СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXVII, № 3 МАЙ — ИЮНЬ 1986

УДК 513.88

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ПРИЗНАКИ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ, ИЗОБРАЖАЮЩИХ ШАПКИ И ГРАНИ

Настоящая работа относится к весьма своеобразной геометрии выпуклых множеств в пространстве операторов. Конусы положительных операторов, как правило, лишены крайних лучей (а значит, и шапок), субдифференциалы, вообще говоря, некомпактны ни в одной локально выпуклой топологии, но в то же время восстанавливаются по собственным подмножествам своих границ Шоке [1—3]. Природа отмеченных эффектов, ограничивающих возможности непосредственного применения стандартных методов теории выпуклости, вскрывается в булевозначном анализе. Оказывается, что имеющиеся препятствия в известном смысле кажущиеся: их можно преодолеть за счет подходящего выбора булевозначной модели, в которой следует проводить исследование. Детализация отмеченного положения для задач изучения внутреннего строения субдифференциалов — сильно операторно выпуклых поточечно o-замкнутых и слабо порядково ограниченных множеств — проведена в [4] (см. также [5]). Цель настоящей статьи — ослабить условие ограниченности в духе теории шапок [6, 7]. Особенность развиваемого подхода состоит во введении операторных шапок, которые в нетривиальных ситуациях не являются таковыми в классическом смысле (хотя и совпадают с ними в скалярном случае). Даются критерии субдифференциалов, служащих шапками и гранями множеств операторов. При этом выявляется существенный эффект: грани (и крайние точки), образованные субдифференциалами, «экстенсиональны», а шапки нет. Точнее говоря, для изучения множеств операторов приспособлены не обычные шапки, а операторные, т. е. субдифференциалы, представляющие собой спуски — изображения скалярных шапок в подходящей модели теории множеств.

§ 1. Хорошо накрытые множества

1.1. Пусть X — вещественное векторное пространство, Y — расширенное K-пространство и U — операторно выпуклое поточечно o-замкнутое множество в пространстве $\mathscr{L}(X, Y)$ линейных операторов из X в Y. (Относительно терминологии см. [8]).

1.2. Подмножество C множества U называется *операторной шапкой* U или, более образно, *спущенной шапкой* U, если C — субдифференциал, т. е. слабо порядково ограниченное поточечно o-замкнутое операторно выпуклое множество, и, кроме того, для любых $x, y \in U$ и мультипликаторов $\alpha, \beta \in [0, 1_Y]$ в пространстве Y таких, что $\alpha + \beta = 1_Y$ и $\alpha x + \beta y \in C$, найдется элемент b базы $B := B(Y)$ пространства Y, для которого $bx \in bC$ и $b'y \in b'C$ (здесь, как обычно, $b' := 1_Y - b$ — *дополнительный проектор* к b).

1.3. Для множества $W \subset \mathscr{L}(X, Y)$ положим $W^{\uparrow} := \{A{\uparrow} : A \in W\}{\uparrow}$, где, как всегда, $\uparrow$ — *символ подъема* в отделимый булевозначный универсум $V^{(B)}$, построенный над B [5]. Таким образом, в частности, $A{\uparrow}$ — это отображение стандартного имени $X^{\wedge}$ пространства X в подъем $Y{\uparrow}$ рассматриваемого пространства Y, которое мы в соответствии с теоремой

Гордона будем каноническим образом отождествлять со *спуском* элемента $\mathscr{R}$ в $V^{(B)}$, изображающего поле вещественных чисел. Отметим, что $Y{\uparrow} = \mathscr{R}$ и $\mathscr{R}{\downarrow} = Y$.

1.4. Предложение. *Субдифференциал C служит операторной шапкой множества U в том и только в том случае, если $C^{\uparrow}$ — это шапка множества $U^{\uparrow}$ внутри $V^{(B)}$.*

◁ Используя правила осуществления спусков и подъемов, проводим следующие оценки истинности:

$$[C^{\uparrow} - \text{шапка } U^{\uparrow}] = [(\forall\alpha \geqslant 0)(\forall\beta \geqslant 0)(\forall x \in U^{\uparrow})(\forall y \in U^{\uparrow})$$
$$(\alpha + \beta = 1^{\wedge} \wedge \alpha x + \beta y \in C^{\uparrow}) \to (x \in C^{\uparrow} \vee y \in C^{\uparrow})] =$$
$$= \bigwedge_{\substack{\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0 \\ \alpha+\beta=1_Y}} \bigwedge_{\substack{x, y \in U \\ \alpha x + \beta y \in C}} [x{\uparrow} \in C^{\uparrow}] \vee [y{\uparrow} \in C^{\uparrow}].$$

Если C — спущенная шапка, то для мультипликаторов $\alpha, \beta \in [0, 1_Y]$ таких, что $\alpha + \beta = 1_Y$, и точек $x, y \in U$, удовлетворяющих условию $\alpha x + \beta y \in C$, найдется проектор $b \in B$, при котором $x \in bC$ и $y \in b'C$. Иначе говоря, для подходящих x' и y' из C будет $x = bx'$ и $y = b'y'$. Ясно, что

$$[x{\uparrow} \in C^{\uparrow}] \geqslant [x{\uparrow} \in (bC)^{\uparrow}] \wedge [(bC)^{\uparrow} = C^{\uparrow}] = [bC^{\uparrow} = C^{\uparrow}] \geqslant b;$$
$$[y{\uparrow} \in C^{\uparrow}] \geqslant [y{\uparrow} \in (b'C)^{\uparrow}] \wedge [(b'C)^{\uparrow} = C^{\uparrow}] = [b'C^{\uparrow} = C^{\uparrow}] \geqslant b'.$$

Стало быть, с учетом найденной оценки, $[C^{\uparrow} - \text{шапка } U^{\uparrow}] = 1_Y$.

Если, в свою очередь, известно, что $C^{\uparrow}$ — шапка $U^{\uparrow}$ внутри $V^{(B)}$, то при нужном выборе параметров α, β, x, y на основании проведенных вычислений имеем $[x{\uparrow} \in C^{\uparrow}] \vee [y{\uparrow} \in C^{\uparrow}] = 1_Y$. Значит, для подходящего $b \in B$ будет $[x{\uparrow} \in C^{\uparrow}] \geqslant b$ и $[y{\uparrow} \in C^{\uparrow}] \geqslant b'$. Отсюда в силу принципа максимума выводим существование x' и y' из $C^{\uparrow}{\downarrow}$ таких, что $[x{\uparrow} = x'] \geqslant b$ и $[y{\uparrow} = y'] \geqslant b'$, т. е. $bx{\uparrow} = bx'$ и $b'y{\uparrow} = b'y'$. Последнее как раз и означает, что $x \in bC$ и $y \in b'C$. ▷

1.5. Множество называют *хорошо накрытым*, если оно представимо в виде объединения своих спущенных шапок. *Операторным лучом* из x к y (или *Y-лучом*) называют множество $\{x + \alpha(y - x) \colon \alpha \in Y_+\}$ в пространстве $\mathscr{L}(X, Y)$.

1.6. Теорема. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *хорошо накрытое множество является поточечным о-замыканием сильно операторно выпуклой оболочки множества своих крайних точек и крайних операторных лучей;*

(2) *множество U хорошо накрыто в том и только в том случае, если хорошо накрыт конус H_U, составленный поточечными о-пределами экстенсиональных сетей элементов множества $\{(\alpha T, \alpha) \in \mathscr{L}(X, Y) \times Y \colon \alpha \geqslant 0, T \in U\}$.*

◁ (1) Пусть U — рассматриваемое множество. В силу сделанных допущений $U^{\uparrow}$ — выпуклое подмножество пространства $\mathscr{L}(X, Y)^{\uparrow}$, совпадающего, как легко видеть, с пространством $X^{\wedge\#}$ линейных форм над $X^{\wedge}$ внутри $V^{(B)}$. При этом $U^{\uparrow}$ замкнуто в мультинорме $\{T \to |Tx| \colon x \in X^{\wedge}\}$ внутри $V^{(B)}$. Используя известные критерии субдифференциалов [4, 5] и привлекая предложение 1.4, видим, что $U^{\uparrow}$ является хорошо накрытым внутри $V^{(B)}$. Стало быть, по соответствующей теореме Шоке [6] $U^{\uparrow}$ представляет собой выпуклое замыкание множества своих крайних точек и крайних лучей. Используя спуски, приходим к требуемому.

(2) Ясно, что подъем $\{(\alpha T, \alpha) \colon \alpha \geqslant 0, T \in U\}^{\uparrow}$ изображает коническую оболочку $U^{\uparrow} \times 1^{\wedge}$ внутри $V^{(B)}$. Отсюда видно, что интересующее нас множество H_U таково, что $H_U^{\uparrow}$ служит преобразованием Хермандера множества $U^{\uparrow}$ внутри $V^{(B)}$. Привлекая предложение 1.4 и известный скалярный результат [7], приходим к нужному заключению. ▷

§ 2. Признаки шапок

2.1. В связи с теоремой 1.6 развернутые признаки шапок достаточно формулировать для более удобного случая конусов положительных операторов.

2.2. Предложение. *Замкнутое множество C является шапкой конуса положительных элементов в топологическом упорядоченном векторном пространстве в том и только в том случае, если для всяких $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$ таких, что $c_1 + c_2 \in C$, найдутся $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, удовлетворяющие соотношениям $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $c_1 \in \alpha_1 C$, $c_2 \in \alpha_2 C$.*

$\triangleleft\!\rightarrow$ Пусть сначала известно, что C — это шапка, $c = c_1 + c_2$, $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$ и $c \in C$. Предположим, что при любом $\lambda > 1$ будут $\lambda c_1 \notin C$ и $\lambda c_2 \notin C$. Тогда по определению шапки $t := \lambda^{-1}(\lambda c_1) + (1 - \lambda^{-1})\lambda/(\lambda - 1)c_2 \notin C$. В то же время $t = c$, что означает ложность сделанного допущения. Итак, имеется $\lambda > 1$ такое, что один из элементов λc_1 и λc_2 лежит в C. Для определенности считаем, что это λc_1. Обозначим $\lambda_0 := \sup\{\lambda > 0: \lambda c_1 \in C\}$. Тогда $\lambda_0 > 1$ и при каждом $\lambda > \lambda_0$ верно $\lambda c_1 \notin C$. Поскольку $\lambda^{-1}(\lambda c_1) + (1 - \lambda^{-1})\lambda/(\lambda - 1)c_2 \in C$, то $\lambda/(\lambda - 1)c_2 \in C$ как только $\lambda > \lambda_0$. В силу замкнутости C заключаем $\lambda_0/(\lambda_0 - 1)c_2 \in C$. Отсюда $c_2 \in (\lambda_0 - 1)/\lambda_0 C$ и $c_1 \in 1/\lambda_0 C$.

$\leftarrow$ Пусть теперь для $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и $c_1, c_2 \geqslant 0$ справедливо $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 \in C$, и все же c_1, $c_2 \notin C$. Если выполнено сформулированное условие, то $\alpha_1 c_1 = \gamma_1 d_1$, $\alpha_2 c_2 = \gamma_2 d_2$ при некоторых $\gamma_1 \geqslant 0$, $\gamma_2 \geqslant 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ и $d_1, d_2 \in C$. Поскольку $c_1 = \gamma_1/\alpha_1 d_1$ и $c_2 = \gamma_2/\alpha_2 d_2$, то $\gamma_1/\alpha_1 > 1$ и $\gamma_2/\alpha_2 > 1$. В то же время неравенство $\gamma_1/\alpha_1 > 1$ обеспечивает соотношение $\gamma_2 = 1 - \gamma_1 < 1 - \alpha_1 = \alpha_2$. Получаем противоречие, т. е. хотя бы одна из точек c_1 или c_2 попадает в C. Окончательно заключаем, что C — шапка. $\triangleright$

2.3. Предложение. *Пусть p — положительный монотонный сублинейный функционал на упорядоченном векторном пространстве (X, X_+). Субдифференциал ∂p служит шапкой конуса $X_+^{\#}$ положительных форм на X в том и только в том случае, если выполнено каждое из следующих утверждений:*

(1) $\inf\{p(z)\colon z \geqslant x_1,\ z \geqslant x_2\} = p(x_1) \vee p(x_2)$ *при любых* $x_1, x_2 \in X$;

(2) *конический отрезок* $\{p < 1\}$ *фильтрован по возрастанию;*

(3) $\bigcap\limits_{\substack{x_1, x_2 \in \{p<1\} \\ \varepsilon>0}} [x_1, \rightarrow) \cap [x_2, \rightarrow) \cap \{p \leqslant 1 + \varepsilon\} \neq \varnothing$.

$\triangleleft$ Пусть сначала известно, что ∂p — это шапка в $X_+^{\#}$. Из общих правил субдифференциального исчисления выводим

$$\partial((x_1, x_2) \rightarrow \inf\{p(z)\colon z \geqslant x_1,\ z \geqslant x_2\}) =$$
$$= \{(l_1, l_2) \in X^{\#2}\colon l_1 \geqslant 0,\ l_2 \geqslant 0,\ l_1 + l_2 \in \partial p\};$$
$$\partial((x_1, x_2) \rightarrow p(x_1) \vee p(x_2)) =$$
$$= \{(\alpha_1 l_1,\ \alpha_2 l_2)\colon \alpha_1 \geqslant 0,\ \alpha_2 \geqslant 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ l_1 \in \partial p,\ l_2 \in \partial p\}.$$

Остается учесть предложение 2.2, чтобы сделать вывод о справедливости импликаций $(1) \rightarrow (2)$, $(1) \rightarrow (3)$.

Теперь для завершения доказательства достаточно проверить соотношения $(2) \rightarrow (1)$ и $(3) \rightarrow (1)$.

Итак, в условиях (2) пусть $t := p(x_1) \vee p(x_2)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ будет $(t + \varepsilon)^{-1} x_1 \in \{p < 1\}$ и $(t + \varepsilon)^{-1} x_2 \in \{p < 1\}$. По условию для некоторого $z \in X$ выполнено $z \geqslant (t + \varepsilon)^{-1} x_1$, $z \geqslant (t + \varepsilon)^{-1} x_2$ и $p(z) < 1$. Положим $z_0 := (t + \varepsilon) z$. Видно, что $p(z_0) = (t + \varepsilon) p(z) < t + \varepsilon$. Отсюда выводим

$$p(x_1) \vee p(x_2) \leqslant \inf\{p(z)\colon z \geqslant x_1, x_2\} \leqslant p(z_0) \leqslant p(x_1) \vee p(x_2) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε заключаем: (1) вытекает из (2). Оставшаяся импликация $(3) \rightarrow (1)$ проверяется столь же просто. $\triangleright$

2.4. Следствие. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *p — верхняя огибающая опорных функций шапок;*

(2) *p — верхняя огибающая дискретных функционалов;*

(3) *p — функционал Минковского аппроксимативно фильтрованного конического отрезка, т. е. пересечения фильтрованных по возрастанию множеств.*

$\triangleleft$ (1) $\to$ (2) обеспечено тем, что крайние точки шапки конуса положительных форм являются дискретными функционалами.

(2) $\to$ (3), если $p(x) = \sup\{p_\xi(x) : \xi \in \Xi\}$ при $x \in X$, где для каждого ξ выполнено $p_\xi(x) = T_\xi(x)_+$ и T_ξ — подходящий дискретный функционал. Ясно, что p — это функционал Минковского пересечения $S := \bigcap_{\xi \in \Xi} \{p_\xi < 1\}$ и, стало быть, S аппроксимативно направлено в силу предложения 2.3.

(3) $\to$ (1) следует из общих свойств функционала Минковского и 2.3. $\triangleright$

2.5. Пусть теперь X — упорядоченное векторное пространство и $\mathscr{L}_+(X, Y)$ — конус положительных линейных операторов, действующих из X в Y.

2.6. Теорема. *Для возрастающего положительного сублинейного оператора $P\colon X \to Y$ равносильны утверждения:*

(1) *субдифференциал ∂P является спущенной шапкой конуса $\mathscr{L}_+(X, Y)$;*

(2) *для всяких $x_1, x_2 \in X$ выполняется*

$$\inf\{Pz\colon z \geqslant x_1,\ z \geqslant x_2\} = Px_1 \vee Px_2;$$

(3) *если $A_1, A_2 \in \mathscr{L}_+(X, Y)$ таковы, что $A_1 + A_2 \in \partial P$, то найдутся мультипликаторы $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1_Y]$, для которых $\alpha_1 + \alpha_2 = 1_Y$ и, кроме того, $A_1 \in \alpha_1 \partial P$ и $A_2 \in \alpha_2 \partial P$;*

(4) *при любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $Px_1 \leqslant 1_Y$ и $Px_2 \leqslant 1_Y$, и произвольном $\varepsilon > 0$ имеются разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и семейство $(z_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов X, удовлетворяющие соотношениям*

$$z_\xi \geqslant x_1,\ z_\xi \geqslant x_2,\ b_\xi P z_\xi \leqslant (1 + \varepsilon) b_\xi \quad (\xi \in \Xi);$$

(5) *подъем $\partial P^\uparrow$ является шапкой конуса положительных форм на стандартном имени $X^\wedge$ пространства X внутри булевозначного универсума $V^{(B)}$, построенного над базой B рассматриваемого K-пространства Y;*

(6) *внутри $V^{(B)}$ множество $\{P\!\uparrow < 1\}$ фильтровано по возрастанию.*

$\triangleleft$ В силу 1.6 имеем (1) $\leftrightarrow$ (5), ибо $\partial P\!\uparrow = \partial P^\uparrow$ внутри $V^{(B)}$. Эквивалентности (1) $\leftrightarrow$ (2) $\leftrightarrow$ (6) обеспечены 2.3 и принципом переноса булевозначного анализа, соотношение (1) $\leftrightarrow$ (4) — предложением 2.3, ибо

$$[\partial P\!\uparrow \text{— шапка}] =$$

$$= [(\forall x_1, x_2 \in X^\wedge)(\forall \varepsilon > 0)(\exists z \in X^\wedge)\, z \geqslant x_1 \wedge z \geqslant x_2 \wedge P\!\uparrow z \leqslant 1^\wedge + \varepsilon] =$$

$$= \bigwedge_{x_1, x_2 \in X} [(\exists z \in X^\wedge)\, z \geqslant x_1^\wedge \wedge z \geqslant x_2^\wedge \wedge Pz \leqslant 1_Y + \varepsilon].$$

Остается привлечь правила оценивания и теорему Гордона [5]. Наконец, эквивалентность (2) $\leftrightarrow$ (3) обеспечена, например, правилами субдифференцирования. $\triangleright$

2.6. Следствие. *Крайние точки операторной шапки конуса положительных операторов являются дискретными операторами.*

2.7. Следствие. *Возрастающий положительный сублинейный оператор P является поточечной точной верхней границей множества дискретных операторов в том и только в том случае, если подъем $P\!\uparrow$ — функционал Минковского аппроксимативно фильтрованного конического отрезка в булевозначном универсуме.*

§ 3. Признаки граней

3.1. Перейдем к характеристикам субдифференциалов, являющихся гранями. В этом параграфе пространства X и Y можно считать модулями над одним и тем же решеточно упорядоченным кольцом $\mathbf{A}$ с единицей [3, 9]. Сублинейный оператор P предполагается $\mathbf{A}_+$-однородным. Мы начнем с анализа некоторого обобщения понятия шапки. Для этого считаем X упорядоченным модулем, P возрастающим и положительным оператором. Пусть, далее, Z — еще один упорядоченный $\mathbf{A}$-модуль, допускающий выпуклый анализ, и T — положительный модульный гомоморфизм из Y в Z.

3.2. *Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *для всяких $x_1, x_2 \in X$ выполнено*

$$\inf\{TPz\colon z \geqslant x_1,\ z \geqslant x_2\} = T(Px_1 \vee Px_2);$$

(2) *при любых $A_1, A_2 \in \mathscr{L}_+(X, Z)$ таких, что $A_1 + A_2 \in \partial(TP)$, найдутся гомоморфизмы T_1, T_2 из $\mathscr{L}_+(Y, Z)$, удовлетворяющие соотношениям*

$$T_1 + T_2 = T,\quad A_1 \in \partial(T_1P),\quad A_2 \in \partial(T_2P).$$

◁ Пусть

$$Q_1(x_1, x_2) := \inf\{TPz\colon z \geqslant x_1, x_2\};\quad Q_2(x_1, x_2) := T(Px_1 \vee Px_2).$$

Ясно, что Q_1, Q_2 — сублинейные операторы, причем $Q_1 \geqslant Q_2$. Таким образом, интересующее нас в (1) равенство можно переписать как включение $\partial Q_1 \subset \partial Q_2$. Осталось заметить, что для гомоморфизма $(A_1, A_2)\colon (x_1, x_2) \to A_1x_1 + A_2x_2$, где $A_i \in \mathscr{L}_+(X, Z)$ при $i := 1, 2$, верно

$$(A_1, A_2) \in \partial Q_1 \leftrightarrow A_1 \geqslant 0,\ \ A_2 \geqslant 0,\ \ A_1 + A_2 \in \partial(TP);$$
$$(A_1, A_2) \in \partial Q_2 \leftrightarrow (\exists T_1 \geqslant 0, T_2 \geqslant 0)\, T_1 + T_2 = T,$$
$$A_1 \in \partial(T_1P),\quad A_2 \in \partial(T_2P).$$

В самом деле, последние эквивалентности проверяются прямыми вычислениями [8]. ▷

3.3. Оператор P (и его субдифференциал ∂P), удовлетворяющий равносильным условиям, сформулированным в 3.2, называют *T-шапкой* полумодуля $\mathscr{L}_+(X, Y)$.

3.4. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) *каждая T-шапка служит S-шапкой при $S \in [0, T]$;*

(2) *пусть P — это T-шапка и $TA \in \mathrm{Ch}(TP)$ для $A \in \partial P$ (т. е. A — это T-крайняя точка ∂P); тогда $[0, TA] = [0, T]A$.*

◁ (1) Обозначим для симметрии $T' := S$ и $T'' := T - S'$. Имеем

$$0 \leqslant \inf\{T'Pz\colon z \geqslant x_1, x_2\} - T'(Px_1 \vee Px_2) + \inf\{T''Pz\colon z \geqslant x_1, x_2\} -$$
$$- T''(Px_1 \vee Px_2) \leqslant \inf\{(T' + T'')Pz\colon z \geqslant x_1, x_2\} - T(Px_1 \vee Px_2) = 0.$$

(2) Пусть $0 \leqslant S \leqslant TA$. На основании 3.2 найдутся $T_1 \geqslant 0$, $T_2 \geqslant 0$, $T_1 + T_2 = T$, такие, что $S \in \partial(T_1P)$ и $TA - S \in \partial(T_2P)$. Итак, $2TA = (S + T_2A) + ((TA - S) + T_1A)$, т. е. $T_1A = S$ и $S \in [0, T]A$, ибо $S + T_2A \in \partial(TP)$ и $(TA - S) + T_1A \in \partial(TP)$. ▷

3.5. Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *субдифференциал $\partial(TQ)$ является гранью субдифференциала $\partial(TP)$;*

(2) *для произвольных гомоморфизмов $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(Y, Z)$ и A_1, $A_2 \in \mathscr{L}(X, Z)$ таких, что*

$$T_1 \geqslant 0,\ \ T_2 \geqslant 0,\ \ T_1 + T_2 = T;$$
$$A_1 \in \partial(T_1P),\quad A_2 \in \partial(T_2P),\quad A_1 + A_2 \in \partial(TQ),$$

будет $A_1 \in \partial(T_1Q)$ и $A_2 \in \partial(T_2Q)$;

(3) *оператор* $(x, y) \to y + Q(-x)$, *действующий из модуля* $X \times Y$ *с полумодулем* $\operatorname{epi} P := \{(x, y) \in X \times Y:\ y \geqslant Px\}$ *в модуль* Y, *является* T-*шапкой;*

(4) *для каждых* $x_1, x_2 \in X$ *выполнено*

$$\inf_{z \in X} T((P(x_1 - z) + Qz - Qx_1) \vee (P(x_2 - z) + Qz - Qx_2)) = 0.$$

$\triangleleft$ (1) $\to$ (2). Пусть гомоморфизмы T_1, T_2, A_1, A_2 выбраны в соответствии с условиями (2). Рассмотрим элемент S из субдифференциала ∂Q. Очевидно, справедливы соотношения

$$A_1 + T_2 S \in \partial(TP), \quad A_2 + T_1 S \in \partial(TP);$$

$$(A_1 + T_2 S) + (A_2 + T_1 S) = (A_1 + A_2) + TS \in 2\partial Q.$$

Значит, на основании (1) гомоморфизм $A_1 + T_2 S$ лежит в $\partial(TQ)$, т. е. $A_1 x + T_2 Sx \leqslant TQx$ при всех $x \in X$. Отсюда

$$A_1 x + T_2 Qx = \sup\{A_1 x + T_2 Sx:\ S \in \partial Q\} \leqslant TQx$$

для любого $x \in X$. Следовательно, $A_1 \in \partial(T_1 Q)$. Аналогично устанавливается, что $A_2 \in \partial(T_2 Q)$ (ибо $A_2 + T_2 S \in \partial(TQ)$ при каждом $S \in \partial Q$).

(2) $\to$ (3). Положим $\mathscr{P}(x, y) := y + Q(-x)$ и возьмем гомоморфизмы $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \in \mathscr{L}_+(X \times Y, Z)$ такие, что $\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 \in \partial(T\mathscr{P})$. Положим $T_i y := \mathscr{A}_i(0, y)$ для $i := 1, 2$ и $y \in Y$. Ясно, что $T_1 \geqslant 0$, $T_2 \geqslant 0$, ибо $0 \times Y_+ \in \operatorname{epi} P$. Кроме того, $(T_1 + T_2)y = \mathscr{A}_1(0, y) + \mathscr{A}_2(0, y) \leqslant T(y + Q(0)) = Ty$ при всех $y \in Y$. Значит, $T_1 + T_2 = T$. Осталось убедиться, что $\mathscr{A}_1 \in \partial(T_1 \mathscr{P})$ и $\mathscr{A}_2 \in \partial(T_2 \mathscr{P})$. Положим $A_i x := \mathscr{A}_i(-x, 0)$ для $x \in X$. Тогда получаем

$$\mathscr{A}_i(x, Px) = T_i Px + \mathscr{A}_i(x, 0) = T_i Px - \mathscr{A}_i(-x, 0) = T_i Px - A_i x \geqslant 0.$$

Значит, $A_i \in \partial(T_i P)$ при $i := 1, 2$. Кроме того, $(A_1 + A_2)x = (\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2)(0, -x) \leqslant T\mathscr{P}(-x, 0) = TQx$. В силу (2) заключаем, что $A_i \in \partial(T_i Q)$. Итак,

$$\mathscr{A}_i(x, y) = T_i y - A_i x \leqslant T_i y + T_i Q(-x) = T_i \mathscr{P}(x, y)$$

для любых $(x, y) \in X \times Y$. Тем самым, $\mathscr{P}$ — это T-шапка.

(3) $\to$ (4). Учитывая определение T-шапки, для произвольных $x_1, x_2 \in X$ и $y_1, y_2 \in Y$ получаем

$$T((y_1 + Q(-x_1)) \vee (y_2 + Q(-x_2))) =$$
$$= \inf_{x, y}\{T(y + Q(-x)):\ y - y_1 \geqslant P(x - x_1),\ y - y_2 \geqslant P(x - x_2)\}.$$

Отсюда ввиду положительности T вытекает соотношение

$$T((y_1 + Qx_1) \vee (y_2 + Qx_2)) =$$
$$= \inf_{z \in X} T((y_1 + P(z + x_1) + Q(-z)) \vee (y_2 + P(z + x_2) + Q(-z))) =$$
$$= \inf_{z \in X} T((y_1 + P(x_1 - z) + Qz) \vee (y_2 + P(x_2 - z) + Qz)).$$

Полагая $y_1 := Qx_2$ и $y_2 := Qx_1$, приходим к (4).

(4) $\to$ (1). Пусть A_1, A_2 — элементы $\partial(TP)$, причем $A_1 + A_2 \in 2\partial(TQ)$. Для $x_1, x_2 \in X$ и произвольного $z \in X$ имеем

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 = A_1(x_1 - z) + A_2(x_2 - z) + (A_1 + A_2)z \leqslant$$
$$\leqslant TP(x_1 - z) + TP(x_2 - z) + TQz_1 - TQx_1 + TQz - TQx_2 + TQx_1 + TQx_2.$$

Переходя к инфимуму по z, выводим

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{z \in X}(T(P(x_1 - z) + Qz - Qx_1) + T(P(x_2 - z) + Qz - Qx_2)) + TQx_1 + TQx_2 \leqslant$$
$$\leqslant 2 \inf_{z \in X} T((P(x_1 - z) + Qz - Qx_1) \vee (P(x_2 - z) + Qz - Qx_1)) + TQx_1 + TQx_2.$$

Учитывая (4), заключаем, что $A_1 \in \partial(TQ)$ и $A_2 \in \partial(TQ)$. $\triangleright$

3.6. Замечание. В случае, если Z — это K-пространство, эквивалентные условия теоремы 3.5 равносильны утверждению, что подъем $\partial(TQ)^{\uparrow}$ служит гранью подъема $\partial(TP)^{\uparrow}$ внутри булевозначного универсума, построенного над базой Z.

3.7. Замечание. Теорема 3.5 в части (1) $\leftrightarrow$ (4) представляет собой обобщение известного критерия Бука — Фелпса — Жоли для крайних точек [10]. В качестве ее применения приведем признак грани на языке представляющих мер.

3.8. Пусть $\mathscr{A}$ — слабо порядково ограниченное множество в $\mathscr{L}(X, Y)$ и $Px := \sup\{Ax\colon A \in \mathscr{A}\}$. Пусть, далее, $Q\colon X \to Y$ — сублинейный оператор, причем $Q \leqslant P$. Обозначим, как обычно, символом $l_\infty(\mathscr{A}, Y)$ множество ограниченных Y-значных функций на $\mathscr{A}$, наделенное естественной структурой упорядоченного модуля. Рассмотрим *канонический сублинейный оператор*

$$\varepsilon_{\mathscr{A}}\colon l_\infty(\mathscr{A}, Y) \to Y,\quad \varepsilon_{\mathscr{A}} f := \sup f(\mathscr{A})\quad (f \in l_\infty(\mathscr{A}, Y))$$

и связанные с ним отображения

$$\langle\mathscr{A}\rangle \in \mathscr{L}(X, l_\infty(\mathscr{A}, Y)),\quad \langle\mathscr{A}\rangle x\colon A \to Ax\quad (A \in \mathscr{A});$$

$$\Delta_{\mathscr{A}}\colon Y \to Y^{\mathscr{A}},\quad \Delta_{\mathscr{A}} y\colon A \to y\quad (A \in \mathscr{A}).$$

Известно, что для возрастающего сублинейного оператора $R\colon Y \to Z$ справедливо представление

$$\partial(R\varepsilon_{\mathscr{A}}) = \{\beta \in \mathscr{L}_+(l_\infty(\mathscr{A}, Y), Z)\colon \beta\Delta_{\mathscr{A}} \in \partial R\}.$$

Заметим также, что $P = \varepsilon_{\mathscr{A}}\langle\mathscr{A}\rangle$ по определению.

3.9. Теорема. *Множество $\partial(TQ)$ является гранью $\partial(TP)$ в том и только в том случае, если для каждого $\beta \in \mathscr{L}_+(l_\infty(\mathscr{A}, Y), Z)$ такого, что $\beta\Delta_{\mathscr{A}} = T$ и $\beta\langle\mathscr{A}\rangle \in \partial(TQ)$, при всех $x_1, x_2 \in X$ выполнено*

$$\beta\big((\Delta_{\mathscr{A}}Qx_1 - \langle\mathscr{A}\rangle x_1) \wedge (\Delta_{\mathscr{A}}Qx_2 - \langle\mathscr{A}\rangle x_2)\big) \geqslant 0$$

или, что равносильно,

$$\beta(\langle\mathscr{A}\rangle x - \Delta_{\mathscr{A}}Qx)_+ = 0$$

для каждого $x \in X$.

$\triangleleft$ Привлекая теорему 3.5, выводим следующий критерий грани:

$$0 = \inf_{z \in X} T\big((\varepsilon_{\mathscr{A}}\langle\mathscr{A}\rangle(x_1 - z) + Qz - Qx_1) \vee (\varepsilon_{\mathscr{A}}\langle\mathscr{A}\rangle(x_2 - z) + Qz - Qx_2)\big) =$$
$$= \inf_{z \in X} T\varepsilon_{\mathscr{A}}\big((\Delta_{\mathscr{A}}Qz - \langle\mathscr{A}\rangle z + \langle\mathscr{A}\rangle x_1 - \Delta_{\mathscr{A}}Qx_1) \vee$$
$$\vee (\Delta_{\mathscr{A}}Qz - \langle\mathscr{A}\rangle z + \langle\mathscr{A}\rangle x_2 - \Delta_{\mathscr{A}}Qx_2)\big) = \inf_{z \in X} T\varepsilon_{\mathscr{A}}\big((\Delta_{\mathscr{A}}Qz - \langle\mathscr{A}\rangle z) +$$
$$+ (\langle\mathscr{A}\rangle x_1 - \Delta_{\mathscr{A}}Qx_1) \vee (\langle\mathscr{A}\rangle x_2 - \Delta_{\mathscr{A}}Qx_2)\big).$$

Если $\beta \geqslant 0$, $\beta\Delta_{\mathscr{A}} = T$ и $\beta\langle\mathscr{A}\rangle \in \partial(TQ)$, то

$$0 \geqslant \inf_{z \in X}(\beta\Delta_{\mathscr{A}}Qz - \beta\langle\mathscr{A}\rangle z) + \beta\big((\langle\mathscr{A}\rangle x_1 - \Delta_{\mathscr{A}}Qx_1) \vee (\langle\mathscr{A}\rangle x_2 - \Delta_{\mathscr{A}}Qx_2)\big) =$$
$$= \beta\big((\langle\mathscr{A}\rangle x_1 - \Delta_{\mathscr{A}}Qx_1) \vee (\langle\mathscr{A}\rangle x_2 - \Delta_{\mathscr{A}}Qx_2)\big).$$

Тем самым установлена необходимость доказываемых неравенств. Для проверки достаточности их выполнения воспользуемся правилами замены переменных в преобразованиях Юнга [8]. По теореме о векторном минимаксе имеется оператор β из $\partial(T\varepsilon_{\mathscr{A}})$ такой, что интересующий нас инфимум z_0 (являющийся положительным элементом Z) записывается в виде

$$z_0 = \inf_{z \in X}(\beta\Delta_{\mathscr{A}}Qz - \beta\langle\mathscr{A}\rangle z) + \beta((\langle\mathscr{A}\rangle x_1 - \Delta_{\mathscr{A}}Qx_1) \vee (\langle\mathscr{A}\rangle x_2 - \Delta_{\mathscr{A}}Qx_2)).$$

Отсюда следует, что множество $U := \{\beta\Delta_{\mathscr{A}}Qz - \beta\langle\mathscr{A}\rangle z\colon z \in X\}$ ограничено снизу и, стало быть, в силу имеющейся положительной однородности Q и $\langle\mathscr{A}\rangle$ верно $\inf U = 0$. Последнее означает, что $TQz - \beta\langle\mathscr{A}\rangle z \geqslant 0$ для $z \in X$, т. е. $\beta\langle\mathscr{A}\rangle \in \partial(TQ)$. Значит, по условию $z_0 \leqslant 0$, что обеспечивает равенство $z_0 = 0$.

Выполнение исследуемых неравенств при $x_1 := x$ и $x_2 := 0$ приводит к нужному равенству. Последнее, в свою очередь, равносильно импликации

$$(\forall\beta' \geqslant 0) \quad \beta' \leqslant \beta \to \beta'(\langle\mathscr{A}\rangle x - \Delta_{\mathscr{A}}Qx) \leqslant 0$$

при всяком $x \in X$. Остается заметить, что

$$\beta((\Delta_{\mathscr{A}}Qx_1 - \langle\mathscr{A}\rangle x_1) \wedge (\Delta_{\mathscr{A}}Qx_2 - \langle\mathscr{A}\rangle x_2)) = \\ = \beta_1(\Delta_{\mathscr{A}}Qx_1 - \langle\mathscr{A}\rangle x_1) + \beta_2(\Delta_{\mathscr{A}}Qx_2 - \langle\mathscr{A}\rangle x_2)$$

при подходящем выборе положительных β_1, β_2, составляющих β, т. е. $\beta_1 + \beta_2 = \beta$. Это наблюдение завершает доказательство. ▷

3.9. В заключение укажем, что некоторые положения этой статьи анонсированы в [11, 12]. Отметим, что формулировки утверждений 1.6(2), 2.7 и 3.9 приведены в [11] с неточностями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кутателадзе С. С.* Теорема Крейна — Мильмана и ее обращение.— Сиб. мат. журн., 1980, т. 21, № 1, с. 130—138.
2. *Wickstead A. W.* Extremal structure of cones of operators.— Quart. J. Math., 1981, v. 32, N 1, p. 239—253.
3. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Локальный выпуклый анализ.— В кн.: Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1982, т. 19, с. 156—207.
4. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы в булевозначных моделях теории множеств.— Сиб. мат. журн., 1983, т. 24, № 5, с. 109—122.
5. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Записки по булевозначному анализу.— Новосибирск: НГУ, 1984.
6. *Фелпс Р.* Лекции о теоремах Шоке.— М.: Мир, 1968.
7. *Asimov L.* Extremal structure of well-capped convex set.— Trans. Amer. Math. Soc., 1969, v. 138, p. 363—382.
8. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление.— Новосибирск: НГУ, 1983.
9. *Кутателадзе С. С.* О выпуклом анализе в модулях.— Сиб. мат. журн., 1981, т. 22, № 4, с. 118—128.
10. *Holmes R.* Geometric functional analysis and its applications.— Berlin etc.: Springer, 1975.
11. *Кутателадзе С. С.* Шапки и грани множеств операторов.— Докл. АН СССР, 1985, т. 280, № 2, с. 285—288.
12. *Кутателадзе С. С.* О нестандартных методах в субдифференциальном исчислении.— В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Наука, 1986.

г. Новосибирск

Статья поступила
4 июля 1985 г.