С. С. Кутателадзе, Вариант нестандартного выпуклого программирования, *Сиб. матем. журн.*, 1986, том 27, номер 4, 84–92

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXVII, № 4 ИЮЛЬ — АВГУСТ 1986

УДК 517.25/26+510.644

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ВАРИАНТ НЕСТАНДАРТНОГО ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Идея учета точности соблюдения критерия оптимальности при практическом решении экстремальной задачи находит известное отражение в выпуклом ε-программировании [1—5], дающем аппарат оценок приближения к оптимуму по функционалу. Развитый формализм достаточно специфичен и в некотором смысле оказывается искусственно усложненным по сравнению с обычной теорией. В то же время он не вполне коррелирует с бытующими приемами, основанными на поиске «практического оптимума» с помощью «практически точного» соблюдения требований дополняющей нежесткости, отвечающих классическому случаю $\varepsilon = 0$. В результате можно говорить об определенном расхождении и даже разрыве теоретических и практических воззрений.

Цель настоящей статьи — указать возможный вариант ликвидации указанного разрыва в свете концепций нестандартного анализа [6—8]. В работе вводится понятие инфинитезимально оптимального решения, как допустимой точки, значение целевой функции в которой бесконечно близко к идеалу — не обязательно реализованному значению программы. Таким образом, инфинитезимальный оптимум предстает в качестве приемлемого претендента на роль «практического» оптимума, ибо никакие осуществимые процедуры не в состоянии отличить его от обычного — «теоретического» — оптимума. Приводятся основные формулы исчисления инфинитезимальных субдифференциалов, отвечающих приведенной концепции оптимальности. Получающиеся правила для внешних множеств совпадают по форме со своими классическими аналогами стандартного выпуклого анализа. При этом в признаках инфинитезимальной оптимальности действительно возникает приближенно выполненная дополняющая нежесткость. Все это позволяет считать описываемый вариант нестандартного выпуклого программирования по меньшей мере допустимым.

§ 1. Инфинитезимальные субдифференциалы

1.1. Пусть X — векторное пространство, $Y^{\cdot}$ — упорядоченное векторное пространство с присоединенным наибольшим элементом $+\infty$. Рассмотрим выпуклый оператор $F\colon X \to Y^{\cdot}$ и точку $\bar{x}$ из эффективного множества $\operatorname{dom} F := \{x \in X\colon Fx < +\infty\}$ оператора F. Для элемента $\varepsilon \geqslant 0$ (из конуса положительных элементов Y_+ пространства Y) принятым способом определяем *ε-субдифференциал F в точке $\bar{x}$*, т. е. множество

$$\partial^{\varepsilon} F(\bar{x}) := \{A \in L(X, Y)\colon\ (\forall x \in X)\, Ax - A\bar{x} \leqslant Fx - F\bar{x} + \varepsilon\},$$

где $L(X, Y)$ — пространство линейных операторов, действующих из X в Y.

1.2. Пусть в Y выделено фильтрованное по убыванию семейство E положительных элементов. Считая Y и E стандартными множествами, определим *монаду* $\mu(\mathrm{E})$ соотношением $\mu(\mathrm{E}) := \bigcap\{[0, \varepsilon]\colon \varepsilon \in {}^{\circ}\mathrm{E}\}$. Здесь, как обычно, ${}^{\circ}\mathrm{E}$ — множество стандартных элементов E или *стандартное ядро* E. Элементы $\mu(\mathrm{E})$ называют *положительными бесконечно малыми* или *инфинитезимальными* (относительно E). В дальнейшем без особых оговорок подразумевается, что Y — это K-пространство, а монада $\mu(\mathrm{E})$ — это внешний конус над ${}^\circ\mathbf{R}$ и, кроме того, $\mu(\mathrm{E}) \cap {}^\circ Y = 0$. (В приложениях, как правило, E — фильтр единиц в Y). Будет использоваться также отношение *бесконечной близости* между элементами Y, т. е.

$$y_1 \approx y_2 \leftrightarrow y_1 - y_2 \in \mu(\mathrm{E}) \wedge y_2 - y_1 \in \mu(\mathrm{E}).$$

1.3. *Имеет место равенство*

$$\bigcap_{\varepsilon \in {}^\circ\mathrm{E}} \partial^\varepsilon F(\bar{x}) = \bigcup_{\varepsilon \in \mu(\mathrm{E})} \partial^\varepsilon F(\bar{x}).$$

◁ Для $A \in L(X, Y)$ последовательно выводим:

$$A \in \bigcap_{\varepsilon \in {}^\circ\mathrm{E}} \partial^\varepsilon F(\bar{x}) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{st} \varepsilon \in \mathrm{E})(\forall x \in X)\, Ax - A\bar{x} \leqslant Fx - F\bar{x} + \varepsilon \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{st} \varepsilon \in \mathrm{E})\, F^*(A) := \sup_{x \in \mathrm{dom} F} (Ax - Fx) \leqslant A\bar{x} - F\bar{x} + \varepsilon \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{st} \varepsilon \in \mathrm{E})\, 0 \leqslant F^*(A) - (A\bar{x} - F\bar{x}) \leqslant \varepsilon \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow F^*(A) - (A\bar{x} - F\bar{x}) \approx 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists \varepsilon \in Y_+)\, \varepsilon \approx 0 \wedge F^*(A) = A\bar{x} - F\bar{x} + \varepsilon \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow A \in \bigcup_{\varepsilon \in \mu(E)} \partial^\varepsilon F(\bar{x}). \quad \triangleright$$

1.4. Внешнее множество, фигурирующее в обеих частях равенства 1.3, называют *инфинитезимальным субдифференциалом F в точке $\bar{x}$* и обозначают через $DF(\bar{x})$. Элементы $DF(\bar{x})$ называют *инфинитезимальными субградиентами F в точке $\bar{x}$*. Специальных указаний на множество E при этом не делают, так как вероятность недоразумений незначительна.

1.5. *Пусть выполнено предположение «стандартности антуража», т. е. параметры X, F, $\bar{x}$ — стандартные множества. Тогда стандартизация инфинитезимального субдифференциала F в точке $\bar{x}$ совпадает с (нулевым) субдифференциалом F в $\bar{x}$, т. е.*

$${}^*DF(\bar{x}) = \partial F(\bar{x}).$$

◁ Для стандартного $A \in {}^\circ L(X, Y)$ в силу принципа переноса выполнено

$$A \in {}^*DF(\bar{x}) \leftrightarrow A \in DF(\bar{x}) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{st} \varepsilon \in \mathrm{E})(\forall x \in X) Ax - A\bar{x} \leqslant Fx - F\bar{x} + \varepsilon \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall \varepsilon \in \mathrm{E})(\forall x \in X) Ax - A\bar{x} \leqslant Fx - F\bar{x} + \varepsilon \leftrightarrow A \in \partial F(\bar{x}),$$

ибо $\inf \mathrm{E} = 0$ на основании соотношения $\mu(\mathrm{E}) \cap {}^\circ Y = 0$. ▷

§ 2. Основные формулы для вычисления инфинитезимальных субдифференциалов

2.1. *Пусть Z — стандартное K-пространство и $G\colon Y \to Z$ — возрастающий выпуклый оператор. Если множества $X \times \mathrm{epi}\, G$ и $\mathrm{epi}\, F \times Z$ находятся в общем положении, то*

$$D(GF)(\bar{x}) = \bigcup_{B \in DG(F\bar{x})} D(BF)(\bar{x}).$$

Если, кроме того, параметры (за исключением, быть может, точки $\bar{x}$) стандартны, то для стандартных ядер справедливо представление

$${}^\circ D(GF)(\bar{x}) = \bigcup_{B \in {}^\circ DG(F\bar{x})} {}^\circ D(BF)(\bar{x}).$$

$\lhd$ Отметим, что по условию монада $\mu(\mathrm{E})$ — это нормальная внешняя подполугруппа в Z, т. е.

$$\varepsilon \in \mu(\mathrm{E}) \to [0, \varepsilon] \subset \mu(\mathrm{E});$$

$$\mu(\mathrm{E}) + \mu(\mathrm{E}) \subset \mu(\mathrm{E}).$$

Учитывая это обстоятельство и привлекая как 1.3, так и правила вычисления ε-субдифференциалов, последовательно получаем

$$D(GF)(\bar{x}) = \bigcup_{\varepsilon \in \mu(\mathrm{E})} \partial^{\varepsilon}(GF)(\bar{x}) =$$

$$= \bigcup_{\varepsilon \in \mu(\mathrm{E})} \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon \\ \varepsilon_1 \geqslant 0, \varepsilon_2 \geqslant 0}} \bigcup_{B \in \partial^{\varepsilon_1} G(F\bar{x})} \partial^{\varepsilon_2}(BF)(\bar{x}) =$$

$$= \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geqslant 0, \varepsilon_2 \geqslant 0 \\ \varepsilon_1 \approx 0, \varepsilon_2 \approx 0}} \bigcup_{B \in \partial^{\varepsilon_1} G(F\bar{x})} \partial^{\varepsilon_2}(BF)(\bar{x}) =$$

$$= \bigcup_{\varepsilon_1 \geqslant 0, \varepsilon_1 \approx 0} \bigcup_{B \in \partial^{\varepsilon_1} G(F\bar{x})} \bigcup_{\varepsilon_2 \geqslant 0, \varepsilon_2 \approx 0} \partial^{\varepsilon_2}(BF)(\bar{x}) =$$

$$= \bigcup_{\varepsilon_1 \geqslant 0, \varepsilon_1 \approx 0} \bigcup_{B \in \partial^{\varepsilon_1} G(F\bar{x})} D(BF)(\bar{x}).$$

Пусть теперь выполнено предположение о стандартности антуража и $A \in {}^{\circ}D(GF)(\bar{x})$. Тогда для некоторого бесконечно малого ε будет

$$(GF)^*(A) = \sup_{x \in \operatorname{dom}(GF)} (Ax - GFx) \leqslant A\bar{x} - GF\bar{x} + \varepsilon.$$

По формуле замены переменной в преобразовании Юнга с учетом принципа переноса имеется стандартный оператор $B \in {}^{\circ}L(Y, Z)$ такой, что B положителен, т. е. $B \in {}^{\circ}L_+(Y, Z)$ и, кроме того,

$$(GF)^*(A) = (BF)^*(A) + G^*(B).$$

Отсюда следует

$$\varepsilon \geqslant \sup_{x \in \operatorname{dom} F} (Ax - BFx) + \sup_{y \in \operatorname{dom} G} (By - Gy) - A\bar{x} + GF\bar{x} =$$

$$= \sup_{x \in \operatorname{dom} F} (Ax - A\bar{x} - (BFx - BF\bar{x})) +$$

$$+ \sup_{y \in \operatorname{dom} G} (By - BF\bar{x} - (Gy - GF\bar{x})).$$

Положим

$$\varepsilon_1 := \sup_{y \in \operatorname{dom} G} (By - BF\bar{x} - (Gy - GF\bar{x})),$$

$$\varepsilon_2 := \sup_{x \in \operatorname{dom} F} (Ax - A\bar{x} - (BFx - BF\bar{x})).$$

Ясно, что $A \in \partial^{\varepsilon_2}(BF)(\bar{x})$, т. е. $A \in {}^{\circ}D(BF)(\bar{x})$, и $B \in \partial^{\varepsilon_1} G(F\bar{x})$, т. е. $B \in {}^{\circ}DG(F\bar{x})$, ибо $\varepsilon_1 \approx 0$ и $\varepsilon_2 \approx 0$. $\rhd$

2.2. *Пусть $F_1, \ldots, F_n \colon X \to Y$ — выпуклые операторы, причем n — стандартное натуральное число. Если $F_1, \ldots, F_n$ находятся в общем положении, то для точки $\bar{x} \in \operatorname{dom} F_1 \cap \ldots \cap \operatorname{dom} F_n$ выполнено*

$$D(F_1 + \ldots + F_n)(\bar{x}) = DF_1(\bar{x}) + \ldots + DF_n(\bar{x}).$$

$\lhd$ Доказательство состоит в применении 1.3 и правила ε-субдифференцирования суммы с учетом того, что сумма стандартного числа бесконечно малых слагаемых вновь бесконечно мала. $\rhd$

2.3. *Пусть $F_1, \ldots, F_n \colon X \to Y$ — выпуклые операторы, причем n — стандартное число. Допустим, что $F_1, \ldots, F_n$ находятся в общем положении, Y — это векторная решетка и $\bar{x} \in \operatorname{dom} F_1 \vee \ldots \vee F_n$. Если Z — стандартное K-пространство и $A \in L_+(Y, Z)$ — положительный линейный* *оператор, то элемент* $B \in L(X, Z)$ *служит инфинитезимальным субградиентом оператора* $A(F_1 \vee \ldots \vee F_n)$ *в точке* $\bar{x}$ *в том и только том случае, если совместна следующая система условий*:

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k; \quad A_k \in L_+(Y, Z) \quad (k := 1, \ldots, n);$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \bar{x} \approx A(F_1 \bar{x} \vee \ldots \vee F_n \bar{x}); \quad B \in \sum_{k=1}^{n} D(A_k F_k)(\bar{x}).$$

◁ Определяем операторы

$$(F_1, \ldots, F_n)\colon X \to (Y^n)^{\cdot}; \ (F_1, \ldots, F_n)x := (F_1 x, \ldots, F_n x);$$

$$\varkappa\colon Y^n \to Y; \quad \varkappa(y_1, \ldots, y_n) := y_1 \vee \ldots \vee y_n.$$

Тогда справедливо представление

$$A(F_1 \vee \ldots \vee F_n) = A\varkappa(F_1, \ldots, F_n).$$

Отсюда, учитывая 2.1 и вспоминая, что $A\varkappa$ — сублинейный оператор, выводим требуемое. ▷

2.4. Пусть X — векторное пространство, Y — некоторое K-пространство и $\mathscr{A}$ — слабо порядково ограниченное множество в $L(X, Y)$. Рассмотрим *регулярный выпуклый оператор* $F := \varepsilon_{\mathscr{A}} \langle \mathscr{A} \rangle_y$, где, как обычно, $\varepsilon_{\mathscr{A}}$ — *канонический сублинейный оператор*

$$\varepsilon_{\mathscr{A}}\colon l_\infty(\mathscr{A}, Y) \to Y, \quad \varepsilon_{\mathscr{A}} f := \sup f(\mathscr{A}) \quad (f \in l_\infty(\mathscr{A}, Y))$$

и аффинный оператор $\langle \mathscr{A} \rangle_y$ для $y \in l_\infty(\mathscr{A}, y)$ действует по правилу $\langle \mathscr{A} \rangle_y x := \langle \mathscr{A} \rangle x + y$; $\langle \mathscr{A} \rangle x\colon A \in \mathscr{A} \to Ax$.

2.5. *Если* $G\colon Y \to Z$ — *возрастающий выпуклый оператор, действующий в стандартное* K*-пространство* Z, *причем в образе* $F(X)$ *имеется алгебраически внутренняя точка* $\operatorname{dom} G$, *а элемент* $\bar{x}$ *из* X *таков, что* $F\bar{x} \in \operatorname{dom} G$, *то справедливо представление* (ср. [2])

$$D(GF)(\bar{x}) =$$

$$= \{B\langle \mathscr{A} \rangle\colon B\Delta_{\mathscr{A}} \in DG(F\bar{x}); \quad B \geqslant 0; \quad B\Delta_{\mathscr{A}} F\bar{x} \approx B\langle \mathscr{A} \rangle_y \bar{x}\}.$$

◁ Если $C \in D(GF)(\bar{x})$, то по 1.3 $C \in \partial^\varepsilon(GF)(\bar{x})$ при некотором $\varepsilon \approx 0$. Остается привлечь соответствующее правило ε-субдифференцирования. Если же $B \geqslant 0$, $B\Delta_{\mathscr{A}} \in DG(F\bar{x})$ и $B\Delta_{\mathscr{A}} F\bar{x} \approx B\langle \mathscr{A} \rangle_y \bar{x}$, то для некоторого $\varepsilon \approx 0$ будет, конечно же, $B\Delta_{\mathscr{A}} \in \partial^\varepsilon G(F\bar{x})$. Положим, кроме того, $\delta := B\Delta_{\mathscr{A}} F\bar{x} - B\langle \mathscr{A} \rangle_y \bar{x}$. Тогда $\delta \geqslant 0$ и $\delta \approx 0$ по условию. Значит, $B\langle \mathscr{A} \rangle \in \partial^{\varepsilon+\delta}(GF)(\bar{x})$. Остается заметить, что $\delta + \varepsilon \approx 0$. ▷

2.6. *Пусть в условиях* 2.5 *отображение* G — *это сублинейный оператор Магарам. Тогда*

$$D(GF)(\bar{x}) = \bigcup_{T \in DG(F\bar{x})} \ \bigcup_{\delta \geqslant 0, T\delta \approx 0} T\partial^\delta F(\bar{x}).$$

◁ В силу 2.1 можно считать, что $G := T$. Если для всякого $x \in X$ выполнено $Cx - C\bar{x} \leqslant Fx - F\bar{x} + \delta$ и $T\delta \approx 0$, то бесспорно $TC \in \partial^{T\delta}(TF)(\bar{x}) \subset D(TF)(\bar{x})$. Для завершения доказательства возьмем $B \in D(TF)(\bar{x})$. Согласно 1.3 имеется бесконечно малое ε такое, что $B \in \partial^\varepsilon(TF)(\bar{x})$. Привлекая соответствующее правило ε-субдифференцирования из [9], найдем $\delta \geqslant 0$ и $C \in \partial^\delta F(\bar{x})$ такие, что $T\delta \leqslant \varepsilon$ и $B = TC$. Это и требовалось. ▷

2.7. *Пусть* Ξ — *некоторое множество и* $(F_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *равномерно регулярное семейство выпуклых операторов. Справедливы представления*

$$D\Big(o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} F_\xi\Big)(\bar{x}) = \bigcup_{\substack{\delta\in l_1(\Xi,Y)\\ \delta\geqslant 0,\,\delta\approx 0}} o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \partial^{\delta(\xi)}F_\xi(\bar{x});$$

$$D\big(\sup_{\xi\in\Xi} F_\xi\big)(\bar{x}) = \bigcup \Big\{o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \alpha_\xi \partial^{\delta(\xi)}F_\xi(\bar{x}):\quad 0\leqslant \alpha_\xi \leqslant 1_Y,$$

$$o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi}\alpha_\xi = 1_Y;\qquad o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi}\alpha_\xi F_\xi(\bar{x}) \approx \sup_{\xi\in\Xi} F_\xi(\bar{x});\ o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi}\alpha_\xi\delta(\xi)\approx 0\Big\}.$$

$\lhd$ Доказательство немедленно вытекает из 2.6 с учетом результатов [9]. $\rhd$

2.8. Полезно отметить, что формулы 2.2—2.7 допускают уточнения, аналогичные имеющемуся в 2.1 в случае стандартности антуража (в который, быть может, не включена точка $\bar{x}$). Подчеркнем также, что по приведенным образцам выводится полный спектр всевозможных формул субдифференциального исчисления (свертки, лебеговы множества и т. п.).

§ 3. Инфинитезимальные субдифференциалы в обобщенных точках

3.1. Пусть, как и выше, $F\colon X \to Y^\cdot$ — выпуклый оператор, действующий в стандартное K-пространство Y и $\mathscr{X} := \mathscr{X}(\cdot)$ — *обобщенная точка* в $\operatorname{dom} F$, т. е. сеть элементов $\operatorname{dom} F$. Говорят, что оператор $A\in L(X,\ Y)$ — это *инфинитезимальный субградиент F в обобщенной точке* $\mathscr{X}$, если для некоторого бесконечно малого положительного ε выполнено

$$F^*(A)\leqslant \liminf(A\mathscr{X} - F\mathscr{X}) + \varepsilon.$$

Таким образом, в предположении стандартности антуража инфинитезимальный субградиент — это обычный опорный оператор в обобщенной точке [10, 11]. Условимся обозначать символом $DF(\mathscr{X})$ совокупность всех инфинитезимальных субградиентов F в $\mathscr{X}$. Это множество по понятным причинам называют *инфинитезимальным субдифференциалом F в* $\mathscr{X}$.

Сделаем выводы для двух основных правил субдифференцирования в обобщенной точке, представляющие интерес в связи с тем, что точные формулы для соответствующих ε-субдифференциалов неизвестны.

3.2. *Пусть* $F_1, \ldots, F_n$ — *стандартный набор выпуклых операторов в общем положении и обобщенная точка* $\mathscr{X}$ *лежит в* $\operatorname{dom} F_1 \cap\ldots\cap \operatorname{dom} F_n$. *Тогда*

$$D(F_1+\ldots+F_n)(\mathscr{X}) = DF_1(\mathscr{X})+\ldots+DF_n(\mathscr{X}).$$

$\lhd$ Пусть $A_k\in DF_k(\mathscr{X})$ для $k := 1, \ldots, n$, т. е.

$$F_k^*(A_k)\leqslant \liminf(A_k\mathscr{X} - F_k\mathscr{X}) + \varepsilon_k$$

при подходящих бесконечно малых $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. При этом

$$(F_1+\ldots+F_n)^*(A_1+\ldots+A_n)\leqslant \sum_{k=1}^n F_k^*(A_k)\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n (\liminf(A_k\mathscr{X} - F_k\mathscr{X}) + \varepsilon_k)\leqslant$$

$$\leqslant \liminf \sum_{k=1}^n (A_k\mathscr{X} - F_k\mathscr{X}) + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$$

в силу обычных свойств преобразования Юнга и нижнего предела. Остается заметить, что $\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n\approx 0$, и сделать вывод о справедливости включения $\supset$ для множеств, рассматриваемых в интересующем нас равенстве.

Для проверки противоположного включения, сведя дело к $n=2$, возьмем $A \in D(F_1+F_2)(\mathscr{X})$. Тогда при некоторых $\varepsilon \approx 0$ и A_1, A_2 таких, что $A_1+A_2=A$, будет

$$(F_1+F_2)^*(A) = F_1^*(A_1) + F_2^*(A_2),$$
$$F_1^*(A_1) + F_2^*(A_2) - \liminf(A\mathscr{X} - (F_1+F_2)(\mathscr{X})) \leqslant \varepsilon.$$

Положим по определению

$$\delta_1 := F_1^*(A_1) - \liminf(A_1\mathscr{X} - F_1\mathscr{X}),$$
$$\delta_2 := F_2^*(A_2) - \liminf(A_2\mathscr{X} - F_2\mathscr{X}).$$

Видно, что при $k := 1, 2$ выполнено

$$0 \leqslant \sup_{x \in \operatorname{dom} F_k} (A_k x - F_k x) - \limsup(A_k\mathscr{X} - F_k\mathscr{X}) \leqslant \delta_k.$$

Значит, остается убедиться в бесконечной малости δ_1 и δ_2. Имеем

$$\delta_1+\delta_2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \liminf(A\mathscr{X} - (F_1+F_2)(\mathscr{X})) - \sum_{k=1}^{2} \liminf(A_k\mathscr{X} - F_k\mathscr{X}) \leqslant$$
$$\leqslant (\varepsilon + \limsup(A_1\mathscr{X} - F_1\mathscr{X}) - \liminf(A_1\mathscr{X} - F_1\mathscr{X})) \wedge$$
$$\wedge (\varepsilon + \limsup(A_2\mathscr{X} - F_2\mathscr{X}) - \liminf(A_2\mathscr{X} - F_2\mathscr{X})) \leqslant$$
$$\leqslant (\varepsilon + F_1^*(A_1) - \liminf(A_1\mathscr{X} - F_1\mathscr{X})) \wedge$$
$$\wedge (\varepsilon + F_2^*(A_2) - \liminf(A_2\mathscr{X} - F_2\mathscr{X})) = \varepsilon + \delta_1 \wedge \delta_2.$$

Отсюда $0 \leqslant \delta_1 \vee \delta_2 \leqslant \varepsilon$, что и завершает доказательство. $\triangleright$

3.3. *Пусть Z — стандартное K-пространство и $G\colon Y \to Z$ — возрастающий выпуклый оператор. Если множества $X \times \operatorname{epi} G$ и $\operatorname{epi} F \times Z$ находятся в общем положении, то для обобщенной точки $\mathscr{X}$ в $\operatorname{dom}(GF)$*

$$D(GF)(\mathscr{X}) = \bigcup_{B \in DG(F\mathscr{X})} D(BF)(\mathscr{X}).$$

$\triangleleft$ Если известно, что

$$(BF)^*(A) \leqslant \liminf(A\mathscr{X} - BF\mathscr{X}) + \varepsilon_1;$$
$$G^*(B) \leqslant \liminf(BF\mathscr{X} - GF\mathscr{X}) + \varepsilon_2$$

для некоторых бесконечно малых ε_1 и ε_2, то

$$(GF)^*(A) \leqslant (BF)^*(A) + G^*(B) \leqslant$$
$$\leqslant \liminf(A\mathscr{X} - BF\mathscr{X}) + \varepsilon_1 + \liminf(BF\mathscr{X} - GF\mathscr{X}) + \varepsilon_2 \leqslant$$
$$\leqslant \liminf(A\mathscr{X} - GF\mathscr{X}) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Следовательно, $A \in D(GF)(\mathscr{X})$ и правая часть анализируемой формулы символизирует множество, входящее в ее левую часть.

Для завершения доказательства возьмем $A \in D(GF)(\mathscr{X})$. Тогда найдутся бесконечно малое ε и оператор B такие, что

$$(GF)^*(A) = (BF)^*(A) + G^*(B) \leqslant \liminf(A\mathscr{X} - GF\mathscr{X}) + \varepsilon.$$

Положим

$$\delta_1 := (BF)^*(A) - \liminf(A\mathscr{X} - BF\mathscr{X}),$$
$$\delta_2 := G^*(B) - \liminf(BF\mathscr{X} - GF\mathscr{X}).$$

Учитывая свойства верхних и нижних пределов, выводим, во-первых,

$$\delta_1 \geqslant (BF)^*(A) - \limsup(A\mathscr{X} - BF\mathscr{X}) \geqslant 0,$$
$$\delta_2 \geqslant G^*(B) - \limsup(BF\mathscr{X} - GF\mathscr{X}) \geqslant 0$$

и, во-вторых,

$$\delta_1+\delta_2\leqslant$$
$$\leqslant \liminf(A\mathscr{X}-GF\mathscr{X})+\varepsilon-\liminf(A\mathscr{X}-BF\mathscr{X})-$$
$$-\liminf(BF\mathscr{X}-GF\mathscr{X})\leqslant$$
$$\leqslant(\limsup(A\mathscr{X}-BF\mathscr{X})-\liminf(A\mathscr{X}-BF\mathscr{X})+\varepsilon)\wedge$$
$$\wedge(\limsup(BF\mathscr{X}-GF\mathscr{X})-\liminf(BF\mathscr{X}-GF\mathscr{X})+\varepsilon)\leqslant\delta_1\wedge\delta_2+\varepsilon,$$

ибо справедливы очевидные неравенства

$$\limsup(BF\mathscr{X}-GF\mathscr{X})\leqslant G^*(B);$$
$$\limsup(A\mathscr{X}-BF\mathscr{X})\leqslant(BF)^*(A).$$

Таким образом, $0\leqslant\delta_1\vee\delta_2\leqslant\varepsilon$ и $\delta_1\approx0$, $\delta_2\approx0$. Это означает, что $B\in DG(F\mathscr{X})$ и $A\in D(BF)(\mathscr{X})$. $\triangleright$

§ 4. Признаки инфинитезимальных решений

4.1. Точку $\bar{x}\in\operatorname{dom}F$ называют *инфинитезимальным решением безусловной программы* $Fx\to\inf$, где $F\colon X\to Y^{\cdot}$, если $0\in DF(\bar{x})$, т. е. если $\bar{x}$ допустимо и $F\bar{x}\approx\inf\{Fx\colon x\in X\}$. Естественным образом понимают инфинитезимальное решение произвольной программы.

4.2. *В стандартной безусловной программе* $Fx\to\inf$ *имеется инфинитезимальное решение в том и только том случае, если, во-первых, образ* $F(X)$ *ограничен снизу и, во-вторых, существует стандартное обобщенное решение* $(x_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathrm{E}}$ *рассматриваемой программы, т. е.* $x_\varepsilon\in\operatorname{dom}F$ *и* $y\leqslant Fx_\varepsilon\leqslant y+\varepsilon$ *для всех* $\varepsilon\in\mathrm{E}$, *где* $y:=\inf F(X)$ *— значение программы.*

$\triangleleft$ В силу принципов идеализации и переноса с учетом 1.3 выводим

$$(\exists\bar{x}\in X)0\in DF(\bar{x})\leftrightarrow(\exists x\in X)(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon\in\mathrm{E})0\in\partial^{\varepsilon}F(x)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall^{\mathrm{st\,fin}}\mathrm{E}_0\subset\mathrm{E})(\exists x\in X)(\forall\varepsilon\in\mathrm{E}_0)0\in\partial^{\varepsilon}F(x)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon\in\mathrm{E})(\exists x_\varepsilon\in X)0\in\partial^{\varepsilon}F(x_\varepsilon)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall\varepsilon\in\mathrm{E})(\exists x_\varepsilon\in X)(\forall x\in X)Fx\geqslant Fx_\varepsilon-\varepsilon.\quad\triangleright$$

4.3. Рассмотрим *регулярную выпуклую программу*

$$Gx\leqslant0,\quad Fx\to\inf.$$

Таким образом, G, $F\colon X\to Y^{\cdot}$ (для простоты $\operatorname{dom}F=\operatorname{dom}G=X$), при каждом $x\in X$ либо $Gx\leqslant0$, либо $Gx\geqslant0$, и, кроме того, для некоторого $x_0\in X$ элемент $-Gx_0$ — это единица в Y.

4.4. *В случае стандартного антуража допустимая внутренняя точка* $\bar{x}$ *является инфинитезимальным решением рассматриваемой регулярной программы в том и только том случае, если совместна следующая система условий:*

$$\alpha,\ \beta\in{}^{\circ}[0,1_Y],\ \alpha+\beta=1_Y,\ \ker\alpha=0;$$
$$\beta G\bar{x}\approx0,\ 0\in D(\alpha F)(\bar{x})+D(\beta G)(\bar{x}).$$

$\triangleleft$ $\leftarrow$ При совместности рассматриваемой системы для допустимого x при некоторых бесконечно малых ε_1 и ε_2 будет

$$\alpha F\bar{x}\leqslant\alpha Fx+\beta Gx-\beta G\bar{x}+\varepsilon_1+\varepsilon_2\leqslant\alpha Fx+\varepsilon$$

для каждого стандартного $\varepsilon\in{}^{\circ}\mathrm{E}$. В частности, $\alpha(F\bar{x}-Fx)\leqslant\alpha\varepsilon$ при $\varepsilon\in{}^{\circ}\mathrm{E}$, ибо α — это стандартное отображение. В силу условия $\ker\alpha=0$ и общих свойств мультипликаторов видим, что $\bar{x}$ — инфинитезимальное решение.

$\rightarrow$ Пусть $y:=\inf\{Fx\colon x\in X,\ Gx\leqslant0\}$ — значение рассматриваемой программы. По условию и в силу принципа переноса y — стандартный элемент. Значит, вновь привлекая принцип переноса, по теореме о векторном минимаксе найдем стандартные мультипликаторы α, $\beta \in {}^\circ[0, 1_Y]$ такие, что

$$\alpha + \beta = 1_Y;$$
$$0 = \inf_{x \in X} (\alpha(Fx - y) + \beta Gx).$$

Обычным рассуждением [2] проверяется, что $\ker \alpha = 0$. Кроме того, поскольку $\bar{x}$ является инфинитезимально оптимальным решением, для некоторого бесконечно малого ε будет $F\bar{x} - y = \varepsilon$. Следовательно, при любом $x \in X$ справедливы оценки

$$-\alpha\varepsilon \leqslant \alpha Fx - \alpha F\bar{x} + \beta Gx.$$

В частности, $0 \geqslant \beta G\bar{x} \geqslant -\alpha\varepsilon \geqslant -\varepsilon$, т. е. $\beta G\bar{x} \approx 0$ и

$$0 \in \partial^{\alpha\varepsilon + \beta G\bar{x}}(\alpha F + \beta G)(\bar{x}) \subset D(\alpha F + \beta G)(\bar{x}),$$

ибо $\alpha\varepsilon + \beta G\bar{x} \approx 0$. $\triangleright$

4.5. Рассмотрим *регулярную в смысле Слейтера программу*

$$Ax = A\bar{x}, \quad Gx \leqslant 0, \quad Fx \to \inf,$$

т. е., во-первых, $A \in L(X, \mathfrak{X})$ — линейный оператор со значениями в некотором векторном пространстве $\mathfrak{X}$, отображения $G\colon X \to Z$ и $F\colon X \to Y$ — выпуклые операторы (для удобства $\operatorname{dom} F = \operatorname{dom} G = X$), во-вторых, Z — архимедово упорядоченное векторное пространство, Y — это стандартное K-пространство ограниченных элементов и, наконец, в-третьих, для некоторой допустимой точки x_0 элемент $-Gx_0$ является сильной единицей в Z.

4.6. *Допустимая точка $\bar{x}$ является инфинитезимальным решением регулярной в смысле Слейтера программы в том и только том случае, если совместна следующая система условий*:

$$\gamma \in L_+(Z, Y), \quad \mu \in L(\mathfrak{X}, Y); \quad \gamma G\bar{x} \approx 0;$$
$$0 \in DF(\bar{x}) + D(\gamma G)(\bar{x}) + \mu A.$$

$\triangleleft$ $\leftarrow$ При совместности рассматриваемой системы для всякой допустимой точки x и некоторых бесконечно малых ε_1 и ε_2 будет

$$F\bar{x} \leqslant Fx + \varepsilon_1 + \gamma Gx - \gamma G\bar{x} + \varepsilon_2 - \mu(Ax) + \mu(A\bar{x}) \leqslant$$
$$\leqslant Fx + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \gamma G\bar{x} \leqslant Fx + \varepsilon$$

при любом стандартном $\varepsilon \in {}^\circ\mathrm{E}$.

$\rightarrow$ Если $\bar{x}$ — инфинитезимальное решение, то оно и ε-решение для подходящего бесконечно малого ε. Остается привлечь соответствующий критерий ε-оптимальности. $\triangleright$

4.7. Допустимая точка $\bar{x}$ называется *инфинитезимально оптимальной по Парето*, если $\bar{x}$ является ε-оптимальной по Парето для какого-нибудь бесконечно малого ε (относительно сильной единицы 1_Y в Y).

4.8. *Пусть точка $\bar{x}$ инфинитезимально оптимальна по Парето в регулярной в смысле Слейтера программе. Тогда при некоторых линейных функционалах α, β, γ на пространствах Y, Z и $\mathfrak{X}$ соответственно совместна следующая система условий*:

$$\alpha > 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad \beta G\bar{x} \approx 0;$$
$$0 \in D(\alpha F)(\bar{x}) + D(\beta G)(\bar{x}) + \gamma A.$$

Если, в свою очередь, приведенные соотношения выполнены для некоторой допустимой точки $\bar{x}$, причем $\alpha(1_Y) = 1$ и $\ker \alpha \cap Y_+ = 0$, то $\bar{x}$ служит инфинитезимально оптимальным по Парето решением рассматриваемой программы.

◁ Первая часть доказываемого утверждения вытекает из обычного признака ε-оптимальности по Парето с учетом отмеченных ранее свойств бесконечно малых. Если же выполнена гипотеза второй части интересующего нас предложения, то, привлекая определения, для любого допустимого $x \in X$ выводим

$$0 \leqslant \alpha(Fx - F\bar{x}) + \beta Gx - \beta G\bar{x} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant \alpha(Fx - F\bar{x}) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \beta G\bar{x}$$

при подходящих бесконечно малых ε_1, ε_2. Положим $\varepsilon := \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \beta G\bar{x}$. Ясно, что $\varepsilon \approx 0$ и, кроме того, $\varepsilon \geqslant 0$. Если теперь для допустимого x верно $Fx - F\bar{x} \leqslant -\varepsilon \mathbf{1}_Y$, то имеем равенство $\alpha(F\bar{x} - Fx) = \varepsilon$. Иными словами, $\alpha(Fx - F\bar{x} - \varepsilon \mathbf{1}_Y) = 0$ и $Fx - F\bar{x} = \varepsilon \mathbf{1}_Y$. Последнее как раз и означает, что $\bar{x}$ — это ε-оптимальное по Парето решение. ▷

4.9. По описанному образцу можно получить признаки инфинитезимальных решений и в других основных формах задач выпуклого программирования, например, вывести нестандартные аналоги теоремы о характеристике естественным образом определяемых инфинитезимально оптимальных траекторий в конечно-шаговых терминальных динамических задачах (ср. [4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кутателадзе С. С.* Выпуклое ε-программирование.— Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 5, с. 1048—1050.
2. *Кутателадзе С. С.* ε-субдифференциалы и ε-оптимальность.— Сиб. мат. журн., 1980, т. 21, № 1, с. 120—130.
3. *Hiriat-Urruty J.-B.* ε-subdifferential calculus.— In: Convex analysis and optimization. Boston — London — Melbourne: Pitman, 1982, p. 43—92.
4. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Локальный выпуклый анализ.—В кн.: Современные проблемы математики. Т. 19. М.: ВИНИТИ, 1982, с. 155—206.
5. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы и их применения.— Новосибирск: НГУ, 1985.
6. *Robinson A.* Non-standard analysis. Amsterdam — London: North Holland, 1970.
7. *Девис М.* Прикладной нестандартный анализ.— М.: Мир, 1980.
8. *Nelson E.* Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis.— Bull. Amer. Math. Soc., 1977, v. 86, N 6, p. 1165—1196.
9. *Кусраев А. Г.* Абстрактное дезинтегрирование в пространствах Канторовича.— Сиб. мат. журн., 1984, т. 25, № 5, с. 79—89.
10. *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения.— М.: Наука, 1971.
11. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике.— М.: Наука, 1985.

г. Новосибирск

Статья поступила 4 июля 1985 г.