ISSN 0037-4474

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

(Отдельный оттиск)

ТОМ XXVI 6 1985

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXVI, № 6 НОЯБРЬ — ДЕКАБРЬ 1985

УДК 513.88

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ КОНУСЫ

В последние годы в субдифференциальном исчислении ведется интенсивный поиск удобных способов локальной односторонней аппроксимации произвольных функций и множеств. Принципиальным исходным пунктом послужило данное Кларком определение субдифференциала липшицевой функции [1]. Построенные в настоящее время касательные конусы и отвечающие им субдифференциалы зачастую определяются громоздкими, трудно обозримыми формулами [2] — [8]. Известно, что для сворачивания формул — «убивания кванторов» — имеется эффективная техника — нестандартный анализ [9] — [11].

Цель настоящей статьи — применить эту технику для нахождения компактных критериев различных типов касательных. Оказывается, что в предположении стандартности параметров рассматриваемых объектов конусы Булигана, Адамара и Кларка определяются ясной «инфинитезимальной» конструкцией — прямой апелляцией к бесконечно близким точкам и направлениям. В этой связи в работе указывается перечень всех возможных касательных, определяемых инфинитезимальными приставками. При этом удается обнаружить пропущенные ранее конусы, в том числе и кларковского типа.

§ 0. Предварительные сведения

0.1. В дальнейшем мы работаем в подходящей нестандартной модели анализа с достаточно сильной степенью насыщения. Для определенности можно считать, что все происходит в рамках теории внешних множеств Хрбачека [11] с сильной аксиомой идеализации. Немногочисленные отступления от этого соглашения оговорены явно.

0.2. Условимся в дальнейшем параметры формальной записи нижеследующего текста считать стандартными объектами.

Итак, пусть X — вещественное векторное пространство, F — некоторое его подмножество и x', h' — точки X. В соответствии со сделанным соглашением (при работе в нестандартной теории множеств) эти объекты — стандартные множества. В X выделены два фильтра: $\mathcal{N}_\sigma$ и $\mathcal{N}_\tau$, составленные из некоторых надмножеств нуля. Пусть, далее, $\mu(\sigma)$ и $\mu(\tau)$ — *монады* указанных фильтров, т. е. пересечения их стандартных элементов [12]. Пишем $x \approx_\sigma x'$ вместо $x - x' \in \mu(\sigma)$. Аналогично понимаем запись $h \approx_\tau h'$. Наконец, *бесконечную малость* числа α из $\mathbf{R}$ обозначаем символом $\alpha \approx 0$. Удобно положить $\mu(\mathbf{R}_+) := \{\alpha \in \mathbf{R} : \alpha \geqslant 0,\ \alpha \approx 0\}$. Ниже считается, что фильтр $\mathcal{N}_\sigma$ порождает векторную топологию $\sigma : x \in X \to x + \mathcal{N}_\sigma$ в X.

0.3. Топологию τ в векторном пространстве X (над полем $\mathbf{R}$) называют *почти векторной*, если, во-первых, непрерывно умножение на каждый скаляр из $\mathbf{R}$ и, во-вторых, сложение непрерывно по совокупности переменных. Пару (X, τ) (как и само X) называют в этом случае *почти топологическим векторным пространством.*

0.4. *Пусть X — стандартное векторное пространство и $\mathcal{N}_\tau$ — стандартный фильтр надмножеств нуля. Существует стандартная почти век-*

торная топология τ на X такая, что $\mathcal{N}_\tau = \tau(0)$ в том и только в том случае, если монада $\mu(\tau)$ фильтра $\mathcal{N}_\tau$ является внешним векторным пространством над внешним полем стандартных скаляров.

0.5. Для формулы φ теории множеств Цермело — Френкеля положим

$$\forall^{\cdot} x\, \varphi := (\forall x \approx_\sigma x')\, \varphi := \forall x\, (x \in F \wedge x \approx_\sigma x') \to \varphi;$$
$$\forall^{\cdot} h\, \varphi := (\forall h \approx_\tau h')\, \varphi := \forall h\, (h \in X \wedge h \approx_\tau h') \to \varphi;$$
$$\forall^{\cdot} \alpha\, \varphi := (\forall \alpha \approx 0)\, \varphi := \forall \alpha\, (\alpha > 0 \wedge \alpha \approx 0) \to \varphi.$$

Естественным двойственным образом определяют кванторы $\exists^{\cdot} x$, $\exists^{\cdot} h$, $\exists^{\cdot} \alpha$, т. е. считают

$$\exists^{\cdot} x\, \varphi := (\exists x \approx_\sigma x')\, \varphi := \exists x\, (x \in F \wedge x \approx_\sigma x') \wedge \varphi;$$
$$\exists^{\cdot} h\, \varphi := (\exists h \approx_\tau h')\, \varphi := \exists h\, (h \in X \wedge h \approx_\tau h') \wedge \varphi;$$
$$\exists^{\cdot} \alpha\, \varphi := (\exists \alpha \approx 0)\, \varphi := \exists \alpha\, (\alpha > 0 \wedge \alpha \approx 0) \wedge \varphi.$$

Наконец, условимся писать

$$\forall^{\mathrm{st}} x \varphi := \forall x\ (x \text{ — стандартный}) \to \varphi;$$
$$\exists^{\mathrm{st}} x \varphi := \exists x\ (x \text{ — стандартный}) \wedge \varphi.$$

§ 1. Конусы Булигана и Адамара

1.1. *Конус Булигана* $\mathrm{Bo}(F, x')$ определяют соотношением

$$\mathrm{Bo}(F, x') := \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{N}_\sigma(x') \\ \alpha'}} \mathrm{cl}_\tau \bigcup_{\substack{x \in F \cap U \\ 0 < \alpha \leqslant \alpha'}} \frac{F - x}{\alpha},$$

где, как обычно, $\mathcal{N}_\sigma(x') := x' + \mathcal{N}_\sigma$. Элементы конуса Булигана называют *наружными* (или, что менее точно, внешними) *касательными* к множеству F в точке x'.

1.2. *Конус Булигана представляет собой стандартизацию* $\exists\exists\exists$*-конуса, т. е. для стандартного элемента h' выполняется*

$$h' \in \mathrm{Bo}(F, x') \leftrightarrow \exists^{\cdot} x \exists^{\cdot} \alpha \exists^{\cdot} h\ x + \alpha h \in F.$$

$\triangleleft$ Из определения конуса Булигана следуют эквивалентности

$$h' \in \mathrm{Bo}(F, x') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{N}_\sigma(x'))\, (\forall \alpha' \in \mathbf{R})\, (\forall V \in \mathcal{N}_\tau)\, (\exists x \in F \cap U)$$
$$(\exists 0 < \alpha \leqslant \alpha')\, (\exists h \in h' + V)\ x + \alpha h \in F \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \forall U \forall \alpha' \forall V \exists x \exists \alpha \exists h\ (x \in F \cap U \wedge h \in h' +$$
$$+ V \wedge 0 < \alpha \leqslant \alpha' \wedge x + \alpha h \in F).$$

В силу принципа переноса выводим

$$h' \in \mathrm{Bo}(F, x') \leftrightarrow \forall^{\mathrm{st}} U \forall^{\mathrm{st}} \alpha' \forall^{\mathrm{st}} V \exists^{\mathrm{st}} x \exists^{\mathrm{st}} \alpha$$
$$\exists^{\mathrm{st}} h (x \in F \cap U \wedge h \in h' + V \wedge 0 < \alpha \leqslant \alpha' \wedge x + \alpha h \in F).$$

Используя теперь принцип идеализации (в слабой форме), получаем

$$h' \in \mathrm{Bo}(F, x') \to \exists x \exists \alpha \exists h \forall^{\mathrm{st}} U \forall^{\mathrm{st}} \alpha' \forall^{\mathrm{st}} V\ (x \in F \cap$$
$$\cap U \wedge h \in h' + V \wedge 0 < \alpha \leqslant \alpha' \wedge x + \alpha h \in F) \to (\exists x \approx_\sigma x')$$
$$(\exists \alpha \approx 0)\, (\exists h \approx_\tau h')\ x + \alpha h \in F \to \exists^{\cdot} x \exists^{\cdot} \alpha \exists^{\cdot} h\ x + \alpha h \in F.$$

Пусть, в свою очередь, стандартный элемент h' входит в стандартизацию $\exists\exists\exists$-конуса. Поскольку стандартные элементы стандартного фильтра содержат элементы монады этого фильтра, получаем

$$(\forall^{st} U \in \mathcal{N}_\sigma(x'))\,(\forall^{st}\alpha' \in \mathbf{R})\,(\forall^{st} V \in \mathcal{N}_\tau)$$
$$(\exists x \in F \cap U)\,(\exists 0 < \alpha \leqslant \alpha')\,(\exists h \in h' + V)\; x + \alpha h \in F.$$

В силу принципа переноса заключаем, что $h' \in \mathrm{Bo}(F, x')$. ▷

1.3. Доказанное утверждение переписывается в виде

$$\mathrm{Bo}(F, x') = {}^*\{h' : \exists^{\cdot} x \exists^{\cdot} \alpha \exists^{\cdot} h\; x + \alpha h \in F\},$$

где * — символ *стандартизации.* В этой связи используют образные обозначения:

$$\exists\exists\exists\,(F, x') := \mathrm{Bo}(F, x').$$

В дальнейшем подобного рода обозначения мы будем употреблять без особых оговорок.

1.4. *Конус Адамара* или *гиперкасательный конус* $\mathrm{Ha}(F, x')$ определяют соотношениями

$$\mathrm{Ha}\;(F, x') := \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{N}_{\sigma(x')}\\ \alpha'}} \mathrm{int}_\tau \bigcap_{\substack{x \in F\cap U\\ 0<\alpha\leqslant\alpha'}} \frac{F - x}{\alpha}.$$

Элементы конуса Адамара называют *внутренними касательными.*

1.5. *Конус Адамара — это стандартизация* $\forall\forall\forall$*-конуса,*

$$\mathrm{Ha}(F, x') = \forall\forall\forall\,(F, x').$$

Иначе говоря, для стандартных h', F *и* x' *выполнено*

$$h' \in \mathrm{Ha}(F, x') \leftrightarrow (x' + \mu(\sigma)) \cap F + \mu(\mathbf{R}_+)\,(h' + \mu(\tau)) \subset F,$$

где $\mu(\mathbf{R}_+)$ *— внешнее множество положительных бесконечно малых чисел.*

◁ Доказательство получается из соображений двойственности из 1.2, если (что, конечно же, корректно) забыть о наличии F в $\exists^{\cdot} x$. ▷

§ 2. Конус Кларка

2.1. *Конус Кларка* определяется соотношением

$$\mathrm{Cl}\,(F, x') := \bigcap_{V \in \mathcal{N}_\tau} \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{N}_{\sigma(x')}\\ \alpha'}} \bigcap_{\substack{\in\, \cap U\\ 0<\alpha\leqslant\alpha'}} \left(\frac{F - x}{\alpha} + V\right).$$

2.2. *Для стандартных* F, x', h' (*в условиях слабой идеализации*) *эквивалентны утверждения:*

(1) $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$;

(2) *существуют бесконечно малые* $U \in \mathcal{N}_\sigma(x')$, $V \in \mathcal{N}_\tau$ *и* $\alpha' > 0$ *такие, что*

$$h' \in \bigcap_{\substack{0<\alpha\leqslant\alpha'\\ x\in F\cap U}} \left(\frac{F - x}{\alpha} + V\right);$$

(3) $(\exists U \in \mathcal{N}_\sigma(x'))\,\exists\alpha'\,(\forall x \in F \cap U),\,(\forall 0 < \alpha \leqslant \alpha')\,(\exists h \approx_\tau h')\; x + \alpha h \in F.$

◁ Используя очевидные сокращения, можно записать

$$h' \in \mathrm{Cl}(F, x') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \forall V \exists U \exists \alpha'\,(\forall x \in F \cap U)\,(\forall 0 < \alpha \leqslant \alpha')\,(\exists h \in h' + V),\; x + \alpha h \in F.$$

Привлекая принцип переноса и слабую идеализацию, имеем последовательно

$$h' \in \mathrm{Cl}(F, x') \rightarrow \forall^{st} V \exists^{st} U \exists^{st} \alpha'\,(\forall x \in F \cap U)$$
$$(\forall 0 < \alpha \leqslant \alpha')\,(\exists h \in h' + V)\; x + \alpha h \in F \rightarrow$$
$$\rightarrow (\forall^{st}\{V_1, \ldots, V_n\})\,\exists^{st} U \exists^{st} \alpha' \exists^{st} V\,(\forall k := 1, \ldots, n)\, V_k \supset V \wedge$$

$$\wedge (\forall x \in F \cap U)(\forall 0 < \alpha \leqslant \alpha')(\exists h \in h' + V)\ x + \alpha h \in F \to$$
$$\to \exists U \exists \alpha' \exists V \forall^{st} V'\ V' \supset V \wedge (\forall x \in F \cap U)$$
$$(\forall 0 < \alpha \leqslant \alpha')(\exists h \in h' + V)\ x + \alpha h \in F.$$

Отсюда, без сомнения, следует, что для некоторых $V \in \mathcal{N}_\tau$, $V \subset \mu(\tau)$ и $U \in \mathcal{N}_\sigma(x')$, $U \subset \mu(\sigma) + x'$ и бесконечно малого α будет (2) и, тем более, (3).

Если, в свою очередь, выполнено (3), то с учетом определения отношения $\approx_\tau$ будет

$$\forall^{st} V \exists U \exists \alpha' (\forall x \in F \cap U)(\forall 0 < \alpha \leqslant \alpha')(\exists h \in h' + V)\ x + \alpha h \in F.$$

Значит, по принципу переноса $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$. $\triangleright$

2.3. *Конус Кларка (в условиях сильной идеализации) является стандартизацией* $\forall\forall\exists$*-конуса:*

$$\mathrm{Cl}(F, x') = {}^*\forall\forall\exists(F, x').$$

Иными словами,

$$h' \in \mathrm{Cl}(F, x') \leftrightarrow \forall^{\cdot} x \forall^{\cdot} \alpha \exists^{\cdot} h\ x + \alpha h \in F.$$

$\triangleleft$ Пусть сначала $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$. Возьмем произвольные $x \approx_\sigma x'$ и $\alpha > 0$, $\alpha \approx 0$. Для каждой стандартной окрестности V — элемента фильтра $\mathcal{N}_\tau$ — в силу принципа переноса найдется элемент h, для которого $h \in h' + V$ и $x + \alpha h \in F$. Применяя сильную идеализацию, имеем

$$\forall^{st} V \exists h (h \in h' + V \wedge x + \alpha h \in V) \to$$
$$\to \exists h \forall^{st} V\ h \in h' + V \wedge x + \alpha h \in F \to \exists^{\cdot} h\ x + \alpha h \in F,$$

т. е. $h' \in \forall\forall\exists(F, x')$.

Пусть теперь $h' \in {}^*\forall\forall\exists(F, x')$. Возьмем произвольную стандартную окрестность V из фильтра $\mathcal{N}_\tau$. Фиксируем бесконечно малую окрестность U точки x' и положительное бесконечно малое число α'. Тогда по условию для некоторого $h \approx_\tau h'$ будет

$$(\forall x \in F \cap U)(\forall 0 < \alpha \leqslant \alpha')\ x + \alpha h \in F.$$

Иными словами,

$$\forall^{st} V \exists U \exists \alpha' (\forall x \in F \cap U)(\forall 0 < \alpha \leqslant \alpha')(\exists h \in h' + V)\ x + \alpha h \in F.$$

В силу принципа переноса $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$. $\triangleright$

2.4. Приведем пример применения найденного нестандартного критерия элементов конуса Кларка для вывода его основного (и хорошо известного) свойства. Более общее утверждение будет установлено ниже.

2.5. *Конус Кларка произвольного множества в топологическом векторном пространстве является выпуклым и замкнутым.*

$\triangleleft$ В силу принципа переноса достаточно рассмотреть ситуацию, в которой параметры — пространство, топология, множество и т. п.— стандартны. Итак, пусть $h_0 \in \mathrm{cl}_\tau \mathrm{Cl}(F, x')$. Возьмем стандартную окрестность V из $\mathcal{N}_\tau$, и пусть стандартные элементы V_1, $V_2 \in \mathcal{N}_\tau$ таковы, что $V_1 + V_2 \subset V$. Найдется стандартный элемент $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$ такой, что $h' - h_0 \in V_1$. Кроме того, для любых $x \approx_\tau x'$ и $\alpha > 0$, $\alpha \approx 0$ для некоторого h будет $h \in h' + V_2$ и $x + \alpha h \in F$. Ясно, что $h \in h' + V_2 \subset h_0 + V_1 + V_2 \subset h_0 + V$. Отсюда следует, что $h_0 \in \mathrm{Cl}(F, x')$.

Для доказательства выпуклости конуса Кларка достаточно заметить, что $\mu(\tau) + \mu(\mathbf{R}_+)\mu(\tau) \subset \mu(\tau)$ ввиду непрерывности отображения $(x, \alpha, h) \to x + \alpha h$. $\triangleright$

2.6. *Пусть* θ *— векторная топология и* $\theta \geqslant \tau$. *Тогда*

$$\forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta F, x') \subset \forall\forall\exists(F, x').$$

Если к тому же $\theta \geqslant \sigma$, *то*

$$\forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta F, x') = \forall\forall\exists(F, x').$$

$\triangleleft$ Пусть $h' \in \forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta F, x')$ — некоторый стандартный элемент названного конуса. Возьмем элементы $x \in F$ и $\alpha > 0$ такие, что $x \approx_\sigma x'$ и $\alpha \approx 0$. Ясно, что $x \in \mathrm{cl}_\theta F$. Значит, для некоторого $h \approx_\tau h'$ будет $x + \alpha h \in \mathrm{cl}_\theta F$. Возьмем бесконечно малую окрестность W из $\mu(\theta)$. Окрестность αW — также элемент $\theta(0)$, и, стало быть, для некоторого $x'' \in F$ будет $x'' - (x + \alpha h) \in \alpha W$. Положим $h'' := (x'' - x)/\alpha$. Ясно, что $x + \alpha h'' \in F$ и, кроме того, $\alpha h'' \in \alpha h + \alpha W$. Отсюда $h'' \in h + W \subset h' + \mu(\tau) + W \subset h' + \mu(\tau) + \mu(\theta) \subset h' + \mu(\tau) + \mu(\tau) \subset h' + \mu(\tau)$, т. е. $h'' \approx_\tau h'$. Итак, $h' \in \forall\forall\exists(F, x')$.

Пусть теперь $\theta \geqslant \sigma$ и $h' \in \forall\forall\exists(F, x')$. Возьмем положительное бесконечно малое α и какой-нибудь элемент $x \in \mathrm{cl}_\theta F$ такой, что $x \approx_\sigma x'$. Подберем $x'' \in F$, для которого $x - x'' \in \alpha W$, где $W \subset \mu(\theta)$ — бесконечно малая симметричная окрестность нуля в θ. Поскольку $\theta \geqslant \sigma$, то $\mu(\theta) \subset \mu(\sigma)$, т. е. $x - x'' \in \mu(\theta) \subset \mu(\sigma)$. Иначе говоря, $x \approx_\sigma x' \approx_\sigma x''$. По определению (элемент h', как обычно, считается стандартным!) для некоторого $h \approx_\tau h'$ будет $x'' + \alpha h \in F$. Положим $h'' := (x'' - x)/\alpha + h$. Ясно, что при этом выполнено

$$h'' \in h + W \subset h + \mu(\theta) \subset h' + \mu(\theta) + \mu(\tau) \subset$$
$$\subset h' + \mu(\tau) + \mu(\tau) \subset h' + \mu(\tau),$$

т. е. $h'' \approx_\tau h'$. Кроме того,

$$x + \alpha h'' = x + (x'' - x) + \alpha h = x'' + \alpha h \in F \subset \mathrm{cl}_\theta F.$$

Окончательно $h' \in \forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta F, x')$. $\triangleright$

§ 3. Конусы инфинитезимального ряда

3.1. Приведенные выше нестандартные критерии конусов Булигана, Адамара и Кларка показывают, что эти конусы взяты из перечня восьми возможных конусов с инфинитезимальной приставкой $Q^{\cdot}x\,Q^{\cdot}\alpha\,Q^{\cdot}h$ (здесь Q — либо $\forall$, либо $\exists$). Ясно, что для полного описания всех этих конусов достаточно привести характеризации $\forall\exists\exists$-конуса и $\forall\exists\forall$-конуса.

3.2. *Имеет место представление*

$$\forall\exists\exists(F, x') = \bigcap_{\substack{\alpha' \\ V \in \mathcal{N}_\tau}} \; \bigcup_{U \in \mathcal{N}_\sigma(x')} \; \bigcap_{x \in F \cap U} \left(V + \bigcup_{0 < \alpha \leqslant \alpha'} \frac{F - x}{\alpha} \right).$$

$\triangleleft$ Для доказательства следует сначала понять, что требуемое равенство — сокращенная запись утверждения: для стандартных h', F, x' выполнено

$$\forall^{\cdot}x\,\exists^{\cdot}\alpha\,\exists^{\cdot}h\ \ x + \alpha h \in F \leftrightarrow$$
$$(\forall V \in \mathcal{N}_\tau)\,\forall\alpha'\,(\exists U \in \mathcal{N}_\sigma(x'))\,(\forall x \in F \cap U)$$
$$(\exists 0 < \alpha \leqslant \alpha')\,(\exists h \in h' + V)\quad x + \alpha h \in F.$$

Значит, при $h' \in \forall\exists\exists(F, x')$ и стандартных $V \in \mathcal{N}_\tau$ и $\alpha > 0$ в качестве требуемой окрестности U можно взять внутреннее подмножество монады $\mu(\mathcal{N}_\sigma(x'))$. В свою очередь, последовательное применение принципов переноса и сильной идеализации дает

$$\forall^{\mathrm{st}}V\,\forall^{\mathrm{st}}\alpha'\,(\forall x \approx_\sigma x')\,(\exists 0 < \alpha \leqslant \alpha')\,(\exists h \in h' + V)\quad x + \alpha h \in F \rightarrow$$
$$\rightarrow (\forall x \approx_\sigma x')\left(\forall^{\mathrm{st}}\{V_1, \ldots, V_n\}\right)\left(\forall^{\mathrm{st}}\{\alpha'_1, \ldots \alpha'_n\}\right)$$
$$\exists h\,\exists\alpha\,(\forall k := 1, \ldots, n)\, 0 < \alpha \leqslant \alpha'_k \wedge h \in h' + V_k \wedge x + \alpha h \in F \rightarrow$$
$$\rightarrow (\forall x \approx_\sigma x')\,\exists h\,\exists\alpha\,\forall^{\mathrm{st}}V\, h \in h' + V \wedge \forall^{\mathrm{st}}\alpha'\, 0 < \alpha \leqslant \alpha' \wedge x + \alpha h \in F \rightarrow$$
$$\rightarrow \forall^{\cdot}x\,\exists^{\cdot}h\,(\exists\alpha \approx 0)\quad x + \alpha h \in F \rightarrow$$
$$\rightarrow h' \in {}^*\{h' : \forall^{\cdot}x\,\exists^{\cdot}\alpha\,\exists^{\cdot}h\ \ x + \alpha h \in F\} \rightarrow h' \in \forall\exists\exists(F, x').$$

Тем самым доказательство закончено. $\triangleright$

3.3. *Справедливы оценки*

$$(\exists U \in \mathcal{N}_\sigma(x'))\,(\exists V \in \mathcal{N}_\tau)\,(\exists \alpha : F \cap U \to (0,1] \wedge$$
$$\wedge \lim_{\mathcal{N}_\sigma(x')} \alpha(x') = 0)\,(\forall x \in F \cap U)\,(\forall h \in h' + V) \quad x + \alpha(x) h \in$$
$$\in F \to h' \in \forall\exists\forall(F, x') \to \forall \alpha'\,(\exists U \in \mathcal{N}_\sigma(x'))$$
$$(\exists V \in \mathcal{N}_\tau)\,(\exists \alpha : F \cap U \to (0, \alpha'])\quad (\forall x \in F \cap U)$$
$$(\forall h \in h' + V) \quad x + \alpha(x) h \in F.$$

$\lhd$ Рассмотрим стандартные множества F, x' и h' и допустим, что выполнена посылка утверждения. Привлекая принцип переноса и учитывая критерий непрерывности стандартной функции, выводим, что для $x \approx_\sigma x'$ и $h \approx_\tau h'$ будет $x + \alpha(x) h \in F$, т. е. h' лежит в стандартизации внешнего множества $\{h' : \forall^{\cdot} x \exists^{\cdot} \alpha \forall^{\cdot} h \;\; x + \alpha h \in F\}$. Итак, первая импликация доказана.

Для доказательства второй импликации возьмем стандартное число α' и подберем бесконечно малые окрестности U в $x' + \mu(\sigma)$ и V в $\mu(\tau)$. По условию $(\forall x \in F \cap U)\,(\exists \alpha \in (0, \alpha'])\,(\forall h \in h' + V)\;\; x + \alpha h \in F$. Во «внутреннем мире» (в универсуме внутренних множеств) можно применить аксиому выбора и подыскать функцию $\alpha : F \cap U \to (0, \alpha']$ с требуемым свойством. Остается сослаться на принцип переноса. $\rhd$

3.4. Помимо указанных выше восьми инфинитезимальных конусов классического ряда имеются еще девять пар конусов, содержащих конус Адамара и лежащих в конусе Булигана. Такие конусы, понятно, порождаются изменением порядка кванторов. Пять новых пар устроены сложным образом по типу $\forall\exists\forall$-конуса. Прочие порождаются перестановками и дуализациями конуса Кларка и $\forall\exists\exists$-конуса. Например, в естественных образных обозначениях имеем

$$\forall\alpha\forall h\exists x\,(F, x') = \bigcap_{U \in \mathcal{N}_\sigma(x')} \bigcup_{\alpha'} \operatorname{int}_\tau \bigcap_{0<\alpha<\alpha'} \bigcup_{x \in F \cap U} \frac{F - x}{\alpha};$$

$$\exists h\exists x\forall\alpha\,(F, x') = \bigcup_{\alpha'} \bigcap_{U \in \mathcal{N}_\sigma(x')} \operatorname{cl}_\tau \bigcup_{x \in F \cap U} \bigcap_{0<\alpha<\alpha'} \frac{F - x}{\alpha};$$

$$\exists h\forall x\forall\alpha\,(F, x') = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{N}_\sigma(x') \\ \alpha'}} \operatorname{cl}_\tau \bigcap_{\substack{0<\alpha<\alpha' \\ x \in F \cap U}} \frac{F - x}{\alpha}.$$

Последний конус уже конуса Кларка и является выпуклым в случае, если $\mu(\sigma) + \mu(\mathbf{R}_+)\,\mu(\tau) \subset \mu(\sigma)$.

§ 4. Обобщенный конус Кларка

4.1. С качественной точки зрения аппроксимирующие инфинитезимальные конусы представляют собою результаты разглядывания множества в микроскоп. Таким образом, говорить о точном вхождении элемента в множество не вполне естественно. В этой связи фиксируем еще один (стандартный) фильтр $\mathcal{N}_\theta$ и соответствующее внешнее отношение $\approx_\theta$.

4.2. Рассмотрим множество F и точку x'. Положим

$$\mathrm{Cl}^{\approx}(F, x') := \bigcap_{\substack{V \in \mathcal{N}_\tau \\ W \in \mathcal{N}_\theta}} \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{N}_\sigma(x') \\ \alpha'}} \bigcap_{\substack{x \in F \cap U \\ 0<\alpha<\alpha'}} \left(\frac{F + W - x}{\alpha} + V\right).$$

Множество $\mathrm{Cl}^{\approx}(F, x')$ называют *обобщенным конусом Кларка*. Ясно, что введенный конус шире конуса Кларка и совпадает с ним, если $\mathcal{N}_\theta$ — фильтр всех надмножеств нуля. Полезно подчеркнуть, что если фильтр

$\mathcal{N}_\theta$ недостаточно тонок, т. е. содержит мало множеств, то конус $\mathrm{Cl}^{\approx}(F, x')$ чересчур широк — совпадает со всем пространством.

4.3. *Для стандартных F и x' множество $\mathrm{Cl}^{\approx}(F, x')$ представляет собою стандартизацию $\forall\forall\exists\exists$-конуса, т. е. стандартный элемент h' входит в $\mathrm{Cl}^{\approx}(F, x')$ в том и только в том случае, если*

$$\forall^{\cdot} x \forall^{\cdot} \alpha \exists^{\cdot} h (\exists x'' \in F)\ x'' \approx_\theta x + \alpha h.$$

◁ Доказательство аналогично приведенному в 2.3. ▷

4.4. Ниже мы будем предполагать, что отображение $(x, t, y, z) \to x + ty + z$, действующее из пространства $X \times \mathbf{R} \times X \times X$ с топологией $\sigma \times \tau_{\mathbf{R}} \times \tau \times \theta$ в пространство X с топологией σ, непрерывно, т. е. в предположении стандартности параметров $\mu(\sigma) + \mu(\mathbf{R}_+)\mu(\tau) + \mu(\theta) \subset \mu(\sigma)$.

4.5. *Обобщенный конус Кларка τ-замкнут и выпукл.*

◁ Доказательство аналогично 2.5. ▷

4.6. *Справедлива формула Рокафеллара:*

$$\forall\forall\forall\exists(F, x') + \mathrm{Cl}^{\approx}(F, x') \subset \forall\forall\forall\exists(F, x'),$$

где выпуклый конус $\forall\forall\forall\exists(F, x')$ определен соотношением

$$\forall\forall\forall\exists(F, x') := \bigcap_{W \in \mathcal{N}_\theta} \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{N}_\sigma(x') \\ \alpha'}} \mathrm{int}_\tau \bigcap_{\substack{x \in F \cap U \\ 0 < \alpha < \alpha'}} \frac{F + W - x}{\alpha},$$

т. е. представляет собой стандартизацию

$$\forall\forall\forall\exists(F, x') = {}^*\{h' : \forall^{\cdot} x \forall^{\cdot} \alpha \forall^{\cdot} h (\exists x'' \in F)\ x + \alpha h \approx_\theta x''\}$$

(при стандартных параметрах).

◁ Нетривиальной является только проверка формулы Рокафеллара. При этом в силу принципа переноса можно ограничиться случаем стандартных параметров.

Итак, пусть k' входит в $\forall\forall\forall\exists(F, x')$ и $h' \in \forall\forall\exists\exists(F, x')$, где k' и h' — стандартные элементы. Тогда

$$(x' + \mu(\sigma)) \cap F + \mu(\mathbf{R}_+)(k' + \mu(\tau)) \subset F + \mu(\theta);$$
$$(\forall x \approx_\sigma x')(\forall \alpha \approx 0)(\exists h \approx_\tau h')(\exists x'' \in F)\ x + \alpha h \approx_\theta x''.$$

Отсюда для $\alpha > 0$ и $\alpha \approx 0$ выводим

$$x' + \alpha(h' + k' + \mu(\tau)) = x' + \alpha h + \alpha(k' + (h' - h) + \mu(\tau)) \subset$$
$$\subset x'' + \mu(\theta) + \alpha(k' + \mu(\tau) + \mu(\tau)) \subset x'' + \alpha(k' + \mu(\tau)) + \mu(\theta)$$

для некоторого $x'' \in F$. Помимо этого,

$$x'' \in x' + \alpha h + \mu(\theta) \subset x' + \alpha h' + \alpha\mu(\tau) + \mu(\tau) \subset$$
$$\subset x' + \mu(\sigma) + \alpha\mu(\tau) + \mu(\theta) \subset x' + \mu(\sigma).$$

Окончательно

$$x' + \alpha(h' + k' + \mu(\tau)) \subset (x' + \mu(\sigma)) \cap F +$$
$$+ \alpha(k + \mu(\tau) + \mu(\theta)) \subset F + \mu(\theta) + \mu(\theta) \subset F + \mu(\theta),$$

что и требовалось. ▷

§ 5. Эпипроизводные по направлениям

5.1. Пусть $\overline{\mathbf{R}}$ — стандартная расширенная числовая прямая. Для *конечного числа* $t \in {}^{\approx}\mathbf{R} := \{t \in \mathbf{R} : (\exists^{\mathrm{st}} n \in \mathbf{N})\ |t| \leqslant n\}$ символом $\mathrm{st}(t)$, как обычно, обозначим *стандартную часть* t. Таким образом, $(\forall s, t \in {}^{\approx}\mathbf{R})\ t \approx s \leftrightarrow \mathrm{st}(t) = \mathrm{st}(s)$. Определим также

$$\mu(-\infty) := \{s \in \overline{\mathbf{R}} : s \leqslant {}^{\approx}\mathbf{R}\};$$
$$\mu(+\infty) := \{s \in \overline{\mathbf{R}} : s \geqslant {}^{\approx}\mathbf{R}\}$$

— *монады бесконечностей* и будем считать

$$t \in \mu(-\infty) \leftrightarrow \mathrm{st}(t) = -\infty;$$
$$t \in \mu(+\infty) \leftrightarrow \mathrm{st}(t) = +\infty.$$

5.2. *Для стандартного t из $\mathbf{R}$ и произвольного s из $\overline{\mathbf{R}}$ выполнено*

$$\mathrm{st}(s) \leqslant t \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon > 0)\ s < t + \varepsilon.$$

$\lhd$ $\leftarrow$ Если $s < t + \varepsilon$, то $\mathrm{st}(s) \leqslant \mathrm{st}(t+\varepsilon) = \mathrm{st}(t) + \mathrm{st}(\varepsilon) = t + \varepsilon$. Значит, $((\forall\varepsilon > 0)\ \mathrm{st}(s) \leqslant t + \varepsilon) \to \mathrm{st}(s) \leqslant t$.

$\to$ Пусть $\mathrm{st}(s) = t$. Так как $s \in \mu(s)$, то $s < t + \varepsilon$ для каждого стандартного $\varepsilon > 0$. Если же $\mathrm{st}(s) < t$, то и монада точки $\mathrm{st}(s)$ лежит левее t. Отсюда s левее t и, стало быть, подавно $s < t + \varepsilon$. $\rhd$

5.3. *Пусть $f: X \to \overline{\mathbf{R}}$ — стандартная функция, определенная на стандартном X, и $\mathscr{F}$ — некоторый стандартный фильтр в X. Для каждого стандартного $t \in \mathbf{R}$ выполнено*

$$\sup_{V\in\mathscr{F}} \inf f(V) \leqslant t \leftrightarrow (\exists v \in \mu(\mathscr{F}))\ \mathrm{st}(f(v)) \leqslant t;$$

$$\inf_{V\in\mathscr{F}} \sup f(V) \leqslant t \leftrightarrow (\forall v \in \mu(\mathscr{F}))\ \mathrm{st}(f(v)) \leqslant t.$$

$\lhd$ Проверим сначала первую эквивалентность. Применяя последовательно принцип переноса и идеализации, выводим

$$\sup_{V\in\mathscr{F}} \inf f(V) \leqslant t \to (\forall V \in \mathscr{F})\ \inf f(V) \leqslant t \to$$
$$\to (\forall V \in \mathscr{F})(\forall\varepsilon > 0)\ \ \inf f(V) < t + \varepsilon \to \forall\varepsilon\forall V(\exists v \in V)\ f(v) < t + \varepsilon \to$$
$$\to \forall^{\mathrm{st}}\varepsilon\forall^{\mathrm{st}}V\exists v\ v \in V \wedge f(v) < t + \varepsilon \to \exists v\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon\forall^{\mathrm{st}}V\ v \in V \wedge f(v) < t + \varepsilon \to$$
$$\to (\exists v \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon > 0)\ f(v) < t + \varepsilon \to (\exists v \in \mu(\mathscr{F}))\ \mathrm{st}(f(v)) \leqslant t$$

(здесь мы учли 5.2). Теперь заметим, что для всякого стандартного элемента V фильтра $\mathscr{F}$ будет $v \in \mu(\mathscr{F}) \subset V$. Значит, $\inf f(V) \leqslant t$ (ибо $\inf f(V) \leqslant f(v) < t + \varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$). Отсюда в силу принципа переноса для внутреннего V из $\mathscr{F}$ выполнено $\inf f(V) \leqslant t$, что и нужно.

Ввиду уже доказанного и с учетом стандартности $-f$ и t выводим

$$\inf_{V\in\mathscr{F}} \sup f(V) \geqslant t \leftrightarrow -\inf_{V\in\mathscr{F}} \sup f(V) \leqslant -t \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \sup_{V\in\mathscr{F}} \inf(-f)(V) \leqslant -t \leftrightarrow (\exists v \in \mu(\mathscr{F}))\ \mathrm{st}(-f(v)) \leqslant -t \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists v \in \mu(\mathscr{F}))\ \mathrm{st}(f(v)) \geqslant t.$$

Таким образом, получается

$$\inf_{V\in\mathscr{F}} \sup f(V) < t \leftrightarrow \neg\Big(\inf_{V\in\mathscr{F}} \sup f(V) \geqslant t\Big) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \neg((\exists v \in \mu(\mathscr{F}))\ \ \mathrm{st}(f(v)) \geqslant t) \leftrightarrow (\forall v \in \mu(\mathscr{F}))\ \mathrm{st}(f(v)) < t.$$

Окончательно на основе доказанного заключаем

$$\inf_{V\in\mathscr{F}} \sup f(V) \leqslant t \leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)\ \inf_{V\in\mathscr{F}} \sup f(V) < t + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon > 0)(\forall v \in \mu(\mathscr{F}))\ \mathrm{st}(f(v)) < t + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall v \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon > 0)\ \ \mathrm{st}(f(v)) < t + \varepsilon \leftrightarrow (\forall v \in \mu(\mathscr{F}))\ \mathrm{st}(f(v)) \leqslant t,$$

ибо число $\mathrm{st}(f(v))$ стандартно. $\rhd$

5.4. *Пусть X, Y — стандартные множества, $f: X \times Y \to \overline{\mathbf{R}}$ — стандартная функция и $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — стандартные фильтры в X и в Y соответственно.*

Для каждого стандартного вещественного числа t выполнено

$$\sup_{V\in\mathscr{F}}\inf_{U\in\mathscr{G}}\sup_{u\in U}\inf_{v\in V} f(u,v)\leqslant t\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall u\in\mu(\mathscr{G}))\,(\exists v\in\mu(\mathscr{F}))\,\mathrm{st}\,(f(u,v))\leqslant t.$$

$\triangleleft$ Положим $F_V(u):=\inf\{f(u,v):v\in V\}$. Заметим, что F_V — стандартная функция, если только V — стандартное множество. Привлекая принцип переноса, предложение 5.3 и (сильную) идеализацию, последовательно выводим

$$\sup_{V\in\mathscr{F}}\inf_{U\in\mathscr{G}}\sup_{u\in U}\inf_{v\in V} f(u,v)\leqslant t\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall V\in\mathscr{F})\inf_{U\in\mathscr{G}}\sup_{u\in U}F_V(u)\leqslant t\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall^{\mathrm{st}}V\in\mathscr{F})\inf_{U\in\mathscr{G}}\sup F_V(U)\leqslant t\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall^{\mathrm{st}}V\in\mathscr{F})\,(\forall u\in\mu(\mathscr{G}))\quad\mathrm{st}\,(F_V(u))\leqslant t\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall u\in\mu(\mathscr{G}))\,(\forall^{\mathrm{st}}V\in\mathscr{F})\,(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon>0)\quad\inf_{v\in V}f(u,v)<t+\varepsilon\rightarrow$$
$$\rightarrow(\forall u\in\mu(\mathscr{G}))\,(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon>0)\,(\forall^{\mathrm{st}}V\in\mathscr{F})\,(\exists v\in V)\quad f(u,v)<t+\varepsilon\rightarrow$$
$$\rightarrow(\forall u\in\mu(\mathscr{G}))\,(\exists v\in\mu(\mathscr{F}))\,(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon>0)\;f(u,v)<t+\varepsilon\rightarrow$$
$$\rightarrow(\forall u\in\mu(\mathscr{G}))\,(\exists v\in\mu(\mathscr{F}))\;\mathrm{st}(f(u,v))\leqslant t.$$

Из последнего соотношения для внутреннего элемента $U\subset\mu(\mathscr{G})$ фильтра $\mathscr{G}$ и стандартного элемента V фильтра $\mathscr{F}$ выводим

$$\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}f(u,v)\leqslant t\rightarrow\inf_{U\in\mathscr{G}}\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}f(u,v)\leqslant t\rightarrow$$
$$\rightarrow(\forall^{\mathrm{st}}V\in\mathscr{F})\inf_{U\in\mathscr{G}}\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}f(u,v)\leqslant t\rightarrow$$
$$\rightarrow(\forall V\in\mathscr{F})\inf_{U\in\mathscr{G}}\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}f(u,v)\leqslant t$$

в силу принципа переноса. $\triangleright$

5.5. Приведенные признаки позволяют дать нестандартные критерии производных по направлениям и эпипроизводных, отвечающих инфинитезимальным касательным конусам. Остановимся для иллюстрации на эпипроизводной Рокафеллара для непрерывной функции [4], [7].

5.6. *Пусть $f:X\to\overline{\mathbf{R}}$ — стандартная функция, непрерывная в стандартной точке x' своей эффективной области определения* $\mathrm{dom}\,f$. *Для стандартного числа t' и направления h' эквивалентны утверждения*:

(1) $(h',t')\in\mathrm{Cl}(\mathrm{epi}\,f,(x',f(x')))$;

(2) $f^{\uparrow}(x')h'\leqslant t'$, *где $f^{\uparrow}(x')$ — производная Рокафеллара*;

(3) $(\forall x\approx_{\sigma}x')\;\;x\in\mathrm{dom}\,f\rightarrow\forall^{\bullet}\alpha\exists^{\bullet}h\;\;\mathrm{st}\left(\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}\right)\leqslant t'$;

(4) *имеет место оценка*

$$\sup_{V\in\mathscr{N}_\tau}\;\inf_{\substack{U\in\mathscr{N}_\sigma(x')\\ \alpha'}}\;\sup_{\substack{x\in\mathrm{dom}f\cap U\\ 0<\alpha<\alpha'}}\;\inf_{h\in h'+V}\;\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}\leqslant t'.$$

$\triangleleft$ По определению надграфик производной Рокафеллара $f^{\uparrow}(x')$ есть конус Кларка надграфика $\mathrm{epi}\,f$ функции f в точке $(x',f(x'))$, что и обеспечивает $(1)\leftrightarrow(2)$. Учитывая строение монад в произведении, непрерывность f в точке x', т. е. $x\in\mathrm{dom}\,f\wedge x\approx_\sigma x'\rightarrow f(x)\approx_\tau f(x')$, и нестандартный критерий элементов конуса Кларка 2.3, полагая $F:=\mathrm{dom}\,f$, выводим

$$
\begin{gathered}
(h', t') \in \mathrm{Cl}\,(\mathrm{epi}\, f,\ (x', f(x'))) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow \forall^{\cdot} x \forall^{\cdot} \alpha \exists^{\cdot} h\, (\exists t \approx t')\ \ (x + \alpha h,\ f(x) + \alpha t) \in \mathrm{epi}\, f \leftrightarrow \\
\leftrightarrow \forall^{\cdot} x \forall^{\cdot} \alpha \exists^{\cdot} h\, (\exists t \approx t')\ \ t \geqslant s := \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha} \rightarrow \\
\rightarrow \forall^{\cdot} x \forall^{\cdot} \alpha \exists^{\cdot} h\, (\exists t \approx t')\ \ \mathrm{st}\,(t) \geqslant \mathrm{st}\,(s) \rightarrow \\
\rightarrow \forall^{\cdot} x \forall^{\cdot} \alpha \exists^{\cdot} h\ \ t' \geqslant \mathrm{st}\,(s) \rightarrow \forall^{\cdot} x \forall^{\cdot} \alpha \exists^{\cdot} h\, (\exists t \approx t')\ \ t \geqslant s.
\end{gathered}
$$

Для доказательства последней импликации заметим, что при $\mathrm{st}(s) = -\infty$ она очевидна. Если же s — конечное число, то положим $t := t' + |\mathrm{st}(s) - s|$. Ясно, что $t' \approx t$ и $t - s \geqslant t' - \mathrm{st}(s) + s - s \geqslant 0$. Итак, с учетом 5.4

$$
\begin{gathered}
f^{\uparrow}(x')\, h' \leqslant t' \leftrightarrow \forall^{\cdot} x \forall^{\cdot} \alpha \exists^{\cdot} h\ \ \mathrm{st}\left(\frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha}\right) \leqslant t' \leftrightarrow \\
\leftrightarrow \sup_{V \in \mathcal{N}_{\tau}}\ \inf_{\substack{U \in \mathcal{N}_{\sigma}(x') \\ \alpha'}}\ \sup_{\substack{x \in U \cap \mathrm{dom}\, f \\ 0 < \alpha \leqslant \alpha'}}\ \inf_{h \in h' + V} \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha} \leqslant t',
\end{gathered}
$$

что и завершает доказательство. ▷

г. Новосибирск

Статья поступила 15 октября 1984 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Clarke F.* Generalized gradients and applications.— Trans. Amer. Math. Soc., 1975, v. 205, p. 247—262.
2. *Sachs E.* Differentiability in optimality theory.— Optimization, 1978, v. 9, N 4, p. 497—513.
3. *Hiriart-Urruty J.-B.* Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces.— Math. Oper. Res., 1979, v. 4, N 1, p. 79—97.
4. *Rockafellar R. T.* Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions.— Canad. J. Math., 1980, v. 32, N 2, p. 257—280.
5. *Ioffe A. D.* Non-smooth analysis: differential calculus of nondifferentiable mappings.— Trans. Amer. Math. Soc., 1981, v. 266, N 1, p. 1—56.
6. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Локальный выпуклый анализ.— В кн.: Современные проблемы математики. Т. 19. М.: ВИНИТИ, 1982, с. 156—207.
7. *Dolecki Sz.* Tangency and differentiation: some applications of convergence theory.— Annali Mat. Pure et Appl.. 1982, v. 80, N 4, p. 223—255.
8. *Penot J.-P.* Compact filters, nets and relations.— J. Math. Anal. Appl., 1983, v. 93, N 2, p. 400—417.
9. *Nelson E.* Internal set theory.— Bull. Amer. Math. Soc., 1977, v. 83, N 6, p. 1165—1198.
10. *Robinson A.* Non-standard analysis.— Amsterdam; London: North Holland Publ., 1970.
11. *Hrbacek K.* Axiomatic foundations for nonstandard analysis.— Fund. Math., 1978, v. 98, N 1, p. 1—24.
12. *Luxemburg W. A. J.* A. general theory of monads.— In: Applications of model theory to algebra, analysis and probability. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1966, p. 18—86.