АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ISSN 0134-3998

# ПРОБЛЕМЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

# ОПТИМИЗАЦИЯ 22 (39)

НОВОСИБИРСК, 1978

Выпуск 22 (39) ОПТИМИЗАЦИЯ 1978 г.

Выпуклый анализ

УДК 517.51 + 519.95 + 513.88

# ВЫПУКЛЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

С.С.Кутателадзе

В этой статье формулы субдифференциального исчисления применяются для нахождения критериев оптимальности решений выпуклых экстремальных задач.

1. Пусть $X$ - векторное пространство, $Y$ и $Z$ - упорядоченные векторные пространства, $F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ и $G: X \to Z \cup \{+\infty\}$ - выпуклые операторы. Упорядоченная пара операторов $(G, F)$ в теории экстремальных задач называется векторной выпуклой программой или векторной задачей оптимизации и символически записывается в следующем виде:

$$Gx \le 0, \ Fx \to \inf.$$

Оператор $G$ называется ограничением программы, а оператор $F$ - целью программы. Множество $U = \{x \in X : Gx \le 0\}$ называется допустимым, а его элементы допустимыми решениями или планами программы. Если существует элемент $y = \inf F[U]$, то $y$ называется значением или идеалом программы. Допустимый план $\bar{x}$ называется оптимальным или решением векторной выпуклой программы, если $y = F\bar{x}$. Иногда говорят, что $x$ есть *optimum optimorum* или идеальный оптимум в рассматриваемой программе. Таким образом, учитывая введенную терминологию, можно сказать, что $\bar{x}$ - оптимальный план в том и только в том случае, если $F\bar{x}$ - наименьший элемент образа допустимого множества при целевом отображении $F$. Допустимый план $x^{\circ}$ называется оптимальным по Парето или решением программы на оптимум Парето, если $Fx^{\circ}$ - минимальный элемент образа допустимого множества при целевом отображении $F$. В частности, оптимальный план является решением задачи на оптимум Парето. Обратное утверждение неверно.

Для векторных выпуклых программ особую роль играет понятие обобщенного решения. Именно, подмножество $\bar{U}$ допустимого множества $U$ называется обобщенным решением, если имеет место равенство $\inf F[U] = \inf F[\bar{U}]$. Таким образом, идеальному оптимуму отвечает случай, когда $\{\bar{x}\}$ - обобщенное решение. Уместно подчеркнуть, что в то время как идеального оптимума в векторной задаче часто может не существовать, обобщенные решения, разумеется, существуют всегда. Ниже покажем, что любое обобщенное решение, в свою очередь, является оптимальным планом некоторой векторной выпуклой программы, так что класс разрешимых векторных задач оптимизации весьма широк.

Начнем с рассмотрения задачи безусловной минимизации $Fx \to \inf$, т.е. со случая, когда ограничением служит некоторый индикатор $\delta_Z(X)$.

I.I. Элемент $\bar{x}$ является решением задачи $Fx \to \inf$ в том и только в том случае, если $0 \in \partial_{\bar{x}}(F)$.

В дальнейшем будем предполагать, что $Y$ является $K$-пространством.

I.2. Элемент $\bar{x}$ является решением задачи $Fx \to \inf$ в том и только в том случае, если на конусе $Fd_{\bar{x}}(dom(F))$ определена положительная производная по направлениям.

Приведенные простые утверждения показывают роль формул для вычисления субдифференциалов в теории экстремальных задач. В самом деле, умение учитывать детальную структуру оператора $F$ при исследовании линеаризованной задачи $0 \in \partial_{\bar{x}}(F)$ существенно облегчает анализ и улучшает качество возникающих критериев оптимальности. В качестве примера рассмотрим задачу на минимакс.

I.3. Пусть $F_1, \dots, F_n : X \to Y \cup \{+\infty\}$ - выпуклые операторы, причем конусы допустимых направлений $Fd_{\bar{x}}(dom(F_1)), \dots, Fd_{\bar{x}}(dom(F_n))$ находятся в общем положении. Элемент $\bar{x}$ является решением задачи

$F_1 \vee \ldots \vee F_n x \to \inf$ в том и только в том случае, если совместна система условий

$$\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n \in \Lambda(Y), \; \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k = I_Y,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k \circ F_k \bar{x} = F_1 \bar{x} \vee \ldots \vee F_n \bar{x},$$

$$0 \in \partial_{\bar{x}} (\bar{\alpha}_1 \circ F_1) + \ldots + \partial_{\bar{x}} (\bar{\alpha}_n \circ F_n).$$

Доказательство вытекает из I.I и правила дифференцирования максимума.

I.4. Пусть $U \subset dom(F)$ и точка $\bar{x}$ – внутренняя в $dom(F)$. Элемент $\bar{x}$ является решением задачи $x \in U, Fx \to \inf$, т.е. задачи с ограничением $\delta_Y(U)$, в том и только в том случае, если

$$0 \in \partial_{\bar{x}} (F) + \partial_{\bar{x}} (\delta_Y(U)).$$

Действительно, рассматриваемая задача эквивалентна безусловной программе $F_U x \to \inf$.

Нам потребуется в дальнейшем следующий частный случай I.4.

I.5. Элемент $\bar{x}$ является решением задачи

$$Ax = A\bar{x}, \; Fx \to \inf,$$

где $A \in L(Y, Z)$ и $dom(F) = X$, в том и только в том случае, если найдется оператор $B \in L(Z, Y)$ такой, что

$$0 \in \partial_{\bar{x}} (F) + B \circ A.$$

В силу I.4 имеем критерий оптимальности

$$0 \in \partial_{\bar{x}} (F) + \partial_{\bar{x}} (\delta_Y(\{x \in X : Ax = A\bar{x}\})).$$

Кроме того, прямое вычисление дает

$$\partial_{\bar{x}} (\delta_Y(\{x \in X : Ax = A\bar{x}\})) = \{C \in L(X, Y) : Ker(C) \supset Ker(A)\}.$$

2. Разберем способ получения критериев обобщенных решений. Сначала для пояснения идеи соответствующей общей конструкции изучим случай конечных обобщенных решений.

2.I. Пусть $V \subset dom(F)$ и точки $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ являются внутренними в $dom(F)$. Множество $\bar{U}=\{\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n\}$ является обобщенным решением программы $x\in U, Fx\to\inf$ в том и только в том случае, если совместна система условий:

$$\bar{\alpha}_1,\dots,\bar{\alpha}_n\in\Lambda(Y),\ \sum_{k=1}^{n}\bar{\alpha}_k=I_Y,$$
$$\sum_{k=1}^{n}\bar{\alpha}_k\circ F\bar{x}_k=F\bar{x}_1\wedge\dots\wedge F\bar{x}_n,$$
$$0\in\bar{\alpha}_k\circ\partial_{\bar{x}_k}(F)+\partial_{\bar{x}_k}(\delta_Y(U))\quad(k=1,\dots,n).$$

Применяя формулу Хана - Банаха - Канторовича к каноническому оператору, найдем мультипликаторы $\bar{\alpha}_1,\dots,\bar{\alpha}_n\in\Lambda(Y)$ такие, что

$$\bar{\alpha}_1+\dots+\bar{\alpha}_n=I_Y,\ \sum_{k=1}^{n}\bar{\alpha}_k\circ F\bar{x}_k=F\bar{x}_1\wedge\dots\wedge F\bar{x}_n.$$

Заметим теперь, что $\bar{U}$ является обобщенным решением рассматриваемой задачи в том и только в том случае, если $\bar{\mathfrak{X}}=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$ является оптимальным планом в следующей программе:

$$\mathfrak{X}=(x_1,\dots,x_n)\in U^n,\ \tilde{F}\mathfrak{X}\to\inf,$$
$$\tilde{F}\mathfrak{X}=\bar{\alpha}_1\circ Fx_1+\dots+\bar{\alpha}_n\circ Fx_n.$$

Таким образом, в силу I.4 критерий решения состоит в том, что

$$0\in\partial_{\bar{\mathfrak{X}}}(\tilde{F})+\partial_{\bar{\mathfrak{X}}}(\delta_Y(U^n)).$$

Вычисляя найденные субдифференциалы, получим требуемое.

Перейдем теперь к обобщенным решениям произвольной мощности. Рассмотрим пространство $X^{\bar{U}}$ и на нем оператор

$$\bar{F}:X^{\bar{U}}\to Y^{\bar{U}}\cup\{+\infty\},\ \bar{F}\mathfrak{X}:\bar{x}\mapsto F\mathfrak{X}(\bar{x}).$$

Положим $\bar{\mathfrak{X}}:\bar{x}\mapsto\bar{x}$ и допустим, что для всякого $\mathfrak{X}\in(dom(F))^{\bar{U}}$ выполняется $\bar{F}\mathfrak{X}\in(Y^{\bar{U}})_\infty$ и, кроме того, что точка $\bar{\mathfrak{X}}$ является внутренней в $(dom(F))^{\bar{U}}$.

2.2. Множество $\bar{U}$ является обобщенным решением задачи $x\in U, Fx\to\inf$ в том и только в том случае, если совместна система условий:

$$\bar{\alpha}\in L^+((Y^{\bar{U}})_\infty,Y),\ \bar{\alpha}\circ\Delta_{\bar{U}}=I_Y,$$

$$\bar{\alpha}\circ\bar{F}\bar{\mathfrak{X}}=\inf_{\bar{x}\in\bar{U}}F\bar{x},$$

$$0\in \partial_{\bar{\mathcal{X}}}(\bar\alpha\circ \bar F)+\partial_{\bar{\mathcal{X}}}(\delta_Y(U)^{\bar U})).$$

Найдем оператор $\bar\alpha\in L((Y^{\bar U})_\infty, Y)$ из условия

$$\bar\alpha\in\partial_{-\bar F\bar{\mathcal{X}}}(\varepsilon_{\bar U,Y}).$$

Тогда в силу правил субдифференцирования выполняется

$$\bar\alpha\in L^+((Y^{\bar U})_\infty, Y),\ \bar\alpha\circ\Delta_{\bar U,Y}=I_Y,$$

$$\bar\alpha\circ\bar F\bar{\mathcal{X}}=-\varepsilon_{\bar U,Y}(-\bar F\bar{\mathcal{X}})=\inf_{\bar x\in\bar U}F\bar x.$$

Допустим, что $U$ -обобщенное решение. Тогда для $\mathcal{X}\in U^{\bar U}$ имеем

$$\bar\alpha\circ\bar F\mathcal{X}\geq\inf_{\bar x\in\bar U}\bar F\mathcal{X}(\bar x)\geq\inf_{x\in U}Fx=\inf_{\bar x\in\bar U}F\bar x=\bar\alpha\circ\bar F\bar{\mathcal{X}},$$

т.е. $\bar{\mathcal{X}}$ - оптимальный план в программе

$$\bar{\mathcal{X}}\in U^{\bar U},\ \bar\alpha\circ\bar F\mathcal{X}\to\inf.$$

Наоборот, если $\bar{\mathcal{X}}$ - решение последней задачи, то для всякого $x\in U$ выполняется

$$\bar\alpha\circ\bar F\bar{\mathcal{X}}\leq\bar\alpha\circ\bar{\bar F}\circ\Delta_{\bar U,X}\,x=\bar\alpha\circ\Delta_{\bar U,Y}\,Fx=Fx.$$

Таким образом, справедливы оценки

$$\inf_{\bar x\in\bar U}F\bar x=\bar\alpha\circ\bar F\bar{\mathcal{X}}\leq\inf_{x\in U}Fx\leq\inf_{\bar x\in\bar U}F\bar x,$$

т.е. множество $\bar U$ является решением исходной задачи.

Привлекая теперь I.4, получаем, что $\bar U$ - обобщенное решение в том и только в том случае, если

$$0\in\partial_{\bar{\mathcal{X}}}(\bar\alpha\circ\bar F+\delta_Y(U^{\bar U})),$$

что и требовалось установить.

3. Перейдем к получению критериев оптимальности для общих векторных задач оптимизации. В этом пункте рассмотрим программу

$$Gx\leq 0,\ Fx\to\inf,$$

$$F,G:X\to Y\cup\{+\infty\},$$

где ограничение и цель - выпуклые операторы, причем для простоты считается, что $dom(G)=X$ . Рассматриваемая программа называется регулярной, если для каждого $x\in X$ либо $Gx\leq 0$, либо $Gx\geq 0$ и, кроме того, существует точка $x_0\in dom(F)$ такая, что элемент $-Gx_0$ является единицей в $Y$ , т.е. для любого $y>0$ выполняется $(-Gx_0)\wedge y>0$.

3.I. ТЕОРЕМА. Допустимый план $\bar x$ является оптимальным в регулярной задаче в том и только в том случае, если совместна следующая система условий:

$$\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \Lambda(Y),\ \bar{\alpha} + \bar{\beta} = I_Y,\ Ker(\bar{\alpha}) = \{0\},$$
$$0 \in \partial_{\bar{x}}(\bar{\alpha} \circ F) + \bar{\beta} \circ \partial_{\bar{x}}(G),$$
$$\bar{\beta} \circ G\bar{x} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\bar{x}$ - решение задачи. Рассмотрим следующее отображение:

$$\Phi : x \longmapsto (Fx - F\bar{x})_Y \vee Gx.$$

Тогда $\Phi : X \to Y \cup \{+\infty\}$ - выпуклый оператор, причем $\Phi x \geq 0$ для всех $x \in X$. В самом деле, если $x$ - допустимый элемент, то $Fx \geq F\bar{x}$ и, стало быть, $\Phi x \geq 0$. Если $x$ - недопустимая точка, то в силу условия регулярности $Gx \geq 0$, а потому и $\Phi x \geq 0$. Кроме того, $\Phi\bar{x} = 0 \vee G\bar{x} = 0$, ибо $G\bar{x} \leq 0$. Таким образом, точка $\bar{x}$ - решение задачи безусловной минимизации $\Phi x \to inf$ и по I.I имеет место

$$0 \in \partial_{\bar{x}}(\Phi).$$

Выполняя субдифференцирование, найдем мультипликаторы $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \Lambda(Y)$ такие, что $\bar{\alpha} + \bar{\beta} = I_Y$, и, кроме того,

$$0 \in \partial_{\bar{x}}(\bar{\alpha} \circ F) + \bar{\beta} \circ \partial_{\bar{x}}(G),$$
$$\bar{\alpha}(F\bar{x} - F\bar{x}) + \bar{\beta} \circ G\bar{x} = \Phi\bar{x},$$

так что $\bar{\beta} \circ G\bar{x} = 0$.

Установим теперь обратимость мультипликатора $\bar{\alpha}$. Для этого выберем такую реализацию $K$-пространства $Y$ в качестве фундамента пространства $C_\infty(Q)$, в которой элемент $-Gx_0$ представляется функцией $1$, тождественно равной единице на $Q$. Используя свойства мультипликаторов, найдем единственную непрерывную функцию $\tilde{\alpha}$, для которой при всех $y \in C(Q)$ и $q \in Q$ выполняется

$$0 \leq \tilde{\alpha}(q) \leq 1,\ \bar{\alpha}y(q) = \tilde{\alpha}(q)y(q).$$

Если $Ker(\bar{\alpha}) \neq \{0\}$, то найдется открытое множество $U$ в $Q$ такое, что $\tilde{\alpha}|_U = 0$. Отсюда непосредственно следует, что для всякой точки $u \in U$ и произвольного $y \in Y$ выполняется $\bar{\alpha}y(u) = 0$.

Поскольку в силу уже установленного

$$\bar{\alpha}\circ F\bar{x}\leq\bar{\alpha}\circ Fx_0+\bar{\beta}\circ Gx_0=\bar{\alpha}\circ Fx_0-\bar{\beta}\mathbb{1},$$

то, в частности, в точке $u\in U$ выполняется

$$0=\bar{\alpha}\circ F\bar{x}(u)\leq-\bar{\beta}\mathbb{1}(u)=-1.$$

Полученное противоречие означает, что $Ker(\bar{\alpha})=\{0\}$. Тем самым необходимость установлена.

Для доказательства достаточности заметим, что в силу условий на субдифференциалы для всякой точки $x\in X$, для которой $Gx\leq 0$, справедливо

$$\bar{\alpha}\circ F\bar{x}=\bar{\alpha}\circ F\bar{x}+\bar{\beta}\cdot G\bar{x}\leq\bar{\alpha}\circ Fx+\bar{\beta}\circ Gx\leq\bar{\alpha}\circ Fx.$$

Так как $Ker(\bar{\alpha})=\{0\}$, то $\bar{\alpha}$ есть порядковый изоморфизм $Y$ на $\alpha[Y]$, т.е. для допустимых $x\in X$ выполняется $Fx\geq F\bar{x}$. Значит, $\bar{x}$ - оптимальный план. Теорема доказана.

4. В этом пункте рассмотрим следующую наиболее типичную в приложениях задачу оптимизации:

$$Ax=A\bar{x},\quad Gx\leq 0,\ Fx\to\inf,$$

где $X_1, X$ - векторные пространства, $A\in L(X,X_1)$ - линейный оператор, $Z$ - архимедова векторная решетка с сильной единицей, а $Y$ - некоторое $K$-пространство с сильной единицей $\mathbb{1}_Y$. (Напомним, что для всякого $y\in Y^+$ при некотором $\lambda\in R^+$ выполняется $y\leq\lambda\mathbb{1}_Y$.) Операторы $G, F$, как обычно, выпуклые, $G: X\to Z\cup\{+\infty\}$ и $F: X\to Y\cup\{+\infty\}$, причем для простоты считается, что $dom(G)=dom(F)=X$. Рассматриваемая задача называется регулярной в смысле Слейтера, если для некоторой допустимой точки $x_0$ элемент $-Gx_0$ является сильной единицей в $Z$.

4.I. ТЕОРЕМА. Допустимый план $\bar{x}$ является оптимальным в регулярной в смысле Слейтера задаче в том и только в том случае, если совместна система условий

$$\bar{\lambda}\in L^+(Z,Y),\ \bar{\mu}\in L(X_1,Y),$$

$$0\in\partial_{\bar{x}}(F)+\partial_{\bar{x}}(\bar{\lambda}\circ G)+\bar{\mu}\circ A,$$

$$\bar{\lambda}\circ G\bar{x}=0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность приведенного условия очевидна. Установим только его необходимость.

Реализуем $Z$ как плотное подпространство в $C(Q)$ для некоторого компакта $Q$ так, чтобы элемент $-Gx_0$ превратился в функцию $\mathbf{1}$, тождественно равную единице на $Q$, и рассмотрим следующий оператор:

$$\varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y : Z \to Y,$$
$$\varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y : z \mapsto \max\{z(q) : q \in Q\} \mathbf{1}_Y .$$

Положим $U = \{x \in X : Ax = A\bar{x}\}$. Ясно, что исходная задача эквивалентна выпуклой программе

$$\varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y \circ Gx \leq 0, \ F_U x \to \inf,$$

где, как обычно, $F_U = F + \delta_Y(U)$ – срезка оператора $F$. Для последней задачи выполнены условия регулярности 3. В самом деле, оператор $\varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y \circ G$ действует в $Y \cup \{+\infty\}$, при этом

$$\varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y \circ Gx_0 = \max\{-\mathbf{1}(q) : q \in Q\} \mathbf{1}_Y = -\mathbf{1}_Y .$$

Таким образом, в силу 3.I совместна система условий

$$\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \Lambda(Y), \ \bar{\alpha} + \bar{\beta} = I_Y, \ \operatorname{Ker}(\bar{\alpha}) = \{0\},$$
$$0 \in \partial_{\bar{x}}(\bar{\alpha} \circ F_U) + \bar{\beta} \circ \partial_{\bar{x}}(\varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y \circ G),$$
$$\bar{\beta} \circ \varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y \circ G\bar{x} = 0.$$

Привлекая I.5, последовательно получаем

$$\partial_{\bar{x}}(\bar{\alpha} \circ F_U) = \partial_{\bar{x}}(\bar{\alpha} \circ F) + \partial_{\bar{x}}(\bar{\alpha} \circ \delta_Y(U)) =$$
$$= \bar{\alpha} \circ \partial_{\bar{x}}(F) + \partial_{\bar{x}}(\delta_Y(U)) = \bar{\alpha} \circ \partial_{\bar{x}}(F) + \{\mu \circ A : \mu \in L(X_1, Y)\}.$$

Кроме того, по формуле субдифференцирования выполняется

$$\partial_{\bar{x}}(\varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y \circ G) = \bigcup_{\lambda \in \partial_{G\bar{x}}(\varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y)} \partial_{\bar{x}}(\lambda \circ G).$$

При этом справедливо представление

$$\partial(\varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y) = \{B \in L^+(Z, Y) : B\mathbf{1} = \mathbf{1}_Y\}.$$

Таким образом, для некоторых $\lambda_1 \in \partial_{\bar{x}}(\varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y)$ и $\mu_1 \in L(X_1, Y)$ имеет место включение

$$0 \in \bar{\alpha} \circ \partial_{\bar{x}}(F) + \bar{\beta} \circ \partial_{\bar{x}}(\lambda_1 \circ G) + \bar{\beta} \circ \mu_1,$$

причем выполняется равенство $\lambda_1 \circ G\bar{x} = \varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y (G\bar{x})$. Следовательно, получается

$$\bar{\beta} \circ \lambda_1 \circ G\bar{x} = \bar{\beta} \circ \varepsilon \otimes \mathbf{1}_Y \circ G\bar{x} = 0.$$

Воспользовавшись тем, что $Ker(\bar{\alpha})=\{0\}$ и, помимо этого, $\bar{\alpha}[Y]=Y$, и полагая

$$\bar{\lambda}=\bar{\alpha}^{-1}\circ\bar{\beta}\circ\lambda_1, \quad \bar{\mu}=\bar{\alpha}^{-1}\circ\bar{\beta}\circ\mu_1,$$

получаем требуемый критерий оптимальности в субдифференциальной форме.

4.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 4.I, по существу, обосновывает справедливость принципа Лагранжа для решений. Именно, она утверждает, что оптимальные планы в задаче с ограничениями - это в точности те допустимые элементы, которые являются решениями задачи безусловной минимизации лагранжиана

$$(F+\bar{\lambda}\circ G+\bar{\mu}\circ A)x\to\inf$$

при соответствующих условиях на параметры $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ - множители Лагранжа. Наличие сильной единицы в пространстве значений цели обеспечивает отсутствие множителя при $F$. В случае же, когда в указанном пространстве есть обычная единица, такой множитель появляется так же, как и в 3.I, где речь идет о лагранжиане

$$(\bar{\alpha}\circ F+\bar{\beta}\circ G)x\to\inf.$$

Мы не формулируем здесь соответствующий критерий ввиду его громоздкости.

4.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Метод сведения регулярной в смысле Слейтера задачи к регулярной задаче п.3 называется скаляризацией ограничений. Нетрудно видеть, что скаляризация возможна не только в случае решеток с сильной единицей.

4.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Выписанные лагранжианы или функция $\Phi$, которая использовалась в доказательстве 3.I, доставляют примеры так называемых операторов штрафа. В частности, оператор $\Phi$ называется штрафом Иоффе.

В заключение этого пункта покажем, как использовать полученные результаты для нахождения критериев обобщенных решений. Простоты ради ограничимся случаем конечного обобщенного решения в регулярной в смысле Слейтера программе.

4.5. ТЕОРЕМА. *Множество* $\{\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n\}$ *является обобщенным решением регулярной в смысле Слейтера задачи в том и только в том случае, если* с о в м е с т н а   с и с т е м а   у с л о в и й

$$\bar{\alpha}_k \in \Lambda(Y),\ \bar{\lambda}_k \in L^+(Z,Y),\ \bar{\mu}_k \in L(X_1,Y),$$
$$\sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k = I_Y,\ \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k \circ F\bar{x}_k = F\bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge F\bar{x}_n,$$
$$A\bar{x}_k = A\bar{x},\ G\bar{x}_k \leq 0,\ \bar{\lambda}_k \circ G\bar{x}_k = 0,$$
$$0 \in \bar{\alpha}_k \circ \partial_{\bar{x}_k}(F) + \partial_{\bar{x}_k}(\bar{\lambda}_k \circ G) + \bar{\mu}_k \circ A \ (k=1,\ldots,n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наметим только схему рассуждений. Прежде всего ясно, что исходная программа эквивалентна следующей задаче: $x \in U, Fx \to inf$, где $U$ - допустимое множество. Применяя теперь 2.I и I.4, найдем такие мультипликаторы $\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_n \in \Lambda(Y)$, что для каждого $k=1,\ldots,n$ элемент $\bar{x}_k$ есть решение регулярной в смысле Слейтера программы

$$Ax = A\bar{x},\quad Gx \leq 0,\quad \bar{\alpha}_k \circ Fx \to inf.$$

Применяя к последней системе программ 4.I, приходим к требуемому критерию, так как на каждом шаге рассуждений мы использовали необходимые и достаточные признаки.

5. Здесь приводится критерий оптимальности по Парето. Для простоты вновь ограничимся регулярной в смысле Слейтера программой. При этом пространство значений оператора цели будем считать архимедовой векторной решеткой с сильной единицей (а не обязательно $K$ -пространством).

5.I. ТЕОРЕМА. Е с л и   э л е м е н т $x^\circ$ я в л я е т с я   р е ш е н и е м   н а   о п т и м у м   П а р е т о   р е г у л я р н о й   в   с м ы с л е   С л е й т е р а   в ы п у к л о й   п р о г р а м м ы ,   т о   н а й д у т с я   ф у н к ц и о н а л ы $\alpha^\circ, \beta^\circ$ и $\gamma^\circ$ н а   п р о с т р а н с т в а х $Y, Z$ и $X$   с о о т в е т с т в е н н о , у д о в л е т в о р я ю щ и е   у с л о в и я м

$$\alpha^\circ > 0,\ \beta^\circ \geq 0,\ \beta^\circ \circ Gx_\circ = 0,$$
$$0 \in \partial_{x^\circ}(\alpha^\circ \circ F) + \partial_{x^\circ}(\beta^\circ \circ G) + \gamma^\circ \circ A.$$

Е с л и   п р и   э т о м $Ker(\alpha^\circ) \cap Y^+ = \{0\}$ , т о   с п р а в е д л и в о с т ь   в ы п и с а н н ы х   у с л о в и й   д л я   д о п у с т и м о й   т о ч к и $x^\circ$ о б е с п е ч и -

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1_Z = -Gx_0$ - сильная единица в $Z$ и $1_Y$ - сильная единица в $Y$. Положим

$$\varepsilon_{1_Z} : z \longmapsto \inf\{t \in \mathbb{R} : z \leq t 1_Z\}, \ \varepsilon_{1_Z} : Z \to \mathbb{R},$$

$$\varepsilon_{1_Y} : y \longmapsto \inf\{t \in \mathbb{R} : y \leq t 1_Y\}, \ \varepsilon_{1_Y} : Y \to \mathbb{R}.$$

Тогда исходная задача эквивалентна программе

$$\varepsilon_{1_Z} \otimes 1_Y \circ Gx \leq 0, \ F_U x \to \inf,$$

где $U = \{x \in X : Ax = A\bar{x}\}$. Рассмотрим штраф Иоффе

$$\Phi x = (F_U x - F_U x^\circ) \vee \varepsilon_{1_Z} \otimes 1_Y \circ Gx.$$

Очевидно, что $x^\circ$ является оптимумом Парето в безусловной программе $\Phi x \to \inf$. При этом $\Phi x^\circ = 0$. Иными словами, $x^\circ$ есть решение скалярной задачи $\varepsilon_{1_Y} \circ \Phi \to \inf$, и, значит,

$$0 \in \partial_{x^\circ} (\varepsilon_{1_Y} \circ \Phi).$$

Применяя правила субдифференцирования, найдем $\lambda \in Y'$, для которого

$$\lambda \geq 0, \ \lambda(1_Y) = 1, \ \lambda \circ \Phi x^\circ = 0, \ 0 \in \partial_{x^\circ}(\lambda \circ \Phi).$$

Найдем теперь положительные функционалы $\alpha^\circ, \beta$ такие, что $\alpha^\circ + \beta = \lambda$ и, кроме того,

$$\lambda \circ \Phi_{x^\circ} = \alpha^\circ (F_U x^\circ - F_U x^\circ) + \beta \circ \varepsilon_{1_Z} \otimes 1_Y \circ Gx^\circ,$$

$$0 \in \partial_{x^\circ} (\alpha^\circ \circ F_U) + \partial_{x^\circ} (\beta \circ \varepsilon_{1_Z} \otimes 1_Y \circ G).$$

Очевидно, что при этом выполняются соотношения

$$\beta \circ \varepsilon_{1_Z} \otimes 1_Y \circ G = \beta(1_Y) \varepsilon_{1_Z} \circ G,$$

$$\beta(1_Y) \varepsilon_{1_Z} \circ Gx^\circ = 0.$$

Вычисляя субдифференциал $\partial_{x^\circ}(\varepsilon_{1_Z} \circ G)$, найдем $\beta_0 \in Z'$ так, что

$$\beta_0 \geq 0, \ \beta_0(1_Z) = 1, \ \beta_0 \circ Gx^\circ = \beta_0 \circ \varepsilon_{1_Z} \circ Gx^\circ;$$

$$0 \in \partial_{x^\circ} (\alpha^\circ \circ F_U) + \beta(1_Y) \partial_{x^\circ} (\beta_0 \circ G).$$

Полагая $\beta^\circ = \beta(1_Y) \beta_0$, получаем соотношения

$$0 \in \partial_{x^\circ} (\alpha^\circ \circ F_U) + \partial_{x^\circ} (\beta^\circ \circ G),$$

$$\beta^\circ \circ Gx^\circ = \beta(1_Y) \beta_0 \circ Gx^\circ = \beta(1_Y) \varepsilon_{1_Z} \circ Gx^\circ = 0.$$

Вычисляя субдифференциал $\partial_{x^\circ}(\alpha^\circ \circ F_U)$ (ср. I.5), получаем все требуемые соотношения. При этом $\alpha^\circ \neq 0$ ввиду регулярности исходной задачи в смысле Слейтера. Оставшаяся часть теоремы очевидна.

5.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно, при доказательстве 5.I нами использовались лишь архимедовость $Y$ и $Z$ и наличие внутренних точек в конусах $Y^+$ и $Z^+$.

6. В заключение текущего параграфа покажем, как применяются правила замены переменных в преобразовании Юнга для обоснования принципа Лагранжа для значений векторных программ.

6.I. ТЕОРЕМА. Конечное значение регулярной в смысле Слейтера программы является значением безусловной задачи для подходящего лагранжиана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in Y$ – значение программы. Положим $U=\{x\in X : Ax=A\bar{x}\}$ и составим штраф Иоффе

$$\Phi x = (F_U x - y) \vee \mathcal{E} \otimes \mathbb{1}_Y \circ Gx.$$

Ясно, что $\Phi$ – положительный выпуклый оператор, причем

$$0 \leq \inf_{x\in X} \Phi x \leq \inf\{\Phi x : Ax = A\bar{x},\ Gx \leq 0\} \leq 0.$$

Иными словами, для преобразования Юнга имеем

$$\Phi^* 0 = 0.$$

Заметим теперь, что штраф $\Phi$ допускает представление

$$\Phi : x \mapsto P(F_U x - y, Gx),$$

где $P : Y\times Z \to Y$ – сублинейный оператор, определенный соотношением

$$P : (y, z) \mapsto y \vee \mathcal{E} \otimes \mathbb{1}_Y z.$$

Применяя точную формулу замены переменных и правила для вычисления $\partial(P)$, видим, что совместна следующая система условий:

$$\lambda_1 \in \partial(\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}_Y),\ \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \Lambda(Y),\ \bar{\alpha} + \bar{\beta} = I_Y,$$

$$0 = (\bar{\alpha} \circ F_U - \bar{\alpha} y + \bar{\beta} \circ \lambda_1 \circ G)^* 0.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что $Ker(\bar{\alpha}) = \{0\}$ и $\bar{\alpha}[Y] = Y$. Таким образом, для некоторого $\bar{\lambda} \in L^+(Z, Y)$ выполняется

$$y = -(F_U + \bar{\lambda} \circ G)^* 0.$$

Окончательно, вычисляя преобразование Юнга к срезке, найдем оператор $\bar{\mu} \in L(X_1, X)$, для которого

$$y = -(F + \bar{\lambda} \circ G + \bar{\mu} \circ A_{-A\bar{x}})^* 0.$$

Иными словами, получается равенство $y = \inf\limits_{x \in X} (Fx + \bar{\lambda} \circ Gx + \bar{\mu}(Ax - A\bar{x}))$.

7. Сделаем несколько заключительных замечаний. Векторные программы с реализующимися идеалами в гладком случае рассмотрены в [I]. В [2,3] принцип Лагранжа обоснован в форме теорем о седловых точках для разрешимых программ. Относительно практических примеров задач "с клювом" см. [4,5]. Идейные стороны многокритериального принятия решений освещены в [6,7]. Подробная библиография работ в этой области приведена в [4]. Общее представление об этом направлении, включая его прикладные аспекты, можно получить из [4,8]. Критерий оптимальности Парето иным способом впервые получен в [9]. Об оптимуме Парето для гладких задач см. цикл статей Смейла "Глобальный анализ и экономика", в частности [I0,II]. Ряд признаков существования простых векторных лагранжианов дан в [I2]. Относительно различных возможностей модификации условий регулярности см., в частности, [I3]. Принцип Лагранжа для значений векторных программ впервые обоснован в [I4].

## ЛИТЕРАТУРА


I. RITTER K. Optimization theory in linear spaces. Part 3. Mathematical programming in partially ordered Banach spaces.- "Math.Ann.", 1970, v.184, N 2, p.133-164.

2. ZOWE J. A duality theorem for a convex programming problem in order complete vector spaces. - "J. Math. Anal. Appl.", 1975, v.50, N 2, p.273-287.

3. ZOWE J. The saddle point theorem of Kuhn and Tucker in ordered vectŏr spaces. - "J. Math. Anal. Appl.", I977, v. 57, N 2, p.4I-55.

4. Multiple criteria decision making. Kyoto, 1975 (ed.M.Zeleny). Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, v.123. B.-H.- N.Y., Springer, 1976.

5. БАГРИНОВСКИЙ К.А. Основы согласования плановых решений. М., "Наука", 1977.

6. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М., "Наука", 1971.

7. WILHEIM J. Objectives and multi-objective decision making under uncertainty. Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, v.112. B.- H. -N.Y., Springer, 1975.

8. Multiple criteria decision making. Jouy-en-Josas, France, 1975 (ed. H. Thiriez and Zionts). Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, v. 130. B.- H. - N.Y., Springer, 1976.

9. ЭРРОУ К., ГУРВИЦ Л., УДЗАВА Х. Исследование по линейному и нелинейному программированию. М., ИИЛ, 1962.

10. СМЕЙЛ С. Глобальный анализ и экономика. I. Оптимум Парето и обобщение теории Морса. - "Успехи мат. наук", 1972, т.27, № 3, с. 177-187.

11. SMALE S. Global analysis and economics, 3. Pareto optima and price equilibria. - "J. Math. Economics", 1974, v.1, N 2, p.107-118.

12. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., ФЕЛЬДМАН М.М. Множители Лагранжа в задачах векторной оптимизации. - "Докл. АН СССР", 1976, т.231, № 1, с. 28-31.

13. BAZARAA H., SHETTY C. Foundations of optimization. Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, v.122. B. - H.- N.Y., Springer, 1976.

14. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Замены переменных в преобразовании Юнга. - "Докл. АН СССР", 1977, т.233, № 6, с.1039-1041.

Поступила в ред.-изд. отдел
15.IV.1977 г.