ISSN 0037-4474

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

(Отдельный оттиск)

ТОМ XXVIII № 1 1987

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXVIII, № 1 ЯНВАРЬ — ФЕВРАЛЬ 1987

УДК 517.43

Светлой памяти
Леонида Витальевича Канторовича
посвящаю

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОНЯТИЯХ, БЛИЗКИХ К НЕПРЕРЫВНОСТИ

В связи с развитием некоторых разделов прикладного анализа и, прежде всего, субдифференциального исчисления в последние годы заметно вырос интерес ко всему спектру топологических понятий, близких к непрерывности. Обзор подходов к построению и изучению касательных на основе конструкций типа верхних и нижних пределов последовательностей множеств дан Ш. Долецким в [1]. В [2] Ж.-П. Пено ввел понятия компактного фильтра и компактной сети и продемонстрировал возможности их использования в приложениях к достаточным условиям оптимальности, к задачам о возмущении программ и т. п. Цель настоящей статьи — показать эффективность средств нестандартного анализа в этой проблематике. В работе устанавливается общий факт, унифицирующий языковые средства, употребляемые при исследовании свойств, родственных непрерывности. На этой основе выводятся новые признаки компактности фильтров, субнепрерывности, пределов соответствий, а также даются простые нестандартные доказательства и обобщения некоторых связанных с ними утверждений из [3, 4].

§ 1. Монады и сети

1.0. В этом параграфе собраны необходимые вспомогательные сведения, касающиеся использования нестандартных средств в теории фильтров. Относительно деталей монадологии см. [5, 6]. Используемый подход к подсетям предложен в [7].

1.1. Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в множестве X. В обычной гипотезе *«стандартности антуража»* — в предположении стандартности всех не описанных явно параметров (в данном случае $\mathscr{F}$ и X) — определяют *монаду* $\mu(\mathscr{F})$ соотношением $\mu(\mathscr{F}):=\bigcap{}^{\circ}\mathscr{F}$, где ${}^{\circ}\mathscr{F}$ — *стандартное ядро* $\mathscr{F}$, т. е. внешнее множество стандартных элементов $\mathscr{F}$. Если $\mathscr{B}$ служит базисом фильтра $\mathscr{F}$, то считают $\mu(\mathscr{B}):=\mu(\mathscr{F})$. Полезно отметить, что монада является внутренним множеством в том и только том случае, если она стандартна (и, стало быть, исходный фильтр составлен всеми надмножествами своей монады).

1.2. Пусть $\Gamma\subset X\times Y$ — соответствие из X в Y и фильтр $\mathscr{F}$ задевает $\operatorname{dom}\Gamma$, т. е. $(\forall F\in\mathscr{F})F\cap\operatorname{dom}\Gamma\neq\varnothing$ или, что то же самое, $\mu(\mathscr{F})\cap\operatorname{dom}\Gamma\neq\varnothing$. Рассмотрим *образ* $\Gamma(\mathscr{F})$ *фильтра* $\mathscr{F}$, заданный соотношением

$$\Gamma(\mathscr{F}):=\{G\subset Y:\ (\exists F\in\mathscr{F})G\supset\Gamma(F)\}.$$

Монада образа есть образ монады, т. е.

$$\mu(\Gamma(\mathscr{F}))=\Gamma(\mu(\mathscr{F}))$$

(здесь используется сильная форма принципа идеализации).

1.3. Пусть Ξ — направление, т. е. непустое направленное множество. В соответствии с принципом идеализации в Ξ имеются внутренние элементы, мажорирующие ${}^{\circ}\Xi$. Их называют *удаленными* или *бесконечно большими* в Ξ. Рассмотрим стандартный базис фильтра хвостов $\mathscr{B}:=\{\sigma(\xi):\ \xi\in\Xi\}$, где σ — порядок в Ξ. Ясно, что монада фильтра хвостов составлена из удаленных элементов рассматриваемого направления. Используют записи ${}^a\Xi := \mu(\mathscr{B})$ и $\xi \approx +\infty \leftrightarrow \xi \in {}^a\Xi$.

1.4. *Пусть* Ξ, H — *два направления и* $\xi := \xi(\cdot)\colon \mathrm{H} \to \Xi$ — *некоторое отображение. Эквивалентны следующие утверждения*:

(1) $\xi({}^a\mathrm{H}) \subset {}^a\Xi$;

(2) $(\forall \xi \in \Xi)(\exists \eta \in \mathrm{H})(\forall \eta' \geqslant \eta) \quad \xi(\eta') \geqslant \xi$.

$\triangleleft$ В самом деле, (1) означает, что фильтр хвостов Ξ грубее образа фильтра хвостов H, т. е. что в каждом хвосте направления Ξ лежит образ некоторого хвоста H. Последнее утверждение и составляет содержание (2). $\triangleright$

1.5. При выполнении эквивалентных условий 1.4(1), 1.4(2) говорят, что H — *поднаправление* Ξ (относительно $\xi(\cdot)$).

1.6. Пусть X — некоторое множество и $x := x(\cdot)\colon \Xi \to X$ — некоторая *сеть* элементов X (пишем также $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ или просто (x_ξ)). Пусть, далее, $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ — еще одна сеть элементов X. Говорят, что (y_η) — *подсеть Мура* сети (x_ξ), или *строгая подсеть* (x_ξ), если H является поднаправлением Ξ относительно такого $\xi(\cdot)$, что $y_\eta = x_{\xi(\eta)}$ при всех $\eta \in \mathrm{H}$, т. е. $y = x \circ \xi$. Подчеркнем, что в силу 1.2 выполнено $y({}^a\mathrm{H}) \subset x({}^a\Xi)$.

1.7. Последнее указанное свойство подсетей Мура положено в [7] в основу более свободного определения подсети, которое привлекает непосредственной связью с фильтрами, а именно: сеть $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ элементов X называют *подсетью* (или *подсетью в широком смысле слова*) сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов X, если

$$(\forall \xi \in \Xi)(\exists \eta \in \mathrm{H})(\forall \eta' \geqslant \eta)(\exists \xi' \geqslant \xi) \quad x(\xi') = y(\eta'),$$

т. е. в случае, когда каждый хвост сети x содержит некоторый хвост y. На языке монад, разумеется, выполнено $y({}^a\mathrm{H}) \subset x({}^a\Xi)$, или в наглядной записи —

$$(\forall \eta \approx +\infty)(\exists \xi \approx +\infty) \quad y_\eta = x_\xi.$$

При этом, стремясь к образности, часто пишут: $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ — подсеть сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ (что может привести к недоразумениям). Полезно подчеркнуть, что в общем случае подсети не обязаны являться подсетями Мура. Отметим также, что две сети в одном множестве называются *эквивалентными*, если каждая из них — подсеть другой, т. е. если их монады совпадают [7].

1.8. Если $\mathscr{F}$ — фильтр в X и (x_ξ) — сеть элементов X, то говорят, что рассматриваемая *сеть подчинена* $\mathscr{F}$ при условии $\xi \approx +\infty \to x_\xi \in \mu(\mathscr{F})$. Иначе говоря, сеть (x_ξ) подчинена $\mathscr{F}$, если фильтр ее хвостов тоньше $\mathscr{F}$. При этом допускают вольность и пишут $x_\xi \downarrow \mathscr{F}$, имея в виду аналогию с топологическими обозначениями сходимости. Отметим здесь же, что в случае, когда $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, F совпадает с фильтром хвостов любой подчиненной ему сети (x_ξ). В частности, сама такая сеть (x_ξ) — *ультрасеть* [7].

1.9. Теорема. *Пусть* $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — *формула теории Цермело-Френкеля, не содержащая никаких свободных параметров, кроме* x, y, z, *причем* z — *стандартное множество. Пусть, далее,* $\mathscr{F}$ — *фильтр в* X, *а* $\mathscr{G}$ — *фильтр в* Y. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $(\forall G \in \mathscr{G})(\exists F \in \mathscr{F})(\forall x \in F)(\exists y \in G) \quad \varphi(x, y, z)$;

(2) $(\forall x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists y \in \mu(\mathscr{G})) \quad \varphi(x, y, z)$;

(3) *для любой сети* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *элементов* X, *подчиненной* $\mathscr{F}$, *найдутся сеть* $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ *элементов* Y, *подчиненная* $\mathscr{G}$, *и строгая подсеть* $(x_{\xi(\eta)})_{\eta\in\mathrm{H}}$ *сети* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *такие, что при всех* $\eta \in \mathrm{H}$ *будет* $\varphi(x_{\xi(\eta)}, y_\eta, z)$, *т. е. символически*

$$(\forall x_\xi \downarrow \mathscr{F})(\exists y_\eta \downarrow \mathscr{G}) \quad \varphi(x_{\xi(\eta)}, y_\eta, z);$$

(4) *для любой сети* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *элементов* X, *подчиненной* $\mathscr{F}$, *найдутся сеть* $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ *элементов* Y, *подчиненная* $\mathscr{G}$, *и подсеть* $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ *сети* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *такие, что при всех* $\eta \in \mathrm{H}$ *будет* $\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$, *т. е. символически*

$$(\forall x_\xi \downarrow \mathscr{F})(\exists y_\eta \downarrow \mathscr{G}) \quad \varphi(x_\eta, y_\eta, z);$$

(5) *для любой ультрасети* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *элементов* X, *подчиненной* $\mathscr{F}$, *найдутся ультрасеть* $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$, *подчиненная* $\mathscr{G}$, *и ультрасеть* $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$, *эквивалентная* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$, *такие, что* $\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$ *при всех* $\eta\in\mathrm{H}$.

$\lhd$ (1)→(2). Пусть $x\in\mu(\mathscr{F})$. По принципу переноса для каждого стандартного G имеется стандартное F такое, что $(\forall x\in F)(\exists y\in G)$ $\varphi(x, y, z)$. Значит, для $x\in\mu(\mathscr{F})$ будет $(\forall G\in{}^\circ\mathscr{G})(\exists y\in G)$ $\varphi(x, y, z)$. Привлекая принцип идеализации, выводим: $(\exists y)(\forall G\in{}^\circ\mathscr{G})$ $y\in G\wedge\wedge\varphi(x, y, z)$. Итак, $y\in\mu(\mathscr{G})$ и $\varphi(x, y, z)$.

(2)→(3). Пусть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — стандартная сеть в X, подчиненная $\mathscr{F}$. Для каждых стандартных G из $\mathscr{G}$ и $\xi\in\Xi$ положим

$$A_{(G,\xi)}:=\{\xi'\geqslant\xi\colon(\forall\xi''\geqslant\xi')(\exists y\in G)\quad\varphi(x_{\xi''}, y, z)\}.$$

На основании 1.1 и 1.2 видим, что ${}^\circ\Xi\subset A_{(G,\xi)}$. Учитывая, что $A_{(G,\xi)}$ — внутреннее множество, по принципу Коши заключаем: ${}^\circ A_{(G,\xi)}\neq\varnothing$. Тем самым на направлении $\mathrm{H}:=\mathscr{G}\times\Xi$ (с естественным упорядочением) заданы стандартные отображения $\xi\colon\mathrm{H}\to\Xi$ и $y\colon\mathrm{H}\to Y$ такие, что $\xi(\eta)\in\in A_{(G,\xi)}$ и $y_\eta\in G$ при $G\in\mathscr{G}$ и $\xi\in\Xi$, для которых $\eta=(G, \xi)$. Видно, что $\xi(\eta)\approx+\infty$ и $y_\eta\in\mu(\mathscr{G})$ при $\eta\approx+\infty$.

(3)→(4). Очевидно.

(4)→(1). Если (1) не выполнено, то по условию

$$(\exists G\in\mathscr{G})(\forall F\in\mathscr{F})(\exists x\in F)(\forall y\in G)\quad\neg\varphi(x, y, z).$$

Для $F\in\mathscr{F}$ выбираем $x_F\in F$ так, чтобы было $\neg\varphi(x, y, z)$ при всех $y\in G$. Отметим, что получаемую сеть $(x_F)_{F\in\mathscr{F}}$ элементов X, равно как и множество G можно считать стандартными на основании принципа переноса. Нет сомнений, что $x_F\downarrow\mathscr{F}$ и, стало быть, в силу (3) найдутся направление H и подсеть $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ сети $(x_F)_{F\in\mathscr{F}}$ такие, что для некоторой сети $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ будет $\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$ при каждом $\eta\in\mathrm{H}$. По определению 1.7 x_η при каждом бесконечно большом η совпадает с x_F для некоторого удаленного F, т. е. $x_\eta\in\mu(\mathscr{F})$. По условию $y_\eta\in\mu(\mathscr{G})$ и тем более $y_\eta\in G$. При этом оказывается $\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$ и $\neg\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$, чего быть не может. Полученное противоречие свидетельствует о ложности сделанного допущения. Таким образом, (1) выполнено (как только имеет место (4)).

(1)↔(5). Для доказательства требуемой эквивалентности достаточно заметить, что она становится очевидной в случае, когда $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ суть ультрафильтры (ср. 1.8). Остается вспомнить, что каждая монада есть объединение монад ультрафильтров. $\rhd$

1.10. В приложениях бывает удобным рассматривать конкретизации 1.9, отвечающие случаям, в которых один из фильтров дискретен. Так, используя естественные обозначения, выводим

$$(\exists x\in\mu(\mathscr{F}))\quad\varphi(x, y)\leftrightarrow(\exists x_\xi\downarrow\mathscr{F})\quad\varphi(x_\xi, y);$$

$$(\forall x\in\mu(\mathscr{F}))\quad\varphi(x, y)\leftrightarrow(\forall x_\xi\downarrow\mathscr{F})(\exists x_\eta\downarrow\mathscr{F})\quad\varphi(x_\eta, y).$$

§ 2. Пределы соответствий

2.0. В этом параграфе собраны вспомогательные, как правило, известные сведения о пределах семейств множеств, используемые в дальнейшем. Относительно истории вопроса см. [1, 8].

2.1. Пусть $\Gamma\subset X\times Y$ — внутреннее соответствие из стандартного множества X в стандартное множество Y. Допустим, что в X выделен стандартный фильтр $\mathscr{F}$, а в Y — топология τ. Полагаем (ср. [9])

$$\forall\forall(\Gamma):={}^*\{y'\colon(\forall x\in\mu(\mathscr{F})\cap\operatorname{dom}\Gamma)(\forall y\approx y')\quad(x, y)\in\Gamma\};$$

$$\exists\forall(\Gamma):={}^*\{y'\colon(\exists x\in\mu(\mathscr{F})\cap\operatorname{dom}\Gamma)(\forall y\approx y')\quad(x, y)\in\Gamma\};$$

$$\forall\exists(\Gamma):={}^*\{y'\colon(\forall x\in\mu(\mathscr{F})\cap\operatorname{dom}\Gamma)(\exists y\approx y')\quad(x, y)\in\Gamma\};$$

$$\exists\exists(\Gamma):={}^*\{y'\colon(\exists x\in\mu(\mathscr{F})\cap\operatorname{dom}\Gamma)(\exists y\approx y')\quad(x, y)\in\Gamma\},$$

где, как обычно, * — символ *стандартизации*, а запись $y \approx y'$ означает, что $y \in \mu(\tau(y'))$. Множество $Q_1Q_2(\Gamma)$ называют *Q_1Q_2-пределом* Γ (здесь Q — один из кванторов $\forall$ или $\exists$).

2.2. В топологии обычно ограничиваются случаем, когда Γ — стандартное соответствие, определенное на некотором элементе фильтра $\mathcal{F}$. При этом изучают $\exists\exists$-предел и $\forall\exists$-предел. Первый называют *верхним пределом*, а второй — *нижним пределом* Γ *вдоль* $\mathcal{F}$.

Если рассматривается сеть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в области определения Γ, то, имея в виду фильтр хвостов сети, полагают

$$\mathrm{Li}_{\xi\in\Xi}\Gamma := \liminf_{\xi\in\Xi}\Gamma(x_\xi) := \forall\exists(\Gamma);$$

$$\mathrm{Ls}_{\xi\in\Xi}\Gamma := \limsup_{\xi\in\Xi}\Gamma(x_\xi) := \exists\exists(\Gamma).$$

В таких случаях чаще всего говорят о *пределах Куратовского*.

2.3. Для стандартного соответствия Γ справедливы представления

$$\exists\exists(\Gamma) = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{cl} \bigcup_{x\in F} \Gamma(x);$$

$$\forall\exists(\Gamma) = \bigcap_{F\in\ddot{\mathcal{F}}} \mathrm{cl} \bigcup_{x\in F} \Gamma(x),$$

где $\ddot{\mathcal{F}}$ — это так называемый *гриль* $\mathcal{F}$, т. е. семейство, составленное всеми подмножествами X, задевающими монаду $\mu(\mathcal{F})$. Иначе говоря,

$$\ddot{\mathcal{F}} = {}^*\{F' \subset X\colon F' \cap \mu(\mathcal{F}) \neq \varnothing\} = \{F' \subset X\colon (\forall F \subset \mathcal{F}) \quad F \cap F' \neq \varnothing\}.$$

Отметим в этой связи соотношения

$$\exists\forall(\Gamma) = \bigcup_{F\in\ddot{\mathcal{F}}} \mathrm{int} \bigcap_{x\in F} \Gamma(x);$$

$$\forall\forall(\Gamma) = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{int} \bigcap_{x\in F} \Gamma(x).$$

2.3. Из теоремы 1.9 мгновенно следует описание пределов на языке сетей.

2.4. *Элемент y лежит в $\forall\exists$-пределе Γ в том и только том случае, если для каждой сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов* $\mathrm{dom}\,\Gamma$, *подчиненной $\mathcal{F}$, найдутся подсеть $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и сеть $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$, сходящаяся к y, такие, что $(x_\eta, y_\eta) \in \Gamma$ для всех $\eta \in \mathrm{H}$.*

2.5. *Элемент y лежит в $\exists\exists$-пределе Γ в том и только том случае, если существуют сеть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов* $\mathrm{dom}\,\Gamma$, *подчиненная $\mathcal{F}$, и сеть $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$, сходящаяся к y, для которых $(x_\xi, y_\xi) \in \Gamma$ при любых $\xi \in \Xi$.*

2.6. *Для любого внутреннего соответствия Γ выполнено*

$$\forall\forall(\Gamma) \subset \exists\forall(\Gamma) \subset \forall\exists(\Gamma) \subset \exists\exists(\Gamma).$$

При этом $\exists\exists(\Gamma)$, $\forall\exists(\Gamma)$ — это замкнутые, а $\forall\forall(\Gamma)$ и $\exists\forall(\Gamma)$ — соответственно открытые множества.

$\triangleleft$ Искомые включения бесспорны. Таким образом, с учетом соображений двойственности установим для определенности замкнутость $\forall\exists$-предела.

Если V — стандартная открытая окрестность точки y' из $\mathrm{cl}\,\forall\exists(\Gamma)$, то имеется $y \in \forall\exists(\Gamma)$, для которого $y \in V$. Для $x \in \mu(\mathcal{F})$ подыщем y'' так, чтобы было $y'' \in \mu(\tau(y))$ и $(x, y'') \in \Gamma$. Ясно, что $y'' \in V$, ибо V — окрестность y. Итак,

$$(\forall x \in \mu(\mathcal{F}))\,(\forall V \in {}^\circ\tau(y'))\,(\exists y'' \in V) \quad (x, y'') \in \Gamma.$$

Используя принцип идеализации, выводим: $y' \in \forall\exists(\Gamma)$. $\triangleright$

2.7. *Пусть X, Y — топологические пространства, $\Gamma \subset X \times Y$. Эквивалентны утверждения*:

(1) Γ — *открытое соответствие* (= *сохраняет открытые множества*);

(2) Γ *открыто в каждой точке* $(x, y) \in \Gamma$;

(3) *если* $y_\xi \to y$, *то* $\Gamma^{-1}(y) \subset \liminf_{\xi \in \Xi} \Gamma^{-1}(y_\xi)$;

(4) *если* $y_\xi \to y$, *то* $\Gamma^{-1}(y) \subset \limsup_{\xi \in \Xi} \Gamma^{-1}(y_\xi)$.

$\lhd$ (1) $\to$ (2). Очевидно.

(2) $\to$ (3). Прежде всего заметим, что условие открытости в стандартной точке $(x, y) \in \Gamma$ означает следующее: $(\forall y' \approx y)(\exists x' \approx x)$ $(x', y') \in \Gamma$. Значит, при $x \in \Gamma^{-1}(y)$ и любом $\xi \approx +\infty$ для некоторого $x' \approx x$ выполнено $(x', y_\xi) \in \Gamma$, т. е. $x \in \liminf_{\xi \in \Xi} \Gamma^{-1}(y_\xi)$.

(3) $\to$ (4). Очевидно.

(4) $\to$ (1). Если Γ не открыто, то имеется открытое U в X, для которого $Y \backslash \Gamma(U)$ не замкнуто. Итак, существует сеть $(y_\xi) \subset Y \backslash \Gamma(U)$ такая, что $y_\xi \to y$ и $y \in \Gamma(U)$. Для всякого $x \in U$ найдется (ср. 2.3) сеть $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$, сходящаяся к x и обладающая тем свойством, что $x_\xi \in \Gamma^{-1}(y_\xi)$. Ясно, что для $\xi \approx +\infty$ будет $x_\xi \in U$. Получается противоречие. $\rhd$

2.8. *Пусть* X, Y — *топологические пространства и* $\Gamma \subset X \times Y$. *Эквивалентны утверждения*:

(1) Γ — *замкнутое множество в* $X \times Y$;

(2) *если* $y_\xi \to y$, *то* $\limsup_{\xi \in \Xi} \Gamma^{-1}(y_\xi) \subset \Gamma^{-1}(y)$;

(3) *если* $y_\xi \to y$, *то* $\liminf_{\xi \in \Xi} \Gamma^{-1}(y_\xi) \subset \Gamma^{-1}(y)$.

$\lhd$ (1) $\to$ (2). Если $y_\xi \to y$ и x лежит в соответствующем верхнем пределе, то найдутся индекс $\xi \approx +\infty$ и элемент $x' \approx x$, для которых $(x', y_\xi) \in \Gamma$. Поскольку $y_\xi \approx y$, мы видим, что $(x, y) \in \Gamma$ (ибо в Γ входит бесконечно близкий к этой точке элемент).

(2) $\to$ (3). Очевидно.

(3) $\to$ (1). Если $(x_\xi, y_\xi) \in \Gamma$ и $x_\xi \to x$, $y_\xi \to y$, то с учетом теоремы 1.9 будет $x \in \liminf_{\xi \in \Xi} \Gamma^{-1}(y_\xi)$. Стало быть, $(x, y) \in \Gamma$. $\rhd$

2.9. Предложения 2.7 и 2.8 фактически восходят к Куратовскому [8], см. также теоремы 1.2 и 6.2 в [3].

§ 3. Компактность и субнепрерывность

3.0. В этом параграфе даются стандартные и нестандартные критерии компактности и аналогичных понятий для фильтров, детализирующие классические факты нестандартной общей топологии [5, 6]. Приведены приложения к теории субнепрерывных соответствий, развитой в [3, 4].

3.1. Фильтр $\mathscr{F}$ (в топологическом пространстве X) называют *компактным* (см. [2]), если каждый фильтр, более тонкий, чем $\mathscr{F}$, имеет точку прикосновения в X. Соответственно сеть называют *компактной*, если каждая ее подсеть имеет сходящуюся подсеть.

3.2. *Стандартный фильтр* $\mathscr{F}$ *в* X *является компактным в том и только том случае, если каждая точка его монады околостандартна*: $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{nst}(X)$.

$\lhd \to$ Пусть $x \in \mu(\mathscr{F})$. Рассмотрим ультрафильтр $(x) := {}^*\{U \subset X: x \in U\}$ в исходном пространстве X. Ясно, что $(x) \supset \mathscr{F}$ и, стало быть, имеется стандартная точка x' такая, что $x \approx x'$. Иными словами, x — околостандартная точка.

$\leftarrow$ Если $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}$, то $\mu(\mathscr{G}) \subset \mu(\mathscr{F})$. Пусть $x \in \mu(\mathscr{G})$. Тогда $x \in \operatorname{nst}(X)$, т. е. для некоторой $x' \in {}^\circ X$ будет $x \approx x'$. Последнее означает, что x' — точка прикосновения $\mathscr{F}$. $\rhd$

3.3. *Фультр* $\mathscr{F}$ *в* X *является компактным в том и только том случае, если для любого открытого покрытия множества* X *найдется конечное подпокрытие некоторого элемента из* $\mathscr{F}$.

$\lhd \to$ Достаточно работать в стандартном антураже. Итак, если $\mathscr{F}$ компактен, то $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{nst}(X)$. Учитывая, что $\operatorname{nst}(X)$ лежит в монаде любого стандартного покрытия $\mathscr{E}$, выводим: $(\exists F \in \mathscr{F})(\forall x \in F)(\exists E \in {}^\circ\mathscr{E})$ $x \in E$. В качестве искомого F можно взять любой бесконечно малый элемент $\mathscr{F}$. Применяя последовательно принципы идеализации и переноса, получим требуемое.

$\leftarrow$ Пусть $\mathscr{E}$ — открытое покрытие X и $\mu(\mathscr{E})$ — объединение стандартных элементов $\mathscr{E}$, т. е. монада $\mathscr{E}$. По принципу переноса имеются стандартное $F \in \mathscr{F}$ и конечное стандартное подмножество $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$ такие, что $\cup\mathscr{E}_0 \supset F \supset \mu(\mathscr{F})$. Значит, $\mu(\mathscr{F}) \subset \mu(\mathscr{E})$. Остается вспомнить, что $\operatorname{nst}(X)$ — это в точности пересечение монад стандартных открытых покрытий X. $\triangleright$

3.4. Сформулированный в 3.3 признак делает естественным поиск аналога критерия Хаусдорфа для фильтров. В этой связи будем рассматривать равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$.

3.5. Фильтр $\mathscr{F}$ в X называют *вполне ограниченным*, если для каждого окружения $U \in \mathscr{U}$ имеется конечная U-сеть некоторого элемента F фильтра $\mathscr{F}$.

3.6. Фильтр $\mathscr{F}$ в X называют *полным*, если каждый фильтр Коши, более тонкий, чем $\mathscr{F}$, сходится в X.

3.7. *Стандартный фильтр является полным в том и только том случае, если каждая предстандартная точка его монады околостандартна.*

$\triangleleft$ $\rightarrow$ Пусть $\mathscr{F}$ — полный фильтр и $x \in \operatorname{pst}(X) \cap \mu(\mathscr{F})$ — предстандартная точка монады $\mathscr{F}$. Предстандартность x означает, что x лежит в монаде некоторого фильтра Коши $\mathscr{G}$. При этом $\mu(\mathscr{F}) \cap \mu(\mathscr{G}) \neq \varnothing$. Ясно, что верхняя грань $\mathscr{G}$ и $\mathscr{F}$ — это фильтр Коши и, стало быть, имеется точка $x' \in {}^\circ X$, для которой $x' \in \mu(\mathscr{G}) \cap \mu(\mathscr{F})$. Отсюда $x' \approx x$ и $x \in \operatorname{nst}(X)$.

$\leftarrow$ Пусть $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — фильтр Коши. Если $x \in \mu(\mathscr{G})$, то $x \in \mu(\mathscr{F}) \subset \subset \operatorname{nst}(X)$. Значит, у $\mathscr{G}$ есть точка прикосновения. $\triangleright$

3.8. *Стандартный фильтр является вполне ограниченным в том и только том случае, если каждая точка его монады предстандартна.*

$\triangleleft$ $\rightarrow$ По принципу переноса для каждого стандартного окружения U из $\mathscr{U}$ имеются стандартный элемент F фильтра $\mathscr{F}$ и конечное стандартное множество E такие, что $U(E) \supset F$. Стало быть, $\mu(\mathscr{F}) \subset U(E)$. Тем самым для $x \in \mu(\mathscr{F})$ и любого $U \in {}^\circ\mathscr{U}$ будет $x \in U(x')$ при подходящем стандартном x'. Положим $\mathscr{G} := {}^*\{U(x') \colon\ U \in \mathscr{U},\ x \in U(x')\}$. Ясно, что $\mathscr{G}$ — базис фильтра Коши и $x \in \mu(\mathscr{G})$ по построению. Следовательно, $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{pst}(X)$.

$\leftarrow$ Допустим, что рассматриваемый фильтр $\mathscr{F}$ таков, что $\mu(\mathscr{F}) \subset \subset \operatorname{pst}(X)$, и тем не менее $\mathscr{F}$ не вполне ограничен. По принципу переноса имеется стандартное окружение U из ${}^\circ\mathscr{U}$ такое, что для всяких $F \in {}^\circ\mathscr{F}$ и любого стандартного конечного множества E найдется $x \in F$, не попадающий в $U(E)$. По принципу идеализации имеется элемент $x \in \mu(\mathscr{F})$ такой, что $x \notin U(y)$ для каждого стандартного $y \in X$. По условию $x \in \in \mu(\mathscr{G})$, где $\mathscr{G}$ — фильтр Коши. Возьмем $G \in {}^\circ\mathscr{G}$ так, чтобы было $G \times G \subset \subset U$. Тогда для всякого $y \in G$ выполнено $x \in \mu(\mathscr{G}) \subset U(y)$ вопреки исходному допущению. $\triangleright$

3.9. Критерий Хаусдорфа для фильтров. *Фильтр является компактным в том и только том случае, если он полон и вполне ограничен.*

$\triangleleft$ $\rightarrow$ Достаточно работать в стандартном антураже. Если $\mathscr{F}$ компактен, то $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{nst}(X)$ по 3.2. Учитывая, что $\operatorname{nst}(X) \subset \operatorname{pst}(X)$, заключаем: $\mathscr{F}$ полон и вполне ограничен.

$\leftarrow$ Если $\mathscr{F}$ вполне ограничен, то по 3.8 $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{pst}(X)$. Если $\mathscr{F}$ полон, то $\mu(\mathscr{F}) \cap \operatorname{pst}(X) \subset \operatorname{nst}(X)$. Отсюда выводим: $\mu(\mathscr{F}) = \mu(\mathscr{F}) \cap \operatorname{pst}(X) \subset \subset \operatorname{nst}(X)$. Остается сослаться на 3.2. $\triangleright$

3.10. Найденные признаки могут быть положены в основу изучения различных топологических понятий, близких к непрерывности. Остановимся здесь на одном из них (см. [2—4]).

3.11. Соответствие Γ, действующее из X в Y, называют *субнепрерывным в точке x* из $\operatorname{dom}\Gamma$, если образ фильтра окрестностей точки x при Γ является компактным в Y. Соответствие Γ, субнепрерывное в каждой точке $\operatorname{dom}\Gamma$, называют *субнепрерывным*.

3.12. *Стандартное соответствие* Γ *из X в Y субнепрерывно в том и только том случае, если* $\Gamma(\operatorname{nst}(X)) \subset \operatorname{nst}(Y)$.

◁ Доказательство следует из 1.2 и 3.2, ибо $\operatorname{nst}(X)$ представляет собой объединение монад точек стандартного ядра $^\circ X$. ▷

3.13. *Соответствие субнепрерывно в том и только том случае, если оно переводит компактные фильтры в компактные.*

◁ Поскольку фильтр окрестностей точки заведомо компактен, достаточность приведенного условия бесспорна. Пусть теперь заранее известно, что соответствие субнепрерывно. Без умаления общности можно работать в стандартном антураже. Привлекая 3.12 и 3.2, видим, что в данной ситуации образ стандартного компактного фильтра компактен. Остается сослаться на принцип переноса. ▷

3.14. В связи с критерием 3.13 субнепрерывные соответствия называют иногда *компактными* (ср. [2]).

3.15. *Субнепрерывное соответствие, действующее в хаусдорфово пространство, сохраняет относительную компактность.*

◁ Если U — *стандартное относительно компактное множество в* X, то $U \subset \operatorname{nst}(X)$. Стало быть, $\Gamma(U) \subset \operatorname{nst}(Y)$. Известно [5], что в этом случае $\Gamma(U)$ относительно компактно. ▷

3.16. *Пусть* Γ — *замкнутое субнепрерывное соответствие. Тогда* Γ *полунепрерывно сверху.*

◁ По принципу переноса можно работать в стандартном антураже. Итак, пусть A — стандартное замкнутое множество и $x \in \operatorname{cl}\Gamma^{-1}(A)$. Имеется $x' \approx x$, для которого при некотором $a' \in A$ будет $(x', a') \in \Gamma$. Раз $a' \in \Gamma(\operatorname{nst}(X))$, то найдется стандартное a в образе, для которого $a \approx a'$. В силу замкнутости A выводим: $a \in A$. В силу замкнутости Γ выполнено $(x, a) \in \Gamma$. Итак, $x \in \Gamma^{-1}(A)$. ▷

3.17. Предложение 3.16 фактически установлено в [4] и обобщает более раннее утверждение о функциях из [3]. В заключение с помощью теоремы 1.9 дадим простое нестандартное доказательство небольшой модификации критерия непрерывности 5.1 из [3].

3.18. *Пусть* $f\colon X \to Y$ — *функция, действующая в хаусдорфово пространство. Тогда* f *непрерывна в том и только том случае, если для каждой точки* x *из* X *имеется элемент* y *из* Y *такой, что условие* $x_\xi \to x$ *влечет существование подсети* $(x_\eta)_{\eta \in \mathrm{H}}$, *для которой* $f(x_\eta) \to y$.

◁ Нуждается в проверке лишь достаточность сформулированного признака. Будем работать в стандартном антураже. По условию имеем

$$(\forall x_\xi \to x)\,(\exists y_\eta \to y)\quad (x_\eta, y_\eta) \in f.$$

На основании теоремы 1.9 последнее соотношение можно переписать в виде

$$(\forall x' \approx x)\,(\exists y' \approx y)\quad (x', y') \in f.$$

В частности, для некоторого $y' \approx y$ выполнено $y' = f(x)$. В силу хаусдорфовости Y заключаем, что $y = f(x)$. Кроме того, $x' \approx x \to f(x') \approx f(x)$, т. е. f — непрерывная функция. ▷

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dolecki Sz.* Tangency and differentiation: some applications of convergence theory.— Annali di Matematica pura ed applicata, 1982, v. 130, p. 223—255.
2. *Penot J.-P.* Compact nets, filters and relations.— J. Math. Anal. Appl., 1983, v. 93, N 2, p. 400—417.
3. *Fuller R. V.* Relations among continuous and various non-continuous functions.— Pacific J. Math., 1968, v. 25, N 3, p. 495—509.
4. *Smithson R. E.* Subcontinuity for multifunctions.— Pacific J. Math., 1975, v. 61, N 4, p. 283—288.

5. *Luxemburg W. A. J.* A general theory of monads.— In: Applications of model theory to algebra, analysis and probability. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969, p. 18—86.
6. *Stroyan K. D., Luxemburg W. A. J.* Introduction to the theory of infinitesimals.— New York: Acad. Press, 1976.
7. *Aarnes J. F., Andenaes P. R.* On nets and filters.— Math. Scand., 1972, v. 31, N 2, p. 285—292.
8. *Куратовский К.* Топология. Т. 1.— М.: Мир, 1966.
9. *Кутателадзе С. С.* Инфинитезимальные касательные конусы.— Сиб. мат. журн., 1985, т. 26, № 6, с. 67—76.

г. Новосибирск

Статья поступила
24 января 1985 г.