

---

---

## От редколлегии

---

---

В конце 2003 г. Российская академия наук приняла решение издать в трех томах избранные труды Александра Даниловича Александрова.

Творчество академика А. Д. Александрова исключительно многогранно. В его трудах по теории смешанных объемов и теории поверхностей «в целом», теории многообразий ограниченной кривизны и теории уравнений Монжа — Ампера, в работах по принципу максимума для эллиптических дифференциальных уравнений и основаниям теории относительности решены фундаментальные проблемы и поставлены новые принципиальные вопросы, вызвавшие к жизни огромное число публикаций. А. Д. Александров стал одним из основателей отечественной школы геометрии «в целом».

В том 1 избранных трудов, увидевший свет в 2006 г., вошли математические статьи А. Д. Александрова, опубликованные им на русском языке, а также библиография его трудов и очерк его жизни и творчества. Том 2 представляет собой переиздание его знаменитой книги «Выпуклые многогранники». В том 3 войдут математические статьи Александра Даниловича, изданные им на иностранных языках, а также статьи по философии, этике и общим вопросам развития науки.

Книга А. Д. Александрова «Выпуклые многогранники» [19] впервые вышла в 1950 г. и оказала существенное влияние как на теорию выпуклых многогранников, так и на смежные с ней теорию выпуклых тел и теорию Брунна — Минковского. О том, что она не утратила своего значения до сих пор, можно судить, например, по сравнительно недавним добротным учебникам Б. Грюнбаума [289] и Г. Циглера [377] по теории выпуклых многогранников, а также по исчерпывающей монографии Р. Шнайдера [343] и обзору Р. Гарднера [280] по теории Брунна — Минковского. Теория многогранников и сейчас активно развивается. Не входя в детали, укажем лишь некоторые важнейшие результаты, полученные благодаря идеям и методам, предложенным А. Д. Александровым в этой книге.

1. Используя метод доказательства теорем существования, предложенный А. Д. Александровым в «Выпуклых многогранниках», в 1970 г. Е. М. Андреев [54, 55] указал необходимые и достаточные условия существования остроугольного выпуклого многогранника с заданными двугранными углами в трехмерном пространстве Лобачевского. Эти условия оказались чрезвычайно полезным инструментом для построения трехмерных гиперболических многообразий и в последующем были подвергнуты всестороннему изучению [295, 296, 332].

2. В 1976 г. Р. Коннелли построил замкнутый изгибаемый многогранник без самопересечений [258]. В последующие годы у изгибаемых многогранников были открыты такие глубокие свойства, как сохранение интегральной средней кривизны [231] и объема в процессе изгибания [195–198, 266, 335, 340]. Теория изгибаемых многогранников активно развивается в наши дни.

3. Теорему Минковского и ряд теорем существования, единственности и жесткости, обсуждаемых в этой книге, удалось перенести на невыпуклые многогранники [161, 333, 354].

Можно приводить и другие факты, свидетельствующие об актуальности данной книги, но мы перейдем к обсуждению особенностей настоящего издания. Прежде всего отметим, что в нем использованы современные стандарты правописания, оформления библиографии и, по мере возможности, современные математические обозначения. Например: вместо «итти» мы пишем «идти», «формулированные результаты» — «сформулированные результаты», «эвклидово пространство» — «евклидово пространство», «двухмерное многообразие» — «двумерное многообразие». В процессе редактирования были устранены также замеченные опечатки, очевидные описки и стилистические погрешности.

Значительный вклад в подготовку настоящего тома внес Виктор Абрамович Залгаллер, написавший многочисленные подстрочные примечания, отражающие современное состояние этой области геометрии, и расширивший библиографию за счет книг и статей, вышедших после 1950 г. Редколлегия выражает ему свою искреннюю признательность.

Мы благодарим всех, кто содействовал подготовке данной книги к печати, и в первую очередь сотрудников отдела анализа и геометрии Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научное наследие А. Д. Александрова вошло в золотой фонд отечественной науки, стало неотъемлемой частью современной математики. Мы надеемся, что издание трудов первого геометра России XX в. будет способствовать сохранению и развитию науки в нашей стране.

*В. А. Александров, С. С. Кутателадзе, Ю. Г. Решетняк*

Первая общая теорема единственности была доказана О. Коши в 1813 г. [254]<sup>1)</sup>. Она гласит: *два замкнутых выпуклых многогранника, одинаково составленных из соответственно равных граней, равны; или в форме теоремы единственности: замкнутый выпуклый многогранник, данным образом составленный из данных граней, — единственный с точностью до движения или движения и отражения*<sup>2)</sup>.

В 1897 г. Г. Минковский доказал существование и единственность (с точностью до переноса) замкнутого выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней [321]<sup>3)</sup>.

На этом круг общих теорем существования и единственности, собственно говоря, исчерпывался<sup>4)</sup>. Мне удалось дополнить его новыми теоремами и охватить все эти теоремы, включая теоремы Коши и Минковского, единым методом. Для теорем единственности это был метод Коши, которым он доказал свою теорему. Для теорем существования это был новый в теории многогранников метод, основанный на применении топологии в лице так называемой теоремы об инвариантности области. Две новые теоремы существования и единственности были открыты С. П. Оловянишниковым [156] на том же пути.

В результате область рассматриваемых теорем о выпуклых многогранниках приобрела объем и стройность, делающие ее, как нам кажется, заслуживающей самостоятельного систематического изложения.

Первая цель книги и состоит в том, чтобы осуществить такое изложение.

Для того чтобы сделать книгу доступной и интересной возможно большому кругу читателей, я включил в нее изложение первоначальных сведений о выпуклых многогранниках; это казалось тем более необходимым,

<sup>1)</sup>В доказательстве Коши, являвшем собою образец остроумия, были, однако, ошибки, исправленные потом другими геометрами. Безупречное и ясное доказательство дано в книге Ж. Адамара [1, с. 534–543]. Говоря о теореме Коши как первой общей теореме единственности, мы не имеем в виду таких по существу тривиальных теорем, как, например, теорема единственности замкнутого выпуклого многогранника с данными вершинами.

<sup>2)</sup>Два многогранника «имеют одинаковое строение», если их грани, ребра и вершины можно сопоставить так, что соответственные грани (ребра) будут сходиться по соответственным ребрам (вершинам). Если к тому же соответственные ребра равны и углы при соответственных вершинах на соответственных гранях также равны, то многогранники «одинаково составлены из равных граней».

<sup>3)</sup>Точная формулировка теорем Минковского вместе с условиями существования многогранника с данными направлениями и площадями граней дается дальше в своем месте.

<sup>4)</sup>Мы имеем в виду теоремы описанного выше типа. Из их круга выпадает важная теорема о существовании замкнутого выпуклого многогранника с наперед заданной схемой строения, установленная Э. Штейницем в 1915 г. Она не входит в нашу сферу, потому что схема строения, очевидно, не определяет многогранник однозначно. Доказательство этой теоремы воспроизведено в книге Л. А. Люстерника [130].