ISSN 0037-4474

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

ТОМ XXVII № 1 1986

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Т. XXVII, № 1 ЯНВАРЬ — ФЕВРАЛЬ 1986

УДК 517.11 : 517.43

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ЦИКЛИЧЕСКИЕ МОНАДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

В булевозначном анализе выделен новый важный класс топологических пространств, обладающих свойством цикличности или миксинга. Эти объекты представляют собой спуски — изображения тех или иных топологических пространств в булевозначных моделях теории множеств (см. работы Г. Такеути, Е. И. Гордона, А. Г. Кусраева, В. А. Любецкого, М. Озавы и др.). В рамках нестандартного анализа А. Робинсона развита монадология — удобный аппарат исследования фильтров, равномерностей, топологий и т. п. [1, 2]. Цель настоящей работы — применить названную теорию для изучения некоторых применяемых в анализе свойств циклических топологий. Ниже даются критерии прокомпактных пространств и связанных с ними родственных образований. Приводятся приложения к o-сходимости в пространстве Канторовича. В работе используется не слишком распространенная и достаточно разнородная техника. Поэтому для удобства некоторые предложения приведены с избыточными пояснениями. Указанные обстоятельства и ограниченность объема не позволили также включить в какой-либо мере полные библиографические и исторические указания.

§ 0. Предварительные соглашения

0.1. При работе с булевозначными моделями теории множеств Д. Скотта и Р. Соловэя ниже без специальных оговорок используется терминология, принятая в [3, 4]. Развернутые изложения основ булевозначного анализа и указания для дальнейшего чтения можно извлечь из [5—8].

Подчеркнем, что ниже считается фиксированной полная булева алгебра B и отвечающий ей отделимый булевозначный универсум $V^{(B)}$. Оценка истинности формулы φ теории Цермело — Френкеля обозначается символом $[\varphi]$. Для экономии места сильно циклические множества (и соответствующие оболочки) называются *циклическими*.

0.2. При использовании техники нестандартного математического анализа А. Робинсона подразумевается «неоклассическая» установка, восходящая к Э. Нельсону [9]. Иными словами, множества (теории Цермело — Френкеля) отождествляются с элементами универсума внутренних множеств, расположенного в подходящем мире внешних множеств, удовлетворяющих аксиоматике Цермело. Стандартные множества составляют внешний класс в универсуме внутренних множеств. Робинсоновская стандартизация, т. е. *-изображение, и соответствующий мир «классических» множеств не используются. Часто без специальных оговорок *действует обычное предположение «стандартности антуража»*, состоящее в том, что неоговоренные особо параметры формальной записи текста статьи считаются стандартными множествами. Как обычно, для стандартного фильтра $\mathscr{F}$ символом $\mu(\mathscr{F})$ обозначаем *монаду* $\mathscr{F}$, т. е. внешнее пересечение стандартных элементов $\mathscr{F}$. Развернутые изложения основ нестандартного анализа и библиографические указания можно найти с помощью [10, 11].

Нам понадобится в дальнейшем понятие *циклической оболочки* $\operatorname{mix}(A)$ внешнего множества A. При определении $\operatorname{mix}(A)$ предполагают, что фиксированная булева алгебра B является стандартной и множество A составлено из элементов $V^{(B)}$. Итак, говорят, что элемент x из $V^{(B)}$ лежит в циклической оболочке $\operatorname{mix}(A)$ внешнего подмножества A универсума $V^{(B)}$, если для некоторого внутреннего семейства $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов A и внутреннего разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре B точка x есть *перемешивание* $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, т. е. $b_\xi x = b_\xi a_\xi$ при $\xi\in\Xi$ или, что то же самое, $x=\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi a_\xi$.

0.3. Используемая ниже терминология из топологии и теории упорядоченных векторных пространств согласована с принятой в [12, 13].

§ 1. Циклические и экстенсиональные фильтры

1.0. В этом параграфе даются необходимые для дальнейшего вспомогательные (и в большей части очевидные) сведения о спусках и подъемах фильтров.

1.1. *Для непустых элементов $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ универсума $V^{(B)}$ и разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ выполнено*

$$\Big(\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\Big)\downarrow = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\downarrow .$$

$\lhd$ Обозначим $A:=\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi$. Ясно, что при каждом $\xi\in\Xi$ будет $[a\in A_\xi]\geqslant[a\in A]\wedge[A=A_\xi]=[A=A_\xi]\geqslant b_\xi$ как только $a\in A\downarrow$. В силу принципа переноса в $V^{(B)}$ верно $[a\in A_\xi]=[(\exists a_\xi\in A_\xi)\,a=a_\xi]$. Значит, с учетом принципа максимума $(\exists a_\xi\in A_\xi\downarrow)$ $[a\in A_\xi]=[a=a_\xi]\geqslant b_\xi$. Таким образом, $a=\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi a_\xi$.

Пусть теперь известно, что $b_\xi a=b_\xi a_\xi$ при некоторых $a_\xi\in A_\xi\downarrow$ и всех $\xi\in\Xi$. Тогда, учитывая, что $[A=A_\xi]\geqslant b_\xi$ $(\xi\in\Xi)$ по определению перемешивания, выводим $[a\in A]\geqslant[a=a_\xi]\wedge[a_\xi\in A_\xi]\wedge[A_\xi=A]\geqslant b_\xi$ при $\xi\in\Xi$, т. е. $[a\in A]\geqslant\bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi=1$ и $a\in A\downarrow$. $\rhd$

1.2. *Для циклических множеств A_ξ, где $A_\xi\in\mathscr{P}(V^{(B)})$ при $\xi\in\Xi$, выполнено*

$$\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\uparrow = \Big(\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\Big)\uparrow .$$

$\lhd$ Учитывая, что $A_\xi\uparrow\downarrow=A_\xi$ при $\xi\in\Xi$ по условию, на основании 1.1 выводим

$$\Big(\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\uparrow\Big)\downarrow = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\uparrow\downarrow = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi.$$

Отсюда, вспоминая, что для непустого внутри $V^{(B)}$ множества A верно $A=A\downarrow\uparrow$, заключаем

$$\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\uparrow = \Big(\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\uparrow\Big)\downarrow\uparrow = \Big(\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\Big)\uparrow . \rhd$$

1.3. *Пусть $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — некоторое разбиение единицы и семейства элементов $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$, $(Y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ таковы, что $[X_\xi\supset Y_\xi]=1$ $(\xi\in\Xi)$. Тогда*

$$\Big[\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi X_\xi\supset\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi Y_\xi\Big]=1.$$

$\lhd$ Обозначим $X:=\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi X_\xi$ и $Y:=\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi Y_\xi$. Ясно, что $[Y\subset X]\geqslant$ $\geqslant[X=X_\xi]\wedge[X_\xi\supset Y]\geqslant[X=X_\xi]\wedge[X_\xi\supset Y_\xi]\wedge[Y=Y_\xi]\geqslant b_\xi\wedge 1\wedge b_\xi=$ $=b_\xi$ при всех $\xi\in\Xi$. $\rhd$

1.4. *Пусть X — непустой элемент $V^{(B)}$. Тогда*

$$[\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)=\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X\downarrow)^{\uparrow\uparrow}]=1,$$

где, как обычно, $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(A)$ — *совокупность конечных подмножеств* A *и* $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\uparrow\uparrow} := \{Y{\uparrow} : Y \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})\}{\uparrow}$.

$\lhd$ Включение $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\uparrow\uparrow} \subset \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ внутри $V^{(B)}$ не вызывает сомнений (подъем конечного множества конечен). Остается провести следующую выкладку:

$$[\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) \subset \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\uparrow\uparrow}] =$$
$$[(\forall n \in \mathbf{N}^{\wedge})(\forall f : n \to X)\, f(n) \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\uparrow\uparrow}] =$$
$$= \bigwedge_{n\in\mathbf{N}} \bigwedge_{[f: n^{\wedge} \to X] = 1} [f(n^{\wedge}] \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\uparrow\uparrow}] =$$
$$= \bigwedge_{n\in\mathbf{N}} \bigwedge_{f: n \to X\downarrow} [f\uparrow(n^{\wedge}) \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\uparrow\uparrow}] =$$
$$= \bigwedge_{n\in\mathbf{N}} \bigwedge_{f: n \to X\downarrow} [f(n)\uparrow \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\uparrow\uparrow}] = 1. \rhd$$

1.5. *Пусть* $\mathscr{G}$ — *базис фильтра в множестве* X, *причем* $X \in \mathscr{P}(V^{(B)})$, *т. е.* X — *подмножество* $V^{(B)}$. *Положим*

$$\mathscr{G}' := \{F \in \mathscr{P}(X{\uparrow}){\downarrow} : (\exists G \in \mathscr{G})\ [F \supset G{\uparrow}] = 1\};$$
$$\mathscr{G}'' := \{G{\uparrow} : G \in \mathscr{G}\}.$$

Тогда $\mathscr{G}'{\uparrow}$ *и* $\mathscr{G}''{\uparrow}$ — *базисы одного и того же фильтра* $\mathscr{G}^{\uparrow}$ *в* $X{\uparrow}$ *внутри* $V^{(B)}$.

$\lhd$ Проверим, что $\mathscr{G}'$ — базис фильтра в $X{\uparrow}$ внутри $V^{(B)}$. Имеем

$$[(\forall F_1, F_2 \in \mathscr{G}'{\uparrow})(\exists F \in \mathscr{G}'{\uparrow})\, F \subset F_1 \cap F_2] =$$
$$= \bigwedge_{F_1, F_2 \in \mathscr{G}'} [(\exists F \in \mathscr{G}'{\uparrow})\, F \subset F_1 \subset F_2].$$

Если $F_1, F_2 \in \mathscr{G}'$, то найдутся $G_1, G_2 \in \mathscr{G}$ такие, что $[F_1 \supset G_1{\uparrow}] = 1$ и $[F_2 \supset G_2{\uparrow}] = 1$. Возьмем элемент $G \in \mathscr{G}$, для которого $G \subset G_1 \cap G_2$. Тогда будет $(G_1 \cap G_2){\uparrow} \in \mathscr{G}'$ и

$$[F_1 \cap F_2 \supset (G_1 \cap G_2){\uparrow}] \geqslant [F_1 \supset G_1{\uparrow}] \wedge [F_2 \supset G_2{\uparrow}] = 1.$$

Кроме того, бесспорно, что $\mathscr{G}''{\uparrow}$ — базис фильтра в $X{\uparrow}$ внутри $V^{(B)}$. По построению $\mathscr{G}' \supset \mathscr{G}''$. Тем более, $\mathscr{G}'{\uparrow}{\downarrow} \supset \mathscr{G}''{\uparrow}{\downarrow}$ и, значит, $[\mathscr{G}'{\uparrow} \supset \mathscr{G}''{\uparrow}] = 1$. Следовательно, и подавно $[\widetilde{\mathscr{G}'{\uparrow}} \supset \widetilde{\mathscr{G}''{\uparrow}}] = 1$, где, как обычно, $\widetilde{\mathscr{B}}$ — множество надмножеств элементов $\mathscr{B}$. Помимо того,

$$[(\forall F_1 \in \mathscr{G}'{\uparrow})(\exists F_2 \in \mathscr{G}''{\uparrow})\, F_1 \supset F_2] = \bigwedge_{F_1 \in \mathscr{G}'} [(\exists F_2 \in \mathscr{G}''{\uparrow})\, F_1 \supset F_2] = 1,$$

ибо для $G_1 \in \mathscr{G}$ такого, что $[F_1 \supset G_1{\uparrow}] = 1$, будет $G_1{\uparrow} \in \mathscr{G}'{\uparrow}$. Итак, $[\widetilde{\mathscr{G}'{\uparrow}} \subset \widetilde{\mathscr{G}''{\uparrow}}] = 1$ по принципу переноса в $V^{(B)}$. $\rhd$

1.6. Фильтр $\mathscr{G}^{\uparrow}$ внутри $V^{(B)}$, построенный в 1.5 называют *подъемом* $\mathscr{G}$.

1.7. *Пусть* $\mathscr{G}$ — *базис фильтра в* $X{\downarrow}$ *для непустого* X *из* $V^{(B)}$. *Пусть, далее,* $\mathrm{mix}(\mathscr{G})$ — *совокупность перемешиваний непустых семейств элементов* $\mathscr{G}$. *Тогда если* $\mathscr{G}$ *состоит из циклических множеств, то* $\mathrm{mix}(\mathscr{G})$ — *базис фильтра в* $X{\downarrow}$ *и* $\mathrm{mix}(\mathscr{G}) \supset \mathscr{G}$. *Кроме того, имеет место равенство* $\mathscr{G}^{\uparrow} = \mathrm{mix}(\mathscr{G})^{\uparrow}$.

$\lhd$ Пусть $U, V \in \mathrm{mix}(\mathscr{G})$. Это означает, что имеются множества Ξ, H, разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, $(c_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ и семейства $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$, $(V_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ элементов $\mathscr{G}$, для которых $b_\xi U = b_\xi U_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ и $c_\eta V = c_\eta V_\eta$ $(\eta \in \mathrm{H})$. Пусть $W_{(\xi,\eta)} \subset U_\xi \cap V_\eta$ — некоторый элемент базиса $\mathscr{G}$. Положим $d_{(\xi,\eta)} := b_\xi \wedge c_\eta$. Ясно, что $(d_{(\xi,\eta)})_{(\xi,\eta)\in\Xi\times\mathrm{H}}$ — разбиение единицы. Рассмотрим $W := \sum_{(\xi,\eta)\in\Xi\times\mathrm{H}} d_{(\xi,\eta)} W_{(\xi,\eta)}$, т. е. совокупность соответствующих перемешиваний элементов $W_{(\xi,\eta)}$. Ясно, что $d_{(\xi,\eta)} U = b_\xi c_\eta U = c_\eta b_\xi U_\xi \supset d_{(\xi,\eta)} W_{(\xi,\eta)}$ и аналогично $d_{(\xi,\eta)} V \supset d_{(\xi,\eta)} W_{(\xi,\eta)}$. Тем самым, $W \subset U \cap V$ и $W \in \mathrm{mix}(\mathscr{G})$.

Поскольку $\mathscr{G}$ состоит из циклических множеств, то с учетом 1.2 и 1.3 видно, что $\mathrm{mix}(\mathscr{G})' = \mathrm{mix}(\mathscr{G}')$, что и завершает доказательство. $\rhd$

1.8. *Для фильтра* $\mathscr{F}$ в X внутри $V^{(B)}$ положим $\mathscr{F}^{\downarrow} := \widetilde{\{F{\downarrow} : F \in \mathscr{F}{\downarrow}\}}$. Фильтр $\mathscr{F}^{\downarrow}$ в $X{\downarrow}$ называют *спуском* $\mathscr{F}$. Базис фильтра $\mathscr{G}$ в $X{\downarrow}$ называют *экстенсиональным*, если $\mathcal{G}^{\uparrow\downarrow}=\widetilde{\mathcal{G}}$. Базис фильтра $\mathcal{G}$ в $X{\downarrow}$ называют *циклическим*, если $\widetilde{\mathcal{G}}$ имеет базис из циклических множеств. (Заметим, что в [14] циклическими названы экстенсиональные фильтры.)

1.9. *Фильтр $\mathcal{F}$ экстенсионален в том и только в том случае, если $\mathcal{F}$ циклический и $\mathcal{F}=\widetilde{\operatorname{mix}(\mathcal{F})}$.*

◁ Все следует из 1.2, 1.3 и 1.7. ▷

1.10. *Для экстенсиональных фильтров $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в $X{\downarrow}$ выполнено $\mathcal{F}\supset\mathcal{G}\leftrightarrow[\mathcal{F}^{\uparrow}\supset\mathcal{G}^{\uparrow}]=1$.*

◁ Если $\mathcal{F}\supset\mathcal{G}$, то $\mathcal{F}'\supset\mathcal{G}'$ и, тем более, $[\mathcal{F}^{\uparrow}\supset\mathcal{G}^{\uparrow}]=1$. Отсюда $\mathcal{F}^{\uparrow}{\downarrow}\supset\mathcal{G}^{\uparrow}{\downarrow}$, т. е. $\mathcal{F}^{\uparrow\downarrow}\supset\mathcal{G}^{\uparrow\downarrow}$. Остается вспомнить 1.8. ▷

1.11. Максимальные элементы в множестве экстенсиональных фильтров называют *проультрафильтрами*.

1.12. *Проультрафильтры суть максимальные элементы множества циклических фильтров.*

◁ Если $\mathcal{A}$ — проультрафильтр и $\mathcal{F}$ — мажорирующий его циклический фильтр, то $\mathcal{A}\subset\mathcal{F}\subset\operatorname{mix}(\mathcal{F})$. Отсюда $\mathcal{A}=\mathcal{F}$. Наоборот, пусть $\mathcal{A}$ — максимальный циклический фильтр. Тогда $\mathcal{A}=\operatorname{mix}(\mathcal{A})$ и, стало быть, $\mathcal{A}$ — проультрафильтр. ▷

1.13. *Проультрафильтры в $X{\downarrow}$ — это в точности спуски ультрафильтров в X.*

◁ Прямое следствие 1.8. ▷

1.14. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $f:X\to Y$ внутри $V^{(B)}$ и $[\mathcal{F}$ — фильтр в $X]=1$, то*

$$f(\mathcal{F})^{\downarrow}=f{\downarrow}(\mathcal{F}^{\downarrow});$$

(2) *для экстенсионального отображения $f:X{\downarrow}\to Y{\downarrow}$ и фильтра $\mathcal{F}$ в $X{\downarrow}$ верно*

$$f(\mathcal{F})^{\uparrow}=f{\uparrow}(\mathcal{F}^{\uparrow});$$

(3) *образ экстенсионального фильтра при экстенсиональном отображении экстенсионален;*

(4) *образ проультрафильтра при экстенсиональном отображении — проультрафильтр.*

◁ (1) Используя определения и свойства спуска $f{\downarrow}$ отображения f, имеем

$$G\in f(\mathcal{F})^{\downarrow}\leftrightarrow(\exists U\in f(\mathcal{F}){\downarrow})\,G\supset U{\downarrow}\leftrightarrow(\exists F\in\mathcal{F}{\downarrow})\,G\supset f(F){\downarrow}\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\exists F\in\mathcal{F}{\downarrow})\,G\supset f{\downarrow}(F{\downarrow})\leftrightarrow(\exists F\in\mathcal{F}^{\downarrow})\,G\supset f{\downarrow}(F)\leftrightarrow G\in f{\downarrow}(\mathcal{F}^{\downarrow}).$$

(2) Используя свойства подъема $f{\uparrow}$, проводим оценки:

$$[G\in f\uparrow(\mathcal{F}^{\uparrow})]=[(\exists U\in f\uparrow(\mathcal{F}^{\uparrow}))\,G\supset U]=[(\exists F\in\mathcal{F}^{\uparrow})G\supset f\uparrow(F)]=$$
$$=\bigvee_{F\in\mathcal{F}}[G\supset f\uparrow(F\uparrow)]=\bigvee_{F\in\mathcal{F}}[G\supset f(F)\uparrow]=$$
$$=\bigvee_{U\in f(\mathcal{F})'}[G\supset U]=[(\exists U\in f(\mathcal{F})'\uparrow)\,G\supset U]=$$
$$=[(\exists U\in f(\mathcal{F})^{\uparrow})\,G\supset U]=[G\in f(\mathcal{F})^{\uparrow}].$$

(3) Применяя последовательно (2) и (1), имеем

$$f(\mathcal{F})^{\uparrow\downarrow}=f{\uparrow}(\mathcal{F}^{\uparrow})^{\downarrow}=f{\uparrow}{\downarrow}(\mathcal{F}^{\uparrow\downarrow})=f(\mathcal{F}^{\uparrow\downarrow}).$$

Последнее равенство обеспечивает требуемое.

(4) Если $f:X{\downarrow}\to Y{\downarrow}$ — экстенсиональное отображение и $\mathcal{F}$ — проультрафильтр, то $\mathcal{F}^{\uparrow}$ — ультрафильтр в X внутри $V^{(B)}$. Следовательно, $f{\uparrow}(\mathcal{F}^{\uparrow})$ — ультрафильтр в Y внутри $V^{(B)}$. Тем самым $f{\uparrow}(\mathcal{F}^{\uparrow})^{\downarrow}$ — проультрафильтр. Остается заметить, что $f{\uparrow}(\mathcal{F}^{\uparrow})^{\downarrow}=f(\mathcal{F}^{\uparrow\downarrow})=f(\mathcal{F})$ в силу (3). ▷

§ 2. Циклические монады, существенные и проидеальные точки

2.0. В этом параграфе дается признак цикличности фильтра и вводятся связанные с ним необходимые для дальнейшего понятия.

2.1. Монаду $\mu(\mathscr{F})$ фильтра $\mathscr{F}$ называют *циклической*, если она совпадает со своей циклической оболочкой $\operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))$.

2.2. Нестандартный критерий цикличности фильтра. *Стандартный фильтр является циклическим в том и только том случае, если циклична его монада.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathscr{F}$ — стандартный фильтр. Допустим, что он циклический. Возьмем внутреннее множество Ξ и внутреннее разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ точек монады $\mu(\mathscr{F})$. По условию у $\mathscr{F}$ имеется базис $\mathscr{G}$ из циклических множеств и, стало быть, $\mu(\mathscr{F})=\bigcap\{G:G\in{}^\circ\mathscr{G}\}$, где, как обычно, ${}^\circ\mathscr{G}$ — множество стандартных элементов $\mathscr{G}$. Если x — перемешивание $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, то x лежит в каждом стандартном G из $\mathscr{G}$ (ибо $x_\xi\in G$ при $\xi\in\Xi$). Тем самым, $\mu(\mathscr{F})\supset\operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))\supset\mu(\mathscr{F})$.

Если заранее известно, что монада $\mu(\mathscr{F})$ — циклическое внешнее множество, то, взяв бесконечно малый элемент $F\in\mathscr{F}$ (т. е. такой, что $F\subset\mu(\mathscr{F})$), видим, что $F_0:=\operatorname{mix}(F)\subset\operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))\subset\mu(\mathscr{F})$. Значит, внутреннее множество F_0 бесконечно мало и лежит в $\mathscr{F}$. Итак, $(\forall^{\mathrm{st}}F\in\mathscr{F})\,(\exists F_0\in\mathscr{F})\,(F_0=\operatorname{mix}(F_0)\wedge F\supset F_0)$. По принципу Лейбница выводим, что $\mathscr{F}$ обладает циклическим базисом. $\triangleright$

2.3. Теорема. *Для стандартного фильтра $\mathscr{F}$ в $X\!\downarrow$ положим*

$$\mathscr{F}\!\uparrow\downarrow:=\widetilde{\{F\!\uparrow\downarrow:F\in\mathscr{F}\}}.$$

Тогда $\operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))=\mu(\mathscr{F}\!\uparrow\downarrow)$ и $\mathscr{F}\!\uparrow\downarrow$ — наибольший циклический фильтр, более грубый, чем $\mathscr{F}$.

$\triangleleft$ Ясно, что $\mathscr{F}\!\uparrow\downarrow\subset\mathscr{F}$ и, значит, с учетом 2.2 $\mu(\mathscr{F}\!\uparrow\downarrow)\supset\mu(\mathscr{F})$ и $\mu(\mathscr{F}\!\uparrow\downarrow)\supset\operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))$. Пусть теперь $x\in\mu(\mathscr{F}\!\uparrow\downarrow)$. По определению монады и свойствам перемешивания имеем

$$(\forall^{\mathrm{st}}F\in\mathscr{F})\,(\exists\,(b_\xi)_{\xi\in\Xi})\,(\exists\,(x_\xi)_{\xi\in\Xi})\,(\forall\xi\in\Xi)\,x_\xi\in F\wedge b_\xi x=b_\xi x_\xi.$$

Ясно, что тем самым выполняется

$$(\forall^{\mathrm{st\,fin}}\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F})\,(\exists\,(b_\xi)_{\xi\in\Xi})\,(\exists\,(x_\xi)_{\xi\in\Xi})\,(\forall F_0\in\mathscr{F}_0)\cdot$$
$$(\forall\xi\in\Xi)\,(x_\xi\in F\wedge b_\xi x_\xi=b_\xi x).$$

Применяя принцип идеализации в сильной форме, имеем

$$(\exists\,(b_\xi)_{\xi\in\Xi})\,(\exists\,(x_\xi)_{\xi\in\Xi})\,(\forall^{\mathrm{st}}F\in\mathscr{F})\,(\forall\xi\in\Xi)\,(x_\xi\in F\wedge b_\xi x_\xi=b_\xi x).$$

Последнее означает, что существуют элементы $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ из монады $\mu(\mathscr{F})$ такие, что $x=\sum_{\xi\in\Xi}b_\xi x_\xi$, т. е. $x\in\operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))$. Окончательно заключаем о равенстве $\mu(\mathscr{F}\!\uparrow\downarrow)=\operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))$.

Пусть теперь $\mathscr{G}$ — циклический фильтр, причем $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$. Тем самым, $\operatorname{mix}(\mu(\mathscr{G}))=\mu(\mathscr{G})\supset\operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))=\mu(\mathscr{F}\!\uparrow\downarrow)$. Итак, $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}\!\uparrow\downarrow$. $\triangleright$

2.4. Пусть x — внутренняя точка из $X\!\downarrow$. Определим стандартный фильтр (x) в $X\!\downarrow$ соотношением

$$(x):={}^*\{U\subset X\!\downarrow:x\in U\},$$

где * — *символ стандартизации*. Таким образом, (x) составлен в точности такими стандартными подмножествами $X\!\downarrow$, которые содержат x. Элемент x называют *существенной точкой* $X\!\downarrow$ (и пишут $x\in e(X)$), если $(x)\!\uparrow\downarrow$ — проультрафильтр в $X\!\downarrow$.

2.5. *Каждая точка x монады стандартного проультрафильтра $\mathscr{F}$ является существенной. При этом справедливы равенства*

$$\mathscr{F}=(x)^{\uparrow\downarrow}=(x)\!\uparrow\downarrow={}^*\widetilde{\{U\!\uparrow\downarrow:x\in U\wedge U\subset X\!\downarrow\}}.$$

$\lhd$ Так как (см. [2]) монада $\mu(\mathscr{F})$ по условию задевает монаду ультрафильтра (x), то $(x)\supset\mathscr{F}$. Следовательно, $(x)\uparrow\downarrow\supset\mathscr{F}\uparrow\downarrow=\mathscr{F}$. На основании 1.12 выводим $\mathscr{F}=(x)\uparrow\downarrow$. В силу 1.5 имеет место равенство $(x)\uparrow\downarrow^{\uparrow}=(x)^{\uparrow}$. Значит, из-за 1.13 x — существенная точка. Наконец, $(x)^{\uparrow\downarrow}=\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}=\mathscr{F}=(x)\uparrow\downarrow$. $\rhd$

2.6. *Образ существенной точки при экстенсиональном отображении — существенная точка в образе.*

$\lhd$ Пусть x — существенная точка $X\downarrow$ и $f:X\downarrow\to Y\downarrow$ — экстенсиональное отображение. Имеется проультрафильтр $\mathscr{F}$ такой, что $x\in\mu(\mathscr{F})$. Ясно, что $f(x)\in f(\mu(\mathscr{F}))=\mu(f(\mathscr{F}))$. В самом деле, с учетом сильной идеализации

$$y\in\mu(f(\mathscr{F}))\leftrightarrow(\forall^{st}F\in\mathscr{F})\,y\in f(F)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall^{st\,fin}\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F})\,(\exists x)\,(\forall F\in\mathscr{F}_0)\,x\in F\wedge y=f(x)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\exists x)\,(\forall^{st}F\in\mathscr{F})\,x\in F\wedge y=f(x)\leftrightarrow(\exists x\in\mu(\mathscr{F}))\,y=f(x)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow y\in f(\mu(\mathscr{F})).$$

Остается сослаться на 1.14. $\rhd$

2.7. *Пусть E — некоторое стандартное множество и X — стандартный элемент $V^{(B)}$. Рассмотрим произведение $X^{E^{\wedge}}$ внутри $V^{(B)}$, где $E^{\wedge}$ — стандартное имя E в $V^{(B)}$. Если x — существенная точка $X^{E^{\wedge}}\downarrow$, то для всякого стандартного $e\in E$ точка $x\downarrow(e)$ — существенная в $X\downarrow$.*

$\lhd$ Раз $x\in X^{E^{\wedge}}\downarrow$, то $[x:E^{\wedge}\to X]=1$, т. е. $x\downarrow:E\to X\downarrow$ и для всякого $e\in E$ будет $[x\downarrow(e)=x(e^{\wedge})]=1$ по определению спуска $x\downarrow$.

Рассмотрим отображение, переводящее элемент $x\in X^{E^{\wedge}}\downarrow$ в точку $x(e^{\wedge})$ из $X\downarrow$ для фиксированного стандартного $e\in E$. Ясно, что для $x_1,\ x_2\in X^{E^{\wedge}}\downarrow$ верно

$$[x_1=x_2]=\left[(\forall e\in E^{\wedge})\,x_1(e)=x_2(e)\right]=\bigwedge_{e\in E}\left[x_1(e^{\wedge})=x_2(e^{\wedge})\right]\leqslant$$
$$\leqslant\left[x_1(e^{\wedge})=x_2(e^{\wedge})\right],$$

т. е. введенное стандартное отображение экстенсионально. На основании 2.8 заключаем, что $x(e^{\wedge})$ — существенная точка в $X\downarrow$. Осталось вспомнить, что $x\downarrow(e)=x(e^{\wedge})$ по определению спуска. $\rhd$

2.8. *Пусть $\mathscr{F}$ — циклический фильтр в $X\downarrow$ и ${}^{e}\mu(\mathscr{F}):=\mu(\mathscr{F})\cap e(X)$ — множество существенных точек его монады. Тогда*

$${}^{e}\mu(\mathscr{F})={}^{e}\mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}).$$

$\lhd$ Пусть $x\in{}^{e}\mu(\mathscr{F})$. Значит, x лежит в монаде некоторого проультрафильтра $\mathscr{G}$. Отсюда $\mu(\mathscr{G})\cap\mu(\mathscr{F})\neq\varnothing$ и, стало быть, $\mathscr{G}\supset\mathscr{F}$. С учетом 1.10 $\mathscr{G}^{\uparrow\downarrow}\supset\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}$ и $x\in\mu(\mathscr{G})\subset\mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow})$. Если теперь известно, что $x\in{}^{e}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow)$, то имеется ультрафильтр $\mathscr{G}$ в X внутри $V^{(B)}$ такой, что $x\in\mu(\mathscr{G}^{\downarrow})$ и $\mathscr{G}\supset\mathscr{F}^{\uparrow}$. Поскольку $\mathscr{F}=\mathscr{F}\uparrow\downarrow\subset\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}\subset\mathscr{G}^{\downarrow}$ в силу 1.7, то $\mu(\mathscr{F})\supset\mu(\mathscr{G}^{\downarrow})$. Следовательно, $x\in{}^{e}\mu(\mathscr{F})$. $\rhd$

2.9. Пусть A — подмножество рассматриваемого нами спуска $X\downarrow$. Множество $(X\setminus A\uparrow)\downarrow$ называют *продополнением* или *циклическим дополнением* A и обозначают A^{c}. Точку $x\in X\downarrow$ называют *проидеальной*, если x лежит в продополнении каждого конечного стандартного подмножества $X\downarrow$. Совокупность всех проидеальных точек $X\downarrow$ обозначаем $p(X)$.

2.10. *Если у множества $X\downarrow$ нет проидеальных точек, то X — конечное множество внутри $V^{(B)}$.*

$\lhd$ По принципу идеализации имеется конечное стандартное множество Y в $X\downarrow$ такое, что $Y^{c}=\varnothing$. Итак $[X\setminus Y\uparrow=\varnothing\uparrow]=1$, т. е. $X=Y\uparrow$. $\rhd$

2.11. *Если X — бесконечное множество внутри $V^{(B)}$, то проидеальные точки $X{\downarrow}$ составляют циклическую монаду. Подъем циклического фильтра с монадой $p(X)$ — это фильтр дополнений конечных подмножеств X внутри $V^{(B)}$.*

$\lhd$ Продополнение конечных подмножеств $X{\downarrow}$ составляют базис фильтра. В самом деле, раз $(Y\cup Z){\uparrow}{\downarrow}\supset Y{\uparrow}{\downarrow}\cup Z{\uparrow}{\downarrow}$, то $(Y\cup Z){\uparrow}\supset Y{\uparrow}\cup Z{\uparrow}$ и $[X\setminus(Y\cup Z){\uparrow}\subset X\setminus(Y{\uparrow}\cup Z{\uparrow})]=1$. Значит, $(Y\cup Z)^c\subset(X\setminus Y{\uparrow}){\downarrow}\cap(X\setminus Z{\uparrow}){\downarrow}=$ $=Y^c\cap Z^c$. Таким образом, на основании 2.2 $p(X)$ — это циклическая монада. Обозначим ${}_p\mathscr{F}$ фильтр с монадой $p(X)$, т. е. фильтр продополнений конечных множеств $X{\downarrow}$. Пусть далее ${}_{\mathrm{cf}}\mathscr{F}(X)$ — фильтр дополнений конечных множеств в X внутри $V^{(B)}$ (= коконечный фильтр в X). С учетом 1.4 имеем

$$[Y\in{}_{\mathrm{cf}}\mathscr{F}(X)]=[(\exists Z\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X))\,Y\supset X\setminus Z]=$$
$$=\bigvee_{A\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X\downarrow)}[Y\supset X\setminus A{\uparrow}]=\bigvee_{A\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X\downarrow)}[Y\supset A^c{\uparrow}]=$$
$$=\bigvee_{Z\in{}_p\mathscr{F}}[Y\supset Z{\uparrow}]=[Y\in{}_p\mathscr{F}^{\uparrow}].$$

Стало быть, ${}_{\mathrm{cf}}\mathscr{F}(X)={}_p\mathscr{F}^{\uparrow}$. $\rhd$

§ 3. Изображения компактных и предкомпактных пространств

3.0. В этом параграфе мы применим циклические монады для получения нужных нам описаний спусков — изображений топологических пространств в булевозначных моделях теории множеств. Идейно приводимые ниже результаты тесно примыкают к классическим работам А. Робинсона [1] и В. Люксембурга [2]. Ниже всюду для простоты рассматривается внутреннее (в смысле $V^{(B)}$) непустое равномерное пространство $(X,\mathscr{U})$. Обычное предположение «стандартности антуража» действует и в этом параграфе, т. е., в частности, при использовании нестандартных методов B, X, $\mathscr{U}$ и т. п. считаются стандартными множествами. Как это принято, пишем $x\approx y$ вместо $(x,y)\in\mu(\mathscr{U}^{\downarrow})$.

3.1. Равномерное пространство $(X{\downarrow},\mathscr{U}^{\downarrow})$ называют *прокомпактным*, если $(X,\mathscr{U})$ компактно внутри $V^{(B)}$. Аналогичный смысл вкладывают в термин *«прополная ограниченность»* и т. п. Иногда используют термины типа «циклическая компактность».

3.2. Нестандартные критерии прокомпактности. *Для стандартного пространства X эквивалентны утверждения:*

(1) *$X{\downarrow}$ — прокомпактное пространство;*

(2) *каждая существенная точка $X{\downarrow}$ околостандартна;*

(3) *каждая существенная идеальная точка $X{\downarrow}$ околостандартна.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2). Пусть x — существенная точка $X{\downarrow}$. Тогда x лежит в монаде проультрафильтра $(x)^{\uparrow\downarrow}$. Значит, внутри $V^{(B)}$ верно, что найдется элемент $y\in X$ такой, что $(x)^{\uparrow}$ сходится к y. В силу принципа максимума и принципа Лейбница (во внутреннем мире) можно заключить, что имеется стандартный элемент $y\in X{\downarrow}$ такой, что $(x)^{\uparrow\downarrow}\supset\mathscr{U}^{\downarrow}(y)$. Отсюда вытекает, что $\mu((x)^{\uparrow\downarrow})\subset\mathscr{U}^{\downarrow}(y)$ и, стало быть, $x\approx y$. Иными словами, x — околостандартная точка.

(2) $\to$ (3). Очевидно.

(3) $\to$ (1). Следует убедиться, что ультрафильтр в X внутри $V^{(B)}$ имеет точку прикосновения. Будем, не ограничивая общности, считать, что $\mathscr{F}$ не является главным ультрафильтром. Следовательно, $\mathscr{F}$ тоньше фильтра дополнений конечных множеств внутри $V^{(B)}$. Привлекая 2.6, видим, что $\mu(\mathscr{F}^{\downarrow})\subset p(X)$. Если $x\in\mu(\mathscr{F}^{\downarrow})$, то на основании 2.8 $\mathscr{F}=$ $=(x)^{\uparrow}$ и, кроме того, x — существенная точка. По условию такая точка околостандартна, т. е. имеется стандартный $y\in X{\downarrow}$, для которого $\mathscr{U}^{\downarrow}(y)\cap$ $\cap\,\mu(\mathscr{F}^{\downarrow})\neq\varnothing$. Тем самым, y — точка прикосновения $\mathscr{F}$ внутри $V^{(B)}$. $\rhd$

3.3. Из приведенной теоремы 3.2 легко видеть отличия булевозначного критерия прокомпактности от привычного: «компактное пространство — это пространство с околостандартными точками». Наличие колоссального количества прокомпактных и некомпактных пространств обеспечивает разнообразие примеров нестандартных и неидеальных точек. Отметим здесь же, что совместное применение 3.2 и 2.7 позволяет, конечно же, дать нестандартное доказательство естественного аналога теоремы Тихонова для произведения прокомпактных пространств — «спуска теоремы Тихонова в $V^{(B)}$».

3.4. Нестандартный критерий пропредкомпактности. *Стандартное пространство является спуском вполне ограниченного равномерного пространства в том и только том случае, если каждая его существенная точка предоколостандартна.*

$\lhd$ $\rightarrow$ Пусть x — существенная точка $X{\downarrow}$. Тогда $(x)^{\uparrow}$ — ультрафильтр внутри $V^{(B)}$ и, значит, $(x)^{\uparrow}$ является фильтром Коши в X в силу полной ограниченности X в $V^{(B)}$. Спуск фильтра Коши — фильтр Коши в спуске. Значит, x — элемент монады фильтра Коши, т. е. x — предоколостандартная точка.

$\leftarrow$ Возьмем ультрафильтр $\mathcal{F}$ в X внутри $V^{(B)}$. Нужно установить, что $\mathcal{F}$ — фильтр Коши в $V^{(B)}$. Возьмем точку x из монады спуска $\mathcal{F}^{\downarrow}$. Тогда x существенна и, стало быть, предоколостандартна. Значит, микрогало x, т. е. множество $\mathcal{U}^{\downarrow}(x)$,— это монада фильтра Коши. Тем самым, $\mathcal{F}^{\downarrow}$ — фильтр Коши. $\rhd$

§ 4. Порядковая сходимость

4.0. В этом параграфе циклические монады применяются для описания o-сходимости в K-пространстве Y. Для экономии слов ограничимся рассмотрением фильтров, содержащих порядковые интервалы (или, что то же самое, фильтров с ограниченными монадами). Помимо этого, в соответствии с названной целью K-пространство Y считается расширенным. На основании теоремы Гордона [15] пространство Y можно представлять себе канонически реализованным как спуск $\mathcal{R}{\downarrow}$ элемента $\mathcal{R}$, представляющего поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ в булевозначном универсуме $V^{(B)}$, построенном над *базой* B пространства Y. Условимся символом E обозначать порядковый *фильтр единиц* в Y, т. е. $\mathrm{E} := \{\varepsilon \in Y_+ : [\varepsilon = 0] = 0\}$. Запись $x \approx y$ выражает *бесконечную близость* элементов x, $y \in Y$, порожденную спуском обычной топологии $\mathcal{R}$ в $V^{(B)}$, т. е. $x \approx y \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathrm{E})\, |x-y| < \varepsilon$. Здесь и в дальнейшем считается, что $a < b$ для a, $b \in Y$, если $[a<b]=1$, т. е. $a > b \leftrightarrow a-b \in \mathrm{E}$. Таким образом, тут имеется отступление от соглашений теории упорядоченных векторных пространств. Разумеется, это обстоятельство вызвано необходимостью соблюдать принципы введения обозначений при спусках и подъемах.

4.1. *Пусть* ${}^{\approx}Y$ — *околостандартная часть* Y, т. е. микрогало внешнего множества стандартных элементов Y. Для $y \in {}^{\approx}Y$ символом ${}^{\circ}y$ (или $\mathrm{st}(y)$) указана *стандартная часть* y, т. е. единственный стандартный элемент, бесконечно близкий к y.

4.2. *Справедливы утверждения:*

(1) *для* x, $y \in {}^{\approx}Y$ *и* $\alpha \in {}^{\approx}\mathbf{R}$ *верно*

$$ {}^{\circ}(x+y) = {}^{\circ}x + {}^{\circ}y;\ {}^{\circ}(x \vee y) = {}^{\circ}x \vee {}^{\circ}y; $$
$$ {}^{\circ}(\alpha x) = {}^{\circ}\alpha\, {}^{\circ}x;\ x \leqslant y \rightarrow {}^{\circ}x \leqslant {}^{\circ}y; $$

(2) *при* $z \in {}^{\circ}Y$ *и* $y \in {}^{\approx}Y$ *выполняется*

$$ {}^{\circ}y \leqslant z \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\, y < z + \varepsilon \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\, y \leqslant z + \varepsilon; $$

(3) *существенная точка Y имеет стандартную часть в том и только том случае, если она лежит в некотором стандартном интервале.*

◁ (1) Операции в Y суть спуски операций в $\mathscr{R}$, где они очевидно непрерывны.

(2) В силу уже установленного имеем

$$ {}^{\circ}y \leqslant z \to (\forall^{st}\varepsilon > 0)\,|y - {}^{\circ}y| < \varepsilon \wedge {}^{\circ}y \leqslant z \to (\forall^{st}\varepsilon > 0)\, y < z + \varepsilon \to $$
$$ \to (\forall^{st}\varepsilon > 0)\, y \leqslant z + \varepsilon \to (\forall^{st}\varepsilon > 0)\, {}^{\circ}y \leqslant {}^{\circ}(z+\varepsilon) \to (\forall^{st}\varepsilon > 0)\, {}^{\circ}y \leqslant $$
$$ \leqslant z + \varepsilon \to {}^{\circ}y \leqslant z. $$

(3) Если y околостандартно, то в силу (2), очевидно, $y \in [{}^{\circ}y - 1^{\wedge}, {}^{\circ}y + 1^{\wedge}]$. Наоборот, если существенная точка y лежит в стандартном интервале $[a, b]$, то в силу прокомпактности $[a, b]$ на основании 3.2 y околостандартна. ▷

4.3 *Для каждого фильтра $\mathscr{F}$ имеют место соотношения*

$$ \inf_{F \in \mathscr{F}} \sup F = \inf_{F \in \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}} \sup F = \inf_{F \in \mathscr{F}^{\uparrow}} \sup F = \inf_{F \in \mathscr{F}\uparrow\downarrow} \sup F; $$

$$ \sup_{F \in \mathscr{F}} \inf F = \sup_{F \in \mathscr{F}\Updownarrow} \inf F = \sup_{F \in \mathscr{F}^{\uparrow}} \inf F = \sup_{F \in \mathscr{F}^{\Updownarrow}} \inf F. $$

◁ Требуемые равенства очевидны. В самом деле (см. [16, 17]) имеем

$$ \inf_{F \in \mathscr{F}^{\uparrow}} \sup F = \inf \{\sup F : F \in \mathscr{F}^{\uparrow}\} = \inf \{\sup F \uparrow : F \in \mathscr{F}\} \uparrow, $$

ибо справедливы следующие соотношения для оценок истинности:

$$ [z \in \{\sup F : F \in \mathscr{F}^{\uparrow}\}] = [(\exists F \in \mathscr{F}^{\uparrow})\, z = \sup F] = \bigvee_{F \in \mathscr{F}} [z = \sup F \uparrow] = $$
$$ = [(\exists y \in \{\sup F \uparrow : F \in \mathscr{F}\} \uparrow)\, z = y] = [z \in \{\sup F \uparrow : F \in \mathscr{F}\} \uparrow]. $$

Остается вспомнить, что $\sup F = \sup F\uparrow = \sup F\uparrow\downarrow$, и привлечь 2.3. ▷

4.4. **Теорема.** *Для стандартного фильтра $\mathscr{F}$ в Y и стандартного $z \in Y$ справедливы утверждения*

(1) $\inf_{F \in \mathscr{F}} \sup F \leqslant z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}\Updownarrow))\, {}^{\circ}y \leqslant z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}\Updownarrow))\, {}^{\circ}y \leqslant z$

(2) $\sup_{F \in \mathscr{F}} \inf F \geqslant z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}\Updownarrow))\, {}^{\circ}y \geqslant z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}\Updownarrow))\, {}^{\circ}y \geqslant z$;

(3) $\inf_{F \in \mathscr{F}} \sup F \geqslant z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}\Updownarrow))\, {}^{\circ}y \geqslant z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}\Updownarrow))\, {}^{\circ}y \geqslant z$;

(4) $\sup_{F \in \mathscr{F}} \inf F \leqslant z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}\Updownarrow))\, {}^{\circ}y \leqslant z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}\Updownarrow))\, {}^{\circ}y \leqslant z$;

(5) $\mathscr{F}^{\circ} \to z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}\Updownarrow))\, y \approx z \leftrightarrow ((\forall y \in \mu(\mathscr{F}^{\Updownarrow}))\, y \approx z$.

Здесь ${}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow) := \mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow) \cap {}^{\approx}Y$ *и, как обычно,* ${}^{e}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow)$ — *множество существенных точек монады* $\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow)$, *т. е.* ${}^{e}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow) = \mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow) \cap {}^{e}(\mathscr{R})$.

◁ Достаточно доказать (1) и (3).

(1) Допустим, что $\inf_{F \in \mathscr{F}} \sup F \leqslant z$, и с учетом включения ${}^{e}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow) \subset {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow)$ рассмотрим $y \in {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow)$. Если взять произвольно $y' \in \mu(\mathscr{F})$, то для всякого стандартного ограниченного $F \in \mathscr{F}$ будет $y' \leqslant \sup F$. На основании 2.3 при $y' \in \mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow)$ также будет $y' \leqslant \sup F$. Значит, для всех стандартных F из $\mathscr{F}$ выполнено ${}^{\circ}y \leqslant \sup F$. По принципу Лейбница то же соотношение справедливо при любых $F \in \mathscr{F}$. Значит, ${}^{\circ}y \leqslant \inf_{F \in \mathscr{F}} \sup F \leqslant z$.

Пусть теперь известно, что для каждого $y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow)$ верно ${}^{\circ}y \leqslant z$ (последнее, конечно же, выполнено, если $(\forall y \in {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y \leqslant z$). Рассмотрим произвольный стандартный проультрафильтр, содержащий $\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}$. Выберем какой-нибудь бесконечно малый элемент U указанного проультрафильтра $\mathscr{G}$. По условию $(\forall u \in U)\, {}^{\circ}u \leqslant z$, ибо с учетом 2.8 $\mu(\mathscr{G}) \subset {}^{e}\mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}) = {}^{e}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow)$. На основании 4.3 для каждого стандартного $\varepsilon \in \mathrm{E}$

будет $(\forall u \in U)\, u < z + \varepsilon$. Иными словами, $(\forall^{st} \varepsilon \in \mathrm{E})\,(\exists U \in \mathscr{G})\,(\forall u \in U)\; u < z + \varepsilon$. Учитывая стандартность z и прочих параметров, привлекая принцип Лейбница, получаем

$$(\forall \varepsilon \in \mathrm{E})\,(\exists U \in \mathscr{G}) \sup U \leqslant z + \varepsilon \rightarrow \bigwedge_{\varepsilon \in \mathrm{E}} [(\exists U \in \mathscr{G}^{\uparrow}) \sup U \leqslant z + \varepsilon] = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow [(\forall \varepsilon > 0)(\exists U \in \mathscr{G}^{\uparrow}) \sup U \leqslant z + \varepsilon] = 1 \rightarrow \Big[(\forall \varepsilon > 0) \inf_{U \in \mathscr{G}^{\uparrow}} \sup U \leqslant z + \varepsilon\Big] = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \Big[\inf_{U \in \mathscr{G}^{\uparrow}} \sup U \leqslant z\Big] = 1 \rightarrow \inf_{U \in \mathscr{G}} \sup U \leqslant z.$$

Вновь применяя принцип Лейбница, видим, что для любого проультрафильтра $\mathscr{G}$, содержащего $\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}$, будет $\inf_{U \in \mathscr{G}} \sup U \leqslant z$. В поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ для фильтра $\mathscr{A}$ и числа t ясно, что

$$\inf_{A \in \mathscr{A}} \sup A \leqslant t \leftrightarrow (\forall \mathscr{G} \supset \mathscr{A}) \Big(\mathscr{G} - \textit{ультрафильтр} \rightarrow \inf_{G \in \mathscr{G}} \sup G \leqslant t\Big)$$

(простое нестандартное доказательство легко извлечь, например, из [18]). Таким образом, по принципу переноса булевозначного анализа

$$\Big[\inf_{F \in \mathscr{F}^{\uparrow}} \sup F \leqslant z\Big] = \bigwedge_{\substack{\mathscr{G} \supset \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow} \\ \mathscr{G} - \textit{проультрафильтр}}} \Big[\inf_{G \in \mathscr{G}^{\uparrow}} \sup G \leqslant z\Big] = 1.$$

Остается привлечь 4.3.

(3) Пусть сначала в более широком множестве $\cdot\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow)$ есть элемент y, для которого ${}^{\circ}y \geqslant z$. При всяком стандартном $F \in \mathscr{F}$ выполнено $y \in F\uparrow\downarrow$. Значит, для $\varepsilon \in {}^{\circ}\mathrm{E}$ будет $y > z - \varepsilon$ и $\sup F = \sup F\uparrow\downarrow > z - \varepsilon$. По принципу Лейбница заключаем: $(\forall^{st} F \in \mathscr{F})\,(\forall^{st} \varepsilon > 0) \sup F \geqslant z$, т. е. $(\forall F \in \mathscr{F}) \sup F \geqslant z$ и $\inf_{F \in \mathscr{F}} \sup F \geqslant z$.

Для доказательства еще не проверенных соотношений, прежде всего, заметим, что в силу свойств верхнего предела в $\mathbf{R}$, принципа переноса булевозначного анализа и предложения 4.3 выполнено

$$\Big[(\exists \mathscr{G})\big(\mathscr{G} - \textit{ультрафильтр в } \mathscr{R} \wedge \mathscr{G} \supset \mathscr{F}^{\uparrow}\big) \wedge \inf_{G \in \mathscr{G}} \sup G \geqslant z\Big] = 1.$$

На основании принципа максимума имеется проультрафильтр $\mathscr{G}$ такой, что $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}$ и $\inf_{G \in \mathscr{G}} \sup G \geqslant z$. Используя принципы переноса и идеализации с учетом 4.3, последовательно получаем

$$(\forall^{st} G \in \mathscr{G}) \sup G \geqslant z \leftrightarrow (\forall^{st} G \in \mathscr{G})[\sup G\uparrow \geqslant z] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{st} G \in \mathscr{G})[(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists g \in G\uparrow)\, g > z - \varepsilon] = 1 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{st} G \in \mathscr{G})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists g \in G\uparrow\downarrow)\, g > z - \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{st} G \in \mathscr{G})\,(\forall^{st} \varepsilon > 0)\,(\exists g \in G\uparrow\downarrow)\, g > z - \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{st\,fin} \mathscr{G}_0 \subset \mathscr{G})\,(\forall^{st\,fin} \mathrm{E}_0 \subset \mathrm{E})\,(\exists g)$$
$$(\forall G \in \mathscr{G}_0)\,(\forall \varepsilon \in \mathrm{E}_0)\,(g \in G\uparrow\downarrow \wedge g > z - \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists g)\,(\forall^{st} G \in \mathscr{G})\,(\forall^{st} \varepsilon > 0)\,(g \in G\uparrow\downarrow \wedge g > z - \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists g \in \mu(\mathscr{G}^{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}g \geqslant z \leftrightarrow (\exists g \in \mu(\mathscr{G}))\, {}^{\circ}g \geqslant z.$$

Остается привлечь 2.8 и заметить, что $\mu(\mathscr{G}) \subset {}^{e}\mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}) = {}^{e}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow) \subset$ $\subset \cdot\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow)$. $\triangleright$

г. Новосибирск

Статья поступила
23 января 1985 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Robinson A.* Non-standard analysis.— Amsterdam; London: North Holland Publ., 1970.
2. *Luxemburg W. A. J.* A general theory of monads.— In: Applications of model theory to algebra, analysis and probability. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1966, p. 18—86.
3. *Кутателадзе С. С.* Спуски и подъемы.— Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 521—524.
4. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы в булевозначных моделях теории множеств.— Сиб. мат. журн., 1983, т. 24, № 5, с. 109—122.
5. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее применения.— Новосибирск: Наука, 1985.
6. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Записки по булевозначному анализу.— Новосибирск: НГУ, 1984.
7. *Takeuti G.* Two applications of logic to mathematics.— Tokyo: Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, 1978.
8. *Takeuti G.* C*-algebras and Boolean-valued analysis.— Japan J. Math., 1983, v. 9, N 2, p. 207—248.
9. *Nelson E.* Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis.— Bull. Amer. Math. Soc., 1977, v. 83, N 6, p. 1165—1198.
10. *Девис М.* Прикладной нестандартный анализ.— М.: Мир, 1980.
11. *Звонкин А. К., Шубин М. А.* Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений.— Успехи мат. наук, 1984, т. 39, № 2, с. 77—127.
12. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа.— Новосибирск: Наука, 1984.
13. *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства.— Новосибирск: Наука, 1978.
14. *Кусраев А. Г.* Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей.— Докл. АН СССР, 1982, т. 267, № 5, с. 1049—1052.
15. *Гордон Е. И.* Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и *K*-пространства.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 4, с. 773—775.
16. *Гордон Е. И.* К теоремам о сохранении соотношений в *K*-пространствах.— Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 3, с. 55—65.
17. *Кусраев А. Г.* Некоторые применения теории булевозначных моделей в функциональном анализе.— Новосибирск, 1982, (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ИМ; 5).
18. *Кутателадзе С. С.* Инфинитезимальные касательные конусы.— Сиб. мат. журн., 1985, т. 26, № 6.