СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXII, № 4 ИЮЛЬ — АВГУСТ 1981

УДК 513.88

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

О ВЫПУКЛОМ АНАЛИЗЕ В МОДУЛЯХ

Цель настоящей статьи — дать полное описание упорядоченных унитарных модулей над решеточно-упорядоченными кольцами, в которых имеет место выпуклый анализ. Проблема построения выпуклого анализа в модулях выдвинута необходимыми потребностями классической скалярной теории экстремальных задач. Дело в том, что преобразования Юнга выпуклых операторов (1) обладают свойством модульной выпуклости над идеальным центром области значений рассматриваемых операторов. Отражением этого факта служит операторная выпуклость субдифференциалов. Понятно, что любой вопрос выпуклого анализа в модулях — это в конечном счете проблема мажорированного продолжения модульного гомоморфизма (2). Имеется ряд теорем такого сорта (см. (3, 4) и приведенную там библиографию). Особо отметим работу (5), где дано полное решение соответствующей задачи для кольца целых чисел **Z**.

В настоящей статье устанавливается общий дефект имеющихся теорем типа Хана — Банаха в модулях. Именно, устанавливается, что никакого специфического «модульного» выпуклого анализа просто не существует. Точнее говоря, с точностью до элементарных оговорок, выпуклый анализ имеет место в тех и только тех случаях, когда речь идет о пространствах Канторовича, рассматриваемых как модули над алгебрами своих ортоморфизмов. Более того, при этом аддитивные миноранты модульно-сублинейного оператора автоматически оказываются модульными гомоморфизмами. Последнее утверждение и составляет, по существу, основной результат статьи. Идея его доказательства достаточно прозрачна. В самом деле, почти очевидно, что крайние точки субдифференциалов должны коммутировать с мультипликаторами. Помимо этого, каждый субградиент получается «интегрированием» крайних точек. Остается заметить, что соответствующие «интегралы» — элементы субдифференциала канонического оператора — коммутируют с ортоморфизмами. Реализация указанной идеи, к сожалению, затруднена тем обстоятельством, что K-пространства, рассматриваемые как модули над кольцами своих ортоморфизмов, не являются, как правило, инъективными. Этот момент удается обойти, поскольку существенные события происходят лишь в «групповой части» таких модулей. Однако при этом не удалось избежать проверки мелких, но необходимых фактов.

Следует отметить, что доказанные в статье факты имеют определенное качественное значение для теории оптимизации, поскольку они вкладывают точный смысл в слова Л. Гурвица (6), с. 68: «Исследование явления «неделимости» вывело бы нас за пределы линейных пространств. Но... при этом нельзя ожидать справедливости большинства важных результатов, имеющих место для линейных пространств».

В заключение выражаю глубокую признательность участникам семинаров А. Д. Александрова и В. Л. Макарова за ценное обсуждение результатов статьи.

§ 1. Сублинейные операторы в модулях

Пусть A — произвольное решеточно-упорядоченное кольцо с положительной единицей $\mathbf{1}_A$. Пусть, далее, X является A-модулем, а Y — упорядоченным A-модулем. Все модули, естественно, считаются унитарными. Присоединим к Y наибольший элемент $+\infty$, положим $Y^{\cdot} = Y \cup \{+\infty\}$ и наделим $Y^{\cdot}$ естественной структурой A^+-полумодуля. Здесь, как обычно, A^+ — полугруппа положительных элементов в A.

Оператор $p: X \to Y^{\cdot}$ называется *A-сублинейным* с эффективной областью определения $\mathrm{dom}(p) = \{x \in X : p(x) < +\infty\}$, если

$$p(\pi_1 x_1 + \pi_2 x_2) \leqslant \pi_1 p(x_1) + \pi_2 p(x_2) \quad (x_1, x_2 \in X;\ \pi_1, \pi_2 \in A^+).$$

В случае, когда $\mathrm{dom}(p) = X$, говорят просто об A-сублинейном операторе $p: X \to Y$ (точка над Y опускается). Отметим, что любой A-сублинейный оператор $p: X \to Y^{\cdot}$ обладает тем свойством, что $p(0) = 0$. В самом деле, $p(0) = p(0 \cdot 0) \leqslant 0$, при этом $p(0) = p(0+0) \leqslant 2p(0)$. Оператор p называется *A^+-однородным*, если $p(\pi x) = \pi p(x)$ для всех $x \in X$ и $\pi \in A^+$.

Символом $\mathrm{Hom}_A(X, Y^{\cdot})$ обозначается совокупность всех таких A-сублинейных операторов $T: X \to Y^{\cdot}$, что $\mathrm{dom}(T)$ представляет собой A-подмодуль в X и след T на $\mathrm{dom}(T)$ является A-гомоморфизмом, т. е. входит в $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{dom}(T), Y)$. Множество $\mathrm{Hom}_A(X, Y^{\cdot})$ также наделяется естественной структурой A^+-полумодуля.

Для произвольного сублинейного оператора $p: X \to Y^{\cdot}$ определяются *субдифференциал* и *субдифференциал в точке*:

$$\partial^A(p) = \{T \in \mathrm{Hom}_A(X, Y^{\cdot}) : Tx \leqslant p(x) \ (x \in X)\},$$

$$\partial^A_x(p) = \{T \in \partial^A(p) : Tx = p(x) \ (x \in \mathrm{dom}(p))\}.$$

Заметим, что $\partial^A(p) = \partial^A_0(p)$ и, кроме того, выполняется

$$\partial^A_x(p) = \{T \in \mathrm{Hom}_A(X, Y^{\cdot}) : T(\bar{x} - x) \leqslant p(\bar{x}) - p(x) \quad (\bar{x} \in X)\}.$$

Поскольку X и Y являются, в частности, $\mathbf{Z}$-модулями, то определены субдифференциалы $\partial^{\mathbf{Z}}(p)$ и $\partial^{\mathbf{Z}}_x(p)$, которые обозначаются соответственно $\partial(p)$ и $\partial_x(p)$.

Говорят, что *A-модуль Y обладает свойством A-продолжения*, если для любого A-сублинейного оператора $p: X \to Y$ и произвольного A-подмодуля X_0 в X имеет место *несимметричная формула Хана — Банаха*:

$$\partial^A(p + \delta_Y(X_0)) = \partial^A(p) + \partial^A(\delta_Y(X_0)),$$

где, как обычно, $\delta_Y(X_0)$ — индикаторный оператор X_0, т. е. $\delta_Y(X_0): X \to Y^{\cdot}$ и $\delta_Y(X_0)x = 0$, если $x \in X_0$, и $\delta_Y(X_0)x = +\infty$ в противоположном случае. Если, помимо этого, для всякого $x \in X$ субдифференциал $\partial^A_x(p)$ не пуст, то говорят, что *A-модуль Y допускает выпуклый анализ.*

Предложение 1.1. *Если A-модуль Y обладает свойством A-продолжения и $p: X \to Y$ — некоторый A-сублинейный оператор, то справедливы следующие утверждения:*

(1). *Существует оператор $T \in \partial^A(p)$ такой, что $Tx = y$, в том и только в том случае, если $\pi y \leqslant p(\pi x)$ для всех $\pi \in A$.*

(2). *Оператор p является A^+-однородным в том и только в том случае, если $\partial^A_x(p) \neq \varnothing$ для всякого $x \in X$.*

(3). *Для любого A-модуля X_1 и произвольного A-гомоморфизма $T \in \mathrm{Hom}_A(X_1, X)$ выполняется $\partial^A(p \circ T) = \partial^A(p) \circ T$.*

Доказательство. Утверждение (1) очевидно.

(2). Если $T \in \partial^A_x(p)$ и $\pi \in A^+$, то $\pi p(x) = \pi Tx = T\pi x \leqslant p(\pi x) \leqslant \pi p(x)$, откуда и вытекает A^+-однородность p. Если же заранее известно, что

p — это A-сублинейный A^+-однородный оператор, то для всякого $\pi \in A$ выполняется

$$\pi p(x) = \pi^+ p(x) - \pi^- p(x) = p(\pi^+ x) - p(\pi^- x) \leqslant p(\pi^+ x - \pi^- x) = p(\pi x).$$

Таким образом, $\partial_\pi^A(p) \neq \varnothing$ в силу (1).

(3). Это утверждение устанавливается так же, как и лемма Левина — Рокафеллара [1].

§ 2. Теорема Крейна — Мильмана для групп

Пусть Y — упорядоченная абелева группа ($\mathbf{Z}$-модуль). Положим $Y_b = Y^+ - Y^+$ и допустим, что Y_b является стертым K-пространством. Напомним, что *стертыми K-пространствами* называются группы, получающиеся из K-пространств при игнорировании умножений на действительные числа. Имеет место

Теорема Бигарда [5]. *Упорядоченный $\mathbf{Z}$-модуль Y обладает свойством $\mathbf{Z}$-продолжения в том и только в том случае, если Y_b является стертым K-пространством.*

Замечание. В дальнейшем используется только тривиальная часть приведенной теоремы, состоящая в том, что K-пространства обладают свойством $\mathbf{Z}$-продолжения. Теорема Бигарда в полном объеме вытекает из приводимых ниже результатов.

Предложение 2.1. *Пусть $p: X \to Y$ — некоторый $\mathbf{Z}$-сублинейный оператор. Тогда для всякого $n \in \mathbf{N}$ выполняется $\partial(np) = n\partial(p)$.*

Доказательство. Включение $n\partial(p) \subset \partial(np)$ очевидно. Допустим теперь, что $T \in \partial(np)$. Возьмем какой-либо оператор $T_0 \in \partial(p)$. Тогда $T - nT_0 \in \partial(n(p - T_0))$. Так как $p(x) - T_0 x \geqslant 0$ для всех $x \in X$, то образ $\operatorname{im}(T - nT_0)$ содержится в Y_b. Значит, корректно определен оператор $B = (1/n)(T - nT_0)$. При этом $B \in \partial(p - T_0)$. Положим теперь $C = B + T_0$. Ясно, что $C \in \partial(p)$, причем $nC = n((1/n)(T - nT_0)) + nT_0 = T$. Окончательно, $T \in n\partial(p)$.

Следствие 2.2. *Для всякого $n \in \mathbf{N}$ выполняется* $\sum_{k=1}^{n} \partial(p) = n\partial(p)$.

Доказательство. Достаточно заметить, что множество, стоящее в левой части рассматриваемого соотношения, очевидно, содержится в $\partial(np)$.

Предложение 2.3. *Пусть $T_1, T_2 \in \partial(p)$, причем для некоторого $n \in \mathbf{N}$ выполняется $nT_1 = nT_2$. Тогда $T_1 = T_2$.*

Доказательство. Поскольку $T_1 - T_2 \in \partial(p - T_2)$ и $T_2 \in \partial(p)$, то $\operatorname{im}(T_1 - T_2) \subset Y_b$. Отсюда и вытекает требуемое.

Предложение 2.4. *Пусть $p: X \to Y$ — некоторый $\mathbf{Z}$-сублинейный $\mathbf{Z}^+$-однородный оператор и $x \in X$. Тогда для всякого $y \in X$ существует o-предел*

$$p_x(y) = o\text{-}\lim_n (p(nx + y) - p(nx)) = \inf_{n \in N} (p(nx + y) - p(nx)).$$

При этом $\partial(p_x) = \partial_x(p)$.

Доказательство. Полагая $z_n = p(nx + y) - p(nx)$, при $m \geqslant n$ получаем $-p(-y) \leqslant z_m \leqslant z_n$. Более того, $\partial(p_x) \subset \partial(p)$ и $p_x(x) = -p_x(-x) = p(x)$.

Следствие 2.5. *Для всякого $n \in \mathbf{N}$ выполняется $(np)_x = np_x$.*

Отметим также очевидное

Предложение 2.6. *Для $\mathbf{Z}$-сублинейного оператора $p: X \to Y$ положим $h_p(x) = \sup\{Tx : T \in \partial(p)\}$. Тогда h_p — наибольший $\mathbf{Z}$-сублинейный $\mathbf{Z}^+$-однородный оператор, мажорируемый p. При этом $\partial(h_p) = \partial(p)$.*

Напомним, что оператор T из $\partial(p)$ называется *крайним*, если из условий $T_1, T_2 \in \partial(p)$ и $T_1 + T_2 = 2T$ вытекает, что $T = T_1 = T_2$. Множество крайних операторов в $\partial(p)$ обозначается $\mathrm{Ch}\,(p)$. Напомним также, что символом $(Y^{\mathscr{A}})_\infty$, где $\mathscr{A}$ — произвольное множество, обозначается совокупность всех ограниченных Y-значных функций на $\mathscr{A}$. Это множество наделяется структурой упорядоченного $\mathbf{Z}$-модуля (подмодуля произведения $Y^{\mathscr{A}}$). Символом $\varepsilon_{\mathscr{A}}$ обозначается *канонический* $\mathbf{Z}$*-сублинейный оператор*:

$$\varepsilon_{\mathscr{A}} : (Y^{\mathscr{A}} \to Y,\ \varepsilon_{\mathscr{A}}(f) = \sup\{f(a) : a \in \mathscr{A}\}.$$

Если при этом $\mathscr{A}$ — некоторое слабо порядково ограниченное множество гомоморфизмов X в Y, то определяют гомоморфизм $\langle\mathscr{A}\rangle : X \to (Y^{\mathscr{A}})_\infty$ соотношением $\langle\mathscr{A}\rangle x : a \to ax$.

Теорема Крейна — Мильмана. *Для каждого* $\mathbf{Z}$*-сублинейного оператора* $p : X \to Y$ *выполняется*

$$\partial(p) = \partial(\varepsilon_{\mathrm{Ch}(p)}) \circ \langle \mathrm{Ch}(p) \rangle.$$

Доказательство проводится по известному образцу (ср. [7]), однако содержит некоторые небольшие нюансы.

Рассмотрим множество P всех таких $\mathbf{Z}$-сублинейных операторов p_1, что $p_1(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$ и, кроме того, p_1 — экстремален для p. Последнее означает, что для $T_1, T_2 \in \partial(p)$ таких, что $T_1 + T_2 \in 2\partial(p_1)$, выполняется $T_1, T_2 \in \partial(p_1)$. Ясно, что $p \in P$. Упорядочим P естественным образом и рассмотрим произвольную цепь P_0 в P. Ясно, что $p(-x) + p_1(x) \geqslant p_1(x) + p_1(-x) \geqslant 0$. Таким образом, определен элемент $p_0(x) = \inf\{p_1(x) : p_1 \in P_0\}$. В силу o-непрерывности сложения возникающий оператор p_0 является $\mathbf{Z}$-сублинейным. Также непосредственно проверяется, что $p_0 \in P$. Таким образом, по лемме Цорна в P есть минимальный элемент q. В силу его минимальности и предложения 2.6 выполняется $q = h_q$. Значит, по предложению 2.4 для каждого $x \in X$ определен оператор q_x. При этом, если $T_1, T_2 \in \partial(p)$ и $T_1 + T_2 \in 2\partial(q_x)$, то $T_1, T_2 \in \partial(q)$ в силу экстремальности q. В силу предложения 2.4 и следствия 2.5 $T_1x + T_2x = 2q(x)$. Учитывая, что $T_1x \leqslant q(x)$ и $T_2x \leqslant q(x)$, заключаем, что $T_1, T_2 \in \partial_x(q) = \partial(q_x)$. Итак, q_x — экстремален для p, т. е. $q = q_x$ для всех $x \in X$. Последнее означает, что q является гомоморфизмом, т. е. $q \in \mathrm{Ch}\,(p)$. Таким образом, множество $\mathrm{Ch}\,(p)$ непусто для всякого p.

Для завершения доказательства достаточно рассмотреть случай, когда p — это $\mathbf{Z}^+$-однородный оператор. В этом случае, как уже отмечалось, для всякого $x \in X$ оператор p_x экстремален для p и, значит, $\mathrm{Ch}\,(p_x) \subset \mathrm{Ch}\,(p)$. Привлекая теперь предложения 1.1 и 2.6, получаем требуемое представление. Теорема доказана.

Предложение 2.7. *Для любых* $\mathbf{Z}$*-сублинейного оператора* $p : X \to Y$ *и* $n \in \mathbf{N}$ *выполняется* $\mathrm{Ch}\,(np) = n\,\mathrm{Ch}\,(p)$.

Доказательство. Пусть сначала $T \in \mathrm{Ch}\,(np)$. Тогда по предложению 2.1 $T = nS$, где $S \in \partial(p)$. Проверим, что $S \in \mathrm{Ch}\,(p)$. В самом деле, если $2S = S_1 + S_2$, где $S_1, S_2 \in \partial(p)$, то $2T = 2nS = nS_1 + nS_2$. Таким образом, $nS = nS_1 = nS_2$. По предложению 2.3 получаем $S = S_1 = S_2$, что и нужно.

Если теперь $T \in \mathrm{Ch}\,(p)$ и $2nT = T_1 + T_2$, где $T_1, T_2 \in \partial(np)$, то по предложению 2.1 $T_1 = nS_1$ и $T_2 = nS_2$ для некоторых $S_1, S_2 \in \partial(p)$. При этом $2nT = n(2T) = n(S_1 + S_2)$. Привлекая предложение 2.3, имеем $2T = S_1 + S_2$, откуда $T = S_1 = S_2$. Следовательно, $T_1 = nS_1 = nT = nS_2 = T_2$. Итак, $nT \in \mathrm{Ch}\,(np)$. Предложение доказано.

§ 3. Ортоморфизмы

Пусть теперь Y — некоторое K-пространство, I_Y — тождественный оператор в Y. Компонента, порожденная I_Y в K-пространстве регулярных операторов $L^r(Y)$, обозначается $\mathrm{Orth}(Y)$. Элементы $\mathrm{Orth}(Y)$ называются *ортоморфизмами*. Свойства ортоморфизмов в K-пространствах подробно изучены в ([8]). В $\mathrm{Orth}(Y)$ выделяется наименьшее нормальное подпространство $Z(Y)$, содержащее I_Y. Это подпространство называется *идеальным центром* Y. Отметим, что относительно естественных кольцевой и порядковой структур $\mathrm{Orth}(Y)$ и $Z(Y)$ являются функциональными алгебрами. При этом $Z(Y)$ служит фундаментом $\mathrm{Orth}(Y)$, а $\mathrm{Orth}(Y)$ — централизатором $Z(Y)$ в кольце $L^r(Y)$. В дальнейшем нам понадобятся следующие факты об ортоморфизмах.

Предложение 3.1. *Для положительного оператора $T \in L^r(Y)$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) T является ортоморфизмом,

(2) $T + I_Y$ является решеточным гомоморфизмом,

(3) $T + I_Y$ обладает свойством Магарам, т. е. сохраняет порядковые интервалы.

Доказательство. Установим, что (2) $\Rightarrow$ (1) и (3) $\Rightarrow$ (1), так как обратные импликации очевидны.

(2) $\Rightarrow$ (1). Известно ([1]), что критерием решеточного гомоморфизма S является следующее равенство порядковых интервалов в пространстве операторов: $[0, S] = [0, I_Y]S$. Значит, поскольку $I_Y \leqslant T + I_Y$, найдется мультипликатор $0 \leqslant \gamma \leqslant I_Y$, для которого $\gamma T = I_Y - \gamma$. Отсюда вытекает, что для всякого проектора Pr в Y выполняется $\gamma(T\,\mathrm{Pr} - \mathrm{Pr}\,T) = 0$, ибо ортоморфизмы коммутируют друг с другом. В частности, для проектора Pr_γ на ядро $\ker(\gamma)$, которое, очевидно, является компонентой Y, получается $\gamma T\,\mathrm{Pr}_\gamma = 0$. Помимо этого, $\gamma T\,\mathrm{Pr}_\gamma = (I_Y - \gamma)\,\mathrm{Pr}_\gamma = \mathrm{Pr}_\gamma$. Таким образом, $\ker(\gamma) = \{0\}$. Значит, $T\,\mathrm{Pr} = \mathrm{Pr}\,T$ для любого проектора Pr. Последнее, как известно ([8]), означает, что T-ортоморфизм.

(3) $\Rightarrow$ (1). Известно ([8]), что критерием ортоморфизма является следующее свойство: если $u, v \in Y$ и $u \wedge v = 0$, то $Tu \wedge v = 0$. Итак, пусть $u \wedge v = 0$. Имеем $Tu \wedge v \leqslant Tu \leqslant Tu + u = (T + I_Y)u$. Так как $T + I_Y$ обладает свойством Магарам, то для некоторого z из порядкового интервала $[0, u]$ выполняется $Tu \wedge v = Tz + z$. Имеем оценки $v \geqslant Tu \wedge v = Tz + z \geqslant z$ и $u \geqslant z \geqslant 0$. Значит, $0 = u \wedge v \geqslant z \wedge z \geqslant 0$. Таким образом, $z = 0$, а следовательно, и $Tu \wedge v = 0$.

Предложение 3.2. *Пусть A — подкольцо и подрешетка в $\mathrm{Orth}(Y)$. Для элементов $\pi, \gamma \in A^+$ таких, что $\pi \geqslant I_Y$, положим*

$$[\pi^{-1}](\gamma) = \inf\{\delta \in A^+ : \delta\pi \geqslant \gamma\}.$$

Тогда $[\pi^{-1}] : A \to \mathrm{Orth}(Y)^+$ — возрастающий A-сублинейный оператор, причем $\gamma = [\pi^{-1}](\pi\gamma)$ для всех $\gamma \in A^+$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что при $\pi\delta_1 \geqslant \gamma$ и $\pi\delta_2 \geqslant \gamma$ выполняется $\pi(\delta_1 \wedge \delta_2) = \pi\delta_1 \wedge \pi\delta_2 \geqslant \gamma$. Отсюда следует, что $[\pi^{-1}](\gamma) \leqslant \gamma$ и $\pi[\pi^{-1}](\gamma) \geqslant \gamma$. Если $\gamma_2 \geqslant \gamma_1$, то $\pi([\pi^{-1}](\gamma_2) \wedge \gamma_1) \geqslant \gamma_2 \wedge \pi\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \wedge \gamma_1 = \gamma_1$. Это означает, что выполняется оценка $[\pi^{-1}](\gamma_2) \wedge \gamma_1 \geqslant [\pi^{-1}](\gamma_1)$. Таким образом, оператор $[\pi^{-1}]$ является возрастающим.

Заметим теперь, что для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in A^+$ выполняется $\pi([\pi^{-1}](\gamma_1) + [\pi^{-1}](\gamma_2)) \geqslant \gamma_1 + \gamma_2$ по уже доказанному. Следовательно, $[\pi^{-1}](\gamma_1 + \gamma_2) \leqslant [\pi^{-1}](\gamma_1) + [\pi^{-1}](\gamma_2)$. Кроме того, если $\mu, \gamma \in A^+$, то $\pi\mu[\pi^{-1}](\gamma) = \mu\pi[\pi^{-1}](\gamma) \geqslant \mu\gamma$, т. е. $[\pi^{-1}](\mu\gamma) \leqslant \mu[\pi^{-1}](\gamma)$. Иными словами, оператор $[\pi^{-1}]$ является A-сублинейным.

Для завершения доказательства заметим, что имеют место оценки $[\pi^{-1}](\pi\gamma) \leqslant \gamma$ и $\pi[\pi^{-1}](\pi\gamma) \geqslant \pi\gamma$. Отсюда получается равенство $\pi\gamma = \pi[\pi^{-1}](\pi\gamma)$. Учитывая теперь, что $\ker(\pi) = \{0\}$ в силу условия $\pi \geqslant I_Y$, получаем $\gamma = [\pi^{-1}](\pi\gamma)$, что и требовалось.

§ 4. Строение субдифференциала модульно-сублинейного оператора

В этом параграфе относительно упорядоченного A-модуля Y предполагается, что $Y_b = Y^+ - Y^+$ является (стертым) K-пространством и что кольцо A является подкольцом и подрешеткой кольца ортоморфизмов $\mathrm{Orth}(Y_b)$, естественно действующим в Y_b.

Предложение 4.1. *Пусть $Y = Y_b$ и $\mathscr{A}$ — произвольное множество. Если группа $(Y^{\mathscr{A}})_\infty$ наделена естественной структурой $Z(Y)$-модуля, то выполняется*

$$\partial(\varepsilon_{\mathscr{A}}) \subset \mathrm{Hom}_{Z(Y)}((Y^{\mathscr{A}})_\infty, Y),$$

Доказательство. Пусть Pr — произвольный проектор в Y и $\alpha \in \partial(\varepsilon_{\mathscr{A}})$. Для всех $y \in (Y^{\mathscr{A}})_\infty$ выполняется $-\mathrm{Pr}\varepsilon_{\mathscr{A}}(-y) \leqslant \alpha\mathrm{Pr}y \leqslant \varepsilon_{\mathscr{A}}(\mathrm{Pr}y) = \mathrm{Pr}\varepsilon_{\mathscr{A}}(y)$. Таким образом, для дополнительного проектора $\mathrm{Pr}^d = I_Y - \mathrm{Pr}$ справедливо $\mathrm{Pr}^d\alpha\,\mathrm{Pr} = 0$. Значит, $\alpha\,\mathrm{Pr} = \mathrm{Pr}\,\alpha\,\mathrm{Pr}$. Кроме того, $\mathrm{Pr}\,\alpha\,\mathrm{Pr}^d = 0$. Окончательно $\alpha\,\mathrm{Pr} = \mathrm{Pr}\,\alpha\,\mathrm{Pr} + \mathrm{Pr}\,\alpha\,\mathrm{Pr}^d = \mathrm{Pr}\,\alpha$. Из последнего соотношения следует, что оператор α коммутирует с конечно-значными элементами вида $t_1\mathrm{Pr}_1 + \ldots + t_m\mathrm{Pr}_m$, где $t_k \in \mathbf{R}^+$, а Pr_k — проекторы в Y. Так как для каждых $\pi \in Z(Y)$ и $n \in \mathbf{N}$ найдутся конечно-значные элементы α_n, β_n такие, что $0 \leqslant \pi - \alpha_n \leqslant (1/n)I_Y$ и $0 \leqslant \beta_n - \pi \leqslant (1/n)I_Y$, то из соотношений $\alpha_n\alpha \leqslant \alpha\pi \leqslant \beta_n\alpha$ вытекает, что α является $Z(Y)$-гомоморфизмом.

Предложение 4.2. *Пусть p — некоторый A-сублинейный оператор. Тогда $\partial^{A\cap Z(Y_b)}(p) \subset \partial^A(p)$.*

Доказательство. Возьмем $\pi \in A^+$ и для $n \in \mathbf{N}$ положим $\alpha_n = \pi \wedge nI_{Y_b}$. Рассмотрим $T \in \partial^{A\cap Z(Y_b)}(p)$ и точку x из области определения оператора p. Тогда

$$(\pi - \alpha_n)p(x) \geqslant p((\pi - \alpha_n)x) \geqslant T(\pi - \alpha_n)x = T\pi x - \alpha_n Tx.$$

Таким образом, $\pi p(x) - T\pi x \geqslant \alpha_n(p(x) - Tx)$. Так как $p(x) - Tx \in Y_b$, то из последнего неравенства вытекает $\pi p(x) - T\pi x \geqslant \pi p(x) - \pi Tx$. В силу произвольности x получаем $T\pi = \pi T$, т. е. $T \in \partial^A(p)$. Предложение доказано.

Теорема 4.3. *Для каждого A-сублинейного оператора $p: X \to Y$ выполняется $\partial(p) = \partial^A(p)$.*

Доказательство. Установим, прежде всего, что для всякого $T \in \mathrm{Ch}(p)$ выполняется $T \in \partial^{A\cap Z(Y_b)}(p)$ Возьмем $\pi \in A^+ \cap Z(Y_b)$. Отметим, что для некоторого $n \in \mathbf{N}$ выполняется $\pi \leqslant n\mathbf{1}_A$, ибо $\mathbf{1}_A = I_{Y_b}$. Поскольку $\mathbf{1}_A$ действует в X и в Y, как соответствующие тождественные операторы, получаем

$$nT = n\mathbf{1}_A T = \pi T + (n\mathbf{1}_A - \pi)T;\quad nT = T\pi + T(n\mathbf{1}_A - \pi);$$
$$2nT = (\pi T + T(n\mathbf{1}_A - \pi)) + (T\pi + (n\mathbf{1}_A - \pi)T).$$

Учитывая очевидные вхождения

$$\pi T + T(n\mathbf{1}_A - \pi) \in \partial(np),\quad T\pi + (n\mathbf{1}_A - \pi)T \in \partial(np)$$

и предложение 2.7, по которому $\pi T \in \mathrm{Ch}(\pi p)$, получаем $\pi T = \pi T + T(\pi 1_A - \pi)$. Таким образом, $T\pi = \pi T$.

Рассмотрим теперь оператор $p_1 = p - T$, где $T \in \mathrm{Ch}(p)$. Ясно, что $\mathrm{im}(p - T) \subset Y_b$. В силу уже доказанного выполняется $\mathrm{Ch}(p_1) \subset \partial^{A \cap Z(Y_b)}(p_1)$. Кроме того, по теореме Крейна — Мильмана и предложению 4.1 выполняется

$$\partial(p_1) = \partial(\varepsilon_{\mathrm{Ch}(p_1)}) \circ \langle \mathrm{Ch}(p_1) \rangle,$$

$$\partial(\varepsilon_{\mathrm{Ch}(p_1)}) \subset \mathrm{Hom}_{A \cap Z(Y_b)}\left(\left((Y_b)^{\mathrm{Ch}(p_1)}\right)_\infty, Y_b\right).$$

Отсюда непосредственно вытекает, что $\partial(p_1) = \partial^{A \cap Z(Y_b)}(p)_1$. Если теперь $S \in \partial(p)$, то $S - T \in \partial(p_1)$ и, значит, оператор $S - T$ является $A \cap Z(Y_b)$-гомоморфизмом. Таков же и оператор T, т. е. $S \in \partial^{A \cap Z(Y_b)}(p)$. Ссылка на предложение 4.2 завершает доказательство.

Следствие 4.4. *Упорядоченный A-модуль Y обладает свойством A-продолжения.*

Следствие 4.5. *Пусть $p_1, p_2 : X \to Y$ — некоторые A-сублинейные операторы. Если эффективные области определения $\mathrm{dom}(p_1)$ и $\mathrm{dom}(p_2)$ находятся в общем положении усиленно, т. е. для всякого A-подмодуля X_0, содержащего $\mathrm{dom}(p_1) \cap \mathrm{dom}(p_2)$, выполняется*

$$X_0 = \mathrm{dom}(p_1) \cap X_0 - \mathrm{dom}(p_2) \cap X_0,$$

то имеет место симметричная формула Хана — Банаха: для всякого $x \in \mathrm{dom}(p_1) \cap \mathrm{dom}(p_2)$ выполняется

$$\partial_x^A(p_1 + p_2) = \partial_x^A(p_1) + \partial_x^A(p_2).$$

Доказательство. Если $T_1 \in \partial^A{}_x(p_1)$ и $T_2 \in \partial^A{}_x(p_2)$, то $\mathrm{dom}(T_1) \supset \mathrm{dom}(p_1)$, $\mathrm{dom}(T_2) \supset \mathrm{dom}(p_2)$ и $T_1 x = p_1(x)$, $T_2 x = p_2(x)$. Значит, $\mathrm{dom}(T_1 + T_2) \supset \mathrm{dom}(p_1) \cap \mathrm{dom}(p_2) = \mathrm{dom}(p_1 + p_2)$ и $(T_1 + T_2)x = (p_1 + p_2)(x)$. Следовательно, $T_1 + T_2 \in \partial^A{}_x(p_1 + p_2)$. Таким образом, для завершения доказательства следует проверить, что $\partial^A(p_1 + p_2) \subset \partial^A(p_1) + \partial^A(p_2)$.

Пусть $T \in \partial^A(p_1 + p_2)$. Положим $X_0 = \mathrm{dom}(T)$. Ясно, что $X_0 \supset \mathrm{dom}(p_1) \cap \mathrm{dom}(p_2)$. В силу условий на эффективные области определения рассматриваемых операторов выполняется

$$X_0 \times X_0 = \mathrm{dom}(p_1) \cap X_0 \times \mathrm{dom}(p_2) \cap X_0 - \mathrm{im}(\Delta),$$

где $\Delta x_0 = (x_0, x_0)$ для $x_0 \in X_0$. Действительно, для $x_0 \in X_0$ по условию справедливо представление $(x_0, 0) = (x_1, -x_2) - (x_2, x_2)$, где $x_0 = x_1 - x_2$; $x_1, x_2 \in X_0$; $x_1 \in \mathrm{dom}(p_1)$ и $x_2 \in \mathrm{dom}(p_2)$. Аналогичное представление имеет место и для элемента $(0, x_0)$. Таким образом, для любых $x, y \in X_0$ найдутся элементы $h, g \in X_0$ такие, что

$$x + h \in \mathrm{dom}(p_1), \qquad y + h \in \mathrm{dom}(p_2);$$

$$-x + g \in \mathrm{dom}(p_1), \quad -y + g \in \mathrm{dom}(p_2).$$

При этом $p_1(x + h) + p_2(y + h) - Th \geqslant -p_1(-x + g) + p_1(h + g) - p_2(-y + g) + p_2(h + g) - Th \geqslant -p_1(-x + g) - p_2(-y + g) + Tg$. Таким образом, определен элемент

$$p(x, y) = \inf\{p_1(x + h) + p_2(y + h) - Th : h \in X_0,\ x + h \in \mathrm{dom}(p_1) \cap X_0,$$
$$y + h \in \mathrm{dom}(p_2) \cap X_0\}.$$

Возникающий оператор $p : X_0 \times X_0 \to Y$ несомненно $\mathbf{Z}$-сублинеен. Помимо этого для любого $\pi \in A^+$ и произвольного непустого подмножества U в Y^+ выполняется $\pi \inf U = \inf \pi(U)$. Отсюда последовательно получаем

$$\pi p(x, y) = \inf\{\pi p_1(x+h) + \pi p_2(y+h) - \pi Th : h \in X_0,\ x+h \in \mathrm{dom}(p_1),\ y+h \in \mathrm{dom}(p_2)\} \geqslant \inf\{p_1(\pi x + \pi h) + p_2(\pi y + \pi h) - T\pi h : h \in X_0,\ x+h \in \mathrm{dom}(p_1),\ y+h \in \mathrm{dom}(p_2)\} \geqslant \inf\{p_1(\pi x + \pi h) + p_2(\pi y + \pi h) - T\pi h : \pi h \in X_0,\ \pi x + \pi h \in \mathrm{dom}(p_1),\ \pi y + \pi h \in \mathrm{dom}(p_2)\} \geqslant \inf\{p_1(\pi x + h) + p_2(\pi y + h) - Th : h \in X_0,\ \pi x + h \in \mathrm{dom}(p_1),\ \pi y + h \in \mathrm{dom}(p_2)\} = p(\pi x, \pi y).$$

Иными словами, оператор p является A-сублинейным. По следствию 4.4 для некоторого $T_0 \in \mathrm{Hom}_A(X_0 \times X_0, Y)$ выполняется $T_0 \in \partial^A(p)$. Для $x \in X_0$ положим $T_1 x = T_0(x, 0)$ и $T_2 x = (0, x)$. Кроме того, для $x \in X \setminus X_0$ положим $T_1 x = T_2 x = +\infty$. Ясно, что $\mathrm{dom}(T_1) = \mathrm{dom}(T_2) = X_0$. При этом для $h \in X_0$ выполняется

$$T_1 h \leqslant p(h, 0) \leqslant p_1(h+0) + p_2(0+0) - T0 = p_1(h),$$
$$T_2 h \leqslant p(0, h) \leqslant p_1(0+0) + p_2(h+0) - T0 = p_2(h).$$

Итак, $T_1 \in \partial^A(p_1)$ и $T_2 \in \partial^A(p_2)$, причем $T = T_1 + T_2$. Следствие доказано.

§ 5. Модули, допускающие выпуклый анализ

В этом параграфе приводятся основные результаты о характеризации модулей, допускающих выпуклый анализ.

Теорема 5.1. *Если упорядоченный A-модуль Y обладает свойством A-продолжения, то Y_0 является стертым K-пространством.*

Доказательство. Установим сначала, что ограниченные множества в Y имеют точные верхние границы. Для этого следует показать, что любое семейство $[a_\xi, b_\xi]$ $(\xi \in \Xi)$ попарно пересекающихся порядковых интервалов, т. е. таких, что $a_\xi \leqslant b_\eta$ для всех $\xi, \eta \in \Xi$, имеет общую точку.

Рассмотрим A-модуль X, представляющий собой прямую сумму Ξ копий кольца A. Пусть, далее, X_0 — это A-подмодуль в X, определенный следующим образом:

$$X_0 = \left\{\pi = \pi(\cdot) \in X : \sum_{\xi \in \Xi} \pi(\xi) = 0\right\}.$$

Рассмотрим оператор $p : X \to Y$, заданный соотношением

$$p(\pi) = \sum_{\xi \in \Xi} \pi(\xi)^+ b_\xi - \pi(\xi)^- a_\xi = \sum_{\xi \in \Xi} \pi(\xi) a_\xi + \pi(\xi)^+ (b_\xi - a_\xi).$$

Ясно, что оператор p является A-сублинейным. При этом для элемента $\pi \in X_0$ в силу определения имеем

$$0 = \sum_{\xi \in \Xi} \pi(\xi) = \sum_{\xi \in \Xi} \pi^+(\xi) - \pi^-(\xi) = \sum_{\eta \in \Xi} \pi(\eta)^+ - \sum_{\xi \in \Xi} \pi(\xi)^-.$$

Применяя лемму о двойном разбиении положительных элементов, найдем семейство $\pi_{\xi\eta}$ $(\xi, \eta \in \Xi)$ положительных элементов A такое, что

$$\pi(\eta)^+ = \sum_{\xi \in \Xi} \pi_{\xi\eta},\ \pi(\xi)^- = \sum_{\eta \in \Xi} \pi_{\xi\eta}\ (\xi, \eta \in \Xi).$$

Тогда для любого $\pi \in X_0$ получаем

$$p(\pi) = \sum_{\eta \in \Xi} \pi(\eta)^+ b_\eta - \sum_{\xi \in \Xi} \pi(\xi)^- a_\xi = \sum_{\xi, \eta} \pi_{\xi\eta}(b_\eta - a_\xi) \geqslant 0.$$

Значит, существует оператор $T \in \partial^A(p)$ такой, что $T\pi = 0$ для $\pi \in X_0$. Возьмем какой-либо индекс $\xi \in \Xi$ и положим $\pi_\xi(\xi) = 1_A$ и $\pi_\xi(\eta) = 0$ при $\xi \neq \eta$. Тогда, так как $\pi_\xi - \pi_\eta \in X_0$ для любых ξ и η, то $T\pi_\xi = T\pi_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$ и фиксированного $\zeta \in \Xi$. Иными словами, для любых ξ, $\eta \in \Xi$ выполняется $-p(-\pi_\xi) \leqslant T\pi_\zeta \leqslant p(\pi_\eta)$. Осталось заметить, что $p(\pi_\eta) = b_\eta$ и $p(-\pi_\xi) = -a_\xi$.

Для доказательства того, что условно полная группа Y_b является стертым K-пространством, достаточно восстановить в Y_b операцию умножения на 1/2.

Рассмотрим $y \in Y^+$ и положим $p(y) = \inf\{z \in Y^+ : 2z \geqslant y\}$. Так как множество, фигурирующее в правой части последнего соотношения, фильтруется по убыванию, в силу o-непрерывности сложения выполняются оценки $p(y) \leqslant y$ и $2p(y) \geqslant y$. Отсюда вытекает, что для $\pi_1, \pi_2 \in A^+$ и $y_1, y_2 \in Y^+$ выполняется $2(\pi_1 p(y_1) + \pi_2 p(y_2)) \geqslant \pi_1 y_1 + \pi_2 y_2$. Следовательно, $p(\pi_1 y_1 + \pi_2 y_2) \leqslant \pi_1 p(y_1) + \pi_2 p(y_2)$. Более того, оператор $p : Y^+ \to Y$ возрастает. В самом деле, если $y_2 \geqslant y_1$, то $2(p(y_2) \wedge y_1) = 2p(y_2) \wedge 2y_1 \geqslant y_2 \wedge 2y_1 \geqslant y_2 \wedge y_1 = y_1$ и, значит, $p(y_2) \geqslant p(y_2) \wedge y_1 \geqslant p(y_1)$. Отметим дополнительно, что для всякого $y \in Y^+$ выполняется $p(2y) = y$. Действительно, $p(2y) \leqslant y$ и $2p(2y) \geqslant 2y$. Значит, $2p(2y) = 2y$, откуда $(y - p(2y)) = -(y - p(2y))$.

Рассмотрим теперь оператор $q : Y_b \to Y$, определенный соотношением $q(y) = p(y^+)$. В силу уже установленного q — это возрастающий A-сублинейный оператор. Значит, $\partial^A(q) \neq \varnothing$. Теперь для $y \in Y_b$ положим

$$[1/2]y = \sup\{Ty : T \in \partial^A(q)\}.$$

Возьмем $y \in Y^+$. Тогда для всякого $\pi \in A$ выполняется $\pi y = \pi^+ y - \pi^- y = p(2\pi^+ y) - p(\pi^- y) = q(2\pi^+ y) - q(2\pi^- y) \leqslant q(2\pi^+ y - 2\pi^- y) = q(2\pi y) = q(\pi(2y))$. Значит, в силу предложения 1.1 найдется оператор $T \in \partial^A(q)$ такой, что $T2y = y \leqslant q(2y) \leqslant p(2y) = y$. Значит, $2q(y) = q(2y) = y$, ибо q — это $\mathbf{Z}^+$-однородный оператор. Таким образом, $[1/2](2y) = y$ для всех $y \in Y^+$. Отсюда непосредственно вытекает, что оператор $[1/2]$ — возрастающий A-гомоморфизм. Ясно, что этот оператор и есть искомый. Теорема доказана.

Замечание. Схема доказательства условной полноты Y, по существу, предложена А. Д. Иоффе в рамках развитой им теории вееров. Делимость группы Y_b может быть выведена отсюда с помощью одного из результатов [5]. Отметим здесь же, что теорема 5.1 содержит в себе, разумеется, известную теорему Бонайса — Сильвермана — Ту [2].

Теорема 5.2. *Пусть A является d-кольцом, т. е. для любых $\pi_1 \in A$ и $\pi_2 \in A^+$ выполняются соотношения $(\pi_1\pi_2)^+ = \pi_1^+\pi_2$, $(\pi_2\pi_1)^+ = \pi_2\pi_1^+$.*

Упорядоченный A-модуль Y обладает свойством A-продолжения в том и только в том случае, если Y_b является стертым K-пространством и естественное линейное представление A в Y_b является кольцевым и решеточным гомоморфизмом на подкольцо и подрешетку кольца ортоморфизмов $\mathrm{Orth}(Y_b)$. При этом для любого A-сублинейного оператора $p : X \to Y$ выполняется $\partial^A(p) = \partial(p)$.

Доказательство. Пусть сначала известно, что Y обладает свойством A-продолжения. По теореме 5.1 Y_b является (стертым) K-пространством. Рассмотрим естественное линейное представление φ кольца A в пространстве Y_b, определенное соотношением $\varphi(\pi)y = \pi y$, где $y \in Y_b$ и $\pi \in A$. Установим, прежде всего, что φ — это решеточный гомоморфизм. Для этого для $y \in Y^+$ определим оператор $p : A \to Y$ соотношением $p(\pi) = \pi^+ y$. Этот оператор является A-сублинейным и возрастающим. Значит, если $T \in \partial^A(p)$, то $0 \leqslant T\mathbf{1}_A \leqslant y$. Таким образом, $T\pi = \pi T\mathbf{1}_A = \pi y_1$, где $y_1 = T\mathbf{1}_A$ и $y_1 \in [0, y]$. Если, в свою очередь, зафиксировать элемент $y_1 \in [0, y]$ и положить $T\pi = \pi y_1$ для $\pi \in A$, то получается элемент $\partial^A(p)$. Учитывая A^+-однородность оператора p и предложение 1.1, получаем следующие соотношения:

$$\varphi(\pi^+)y = \pi^+ y = p(\pi) = \sup\{T\pi : T \in \partial^A(p)\} = \sup \pi[0, y] = \varphi(\pi)^+ y.$$

Проверим теперь, что $\mathrm{im}(\varphi) \subset \mathrm{Orth}(Y_b)$. Для этого фиксируем элементы $\pi \in A^+$ и z, $y \in Y^+$ такие, что $0 \leqslant z \leqslant \pi y$. Для всякого $\pi_1 \in A$ выполняется $\pi_1 z \leqslant \pi_1^+ z \leqslant \pi_1^+ \pi y = (\pi_1 \pi)^+ y = p(\pi_1 \pi)$. Значит, по предложению 1.1. найдется оператор $T \in \partial_A(p)$ такой, что $T\pi = z$. Таким образом, $z = \pi T \mathbf{1}_A$, причем $T\mathbf{1}_A \in [0, y]$. Значит, оператор $\varphi(\pi)$ обладает свойством Магарам. В силу произвольности π и предложения 3.1 заключаем, что $\varphi(\pi)$ является ортоморфизмом.

Для завершения доказательства достаточно установить, что если φ является решеточным гомоморфизмом A в K-пространство $\mathrm{Orth}(Y_b)$, то для произвольного A-сублинейного оператора $p: X \to Y$ выполняется $\partial(p) = \partial^A(p)$. Рассмотрим сначала случай, когда $Y = Y_b$. Возьмем $T \in \partial(p)$ и точку $x \in X$. Рассмотрим оператор $t\pi = T\pi x$, где $\pi \in A$. Так как $t\pi \leqslant p(\pi x) \leqslant \pi^+ p(x) + \pi^- p(-x)$, то $\ker(t) \supset \ker(\varphi)$, а потому оператор t допускает снижение $\bar{t}$ на решеточно-упорядоченное кольцо $\bar{A} = A/\ker(\varphi)$. Наделим Y ассоциированной структурой точного модуля над $\bar{A}$. При этом $\bar{A}$ можно рассматривать как подкольцо и подрешетку $\mathrm{Orth}(Y)$. Заметим дополнительно, что для $\bar{\pi} \in \bar{A}$ и $\pi_1, \pi_2 \in \bar{\pi}$ выполняется $p(\pi_1 x) = p(\pi_2 x)$, ибо $p(\pi_1 x) - p(\pi_2 x) \leqslant p((\pi_1 - \pi_2)x) \leqslant (\pi_1 - \pi_2)^+ p(x) + (\pi_1 - \pi_2)^- \times p(-x)$. Таким образом, корректно определен оператор $\bar{p}: \bar{A} \to Y$, действующий по правилу $\bar{p}(\bar{\pi}) = p(\pi x)$ для $\pi \in \bar{\pi}$. Ясно, что оператор $\bar{p}$ является $\bar{A}$-сублинейным. При этом $\bar{t} \in \partial(\bar{p})$. В силу теоремы 4.3 $\partial(\bar{p}) = \partial^{\bar{A}}(\bar{p})$, т. е. $\bar{t}\bar{\pi} = \bar{\pi}\bar{t}\mathbf{1}_{\bar{A}}$ для $\bar{\pi} \in \bar{A}$. Отсюда вытекает, что $T\pi x = \pi T x$, т. е. $T \in \partial^A(p)$.

Рассмотрим теперь общий случай и вновь возьмем $T \in \partial(p)$ и точку $x \in X$. Заметим, что для всякого $\pi \in A$ выполняется

$$p(\pi x) - \pi T x = p(\pi^+ x - \pi^- x) - (\pi^+ - \pi^-) T x \leqslant$$

$$\leqslant \pi^+ (p(x) - Tx) + \pi^- (p(-x) - T(-x)).$$

Таким образом, выражение $q(\pi) = p(\pi x) - \pi T x$ определяет оператор, действующий из A в Y_b. Ясно, что этот оператор является A-сублинейным и, значит, по уже доказанному $\partial(q) = \partial^A(q)$. Оператор $s\pi = T\pi x - \pi T x$, очевидно, входит в $\partial(q)$, а потому $s\pi = \pi s \mathbf{1}_A = \pi(Tx - Tx) = 0$. Последнее означает, что $T \in \partial^A(p)$. Теорема полностью доказана.

Замечание. Условие, наложенное нами заранее на кольцо A, можно изменить, однако избавиться полностью от подобного рода предположений невозможно, если желательно сохранить A^+-однородность $\mathbf{Z}^+$-однородного A-сублинейного оператора. Отметим здесь же, что теорема 5.2 показывает, что свойство продолжения обязательно имеет место в усиленном виде, т. е. групповой гомоморфизм, определенный на подгруппе и мажорируемый модульно-сублинейным оператором, допускает продолжение до модульного гомоморфизма.

В дальнейшем нам понадобится следующее определение. Подкольцо A кольца ортоморфизмов называется *почти рациональным*, если для всякого $n \in \mathbf{N}$ найдется убывающая сеть мультипликаторов (π_ξ) из A такая, что для любого $y \in Y^+$ выполняется $(1/n)y = o\text{-}\lim\limits_{\xi} \pi_\xi y = \inf\limits_{\xi} \pi_\xi y$.

Предложение 5.3. *Кольцо A является почти рациональным в том и только в том случае, если каждый A-сублинейный оператор является A^+-однородным.*

Доказательство. Допустим сначала, что A-сублинейные операторы являются A^+-однородными. Возьмем $y \in Y^+$ и, привлекая предложение 3.2, рассмотрим A-сублинейный оператор $\gamma \to [\pi^{-1}](\gamma^+)y$, где $\gamma \in A$. По допущению этот оператор является A^+-однородным, т. е. $y = [\pi^{-1}](\pi \mathbf{1}_A)y = \pi[\pi^{-1}](\mathbf{1}_A)y$. Ввиду производльности y отсюда следует, что

$[\pi^{-1}](\mathbf{1}_A) = \pi^{-1}$. Рассмотрим в качестве π оператор $n\mathbf{1}_A$. Тогда в силу определения оператора $[\pi^{-1}]$ получается

$$[n\mathbf{1}_A]^{-1}(\mathbf{1}_A) = \inf\{\delta \in A^+ : n\delta \geqslant \mathbf{1}_A\},$$

откуда и вытекает почти рациональность кольца A.

Пусть теперь известно, что кольцо A — почти рационально. Рассмотрим некоторый A-сублинейный оператор $p: X \to Y$. Прежде всего, заметим, что для любого $\pi \in A$ такого, что $0 \leqslant \pi \leqslant \mathbf{1}_A$, даже без предположения о почти рациональности A выполняется $p(\pi x) = \pi p(x)$ для всех $x \in X$. Действительно, $p(x) = p(\pi x + (\mathbf{1}_A - \pi)x) \leqslant \pi p(x) + (\mathbf{1}_A - \pi)p(x) = p(x)$. Таким образом, в силу предложения 4.2 для установления A^+-однородности p достаточно убедиться в том, что p является $\mathbf{Z}^+$-однородным оператором. Для проверки $\mathbf{Z}^+$-однородности возьмем $n \in \mathbf{N}$ и выберем семейство мультипликаторов (π_ξ) такое, что $\pi_\xi \in A$, причем $0 \leqslant \pi_\xi \leqslant \mathbf{1}_A$ и $\pi_\xi \downarrow (1/n)\mathbf{1}_A$. Положим $\omega_\xi = (\mathbf{1}_A - (n-1)\pi_\xi)^+$. Ясно, что $\omega_\xi \in A^+$. При этом выполняется $\mathbf{1}_A - (n-1)\pi_\xi \leqslant \mathbf{1}_A - ((n-1)/n)\mathbf{1}_A = (1/n)\mathbf{1}_A$. Таким образом, $\omega_\xi \leqslant (1/n)\mathbf{1}_A$ и при этом $\omega_\xi \uparrow (1/n)\mathbf{1}_A$. Возьмем элемент $x \in X$. Тогда $np(x) - p(nx) \in Y^+$ и, значит,

$$0 \leqslant \omega_\xi(np(x) - p(nx)) = n\omega_\xi p(x) - p(n\omega_\xi x) = 0.$$

Переходя к пределу, убеждаемся, что p — это $\mathbf{Z}^+$-однородный оператор.

Теорема 5.4. *Упорядоченный A-модуль Y допускает выпуклый анализ в том и только в том случае, если Y_b является стертым K-пространством и естественное линейное представление A в Y_b является кольцевым и решеточным гомоморфизмом на почти рациональное кольцо ортоморфизмов.*

Доказательство. Операторы $\pi \to \pi^+ y$ и $z \to z^+$, где $\pi \in A$, $y \in Y^+$ и $z \in Y_b$, очевидно, являются A-сублинейными. Значит, если A-модуль Y допускает выпуклый анализ, в силу предложения 1.1 эти операторы A^+-однородны. Ввиду предложения 3.1 последнее означает, что естественное линейное представление A в Y_b является кольцевым и решеточным гомоморфизмом на подкольцо и подрешетку $\mathrm{Orth}(Y_b)$. В силу предложения 5.3 это подкольцо почти рационально. Для завершения доказательства достаточно осуществить необходимые факторизации так, как это проделано в доказательстве теоремы 5.2, и сослаться на эту теорему и предложение 5.3.

Новосибирск,
Институт математики СО АН СССР

Статья поступила
3 марта 1980 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Кутателадзе С. С.* Выпуклые операторы.— Успехи мат. наук, 1979, т. 34, № 1, с. 167—196.
[2] *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука, 1978.
[3] *Vincent — Smith G.* The Hahn — Banach theorem for modules.— Proc. London Math., Soc., 1967, v. 57, № 1, p. 72—90.
[4] *Breckner W., Scheiber E.* A Hahn — Banach type extension theorem for linear mappings into ordered modules.— Mathematika (RSR), 1977, v. 19, № 1, p. 13—22.
[5] *Bigard A.* Modules ordonnés injectifs.— Mathematika (RSR), 1973, v. 15, № 1, p. 15—24.
[6] *Эрроу К., Гурвиц Л., Удзава Х.* Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: ИЛ, 1962.
[7] *Кутателадзе С. С.* Теорема Крейна — Мильмана и ее обращение.— Сиб. мат. ж., 1980, т. 21, № 1, с. 130—138.
[8] *Luxemburg W., Schep A.* A Radon — Nikodym type theorem for positive operators and dual.— Indag. Math., 1978, v. 81, № 3, p. 357—375.