ISSN 0208-0060

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ, ТОМ 9

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ «В ЦЕЛОМ» И МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

21. **Bohnenblust H. F.** An axiomatic characterization of L_p-spaces // Duke Math. J.— 1940.— V. 6.— P. 627—640.
22. **Badé W. G.** A multiplicity theory for Boolean algebras of projections in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1958.— V. 92.— P. 508—530.
23. **Векслер А. И.** Банаховы циклические пространства и банаховы структуры // Докл. АН СССР.— 1973.— Т. 213, № 4.— С. 770—773.
24. **Пич А.** Операторные идеалы.— М.: Мир, 1982.
25. **Schwarz H.— U.** Banach lattices and operators.— Leipzig: Teubner, 1982.
26. **Diestel J., Uhl J. J.** Vector measures.— Providence: Amer. Math. Soc., 1977.— 322 p.— (Mathematical survays; V. 15).
27. **Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.** Об операторах, сохраняющих дизъюнктивность // Докл. АН СССР.— 1979.— Т. 248, № 5.— С. 1033—1036.
28. **Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.** Операторы, сохраняющие дизъюнктивность, их непрерывность и мультипликативное представление // Линейные операторы и их приложения.— Л., 1981.— С. 13—34.
29. **Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.** Упорядоченные векторные пространства.— Новосибирск: Наука, 1978.
30. **Кутателадзе С. С.** Теорема Крейна — Мильмана и ее обращение // Сиб. мат. журн.— 1980.— Т. 21, № 1.— С. 130—138.
31. **Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.** Riesz spaces. V. I.— Amsterdam — London: North Holland, 1971.
32. **Zaanen A. C.** Riesz spaces. V. II.— Amsterdam a. o.: North Holland, 1983.
33. **Hofman K. H., Keimel K.** Sheaf theoretical concepts in analysis: bundles and sheaves of Banach spaces, Banach C(X)-modules // Applications of sheaves: Proc./Res. Symp. Durham, July, 1977.— Berlin a. o., 1979.— P. 415—441.
34. **Semadeni Zb.** Banach spaces of continuous functions.— Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1971.
35. **Dodds P. G., Fremlin D. H.** Compact operators in Banach lattices // Isr. J. Math.— 1979.— V. 34, N 4.— P. 287—320.
36. **Aliprantis C. D., Burkinshaw O.** Positive compact operators on Banach lattices // Math. Z.— 1980.— Bd 194, N 3.— S. 289—298.
37. **Kevin T. A.** Representation of compact and weakly compact operators on the space of Bochner integrable functions // Pacif. J. Math.— 1981.— V. 92, N 2.— P. 257—267.
38. **Linidenstrauss J., Tzafriri L.** Classical Banach spaces.— Berlin a. o.: Springer, 1973.— 243 p.— (Lecture Notes in Mathematics; V. 338).
39. **Lindenstrauss J., Tzafriri L.** Classical Banach spaces. V. I. Sequence spaces.— Berlin a. o.: Springer, 1977.
40. **Lindenstrauss J., Tzafriri L.** Classical Banach spaces. V. II. Function spaces.— Berlin a. o.: Springer, 1979.
41. **Lacey E. H.** The isometric theory of classical Banach spaces.— Berlin a. o.: Springer, 1974.
42. **Бурбаки Н.** Интегрирование. Меры, интегрирование мер.— М.: Наука, 1967.
43. **Gierz G.** Bundles of topological vector spaces and their duality.— Berlin a. o.: Springer, 1982.— 296 p.— (Lecture Notes in Mathematics; V. 955).
44. **Бухвалов А. В.** Интегральные операторы и пространства измеримых векторнозначных функций: Автореф. дис... док. физ.-мат. наук: 01.01.01.— Л., 1984.— 26 с.
45. **Schochetman I. E.** Kernels and integral operators for continuous sums of Banach spaces.— Providence: Amer. Math. Soc., 1978.— 120 p.— (Mem. Amer. Math. Soc.; N 202).
46. **Коротков В. Б.** Интегральные операторы.— Новосибирск: Наука, 1983.
47. **Интегральные** операторы в пространствах суммируемых функций/М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский.— М.: Наука, 1966.
48. **Halmos P. R., Sunder V. S.** Bounded integral operators on on L^2-spaces.— Berlin a. o.: Springer, 1978.

ИНФИНИТЕЗИМАЛИ И ИСЧИСЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

В современных вопросах негладкого анализа, мотивированных теорией экстремальных задач, ведущие роли играют геометрические соображения о конструировании удобных приближений к произвольному множеству. Контингенция, гиперкасательные направления, конусы Адамара, Кларка и Булигана — вот далеко не полный перечень используемых аппроксимаций. Аппарат оперирования с названными конусами в течение последнего десятилетия существенно развит работами Ш. Долецкого, А. Д. Иоффе, Ф. Кларка, А. Г. Кусраева, Р. Т. Рокафеллара, Ж.-Б. Хириарт-Уррути, Ж.-П. Обэна, Ж.-П. Пено, Л. Тибольта и др. (см. [1—5] и приведенную там библиографию). Стоит подчеркнуть, что возникающие формулы весьма громоздки и исходные прозрачные идеи зачастую затемнены неуклюжими выкладками, порождающими досадные погрешности. В [6] намечен новый подход к изучению касательных, позволяющий добиться заметных упрощений за счет привлечения методов нестандартного анализа (см. [7—10]). Цель настоящей статьи — усовершенствовать указанный подход и применить его для обобщения и уточнения правил аппроксимации композиции соответствий. Дальнейшее изложение базируется на комбинации способа субдифференцирования композиции, развитого А. Г. Кусраевым [2], и идее Ш. Долецкого [4], унифицировавшего определения касательных за счет рассмотрения пределов Куратовского и пространств с двумя топологиями. На этой основе в ряде случаев удается уточнить имеющиеся и предложить новые более удобные и полные условия и описания. Среди них следует выделить широкий спектр новых аналогов классических конусов Адамара и Кларка, связанных с существенно «нестандартным» эффектом — с произвольным выбором определяющего семейства бесконечно малых чисел.

§ 1. Вспомогательные сведения о монадах

1.0. Здесь приводятся используемые ниже факты из нестандартного анализа. Детальные изложения применяемой «неоклассической» установки можно найти с помощью [9]. Подчеркнем только, что в упомянутой установке гипотеза «стандартности антуража», как правило, специально не оговаривается. Иными словами, подразумевается, что свободные параметры формальной записи анализируемых предложений являются стандартными множествами. Отметим также, что общая теория инфинитезималей, и в частности монадология, полно освещена в [10].

1.1. Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в множестве X. Соотношение

$$x \in \mu(\mathscr{F}) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})\, x \in F$$

определяет *монаду* $\mu(\mathscr{F})$ фильтра $\mathscr{F}$ — внешнее пересечение всех стандартных элементов $\mathscr{F}$. Здесь символ st над квантором означает его ограничение на стандартные множества. (Обратим внимание на то, что в соответствии с 1.0 множество X и фильтр $\mathscr{F}$ считаются стандартными объектами.)

1.2. *Пусть $\varphi = \varphi(x, y) \in (ZF)$, т. е. φ — некоторая формула теории Цермело — Френкеля, не содержащая никаких свободных переменных, кроме x, y. Тогда*

$$(\forall x \in \mu(\mathscr{F}))\ \varphi(x, y) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})\, (\forall x \in F)\ \varphi(x, y);$$
$$(\exists x \in \mu(\mathscr{F}))\ \varphi(x, y) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})\, (\exists x \in F)\ \varphi(x, y).$$

$\triangleleft$ Достаточно доказать импликацию $\rightarrow$ в первой из эквивалентностей. По условию для любого удаленного элемента F фильтра $\mathscr{F}$ (т. е. такого, что $F \subset \mu(\mathscr{F})$) выполнено внутреннее свойство $\psi := (\forall x \in F)\ \varphi(x, y)$. Значит по принципу Коши ψ справедливо для какого-либо стандартного F. $\triangleright$

1.3. Если в 1.2 заранее известно, что y — стандартное множество, то кванторы $\exists^{\mathrm{st}}$, $\forall^{\mathrm{st}}$ можно заменить на $\exists$, $\forall$ соответственно. Кроме того, отметим, что доказательство 1.2 получается, разумеется, прямой апелляцией к принципу идеализации.

1.4. *Пусть $\varphi = \varphi(x, y, z) \in (ZF)$ и $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — некоторые стандартные фильтры (в каких-либо стандартных множествах). Тогда*

$$(\forall x \in \mu(\mathscr{F}))\, (\exists y \in \mu(\mathscr{G}))\ \varphi(x, y, z) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\, (\exists^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})\, (\forall x \in F)\ (\exists y \in G)\varphi(x, y, z) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} F(\cdot))\, (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\ (\forall x \in F(G))\, (\exists y \in G)\varphi(x, y, z);$$
$$(\exists x \in \mu(\mathscr{F}))\, (\forall y \in \mu(\mathscr{G}))\ \varphi(x, y, z) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\, (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})\, (\exists x \in F)\, (\forall y \in G)\ \varphi(x, y, z) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F(\cdot))\, (\exists^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\, (\exists x \in F(G))\, (\forall y \in G)\ \varphi(x, y, z).$$

Здесь символ $F(\cdot)$ обозначает функцию из $\mathscr{G}$ в $\mathscr{F}$.

◁ Доказательство получается применением 1.2 и ссылкой на правило введения стандартных функций (=принцип конструирования). ▷

1.5. *Пусть* $\varphi=\varphi(x, y, z, u)\in(ZF)$ *и* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ — *три стандартных фильтра. При стандартном множестве и выполнены соотношения*

$$(\forall x\in\mu(\mathcal{F}))(\exists y\in\mu(\mathcal{G}))(\forall z\in\mu(\mathcal{H}))\ \varphi(x, y, z, u)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall G(\cdot))(\exists F\in\mathcal{F})(\exists^{\mathrm{fin}}\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H})(\forall x\in F)$$
$$(\exists H\in\mathcal{H}_0)(\exists y\in G(H))(\forall z\in H)\ \varphi(x, y, z, u);$$
$$(\exists x\in\mu(\mathcal{F}))(\forall y\in\mu(\mathcal{G}))(\exists z\in\mu(\mathcal{H}))\ \varphi(x, y, z, u)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\exists G(\cdot))(\forall F\in\mathcal{F})(\forall^{\mathrm{fin}}\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H})(\exists x\in F)$$
$$(\forall H\in\mathcal{H}_0)(\forall y\in G(H))(\exists z\in H)\ \varphi(x, y, z, u),$$

где $G(\cdot)$ — *функция из* $\mathcal{H}$ *в* $\mathcal{G}$ *и индекс* fin *над квантором означает ограничение на класс непустых конечных множеств.*

◁ Реализуем алгоритм Нельсона, т. е. привлекая 1.2—1.4 и принципы нестандартного анализа, выводим:

$$(\forall x\in\mu(\mathcal{F}))(\exists y\in\mu(\mathcal{G}))(\forall z\in\mu(\mathcal{H}))\ \varphi\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall x\in\mu(\mathcal{F}))(\forall^{\mathrm{st}}G(\cdot))(\exists^{\mathrm{st}}H\in\mathcal{H})(\exists y\in G(H))(\forall z\in H)\ \varphi\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall^{\mathrm{st}}G(\cdot))(\forall x)(\exists^{\mathrm{st}}F\in\mathcal{F})(\exists^{\mathrm{st}}H\in\mathcal{H})$$
$$(x\in F\to(\exists y\in G(H))(\forall z\in H)\ \varphi)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall^{\mathrm{st}}G(\cdot))(\exists^{\mathrm{st\,fin}}\mathcal{F}_0)(\exists^{\mathrm{st\,fin}}\mathcal{H}_0)(\forall x)(\exists F\in\mathcal{F}_0)(\exists H\in\mathcal{H}_0)$$
$$(F\in\mathcal{F}\wedge H\in\mathcal{H}\wedge(x\in F\to(\exists y\in G(H))(\forall z\in H)\,\varphi))\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall^{\mathrm{st}}G(\cdot))(\exists^{\mathrm{st\,fin}}\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F})(\exists^{\mathrm{st\,fin}}\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H})(\forall x)(\forall F\in F_0)$$
$$(x\in F\to(\exists H\in\mathcal{H}_0)(\exists y\in G(H))(\forall z\in H)\ \varphi)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall G(\cdot))(\exists^{\mathrm{fin}}\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F})(\exists^{\mathrm{fin}}\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H})(\forall x)$$
$$(((\forall F\in\mathcal{F}_0)x\in F)\to(\exists H\in\mathcal{H}_0)(\exists y\in G(H))(\forall z\in H)\varphi)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall G(\cdot))(\exists^{\mathrm{fin}}\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F})(\exists^{\mathrm{fin}}\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H})(\forall x\in\cap\mathcal{F}_0)$$
$$(\exists H\in\mathcal{H}_0)(\exists y\in G(H))(\forall z\in H)\ \varphi.$$

Остается заметить, что для непустого конечного $\mathcal{F}_0$, лежащего в $\mathcal{F}$, обязательно $\cap\mathcal{F}_0\in\mathcal{F}$. ▷

1.6. Пусть $T\subset X\times Y$ — некоторое соответствие и $\mathcal{F}$ — (базис) фильтр в X, причем $\mathcal{F}$ задевает $\operatorname{dom} T$, т. е. $\mu(\mathcal{F})\cap\operatorname{dom} T\neq\varnothing$. Положим, как это принято,

$$T(\mathcal{F}):=\{G\subset Y\colon (\exists F\in\mathcal{F})\ G\supset T(F)\}.$$

Таким образом, $T(\mathcal{F})$ — фильтр в Y — *образ* $\mathcal{F}$ *при соответствии* T.

1.7. *Монада образа есть образ монады.*

◁ С учетом принципа идеализации и 1.2 имеем

$$y\in\mu(T(\mathcal{F}))\leftrightarrow(\forall^{\mathrm{st}}G\in T(\mathcal{F}))\ y\in G\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall^{\mathrm{st}}F\in\mathcal{F})\,y\in T(F)\leftrightarrow(\forall^{\mathrm{st}}F\in\mathcal{F})(\exists x)(x\in F\wedge y\in T(x))\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall^{\mathrm{st\,fin}}\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F})(\exists x)(\forall F\in\mathcal{F}_0)(x\in F\wedge y\in T(x))\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\exists x)(\forall^{\mathrm{st}}F\in\mathcal{F})(x\in F\wedge y\in T(x))\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\exists x\in\mu(\mathcal{F}))\ y\in T(x)\leftrightarrow y\in T(\mu(F)).\ \triangleright$$

1.8. *Суперпозиция монад — это монада суперпозиции.*

◁ Пусть $\mathcal{F}$ — фильтр в $X\times Y$, а $\mathcal{G}$ — в $Y\times Z$. Имеем

$$\mathcal{G}\circ\mathcal{F}:=\widetilde{\{G\circ F\colon G\in\mathcal{G},F\in\mathcal{F}\}},$$

причем можно считать, что множества, фигурирующие в определении $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$, непусты. Ясно, что

$$G\circ F=\mathrm{Pr}_{X\times Z}(F\times Z\cap X\times G),$$

где $\mathrm{Pr}_{X\times Z}$ — проектирование $X\times Y\times Z$ на $X\times Z$. Итак, интересующий нас фильтр $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$ — это образ $\mathrm{Pr}_{X\times Z}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}:=\mathcal{A}_1\vee\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_1:=\mathcal{F}\times\{Z\}$, $\mathcal{A}_2:=\{X\}\times\mathcal{G}$. Поскольку монада произведения есть произведение монад, а монада точной верхней границы фильтров — пересечение их монад, с учетом 1.7 приходим к соотношению

$$\mu(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})=\mathrm{Pr}_{X\times Z}(\mu(\mathcal{F})\times Z\cap X\times\mu(\mathcal{G}))=\mu(\mathcal{G})\circ\mu(\mathcal{F}).$$

Это и требовалось установить. $\triangleright$

1.9. Пусть $\mu(\mathbf{R}_+)$ — множество всех (числовых) *инфинитезималей*, т. е. строго положительных бесконечно малых чисел. Подчеркнем, что $\mu(\mathbf{R}_+)$ — это монада подходящего фильтра в $\mathbf{R}$.

§ 2. Классические аппроксимирующие и регуляризирующие конусы

2.0. В этом параграфе приводятся вспомогательные факты об используемых типах касательных и даются простые нестандартные доказательства выпуклости обобщенных вариантов регуляризирующих конусов.

2.1. В приложениях бывает удобным рассматривать *почти векторные топологии*. Подобная топология $\tau:=\tau_X:=\tau(X)$ на векторном пространстве X характеризуется требованием как непрерывности сложения по совокупности переменных, так и непрерывностью умножения векторов из X на каждый скаляр из основного поля (в настоящей работе рассматривается поле $\mathbf{R}$ вещественных чисел).

2.2. *Пусть X — векторное пространство над $\mathbf{R}$. Существует почти векторная топология τ на X такая, что фильтр $\tau(0)$ совпадает с фиксированным фильтром $\mathcal{N}$ в том и только том случае, если монада $\mu(\mathcal{N})$ является внешним векторным пространством над внешним полем стандартных скаляров ${}^{\circ}\mathbf{R}$.*

2.3. Предложение 2.2 уместно сопоставить со следующим столь же прозрачным и необходимым для дальнейшего критерием векторной топологии (см. [10]).

2.4. *Пусть $\mathcal{N}$ — стандартный фильтр в векторном пространстве X. Существует векторная топология τ на X такая, что $\mathcal{N}=\tau(0)$ в том и только том случае, если монада $\mu(\mathcal{N})$ содержит монаду направлений X, т. е. $\mu(\mathbf{R})\,{}^{\circ}X\subset\mu(\mathcal{N})$ и, кроме того, $\mu(\mathcal{N})$ — это внешний ${}^{\approx}\mathbf{R}$-подмодуль X.*

Здесь, как обычно, $\mu(\mathbf{R})$ — монада естественной топологии $\mathbf{R}$, т. е. множество бесконечно малых чисел, а ${}^{\approx}\mathbf{R}$ — множество конечных вещественных чисел.

2.5. В дальнейшем в векторном пространстве X помимо фиксированной почти векторной топологии $\sigma:=\sigma_X$ с фильтром окрестностей нуля $\mathcal{N}_\sigma:=\sigma(0)$ выделяется почти векторная топология τ с фильтром $\mathcal{N}_\tau:=\tau(0)$. Как обычно, вводится отношение бесконечной близости $x_1\approx_\sigma x_2\leftrightarrow x_1-x_2\in\mu(\mathcal{N}_\sigma)$. Аналогичное правило действует для τ. Ниже, если не оговорено противное, σ считается векторной топологией. При этом, как обычно, монаду фильтра окрестностей $\sigma(x)$ обозначают $\mu(\sigma(x))$, а монаду $\mu(\sigma(0))$ — просто $\mu(\sigma)$.

2.6. В субдифференциальном исчислении для фиксированного множества F в X и точки $x'\in X$ рассматривают, в частности, следующие *конусы Адамара, Кларка и Булигана*:

$$\mathrm{Ha}(F,x'):=\bigcup_{\substack{U\in\sigma(x')\\ \alpha'}}\mathrm{int}_\tau\bigcap_{\substack{x\in F\cap U\\ 0<\alpha\leqslant\alpha'}}\frac{F-x}{\alpha};$$

$$\mathrm{Cl}(F,x'):=\bigcap_{V\in\mathcal{N}_\tau}\bigcup_{\substack{U\in\sigma(x')\\ \alpha'}}\bigcap_{\substack{x\in F\cap U\\ 0<\alpha\leqslant\alpha'}}\left(\frac{F-x}{\alpha}+V\right);$$

$$\mathrm{Bo}(F,x'):=\bigcap_{\substack{U\in\sigma(x')\\ \alpha'}}\mathrm{cl}_\tau\bigcup_{\substack{x\in F\cap U\\ 0<\alpha\leqslant\alpha'}}\frac{F-x}{\alpha},$$

где, как обычно, $\sigma(x') := x' + \mathcal{N}_\sigma$. Если $h \in \mathrm{Ha}(F, x')$, то иногда говорят, что F *эпи-липшицево* в x' по отношению к h (см. [2]). Ясно, что

$$\mathrm{Ha}(F, x') \subset \mathrm{Cl}(F, x') \subset \mathrm{Bo}(F, x').$$

2.7. Выделяют также *гиперкасательный конус*, *конус допустимых направлений* и *контингенцию* F в точке x' соотношениями

$$\mathrm{H}(F, x') := \bigcup_{\substack{U \in \sigma(x') \\ \alpha'}} \bigcap_{\substack{x \in F \cap U \\ 0 < \alpha \leqslant \alpha'}} \frac{F - x}{\alpha};$$

$$\mathrm{Fd}(F, x') := \bigcup_{\alpha' > 0} \frac{F - x'}{\alpha'};$$

$$\mathrm{K}(F, x') := \bigcap_{\alpha'} \mathrm{cl}_\tau \bigcup_{0 < \alpha \leqslant \alpha'} \frac{F - x'}{\alpha}.$$

Для экономии слов удобно считать, что $x' \in F$. Например, можно без оговорок сказать, что конусы $\mathrm{H}(F, x')$ и $\mathrm{K}(F, x')$ — это соответственно конус Адамара и конус Булигана для случая, когда τ или σ-дискретная топология. Итак, ниже всегда $x' \in F$.

2.8. В [6] установлено, что упомянутые конусы определяются простыми инфинитезимальными конструкциями как стандартизации, т. е. для стандартного h' имеют место эквивалентности

$$h' \in \mathrm{Ha}(F, x') \leftrightarrow (\forall x \approx_\sigma x', x \in F)(\forall \alpha \in \mu(\mathbf{R}_+))(\forall h \approx_\tau h')\, x + \alpha h \in F;$$

$$h' \in \mathrm{Cl}(F, x') \leftrightarrow (\forall x \approx_\sigma x', x \in F)(\forall \alpha \in \mu(\mathbf{R}_+))(\exists h \approx_\tau h')\, x + \alpha h \in F;$$

$$h' \in \mathrm{Bo}(F, x') \leftrightarrow (\exists x \approx_\sigma x', x \in F)(\exists \alpha \in \mu(\mathbf{R}_+))(\exists h \approx_\tau h')\, x + \alpha h \in F;$$

$$h' \in \mathrm{H}(F, x') \leftrightarrow (\forall x \approx_\sigma x', x \in F)(\forall \alpha \in \mu(\mathbf{R}_+))\, x + \alpha h' \in F;$$

$$h' \in \mathrm{K}(F, x') \leftrightarrow (\exists \alpha \in \mu(\mathbf{R}_+))(\exists h \approx_\tau h')\, x' + \alpha h \in F.$$

Отсюда, в частности, видно, что

$$\mathrm{Ha}(F, x') \subset \mathrm{H}(F, x') \subset \mathrm{Cl}(F, x') \subset \mathrm{K}(F, x') \subset \mathrm{cl}_\tau \mathrm{Fd}(F, x').$$

2.9. Конус Кларка всегда τ-замкнут и выпукл в предположении, что $\mu(\sigma) + \alpha\mu(\tau) \subset \mu(\sigma)$ для каждого $\alpha \approx 0$, $\alpha > 0$. При условии $\sigma = \tau$

$$\mathrm{Fd}(F, x') \subset \mathrm{Cl}(F, x') \subset \mathrm{cl}\,\mathrm{Fd}(F, x')$$

как только F — выпуклое множество, т. е.

$$(F \text{ выпукло}) \rightarrow \mathrm{Cl}(F, x') = \mathrm{K}(F, x') = \mathrm{cl}\,\mathrm{Fd}(F, x').$$

2.10. При названном предположении о непрерывности выпуклыми являются конус Адамара $\mathrm{Ha}(F, x')$ и некоторые другие конусы, введенные в [6]. В частности, таков $\exists h \forall x \forall \alpha$*-конус*, который обозначают $\mathrm{Ha}^+(F, x')$ и определяют соотношением

$$\mathrm{Ha}^+(F, x') := \bigcup_{\substack{U \in \sigma(x') \\ \alpha'}} \mathrm{cl}_\tau \bigcap_{\substack{0 < \alpha \leqslant \alpha' \\ x \in F \cap U}} \frac{F - x}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$h' \in \mathrm{Ha}^+(F, x') \leftrightarrow (\exists h \approx_\tau h')(\forall x \approx_\sigma x', x \in F)(\forall \alpha \in \mu(\mathbf{R}_+))\, x + \alpha h \in F.$$

Отметим, что

$$\mathrm{Ha}(F, x') \subset \mathrm{Ha}^+(F, x') \subset \mathrm{Cl}(F, x)'.$$

2.11. Выпуклым является также конус, полученный стандартизацией $\forall \alpha \exists h \forall x$*-конуса*, который обозначается $\mathrm{In}(F, x')$ и определяется соотношением

$$h' \in \mathrm{In}(F, x') \leftrightarrow (\forall \alpha \in \mu(\mathbf{R}_+))(\exists h \approx_\tau h')(\forall x \approx_\sigma x', x \in F)\ x + \alpha h \in F.$$

Явная формула для $\mathrm{In}(F, x')$ может быть выписана на основе 1.5 и в дальнейшем не потребуется. Отметим также очевидные включения

$$\mathrm{Ha}^+(F, x') \subset \mathrm{In}(F, x') \subset \mathrm{Cl}(F, x').$$

2.12. При вычислении касательных к композиции соответствий используют специальные *регуляризирующие конусы*, введенные А. Г. Кусраевым и Л. Тибольтом (см. [2]). Если $F \subset X \times Y$, где векторные пространства X и Y снабжены топологиями σ_X, τ_X и σ_Y, τ_Y соответственно, и $a' := (x', y') \in F$, полагают $\sigma := \sigma_X \times \sigma_Y$ и

$$\mathrm{R}^1(F, a') := \bigcap_{V \in \mathcal{N}_{\tau_Y}} \bigcup_{\substack{W \in \sigma(a') \\ \alpha'}} \bigcap_{\substack{a \in W \cap F \\ 0 < \alpha \leqslant \alpha'}} \left(\frac{F - a}{\alpha} + \{0\} \times V\right);$$

$$\mathrm{Q}^1(F, a') := \bigcap_{V \in \mathcal{N}_{\tau_Y}} \bigcup_{\substack{W \in \sigma(a') \\ \alpha' \\ U \in \mathcal{N}_\sigma}} \bigcap_{\substack{a \in W \cap F \\ 0 < \alpha \leqslant \alpha' \\ x \in \mathcal{N}_\sigma}} \left(\frac{F - a}{\alpha} + \{x\} \times V\right);$$

$$\mathrm{QR}^2(F, a') := \bigcup_{\substack{W \in \sigma(a') \\ \alpha' \\ U \in \mathcal{N}_\sigma}} \bigcap_{\substack{a \in W \cap F \\ 0 < \alpha \leqslant \alpha' \\ x \in \mathcal{N}_\sigma}} \left(\frac{F - a}{\alpha} + (x, 0)\right).$$

Двойственным образом определяют конусы $\mathrm{R}^2(F, a')$, $\mathrm{Q}^2(F, a')$ и $\mathrm{QR}^1(F, a')$. Более того, аналогичные обозначения распространяют на случай произведений пространств в числе, большем двух, подразумевая, что верхний индекс над символом аппроксимирующего множества указывает номер координаты, на которую накладывается условие соответствующего типа. Отметим также, что и в приложениях обычно рассматривают попарно совпадающие топологии: $\sigma_X = \tau_X$ и $\sigma_Y = \tau_Y$.

Дадим удобные нестандартные критерии описанных регуляризирующих конусов.

2.13. *Для стандартных векторов $s' \in X$ и $t' \in Y$ выполнено*:

$$(s', t') \in \mathrm{R}^1(F, a') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall a \approx_\sigma a',\ a \in F)\, (\forall \alpha \in \mu(\mathbf{R}_+))\, (\exists t \approx_{\tau_Y} t')\ a + \alpha(s', t) \in F;$$

$$(s', t) \in \mathrm{Q}^1(F, a') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall a \approx_\sigma a',\ a \in F)\, (\forall \alpha \in \mu(\mathbf{R}_+))$$
$$(\forall s \approx_{\tau_X} s')\, (\exists t \approx_{\tau_Y} t')\ a + \alpha(s, t) \in F;$$

$$(s', t') \in \mathrm{QR}^2(F, a') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall a \approx_\sigma a',\ a \in F)\, (\forall \alpha \in \mu(\mathbf{R}_+))\, (\forall s \approx_{\tau_X} s')\ a + \alpha(s, t') \in F.$$

◁ Доказательство состоит в прямой апелляции к 1.2 и 1.4 ▷

2.14. Из предложения 2.13 видно, что конусы типа QR^j — это разновидности конуса Адамара, конусы R^j — разновидности конуса Кларка. Конусы R^j при этом получаются также специализацией конусов типа Q^j при соответствующем подборе дискретных топологий. В обычных предположениях названные конусы являются выпуклыми. Приведем доказательство этого факта только для конуса Q^j, что в силу уже отмеченного вполне достаточно.

2.15. *Если отображение $(a, \alpha, b) \mapsto a + \alpha b$ непрерывно как действующее из $(X \times Y, \sigma) \times (\mathbf{R}, \tau_{\mathbf{R}}) \times (X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$ в $(X \times Y, \sigma)$, то конусы $\mathrm{Q}^j(F, a')$ для $j := 1, 2$ являются выпуклыми.*

◁ По принципу переноса можно работать в стандартном антураже, т. е. в предположении стандартности рассматриваемых параметров и пользоваться критерием 2.13. Итак, пусть (s', t') и (s'', t'') лежат в $\mathrm{Q}^1(F, a')$. Для $a \approx_\sigma a'$ и $a \in F$, положительного $\alpha \approx 0$ и $s \approx_{\tau_X} s' + s''$ в силу 2.13 при некотором $t_1 \approx_{\tau_Y} t'$ будет $a_1 := a + \alpha(s - s'', t_1) \in F$. По условию $\mu(\sigma) + \alpha(\mu(\tau_X) \times \mu(\tau_Y)) \subset \mu(\sigma)$. Стало быть, $a_1 \approx_\sigma a$ и $a_1 \in F$. Вновь привлекая 2.13, найдем $t_2 \approx_{\tau_Y} t''$, для которого $a_1 + \alpha(s'', t_2) \in$ $\in F$. Ясно, что для $t := t_1 + t_2$ будет $t \approx_{\tau_Y} t' + t''$ и $a + \alpha(s, t) = a +$ $+ \alpha(s - s'', t_1) + \alpha(s'', t_2) = a_1 + \alpha(s'', t_2) \in F$, что и требовалось доказать, ибо однородность $\mathrm{Q}^1(F, a')$ обеспечена устойчивостью монад почти векторных топологий относительно умножений на стандартные скаляры (см. 2.2, 2.4). ▷

2.16. Проведенный в 2.10 анализ в сочетании с результатами [6] показывает, что стоит ввести в рассмотрение конусы P^j и S^j с помощью следующих прямых стандартизаций:

$$(s', t') \in \mathrm{P}^2(F, a') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists s \approx_{\tau_X} s')(\forall t \approx_{\tau_Y} t')(\forall a \approx_\sigma a', a \in F)(\forall \alpha \in \mu(\mathbf{R}_+))\, a + \alpha(s, t) \in F;$$
$$(s', t') \in S^2(F, a') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall t \approx_{\tau_Y} t')(\exists s \approx_{\tau_X} s')(\forall a \approx_\sigma a', a \in F)(\forall \alpha \in \mu(\mathbf{R}_+))\, a + \alpha(s, t) \in F.$$

Явный вид конусов P^j и S^j несложно выписать с помощью 1.4, 1.5. Однако от возникающих явных формул (особенно для S^j) мало пользы ввиду их необозримой громоздкости. Впрочем, как мы уже убедились, подобные формулы фактически осложняют анализ, скрывая прозрачный «инфинитезимальный» смысл конструкций.

2.17. *Для* $j := 1, 2$ *выполнено*

$$\mathrm{Ha}(F, a') \subset \mathrm{P}^j(F, a') \subset S^j(F, a') \subset Q^j(F, a') \subset R^j(F, a') \subset \mathrm{Cl}(F, a').$$

При этом названные конусы выпуклы как только $\mu(\sigma) + \alpha(\mu(\tau_X) \times \mu(\tau_Y)) \subset \mu(\sigma)$ *для всех* $\alpha > 0$, $\alpha \approx 0$.

◁ Включения, которые требуется доказать, очевидны из нестандартных определений соответствующих конусов. Выпуклость большинства из этих конусов уже отмечалась. Установим для полноты выпуклость $\mathrm{S}^2(F, a')$.

То, что $\mathrm{S}^2(F, a')$ выдерживает умножение на положительные стандартные скаляры, вытекает из неделимости монады. Проверим, что $\mathrm{S}^2(F, a')$ — полугруппа. Итак, для стандартных (s', t') и (s'', t'') из $\mathrm{S}^2(F, a')$ возьмем $t \approx_{\tau_Y} t' + t''$. Тогда $t - t'' \approx_{\tau_Y} t'$ и имеется $s_1 \approx_{\tau_X} s'$, «обслуживающее» $t - t''$ в соответствии с определением $\mathrm{S}^2(F, a')$. Подберем $s_2 \approx_{\tau_X} s''$, «обслуживающее» t'' в том же очевидном смысле. Ясно, что $s_1 + s_2 \approx_{\tau_X} s' + s''$. При этом для всяких $a \in F$ и $\alpha > 0$ таких, что $a \approx_\sigma a'$ и $\alpha \approx 0$, будет $a_1 := a + \alpha(s_1, t - t'') \in F$. Поскольку a_1, как видно, бесконечно близко (в смысле σ) к a', из условия выбора s_2 заключаем: $a_1 + \alpha(s_2, t'') \in F$. Отсюда непосредственно видно, что $a + \alpha(s_1 + s_2, t) \in F$, т. е. $(s' + s'', t' + t'') \in \mathrm{S}^2(F, a')$.

Выпуклость $\mathrm{P}^j(F, a')$ проверяется аналогичным прямым рассуждением. ▷

2.18. Из доказательства 2.16 видно, что можно рассматривать выпуклые расширения конусов P^j и S^j — конусы P^{+j} и S^{+j}, получающиеся «переносом квантора $\forall\alpha$». Например, определяют конус $\mathrm{P}^{+2}(F, a')$ соотношением

$$(s', t') \in \mathrm{P}^{+2}(F, a') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall \alpha \in \mu(\mathbf{R}_+))(\exists s \approx_{\tau_X} s')(\forall t \approx_{\tau_Y} t')$$
$$(\forall a \approx_\sigma a', a \in F)\ a + \alpha(s, t) \in F.$$

В связи с 2.14 ясно, что имеет смысл использовать и регуляризации, получающиеся специализацией конуса Ha^+ при подборе дискретных топологий. Соответствующие явные формулы опускаются. Значение регуляризирующих конусов связано с их ролью при субдифференцировании сложных отображений (см. [2] и § 4 настоящей статьи).

§ 3. Аппроксимации, определяемые набором инфинитезималей

3.0. В этом параграфе дан набор аналогов классических касательных, основанный на применении актуальных бесконечно малых.

3.1. Пусть $\alpha > 0$, $\alpha \approx 0$ — некоторое инфинитезимальное число. В прежних предположениях о рассматриваемых объектах положим

$$\mathrm{Ha}_\alpha(F, x') := {}^*\{h' \in X\colon (\forall x \approx_\sigma x', x \in F)(\forall h \approx_\tau h')\ x + \alpha h \in F\};$$
$$\mathrm{In}_\alpha(F, x') := {}^*\{h' \in X\colon (\exists h \approx_\tau h')(\forall x \approx_\sigma x', x \in F)\ x + \alpha h \in F\};$$
$$\mathrm{Cl}_\alpha(F, x') := {}^*\{h' \in X\colon (\forall x \approx_\sigma x', x \in F)(\exists h \approx_\tau h')\ x + \alpha h \in F\}.$$

Здесь, как обычно, $^*A$ символизирует *стандартизацию* указанного внешнего множества A.

Если теперь Λ — некоторое внешнее непустое множество положительных инфинитезималей, то полагаем

$$\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x') := {}^*\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Ha}_\alpha(F, x');$$

$$\mathrm{In}_\Lambda(F, x') := {}^*\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{In}_\alpha(F, x');$$

$$\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') := {}^*\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Cl}_\alpha(F, x').$$

Аналогичную политику проводим в дальнейшем и при иных вводимых в рассмотрение аппроксимирующих множеств. В качестве примера отметим, что для стандартного $h' \in X$ выполнено

$$h' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') \leftrightarrow (\forall\alpha \in \Lambda)\,(\forall x \approx_\sigma x',\ x \in F)\,(\exists h \approx_\tau h')\ x+\alpha h \in F.$$

Стоит подчеркнуть, что если Λ — это монада соответствующего фильтра $\mathscr{F}_\Lambda$, где $\mathscr{F}_\Lambda := {}^*\{A \subset \mathbf{R} : A \supset \Lambda\}$, то

$$\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') = \bigcap_{V\in\mathscr{N}_\tau} \bigcup_{\substack{U\in\sigma(x')\\ A\in\mathscr{F}_\Lambda}} \bigcap_{\substack{x\in F\cap U\\ \alpha\in A,\alpha>0}} \left(\frac{F-x}{\alpha}+V\right).$$

Если же Λ — не монада (например, одноточечное множество), то явный вид $\mathrm{Cl}(F, x')$ связан с той моделью анализа, в которой фактически ведется исследование. Подчеркнем, что ультрафильтр $\mathscr{U}(\alpha) := {}^*\{A \subset \mathbf{R} : \alpha \in A\}$ имеет монаду, не сводящуюся к исходной инфинитезимали α, т. е. множество $\mathrm{Cl}_\alpha(F, x')$, вообще говоря, шире, чем $\mathrm{Cl}_{\mu(\mathscr{U}(\alpha))}(F, x')$. В то же время оказывается, что введенные аппроксимации обладают многими достоинствами, присущими кларковским конусам (ср. [3, 6]). При детализации и обосновании последнего положения без особых оговорок мы используем предположение непрерывности отображения $(x, \beta, h) \mapsto x+\beta h$ пространства $(X\times\mathbf{R}\times X,\ \sigma\times\tau_R\times\tau)$ в (X, σ) в нуле (эквивалентное «в стандартном антураже» включению $\mu(\sigma)+\mu(\mathbf{R}_+)\mu(\tau) \subset \mu(\sigma)$).

3.2. Теорема. *Для каждого множества Λ положительных бесконечно малых чисел справедливы утверждения*

(1) $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$, $\mathrm{In}_\Lambda(F, x')$, $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ — *полугруппы, причем*

$$\mathrm{Ha}(F, x') \subset \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x') \subset \mathrm{In}_\Lambda(F, x') \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') \subset \mathrm{K}(F, x');$$

$$\mathrm{Cl}(F, x') \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x');$$

(2) *если Λ — внутреннее множество, то* $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ *является τ-открытым;*

(3) $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ — *это τ-замкнутое множество, причем для выпуклого* F будет $\mathrm{K}(F, x') = \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ *как только* $\sigma = \tau$;

(4) *если $\tau = \sigma$, то имеет место равенство*

$$\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') = \mathrm{Cl}_\Lambda(\mathrm{cl}F, x');$$

(5) *выполнена формула Рокафеллара*

$$\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x') + \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') \subset \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x');$$

(6) *если x' — это τ-граничная точка F, то для* $F' := (X\setminus F) \cup \{x'\}$ *выполнено*

$$\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x') = -\mathrm{Ha}_\Lambda(F', x').$$

$\triangleleft$ (1) Проверим для определенности, что полугруппой является $\mathrm{In}_\Lambda(F, x')$. Если стандартные h', h'' входят в $\mathrm{In}_\Lambda(F, x')$, то для каждого $\alpha \in \Lambda$ при некотором $h_1 \approx_\tau h''$ будет $x'' := x+\alpha h_1 \in F$ как только $x \in F$ и $x \approx_\sigma x'$. По условию имеется $h_2 \approx_\tau h''$, для которого $x''+\alpha h_2 \in F$, ибо $x'' \approx_\sigma x$. Окончательно, $h_1+h_2 \approx_\tau h'+h''$ и h_1+h_2 «обслуживает» вхождение $h'+h'' \in \mathrm{In}_\Lambda(F, x')$.

Если $h' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ и h' стандартен, то $x' + \alpha h \in F$ для каких-нибудь $\alpha \in \Lambda$ и $h \approx_\tau h'$. Это означает, что $h' \in \mathrm{K}(F, x')$. Прочие включения, выписанные в (1), не вызывают сомнений.

(2) Если h' — стандартный элемент $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$, то

$$(\forall x \approx_\sigma x',\ x \in F)\,(\forall h \approx_\tau h')\,(\forall \alpha \in \Lambda)\ x + \alpha h \in F.$$

С учетом 1.2, используя то, что Λ — внутреннее множество, выводим

$$(\exists^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{N}_\tau)\,(\exists U \in \sigma(x'))\,(\forall x \in U \cap F)\,(\forall h \in h' + V)\,(\forall \alpha \in \Lambda)\ x + \alpha h \in F.$$

Подберем стандартные окрестности $V_1, V_2 \in \mathscr{N}_\tau$ так, чтобы было $V_1 + V_2 \subset V$. Тогда для всех стандартных $h'' \in h' + V_1$ выполнено

$$(\forall x \in U \cap F)\,(\forall h \in h'' + V_2)\,(\forall \alpha \in \Lambda)\ x + \alpha h \in F,$$

т. е. $h'' \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ при любых $h'' \in h' + V_1$.

(3) Пусть теперь h' — стандартный элемент $\mathrm{cl}_\tau \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$. Возьмем произвольную стандартную окрестность V точки h' и выберем вновь стандартные $V_1, V_2 \in \mathscr{N}_\tau$ из условия $V_1 + V_2 \subset V$. По определению замыкания имеется $h'' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ такой, что $h'' \in h' + V_1$. На основании 3.1 и в силу 1.4 будет

$$(\forall \alpha \in \Lambda)\,(\exists^{\mathrm{st}} U \in \sigma(x'))\,(\forall x \in F \cap U)\,(\exists h \in h'' + V_2)\ x + \alpha h \in F.$$

При этом $h \in h'' + V_2 \subset h' + V_1 + V_2 \subset h' + V$. Учитывая произвольность стандартной окрестности V, видим, что $h' \in \mathrm{Cl}_\alpha(F, x')$ при каждом $\alpha \in \Lambda$, т. е. $h' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$.

Если теперь $h' \in \mathrm{Fd}(F, x')$ и h' стандартен, то для некоторого стандартного $\alpha' > 0$ по принципу переноса будет $x' + \alpha' h' \in F$. Если $x \approx_\sigma x'$ и $x \in F$, то $(x - x')/\alpha' \approx_\sigma 0$. Для $h := h' + (x - x')/\alpha'$ будет $h \approx_\tau h'$ и, кроме того, $x + \alpha' h \in F$. С учетом выпуклости F верно: $x + (0, \alpha']h \subset F$. В частности, $x + \Lambda h \subset F$. Итак, $(\forall x \approx_\sigma x',\ x \in F)$ $(\forall \alpha \in \Lambda)\,(\exists h \approx_\tau h')\ x + \alpha h \in F$, т. е. $h' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$. Следовательно,

$$\mathrm{Fd}(F, x') \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') \subset \mathrm{K}(F, x') \subset \mathrm{cl}\mathrm{Fd}(F, x').$$

С учетом τ-замкнутости $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ заключаем: $\mathrm{K}(F, x') = \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$.

(4) Устанавливается, как и предложение 2.6, в [6].

(5) Для стандартных $k' \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ и $h' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ при каждом $\alpha \in \Lambda$ и любом $x \in F$ таком, что $x \approx_\sigma x'$, подобрав h из условия $h \approx_\tau h'$ и $x + \alpha h \in F$, получаем последовательно

$$\begin{aligned} x + \alpha(h' + k' + \mu(\tau)) &= x + \alpha h + \alpha(k' + (h - h') + \mu(\tau)) \subset \\ &\subset (x + \mu(\sigma)) \cap F + \alpha(k' + \mu(\tau) + \mu(\tau)) \subset \\ &\subset (x + \mu(\sigma)) \cap F + \alpha(k' + \mu(\tau)) \subset F, \end{aligned}$$

что и означает вхождение $h' + k'$ в $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$.

(6) Пусть $-h \notin \mathrm{Ha}_\Lambda(F', x')$. Тогда для некоторого $\alpha \in \Lambda$ найдется $h \approx_\tau h'$ так, что при подходящем $x \approx_\sigma x'$, $x \in F$ выполнено $x - \alpha h \in F$. Если все же $h \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$, то, в частности, $h \in \mathrm{Ha}_\alpha(F, x')$ и $x = (x - \alpha h) + \alpha h \in F$, ибо $x - \alpha h \approx_\sigma x$. Итак, $x \in F \cap F'$, т. е. $x = x'$. Кроме того, $(x' - \alpha h) + \alpha(h + \mu(\tau)) \subset F$, ибо $h + \mu(\tau) \subset \mu(\tau(h'))$. Стало быть, x' — это τ-внутренняя точка F, что противоречит условию. Следовательно, $h \notin \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$, что обеспечивает включение $-\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x') \subset \mathrm{Ha}_\Lambda(F', x')$. Меняя в приведенном рассуждении F' и $F = (F')'$ местами, приходим к требуемому. ▷

3.3. Важно подчеркнуть, что во многих случаях описанные аналоги конусов Адамара и Кларка являются выпуклыми. В самом деле имеют место следующие утверждения.

3.4. *Пусть τ — векторная топология и $t\Lambda \subset \Lambda$ для некоторого стандартного $t \in (0, 1)$. Тогда $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ — это выпуклый конус. Если к тому же Λ — внутреннее множество, то $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ — также выпуклый конус.*

◁ Предположим, что рассматривается $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ и $h \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ — стандартный элемент этого множества. На основании 3.2 (2) $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ открыт в топологии τ. Кроме того, $th \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$, где t — фигурирующее в условии стандартное положительное число. ▷

3.5. *Пусть $t\Lambda \subset \Lambda$ для каждого стандартного $t \in (0, 1)$. Тогда множества $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$, $\mathrm{In}_\Lambda(F, x')$ и $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ являются выпуклыми конусами.*

◁ Предположим для определенности, что речь идет о $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$. Если h' — стандартный вектор из названного множества и $0 < t < 1$ — стандартное число, то пусть $x \approx_\sigma x'$, $x \in F$ и $\alpha \in \Lambda$. Для x и $t\alpha \in \Lambda$ подберем h, для которого $h \approx_\tau h'$ и $x + \alpha th \in F$. Поскольку $th \approx_\tau th'$ на основании 2.4, то $th' \in \mathrm{Cl}_\alpha(F, x')$. Иначе говоря, на основании принципа переноса $(0, 1)\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$. Остается сослаться на 3.2 (1). ▷

§ 4. Аппроксимация композиции множеств

4.0. В этом параграфе дается нестандартный вариант метода субдифференцирования композиции, развитого А. Г. Кусраевым (см. [1, 2]). При этом удается добиться усовершенствований и уточнений, связанных как с использованием пар топологий, так и с формулировкой необходимых и достаточных условий относительной почти открытости (=условия $(\overline{\rho c})$).

4.1. Пусть, помимо рассматриваемого векторного пространства X с топологиями σ_X и τ_Y, задано еще одно векторное пространство Y с топологиями σ_Y и τ_Y. Рассмотрим линейный оператор T из X в Y и изучим, прежде всего, вопрос о связи аппроксимирующих множеств некоторого соответствия F в точке x', где $F \subset X$, и образа $T(F)$ в точке Tx'.

4.2. *Справедливы утверждения*

(1) *включение*

$$T(\mu(\sigma_X(x')) \cap F) \supset \mu(\sigma_Y(Tx')) \cap T(F)$$

равносильно соотношению

$$(\forall U \in \sigma_X(x'))\,(\exists V \in \sigma_Y(Tx'))\ T(U \cap F) \supset V \cap T(F)$$

— условию (относительной) предоткрытости или условию (ρ_-) (для параметров T, F и x');

(2) *условие (ρ_-) вместе с требованием непрерывности T как отображения (X, σ_X) в (Y, σ_Y) равносильно следующему условию (ρ) — условию (относительной) открытости:*

$$T(\mu(\sigma_X(x')) \cap F) = \mu(\sigma_Y(Tx')) \cap T(F);$$

(3) *оператор T удовлетворяет условию (относительной) почти открытости или условию $(\overline{\rho})$, т. е.*

$$(\forall U \in \sigma_X(x'))\,(\exists V \in \sigma_Y(Tx'))\ \mathrm{cl}_{\tau_Y} T(U \cap F) \supset V \cap T(F)$$

в том и только том случае, если

$$(\forall W \in \mathcal{N}_{\tau_Y})\, T(\mu(\sigma_X(x')) \cap F) + W \supset \mu(\sigma_Y(Tx')) \cap T(F).$$

◁ Утверждения (1) и (2) получаются специализацией 1.4. Для доказательства (3) обозначим

$$\mathscr{A} := T(\mu(\sigma_X(x')) \cap F);\ \mathscr{B} := \sigma_Y(Tx') \cap T(F);$$
$$\mathcal{N} := \{N \subset Y^2 \colon (\exists W \in \mathcal{N}_{\tau_Y})\, N \supset \{(y_1, y_2) \colon y_1 - y_2 \in W\}\},$$

т. е. $\mathcal{N}$ — равномерность в Y, отвечающая рассматриваемой топологии. Используя введенные обозначения и привлекая 1.4, а также принципы идеализации и переноса, последовательно получаем

$$(\forall N \in \mathcal{N})\ N(\mu(\mathscr{A})) \supset \mu(\mathscr{B}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall N \in \mathcal{N})\,(\forall b \in \mu(\mathscr{B}))\,(\exists a \in \mu(\mathscr{A}))\ b \in N(a) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall N \in \mathcal{N})\,(\forall^{st} A \in \mathscr{A})\,(\exists^{st} B \in \mathscr{B})\,(\forall b \in \mathscr{B})\,(\exists a \in A)\, b \in N(a) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{st} A \in \mathscr{A})\,(\forall N \in \mathcal{N})\,(\exists^{st} B \in \mathscr{B})\ B \subset N(A) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{st} A \in \mathscr{A})\,(\exists^{st} B \in \mathscr{B})\,(\forall N \in \mathcal{N})\ B \subset N(A) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{st} A \in \mathscr{A})\,(\exists^{st} B \in \mathscr{B}) B \subset \mathrm{cl}\, A \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall A \in \mathscr{A})\,(\exists B \in \mathscr{B})\ B \subset \mathrm{cl}\, A,$$

где замыкание вычисляется в соответствующей равномерной топологии. ▷

4.3. Теорема. *Имеют место утверждения*

(1) *если оператор T удовлетворяет условию* (ρ) *и непрерывен как отображение* (X, τ_X) *в* (Y, τ_Y), *то*

$$T(\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(T(F), Tx');$$

$$T(\mathrm{In}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{In}_\Lambda(T(F), Tx');$$

если, сверх того, T — открытое отображение (X, τ_X) *в* (Y, τ_Y), *то*

$$T(\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{Ha}_\Lambda(T(F), Tx');$$

(2) *если τ_Y — векторная топология, оператор* $T\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ *непрерывен и удовлетворяет условию* $(\bar\rho)$, *то*

$$T(\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(T(F), Tx').$$

◁ (1) Проверим, например, второе из требуемых включений. Для этого, фиксировав $h' \in \mathrm{In}_\Lambda(F, x')$, при $\alpha \in \Lambda$ возьмем $h \approx_{\tau_X} h'$ такой, что при всех $x \approx_{\sigma_X} x'$, $x \in F$ будет $x + \alpha h \in F$. Видно, что $Th \approx_{\sigma_Y} Th'$ и $Tx + \alpha Th \in T(F)$. Привлекая условие (ρ), заключаем: $Th' \in \mathrm{In}_\Lambda(T(F), Tx')$.

Пусть теперь известно, что T удовлетворяет указанному дополнительному условию открытости, т. е. на основании 4.2(1) $T(\mu(\tau_X)) \supset \mu(\tau_Y)$. Вместе с непрерывностью T это означает совпадение выписанных монад. Если теперь $y \in T(F)$, $y \approx_{\sigma_Y} Tx'$, то по условию (ρ) будет $y = Tx$, где $x \in F$ и $x \approx_{\sigma_X} x'$. При этом для $z \approx_{\tau_Y} Th'$ можно подыскать $h \approx_{\tau_X} h'$, для которого $z = Th$. Значит, при всех $\alpha \in \Lambda$ выполнено $x + \alpha h \in F$, т. е. $y + \alpha z = Tx + \alpha Th \in T(F)$, как только стандартный h' таков, что $h' \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$.

(2) Возьмем инфинитезималь $\alpha \in \Lambda$ и какой-либо стандартный элемент $h' \in \mathrm{Cl}_\alpha(F, x')$. Пусть W — некоторая бесконечно малая окрестность нуля в τ_Y. Тогда αW — также окрестность нуля по условию. На основании условия $(\bar\rho)$, взяв $y \approx_{\sigma_Y} Tx'$, $y \in T(F)$, найдем $x \in \mu(\sigma_X(x')) \cap F$ так, чтобы $y = Tx + \alpha w$ и $w \approx_{\tau_Y} 0$. По условию вхождения h' в конус Кларка имеется элемент $h'' \approx_{\tau_Y} h'$, для которого $x + \alpha h'' \in F$. Итак, $y + \alpha(Th'' - w) = y - \alpha w + \alpha Th'' = T(x + \alpha h'') \in T(F)$. Действительно, отсюда выводим, что $Th'' - w \in Th' + \mu(\tau_Y) - w \in Th' + \mu(\tau_Y) + \mu(\tau_Y) = Th' + \mu(\tau_Y)$. Тем самым установлено: $Th' \in \mathrm{Cl}_\alpha(T(F), Tx')$. ▷

4.4. Рассмотрим теперь векторные пространства X, Y, Z, снабженные топологиями σ_X, τ_X; σ_Y, τ_Y и σ_Z, τ_Z соответственно. Пусть, далее, $F \subset X \times Y$, а $G \subset Y \times Z$ — два соответствия и точка $d' := (x', y', z') \in X \times Y \times Z$ такова, что $a' := (x', y') \in F$ и $b' := (y', z') \in G$. Обозначим $H := X \times G \cap F \times Z$, $c' := (x', z')$. Отметим, что $G \circ F = \mathrm{Pr}_{X \times Y} H$, где $\mathrm{Pr}_{X \times Y}$ — оператор естественного проектирования. Введем следующие сокращения:

$$\sigma_1 := \sigma_X \times \sigma_Y;\ \sigma_2 := \sigma_Y \times \sigma_Z;\ \sigma := \sigma_X \times \sigma_Z;\ \bar\sigma := \sigma_X \times \sigma_Y \times \sigma_Z;$$

$$\tau_1 := \tau_X \times \tau_Y;\ \tau_2 := \tau_Y \times \tau_Z;\ \tau := \tau_X \times \tau_Z;\ \bar\tau := \tau_X \times \tau_Y \times \tau_Z.$$

Полезно напомнить, что оператор $\mathrm{Pr}_{X \times Z}$ непрерывен и открыт (при использовании «однобуквенных» топологий). По-прежнему фиксируем некоторое множество Λ, составленное из инфинитезимальных чисел.

4.5. *Эквивалентны следующие утверждения*:

(1) *для оператора* $\mathrm{Pr}_{X \times Z}$, *соответствия H и точки c' выполнено условие* (ρ);

(2) $G \circ F \cap \mu(\sigma(c')) = G \cap \mu(\sigma_2(b')) \circ F \cap \mu(\sigma_1(a'))$;

(3) $(\forall V \in \sigma_X(y'))\,(\exists U \in \sigma_X(x'))\,(\exists W \in \sigma_Z(z'))$

$$G \circ F \cap U \times W \subset G \circ I_V \circ F,$$

где I_V — это, как обычно, тождественное отношение на V.

◁ Применяя 1.4, перепишем (3) в эквивалентной форме

$$(\forall V\in\sigma_Y(y'))\,(\exists O\in\sigma(c'))\,(\forall (x,z)\in O,\ (x,z)\in G\circ F)$$
$$(\exists y\in V)\ (x,y)\in F\wedge(y,z)\in G\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall\,(x,z)\approx_{\sigma}c',\ (x,z)\in G\circ F)\,(\exists y\approx_{\sigma_Y}y')\,(x,y)\in F\wedge(y,z)\in G\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\mu(\sigma(c'))\cap G\circ F\subset\mu(\sigma_2(b'))\cap G\circ\mu(\sigma_1(a'))\cap F.$$

Остается заметить, что

$$\mathrm{Pr}_{X\times Z}(\mu(\overline{\sigma}(d'))\cap H=$$
$$=\{(x,z)\in G\circ F\colon x\approx_{\sigma_X}x'\wedge z\approx_{\sigma_Z}z'\wedge(\exists y\approx_{\sigma_Y}y')\,(x,y)\in F\wedge(y,z)\in G\}=$$
$$=\mu(\sigma_2(b'))\cap G\circ\mu(\sigma_1(a'))\cap F.\ \triangleright$$

4.6. *Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *для оператора* $\mathrm{Pr}_{X\times Z}$, *соответствия* H *и точки* c' *выполнено условие* $(\overline{\rho})$;

(2) $(\forall W\in\mathcal{N}_\tau)\,\mu(\sigma_2(b'))\cap G\circ\mu(\sigma_1(a'))\cap F+W\supset\mu(\sigma(c'))\cap G\circ F$;

(3) $(\forall V\in\sigma_2(b'))\,(\forall U\in\sigma_1(a'))\,(\exists W\in\sigma(c'))$
$$W\cap G\circ F\subset\mathrm{cl}_\tau(V\cap G\circ U\cap F);$$

(4) $(\forall U\in\sigma_X(x'))\,(\forall V\in\sigma_Y(y'))\,(\forall W\in\sigma_Z(z'))\,(\exists O\in\sigma(c'))$
$$O\cap G\circ F\subset\mathrm{cl}_\tau(G\circ I_V\circ F\cap U\times W);$$

(5) *если* $\tau\geqslant\sigma$, *то*
$$(\forall V\in\sigma_Y(y'))\,(\exists U\in\sigma_X(x'))\,(\exists W\in\sigma_Z(z'))$$
$$G\circ F\cap U\times W\subset\mathrm{cl}_\tau(G\circ I_V\circ F),$$

т. е., как говорят, выполнено условие $(\overline{\rho c})$ *в точке* $d':=(x',y',z')$.

◁ Из предложения 4.2 (3) и выкладки, проведенной при доказательстве 4.2 (3), непосредственно заключаем: (1) ↔ (2) ↔ (3).

Для доказательства эквивалентности (3) ↔ (4) достаточно заметить:

$$(V\times W)\cap G\circ(U\times V)\cap F=$$
$$=\{(x,z)\in X\times Z\colon x\in U\wedge z\in W\wedge(\exists y\in V)\,(x,y)\in F\wedge(y,z)\in G\}=$$
$$=G\circ I_V\circ F\cap U\times W$$

для всяких $U\subset X$, $V\subset Y$, $W\subset Z$.

Таким образом, остается установить только, что (4) ↔ (5). При этом импликация (4) → (5) не вызывает сомнений, ибо (5) получается специализацией (4) при $U:=X$ и $W:=Z$.

Для проверки (5) → (4) прежде всего, взяв $V\in\sigma_Y(y')$, подберем открытую окрестность $Q\in\sigma(c')$, чтобы было $G\circ F\cap Q\subset\mathrm{cl}_\tau A$, где $A:=G\circ\circ I_V\circ F$. Взяв открытые $U\in\sigma_X(x')$ и $W\in\sigma_Z(z')$, положим $B:=U\times W$ и $O:=Q\cap B$. Очевидно, что $G\circ F\cap O\subset(\mathrm{cl}_\tau A)\cap B$. Работая в стандартном антураже, для $a\in(\mathrm{cl}_\tau A)\cap B$ найдем точку $a'\in A$ такую, что $a'\approx_\tau a$. Ясно, что $a'\approx_\sigma a$, ибо $\mu(\tau)\subset\mu(\sigma)$ по условию. Ввиду σ-открытости B будет $a'\in B$, т. е. $a'\in A\cap B$ и $a\in\mathrm{cl}_\tau(A\cap B)$. Окончательно, $G\circ F\cap O\subset\subset\mathrm{cl}_\tau(A\cap B)$, что и нужно было обеспечить. ▷

4.7. *Имеют место включения*

(1) $\mathrm{Ha}_\Lambda(H,d')\supset X\times\mathrm{Ha}_\Lambda(G,b')\cap\mathrm{Ha}_\Lambda(F,a')\times Z$,

(2) $\mathrm{R}^2_\Lambda(H,d')\supset X\times\mathrm{R}^1_\Lambda(G,b')\cap\mathrm{R}^2_\Lambda(F,a')\times Z$,

(3) $\mathrm{Cl}_\Lambda(H,d')\supset X\times\mathrm{Q}^1_\Lambda(G,b')\cap\mathrm{Cl}_\Lambda(F,a')\times Z$,

(4) $\mathrm{Cl}_\Lambda(H,d')\supset X\times\mathrm{Cl}_\Lambda(G,b')\cap\mathrm{Q}^2_\Lambda(F,a')\times Z$,

(5) $\mathrm{Cl}^2(H,d')\supset X\times\mathrm{P}^2(G,b')\cap S^2(F,a')\times Z$,

где конус $\mathrm{Cl}^2(H,d')$ *определен (в стандартном антураже) соотношением*

$$\mathrm{Cl}^2(H,d'):={}^*\{(s',t',r')\in X\times Y\times Z\colon(\forall d\approx_{\overline{\sigma}}d',\ d\in H)$$
$$(\forall\alpha\in\mu(\mathbf{R}_+))\,(\exists s\approx_{\tau_X}s')\,(\forall t\approx_{\tau_Y}t')\,(\exists r\approx_{\tau_Z}r')\ d+\alpha(s,t,r)\in H\}.$$

◁ Проверим только (1) и (5), так как прочие утверждения проверяются по той же схеме.

(1) Пусть элемент (s', t', r') стандартен и входит в правую часть рассматриваемого соотношения. Возьмем $d \approx_{\bar{\sigma}} d'$ и $\alpha \in \Lambda$, где $d := (x, y, z) \in H$. Ясно, что $a := (x, y) \in F$ и $a \approx_{\sigma_1} a'$, а $b := (y, z) \in G$, $b \approx_{\sigma_2} b'$. В этой связи для $\alpha \in \Lambda$ и $(s, t, r) \approx_{\bar{\tau}} (s', t', r')$ будет $a + \alpha(s, t) \in F$ и $b + \alpha(t, r) \in G$. Итак,

$$d + \alpha(s, t, r) = (a + \alpha(s, t), z + \alpha r) \in F \times Z,$$
$$d + \alpha(s, t, r) = (x + \alpha s, b + \alpha(t, r)) \in X \times G,$$

т. е. $(s', t', r') \in \mathrm{Ha}_\Lambda(H, d')$.

(5) Возьмем стандартный элемент (s', t', r') из правой части (4). По определению имеется элемент $s \approx_{\tau_X} s'$ такой, что для всякого $t \approx_{\tau_Y} t'$ при некотором $r \approx_{\tau_Z} r'$ и всех $a \approx_{\sigma_1} a'$ и $b \approx_{\sigma_2} b'$ будет $a + \alpha(s, t) \in F$ и $b + \alpha(t, r) \in G$. Ясно, что и подавно $d + \alpha(s, t, r) \in H$, как только $d \approx_{\bar{\sigma}} d'$ и $d \in H$. ▷

4.8. Подчеркнем, что механизм «проскоков», проиллюстрированный в 4.7, можно модифицировать в зависимости от целей исследования. Как правило, в такие цели включают оценки аппроксимации композиции множеств. При этом наиболее удобно использовать схему, основанную на использовании метода общего положения [2], а также уточняющие и обобщающие эту схему результаты, представленные выше.

Сформулируем только один из возможных результатов.

4.9. Теорема. *Пусть τ — векторная топология, $\tau \geqslant \sigma$ и соответствия $F \subset X \times Y$ и $G \subset Y \times Z$ таковы, что $\mathrm{Ha}(F, a') \neq \varnothing$ и конусы $\mathrm{Q}^2(F, a') \times Z$ и $X \times \mathrm{Cl}(G, b')$ находятся в общем положении (относительно топологии $\bar{\tau}$), тогда*

$$\mathrm{Cl}(G \circ F, c') \supset \mathrm{Cl}(G, b') \circ \mathrm{Cl}(F, a'),$$

если выполнено условие $(\overline{\rho c})$ в точке d'.

◁ Доказательство проводится по образцу предложения 5.3.13 в [2] и состоит в констатации выполнения (установленных ранее) условий, обеспечивающих справедливость следующих выкладок:

$$\mathrm{Cl}(G \circ F, c') = \mathrm{Cl}(\mathrm{Pr}_{X \times Z} H, \ \mathrm{Pr}_{X \times Z} d') \supset \mathrm{cl}_\tau \mathrm{Pr}_{X \times Z} \mathrm{Cl}(H, d') \supset$$
$$\supset \mathrm{Pr}_{X \times Z} \mathrm{cl}_{\bar{\tau}} (X \times \mathrm{Cl}(G, b') \cap \mathrm{Q}^2(F, a') \times Z) =$$
$$= \mathrm{Pr}_{X \times Z} (\mathrm{cl}_{\bar{\tau}} (X \times \mathrm{Cl}(G, b')) \cap \mathrm{cl}_{\bar{\tau}} (\mathrm{Q}^2(F, a') \times Z)) =$$
$$= \mathrm{Pr}_{X \times Z} (X \times \mathrm{Cl}(G, b') \cap \mathrm{Cl}(F, a') \times Z) =$$
$$= \mathrm{Cl}(G, b') \circ \mathrm{Cl}(F, a'). \ ▷$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.** Локальный выпуклый анализ // Современные проблемы математики.— М., 1982.— Т. 19.— С. 155—206.
2. **Кусраев А. Г.** Векторная двойственность и ее приложения.— Новосибирск: Наука, 1985.
3. **Rockafellar R. T.** Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions // Can. J. Math.— 1980.— V. 32, N 2.— P. 257—280.
4. **Dolecki Sz.** Tangency and differentiation: some applications of convergence theory // Ann. mat. pura et appl.— 1982.— V. 130.— P. 233—255.
5. **Aubin J.— P.** Lipschitz behaviour of solutions to convex minimization problems // Math. oper. res.— 1984.— V. 9, N 1.— P. 87—111.
6. **Кутателадзе С. С.** Инфинитезимальные касательные конусы // Сиб. мат. журн.— 1985.— Т. 26, № 6.— С. 67—76.
7. **Robinson A.** Nonstandard analysis.— Amsterdam a. o.: North — Holland, 1970.
8. **Девис М.** Прикладной нестандартный анализ.— М.: Мир, 1980.
9. **Lutz R., Goze M.** Nonstandard analysis.— Berlin a. o.: Springer, 1981.
10. **Stroyan K. D., Luxemburg W. A. J.** Introduction to the theory of infinitesimals.— N. Y.: Academic Press, 1976.