СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXVIII, 4 ИЮЛЬ — АВГУСТ 1987

АКАДЕМИК АЛЕКСАНДР ДАНИЛОВИЧ АЛЕКСАНДРОВ (К СЕМИДЕСЯТИПЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

Выдающийся советский математик, один из крупнейших современных геометров Александр Данилович Александров родился 4 августа 1912 г. в деревне Волынь бывшей Рязанской губернии в семье учителей средней школы. В 1933 г. он окончил физический факультет Ленинградского государственного университета, где его учителями были Б. Н. Делоне и В. А. Фок. Научная деятельность А. Д. Александрова началась в студенческие годы, а к концу 30-х годов его геометрические исследования приобретают широкую известность. Среди работ этого периода наиболее ярким достижением явилась теорема о том, что аналитические замкнутые поверхности с положительной гауссовой кривизной равны и параллельно расположены, если индикатрисы Дюпена этих поверхностей в точках с одинаково направленными внешними нормалями нельзя поместить одну внутри другой параллельным сдвигом. Эта теорема поглотила, в частности, классические теоремы Кристоффеля (1867 г.) и Минковского (1899 г.) об определяемости с точностью до переноса замкнутых аналитических поверхностей положительной гауссовой кривизны суммой (соответственно произведением) главных радиусов кривизны как функцией внешней нормали. Более того, в ней содержится бесконечное множество аналогичных теорем: вместо суммы или произведения можно с успехом рассматривать любую функцию $f(x, y, \boldsymbol{n})$ вектора $\boldsymbol{n}$ внешней нормали и численных переменных x, y, определенную при $x \geqslant y$ и возрастающую по x, y. Действительно, совпадение таких функций для двух поверхностей очевидным образом обеспечивает соотношение их индикатрис Дюпена, фигурирующее в теореме Александрова. Элементарным аналогом этой теоремы является теорема Александрова о совпадении с точностью до переноса двух замкнутых выпуклых многогранников, у которых грани с одинаково направленными внешними нормалями нельзя поместить параллельным сдвигом одну внутри другой. Вопрос о теореме, верной для любых замкнутых выпуклых поверхностей и содержащей в качестве частных случаев указанные теоремы об аналитических поверхностях и многогранниках, остается открытым. Что касается ослабления условия аналитичности рассматриваемых поверхностей, то в 1955 г. А. Д. Александрову удалось заменить его в теореме о поверхностях с данной функцией $f(x, y, \boldsymbol{n})$ требованием двукратной дифференцируемости (при некоторых предположениях о регулярности функции f).

Приведенные теоремы о замкнутых поверхностях типичны для так называемой геометрии в целом сочетанием разнородных условий — дифференциально-геометрического условия, касающегося радиусов кривизны, и топологического условия замкнутости поверхности. Необходимость учета далеких друг от друга условий обычно «изолирует» такие теоремы друг от друга (так, теоремы Кристоффеля и Минковского разделяет более тридцати лет). Тем более замечательна теорема Александрова, выявившая единое основание внешне совершенно различных утверждений. Что касается существования замкнутой поверхности с той или иной наперед заданной геометрической характеристикой как функцией внешней нормали, то исследована лишь одна из таких функций, но зато исчерпывающим образом. А именно, введя естественное понятие поверхностной функции, А. Д. Александров в 1938 г. доказал теорему о произвольных замкнутых выпуклых поверхностях, содержащую как частный случай классическую теорему Минковского о существовании замкнутого выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней, подчиненными простым необходимым условиям.

Древнейшей проблемой геометрии в целом был вопрос о равенстве замкнутых выпуклых многогранников, одинаково составленных из равных граней. Предположение о справедливости такой теоремы высказывал еще Евклид, а доказательство было найдено Коши в 1813 г. Теорему Коши можно несколько усилить, придав ей такую форму: замкнутый выпуклый многогранник однозначно (с точностью до равенства) определен своей внутренней метрикой (внутренней метрикой поверхности, в частности многогранника, называют ту, в которой расстояние между точками X, Y равно точной нижней границе длин кривых на поверхности, соединяющих X и Y). В этой связи наиболее принципиальным вопросом, касающимся связи между замкнутыми выпуклыми многогранниками и их внутренними метриками, было выяснение условий, характеризующих внутреннюю метрику замкнутого выпуклого многогранника. Поскольку внутренняя метрика многогранника очевидно задается его разверткой (набором граней с указанным законом их склеивания), речь шла о характеризации разверток замкнутых выпуклых многогранников. Если под разверткой понимать любой конечный набор плоских многоугольников с заданным законом склеивания сторон, полученный из истинной развертки с помощью разрезываний и склеиваний, количество таких многоугольников обозначить через f, а количество их сторон и вершин с учетом склеиваний — соответственно через k и e, то поставленный вопрос решается следующей теоремой Александрова: данная развертка тогда и только тогда является разверткой замкнутого выпуклого многогранника (к числу которых отнесены также дважды покрытые выпуклые ограниченные многоугольники), когда сумма плоских углов многоугольников, сходящихся в каждой вершине развертки, не превосходит 2π, а $f-k+e=2$. Необходимость первого условия очевидна, необходимость второго условия, равносильного тому, что рассматриваемая развертка гомеоморфна сфере,— следствие теоремы Эйлера. Поэтому речь шла о доказательстве существования замкнутого выпуклого многогранника с данной разверткой (или, что то же самое, с данной внутренней метрикой), подчиненной указанным условиям. Оба варианта доказательства основаны на рассмотрении естественного отображения пространства всех замкнутых выпуклых многогранников с естественной топологией в множество их разверток, также наделенное подходящей топологией. При этом более позднее доказательство опирается на одно следствие теоремы Брауэра об инвариантности области — лемму об отображении, дающую общий метод получения широкого класса теорем существования выпуклых многогранников с теми или иными заранее данными характеристиками, содержащего, например, кроме теоремы о развертках, уже упомянутую теорему Минковского о многогранниках с данными направлениями и площадями граней. Этот метод наряду с общим методом доказательства ряда теорем единственности детально изложен в книге А. Д. Александрова «Выпуклые многогранники» (1950 г.).

Одним из ближайших следствий теоремы о существовании замкнутого выпуклого многогранника с данной разверткой явилась теорема о реализуемости посредством замкнутой выпуклой поверхности любой заданной на сфере римановой метрики неотрицательной кривизны. За работу «Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с данной метрикой» (1941 г.) А. Д. Александрову в 1942 г. присуждена Государственная премия. Эта работа привела к полной характеризации внутренней метрики произвольной выпуклой поверхности (области на границе выпуклого тела), в которой любые две точки соединимы кратчайшей (этому условию удовлетворяют, в частности, замкнутые, а локально и любые выпуклые поверхности). Если не считать двух очевидных условий, то рассматриваемые метрики полностью характеризуются неотрицательностью кривизны, соответствующей для регулярных поверхностей наличию у каждой точки такой окрестности, что сумма углов любого лежащего в ней геодезического треугольника не меньше π. В общем случае рассматриваются треугольники, образованные кратчайшими, а для углов между кривыми вводится естественное определение, применимое к любым метрическим пространствам. В условии неотрицательности кривизны существование угла между кратчайшими заранее не предполагается и речь в нем идет о так называемых нижних углах, которые определены всегда.

Исследование внутренней метрики общих выпуклых поверхностей увенчалось не только ее полной локальной, но при дополнительных условиях и глобальной характеризацией. Параллельно с этим систематически развивалась внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, не подчиненных никаким условиям регулярности, и были созданы чрезвычайно сильные общие методы решения относящихся к ней задач: 1) метод приближения внутренней метрикой выпуклой поверхности внутренними метриками выпуклых многогранников (многогранными метриками неотрицательной кривизны); 2) метод разрезывания и склеивания, основанный на теореме об условиях, при которых метрическое склеивание кусков выпуклых поверхностей приводит к метрическому пространству, изометричному куску выпуклой поверхности; 3) метод сравнения геодезических многоугольников на выпуклой поверхности с плоскими многоугольниками, основанный на теореме о сравнении углов треугольника, образованного кратчайшими, с углами плоского треугольника, имеющего те же длины сторон. Применение названных методов сводит многие вопросы внутренней геометрии выпуклых поверхностей, в частности относящихся к теории изгибаний «в целом», к задачам элементарной планиметрии. Благодаря доказанной вскоре учеником А. Д. Александрова академиком А. В. Погореловым регулярности выпуклых поверхностей с достаточно регулярной внутренней метрикой положительной гауссовой кривизны, новые методы в теории изгибаний не только охватывают неизмеримо более широкий класс объектов, нежели классические, но и при обычных предположениях регулярности дают простые решения задач, казавшихся безнадежными в их аналитической постановке.

Указанные исследования А. Д. Александрова составили содержание его книги «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей» (1948 г.), удостоенной премии им. Н. И. Лобачевского. В конце этой книги намечено построение внутренней геометрии более широкого класса нерегулярных поверхностей, уже не подчиненных условию выпуклости, вылившееся вскоре в теорию метрических пространств, названных двумерными многообразиями ограниченной кривизны. Основы этой теории изложены в монографии А. Д. Александрова и В. А. Залгаллера «Двумерные многообразия ограниченной кривизны. (Основы внутренней геометрии поверхностей)», вышедшей в 1962 г. В ней речь идет о двумерных многообразиях с внутренней метрикой, подчиненных условию ограниченности кривизны, которое для двумерных римановых многообразий соответствует локальной ограниченности сверху сумм избытков $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ неналегающих геодезических треугольников. Это условие накладывается лишь на треугольники специального вида, ограниченные кратчайшими (простые треугольники), а под их углами α, β, γ понимаются естественно определяемые и всегда существующие верхние углы между кратчайшими. Для рассматриваемых многообразий кривизна определяется как вполне аддитивная функция борелевских множеств, равная для принадлежащих к их числу двумерных римановых многообразий с дважды непрерывно дифференцируемым метрическим тензором интегральной гауссовой кривизне. Для областей, ограниченных не слишком плоскими кривыми, кривизна формулой Гаусса—Бонне связана с геометрически определенным поворотом (обобщенной интегральной геодезической кривизной) границы со стороны рассматриваемой области. Наряду с двумерными C^2-римановыми пространствами к числу двумерных многообразий ограниченной кривизны принадлежат пространства с многогранной внутренней метрикой (локально изометричные многогранному углу). Одним из главных результатов построенной теории является теорема о том, что класс двумерных многообразий ограниченной кривизны получается замыканием любого из двух указанных классов метрических пространств относительно локально равномерной сходимости метрик при условии, что абсолютные кривизны множеств в сходящихся метриках локально ограничены в совокупности (для римановой метрики кривизна множества G равна интегралу модуля гауссовой кривизны по площади G, а для многогранной — распространенной на все попавшие в G вершины X сумме $\sum|2\pi-\alpha_X|$, в которой α_X — соответственно определяемый полный угол вокруг точки X). Эта теорема, с одной стороны, приводит к обобщенным решениям в виде двумерных многообразий ограниченной кривизны ряда вариационных задач римановой геометрии, связанных с интегральной кривизной и не имеющих классических решений, а с другой — распространяет на двумерные многообразия ограниченной кривизны метод приближения многогранными метриками. Два других метода, развитых ранее во внутренней геометрии выпуклых поверхностей — разрезывания и склеивания, сравнения геодезических многоугольников с плоскими,— также переносятся в теорию двумерных многообразий ограниченной кривизны. Эта теория развита не менее детально, нежели гауссова внутренняя геометрия, и отличается от нее не только общностью объектов исследования и геометричностью методов, хорошо приспособленных для геометрии в целом, но и наличием качественно новых геометрических фактов, которые обусловлены возможными особенностями внутренней метрики, не свойственными регулярным поверхностям.

Многомерный аналог двумерного многообразия ограниченной кривизны неизвестен. Однако, еще в 50-е годы А. Д. Александров исследовал пространства кривизны, не большей K, которые, не будучи подчинены ограничениям на размерность и даже не обязанные быть многообразиями, тем не менее обладают многими свойствами римановых пространств. Речь идет о пространствах с внутренней метрикой, у которых ограничено сверху отношение избытка треугольника к площади плоского треугольника с теми же сторонами. Двустороннее ограничение такого рода определяет пространства ограниченной удельной кривизны с еще более богатыми свойствами. Выпуклым поверхностям ограниченной удельной кривизны в книге «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей» посвящена целая глава, где, в частности, содержится геометрическая характеризация выпуклых поверхностей с римановой метрикой. А именно доказано, что существование всюду гауссовой кривизны, геометрически определенной как предел удельных кривизн областей при произвольном стягивании их к точке, не только необходимо, но и достаточно для возможности задать внутреннюю метрику в подходящих локальных координатах метрическим тензором, связанным с гауссовой кривизной обычной формулой, причем входящие в эту формулу вторые производные непрерывны. С понятием пространства ограниченной удельной кривизны связано и другое фундаментальное продвижение в выяснении чисто метрических оснований римановой геометрии. В работах сибирских геометров, принадлежащих к научной школе А. Д. Александрова, установлено, что пространства ограниченной удельной кривизны, подчиненные дополнительно условиям локальной компактности и локальной продолжительности кратчайших, являются $C^{3,\alpha}$-гладкими $C^{1,\alpha}$-римановыми многообразиями $(0<\alpha<1)$, метрические тензоры которых имеют вторые обобщенные производные, суммируемые в сколь угодно большой степени. Сводное изложение основ теории пространств ограниченной удельной кривизны дано в недавно вышедшей статье А. Д. Александрова, В. Н. Берестовского и И. Г. Николаева «Обобщенные римановы пространства» («Успехи мат. наук», 1986, т. 41, вып. 3, с. 3—44).

Геометрия в целом, теория нерегулярных многообразий с внутренней метрикой, создание мощных синтетических методов в проблематике, где безраздельно господствовали аналитические методы дифференциальной геометрии,— все это в тесном переплетении между собой составляет главную линию математического творчества А. Д. Александрова и тематику созданной им ленинградской геометрической школы. Совершенно иное направление исследований А. Д. Александрова — хроногеометрия — возникло в конце 40-х годов и получило интенсивное развитие в период его работы в Институте математики СО АН СССР. Толчком к этому явился вопрос В. А. Фока о том, при каких минимальных предположениях могут быть выведены преобразования Лоренца, составляющие формальную основу теории относительности. Этот вопрос был в 1949 г. решен А. Д. Александровым, доказавшим, что лоренцевость преобразований, связывающих надлежащим образом канонизированные пространственно-временные координаты в инерциальных системах отсчета, следует из одного лишь постоянства скорости света (в предположении евклидовости относительных пространств, определяемых инерциальными телами отсчета). Этот результат сводится к теореме об аффинности преобразований n-мерного евклидова пространства ($n \geqslant 3$), сохраняющих семейство верхних половин параллельных поверхностных круговых конусов. Вскоре (1953 г.) эта теорема была распространена на семейства телесных круговых конусов. Поскольку согласно теории относительности событие A может воздействовать на событие B (быть его причиной) лишь в том случае, когда B находится в верхней половине K_A светового конуса с вершиной A, указанная теорема привела к глубокой трактовке пространства-времени как структуры в множестве событий, определяемой отношением воздействия одних событий на другие. Принципиальным продвижением в теореме о преобразованиях, сохраняющих семейство конусов, явилось снижение наложенных на них требований до условий выпуклости и наличия острых вершин, легко оправдываемых причинно-следственной концепцией пространства-времени. Это позволило охарактеризовать группу Лоренца в рамках предположения о наличии в множестве событий аффинной структуры требования сохранения порядка, определяемого воздействием (и описываемого конусами), и максимальной однородности пространства событий по отношению к такому порядку. Было установлено также, что евклидовость физического пространства — следствие транзитивности отношения одновременности, определяемого с помощью световых сигналов (этим, по-видимому, впервые дан содержательный ответ на вопрос Римана о причине метрических соотношений). В плане ослабления предположений о «предварительной структуре» в множестве событий группа Лоренца была охарактеризована как группа автоморфизмов упорядоченной топологической связной локально связной и локально компактной коммутативной группы при определенных условиях, связывающих порядок с топологией. Был получен также локальный вариант исходной теоремы о преобразованиях, сохраняющих семейство конусов, который устанавливает ее связь с теорией конформных отображений псевдоевклидовых пространств. Наряду с хроногеометрией в собственном смысле этого слова, под ее влиянием возникла более широкая геометрическая проблематика теории отображений пространств, сохраняющих те или иные выделенные в них семейства множеств. Ряд тонких и неожиданных результатов в этой весьма нетрадиционной области геометрии получен новосибирскими геометрами, принадлежащими к младшему поколению учеников А. Д. Александрова. На фоне возросшего интереса к теории относительности и ее основаниям работы представителей созданной А. Д. Александровым новосибирской школы хроногеометрии получили заметный отклик у физиков и математиков ряда стран.

Кроме описанных основных работ, получивших мировое признание и приведших к созданию научных школ, А. Д. Александрову принадлежат также труды по квантовой механике, теории пространства цветов, теории разбиений евклидова пространства, теории смешанных объемов выпуклых тел, теории меры, общей топологии, теории уравнений в частных производных, основаниям геометрии. При невозможности за недостатком места охарактеризовать эти работы, необходимо тем не менее отметить следующее.

Неравенства А. Д. Александрова для смешанных дискриминантов, установленные в работах 30-х годов по смешанным объемам, сравнительно недавно привели к доказательству одной гипотезы Ван-дер-Вардена, выдвинутой еще в 1926 г.

Работы А. Д. Александрова по теории меры, выполненные в начале 40-х годов в связи с геометрическими вопросами, много лет спустя нашли важные применения в теории вероятностей.

В большом цикле работ по уравнениям в частных производных, касающихся также теорем единственности, существования и оценок решений нелинейных уравнений эллиптического типа, А. Д. Александровым успешно применены новые геометрические методы, разработанные им в свое время в теории выпуклых многогранников.

Построенная в недавней работе А. Д. Александрова новая аксиоматика евклидовой геометрии отличается простотой и прямой физической интерпретируемостью фигурирующих в ней объектов, отношений и аксиом. Усовершенствование аксиоматики евклидовой геометрии в значительной мере стимулировано недавно проделанной А. Д. Александровым огромной работой по созданию новых учебников геометрии для средней школы и оснований геометрии для педагогических институтов.

При всей значительной научной и педагогической деятельности А. Д. Александрова ею не исчерпывается его творчество. Философские работы А. Д. Александрова являются значительным вкладом в философию математики и естествознания, а его многочисленные публицистические статьи и устные выступления, охватывающие широкий круг вопросов жизни, всегда отличались и отличаются подлинной актуальностью.

Общественная деятельность А. Д. Александрова неотделима от его научного, педагогического и философского творчества. В период острых дискуссий по методологическим вопросам биологии, физики и математики он выступает инициатором и организатором философских семинаров в Ленинградском университете. В расцвете творческих сил становится ректором Ленинградского государственного университета, где его организаторская деятельность явилась важным вкладом в развитие советской науки. И совсем недавно в связи с кризисными явлениями в преподавании геометрии в школе А. Д. Александров со свойственной ему энергией и страстностью берется за написание школьных учебников, становится председателем Математической секции Учебно-методического совета Министерства просвещения СССР.

А. Д. Александров обладает уникальным набором человеческих качеств и дарований. Неукротимое стремление к истине, непримиримость в борьбе со злом, любовь к людям, желание и умение нести ответственность за происходящее, острота и ясность ума, энциклопедичность знаний — вот далеко не полный перечень свойств А. Д. Александрова, привлекающих к нему людей, делающих общение с ним неповторимо праздничным.

Поздравляя Александра Даниловича с днем рождения, мы желаем ему многих лет радости и счастья, плодотворной научной и педагогической деятельности, борьбы и побед.

Ю. Ф. Борисов, В. И. Кузьминов, С. С. Кутателадзе, Ю. Г. Решетняк, С. Л. Соболев, В. А. Топоногов.