ISSN 0037—4474

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

(Отдельный оттиск)

ТОМ XXIV 5 1983

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXIV, № 5 СЕНТЯБРЬ — ОКТЯБРЬ 1983

УДК 517.11+517.43

А. Г. КУСРАЕВ, С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ В БУЛЕВОЗНАЧНЫХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Один из ключевых и вечных вопросов теории экстремальных задач таков: «Как ведут себя оптимальные значения и решения при замене переменных?». Некоторые возможные ответы на этот вопрос собраны в субдифференциальном исчислении негладких операторов. Наиболее подробно изучены выпуклые операторы и, в особенности, «скалярные» выпуклые операторы — выпуклые функции. Случай выпуклых функций занимает совершенно исключительное положение в связи с наличием эффективных геометрических интерпретаций локальных аппроксимаций этих функций во внутренних точках их эффективных областей определения. Основные связи здесь таковы:

(1) субдифференциал — это выпуклое слабо компактное множество;

(2) элементы наименьшего субдифференциала, содержащего слабо (порядково) ограниченное множество $\mathscr{A}$, получаются последовательным применением операций взятия выпуклой оболочки $\mathscr{A}$ и перехода к замыканию;

(3) крайние точки наименьшего субдифференциала, порожденного множеством $\mathscr{A}$, лежат в слабом замыкании исходного множества $\mathscr{A}$.

Найти операторные варианты приведенных утверждений — это известная проблема локального выпуклого анализа [1—3]. Имеется ряд частных решений для специальных классов пространств и операторов, апеллирующих либо к компактности субдифференциала в подходящей операторной топологии, либо к специфической геометрической интерпретации отделимости в конкретных функциональных пространствах. В то же время удовлетворительного общего ответа не было именно в связи с тем, что для произвольных пространств и операторов, с одной стороны нет (как правило!) никакой компактности в операторных топологиях, а с другой — «скалярные» трактовки теорем отделимости не доставляют адекватных характеризаций субдифференциалов.

Цель настоящей статьи — дать решение указанной проблемы. В частности, ниже приводится явное представление элементов субдифференциала и его крайних точек особого рода «дисперсными интегралами» o-крайних точек. Метод исследования — теория булевозначных моделей теории множеств [4—12], принципиальная связь которых с K-пространствами обнаружена в [13, 14]. Приблизительный план использования указанной теории таков. Следует сначала подобрать булеву алгебру и отвечающую ей модель, в которой изучаемый (= «внешний») оператор станет изображать скалярную выпуклую функцию в модели (= превратится во «внутреннюю» выпуклую функцию). После этого, интерпретируя во внешних терминах внутренний геометрический смысл субдифференциала функции, следует получить искомый ответ. Прямая реализация этого плана возможна, но связана с некоторыми техническими неудобствами (так, понятие o-крайней точки «плохо» интерпретируется). В этой связи в работе предпринят обходный маневр — указанный план используется лишь для анализа канонического сублинейного оператора — оператора взятия верхней грани. Общий случай выводится с учетом как специфики строения его субдифференциала, так и того факта, что любой сублинейный оператор лишь линейной заменой переменной отличается от канонического.

Доказательство основных результатов использует выводимость теорем Крейна — Мильмана и Мильмана в ZFC (= в теории множеств Цермело — Френкеля с аксиомой выбора), и в этом смысле нестандартно. Стоит подчеркнуть, что большая часть приводимых далее фактов обоснована обычными средствами. То же уместно отнести и ко всему нижеизложенному, если не предъявлять (как это принято) к другим большие требования, чем к себе. Качественно можно сказать, что в работе показано, как центральные понятия субдифференциального исчисления для операторов возникают при внешней расшифровке соответствующих скалярных предшественников в подходящей модели теории множеств.

Настоящая статья ориентирована прежде всего на специалистов в области выпуклого анализа. В этой связи изложение вспомогательных логических средств чуть более детализировано, чем экспозиция необходимых фактов из субдифференциального исчисления. Отметим здесь же, что результаты настоящей статьи анонсированы в [15] и были доложены на семинаре С. Л. Соболева. Выражаем искреннюю признательность участникам этого семинара за ценные обсуждения.

§ 1. Вспомогательные сведения о субдифференциалах

1.0. Здесь собраны необходимые факты из локального выпуклого анализа. Подробности и детали см. в [1—3].

1.1. Пусть X — вещественное векторное пространство, Y — некоторое K-пространство, $P: X \to Y$ — сублинейный оператор и $\mathscr{L}(X, Y)$ — пространство линейных операторов, действующих из X в Y. *Субдифференциал* $\partial(P)$ оператора P определяют соотношением

$$\partial(P) := \{A \in \mathscr{L}(X, Y) : (\forall x \in X)\ Ax \leqslant Px\}.$$

1.2. Пусть $B := \mathscr{B}(Y)$ — *база* K-пространства Y, т. е. полная булева алгебра проекторов на компоненты Y, или, что то же самое, алгебра положительных идемпотентов в $\mathscr{L}(Y) := \mathscr{L}(Y, Y)$, мажорируемых тождественным отображением $\mathbf{1} := I_Y$. Возьмем *разбиение* единицы в B, т. е. семейство $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ проекторов, для которого $b_\xi \wedge b_\eta = 0$ при $\xi \neq \eta$ и $\sup_{\xi \in \Xi} b_\xi = \mathbf{1}$. Если $(A_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство элементов в $\mathscr{L}(X, Y)$ и оператор A из $\mathscr{L}(X, Y)$ таковы, что $Ax = \sum_{\xi \in \Xi} b_\xi A_\xi x$ для $x \in X$, то A называют *перемешиванием* $(A_\xi)_{\xi \in \Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$. Субдифференциалы являются *сильно циклическими множествами*, т. е. выдерживают образование всевозможных перемешиваний семейств своих элементов. Тот же факт выражают словами: «субдифференциал совпадает со своей сильно циклической оболочкой». Отсюда видно, что субдифференциал является *сильно операторно выпуклым множеством* (= совпадает со своей сильно операторно выпуклой оболочкой), т. е. выдерживает образование комбинаций $\sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi A_\xi$, где $A_\xi \in \partial(P)$, $\alpha_\xi \in \mathscr{L}(Y)$, $0 \leqslant \alpha_\xi \leqslant \mathbf{1}$, $\sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi = \mathbf{1}$. В частности, субдифференциал — *операторно выпуклое множество*, т. е. $(A, B \in \partial(P)$ и $\alpha, \beta \in \mathscr{L}(Y)$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = \mathbf{1} \to \alpha A + \beta B \in \partial(P))$. Помимо этого, субдифференциал замкнут относительной поточечной r-сходимости. Напомним, что сеть $(A_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в $\mathscr{L}(X, Y)$ называют поточечно *r-сходящейся* (соответственно *o-сходящейся*) к $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, если для каждого $x \in X$ сеть $(A_\xi x)_{\xi \in \Xi}$ сходится с регулятором (соответственно o-сходится) к Ax в Y. Ясно, что r-сходимость влечет o-сходимость.

1.3. Для сублинейного оператора P символом $\mathrm{Ch}(P)$ обозначают *множество крайних точек* $\partial(P)$. Множество $\mathrm{Ch}(P)$ является сильно циклическим и $\partial(P)$ восстанавливается по $\mathrm{Ch}(P)$, т. е. является наименьшим субдифференциалом, содержащим $\mathrm{Ch}(P)$. Последний факт записывают в виде $\partial(P) = \operatorname{cop}(\operatorname{Ch}(P))$. Символ $\operatorname{cop}(\mathscr{A})$ обозначает операцию перехода к *опорной оболочке* $\mathscr{A}$, т. е. к наименьшему по включению субдифференциалу, содержащему $\mathscr{A}$.

1.4 Пусть $T \in \mathscr{L}_+(Y, Z)$, где Z — еще одно K-пространство, и $A \in \partial(P)$, где $P : X \to Y$. Оператор A называют *T-крайним*, если $TA \in \operatorname{Ch}(TP)$. Символом $\mathscr{E}_0(P)$ обозначается совокупность *о-крайних точек* P, т. е. точек, являющихся T-крайними для любого o-непрерывного оператора T. Выполнено равенство $\partial(P) = \operatorname{cop}(\mathscr{E}_0(P))$. В то же время $\mathscr{E}_0(P)$ не обязано быть даже цикличным множеством, т. е. выдерживать перемешивания конечных семейств своих элементов.

1.5. Пусть $\mathscr{A}$ — непустое множество и $l_\infty(\mathscr{A}, Y)$ — пространство, составленное из порядково ограниченных Y-значных функций на $\mathscr{A}$. Это пространство наделено естественной структурой K-пространства (и даже модуля над кольцом ортоморфизмов Y). Символом $\varepsilon_{\mathscr{A}}$ обозначают *канонический сублинейный оператор*:

$$\varepsilon_{\mathscr{A}}(f) := \sup f(\mathscr{A}) \quad (f \in l_\infty(\mathscr{A}, Y)).$$

Если $\mathscr{A} \subset \mathscr{L}(X, Y)$, то полагают $\langle\mathscr{A}\rangle x : A \to Ax$. Тем самым задают оператор $\langle\mathscr{A}\rangle \in \mathscr{L}\left(X, Y^{\mathscr{A}}\right)$. Множество $\mathscr{A}$ называют *слабо порядково ограниченным*, если $\langle\mathscr{A}\rangle$ действует в $l_\infty(\mathscr{A}, Y)$. Отметим, что для такого $\mathscr{A}$ выполнено

$$\operatorname{cop}(\mathscr{A}) = \partial\left(\varepsilon_{\mathscr{A}}\right) \circ \langle\mathscr{A}\rangle;$$
$$\partial\left(\varepsilon_{\mathscr{A}}\right) = \{\alpha \in \mathscr{L}_+(l_\infty(\mathscr{A}, Y), Y) : \alpha \circ \Delta_{\mathscr{A}} = 1\}.$$

Здесь $\Delta_{\mathscr{A}}$ — диагональное вложение: $\Delta_{\mathscr{A}} y := (y)_{A \in \mathscr{A}}$ для $y \in Y$, переводящее Y в множество «констант» в пространстве $l_\infty(\mathscr{A}, Y)$.

Принципиально, что каждый сублинейный оператор P лишь линейной заменой переменной отличается от канонического. Точнее говоря, справедливы соотношения:

$$P = \varepsilon_{\partial(P)} \circ \langle\partial(P)\rangle; \quad \partial(P) = \partial\left(\varepsilon_{\mathscr{E}(P)}\right) \circ \langle\mathscr{E}_0(P)\rangle$$

(= теорема Крейна — Мильмана для операторов).

1.6. *Крайними точками* $\partial\left(\varepsilon_{\mathscr{A}}\right)$ *служат решеточные гомоморфизмы, сохраняющие константы* (= *лежащие в* $\partial\left(\varepsilon_{\mathscr{A}}\right)$). *Более того, оператор* $S \in \partial\left(\varepsilon_{\mathscr{A}}\right)$ *является T-крайним в том и только в том случае, если*

$$T|Sf| = TS|f| \quad (f \in l_\infty(\mathscr{A}, Y)).$$

$\triangleleft$ В самом деле, критерием T-крайности S служат равенства (см. [6]):

$$Tg_+ = \inf_{u \in l_\infty(\mathscr{A}, Y)} T\left((\varepsilon_{\mathscr{A}} u - Su) \vee (\varepsilon_{\mathscr{A}}(u - f) - S(u - f) + g)\right)$$

для любых $f, g \in l_\infty(\mathscr{A}, Y)$. Иначе говоря, T-крайность эквивалентна следующему:

$$0 = \inf_u T\left((\varepsilon_{\mathscr{A}}(u + f) - S(u + f)) \vee (\varepsilon_{\mathscr{A}}(u - f) - S(u - f))\right) =$$
$$= \inf_u T\left(\varepsilon_{\mathscr{A}}\left((u + f - \Delta_{\mathscr{A}} Su - \Delta_{\mathscr{A}} Sf) \vee (u - f - \Delta_{\mathscr{A}} Su + \Delta_{\mathscr{A}} Sf)\right)\right) =$$
$$= \inf_u T\left(\varepsilon_{\mathscr{A}}(u - \Delta_{\mathscr{A}} Su) + |f - \Delta_{\mathscr{A}} Sf|\right).$$

В силу теоремы о векторном минимаксе, можно записать:

$$\begin{gathered}(S \text{ — это } T\text{-крайний оператор}) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall R \in \partial(T\varepsilon_{\mathscr{A}}))\, 0 \geqslant \inf_u R(u - \Delta_{\mathscr{A}} Su + |f - \Delta_{\mathscr{A}} Sf|) = \\ = R|f - \Delta_{\mathscr{A}} Sf| + \inf_u (Ru - R\Delta_{\mathscr{A}} Su) = R|f - \Delta_{\mathscr{A}} Sf| + \inf_u (Ru - TSu) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (R = TS \to R|f - \Delta_{\mathscr{A}} Sf| = 0) \leftrightarrow TS|f - \Delta_{\mathscr{A}} Sf| = 0.\end{gathered}$$

Осталось заметить, что

$$\begin{gathered}0 = TS|f - \Delta_{\mathscr{A}} Sf| \geqslant T(S(|f| - \Delta_{\mathscr{A}}|Sf|)) = TS|f| - T|Sf| \geqslant 0 \to \\ \to TS|f| = T|Sf| \to TS|f - \Delta_{\mathscr{A}} Sf| = T|Sf - S\Delta_{\mathscr{A}} Sf| = 0. \quad \triangle\end{gathered}$$

1.7. *Для канонического оператора* $\varepsilon_{\mathscr{A}}$ *выполнено*:

$$\mathscr{E}_0(\varepsilon_{\mathscr{A}}) = \mathrm{Ch}(\varepsilon_{\mathscr{A}}).$$

При этом для любого сублинейного оператора P верно

$$P = \varepsilon_{\mathscr{A}} \circ \langle \mathscr{A} \rangle \to \mathrm{Ch}(P) \subset \mathscr{E}_0(\varepsilon_{\mathscr{A}}) \circ \langle \mathscr{A} \rangle$$

(= *теорема Мильмана для операторов*).

Отметим здесь же, что δ-*функции* $\varepsilon_A : f \to f(A)$ для $f \in l_\infty(\mathscr{A}, Y)$ и $A \in \mathscr{A}$ явно лежат в $\mathrm{Ch}(\varepsilon_{\mathscr{A}})$. Перемешивания семейства $(\varepsilon_A)_{A \in \mathscr{A}}$ называют *чистыми состояниями на* $\mathscr{A}$. Очевидно, что чистые состояния — это *o*-крайние точки канонического оператора.

§ 2. Вспомогательные сведения о булевозначных моделях

2.0. Здесь собраны нужные факты о построении и правилах работы с булевозначными моделями. Детали см. в [4, 5, 10—12].

2.1. Пусть B — полная булева алгебра. Для каждого ординала α полагают

$$V_\alpha^{(B)} := \{x : (\exists \beta \in \alpha)\, x : \mathrm{dom}(x) \to B \wedge \mathrm{dom}(x) \subset V_\beta^{(B)}\}.$$

После этого рекурсивного определения вводят *булевозначный универсум* $V^{(B)}$ или, как еще говорят, класс B-множеств, соотношением:

$$V^{(B)} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha^{(B)},$$

где On — класс всех ординалов.

2.2. Пусть φ — произвольная формула теории ZFC. Естественным образом интерпретируя связки и кванторы в булевой алгебре B, вводят оценку $[\varphi]$ формулы, учитывая характер ее построения из атомарных формул $x \in y$ и $x = y$ и определяя оценки последних для $x, y \in V^{(B)}$ схемой рекурсии:

$$[x \in y] := \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(y)} y(z) \wedge [z = x];$$

$$[x = y] :=$$

$$:= \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(x)} x(z) \Rightarrow [z \in y] \wedge \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(y)} y(z) \Rightarrow [z \in x].$$

2.3. Универсум $V^{(B)}$ с указанным правилом оценивания формул является моделью теории множеств в том смысле, что *для любой теоремы* φ *теории* ZFC *выполнено* $[\varphi] = 1$ или, как говорят, φ *истинно внутри* $V^{(B)}$. Последний факт называют п р и н ц и п о м п е р е н о с а.

Отметим здесь же следующее общее соглашение. Если x — элемент $V^{(B)}$, а $\varphi(\cdot)$ — формула ZFC, то фраза «x удовлетворяет φ внутри $V^{(B)}$» или, короче, «$\varphi(x)$ внутри $V^{(B)}$» означает равенство $[\varphi(x)] = 1$.

2.4. Для элемента $x \in V^{(B)}$ и произвольного $b \in B$ определена функция

$$bx : z \to bx(z) \quad (z \in \operatorname{dom}(x)).$$

(Эта запись подразумевает, что $b\varnothing := \varnothing$ для $b \in B$.)

Для B-значных множеств x и y и элемента $b \in B$ выполнено:

$$[x \in by] = b[x \in y];$$
$$[bx = by] = b \Rightarrow [x = y];$$
$$[x = bx] = [b'x = \varnothing] = b' \Rightarrow [x = \varnothing].$$

(Здесь b' — это дополнение b.)

2.5. В классе $V^{(B)}$ имеется естественное отношение эквивалентности: $x \sim y := [x = y] = 1$. Выбирая в каждом классе эквивалентных элементов представителя (наименьшего ранга) — это так называемый «прием Фреге — Рассела — Скотта», приходят к *отделимому универсуму* $\bar{V}^{(B)}$, в котором

$$x = y \leftrightarrow [x = y] = 1.$$

Нетрудно видеть, что оценки формул не меняются при переходе к эквивалентным элементам. В этой связи в дальнейшем без оговорок осуществляют отождествление $V^{(B)} := \bar{V}^{(B)}$. Подчеркнем, что в $V^{(B)}$ корректно определен элемент bx для $x \in V^{(B)}$ и $b \in B$, ибо в силу 2.4 выполнено $[x_1 = x_2] = 1 \to [bx_1 = bx_2] = b \Rightarrow [x_1 = x_2] = 1$. В этой связи часто используют запись $0 = \varnothing$, имея в виду, в частности, что $0\varnothing = \varnothing = 0x$ для $x \in V^{(B)}$.

2.6. В $V^{(B)}$ справедлив следующий п р и н ц и п п е р е м е ш и в а н и я.

Пусть $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в B. Для любого семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ универсума $V^{(B)}$ существует и притом единственное перемешивание $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, т. е. элемент x отделимого универсума (обозначаемый $\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi$) такой, что

$$[x = x_\xi] \geqslant b_\xi \quad (\xi \in \Xi).$$

При этом выполнено:

$$x = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi \leftrightarrow (\forall \xi \in \Xi)\, b_\xi x = b_\xi x_\xi.$$

В частности, bx — это перемешивание x с вероятностью b и 0 с вероятностью b'.

Полезно подчеркнуть, что использование термина «перемешивание» в разных ситуациях (ср. 1.2) не только не приводит к неприятным коллизиям (как могло бы показаться на первый взгляд), но на самом деле, как станет очевидным из дальнейшего, обосновано (ибо речь идет об одинаковых с точностью до несущественных оговорок объектах). Подобная ситуация не уникальна — сделанное замечание, например, можно отнести к термину «цикличный» и т. п.

2.7. В $V^{(B)}$ справедлив следующий п р и н ц и п м а к с и м у м а.

Для каждой формулы φ теории ZFC *имеется B-значное множество x, для которого*

$$[\exists x \varphi(x)] = [\varphi(x)].$$

2.8. Для элемента x *универсума фон Неймана* V, определенного схемой рекурсии:

$$V_\alpha := \{x : (\exists \beta \in \alpha) \quad x \in \mathscr{P}(V_\beta)\};$$
$$V := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha,$$

т. е. для каждого множества x полагают:

$$\varnothing^\wedge := \varnothing; \quad \mathrm{dom}\,(x^\wedge) := \{y^\wedge : y \in x\}, \quad \mathrm{im}\,(x^\wedge) := \{1\}.$$

(Точнее говорить о выделенном представителе класса элементов $V^{(B)}$, эквивалентных $x^\wedge$). Элемент $x^\wedge$ из $V^{(B)}$ называют *стандратным именем* x. Тем самым возникает *каноническое вложение* V *в* $V^{(B)}$. При этом для $x, x_1, \ldots, x_n \in V$ и $y \in V^{(B)}$ выполнено:

$$[y \in x^\wedge] = \bigvee_{z \in x} [y = z^\wedge];$$

$$\varphi\,(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow [\varphi\,(x_1^\wedge, \ldots, x_n^\wedge)] = 1$$

для любой ограниченной формулы φ теории ZFC. (Формулу называют *ограниченной*, если связанные переменные входят в нее под знаком ограниченных кванторов, т. е. кванторов, распространенных на какие-либо множества.)

§ 3. Простейшие спуски и подъемы

3.0. Здесь собраны основные факты об изображении простейших объектов в булевозначных моделях (см. [10—12]).

3.1. Пусть φ — некоторая формула ZFC и фиксирован некоторый набор y элементов булевозначного универсума. Пусть, далее, $A_\varphi :=$ $:= A_{\varphi(\cdot,\, y)} := \{x : \varphi(x,\ y)\}$ — класс множеств, определимых посредством y. Спуск $A_\varphi{\downarrow}$ класса A_φ определяют соотношением:

$$A_\varphi{\downarrow} := \{t : t \in V^{(B)} \wedge [\varphi\,(t, y)] = 1\}.$$

Если $t \in A_\varphi{\downarrow}$, то говорят, что t *удовлетворяет* $\varphi(\cdot, y)$ *внутри* $V^{(B)}$.

Спуск любого класса *сильно цикличен*, т. е. выдерживает всевозможные перемешивания своих элементов. При этом два непустые внутри $V^{(B)}$ класса совпадают в том и только в том случае, если у них одинаковые элементы внутри $V^{(B)}$.

3.2. Для элемента x из $V^{(B)}$ его *спуск* $x{\downarrow}$ задан правилом:

$$x{\downarrow} := \{t : t \in V^{(B)} \wedge [t \in x] = 1\},$$

т. е. $x{\downarrow} = A_{\cdot \in x}{\downarrow}$. Класс $x{\downarrow}$ является множеством. При этом $x{\downarrow} \subset$ $\subset \mathrm{scyc}\,(\mathrm{dom}\,(x))$, где scyc — символ перехода к *сильно циклической оболочке*. Полезно подчеркнуть, что для непустого внутри $V^{(B)}$ множества x верно

$$(\exists z \in x{\downarrow})[(\exists z \in x)\varphi(z)] = [\varphi(z)].$$

3.3. *Пусть F — соответствие из X в Y внутри $V^{(B)}$. Существует и притом единственное соответствие $F{\downarrow}$ из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$ такое, что для любого (непустого) подмножества A множества X внутри $V^{(B)}$ выполнено:*

$$F{\downarrow}(A{\downarrow}) = F(A){\downarrow}.$$

Легко видеть, что $F{\downarrow}$ определено правилом:

$$\langle x, y\rangle \in F{\downarrow} \leftrightarrow [\langle x, y\rangle \in F] = 1.$$

3.4. Пусть $x \in \mathscr{P}(V^{(B)})$, т. е. x — это множество, составленное из B-значных множеств. Положим $\varnothing\uparrow := \varnothing$ и

$$\operatorname{dom}(x\uparrow) := x,\ \operatorname{im}(x\uparrow) := \{1\}$$

при $x \neq \varnothing$. Элемент $x\uparrow$ (отделимого универсума $V^{(B)}$, т. е. выделенный представитель соответствующего класса) называют *подъемом* x.

Ясно, что $x\uparrow\downarrow = \operatorname{scyc}(x)$, а для непустого внутри $V^{(B)}$ множества x выполнено $x\downarrow\uparrow = x$. Отметим здесь же, что если $x \in V$ и $\widehat{x}$ — его *стандартная область определения*, т. е.

$$\widehat{x} := \{z^{\wedge} : z \in V \wedge z \in x\},$$

то выполнено $\widehat{x}\uparrow = x^{\wedge}$.

3.5. *Пусть X, $Y \in \mathscr{P}(V^{(B)})$ и F — соответствие из X в Y. Существует и притом единственное соответствие $F\uparrow$ из $X\uparrow$ в $Y\uparrow$ внутри $V^{(B)}$ такое, что для каждого подмножества A множества X выполнено*

$$F\uparrow(A\uparrow) = F(A)\uparrow$$

в том и только в том случае, если F экстенсионально. Последнее означает, что

$$y_1 \in F(x_1) \to [x_1 = x_2] \leqslant \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [y_1 = y_2].$$

Легко видеть, что $F\uparrow$ — это подъем множества

$$\operatorname{dom}(F\uparrow) := \{\langle x, y\rangle^B : \langle x, y\rangle \in F\},$$

где $\langle x, y\rangle^B$ — единственный элемент $V^{(B)}$, отвечающий по принципу максимума формуле:

$$\exists z \forall u\, (u \in z \leftrightarrow u = \{x\} \vee u = \{x, y\}).$$

Нетрудно, разумеется, предъявить и непосредственную конструкцию этого элемента.

Приведем здесь же необходимый для дальнейшего признак перемешивания функций внутри $V^{(B)}$.

Пусть Ξ — множество и $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов $V^{(B)}$, являющихся функциями из непустого множества X в Y внутри $V^{(B)}$, и $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы. Тогда перемешивание $f := \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi f_\xi$ является функцией из X в Y внутри $V^{(B)}$, причем выполняется:

$$\Big[(\forall x \in X)\, f(x) = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi f_\xi(x)\Big] = 1.$$

$\lhd$ Для $x \in X\downarrow$ положим $g(x) := \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi f_\xi(x)$. Ясно, что $g(x) \in Y\downarrow$ и, кроме того, $[g(x) = f_\xi(x)] \geqslant b_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$. Установим, что отображение $g : X\downarrow \to Y\downarrow$ экстенсионально, учитывая экстенсиональность $f_\xi\downarrow$. В самом деле, для x_1, $x_2 \in X\downarrow$ имеем

$$[x_1 = x_2] = \Big(\bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi\Big) \wedge [x_1 = x_2] = \bigvee_{\xi\in\Xi} (b_\xi \wedge [x_1 = x_2]) \leqslant$$
$$\leqslant \bigvee_{\xi\in\Xi} [f_\xi(x_1) = g(x_1)] \wedge [x_1 = x_2] \wedge [f_\xi(x_2) = g(x_2)] \leqslant$$
$$\leqslant \bigvee_{\xi\in\Xi} [f_\xi(x_1) = g(x_1)] \wedge [f_\xi(x_1) = f_\xi(x_2)] \wedge [f_\xi(x_2) = g(x_2)] \leqslant$$
$$\leqslant \bigvee_{\xi\in\Xi} [g(x_1) = g(x_2)] = [g(x_1) = g(x_2)].$$

Таким образом, существует подъем $g\uparrow$ отображения g. Установим, что

$g\uparrow = f$. Для этого заметим, что в силу принципа переноса

$$[g\uparrow - f_\xi] = [(\forall x \in X)\, g\uparrow(x) = f_\xi(x)] =$$
$$= \bigwedge_{x \in X\downarrow} [g\uparrow(x) = f_\xi(x)] = \bigwedge_{x \in X\downarrow} [g(x) = f_\xi(x)] \geqslant b_\xi$$

для $\xi \in \Xi$. Осталось сослаться на единственность перемешивания. ▷

3.6. Пусть x — некоторое множество и $f: x \to Y\downarrow$, где $Y \in V^{(B)}$. Учитывая равенство $Y = Y\downarrow\uparrow$, можно считать f отображением $\widehat{x}$ в $\operatorname{dom}(Y)$. Ясно, что f экстенсионально, а потому имеет смысл говорить об элементе $f\uparrow$ из $V^{(B)}$. Отметим, что в силу ранее отмеченного $[f\uparrow: x^\wedge \to Y] = \mathbf{1}$, и при этом для всякого $g \in V^{(B)}$ такого, что $[g: x^\wedge \to Y] = \mathbf{1}$, найдется единственное отображение $f: x \to Y\downarrow$, для которого $g = f\uparrow$. Таким отображением служит, конечно же, спуск $g\downarrow$ отображения g (перенесенный с $\widehat{x}$ на x).

§ 4. Спуски и подъемы, связанные с субдифференциалом канонического оператора

4.0. В этом параграфе даются необходимые факты о переводе понятий, связанных с изображением канонического оператора в подходящей булевозначной модели.

4.1. В силу принципа максимума в $V^{(B)}$ имеется объект $\mathscr{R}$, для которого верно:

$$[\mathscr{R} \text{ — это } K\text{-пространство вещественных чисел}] = \mathbf{1}.$$

Здесь подразумевают, что $\mathscr{R}$ — это несущее множество пространства вещественных чисел внутри $V^{(B)}$. Отметим тут же, что $\mathbf{R}^\wedge$ (= стандартное имя поля $\mathbf{R}$ вещественных чисел), являясь архимедово упорядоченным полем внутри $V^{(B)}$, является плотным подполем в $\mathscr{R}$ внутри $V^{(B)}$ (с точностью до изоморфизма).

Осуществим спуск структур из $\mathscr{R}$ в $\mathscr{R}\downarrow$ по общим правилам (ср. 3.3):

$$x + y = z \leftrightarrow [x + y = z] = \mathbf{1};$$
$$xy = z \leftrightarrow [xy = z] = \mathbf{1};$$
$$x \leqslant y \leftrightarrow [x \leqslant y] = \mathbf{1};$$
$$\lambda x = y \leftrightarrow [\lambda^\wedge x = y] = \mathbf{1} \quad (x, y, z \in \mathscr{R}\downarrow,\ \lambda \in \mathbf{R}).$$

Теорема Гордона [13]. *Множество $\mathscr{R}\downarrow$ со спущенными структурами представляет собой расширенное K-пространство с базой $\mathscr{B}(\mathscr{R}\downarrow)$, изоморфной B. Такой изоморфизм осуществляется отождествлением B со спуском поля $\{0^\wedge, 1^\wedge\}$, т. е. отображением $\iota: B \to \mathscr{B}(\mathscr{R}\downarrow)$, определенным правилом:*

$$[\iota(b) = 1^\wedge] = b; \quad [\iota(b) = 0^\wedge] = b' \quad (0, 1 \in \mathbf{R}).$$

При этом для каждых $x, y \in \mathscr{R}$ выполнено:

$$[\iota(b)x = \iota(b)y] = b \Rightarrow [x = y];$$
$$b\iota(b)x = bx, \quad b'\iota(b)x = 0.$$

В частности, справедливы эквивалентности

$$\iota(b)x = \iota(b)y \leftrightarrow [x = y] \geqslant b;$$
$$\iota(b)x \geqslant \iota(b)y \leftrightarrow [x \geqslant y] \geqslant b.$$

4.2. Пусть $\mathscr{A}$ — некоторое непустое множество. В силу принципа максимума в $V^{(B)}$ имеется объект $l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R})$ такой, что

$[l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R})$ — это K-пространство ограниченных функций с областью определения $\mathscr{A}^\wedge$ и с областью значений в $\mathscr{R}] = 1$.

Рассмотрим спуск

$$l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow} := \{t \in V^{(B)} : [t \in l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R})] = 1\}.$$

Осуществим спуск алгебраических операций и отношения порядка из $l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R})$ в $l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$. Очевидно, что $l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$ тем самым превращается в K-пространство и, более того, в (расширенный) модуль над $\mathscr{R}{\downarrow}$ (см. [8, 9]).

Отображение «подъем», *сопоставляющее ограниченной $\mathscr{R}{\downarrow}$-значной функции на $\mathscr{A}$ ее подъем — ограниченную $\mathscr{R}$-значную функцию на $\mathscr{A}^\wedge$ внутри $V^{(B)}$, осуществляет алгебраический и порядковый изоморфизм $l_\infty(\mathscr{A}, \mathscr{R}{\downarrow})$ и $l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$.*

$\lhd$ Это утверждение почти очевидно, если держать перед глазами канву конструкции. Для полноты поясним некоторые моменты.

Итак, пусть $f \in l_\infty(\mathscr{A}, \mathscr{R}{\downarrow})$. Как отмечено в 3.6, тогда $[f{\uparrow} : \mathscr{A}^\wedge \to \mathscr{R}] = 1$. При этом для $A \in \mathscr{A}$ будет $[f(A) = f{\uparrow}(A^\wedge)] = 1$. Из определения порядка в $\mathscr{R}{\downarrow}$ ясно, что $f{\uparrow}(\mathscr{A}^\wedge)$ ограничено внутри $V^{(B)}$ и, стало быть, $f{\uparrow} \in l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$. Нас интересует оператор $\mathrm{Up} : f \to f{\uparrow}$ из $l_\infty(\mathscr{A}, \mathscr{R}{\downarrow})$ в $l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$. Пусть $g \in l_\infty(\mathscr{A}, \mathscr{R}){\downarrow}$. Тогда $[g : \mathscr{A}^\wedge \to \mathscr{R} \wedge (\exists t \in \mathscr{R})\, t \geqslant |g(\mathscr{A}^\wedge)|] = 1$. Ясно, что $g = \mathrm{Up}(g{\downarrow})$, т. е. Up — это эпиморфизм. Прочие утверждения об Up проверяются столь же просто. $\rhd$

Смысл приведенного утверждения, в частности, в том, что $l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$, с одной стороны, можно рассматривать как еще одну реализацию пространства $l_\infty(\mathscr{A}, \mathscr{R}{\downarrow})$, а с другой стороны,— как $\mathrm{dom}(l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R}))$.

4.3. Рассмотрим в $V^{(B)}$ объект $l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#$, для которого выполнено:

$[l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#$ — это сопряженное к $l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R})$ пространство $] = 1$.

Спуск $l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#{\downarrow}$ наделяется спущенными структурами. Нет сомнений, в частности, что $l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#{\downarrow}$— это $\mathscr{R}{\downarrow}$-модуль.

Пусть $\mu \in l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#{\downarrow}$, т. е.

$[\mu$ — это $\mathscr{R}$-гомоморфизм $l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R})$ в $\mathscr{R}] = 1$.

Пусть, далее, $\mu{\downarrow} : l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow} \to \mathscr{R}{\downarrow}$ — спуск μ. Для $f \in l_\infty(\mathscr{A}, \mathscr{R}{\downarrow})$ положим

$$\mu_{\downarrow}(f) := \mu{\downarrow}(f{\uparrow}).$$

Отображение «спуск» $\mu \to \mu_{\downarrow}$ *осуществляет изоморфизм $\mathscr{R}{\downarrow}$-модулей $l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#{\downarrow}$ и пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$-гомоморфизмов* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{R}\downarrow}(l_\infty(\mathscr{A}, \mathscr{R}{\downarrow}), \mathscr{R}{\downarrow})$.

$\lhd$ Единственным не вполне очевидным утверждением является то, что каждый $\mathscr{R}{\downarrow}$-модульный гомоморфизм $T : l_\infty(\mathscr{A}, \mathscr{R}{\downarrow}) \to \mathscr{R}{\downarrow}$ (а на самом деле, и любое $\mathscr{R}{\downarrow}_+$-однородное отображение) представляет собой спуск подходящего отображения внутри $V^{(B)}$. Для проверки этого утверждения положим

$$t(f) := T(f{\downarrow}) \quad (f \in l_\infty(\mathscr{A}\ , \mathscr{R}){\downarrow}).$$

Следует убедиться, что t — экстенсиональное отображение, ибо то, что t — это $\mathscr{R}{\downarrow}$-гомоморфизм $l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$ в $\mathscr{R}{\downarrow}$, бесспорно.

Проведем доказательство экстенсиональности t (не апеллируя к его аддитивности). Прежде всего для элемента $b \in B$ и элемента $\iota(b)$ из $V^{(B)}$, представляющего перемешивание $1^{\wedge}$ и $0^{\wedge}$ с вероятностями b и b' соответственно (см. 4.1), выполнено, что $\iota(b) \in \mathcal{R}{\downarrow}$. При этом для функций f, g из $\mathcal{A}^{\wedge}$ в $\mathcal{R}$ внутри $V^{(B)}$ последовательно выводим

$$[f = g] \geqslant b \leftrightarrow [(\forall A \in \mathcal{A}^{\wedge})\, f(A) = g(A)] \geqslant b \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \bigwedge_{A \in \mathcal{A}} [f(A^{\wedge}) = g(A^{\wedge})] \geqslant b \leftrightarrow \bigwedge_{A \in \mathcal{A}} [f{\downarrow}(A) = g{\downarrow}(A)] \geqslant b \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{A})\, \iota(b)\, f{\downarrow}(A) = \iota(b)\, g{\downarrow}(A) \leftrightarrow \iota(b) f{\downarrow} = \iota(b)\, g{\downarrow}.$$

Отсюда с учетом положительной однородности T для f, $g \in l_\infty(\mathcal{A}^{\wedge}, \mathcal{R}){\downarrow}$ получаем:

$$[f = g] \geqslant b \leftrightarrow \iota(b)f{\downarrow} = \iota(b)g{\downarrow} \rightarrow T(\iota(b)f{\downarrow}) = T(\iota(b)g{\downarrow}) \rightarrow$$
$$\rightarrow \iota(b)T(f{\downarrow}) = \iota(b)T(g{\downarrow}) \leftrightarrow [T(f{\downarrow}) = T(g{\downarrow})] \geqslant b$$

в силу теоремы Гордона. ▷

Обратное отображение к отображению «спуск» $\mu \rightarrow \mu_{\downarrow}$ обозначим так: $t \rightarrow t^{\uparrow}$, где $t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}\downarrow}(l_\infty(\mathcal{A}, \mathcal{R}{\downarrow}), \mathcal{R}{\downarrow})$. Значит, в подробной записи:

$$t^{\uparrow}(f) := t(f{\downarrow}) \quad (f \in l_\infty(\mathcal{A}^{\wedge}, \mathcal{R}){\downarrow}).$$

4.4. Пусть $\varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}$ — канонический оператор на $\mathcal{A}^{\wedge}$ внутри $V^{(B)}$, т. е. такой объект $V^{(B)}$, для которого

$$\left[\varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}\colon l_\infty(\mathcal{A}^{\wedge}, \mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{R} \wedge (\forall f \in l_\infty(\mathcal{A}^{\wedge}, \mathcal{R}))\, \varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}(f) = \sup f(\mathcal{A}^{\wedge})\right] = 1.$$

Очевидный подсчет показывает, что для каждого элемента $f \in l_\infty(\mathcal{A}, \mathcal{R}{\downarrow})$ выполнено:

$$[\varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}(f{\uparrow}) = \varepsilon_{\mathcal{A}}(f)] = 1.$$

Пусть $\partial\left(\varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}\right)$ — *это субдифференциал функционала* $\varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}$ *внутри* $V^{(B)}$, *а* $\mathrm{Ch}\left(\varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}\right)$ — *множество крайних точек* $\partial\left(\varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}\right)$ *внутри* $V^{(B)}$. *Тогда для каждых* $t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}\downarrow}(l_\infty(\mathcal{A}, \mathcal{R}{\downarrow}), \mathcal{R}{\downarrow})$ *и* $\mu \in l_\infty(\mathcal{A}^{\wedge}, \mathcal{R})^{\#}{\downarrow}$ *выполнено*:

$$t^{\uparrow} \in \partial\left(\varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}\right){\downarrow} \leftrightarrow t \in \partial(\varepsilon_{\mathcal{A}});$$
$$t^{\uparrow} \in \mathrm{Ch}\left(\varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}\right){\downarrow} \leftrightarrow t \in \mathrm{Ch}(\varepsilon_{\mathcal{A}});$$
$$\mu_{\downarrow} \in \partial(\varepsilon_{\mathcal{A}}) \leftrightarrow \mu \in \partial\left(\varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}\right){\downarrow};$$
$$\mu_{\downarrow} \in \mathrm{Ch}(\varepsilon_{\mathcal{A}}) \leftrightarrow \mu \in \mathrm{Ch}\left(\varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}\right){\downarrow}.$$

◁ Последовательно привлекая установленное ранее, выводим:

$$t^{\uparrow} \in \partial\left(\varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}\right){\downarrow} \leftrightarrow \left[t^{\uparrow} \in \partial\left(\varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}\right)\right] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \left[(\forall f \in l_\infty(\mathcal{A}^{\wedge}, \mathcal{R}))\, t^{\uparrow}(f) \leqslant \varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}(f)\right] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \bigwedge_{f \in l_\infty(\mathcal{A}^{\wedge}, \mathcal{R})\downarrow} \left[t^{\uparrow}(f) \leqslant \varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}(f)\right] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \bigwedge_{f \in l_\infty(\mathcal{A}^{\wedge}, \mathcal{R})\downarrow} \left[t(f{\downarrow}) \leqslant \varepsilon_{\mathcal{A}^{\wedge}}(f{\downarrow}{\uparrow})\right] = 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \bigwedge_{f\in l_\infty(\mathscr{A}^\wedge,\mathscr{R})\downarrow} [t(f\downarrow)\leqslant \varepsilon_{\mathscr{A}}(f\downarrow)] = 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \bigwedge_{g\in l_\infty(\mathscr{A},\mathscr{R}\downarrow)} [t(g)\leqslant \varepsilon_{\mathscr{A}}(g)] = 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall g\in l_\infty(\mathscr{A},\mathscr{R}\downarrow))\,[t(g)\leqslant \varepsilon_{\mathscr{A}}(g)] = 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall g\in l_\infty(\mathscr{A},\mathscr{R}\downarrow))\quad t(g)\leqslant \varepsilon_{\mathscr{A}}(g) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow t\in\partial(\varepsilon_{\mathscr{A}}).$$

При доказательстве второй эквивалентности удобно воспользоваться тем, что крайние точки субдифференциала канонического оператора суть лежащие в нем решеточные гомоморфизмы (см. 1.6). С учетом этого, имеем:

$$t^\uparrow\in \mathrm{Ch}\left(\varepsilon_{\mathscr{A}^\wedge}\right) \leftrightarrow \left[t^\uparrow\in \mathrm{Ch}\left(\varepsilon_{\mathscr{A}^\wedge}\right)\right] = 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[t^\uparrow\in\partial\left(\varepsilon_{\mathscr{A}^\wedge}\right)\right] \wedge \left[(\forall f\in l_\infty(\mathscr{A}^\wedge,\mathscr{R}))\,t^\uparrow(|f|) = |t^\uparrow(f)|\right] = 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow t\in\partial(\varepsilon_{\mathscr{A}}) \wedge \bigwedge_{f\in l_\infty(\mathscr{A}^\wedge,\mathscr{R})\downarrow} [t^\uparrow(|f|) = |t^\uparrow(t)|] = 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow t\in\partial(\varepsilon_{\mathscr{A}}) \wedge (\forall f\in l_\infty(\mathscr{A},\mathscr{R}\downarrow))\,t(|f|) = |t(f)| \leftrightarrow t\in\mathrm{Ch}(\varepsilon_{\mathscr{A}}).$$

Оставшиеся две эквивалентности представляют собой иные записи уже установленных. ▷

4.5. *Чистые состояния на* $\mathscr{A}$ *суть в точности* δ*-функции в точках стандартного имени* $\mathscr{A}^\wedge$ *внутри* $V^{(B)}$. *Иными словами, для* $t\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{R}\downarrow}(l_\infty(\mathscr{A},\mathscr{R}\downarrow),\mathscr{R}\downarrow)$ *выполнено*:

$$(t\text{ — \textit{чистое состояние на} }\mathscr{A}) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow [(\exists A\in\mathscr{A}^\wedge)\,t^\uparrow = \varepsilon_A] = 1.$$

◁ Ясно, что

$$1 = [(\exists A\in\mathscr{A}^\wedge)\,t^\uparrow = \varepsilon_A] = \bigwedge_{A\in\mathscr{A}} [t^\uparrow = \varepsilon_{A^\wedge}].$$

Последнее, как очевидно, бывает в том и только в том случае, если найдутся разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и семейство $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ точек $\mathscr{A}$ такие, что $t^\uparrow$ есть перемешивание $\left(\varepsilon_{A_\xi^\wedge}\right)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$.

Далее, привлекая 3.6 и теорему Гордона, выводим:

$$t^\uparrow = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi\varepsilon_{A_\xi^\wedge} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[(\forall f\in l_\infty(\mathscr{A}^\wedge,\mathscr{R}))\,t^\uparrow(f) = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi\varepsilon_{A_\xi^\wedge}(f)\right] = 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall f\in l_\infty(\mathscr{A},\mathscr{R}\downarrow))\,t^\uparrow(f\uparrow) = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi f\uparrow(A_\xi^\wedge) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall f\in l_\infty(\mathscr{A},\mathscr{R}\downarrow))\,t(f) = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi f(A_\xi) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall f\in l_\infty(\mathscr{A},\mathscr{R}\downarrow))\,(\forall \xi\in\Xi)\,b_\xi t(f) = b_\xi f(A_\xi) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall f\in l_\infty(\mathscr{A},\mathscr{R}\downarrow))\,(\forall \xi\in\Xi)\,[\iota(b_\xi)\,t(f) = \iota(b_\xi)\,\varepsilon_{A_\xi}(f)] \geqslant b_\xi \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall f\in l_\infty(\mathscr{A},\mathscr{R}\downarrow))\,t(f) = \sum_{\xi\in\Xi} \iota(b_\xi)\,\varepsilon_{A_\xi}(f) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow t = \sum_{\xi\in\Xi} \iota(b_\xi)\,\varepsilon_{A_\xi}.$$

Установленная эквивалентность делает требуемое очевидным. ▷

§ 5. Строение субдифференциала канонического оператора

5.0. В этом параграфе описывается строение крайних точек и элементов субдифференциала канонического оператора. Метод получения нужных описаний состоит в интерпретации во внешних терминах теорем Крейна — Мильмана и Мильмана, сформулированных для функционалов в нужной булевозначной модели.

5.1. *Каждая крайняя точка субдифференциала канонического оператора является поточечным r-пределом сети чистых состояний.*

◁ Рассмотрим крайнюю точку субдифференциала канонического оператора, действующего из $l_\infty(\mathscr{A}, Y_0)$ в Y_0 для некоторого K-пространства Y_0. В силу теоремы Крейна — Мильмана для операторов можно считать, что рассматриваемая крайняя точка — это сужение на $l_\infty(\mathscr{A}, Y_0)$ крайней точки t субдифференциала канонического оператора $\varepsilon_{\mathscr{A}}$, действующего из $l_\infty(\mathscr{A}, Y)$ в Y, где Y — максимальное расширение Y_0 [16]. Таким образом, для доказательства требуемого нам утверждения в полном объеме достаточно (и, разумеется, необходимо) проанализировать лишь случай расширенного K-пространства Y. При этом, выбирая булевозначный универсум $V^{(B)}$, где $B := \mathscr{B}(Y)$ — база рассматриваемого пространства Y (совпадающая с базой исходного пространства Y_0), видим, что $Y = \mathscr{R}{\downarrow}$, где $\mathscr{R}$ — объект, играющий роль $\mathbf{R}$ в $V^{(B)}$.

Прежде всего заметим, что, как установлено в [8], если $t \in \mathscr{L}(l_\infty(\mathscr{A}, \mathscr{R}{\downarrow}), \mathscr{R}{\downarrow})$ и $t \in \partial(\varepsilon_{\mathscr{A}})$, то t автоматически является модульным гомоморфизмом, т. е. $t \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{R}\downarrow}(l_\infty(\mathscr{A}, \mathscr{R}{\downarrow}), \mathscr{R}{\downarrow})$. Работая в $V^{(B)}$, теперь на основании 4.4 получаем, что $t^{\uparrow} \in \mathrm{Ch}\left(\varepsilon_{\mathscr{A}^\wedge}\right){\downarrow}$. Далее, на основании классической теоремы Мильмана δ-функции плотны в слабой топологии в множестве крайних точек субдифференциала (скалярного) канонического оператора. В силу принципа переноса для каждых $f_1, \ldots, f_m \in l_\infty(\mathscr{A}, \mathscr{R}{\downarrow})$ и $n := 1, 2, \ldots$ заключаем:

$$(\forall k := 1, \ldots, m)\left[(\exists A \in \mathscr{A}^\wedge)\,|t^{\uparrow}(f_k{\uparrow}) - f_k{\uparrow}(A)| \leqslant \frac{1}{n^\wedge}\right] = 1.$$

Привлекая 4.5 и полагая $\gamma := \langle\{f_1, \ldots, f_m\}, n\rangle$, находим чистое состояние t_γ, для которого

$$|t_\gamma(f_k) - t(f_k)| \leqslant \frac{1}{n} 1^\wedge \quad (k := 1, \ldots, m).$$

Наделив множество индексов $\{\gamma\}$ естественным порядком и превратив его тем самым в направление, видим, что возникающая сеть чистых состояний (t_γ) является r-сходящейся к t. ▷

5.2. *Каждый элемент субдифференциала канонического оператора является поточечным r-пределом сети элементов сильно операторно выпуклой оболочки множества δ-функций.*

◁ Рассуждая так же, как в 5.1, сводим дело к случаю канонического оператора, действующего в спуск $\mathscr{R}{\downarrow}$.

Итак, пусть X — сильно операторно выпуклая оболочка множества δ-функций и $t \in \partial(\varepsilon_{\mathscr{A}})$. Ясно, что X состоит из $\mathscr{R}{\downarrow}$-гомоморфизмов и что элемент t также $\mathscr{R}{\downarrow}$-гомоморфизм. Тем самым $\mathscr{X} := \{s^{\uparrow} : s \in X\}$ является сильно циклическим множеством элементов $V^{(B)}$, где $B := \mathscr{B}(\mathscr{R}{\downarrow})$, и при этом для $\alpha, \beta \in \mathscr{R}{\downarrow}$ выполнено $[\alpha\mathscr{X} + \beta\mathscr{X} \subset \mathscr{X}] = 1$ как только $[\alpha, \beta \geqslant 0^\wedge \wedge \alpha + \beta = 1^\wedge] = 1$. Здесь мы используем то обстоятельство, что $l_\infty(\mathscr{A}^\wedge, \mathscr{R})^{\#}{\downarrow}$ — это $\mathscr{R}{\downarrow}$-модуль. Окончательно, привлекая 4.4, видим, что $\mathscr{X}{\uparrow}$ — это выпуклое подмножество $\partial\left(\varepsilon_{\mathscr{A}^\wedge}\right)$ внутри $V^{(B)}$. В самом деле:

$$[(\forall\alpha,\beta\in\mathscr{R})\,(\alpha\geqslant 0^{\wedge}\wedge\beta\geqslant 0^{\wedge}\wedge\alpha+\beta=1^{\wedge})\to(\alpha\mathfrak{X}\!\uparrow+\beta\mathfrak{X}\!\uparrow\subset\mathfrak{X}\!\uparrow)] =$$
$$=\bigwedge_{\substack{\alpha,\beta\in\mathscr{R}\downarrow\\ \alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0,\alpha+\beta=1}}\ \bigwedge_{p^{\uparrow},q^{\uparrow}\in\mathfrak{X}}[\alpha p^{\uparrow}+\beta q^{\uparrow}\in\mathfrak{X}\!\uparrow] = \bigwedge_{\substack{\alpha,\beta\in\mathscr{R}\downarrow\\ \alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0,\alpha+\beta=1}}\ \bigwedge_{p,q\in X}[(\alpha p)^{\uparrow}+$$
$$+(\beta q)^{\uparrow}\in\mathfrak{X}\!\uparrow] = 1.$$

Значит, в силу классической теоремы Крейна — Мильмана $\mathfrak{X}\!\uparrow$ плотно в слабой топологии в $\partial\left(\varepsilon_{\mathscr{A}}\wedge\right)$ внутри $V^{(B)}$. Замечая, что $t^{\uparrow}\in\partial\left(\varepsilon_{\mathscr{A}}\wedge\right)\downarrow$, находим необходимую сеть элементов X, сходящуюся с регулятором к t (см. 5.1). ▷

§ 6. Строение субдифференциалов произвольных операторов

6.0. В этом пункте приводятся основные результаты о строении субдифференциалов сублинейных операторов, действующих в K-пространство.

6.1. *Всякая крайняя точка субдифференциала служит поточечным r-пределом сети элементов сильно циклической оболочки множества o-крайних точек.*

◁ Пусть $P: X\to Y$ — рассматриваемый оператор и $T\in \mathrm{Ch}\,(P)$. В силу 1.7 для некоторого $t\in\mathrm{Ch}\left(\varepsilon_{\mathscr{E}_0(P)}\right)$ будет $T=t_0\circ\langle\mathscr{E}_0(P)\rangle$. Пусть (t_γ) — это сеть чистых состояний, поточечно r-сходящаяся к t (ее существование гарантирует 5.1). Бесспорно, что $(t_\gamma\circ\langle\mathscr{E}_0(P)\rangle)$ — это требуемая сеть. ▷

6.2. *Крайние точки наименьшего субдифференциала, содержащего данное слабо порядково ограниченное множество $\mathscr{A}$, представляют собой поточечные r-пределы подходящих сетей перемешиваний элементов $\mathscr{A}$.*

◁ Видно, что множество крайних точек сор $(\mathscr{A})$ лежит в множестве $\mathrm{Ch}\left(\varepsilon_{\mathscr{A}}\right)\circ\langle\mathscr{A}\rangle$. Остается сослаться на 5.2. ▷

6.3. *Слабо порядково ограниченное множество является субдифференциалом в том и только в том случае, если оно операторно выпукло и поточечно o-замкнуто.*

◁ Ясно, что операторно выпуклое и поточечно o-замкнутое слабо порядково ограниченное множество $\mathscr{A}$ заведомо является сильно операторно выпуклым. Учитывая, что r-сходимость влечет o-сходимость, и привлекая 5.2, выводим

$$\mathscr{A}\subset\partial\left(\varepsilon_{\mathscr{A}}\right)\circ\langle\mathscr{A}\rangle\subset\mathscr{A}$$

(левое включение справедливо без каких-либо предположений). Итак, $\mathscr{A}$ — субдифференциал. Оставшаяся необоснованной часть утверждения бесспорна. ▷

6.4. *Слабо порядково ограниченное множество является субдифференциалом в том и только в том случае, если оно циклично, выпукло и поточечно r-замкнуто.*

◁ Легко видеть, что цикличность в сочетании с выпуклостью и r-замкнутостью обеспечивают сильную операторную выпуклость и поточечную o-замкнутость. Ссылка на 6.3 завершает доказательство. ▷

Статья поступила
25 ноября 1982 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кутателадзе С. С.* Выпуклые операторы.— Успехи мат. наук, 1979, т. 34, № 1, с. 167—196.
2. *Рубинов А. М.* Сублинейные операторы и их приложения.— Успехи мат. наук, 1977, т. 32, № 4, с. 113—174.

3. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Локальный выпуклый анализ.— В кн.: Современные проблемы математики, т. 19. М.: ВИНИТИ, 1982, с. 155—206.
4. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
5. *Манин Ю. И.* Доказуемое и недоказуемое. М.: Советское радио, 1979.
6. *Кутателадзе С. С.* Теорема Крейна — Мильмана и ее обращение.— Сиб. мат. журн., 1980, т. 21, № 1, с. 130—138.
7. *Кутателадзе С. С.* О выпуклом анализе в модулях.— Сиб. мат. журн., 1981, т. 22, № 4, с. 118—128.
8. *Кусраев А. Г.* Некоторые применения теории булевозначных моделей в функциональном анализе. Новосибирск, 1982, 42 с. (Препринт № 5/Ин-т математики СО АН СССР).
9. *Гордон Е. И.* K-пространства в булевозначных моделях теории множеств.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 4, с. 777—780.
10. *Bell I. L.* Boolean-valued models and independence proofs in set theory. Oxford: Clarendon Press, 1979.
11. *Takeuti G., Zaring W.* Axiomatic set theory. Berlin a. o.: Springer, 1973.
12. *Takeuti G.* Two applications of logic to mathematics. Tokyo: Iwanami, 1978.
13. *Гордон Е. И.* Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 4, с. 773—775.
14. *Гордон Е. И.* К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах.— Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 5, с. 55—65.
15. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Анализ субдифференциалов с помощью булевозначных моделей.— Докл. АН СССР, 1982, т. 265, № 5, с. 1061—1064.
16. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных векторных пространств. М.: Физматгиз, 1961.