О НАУЧНОМ ВКЛАДЕ А. Д. АЛЕКСАНДРОВА

С. С. Кутателадзе

17 июня 2002

Аннотация. Неопубликованные материалы О. А. Ладыженской, Ю. Г. Решетняка и В. А. Залгаллера, связанные с представлением А. Д. Александрова на премию Вольфа в 1995 г.

Вступление

Поскольку организационный комитет не был уверен, что профессор О. А. Ладыженская сможет сделать свой доклад сегодня, в прошлую пятницу профессор Ю. Д. Бураго попросил меня заменить ее. Конечно, я подготовил технический доклад о некоторых «мыльных» задачах изопериметрического типа в геометрии выпуклых тел для настоящей встречи, однако эта специальная тема вряд ли подходит для церемонии открытия.

Кроме того, должен сознаться, что для меня совершенно невозможно донести до аудитории что-нибудь столь же мудрое и красивое, что обычно для Ольги Александровны. К счастью, существует поучительная и полезная теорема Михаила Булгакова, знаменитого русского писателя, утверждающая, что «Рукописи не горят», как сформулировано в его хорошо известной книге «Мастер и Маргарита». В качестве следствия, я сохраняю несколько неизвестных и неопубликованных материалов о вкладе А. Д. Александрова, которые были написаны и/или инициированы О. А. Ладыженской в 1995 г.

Эти материалы возникли в связи с выдвижением А. Д. Александрова на премию Вольфа (которую он никогда не получал по причинам, до сих пор не известным мне полностью). Летом 1995 г. Ольга Александровна попросила меня перевести и причесать тексты по выдвижению и потому с тех пор они обитают в моем компьютере. Я был и остаюсь счастлив фактом своего участия в этом деле, задуманном как маленькая дань уважения нашему общему учителю и многолетнему другу.

Надеюсь, что подлинные слова профессоров О. А. Ладыженской, Ю. Г. Решетняка и В. А. Залгаллера являются наилучшим выбором для церемонии открытия этой встречи, посвященной памяти *Александра Даниловича Александрова*, геометрического гиганта двадцатого века.

Полная версия доклада, прочитанного на английском языке 17 июня 2002 г. в Санкт-Петербургском отделении Математического Института им. В. А. Стеклова Российской академии наук на открытии Второй российско-германской встречи, посвященной 90-летию со дня рождения А. Д. Александрова (1912–1999).

Представление О. А. Ладыженской

В начале нашего века геометрия подошла к исследованию объектов «в целом». Однако методы дифференциальной геометрии и, тем более, методы исследования разрешимости задачи Коши и краевых задач для уравнений в частных производных, созданные в 19 веке, не давали подходов к их решению. Усилиями таких выдающихся математиков как Минковский, Гильберт, Г. Вейль и др. были получены лишь отдельные результаты. Но их работы содержали постановки многих важных нерешенных проблем, определивших развитие геометрии «в целом» в нашем веке.

Основополагающие достижения в изучении таких задач принадлежат А. Д. Александрову. Они содержат как решение многих трудных конкретных задач, так и создание общей теории:

а) построение дифференциальной геометрии на негладких поверхностях, являющейся далеко идущим обобщением классической дифференциальной геометрии, созданной Гауссом, Риманом и др.;

б) создание прямых методов исследования нелинейных задач в классах выпуклых поверхностей, а затем и в более общем классе «многообразий ограниченной кривизны».

Построения общего характера составили содержание его монографий: «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей», М.-Л., ГИТТЛ, 1950, 428 стр., и «Двумерные многообразия ограниченной кривизны», М., ГИТТЛ, 1962, (последняя написана в соавторстве с В. А. Залгаллером), а его достижения по многогранникам изложены в монографии «Выпуклые многогранники», М.-Л., ГИТТЛ, 1950, 428 стр.

Многие результаты А. Д. Александрова являются важной составной частью монографий А. В. Погорелова, И. Я. Бакельмана, Ю. Г. Решетняка и др.

А. Д. Александров создал новое направление в теории дифференциальных уравнений — геометрическую теорию полностью нелинейных эллиптических уравнений. Она отражена в его публикациях, из которых отметим лишь некоторые:

1) Additive Set-Functions in Abstract Spaces, I-IV, Матем. сб., 8(50), вып.2, 1940; 9(51), вып.3, 1941; 13(53), вып.2-3, 1943.

2) Существование и единственность выпуклой поверхности с данной интегральной кривизной, ДАН СССР, 1942, Но.35.

3) Теоремы единственности для поверхностей «в целом», ч. I–III, Вестник Ленингр. Универс., 1956, №.19, с.5-14; 1957, №.7, с.15-44; 1958, №.7, с.14-26.

4) Исследования о принципе максимума, I–IV, Известия Вузов, Математика, Казань, 1958, Но.5; 1959, Но.3,5; 1960, Но.3,5; 1961, Но.1.

5) Задача Дирихле для уравнения $\det \|z_{x_i x_j}\| = \varphi(x_i, z, z_{x_i})$, Вестник ЛГУ, 1958, Но.1.

6) Условие единственности и оценки решения задачи Дирихле, Вестник ЛГУ, 1963, с.5-29.

В работах этого направления содержится решение ряда геометрических проблем теории поверхностей «в целом» (например, в заглавиях работ 2) и 5) указаны проблемы, в них решенные). Не менее важным является и то, что в них установлены теоремы об эллиптических операторах, являющиеся одной из основных компонент современной теории разрешимости полностью нелинейных уравнений эллиптического типа (см.монографии А. В. Погорелова, И. Я. Бакельмана, Н. В. Крылова, Ю. Г. Решетняка, работы О. А. Ладыженской, Н. Н. Уральцевой, Н. М. Ивочкиной, многих зарубежных математиков).

Дадим краткие формулировки теорем А. Д. Александрова, дающих представление о его достижениях.

1)

Теорема 1 (о склеивании). *Пусть F_1 и F_2 две выпуклые поверхности в $\mathbb{R}^3$, гомеоморфные кругу и ограниченные кривыми γ_1 и γ_2 одинаковой длины. Пусть между точками γ_1 и γ_2 установлено взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее длины дуг на этих кривых, и в соответствующих точках сумма геодезических кривизн кривых γ_1 и γ_2 на поверхностях F_1 и F_2 неотрицательна. Тогда существует замкнутая выпуклая поверхность F, состоящая из двух частей, одна из которых изометрична F_1, а другая — F_2.*

А. В. Погорелов в своей монографии «Изгибание выпуклых поверхностей» (М., ГИТТЛ, 1951) пишет: «Одним из самых сильных средств исследования изгибаний выпуклых поверхностей является метод склеивания, основанный на следующей замечательной теореме»; далее формулируется Теорема 1 (см.стр.9).

2)

Теорема 2. *Любая многогранная метрика неотрицательной кривизны, заданная на двумерной сфере, реализуется в виде выпуклого многогранника, а любая метрика неотрицательной (интегральной) кривизны, заданная на двумерной сфере, реализуется в виде замкнутой поверхности в $\mathbb{R}^3$.*

3) В 1942 г. А. Д. Александров доказал

Теорема 3. *Пусть $\Psi(m)$ есть неотрицательная вполне аддитивная функция борелевских множеств m на плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющая неравенству $\Psi(\mathbb{R}^2) \leq 2\pi$. Тогда существует над всей плоскостью $\mathbb{R}^2$ выпуклая поверхность F, однозначно проектирующаяся на $\mathbb{R}^2$, и такая, что для любого борелевского множества $M \subset F$ его внешняя кривизна равна Ψ на проекции множества M на плоскость $\mathbb{R}^2$.*

Им доказана и аналогичная теорема о существовании замкнутой выпуклой поверхности с заданной неотрицательной кривизной (являющейся аналогом гауссовой кривизны в случае гладкой реализации).

4) Из большого количества теорем, установленных А. Д. Александровым для произвольных выпуклых поверхностей (а затем и для поверхностей с односторонним ограничением на их внутреннюю кривизну) приведем две:

Теорема 4 (обобщение теоремы Гаусса — Бонне). *Внешняя кривизна выпуклой поверхности равна ее внутренней интегральной кривизне.*

Теорема 5 (о сравнении углов геодезических треугольников). *Углы любого малого геодезического треугольника на метрическом многообразии неотрицательной кривизны не меньше соответствующих углов треугольника в евклидовом пространстве с теми же длинами сторон.*

Эта теорема и ее обобщения играют важную роль в выделении и изучении различных метрических пространств произвольной размерности (см. «K-пространства Александрова»).

5)

Теорема 6. *Пусть $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ две замкнутые выпуклые поверхности в $\mathbb{R}^3$, и пусть в точках $x^{(k)} \in F^{(k)}$, $k = 1, 2$, имеющих параллельные нормали $\vec{n}$, их главные кривизны $k_j^{(i)}$, $i, j = 1, 2$, занумерованные в порядке убывания, удовлетворяют равенству*

$$f(k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \vec{n}) = f(k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \vec{n}),$$

где f — заданная гладкая растущая функция по k_1 и k_2. Тогда $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ совмещаются параллельным переносом.

Для случая аналитических $F^{(k)}$ эта теорема была доказана А. Д. Александровым в 1938 г.. В 1956 г. он понизил это требование до двукратной дифференцируемости $F^{(k)}$, а для аналитических поверхностей условие их выпуклости заменил на условие их гомеоморфности сфере. Он установил различные теоремы единственности и для поверхностей в $\mathbb{R}^n$ с любым $n \geq 3$, а также в римановых пространствах. Среди них есть, например, теорема о том, что если поверхность в $\mathbb{R}^n$ имеет положительную постоянную среднюю кривизну и является границей какого-либо тела, то она есть сфера. Как и многие теоремы, установленные А. Д. Александровым, она является «точной»: последнее условие в ней нельзя отбросить.

6) В 1958 г. А. Д. Александров дал оригинальную переформулировку задачи Дирихле для уравнений типа Монжа — Ампера

$$f(x, z, z_x) \det z_{xx} = h(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

и нашел их обобщенные решения в классе выпуклых функций. Это замечательное исследование также имело разнообразные приложения в работах многих математиков (А. В. Погорелова, Н. М. Ивочкиной, Н. В. Крылова, П. Лионса, Л. Кафарелли, Л. Ниренберга, Спрука и др.).

7) Не меньшее влияние оказали и продолжают оказывать работы А. Д. Александрова по принципу максимума и оценки решений линейных и нелинейных эллиптических уравнений.

Приведем здесь одну из его оценок. Для произвольной функции $u \in W_n^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ она имеет вид

$$\max_{x \in \Omega} u(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u(x) + c_1 \operatorname{diam} \Omega \exp\{c_2 |b|_{n,\Omega}\} |(\mathcal{L}_u)_-|_{n,\Omega}.$$

Здесь

$$\mathcal{L}_u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}; a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0,$$

а

$$|b|_{n,\Omega} \equiv \left(\int_\Omega |b(x)|^n (\det a_{ij}(x))^{-1} dx\right)^{1/n}.$$

Постоянные c_1 и c_2 зависят только от n. И этот результат А. Д. Александрова нашел глубокие приложения и обобщения (Н. В. Крылов, В. Сафонов, Н. Н. Уральцева, А. Назаров и др.).

Можно сказать, что А. Д. Александров является пионером в создании прямых методов решения задач геометрии «в целом» и нелинейных эллиптических уравнений геометрической природы.

Представление Ю. Г. Решетняка

Представляются на соискание премии фонда Вольфа работы А. Д. Александрова, в которых создано новое направление геометрии — теория нерегулярных римановых пространств. Центральное место в римановой геометрии занимает теория кривизны пространства. А. Д. Александров ставит своей целью построение теории нерегулярных римановых пространств, удовлетворяющих хотя бы в в некотором обобщенном смысле условию ограниченности кривизны.

В работах А. Д. Александрова, посвященных теории обобщенных римановых пространств, получено дальнейшее развитие геометрической концепции пространства в продолжение традиции, идущей от Лобачевского, Римана и Эли Картана, и, тем самым, математика обогащена новыми плодотворными идеями.

А. Д. Александров — один из ведущих геометров современности. Его научные достижения охватывают широкий круг проблем современной математики и ее приложений. Ему принадлежат работы по теории смешанных объемов в теории выпуклых тел, по математическим проблемам кристаллографии, по теории уравнений в частных производных, теории меры, общей топологии, основаниям геометрии. Особо отметим большой цикл работ А. Д. Александрова по хроногеометрии, касающийся геометрических аспектов теории относительности. Идейно эти работы близки к тем, которые представляются на соискание премии фонда Вольфа.

В исследованиях А. Д. Александрова разработана теория двумерных многообразий ограниченной кривизны. Тем самым, указанная общая проблема построения теории нерегулярных римановых пространств, удовлетворяющих условию ограниченности кривизны решена и притом исчерпывающим образом для случая двумерных многообразий. Вопрос о том, какие пространства размерности $n > 2$ следует считать аналогом двумерных многообразий ограниченной кривизны пока остается открытым. Единственного ответа на этот вопрос и не существует и в многомерном случае понятие ограниченности кривизны может иметь различные толкования. Один из подходов к этой проблеме изложен А. Д. Александровым, построившим теорию пространств кривизны не большей K.

Исследования А.Д. Александрова по теории двумерных многообразий ограниченной кривизны делятся на два цикла.

В основе первого цикла исследований А. Д. Александрова по теории теории двумерных многообразий ограниченной кривизны лежат его работы, посвященные решению известной проблемы Г. Вейля. Последняя состоит в том, чтобы доказать, что всякая двумерная риманова метрика положительной кривизны, заданная на сфере, может быть реализована как внутренняя метрика замкнутой выпуклой поверхности. Одно решение этой проблемы, основанное на соображениях, целиком относящихся к математическому анализу, принадлежит Г. Леви. А. Д. Александровым было дано другое, чисто геометрическое решение проблемы. Оно безусловно может считаться образцом красоты в математике. Основная трудность в александровском подходе к проблеме Вейля состоит в том, чтобы решить ее сначала для случая многогранников. Это потребовало привлечения достаточно тонких средств из арсенала современной математики.

Общая теорема о существовании выпуклой поверхности с данной метрикой, была выведена А. Д. Александровым из соответствующей теоремы для многогранников предельным переходом. Для римановой метрики положительной кривизны на сфере (то есть метрики, определяемой линейным элементом положительной гауссовой кривизны), как показал А. Д. Александров, может быть построена сходящаяся к ней последовательность многогранных метрик, удовлетворяющая следующему условию. Каждая из этих многогранных метрик есть метрика положительной кривизны. то есть могла быть реализована как внутренняя метрика некоторого замкнутого выпуклого многогранника. Для римановой метрики положительной гауссовой кривизны на сфере, таким образом, получается последовательность замкнутых выпуклых многогранников, метрики которых имеют своим пределом эту метрику. Выбирая из построенной последовательности многогранников сходящуюся подпоследовательность в пределе получаем замкнутую выпуклую поверхность, метрика которой совпадает с заданной. А. Д. Александровым было показано также, что указанная схема рассуждений применима к общему случаю выпуклых поверхностей в пространстве постоянной кривизны.

А. Д. Александров ввел понятие двумерного многообразия кривизны не меньше K и показал что всякое такое многообразие локально изометрично выпуклой поверхности в пространстве постоянной кривизны, равной K. Тем самым была решена задача описания внутренней геометрии произвольных выпуклых поверхностей в пространстве постоянной кривизны. Это решило проблему Вейля в обобщенной постановке.

А. Д. Александровым разработаны два способа введения двумерных многообразий ограниченной кривизны. Первый из них аксиоматический. Двумерное многообразие ограниченной кривизны, по А. Д. Александрову, есть двумерное многообразие с внутренней метрикой, удовлетворяющей некоторым аксиомам, из которых главной является аксиома, выражающая собой требование ограниченности кривизны. Другой способ введения многообразий ограниченной кривизны основан на аппроксимации метрики многообразия двумерными римановыми метриками. В соответствии с этим, класс двумерных многообразий ограниченной кривизны представляет собой в определенном смысле замыкание класса двумерных многообразий с римановой метрикой. Замыкание строится при некотором условии ограниченности кривизны.

А. Д. Александровым разработаны некоторые чрезвычайно эффективные средства решения задач, возникающих при исследовании многообразий ограниченной кривизны. В их числе следует отметить, прежде всего, теоремы сравнения для треугольников, честь открытия которых принадлежит А. Д. Александрову. При всей простоте формулировок эти теоремы оказываются мощным инструментом при исследовании многообразий ограниченной кривизны. Отметим также разработанный А. Д. Александровым метод разрезывания и склеивания. Этот метод основан на теореме, устанавливающей условия, при которых склеивая области из многообразий ограниченной кривизны в результате мы получим снова многообразие того же рода. что склеивая данные заведомо не имеющий аналога в двумерной римановой геометрии, поскольку в процессе его применения возникают объекты, выходящие за пределы римановой геометрии. Метод разрезывания и склеивания в сочетании с аппроксимацией многогранниками был применен А. Д. Александровым к решению экстремальных задач для многообразий ограниченной кривизны. Большинство этих задач классическим методам дифференциальной геометрии недоступно, в частности, и по той причине, что экстремум достигается для существенно нерегулярного случая.

Определение понятия двумерного многообразия ограниченной кривизны существенно использует тот факт, что размерность многообразия равна 2 и не может быть непосредственно распространено на многомерный случай. В то же время в определении многообразия кривизны не меньшей K ограничение на размерность оказывается несущественными. А. Д. Александровым заложены основы общей теории метрических пространств односторонне ограниченной кривизны. Предложена аксиоматика пространств кривизны не большей K и кривизны не меньшей K. Детально исследованы различные аспекты аксиоматики таких пространств, установлены разнообразные их свойства, вытекающие из определения.

Исследования А.Д. Александрова по теории пространств с односторонними ограничениями на кривизну представляются актуальными в наше время в связи с развитием геометрии в целом для произвольных римановых пространств.

Работы А.Д. Александрова по теории обобщенных римановых пространств в идейном плане близки к тому направлению математического анализа, которое изучает понятие обобщенного решения дифференциального уравнения (см., например, знаменитые работы С. Л. Соболева и Л. Шварца). А. Д. Александрову принадлежат также важные результаты относительно существования обобщенных решений некоторых нелинейных уравнений в частных производных (уравнений типа Монжа — Ампера). В случае, который был им рассмотрен, понятие обобщенного решения не сводится к принятому в теории уравнений с частными производными.

Более подробное описание исследований А. Д. Александрова по геометрии, данное В. А. Залгаллером

Основополагающие достижения в изучении задач геометрии «в целом» и создание новых методов, открывших дорогу работам многих математиков в этой области, принадлежат А. Д. Александрову. Мы лишь перечислим (примерно следуя хронологии) важнейшие направления его работ.

1. А. Д. Александров продвинул теорию смешанных объемов, созданную Минковским. Им доказано, в частности, самое общее неравенство для смешанных объемов. Это стимулировало современное развитие связи теории смешанных объемов с теорией функций комплексной переменной (Кушниренко, Бернштейн, Тессье, Хованский, Громов).

2. А. Д. Александров развил теорию вполне аддитивных функций множеств в абстрактных метрических пространствах и геометрическую теорию слабой сходимости таких функций. Это открыло путь к введению интегральных (не точечных) функциональных характеристик в геометрии, и использованию слабой сходимости в теории обычных и знакопеременных мер.

3. А. Д. Александров доказал теорему о том, что каждую «развертку», — комплекс плоских многоугольников, с отождествленными парами ребер равной длины, при условии, что эта развертка в целом гомеоморфна сфере и что сумма плоских углов, окружающих каждую вершину, не превосходит 2π, можно, и при том единственным образом, реализовать в виде выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$. (При этом ребра развертки не обязательно окажутся ребрами многогранника, а могут быть как бы «нарисованы» на нем.)

Доказательство этой замечательной теоремы основывалось на специально созданном методе, позволяющем проверять, что некоторое отображение одного многообразия в другое той же размерности оказывается отображением на все многообразие. Этот метод (далеко обобщающий метод продолжения по параметру) позволил А. Д. Александрову доказать целую серию общих теорем об условиях, определяющих существование и единственность выпуклого многогранника с теми или данными.

Результаты этого цикла работ поставили имя А. Д. Александрова в один ряд с именами Евклида и Коши.

4. А. Д. Александров, используя приближения многогранниками, решил (притом в усиленной форме — без требований гладкости) проблему Вейля о реализуемости в виде замкнутой выпуклой поверхности каждой заданной на сфере метрики неотрицательной кривизны.

5. С аналитической точки зрения в этих работах А. Д.Александров развил теорию обобщенных решений для геометрии, на несколько десятилетий опередив в этом специалистов в области анализа и дифференциальных уравнений.

Вопросу о том, сколь гладкими окажутся решения, он уделил меньше внимания. Но и здесь он первым доказал, что любая выпуклая поверхность почти везде имеет второй дифференциал, а если у выпуклой поверхности ограничена удельная кривизна, то эта поверхность C^1-гладкая.

6. А. Д. Александров синтетическими методами изучил сначала внутреннюю геометрию любых выпуклых поверхностей, а затем — любых двумерных многообразий ограниченной кривизны. Класс последних благодаря его компактности, послужил тем пространством, в котором решаются многие экстремальные задачи. Этот класс — своего рода замыкание двумерных римановых многообразий. (Введенные А. Д. Александровым двумерные многообразия ограниченной кривизны, как доказал Ю. Г. Решетняк, обладают некоторой негладкой римановой метрикой.)

7. Исследуя внутреннюю геометрию выпуклых поверхностей, А. Д. Александров доказал «теорему о склеивании». Она и теорема А. Д. Александрова о реализации выпуклых метрик явились базой для современного состояния теории изгибания выпуклых поверхностей с краем в классе выпуклых многообразий.

8. Для многомерных метрических пространств, в которых точки соединимы кратчайшими, А. Д. Александров ввел общее понятие угла между кратчайшими и путем сравнения углов малых треугольников с углами треугольника с теми же длинами сторон на K-плоскости (двумерной поверхности постоянной гауссовой кривизны K) определил пространства с кривизной $\leq K$ или $\geq K$. Эти пространства получили название: «пространства Александрова». Отметим, что n-мерные римановы многообразия, у которых все секционные кривизны K_σ удовлетворяют неравенствам $K_\sigma \leq K$ или $K_\sigma \geq K$, являются частными случаями пространств Александрова.

Именно с теоремы сравнения углов А. Д. Александрова и ее «нелокального» обобщения, данного В. А. Топоноговым, началось бурное развитие современной римановой геометрии в целом (Топоногов, Клингенберг, Берже, Тернстон и др.).

9. Подобно тому как среди топологических пространств выделяют «метризуемые», А. Д. Александров поставил вопрос о выделении среди метризованных n-мерных многообразий ‘«‘риманизуемых» — тех, чья метрика может

быть задана квадратичным линейным элементом. Вместе со своими учениками Берестовским и Николаевым им было доказано, что всякое многообразие, являющееся пространством Александрова кривизны $\geq K_1$ и одновременно $\leq K_2$ является риманизуемым, но с метрикой «пониженной» гладкости.

Особый интерес к пространствам Александрова привлекли результаты М. Громова, показавшего, что предельный переход из класса римановых метрик с равномерно ограниченными (сверху или снизу) секционными кривизнами ведет именно в класс пространств Александрова. Геометрия этих пространств сейчас активно изучается (См., например, статью Громова, Бураго, Перельмана «Успехи мат. наук», 1993.)

Работы по внутренней геометрии метризованных многообразий поставили имя А. Д. Александрова в один ряд с именами Гаусса и Римана.

Заключение

Как я уже отметил вначале, профессор А. Д. Александров никогда не был удостоен ни премии Вольфа ни Ленинской премии, которую он получил бы даже с большим удовольствием. Хотя число его почетных степеней, наград, знаков отличия и иных трофеев колоссально, он все же заслужил много большего за свои выдающиеся усилия и монументальный вклад в науку. Более того, я убежден, что будущие поколения геометров получат наслаждение, привлекая проясняющие дело идеи, мудрые определения, точные неравенства и сильные теоремы, составляющие вечную память А. Д. Александрова.