\exists\beta\in\alpha)\,x\in\mathcal{P}(V_\beta)\}\qquad(\alpha\in On);$$

$$V:=\bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha,$$

где $\mathcal{P}(V_\beta)$ – совокупность подмножеств V_β, определяет класс всех множеств V или, как еще говорят, универсум фон Неймана.

Для множества x определяют элемент $x^\wedge$ булевозначного универсума как выделенный представитель класса, определенного схемой рекурсии

$$\varnothing^\wedge:=\varnothing;\ dom(x^\wedge):=\{y^\wedge:y\in x\};\ im(x^\wedge):=\{1\}.$$

Элемент $x^\wedge$ называют стандартным именем x.

Для $x\in V$ полагаем $\hat{x}:=\{z^\wedge:z\in x\}$. Множество $\hat{x}$ часто называют стандартной областью определения $x^\wedge$. Происхождение этого названия ясно – "характеристическая функция $\hat{x}$ и есть $x^\wedge$ в отделимом универсуме".

Стоит отметить, что

$$[\![y\in x^\wedge]\!]=\bigvee_{z\in x}[\![y=z^\wedge]\!].$$

Кроме того, если φ – ограниченная формула теории ZFC, т.е. если связанные переменные входят в нее под знаком кванторов, распространенных на какие-либо множества, то для произвольных множеств $x_1,\dots,x_n$ будет

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)\longleftrightarrow[\![\varphi(x_1^\wedge,\dots,x_n^\wedge)]\!]=1.$$

I.12. Тот факт, что B – это булева алгебра, записывается ограниченной формулой. Значит, в силу I.II можно утверждать, что $B^\wedge$ – булева алгебра внутри $V^{(B)}$. Ниже используется описание ультрафильтров в $B^\wedge$ в $V^{(B)}$. Для иллюстрации техники вычислений они будут приведены с избыточной подробностью.

I.13. Пусть Ψ – элемент в $V^{(B)}$, являющийся ультрафильтром в $B^\wedge$ внутри $V^{(B)}$. Для $b\in B$ положим $\pi_\Psi(b):=[\![b^\wedge\in\Psi]\!]$. Тогда π_Ψ – эндоморфизм булевой алгебры B. В свою очередь, если π – произвольный эндоморфизм B, то элемент Ψ_π, порожденный правилом

$$dom(\Psi_\pi):=\hat{B};\ \Psi_\pi(b^\wedge):=\pi(b)\qquad(b\in B),$$

таков, что Ψ_π – ультрафильтр в $B^\wedge$ внутри $V^{(B)}$. При этом справедливы соотношения:

$$\pi_{\Psi_\pi} = \pi; \quad [\![\Psi_{\pi_\Psi} = \Psi]\!] = 1.$$

$\lhd$ Пусть сначала Ψ – ультрафильтр в $B^\wedge$ внутри $V^{(B)}$ и $b_1, b_2 \in B$. Несомненно, что

$$\pi_\Psi(b_1) \wedge \pi_\Psi(b_2) = [\![b_1^\wedge \in \Psi]\!] \wedge [\![b_2^\wedge \in \Psi]\!] \leq$$

$$\leq [\![b_1^\wedge \wedge b_2^\wedge \in \Psi]\!] = [\![(b_1 \wedge b_2)^\wedge \in \Psi]\!] = \pi_\Psi(b_1 \wedge b_2).$$

Кроме того, если $c \geq b$, то $[\![c^\wedge \geq b^\wedge]\!] = 1$ и, значит,

$$\pi_\Psi(b) = [\![b^\wedge \in \Psi]\!] = [\![b^\wedge \in \Psi]\!] \wedge [\![c^\wedge \geq b^\wedge]\!] \leq [\![c^\wedge \in \Psi]\!] = \pi_\Psi(c).$$

Раз $[\![\Psi$ – ультрафильтр в $B^\wedge]\!] = 1$, то $[\![b^\wedge \in \Psi \leftrightarrow \neg b^\wedge \notin \Psi]\!] = 1$, т.е.

$$\pi_\Psi(b) = [\![\neg b^\wedge \notin \Psi]\!] = \neg[\![\neg b^\wedge \in \Psi]\!] = \neg[\![(\neg b)^\wedge \in \Psi]\!] = \neg\pi_\Psi(\neg b).$$

Если теперь $\pi : B \to B$ – произвольный эндоморфизм, то заметим для начала, что

$$[\![z \in \Psi_\pi]\!] = \bigvee_{b \in B} \pi(b) \wedge [\![b^\wedge = z]\!] \leq \bigvee_{b \in B} [\![b^\wedge = z]\!] = [\![z \in B^\wedge]\!],$$

т.е. $\Psi_\pi \in B^\wedge$ внутри $V^{(B)}$, При этом

$$[\![b^\wedge \in \Psi_\pi]\!] = \pi(b) \quad (b \in B).$$

Отсюда видим, что $0 \notin \Psi_\pi$ в $V^{(B)}$ и, кроме того,

$$[\![(\forall c \in \Psi_\pi)(\forall b \in b^\wedge)\, b \geq c \to b \in \Psi_\pi]\!] =$$

$$= \bigwedge_{c \in B} \bigwedge_{b \in B} (\pi(c) \wedge [\![b^\wedge \geq c^\wedge]\!]) \Rightarrow [\![b^\wedge \in \Psi_\pi]\!] =$$

$$= \bigwedge_{c \in B} \bigwedge_{b \in B} \pi(c) \wedge [\![b^\wedge c^\wedge = c^\wedge]\!] \Rightarrow \pi(b) = \bigwedge_{c \in B} \bigwedge_{\substack{b \in B \\ b \geq c}} \pi(c) \Rightarrow \pi(b) = 1.$$

Аналогично проверяется, что

$$[\![(\forall b_1 \in \Psi_\pi)(\forall b_2 \in \Psi_\pi)\, b_1 \wedge b_2 \in \Psi_\pi]\!] = 1;$$

$$[\![(\forall b \in B^\wedge)\, b \in \Psi_\pi \vee \neg b \in \Psi_\pi]\!] = 1.$$

Для завершения доказательства проведем следующие выкладки:

$$[\![\Psi_{\pi_\Psi} = \Psi]\!] = \bigwedge_z [\![z \in \Psi_{\pi_\Psi} \leftrightarrow z \in \Psi]\!] = \bigwedge_z \bigvee_{b \in B} \pi_\Psi(b) \wedge [\![b^\wedge = z]\!] \leftrightarrow [\![z \in \Psi]\!] =$$

$$= \bigwedge_z \bigvee_{b \in B} [\![b^\wedge \in \Psi \wedge b^\wedge = z]\!] \Leftrightarrow [\![z \in \Psi]\!] =$$

$$= \bigwedge_z [\![(\exists b \in B^\wedge)\, b \in \Psi \wedge b = z \leftrightarrow z \in \Psi]\!] = 1,$$

ибо по условию $\Psi = \Psi \cap B^\wedge$ внутри $V^{(B)}$. $\rhd$

I.I4. Как видно, следует предпринять усилия, направленные на автоматизацию подобного рода скучных вычислений. Такую автоматизацию и осуществляет программа спуск-подъем, излагаемая ниже.

§2. Простейшие спуски

2.0. Здесь собраны необходимые факты об изображении классов, множеств и соответствий в булевозначных моделях. Полезно с самого начала подчеркнуть политику в терминологии. Слово спуск используется для обозначения результата и способа изображения элемента из $V^{(B)}$ в V.

2.I. Пусть φ – некоторая формула ZFC и фиксирован набор y элементов булевозначного универсума. Пусть далее, $A_\varphi := A_\varphi(\cdot, y)$ – класс множеств, определимых посредством y. Спуск $A_\varphi{\downarrow}$ класса A_φ определяют соотношением

$$A_\varphi{\downarrow} := \{t \in V^{(B)} : [\![\varphi(t, y)]\!] = 1\}.$$

Если $t \in A_\varphi{\downarrow}$, то говорят, что t удовлетворяет $\varphi(\cdot, y)$ внутри $V^{(B)}$.

2.2. Спуск любого класса сильно цикличен, т.е. выдерживает всевозможные перемешивания семейств своих элементов.

2.3. Пусть φ, ψ – формулы ZFC, причем $A_\varphi{\downarrow} \neq \varnothing$. Тогда

$$[\![A_\varphi \subset A_\psi]\!] = \bigwedge_{x \in A_\varphi{\downarrow}} [\![\psi(x)]\!].$$

2.4. Для элемента x отделимого булевозначного универсума $V^{(B)}$ его спуск $x{\downarrow}$ задан правилом

$$x{\downarrow} := \{t \in V^{(B)} : [\![t \in x]\!] = 1\},$$

т.е. $x{\downarrow} = A_{\cdot \in x}{\downarrow}$. Спуск $x{\downarrow}$ является множеством. При этом $x{\downarrow} \subset \mathrm{scyc}(\mathrm{dom}(x))$, где scyc – символ перехода к сильно циклической оболочке. Полезно подчеркнуть, что для непустого внутри $V^{(\mathbb{B})}$ множества x и формулы φ теории ZFC верно

$$(\exists z \in x\downarrow)\ \llbracket (\exists z \in x)\, \varphi(z) \rrbracket = \llbracket \varphi(x) \rrbracket.$$

2.5. Для непустых внутри $V^{(\mathbb{B})}$ множеств x и y выполнено

$$\llbracket x \subset y \rrbracket = 1 \leftrightarrow x\downarrow \subset y\downarrow;\quad (x \cap y)\downarrow = x\downarrow \cap y\downarrow;$$

$$(x \cup y)\downarrow = \operatorname{scyc}(x\downarrow \cup y\downarrow);\ \{x\}\downarrow = \{x\}^{\mathbb{B}}\downarrow = \{x\};$$

$$\{x, y\}\downarrow = \{x, y\}^{\mathbb{B}}\downarrow = \operatorname{scyc}(\{x, y\});$$

$$\langle x, y\rangle\downarrow = \langle x, y\rangle^{\mathbb{B}}\downarrow = \operatorname{scyc}(\{x\}^{\mathbb{B}}, \{x, y\}^{\mathbb{B}});$$

$$(x \times y)\downarrow = \{\langle a, b\rangle^{\mathbb{B}} : a \in x\downarrow,\ b \in y\downarrow\}.$$

2.6. Напомним, что для соответствия F из X в Y, т.е. для подмножества F в $X \times Y$ и для любого подмножества A в X поляра $\pi_F(A)$ определена правилом

$$\pi_F(A) := \{y \in Y : F^{-1}(y) \supset A\} = \{y \in Y : (\forall a \in A)\, \langle a, y\rangle \in F\}.$$

2.7. Пусть F – соответствие из X в Y внутри $V^{(\mathbb{B})}$. Существует, и притом единственное, соответствие $F\downarrow$ из $X\downarrow$ в $Y\downarrow$ такое, что для любого непустого подмножества A в X внутри $V^{(\mathbb{B})}$ выполнено $F(A)\downarrow = F\downarrow(A\downarrow)$. При этом $\pi_F(A)\downarrow = \pi_{F\downarrow}(A\downarrow)$ и, кроме того,

$$\llbracket \langle x, y\rangle^{\mathbb{B}} \in F \rrbracket = 1 \leftrightarrow \langle x, y\rangle \in F\downarrow.$$

$\lhd$ Если $\llbracket F \neq \varnothing \rrbracket < 1$, то полагаем $F\downarrow := \varnothing$. Если же $\llbracket F \neq \varnothing \rrbracket < 1$, то $\llbracket (\exists x \in X)(\exists y \in Y)\, \langle x, y\rangle \in F \rrbracket = 1$, т.е. $(\exists x \in X\downarrow)(\exists y \in Y\downarrow)$ $\langle x, y\rangle^{\mathbb{B}} \in F\downarrow$. Для каждого такого $x \in X\downarrow$ полагаем

$$F\downarrow(x) := F(x)\downarrow = \{y \in Y\downarrow : \langle x, y\rangle^{\mathbb{B}} \in F\downarrow\}.$$

Ясно, что тем самым возникает соответствие $F\downarrow \subset X\downarrow \times Y\downarrow$. При этом для A такого, что $A \subset X$ внутри $V^{(\mathbb{B})}$ и A непусто в $V^{(\mathbb{B})}$, будет

$$y \in F(A)\downarrow \leftrightarrow \llbracket y \in F(A) \rrbracket = 1 \leftrightarrow \llbracket (\exists a \in A)\, \langle a, y\rangle \in F \rrbracket = 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists a \in A\downarrow)\, \langle a, y\rangle^{\mathbb{B}} \in F\downarrow \leftrightarrow (\exists a \in A\downarrow)\, y \in F\downarrow(a) \leftrightarrow y \in F\downarrow(A\downarrow).$$

Аналогично,

$$z \in \pi_{F\downarrow}(A\downarrow) \leftrightarrow (\forall a \in A\downarrow)\, z \in F\downarrow(a) \leftrightarrow \bigwedge_{a \in A\downarrow} \llbracket \langle a, z\rangle^{\mathbb{B}} \in F \rrbracket = 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \llbracket (\forall a \in A)\, \langle a, z\rangle^{\mathbb{B}} \in F \rrbracket = 1 \leftrightarrow \llbracket z \in \pi_F(A) \rrbracket = 1 \leftrightarrow z \in \pi_F(A)\downarrow.$$

Утверждение об единственности $F\downarrow$ не вызывает сомнений. $\rhd$

2.8. Соответствие $F\downarrow \subset X\downarrow \times Y\downarrow$ называют спуском F из X в Y внутри $V^{(\mathbb{B})}$. Отметим, что $(G \circ F)\downarrow = G\downarrow \circ F\downarrow$; $F^{-1}\downarrow = F\downarrow^{-1}$; $I_A\downarrow = I_{A\downarrow}$ для тождественного отношения I_A на A внутри $V^{(\mathbb{B})}$. Таким образом, в частности, спуск является ковариантным функтором на категории соответствий внутри $V^{(\mathbb{B})}$ в обычную категорию соответствий.

§3. Простейшие подъемы

3.0. Здесь собраны необходимые факты о переходе от подмножеств $V^{(\mathbb{B})}$ к элементам $V^{(\mathbb{B})}$, т.е. к процедуре подъема множеств и соответствий.

3.1. Пусть $X \in \mathscr{P}(V^{(\mathbb{B})})$, т.е. X – это множество, составленное из $\mathbb{B}$-значных множеств. Положим $\varnothing\uparrow := \varnothing$ и

$$\operatorname{dom}(X\uparrow) := X;\quad \operatorname{im}(X\uparrow) := \{1\}$$

при $X \neq \varnothing$. Элемент $X\uparrow$ отделимого универсума $V^{(\mathbb{B})}$, т.е. выделенный представитель предъявленного класса, называют подъемом X. Отметим, что

$$\llbracket z \in X\uparrow \rrbracket = \bigvee_{t \in X} \llbracket t = z \rrbracket.$$

И, кроме того, $\hat{x}\uparrow = x^{\wedge}$, т.е. стандартное имя $x^{\wedge}$ множества x есть подъем его стандартной области определения $\hat{x}$.

3.2. Для непустых в $V^{(\mathbb{B})}$ элементов x и y будет

$$\{x\}^{\mathbb{B}} = \{x\}\uparrow;\ \{x, y\}^{\mathbb{B}} = \{x, y\}\uparrow;\ \langle x, y\rangle^{\mathbb{B}} = \{\{x\}^{\mathbb{B}}, \{x, y\}^{\mathbb{B}}\}\uparrow;$$

$$x \times y = \{\langle a, b\rangle^{\mathbb{B}} : \langle a, b\rangle \in x\downarrow \times y\downarrow\}\uparrow;$$

$$x\uparrow \cap y\uparrow = (x \cap y)\uparrow. \qquad x\uparrow \cup y\uparrow = (x \cup y)\uparrow$$

3.3. Пусть $X, Y \in \mathcal{P}(V^{(B)})$ и F – соответствие из X в Y. Существует, и притом единственное, соответствие $F\uparrow$ из $X\uparrow$ в $Y\uparrow$ внутри $V^{(B)}$ такое, что для каждого подмножества A множества X выполнено $F\uparrow(A\uparrow) = F(A)\uparrow$ в том и только в том случае, если F экстенсионально. Последнее означает, что

$$y_1 \in F(x_1) \to \llbracket x_1 = x_1 \rrbracket \leq \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket .$$

При этом $F\uparrow = F'\uparrow$, где $F' := \{\langle x, y\rangle^B : \langle x, y\rangle \in F\}$.

$\lhd$ Установим прежде всего необходимость условия экстенсиональности. Отметим для этого, что при $y \in F(x_1)$ будет $\llbracket y \in F(x_1)\uparrow \rrbracket = 1$. Значит, $\llbracket y_1 \in F\uparrow(x_1) \rrbracket = 1$. Помимо этого, по принципу переноса

$$\llbracket x_1 = x_2 \wedge y_1 \in F\uparrow(x_1) \to y_1 \in F\uparrow(x_2) \rrbracket = 1.$$

Иными словами, учитывая правила оценивания и 3.I,

$$\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket = \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \wedge \llbracket y_1 \in F\uparrow(x_1) \rrbracket \leq \llbracket y_1 \in F\uparrow(x_2) \rrbracket = \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket .$$

Единственность $F\uparrow$ (но не его существование!) обеспечивает принцип переноса в связи с тем, что соответствие определяется своими значениями. Итак, осталось предъявить $F\uparrow$. Для этого возьмем $F'\uparrow$. С учетом 2.5, поскольку $F \subset X \times Y \subset X\uparrow\downarrow \times Y\uparrow\downarrow$, видим, что $F' \subset (X\uparrow \times Y\uparrow)\downarrow$. Стало быть, $F'\uparrow \subset X\uparrow \times Y\uparrow$ внутри $V^{(B)}$.

Для доказательства требуемых равенств разберем сначала случай одноэлементного множества. Иначе говоря, возьмем $x_1 \in \operatorname{dom}(F)$. Тогда, привлекая условие экстенсиональности, последовательно получаем

$$\llbracket y_1 \in F\uparrow(x_1) \rrbracket = \llbracket \langle x_1, y_1\rangle^B \in F\uparrow \rrbracket = \bigvee_{z \in F'} \llbracket z = \langle x_1, y_1 \rangle^B \rrbracket =$$

$$= \bigvee_{\langle x_2, y_2\rangle \in F} \llbracket \langle x_1, y_1\rangle^B = \langle x_2, y_2\rangle^B \rrbracket = \bigvee_{\langle x_2, y_2\rangle \in F} \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket = \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket \leq$$

$$\leq \bigvee_{\langle x_2, y_2\rangle \in F} \llbracket y_2 \in F(x_1)\uparrow \rrbracket \wedge \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket \leq \llbracket y_1 \in F(x_1)\uparrow \rrbracket =$$

$$= \bigvee_{y_2 \in F(x_1)} \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket = \bigvee_{y_2 \in F(x_1)} \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket \wedge \llbracket x_1 = x_1 \rrbracket =$$

$$\leq \bigvee_{x_2 \in \operatorname{dom}(F)} \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket \wedge \llbracket x_2 = x_1 \rrbracket =$$

$$= \bigvee_{\langle x_2, y_2\rangle \in F} \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket \wedge \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket = \llbracket y_1 \in F\uparrow(x_1) \rrbracket .$$

Окончательно, выводим равенство оценок

$$\llbracket y_1 \in F\uparrow(x_1) \rrbracket = \llbracket y_1 \in F(x_2)\uparrow \rrbracket .$$

Пусть теперь A – произвольное подмножество X. Имеем в силу уже установленного и принципа переноса:

$$\llbracket y \in F(A)\uparrow \rrbracket = \bigvee_{z \in F(A)} \llbracket y = z \rrbracket = \bigvee_{a \in A} \bigvee_{z \in F(a)} \llbracket y = z \rrbracket =$$

$$= \bigvee_{a \in A} \llbracket y \in F(a)\uparrow \rrbracket = \bigvee_{a \in A} \llbracket y \in F\uparrow(a) \rrbracket =$$

$$= \llbracket (\exists a \in A\uparrow)\, y \in F\uparrow(a) \rrbracket = \llbracket y \in F\uparrow(A\uparrow) \rrbracket . \rhd$$

3.4. Элемент $F\uparrow$ в $V^{(B)}$, отвечающий экстенсиональному соответствию F, называют подъемом F.

Суперпозиция экстенсиональных соответствий G и F экстенсиональна. При этом $G \circ F\uparrow = G\uparrow \circ F\uparrow$. Отметим здесь же, что в случае одновременной экстенсиональности F и F^{-1} будет $F\uparrow^{-1} = F^{-1}\uparrow$. Однако экстенсиональность F не обеспечивает, вообще говоря, экстенсиональности F^{-1}. Подчеркнем здесь же, что если экстенсиональное соответствие F – это функция из X в Y, то подъем $F\uparrow$ – также функция из $X\uparrow$ в $Y\uparrow$ внутри $V^{(B)}$. При этом экстенсиональность F выглядит так:

$$x_1, x_2 \in X \to \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \leq \llbracket F(x_1) = F(x_2) \rrbracket .$$

3.5. Соответствие $F \subset X \times Y$ экстенсионально в том и только в том случае, если

$$\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \leq \llbracket F(x_1)\uparrow = F(x_2)\uparrow \rrbracket$$

для $x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(F)$, т.е. при условии экстенсиональности отображения $x \to F(x)\uparrow$, действующего из X в $\mathcal{P}(Y\uparrow)\downarrow$.

$\lhd$ Если F экстенсионально, то

$$1 = \llbracket x_1 = x_2 \to F\uparrow(x_1) = F\uparrow(x_2) \rrbracket \to \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \leq \llbracket F(x_1)\uparrow = F(x_2)\uparrow \rrbracket .$$

В свою очередь, при выполнении последнего условия будет

$$[\![x_1=x_2]\!]\le[\![\forall y\ (y\in F(x_1){\uparrow}\leftrightarrow y\in F(x_2){\uparrow})]\!]=$$

$$=\bigwedge_{y_1\in F(x_1)}[\![y_1\in F(x_2){\uparrow}]\!]\wedge\bigwedge_{y_2\in F(x_2)}[\![y_2\in F(x_1){\uparrow}]\!]\le$$

$$\le[\![y_1\in F(x_2){\uparrow}]\!]=\bigvee_{y_2\in F(x_2)}[\![y_1=y_2]\!],$$

т.е. F экстенсионально. ▷

§4. Спуск-подъем и подъем-спуск для соответствий

4.0. Здесь приводятся сведения о последовательном применении процедур спуска и подъема.

4.1. Для непустого внутри $V^{(B)}$ множества x выполнено $x{\downarrow}{\uparrow}=x$. Для подмножества X в $V^{(B)}$ выполнено $X{\uparrow}{\downarrow}=\operatorname{scyc}(X)$.

4.2. Для непустого внутри $V^{(B)}$ соответствия F выполнено $F{\downarrow}{\uparrow}=F$.

◁ Пусть $[\![F\subset X\times Y\wedge F\ne\varnothing]\!]=1$. Несомненно, что $F{\downarrow}\subset X{\downarrow}\times Y{\downarrow}$ и $F{\downarrow}{\uparrow}\subset X{\downarrow}{\uparrow}\times Y{\downarrow}{\uparrow}$ внутри $V^{(B)}$, т.е. $F{\downarrow}{\uparrow}\subset X\times Y$ в силу 4.1. Помимо этого для $x\in X{\downarrow}$ выполнено

$$F{\downarrow}{\uparrow}(x)=F{\downarrow}{\uparrow}(x{\downarrow}{\uparrow})=F{\downarrow}(x{\downarrow}){\uparrow}=F(x){\downarrow}{\uparrow}=F(x).$$

Осталось сослаться на принцип переноса. ▷

4.3. Для каждого экстенсионального соответствия $F\subset X\times Y$, где $X,Y\in\mathcal{P}(V^{(B)})$, выполнено

$$F{\uparrow}{\downarrow}(x)=F(x){\uparrow}{\downarrow}\qquad(x\in X).$$

При этом для произвольного непустого подмножества A в X будет

$$\mathcal{I}_{F{\uparrow}{\downarrow}}(A)=\mathcal{I}_{F{\uparrow}}(A{\uparrow}){\downarrow};\ \mathcal{I}_{F{\uparrow}{\downarrow}}(A){\uparrow}=\mathcal{I}_{F{\uparrow}}(A{\uparrow}).$$

◁ Прежде всего, для $x\in X$ очевидно $x\in X{\uparrow}{\downarrow}$. Отсюда заключаем, что $F{\uparrow}{\downarrow}(x)=F{\uparrow}(x){\downarrow}=F(x){\uparrow}{\downarrow}$. Теперь для произвольного непустого A в X получаем

$$z\in\mathcal{I}_{F{\uparrow}}(A{\uparrow}){\downarrow}\leftrightarrow[\![(\forall a\in A{\uparrow})z\in\mathcal{I}_{F{\uparrow}}(a)]\!]=1\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\bigwedge_{a\in A}[\![z\in F{\uparrow}(a)]\!]=1\leftrightarrow(\forall a\in A)z\in F(a){\uparrow}{\downarrow}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(\forall a\in A)z\in F{\uparrow}{\downarrow}(a)\leftrightarrow z\in\mathcal{I}_{F{\uparrow}{\downarrow}}(A).$$

Наконец, ввиду сильной цикличности множества $\mathcal{I}_{F{\uparrow}{\downarrow}}(A)$ из уже доказанного заключаем:

$$\mathcal{I}_{F{\uparrow}{\downarrow}}(A){\uparrow}{\downarrow}=\mathcal{I}_{F{\uparrow}{\downarrow}}(A)=\mathcal{I}_{F{\uparrow}}(A{\uparrow}){\downarrow}.$$

Остается сослаться на 2.3. ▷

4.4. Пусть F – соответствие из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$, где $X,Y\in V^{(B)}$. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) F экстенсионально и $F{\uparrow}{\downarrow}=F$;

(2) имеет место равенство $F'=F'{\uparrow}{\downarrow}$;

(3) F' – сильно циклическое множество;

(4) для каждых $x\in X{\downarrow}$ и $b\in B$ выполнено

$$F(x)=F(x){\uparrow}{\downarrow};\ F\circ\sigma_{X{\downarrow}}(b)\subset\sigma_{Y{\downarrow}}(b)\circ F,$$

где $\sigma_Z(b):=\{\langle z_1,z_2\rangle\in Z^2:[\![z_1=z_2]\!]\geqslant b\}$.

◁ (1) $\Longrightarrow$ (2). Включение $F'\subset F'{\uparrow}{\downarrow}$ очевидно. В свою очередь,

$$\langle x,y\rangle^B\in F'{\uparrow}{\downarrow}\to[\![\langle x,y\rangle^B\in F]\!]=1\to[\![\langle x,y\rangle^B\in F{\uparrow}]\!]=1\to$$

$$\to\langle x,y\rangle\in F{\uparrow}{\downarrow}\to\langle x,y\rangle\in F\to\langle x,y\rangle^B\in F'.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) очевидно.

(3) $\Longrightarrow$ (4). Пусть $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ – разбиение единицы и $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ – семейство элементов $F(x)$. Ясно, что $\langle x,y_\xi\rangle^B\in F'$ и, стало быть, привлекая 1.10, выводим

$$\langle x,\sum_{\xi\in\Xi}b_\xi y_\xi\rangle^B=\langle\sum_{\xi\in\Xi}b_\xi x,\sum_{\xi\in\Xi}b_\xi y_\xi\rangle^B=\sum_{\xi\in\Xi}b_\xi\langle x,y_\xi\rangle^B\in F'.$$

Отсюда $\sum_{\xi\in\Xi}b_\xi y_\xi\in F(x)$. На основании 4.1 заключаем: $F(x)=F(x){\uparrow}{\downarrow}$.

Заметим теперь, что

$$\langle x,y\rangle\in F\leftrightarrow\langle x,y\rangle^B\in F'\leftrightarrow\langle x,y\rangle^B\in F'{\uparrow}{\downarrow}\leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(F'{\uparrow}){\downarrow},$$

т.е. F – это спуск соответствия $F'{\uparrow}$ из X в Y внутри

$V^{(B)}$ и, стало быть, F экстенсионально. Отсюда для $y_1 \in F(x_1)$ верно

$$[\![x_1 = x_2]\!] \leq \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![y_2 = y_1]\!] = [\![\bar{y}_2 = y_1]\!]$$

для некоторого $\bar{y} \in F(x_2)$ в силу сильной цикличности $F(x_2)$. Итак, для $x_2 \in X\downarrow$ и $y_1 \in F \circ \sigma_{X\downarrow}(b)(x_2)$ для некоторого x_1 такого, что $[\![x_1 = x_2]\!] \geq b$, найдется $\bar{y}_2$, для которого $y_1 \in \sigma_{Y\downarrow}(\bar{y}_2)$ и $y_2 \in F(x_2)$. Последнее означает, что $\langle x_2, y_1 \rangle \in \sigma_{Y\downarrow}(b) \circ F$.

(4) $\Longrightarrow$ (I). Для $y_1 \in F(x_1)$ и $x_2 \in X\downarrow$ имеем

$$\langle x_2, y_1 \rangle \in F \circ \sigma_{X\downarrow}([\![x_1 = x_2]\!])(x_2) \subset \sigma_{Y\downarrow}(b) \circ F(x_2)$$

по условию. Иначе говоря, найдется $y_2 \in F(x_2)$, для которого

$$[\![x_1 = x_2]\!] \leq [\![y_1 = y_2]\!] \leq \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![y_1 = y_2]\!].$$

Следовательно, F экстенсионально. При этом для каждого $x \in X\downarrow$ с учетом 4.3 и условия будет $F(x) = F(x)\uparrow\downarrow = F\uparrow\downarrow(x)$, т.е. $F = F\uparrow\downarrow$. $\triangleright$

4.5. Отметим, что конструкции, изложенные в §§2-4, естественным и очевидным образом переносятся на случай многоместный соответствий. В дальнейшем мы будем использовать соответствующие обобщения без особых разъяснений.

§5. Спуски и подъемы алгебраических систем

5.0. В этом параграфе детализируются процедуры спуска и подъема общих алгебраических систем, изученные впервые Соловьем и Тененбаумом при исследовании изображений булевых алгебр [7].

5.I. Пусть $\Sigma := \langle F, \mu \rangle$ – некоторая сигнатура и $\mathscr{X} := \langle X, \nu^{\mathscr{X}} \rangle$ – (универсальная) алгебра сигнатуры Σ с носителем X и интерпретацией $\nu^{\mathscr{X}}$. Иными словами, F – множество символов операций, а $\mu : F \to \omega$ – отображение, указывающее целое число – арность $\mu(f)$ – операции $\nu^{\mathscr{X}}(f)$ в множестве X для каждого $f \in F$. Алгебру $\mathscr{X}$ называют экстенсиональной, если X – подмножество отделимого булевозначного универсума $V^{(B)}$ и, кроме того, для каждого $f \in F$ отображение $\nu^{\mathscr{X}}(f) : X^{\mu(f)} \to X$ экстенсионально.

5.2. Алгебра $\mathscr{X}$ с носителем X является экстенсиональной в том и только в том случае, если отображение $\rho_{\mathscr{X}} : b \to \sigma_X(b')$ действует из B в множество $Cong(\mathscr{X})$ конгруэнций $\mathscr{X}$. При этом $\rho_{\mathscr{X}}$ сохраняет произвольные непустые пересечения:

$$\varnothing \neq B_0 \subset B \to \rho_{\mathscr{X}}(\inf B_0) = \cap\{\rho_{\mathscr{X}}(b_0) : b_0 \in B\}$$

и множество $\rho_{\mathscr{X}}(0)$ совпадает с тождественным отношением I_X.

$\triangleleft$ Пусть $\mathscr{X}$ – экстенсиональная алгебра и $f \in F$. Считаем для удобства, что $\mu(f) = 1$. Тогда

$$\langle x_1, x_2 \rangle \in \rho_{\mathscr{X}}(b) \leftrightarrow b'x_1 = b'x_2 \leftrightarrow [\![x_1 = x_2]\!] \geq b' \to$$

$$\to [\![\nu^{\mathscr{X}}(f)(x_1) = \nu^{\mathscr{X}}(f)(x_2)]\!] \geq [\![x_1 = x_2]\!] \geq b' \to \langle \nu^{\mathscr{X}}(f)(x_1), \nu^{\mathscr{X}}(f)(x_2) \rangle \in \rho_{\mathscr{X}}(b).$$

В свою очередь, если $\rho_{\mathscr{X}}([\![x_1 = x_2]\!]')$ – конгруэнция, то

$$[\![x_1 = x_2]\!] = \neg[\![x_1 = x_2]\!]' \leq [\![\nu^{\mathscr{X}}(f)(x_1) = \nu^{\mathscr{X}}(f)(x_2)]\!],$$

т.е. $\nu^{\mathscr{X}}(f)$ – экстенсиональная функция.

Наконец, для $\varnothing \neq B_0 \subset B$ выполнено

$$\rho_{\mathscr{X}}(\inf B_0) = \{\langle x_1, x_2 \rangle : [\![x_1 = x_2]\!] \geq \neg \inf B_0\} =$$

$$= \{\langle x_1, x_2 \rangle : [\![x_1 = x_2]\!] \geq \sup\{b' : b \in B_0\}\} = \bigcap_{b \in B_0} \{\langle x_1, x_2 \rangle : [\![x_1 = x_2]\!] \geq b'\} = \cap\{\rho_{\mathscr{X}}(b) : b \in B_0\}. \triangleright$$

5.3. Пусть $\Sigma := \langle R, F, \mu \rangle$ – некоторая сигнатура и $\mathscr{X}$ представляет собой алгебраическую систему сигнатуры $\Sigma^\wedge$ внутри $V^{(B)}$. Иначе говоря, $\mathscr{X}$ – это объект булевозначного универсума, являющийся B-парой: $\mathscr{X} := \langle X, \nu^{\mathscr{X}} \rangle^B$, где элементы X, $\nu^{\mathscr{X}} \in V^{(B)}$ играют, соответственно, роли носителя $\mathscr{X}$ и интерпретации $\Sigma^\wedge$ в X внутри $V^{(B)}$. Для $r \in R$ и $f \in F$ ясно, что

[$\![\nu^{\mathscr{X}}(r^\wedge)$ – это $\mu^\wedge(r^\wedge)$-местное отношение в $X]\!] = 1$;

[$\![\nu^{\mathscr{X}}(f^\wedge)$ – это $\mu^\wedge(f^\wedge)$-местная операция на $X]\!] = 1$.

Определяем теперь отображение $\nu\downarrow$, полагая

$$\nu\downarrow(r) := \nu^{\mathscr{X}}(r^\wedge)\downarrow; \quad \nu\downarrow(f) := \nu^{\mathscr{X}}(f^\wedge)\downarrow,$$

где $\nu^{\mathscr{X}}(r^\wedge)\downarrow$ и $\nu^{\mathscr{X}}(f^\wedge)\downarrow$ – спуски отношения $\nu^{\mathscr{X}}(r^\wedge)$ и функции $\nu^{\mathscr{X}}(f^\wedge)$ внутри $V^{(B)}$ соответсвенно. Возникающая алгебраическая система сигнатуры Σ с носителем $X\downarrow$ и интерпретацией $\nu\downarrow$ называется спуском исходной системы и обозначается $\mathscr{X}\downarrow$. Таким образом, $\mathscr{X}\downarrow = \langle X\downarrow, \nu\downarrow \rangle$.

Стоит подчеркнуть, что спуск алгебры сигнатуры $\Sigma^{\wedge}$ - безусловно экстенсиональная алгебра сигнатуры Σ .

5.4. Пусть $\mathcal{Y}$ - некоторая алгебра сигнатуры Σ с носителем Y . Пусть, далее, задано отображение $\rho : B \to Cong(\mathcal{Y})$, сохраняющее произвольные непустые пересечения и такое, что $\rho(0) = I_Y$. Тогда существует алгебра $\mathcal{X}$ сигнатуры $\Sigma^{\wedge}$ внутри $V^{(B)}$ и эндоморфизм χ из $\mathcal{Y}^{\wedge}$ на $\mathcal{X}$ внутри $V^{(B)}$ такие, что $\chi\downarrow$ осуществляет мономорфизм $\mathcal{Y}$ в экстенсиональную алгебру $\mathcal{X}\downarrow$ сигнатуры Σ и при этом

$$\langle y_1, y_2 \rangle \in \rho(b) \leftrightarrow \langle \chi\downarrow(y_1), \chi\downarrow(y_2) \rangle \in \rho_{\mathcal{X}\downarrow}(b)$$

при каждом $b \in B$ и произвольных $y_1, y_2 \in Y$.

$\lhd$ Рассмотрим стандартное имя $\mathcal{Y}^{\wedge}$ алгебры $\mathcal{Y} := \langle Y, \nu^{\mathcal{Y}} \rangle$. Ясно, что внутри $V^{(B)}$ элемент $\mathcal{Y}^{\wedge} = \langle Y^{\wedge}, \nu^{\mathcal{Y}^{\wedge}} \rangle^B$ - универсальная алгебра сигнатуры $\Sigma^{\wedge} := \langle F^{\wedge}, \mu^{\wedge} \rangle^B$. Пусть, далее, Ψ - ультрафильтр в $B^{\wedge}$, порожденный тождественным эндоморфизмом B в соответствии с I.13. Определим, наконец, элемент τ в универсуме $V^{(B)}$ соотношением

$$\langle u, v \rangle^B \in \tau \leftrightarrow u \in Y^{\wedge} \wedge v \in Y^{\wedge} \wedge (\exists b \in \Psi) \langle u, v \rangle^B \in \rho^{\wedge}(b').$$

Полезно с самого начала отметить, что

$$[\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge} \rangle \in \tau]\!] = \bigvee_{b \in B} b [\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge} \rangle \in \rho^{\wedge}(b')]\!] = \bigvee \{ b \in B : \langle u, v \rangle \in \rho(b') \}.$$

При этом из представления

$$\rho([\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge} \rangle \in \tau]\!]') = \rho(\wedge \{ b' : \langle u, v \rangle \in \rho(b') \}) = \cap \{ \rho(b) : \langle u, v \rangle \in \rho(b) \}$$

вытекает: $\langle u, v \rangle \in \rho([\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge} \rangle \in \tau]\!]')$.

Бесспорно, что τ - это рефлексивное и симметричное отношение в $Y^{\wedge}$ внутри $V^{(B)}$. Проверим транзитивность τ. Имеем

$$[\![\langle x, y \rangle \in \tau]\!] \wedge [\![\langle y, z \rangle \in \tau]\!] =$$

$$= \Big(\bigvee_{\langle u, v \rangle \in Y^2} [\![x = u^{\wedge}]\!] \wedge [\![y = v^{\wedge}]\!] \wedge [\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge} \rangle \in \tau]\!] \Big) \wedge$$

$$\wedge \Big(\bigvee_{\langle s, w \rangle \in Y^2} [\![y = s^{\wedge}]\!] \wedge [\![z = w^{\wedge}]\!] \wedge [\![\langle s^{\wedge}, w^{\wedge} \rangle \in \tau]\!] \Big) =$$

$$= \bigvee_{\substack{\langle u, v \rangle \in Y^2 \\ \langle s, w \rangle \in Y^2}} [\![x = u^{\wedge}]\!] \wedge [\![y = v^{\wedge}]\!] \wedge [\![y^{\wedge} = s^{\wedge}]\!] \wedge [\![z = w^{\wedge}]\!] \wedge [\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge} \rangle \in \tau]\!] \wedge$$

$$\wedge [\![\langle s^{\wedge}, w^{\wedge} \rangle \in \tau]\!] \leq \bigvee_{\substack{\langle u, v \rangle \in Y^2 \\ \langle s, w \rangle \in Y^2}} [\![x = u^{\wedge}]\!] \wedge [\![z = w^{\wedge}]\!] \wedge [\![\langle u^{\wedge}, w^{\wedge} \rangle \in \tau]\!],$$

поскольку справедливы оценки

$$[\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge} \rangle \in \tau]\!] \wedge [\![v^{\wedge} = s^{\wedge}]\!] \wedge [\![\langle s^{\wedge}, w^{\wedge} \rangle \in \tau]\!] \leq$$

$$\leq \bigvee \{ b_1 : \langle u, v \rangle \in \rho(\neg b_1) \} \wedge \bigvee \{ b_2 : \langle v, w \rangle \in \rho(\neg b_2) \} \leq$$

$$\leq \bigvee \{ b_1 \wedge b_2 : \langle u, v \rangle \in \rho(\neg(b_1 \wedge b_2)) \wedge \langle v, w \rangle \in \rho(\neg(b_1 \wedge b_2)) \} \leq$$

$$\leq \bigvee \{ b : \langle u, w \rangle \in \rho(b') \} = [\![\langle u^{\wedge}, w^{\wedge} \rangle \in \tau]\!].$$

аким образом, действительно, $[\![\langle x, y \rangle \in \tau \wedge \langle y, z \rangle \in \tau \to \langle x, z \rangle \in \tau]\!] = 1$.

Установим теперь, что τ - это конгруэнция. Для этого озьмем $f \in F$ и проведем необходимые вычисления (в упрощаем предположении одноместности f):

$$[\![(\forall \langle y_1, y_2 \rangle \in Y^{\wedge 2}) \langle y_1, y_2 \rangle \in \tau \to \langle (\nu^{\mathcal{Y}})^{\wedge}(f^{\wedge})(y_1), (\nu^{\mathcal{Y}})^{\wedge}(f^{\wedge})(y_2) \rangle \in \tau]\!] =$$

$$= \bigwedge_{\langle u, v \rangle \in Y^2} [\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge} \rangle \in \tau \to \langle (\nu^{\mathcal{Y}})^{\wedge}(f^{\wedge})(u^{\wedge}), (\nu^{\mathcal{Y}})^{\wedge}(f^{\wedge})(v^{\wedge}) \rangle \in \tau]\!] =$$

$$= \bigwedge_{\langle u, v \rangle \in Y^2} [\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge} \rangle \in \tau \to \langle \nu^{\mathcal{Y}}(f)(u)^{\wedge}, \nu^{\mathcal{Y}}(f)(v)^{\wedge} \rangle \in \tau]\!] = 1.$$

оследнее равенство основано на том, что $\langle u, v \rangle \in \rho([\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge} \rangle \in \tau]\!]')$, и с учетом конгруэнтности $\rho([\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge} \rangle \in \tau]\!]')$ будет

$$[\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge} \rangle \in \tau]\!] \leq [\![\langle \nu^{\mathcal{Y}}(f)(u)^{\wedge}, \nu^{\mathcal{Y}}(f)(v)^{\wedge} \rangle \in \tau]\!].$$

Рассмотрим теперь фактор-алгебру $\mathcal{X} := \mathcal{Y}^{\wedge}/\tau$ внутри $V^{(B)}$ каноническое отображение $\chi : Y^{\wedge} \to \mathcal{X}$ внутри $V^{(B)}$.

Проверим, что алгебра $\mathcal{X}$ и отображение χ искомые. Для ого при $y_1, y_2 \in Y$ и $b \in B$ проведем следующую выкладку:

$$[\![\chi\downarrow(y_1) = \chi\downarrow(y_2)]\!] \geq b' \leftrightarrow [\![\chi(y_1^{\wedge}) = \chi(y_2^{\wedge})]\!] \geq b' \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow b' \leq [\![\langle y_1^{\wedge}, y_2^{\wedge} \rangle \in \tau]\!] \leftrightarrow b' \leq \bigvee \{ c : \langle y_1, y_2 \rangle \in \rho(c') \} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow b \geq \bigwedge \{ c : \langle y_1, y_2 \rangle \in \rho(c) \} \leftrightarrow \langle y_1, y_2 \rangle \in \rho(b). \ \rhd$$

5.5. В [I4] для описания спусков и подъемов использовано нятие B -метрики. Отображение $d : X^2 \to B$ называют B -метрикой на X, если $d(x_1,x_2)=0 \leftrightarrow x_1=x_2$; $d(x_1,x_2)=d(x_2,x_1)$ и $d(x_1,x_2)\leq d(x_1,x_3)\vee d(x_3,x_2)$ для любых $x_1,x_2,x_3\in X$. Из предложения 5.4 вытекает следующее простое описание множеств с B-метрикой.

5.6. Для произвольного множества X с B-метрикой d существует множество $\mathscr{X}$ из $\mathcal{P}(V^{(B)})$ и взаимно-однозначное отображение $\chi: X \to \mathscr{X}$ такое, что

$$d(x_1,x_2)=[\![\chi(x_1)\neq\chi(x_2)]\!]$$

для всех $x_1,x_2\in X$.

◁ Положим $\rho(b):=\{\langle x_1,x_2\rangle\in X^2 : d(x_1,x_2)\leq b\}$. Ясно, что $\rho(b)$ – отношение эквивалентности в X, причем $\rho(0)=I_X$ и, кроме того, ρ сохраняет произвольные непустые пересечения. Отсюда по 5.4 выводим, что для некоторых $\mathscr{X}\in\mathcal{P}(V^{(B)})$ и взаимно-однозначного отображения χ будет

$$\langle x_1,x_2\rangle\in\rho(b) \leftrightarrow [\![\chi(x_1)=\chi(x_2)]\!]\geq b'$$

при $b\in B$. Иными словами, $d(x_1,x_2)\leq b \leftrightarrow [\![\chi(x_1)=\chi(x_2)]\!]'\leq b$, что и требовалось. ▷

5.7. Алгебраическую систему $\mathcal{Y}:=\langle Y,\nu^{\mathcal{Y}}\rangle$ сигнатуры $\Sigma:=\langle R,F,\mu\rangle$ называют расширенной с помощью полной булевой алгебры B и отображения ρ или, короче, B-расширенной (посредством ρ), если ρ действует из B в множество конгруэнций $Cong(\mathcal{Y})$ (универсальной алгебры, ассоциированной с $\mathcal{Y}$) и при этом выполнены следующие условия:

(I) отображение ρ сохраняет произвольные непустые пересечения и, кроме того, $\rho(0)=I_Y$;

(2) $\mathcal{Y}$ является ρ-сильно циклической алгеброй, т.е. для любого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ алгебры B и произвольного семейства $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ носителя Y существует, и притом единственный, элемент $y\in Y$, для которого $\langle y, y_\xi\rangle\in\rho(b'_\xi)$ для $\xi\in\Xi$. Этот элемент называют ρ-перемешиванием $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$;

(3) для каждого $r\in R$ отношение $\nu^{\mathcal{Y}}(r)$ является ρ-сильно циклическим, т.е. устойчивым относительно всевозможных покоординатных ρ-перемешиваний, т.е. если $\langle y_\xi,\dots,z_\xi\rangle\in\nu^{\mathcal{Y}}(r)$ и $y,\dots,z$ – это ρ-перемешивания $(y_\xi)_{\xi\in\Xi},\dots,(z_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, то $\langle y,\dots,z\rangle\in\nu^{\mathcal{Y}}(r)$.

5.8. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{Y}$ – некоторая

B-расширенная посредством ρ алгебраическая система сигнатуры Σ. Существуют алгебраическая система $\mathscr{X}$ сигнатуры $\Sigma^\wedge$ внутри $V^{(B)}$ и изоморфизм γ системы $\mathcal{Y}$ на спуск $\mathscr{X}{\downarrow}$ такие, что выполнено условие согласования

$$\langle y_1,y_2\rangle\in\rho(b) \leftrightarrow \langle\gamma(y_1),\gamma(y_2)\rangle\in\rho_{\mathscr{X}\downarrow}(b)$$

для произвольного $b\in B$ и любых y_1, y_2 из носителя $\mathcal{Y}$. Система $\mathscr{X}$ единственна с точностью до изоморфизма внутри $V^{(B)}$, т.е. алгебраическая система $\mathscr{X}'$ сигнатуры $\Sigma^\wedge$ внутри $V^{(B)}$, для которой имеется изоморфизм $\mathcal{Y}$ на спуск $\mathscr{X}'{\downarrow}$, удовлетворяющий условию согласования, обладает изоморфизмом на $\mathscr{X}$ внутри $V^{(B)}$.

◁ Рассмотрим $\mathcal{Y}$ как алгебру сигнатуры $\bar{\Sigma}:=\langle F,\mu\rangle$, где $\Sigma:=(R,F,\mu)$. Привлекая 5.4, найдем алгебру $\bar{\mathscr{X}}$ сигнатуры $\bar{\Sigma}^\wedge$ внутри $V^{(B)}$ и эпиморфизм χ из $\mathcal{Y}^\wedge$ на $\bar{\mathscr{X}}$ внутри $V^{(B)}$, для которых

$$\langle y_1,y_2\rangle\in\rho(b) \leftrightarrow \langle\gamma(y_1),\gamma(y_2)\rangle\in\rho_{\mathscr{X}\downarrow}(b),$$

где $\gamma:=\chi\downarrow$, $b\in B$ и $y_1,y_2\in Y$. По условию $x\in X\downarrow$, где X – носитель $\bar{\mathscr{X}}$, верно

$$1=[\![(\exists y\in Y^\wedge)\ \chi(y)=x]\!]=\bigvee_{y\in Y}[\![\gamma(y)=x]\!].$$

Таким образом, существуют разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и семейство $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов Y, для которых $[\![\gamma(y_\xi)=x]\!]\geq b_\xi$ при $\xi\in\Xi$. По условию имеется ρ-перемешивание y, т.е.

$$\langle y,y_\xi\rangle\in\rho(b'_\xi)\leftrightarrow[\![\gamma(y)=\gamma(y_\xi)]\!]\geq b_\xi\quad(\xi\in\Xi).$$

Отсюда выводим, что $[\![x=\gamma(y)]\!]\geq\bigvee_{\xi\in\Xi}b_\xi=1$, т.е. $\chi(y)=x$. Окончательно, χ – это изоморфизм $\mathcal{Y}$ и $\bar{\mathscr{X}}{\downarrow}$ как универсальных алгебр.

Для $\tau \in R$ рассмотрим соответствие $\nu^{\mathscr{Y}}(\tau)$ в $Y^{\mathscr{M}(\tau)}$. Перенесем $\nu^{\mathscr{Y}}(\tau)$ в $(X{\downarrow})^{\mathscr{M}(\tau)}$ посредством отображения γ. Привлекая 4.4, 4.5 и условия, видим, что возникающее соответствие $G(\tau)$ экстенсионально и при этом $G(\tau) = G(\tau){\uparrow}{\downarrow}$. Положим $\nu(\tau^{\wedge}) := G(\tau){\uparrow}$. Тем самым на $\hat{R}$ определено экстенсиональное отображение. Поднимем его в $V^{(B)}$ и пусть $\nu^{\mathscr{X}}/_{R} := \nu{\uparrow}$ внутри $V^{(B)}$. Ясно, что возникающая система $\mathscr{X} := \langle X, \nu^{\mathscr{X}} \rangle^{B}$ сигнатуры $\Sigma^{\wedge}$ искомая.

Установим теперь утверждение об единственности. Пусть $\mathscr{X}'$ – еще одна система с нужным свойством и γ' – связанный с ней изоморфизм Y и $X'{\downarrow}$. Положим $\chi' := \gamma\gamma'^{-1}$. Ясно, что χ' – экстенсиональное отображение $X'{\downarrow}$ в $X{\downarrow}$, поскольку для $z_1, z_2 \in X'{\downarrow}$ будет

$$\langle z_1, z_2 \rangle \in f_{\mathscr{X}'{\downarrow}}([\![z_1 = z_2]\!]) \to \langle \gamma'^{-1}(z_1), \gamma'^{-1}(z_1) \rangle \in f([\![z_1 = z_2]\!]) \to$$

$$\to \langle \gamma\gamma'^{-1}(z_1), \gamma\gamma'^{-1}(z_2) \rangle \in f_{\mathscr{X}{\downarrow}}([\![z_1 = z_2]\!]).$$

Рассмотрим подъем $\chi'{\uparrow}$. Видно, что $\chi'{\uparrow}$ – требуемый изоморфизм $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}'$ внутри $V^{(B)}$. Убедимся, например, в том, что $\chi'{\uparrow}$ сохраняет (двуместные) отношения внутри $V^{(B)}$. В самом деле,

$$[\![(\forall \tau \in R^{\wedge})\ \chi'{\uparrow} \circ \nu^{\bar{\mathscr{X}}}(\tau) \circ \chi'{\uparrow}^{-1} = \nu^{\mathscr{X}}(\tau)]\!] =$$

$$= \bigwedge_{\tau \in R} [\![\chi'{\uparrow} \circ \nu^{\mathscr{X}'}(\tau^{\wedge}) \circ \mathscr{X}{\uparrow}^{-1} = \nu^{\mathscr{X}}(\tau^{\wedge})]\!] =$$

$$= \bigwedge_{\tau \in R} [\![\chi'{\uparrow} \circ (\gamma' \circ \nu^{\mathscr{Y}}(\tau) \cdot \gamma'^{-1}) \circ \chi'{\uparrow}^{-1} = \nu^{\mathscr{X}}(\tau^{\wedge})]\!] =$$

$$= \bigwedge_{\tau \in R} [\![(\chi' \circ \gamma' \circ \nu^{\mathscr{Y}}(\tau) \circ \gamma'^{-1} \circ \chi'^{-1}){\uparrow} = \nu^{\mathscr{X}}(\tau^{\wedge})]\!] =$$

$$= \bigwedge_{\tau \in R} [\![\gamma \circ \nu^{\mathscr{Y}}(\tau) \circ \gamma^{-1}{\uparrow} = \nu^{\mathscr{X}}(\tau^{\wedge})]\!] = 1$$

в силу определения $\nu^{\mathscr{X}}(\tau^{\wedge})$.

5.9. Категорный вариант 5.8, основанный на использовании множеств с B-метрикой, приведен в [14].

5.10. В заключение стоит отметить, что изложенные выше результаты частично анонсированы в [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Современные проблемы математики, т.19. – М.: ВИНИТИ, 1982.
2. ЙЕХ Т. Теория множеств и метод форсинга. – М.: Мир, 1973.
3. МАНИН Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. – М.: Советское радио, 1979.
4. BELL J.L. Boolean-valued models and independence proofs in set theory. – Oxford: Clarendon Press, 1979.
5. TAKEUTI G., ZARING W. Axiomatic set theory. – Berlin a.o.: Springer, 1975.
6. TAKEUTI G. Two applications of logic to mathematics.– Tokyo: Iwanami, 1978.
7. SOLOVAY R., TENNENBAUM S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem. – Ann. Math.,1973, v.94,N2,p.201-245.
8. КУСРАЕВ А.Г. Некоторые применения теории булевозначных моделей в функциональном анализе. – Новосибирск, 1982. – 42 с. (Препринт №5/ Институт математики СО АН СССР).
9. КУСРАЕВ А.Г., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Субдифференциалы в булевозначных моделях теории множеств. – Сиб. мат. журн., 1983, т.29, №5, с.109-133.
10. ГОРДОН Е.И. К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах. – Сиб. мат. журн., 1982, т.23, №5, с.55-65.
11. ГОРДОН Е.И. K-пространства в булевозначных моделях теории множеств. – ДАН СССР, 1981, т.158, №4, с.777-780.
12. ГОРДОН Е.И., ЛЮБЕЦКИЙ В.А. Некоторые применения нестандартного анализа в теории булевозначных мер. – ДАН СССР, 1981, т.256, №5, с.1037-1041.
13. КУСРАЕВ А.Г. Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей. – ДАН СССР, 1982, т.267, №5, с.1049-1052.
14. КУСРАЕВ А.Г. О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа. – ДАН СССР, 1983, т.271, №2, с.283-286.
15. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Спуски и подъемы. – ДАН СССР, 1983, т.272, №3, с.521-524.

Поступила в ред.-изд. отдел
01.12.1983 г.