АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XI

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

6

МОСКВА · 1970

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XI, № 6 Ноябрь — Декабрь 1970 г.

УДК 513.873

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

О НЕРАВЕНСТВЕ БИБЕРБАХА

В [1] был предложен способ анализа некоторых экстремальных задач в теории выпуклых поверхностей. Совокупность $\mathfrak{B}_n$ выпуклых компактных подмножеств n-мерного арифметического пространства R^n, наделенная операциями Минковского, рассматривалась как конус в векторном пространстве А. Г. Пинскера и экстремальные задачи анализировались средствами математического программирования. В частности, для задачи максимизации смешанного объема при линейных ограничениях было показано, как решение задачи порождает неравенство, связывающее максимизируемую функцию и ограничения. В этой заметке аналогичным способом получается обобщенное неравенство Бибербаха. Предлагаемый здесь вывод опирается на неравенства А. Д. Александрова.

Условимся обозначать одним символом выпуклый компакт и его опорную функцию. Пусть z_n — единичный шар с центром в нуле в пространстве R^n; сферу направлений (поверхность единичного шара) обозначим Z_n. Будем пользоваться обычными обозначениями для смешанных объемов $V_{m,k}$ и смешанных поверхностных функций $\mu_{m,k}$, т. е.

$$V_{m,k}(A,x,B) = V(A_1,\ldots,A_{n-m},\underbrace{x,\ldots,x}_{m-k},\underbrace{B,\ldots,B}_{k}) =$$

$$= \frac{1}{n}\int\limits_{Z_n} x\,d\mu(A_1,\ldots,A_{n-m},\underbrace{x,\ldots,x}_{m-k-1},\underbrace{B,\ldots,B}_{k}) = \frac{1}{n}\int\limits_{Z_n} x\,d\mu_{m,k}(A,x,B).$$

Обозначим через $d(x)$ диаметр $x \in \mathfrak{B}_n$, т. е.

$$d(x) = \max_{u\in z_n}(x(u) + x(-u)) = \max_{u\in z_n} b(x,u).$$

Так как $b(x,u)$ (ширина x в направлении u) — линейный функционал в пространстве Пинскера, то $d(x)$ — сублинейный функционал. Определим множество $U_x = \{u \in Z_n\colon\ b(x,u) = d(x)\}$ и конус допустимых направлений

$$\mathfrak{B}_{n,x} = \{g \in C(Z_n)\colon\ \exists\alpha_0 > 0\colon\ x + \alpha g \in \mathfrak{B}_n;\ (0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0)\};$$

здесь $C(Q)$ — пространство непрерывных функций на компакте Q.

Рассмотрим теперь задачу максимизации смешанного объема на множестве выпуклых поверхностей данного диаметра.

Задача 1. Ищется $x \in \mathfrak{B}_n$ из условий: 1) $d(x) = d(\bar{x})$; 2) $V_{m,k}(A,x,B)$ достигает максимума. (Выпуклые компакты $\bar{x}, A_1,\ldots,A_{n-m}, B$ предполагаются телесными.)

Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *выпуклый компакт $\bar{x}$ является решением задачи 1;*

2) *для всякого выпуклого компакта $x \in \mathfrak{B}_n$ имеет место неравенство*

$$V_{m,k}(A, x, B)\, d^{m-k}(\bar{x}) - V_{m,k}(A, \bar{x}, B)\, d^{m-k}(x) \leqslant 0$$

(*равенство здесь имеет место лишь для решений задачи 1* *)*)*;

3) *для всякой функции g из конуса допустимых направлений $\mathfrak{B}_{n,\bar{x}}$ имеет место неравенство*

$$\max_{u \in U_{\bar{x}}} b(\bar{x}, u) \int_{Z_n} g d\mu_{m,k}(A, \bar{x}, B) \leqslant \max_{u \in U_{\bar{x}}} b(g, u) \int_{Z_n} \bar{x} d\mu_{m,k}(A\ \bar{x}, B).$$

Доказательство. Рассмотрим задачу 2: найти $x \in \mathfrak{B}_n$ такое, что 1) $d(x) \leqslant d(\bar{x})$; 2) $G(x) = V_{m,k}^{\frac{m-k-1}{m-k}}(A, \bar{x}, B)\, V_{m,k}^{\frac{1}{m-k}}(A, x, B)$ достигает максимума.

Итак, любое решение задачи 2 является решением задачи 1, и наоборот. С другой стороны, задача 2 есть задача вогнутого программирования, так как $\mathfrak{B}_n$ — выпуклый замкнутый конус в пространстве $C(Z_n)$, а $d(x)$ и $G(x)$ — соответственно сублинейный и суперлинейный функционалы на этом конусе. Условие Слейтера в этой задаче, очевидно, выполнено. По теореме Куна — Таккера $\bar{x}$ является решением тогда и только тогда, когда найдется положительное $\bar{\alpha}$ такое, что функция

$$\Psi(x) = G(x) + \bar{\alpha}(d(\bar{x}) - d(x)) \tag{1}$$

достигает максимума на $\mathfrak{B}_n$ в точке $\bar{x}$. Необходимое и достаточное условие максимума в силу вогнутости $\Psi(x)$ можно переписать в форме неравенств на производные по допустимым направлениям:

$$\Psi'_{\bar{x}}(g) \leqslant 0 \qquad (g \in \mathfrak{B}_{n,\bar{x}}), \tag{2}$$

$$\Psi'_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0. \tag{3}$$

В силу сублинейности диаметра $d(x)$ его производная по направлениям может быть записана (см. [2]) в виде

$$d_x'(g) = \max_{u \in U_x} b(g, u).$$

Применяя последнюю формулу и формулы дифференцирования смешанных объемов, приведенные в [1], получим, что (3) равносильно условию $\bar{\alpha} = \dfrac{1}{d(\bar{x})} V_{m,k}(A, \bar{x}, B)$. Рассмотрев (1), (2), получим требуемые эквивалентности.

---

*) Точнее, для тел, гомотетичных решению.

Следствие 1. *Пусть* $\bar{x}, A_1, \ldots, A_{n-m}, B$ — *центрально-симметричные выпуклые поверхности, причем*

$$\mu_{m,k}(A, \bar{x}, B)(Z_n \setminus U_{\bar{x}}) = 0.$$

Тогда $\bar{x}$ — *решение задачи* 1.

Следствие 2. *Пусть* $A_1, \ldots, A_{n-m}, B$ — *центрально-симметричные выпуклые поверхности. Тогда для каждой выпуклой поверхности* x *имеет место неравенство*

$$V_{m,k}(A, x, B)\, d^{m-k}(z_n) - V_{m,k}(A, z_n, B)\, d^{m-k}(x) \leqslant 0,$$

причем равенство достигается лишь для решений задачи 1.

Следствие 3. *Имеет место неравенство Бибербаха* (см. ([3]))

$$V(x) \leqslant 2^{-n} V(z_n)\, d^n(x),$$

причем равенство достигается лишь для шара.

Замечание. Рассмотрим выпуклую симметричную относительно нуля поверхность Y_n, ограничивающую компакт y_n, и положим $d_{y_n}(x) = \max\limits_{u \in Y_n} b(x, u)$ — диаметр x по метрике, порожденной калибровочной функцией y_n. Используя естественный изоморфизм $C(Y_n)$ и $C(Z_n)$, нетрудно применить предыдущие рассуждения на случай диаметра d_{y_n}. В частности, для центрально-симметричных выпуклых поверхностей $A_1, \ldots, A_{n-m}, B$ и для любой выпуклой поверхности x получим неравенство

$$V_{m,k}(A, x, B)\, d_{y_n}^{m-k}(y_n) - V_{m,k}(A, y_n, B)\, d_{y_n}^{m-k}(x) \leqslant 0.$$

Поступила в редакцию
27 марта 1969 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кутателадзе С. С., Рубинов А. М., Задачи типа изопериметра в пространстве выпуклых тел, сб. Оптимальное планирование, 14, Н., 1970.

[2] Демьянов В. М., Рубинов А. М., Приближенные методы решения экстремальных задач, Изд. ЛГУ, 1968.

[3] Biebarbach L., Uber eine Extremaleigenschaft des Kreises, Iber. dtsch. Math.— Ver., 24 (1915), 247—250.