РЕИНКАРНАЦИЯ ИДЕЙ ПРИКЛАДНОГО АНАЛИЗА

С. С. Кутателадзе

Институт математики
им. С. Л. Соболева, Новосибирск

8 мая 2010 г.

Повестка

- Предмет сообщения — современное состояние и границы применимости методов мажорирования, дискретизации и скаляризации, предложенных одним из пионеров вычислительной математики Леонидом Витальевичем Канторовичем (1912–1986).
- Основное внимание уделено новым возможностям в теории линейных неравенств и, в частности, операторным вариантам леммы Фаркаша.

Предмет математики

- Предмет математики — формы человеческого мышления.
- Математика функционирует как наука доказательных исчислений, постоянно обновляясь и наращивая объем накопленных знаний.
- Математика была и остается ремеслом формул, искусством вычисления, наукой исчислять.
- Со временем меняются требования к доказательствам и технологиям их получения, возникает деление математики на чистую и прикладную.

Фрэнсис Бэкон

- «Математика бывает или чистая, или смешанная. К чистой математике принадлежат те дисциплины, которые рассматривают количество, полностью абстрагированное от материи и физических аксиом... Предметом смешанной математики являются некоторые аксиомы и части физики...».
  Великое восстановление наук. Разделение наук (1605).

Математика чистая и прикладная

- Спустя полтора века в 1761 г. Леонард Эйлер использовал термин «чистая математика» в заголовке сочинения "Specimen de usu observationum in mathesi pura." Примерно в то же время термин «чистая математика» попал в старейшую английскую энциклопедию *Encyclopaedia Britannica*. В XIX веке «смешанную» математику начинают именовать «прикладной».
- Появляются знаменитые журналы *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (основанный Жозефом Лиувиллем в 1836 г.) и *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* (1857 г.).
- Искусство и ремесло математической техники для задач других наук составляют предмет математики прикладной.

Механика и физика

- Традиционной сферой приложения математики XIX века была классическая механика, понимаемая в самом широком смысле. Отражением этой исторической традиции служат математико-механические и механико-математические факультеты ведущих университетов России.
- Начало XX века отмечено резким расширением сферы приложений математики. Возникла квантовая механика, потребовавшая развития нового математического аппарата. Теория операторов в гильбертовых пространствах и теория обобщенных функций были ориентированы, прежде всего, на адаптацию эвристических методов новой физики.

Математизация социума

- В 1920–1930 гг. социальные феномены стали предметом невербальных исследований, требовавших создания специальных математических методов.
- Существенно возросла потребность в статистической обработке данных.
- Создание новых производств, внедрение передовых технологий, оборудования и материалов вызвали потребность совершенствования техники расчетов.
- Бурному развитию прикладной математики способствовала автоматизация и механизация процесса вычислений.

Функциональный анализ и прикладная математика

- В 1930 годах прикладная математика стремительно сближается с нарождающимся функциональным анализом.
- Существенную роль в этом процессе сыграли исследования Джона фон Неймана по математическим основам квантовой механики и теории игр как аппарата экономических исследований.
- В России пионером и генератором новых синтетических идей стал Канторович.

Принцип Канторовича

- «В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».

  Канторович, Докл. АН СССР (1935).

Линейные неравенства

- Пространства Канторовича дали рамки для построения теории линейных неравенств, необходимой в приближенных вычислениях для оценок точности.
- Поставщиком линейных неравенств в век свободы стала экономическая проблематика. Целесообразное и оптимальное поведение в условиях ограниченных ресурсов естественно формулировать в терминах частичного сравнения.
- Теория линейных неравенств неразрывна с выпуклыми множествами, представляющими полные решения систем линейных неравенств.

Линейное программирование

- Линейное программирование — техника максимизации линейного функционала на множестве положительных решений системы линейных неравенств. Как известно, пионером здесь быль Жан Батист Фурье, считавший эту тему одной из вершин своей работы.
- Открытие линейного программирования Канторовичем последовало вскоре за созданием им основ теории своих пространств.

Функциональный анализ и прикладная математика

- В конце 1940 годов Канторович в серии работ формулирует и развивает тезис о взаимосвязи функционального анализа и прикладной математики.
- Канторович выделял метод мажорант, восходящий к Коши, метод конечномерных приближений и метод Лагранжа для новых задач оптимизации, возникающих в экономике.

Три технологии

- Технологию мажорирования в общих упорядоченных векторных пространствах Канторович взял за основу исследования вариантов метода Ньютона в банаховых пространствах.
- Приближение бесконечномерных пространств и операторов их конечномерными аналогами следует воспринимать наряду с удивительным универсальным пониманием вычислительной математики как науки о конечных приближениях общих компактов из доклада С. Л. Соболева, Л. А. Люстерника и Л. В Канторовича на Третьем Всесоюзном математическом съезде в 1956 г.
- Новизна экстремальных задач, возникающих в социальных науках, связана с наличием многомерных противоречивых целей, ставящих на первое место проблему согласования интересов или *скаляризацию* векторных целей.

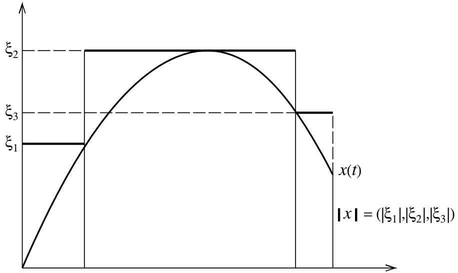
Абстрактная норма

- «Абстрактная норма позволяет гораздо тоньше оценить элемент и операцию, чем одно число — числовая норма, и благодаря этому получить более точные (и широкие) границы применимости метода последовательных приближений. Так, в качестве нормы непрерывной функции можно взять не границу её во всем интервале, а совокупность её границ в нескольких частичных интервалах... Это позволяет уточнить оценку границы сходимости метода последовательных приближений для интегральных уравнений».

  Канторович, Вестник ЛГУ (1948).

Нормирование последовательностей

- $$\mathbf{|}(\xi_1, \xi_2, \dots)\mathbf{|} = (|\xi_1|, |\xi_2|, \dots, |\xi_{N-1}|, \sup_{k \geq N} |\xi_k|) \in \mathbb{R}^N.$$



- «Я полагаю, что и в ряде других случаев применение вместо вещественных чисел элементов линейных полуупорядоченных пространств в оценках может привести к существенному уточнению последних».

  Канторович, Вестник ЛГУ (1948).

Мажорирование

- Пусть X и Y — вещественные векторные пространства, и заданы векторные нормы $|\cdot|_X$ и $|\cdot|_Y$. Пусть, далее, T — линейный оператор из X в Y, а S — положительный оператор из E в F такие, что

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "|\cdot|_X"'] & Y \arrow[d, "|\cdot|_Y"] \\
E \arrow[r, "S"'] & F
\end{tikzcd}
$$

- Если при этом $|Tx|_Y \leq S|x|_X \quad (x \in X)$, то S называют *мажорантой* T.
- *Точная мажоранта* $|T|$ — наименьший положительный оператор из E в F, для которого $|Tx| \leq |T|(|x|) \quad (x \in X)$.

Математика и логика

- Революционные изменения математики на рубеже XIX и XX веков связаны с возникновением математической логики, подвергшей анализу сам процесс формального доказательства. Математика стала рефлексивной наукой, занятой не только поиском истины, но и анализом собственных способов ее поиска.
- Новые черты математики афористично обрисовал Соломон Бохнер блестящей заменой слова «миф» во фразе одного литературоведа:
  “Mathematics is a form of poetry which transcends poetry in that it proclaims a truth; a form of reasoning which transcends reasoning in that it wants to bring about the truth it proclaims; a form of action, of ritual behaviour, which does not find fulfilment in the act but must proclaim and elaborate a poetic form of truth.”

  Bochner, *The Role of Mathematics in the Rise of Science* (1966).

Булевозначный анализ

- Современная техника математического моделирования позволила показать, что основные свойства решеточно нормированных пространств представляют собой булевозначные интерпретации свойств классических нормированных пространств.
- Произвольное банахово пространство внутри булевозначной модели при внешней расшифровке представляет собой расширенное пространство Банаха — Канторовича.
- Каждое решеточно нормированное пространство может быть реализовано как плотное подпространство некоторого банахова пространства в подходящей булевозначной модели.

Булевозначный универсум

- Пусть $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра. Взяв ординал α, положим

$$V_\alpha^{(\mathbb{B})} := \{x \mid (\exists\beta \in \alpha)\ x : \mathrm{dom}(x) \to \mathbb{B}\ \&\ \mathrm{dom}(x) \subset V_\beta^{(\mathbb{B})}\}.$$

- *Булевозначный универсум*

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha^{(\mathbb{B})},$$

где On — класс всех ординалов.

- Каждой формуле φ теории ZFC, суженной на $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, отвечает оценка истинности $[\![\varphi]\!] \in \mathbb{B}$.

Спуски и подъемы

- Пусть φ — формула ZFC и $y \in \mathbb{V}^{\mathbb{B}}$. Положим $A_\varphi := A_{\varphi(\cdot,\ y)} := \{x \mid \varphi(x,\ y)\}$.
- *Спуск* $A_\varphi{\downarrow}$ класса A_φ — это

$$A_\varphi{\downarrow} := \{t \mid t \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \ \&\ [\![\varphi(t,\ y)]\!] = \mathbb{1}\}.$$

- Если $t \in A_\varphi{\downarrow}$, то говорят, что t *удовлетворяет* $\varphi(\cdot,\ y)$ *внутри* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.
- *Спуск* $x{\downarrow} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — определяется так:

$$x{\downarrow} := \{t \mid t \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \ \&\ [\![t \in x]\!] = \mathbb{1}\},$$

т. е. $x{\downarrow} = A_{\cdot \in x}{\downarrow}$. Класс $x{\downarrow}$ — множество.
- Если x — непустое множество внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, то

$$(\exists z \in x{\downarrow})[\![(\exists t \in x)\ \varphi(t)]\!] = [\![\varphi(z)]\!].$$

- Функтор *подъема* действует в противоположном направлении.

Булевозначные числа

- Внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ существует объект $\mathscr{R}$, моделирующий $\mathbb{R}$, т. е.

$$[\![\mathscr{R} \ - \text{поле вещественных чисел}\,]\!] = \mathbb{1}.$$

- Пусть $\mathscr{R}{\downarrow}$ — спуск носителя $|\mathscr{R}|$ алгебраической системы $\mathscr{R} := (|\mathscr{R}|, +, \,\cdot\,, 0, 1, \leq)$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.
- Осуществим спуск структур из $|\mathscr{R}|$ на $\mathscr{R}{\downarrow}$ по правилам:

$$x + y = z \leftrightarrow [\![x + y = z]\!] = \mathbb{1};$$
$$xy = z \leftrightarrow [\![xy = z]\!] = \mathbb{1};$$
$$x \leq y \leftrightarrow [\![x \leq y]\!] = \mathbb{1};$$
$$\lambda x = y \leftrightarrow [\![\lambda^{\wedge} x = y]\!] = \mathbb{1} \ (x, y, z \in \mathscr{R}{\downarrow},\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

- Теорема Гордона. *$\mathscr{R}{\downarrow}$ со спущенными структурами — расширенное пространство Канторовича с базой $\mathbb{B}(\mathscr{R}{\downarrow})$, изоморфной $\mathbb{B}$.*

Спуск леммы Фаркаша

- Классическая лемма Фаркаша, известная также как лемма Фаркаша — Минковского, играет ключевую роль в линейном программировании и родственных разделах оптимизации.
- Скаляризация, предлагаемая булевозначным анализом, открывает нам некоторые довольно общие свойства систем операторных неравенств.

Пример

- Пусть $A_1, \ldots, A_N$ и B — ограниченные линейные операторы из $L_p(\mu)$ в $L_q(\mu)$, где μ — некоторая мера на T.
- *Имеет место одна из следующих взаимоисключающих возможностей:*
  (1) *Существуют $x \in L_p$ и измеримые подмножества $U, V \subset T$, причем $\mu(U) \neq 0$, $U \subset V$ такие, что*
  $$Bx(t) > 0 \ (t \in U), A_1 x(t) \leq 0, \ldots, A_N x(t) \leq 0 \ (t \in V).$$
  (2) *Найдутся положительные измеримые функции $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ на T, для которых*
  $$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k.$$

Постановка

- Пусть X — вещественное векторное пространство, Y — некоторое пространство Канторовича с базой $\mathbb{B}$. Через $L(X,Y)$ обозначим пространство линейных операторов из X в Y. Если X снабжено некоторой Y-полунормой, под $L^{(m)}(X,Y)$ мы будем понимать пространство мажорированных линейных операторов из X в Y. Для $T : X \to Y$ и $y \in Y$, как обычно, полагаем $\{T \le y\} := \{T(\cdot) \le y\} := \{x \in X \mid Tx \le y\}$ и $\ker(T) := \{T = 0\} := T^{-1}(0)$.
- $\mathrm{Orth}(Y)$ — коммутант $\mathbb{B}$ в $L^{(r)}(Y)$.

Неравенства: явное доминирование

- Ищем $\mathfrak{X}$ такой, что

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "B"'] & W \arrow[d, dotted, "\mathfrak{X}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

- $(\exists \mathfrak{X})\ \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \ker(A) \subset \ker(B)$.
- *Если W упорядочено W_+ и $A(X) - W_+ = W_+ - A(X) = W$, то*[1]

$$(\exists \mathfrak{X} \geq 0)\ \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \{A \leq 0\} \subset \{B \leq 0\}.$$

[1] Теорема Канторовича.

Фаркаш: неявное доминирование

Лемма 1. *Пусть X —векторное пространство над подполем R поля вещественных чисел $\mathbb{R}$. Допустим, что f и g — это R-линейные функционалы на X; т. е. $f, g \in X^{\#} := L(X, \mathbb{R})$.*
Включение

$$\{g \le 0\} \supset \{f \le 0\}$$

имеет место в том и только в том случае, если существует $\alpha \in \mathbb{R}_+$, такое что $g = \alpha f$.

$\mathbb{R}$: явное доминирование

- Лемма 2. *Пусть X — некоторое $\mathbb{R}$-полунормированное пространство над подполем R поля $\mathbb{R}$. Пусть, далее, $f_1, \dots, f_N$ и g — это ограниченные R-линейные функционалы над X, символически $f_1, \dots, f_N, g \in X^* := L^{(m)}(X, \mathbb{R})$.*
- *Включение*

$$\{g \le 0\} \supset \bigcap_{k=1}^{N} \{f_k \le 0\}$$

имеет место в том и только в том случае, если найдутся $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}_+$ такие, что $g = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k$.

Контрпример: нет доминирования

- Лемма 1, описывающая следствия одного неравенства, не ограничивает класс рассматриваемых функционалов.
- Аналогичная версия леммы Фаркаша для двух неравенств в общем случае просто неверна.
- Включение $\{f = 0\} \subset \{g \le 0\}$, эквивалентное включению $\{f = 0\} \subset \{g = 0\}$, не влечет того, что f и g пропорциональны в случае произвольного подполя $\mathbb{R}$. Достаточно рассмотреть $\mathbb{R}$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и взять разрывный $\mathbb{Q}$-линейный функционал на $\mathbb{Q}$ и тождественный автоморфизм $\mathbb{Q}$.

Восстановление: нет доминирования!

- Теорема.
  Пусть A и B из $L(X, Y)$. Эквивалентны утверждения:
  (1) $(\exists\alpha \in \mathrm{Orth}(m(Y)))\ B = \alpha A$;
  (2) *Существует проектор $\varkappa \in \mathbb{B}$ такой, что*

  $$\{\varkappa bB \le 0\} \supset \{\varkappa bA \le 0\}; \quad \{\neg\varkappa bB \le 0\} \supset \{\neg\varkappa bA \ge 0\}$$

  для всех $b \in \mathbb{B}$.
- Доказательство. Булевозначный анализ сводит дело к скалярному случаю. Дважды применяя лемму 1 и выписывая оценки истинности, завершаем доказательство.

Интервальные операторы

- Пусть X — векторная решетка. *Интервальный оператор* $\mathbf{T}$ из X в Y — это порядковый интервал $[\underline{T}, \overline{T}]$ в $L^{(r)}(X, Y)$, где $\underline{T} \leq \overline{T}$.
- Интервальное уравнение $\mathbf{B} = \mathfrak{X}\mathbf{A}$ по определению имеет *слабое интервальное решение* при условии $(\exists \mathfrak{X})(\exists A \in \mathbf{A})(\exists \mathrm{B} \in \mathbf{B})\ \mathbf{B} = \mathfrak{X}\mathbf{A}$.
- Взяв интервальный оператор $\mathbf{T}$ and $x \in X$, положим

$$P_{\mathbf{T}}(x) = \overline{T}x_{+} - \underline{T}x_{-}.$$

- Оператор $\mathbf{T}$ *адаптирован* при условии, что $\overline{T} - \underline{T}$ — это сумма конечного числа дизъюнктных слагаемых.
- Положим $\sim(x) := -x$ для всех $x \in X$.

Интервальные уравнения

- Теорема. *Пусть X — векторная решетка, а Y — пространство Канторовича. Допустим, что $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N$ — адаптированные интервальные операторы и $\mathbf{B}$ — произвольный интервальный оператор в пространстве порядково ограниченных операторов $L^{(r)}(X, Y)$.*
  Следующие утверждения эквивалентны:
- (1) *Интервальное уравнение*

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{A}_k$$

имеет слабое интервальное решение $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(Y)_+$.
(2) *Для всех $b \in \mathbb{B}$ выполнено*

$$\{b\mathfrak{B} \geq 0\} \supset \{b\mathfrak{A}_1^{\sim} \leq 0\} \cap \dots \cap \{b\mathfrak{A}_N^{\sim} \leq 0\},$$

где $\mathfrak{A}_k^{\sim} := P_{\mathbf{A}_k} \circ \sim$ для $k := 1, \dots, N$ и $\mathfrak{B} := P_{\mathbf{B}}$.

Неоднородные неравенства

- Теорема. *Пусть X — это Y-полунормированное пространство, где Y — пространство Канторовича. Возьмем $A_1, \dots, A_N, B \in L^{(m)}(X, Y)$ и $u_1, \dots, u_N, v \in Y$. Допустим, что система $A_1 x \le u_1, \dots, A_N x \le u_N$ совместна. Следующие утверждения эквивалентны:*
- (1) $\{bB \le bv\} \supset \{bA_1 \le bu_1\} \cap \dots \cap \{bA_N \le bu_N\}$ *для всех* $b \in \mathbb{B}$.

  (2) *Существуют* $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(m(Y))_+$ *такие, что*

$$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k; \quad v \ge \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k.$$

Неоднородные матричные неравенства

- В приложениях встречаются неоднородные матричные неравенства над различными конечномерными пространствами.
- Теорема. *Пусть X — это Y-полунормированное вещественное векторное пространство, где Y — пространство Канторовича. Допустим, что $A \in L^{(m)}(X, Y^s)$, $B \in L^{(m)}(X, Y^t)$, $u \in Y^s$ и $v \in Y^t$, где s и t — натуральные числа.*
  Следующие утверждения эквивалентны:
  (1) *Для всех $b \in \mathbb{B}$ неоднородное операторное неравенство $bBx \leq bv$ является следствием совместного неоднородного неравенства $bAx \leq bu$, т. е. $\{bB \leq bv\} \supset \{bA \leq bu\}$.*
  (2) *Существует $s \times t$-матрица из положительных ортоморфизмов $m(Y)$ такая, что $B = \mathfrak{X}A$ и $\mathfrak{X}u \leq v$ для соответствующего линейного оператора $\mathfrak{X} \in L_+(Y^s, Y^t)$.*

Комплексные скаляры

- **Теорема.** *Пусть X — это Y-полунормированное комплексное векторное пространство, где Y — пространство Канторовича. Пусть еще заданы $u_1, \dots, u_N, v \in Y$ и доминированные операторы $A_1, \dots, A_N, B \in L^{(m)}(X, Y_{\mathbb{C}})$ из X в комплексификацию $Y_{\mathbb{C}} := Y \otimes iY$ of Y. Допустим, что система неоднородных неравенств $|A_1 x| \le u_1, \dots, |A_N x| \le u_N$ совместна. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*
  (1) $\{b|B(\cdot)| \le bv\} \supset \{b|A_1(\cdot)| \le bu_1\} \cap \dots \cap \{b|A_N(\cdot)| \le bu_N\}$ *для всех* $b \in \mathbb{B}$.
  (2) *Существуют комплексные ортоморфизмы* $c_1, \dots, c_N \in \mathrm{Orth}(m(Y)_{\mathbb{C}})$ *такие, что*

$$B = \sum_{k=1}^{N} c_k A_k; \quad v \ge \sum_{k=1}^{N} |c_k| u_k.$$

Теорема об альтернативе

- Теорема. *Пусть X — это Y-полунормированное вещественное векторное пространство, где Y — пространство Канторовича. Допустим, что $A_1, \dots, A_N$ и B взяты из $L^{(m)}(X, Y)$.*
  Имеет место одна из следующих взаимоисключающих возможностей:
  (1) *Существуют $x \in X$ и $b, b' \in \mathbb{B}$ такие, что $b' \leq b$ и*
  $$b'Bx > 0, bA_1x \leq 0, \dots, bA_Nx \leq 0.$$
  (2) *Найдутся $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(m(Y))_+$, для которых*
  $$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k.$$

Дискретизация

- Уравнение
$$Tx = y,$$
где $T : X \to Y$, а X и Y — банаховы пространства, заменяют на уравнение
$$T_N x_N = y_N$$
подбором конечномерных аппроксимирующих подпространств X_N, Y_N и вложений $\imath_N, \jmath_N$:
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] & Y \\
X_N \arrow[u, "\imath_N"] \arrow[r, "T_N"'] & Y_N \arrow[u, "\jmath_N"']
\end{tikzcd}$$
- Этот процесс дискретизации «изнутри» пространства называют *гипоаппроксимацией*.

Гипераппроксимация

- Нестандартные модели дают метод внешней аппроксимации

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi_E"'] & F \arrow[d, "\varphi_F"] \\ E^{\#} \arrow[r, "T^{\#}"'] & F^{\#} \end{tikzcd}$$

- Здесь E и F — нормированные векторные пространства над одним и тем же полем скаляром, T — ограниченный линейный оператор из E в F, а $^{\#}$ — символ перехода к нестандартной оболочке.

Оболочка пространства

- Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — внутреннее нормированное пространство над ${}^*\mathbb{F}$, а $\operatorname{ltd}(E)$ и $\mu(E)$ внешние множества доступных и бесконечно малых элементов E. По определению $E^\# = \operatorname{ltd}(E)/\mu(E)$.
- Нормируем $E^\#$, полагая $\|\varphi x\| := \|x^\#\| := \operatorname{st}(\|x\|) \in \mathbb{F} \quad (x \in \operatorname{ltd}(E))$.
- Здесь $\varphi := \varphi_E := (\cdot)^\# : \operatorname{ltd}(E) \to E^\#$ — фактор-гомоморфизм, а st — символ перехода к стандартной части доступного числа.

Оболочка оператора

- Пусть $T : E \to F$ — внутренний ограниченный линейный оператор из E в F. Числовое множество $c(T) := \{C \in {}^*\mathbb{R} : (\forall x \in E)\|Tx\| \le C\|x\|\}$ является внутренним и ограниченным и $\|T\| := \inf c(T)$.
- Если $\|T\|$ — доступное число, то из классического нормативного неравенства $\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|$, справедливого для всех $x \in E$, видно, что $T(\mathrm{ltd}(E)) \subset \mathrm{ltd}(F)$ и $T(\mu(E)) \subset \mu(F)$. Следовательно, корректно определено снижение T на $E^\#$ — *оболочка* $T^\# : E^\# \to F^\#$, действующая по правилу

$$T^\# \varphi_E x := \varphi_F Tx \quad (x \in E).$$

Наличие гипераппроксимаций

- Пространство $E^{\#}$ автоматически оказывается банаховым для каждого внутреннего (не обязательно полного) нормированного пространства E. Если внутренняя размерность внутреннего нормированного пространства E конечна, то пространство E называют *гиперконечномерным*.
- Для каждого нормированного векторного пространства E существует гиперконечномерное подпространство $F \subset {}^*E$, содержащее все стандартные элементы внутреннего пространства ${}^*E$.
- Инфинитезимальные методы позволяют предложить и новые схемы гипераппроксимации общих компактных пространств. В качестве таких приближений к компактному множеству сверху могут выступать произвольные конечные внутренние множества, содержащие все стандартные элементы подлежащего аппроксимации компакта.

Скаляризация

- Скаляризация в самом общем смысле — это приведение к числу, неизбежное в задачах многоцелевой оптимизации. Особенность реальных экстремальных задач состоит в наличии большого числа противоречивых целей и интересов, подлежащих согласованию. Векторная оптимизация чревата серьезными трудностями, отсутствующими в случае скаляров.
- Широкие возможности скаляризации дает булевозначный анализ. Более распространены традиционные методы, связанные с ранжированием или нормированием предпочтений. На первый план здесь выходит анализ разумных понятий оптимальности для многоцелевых задач, среди которых можно выделить идеальный и обобщенный оптимумы, оптимум в смысле Парето, а также приближенный и инфинитезимальный оптимумы.

Идеальный оптимум

- Пусть X — векторное пространство, E — упорядоченное векторное пространство, $f : X \to E^\bullet := E \cup +\infty$ — выпуклый оператор и $C \subset X$ — выпуклое множество. *Векторная программа* — это пара (C, f), записываемая в виде

$$x \in C, \quad f(x) \to \inf.$$

- Элемент $e := \inf_{x \in C} f(x)$ (если он существует) называют *значением программы* (C, f). Ясно, что $e = -f^*(0)$.
- Допустимый элемент x_0 называют *идеальным оптимумом* или *решением*, если $e = f(x_0)$. Таким образом, x_0 — идеальный оптимум в том и только в том случае, если $f(x_0)$ — наименьший элемент образа $f(C)$, т. е. $x_0 \in C$ и $f(C) \subset f(x_0) + E^+$.

Приближенная оптимальность

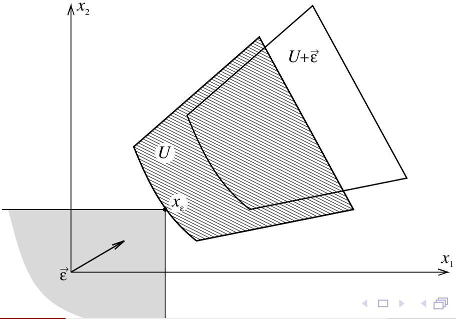
- Зафиксируем положительный элемент $\varepsilon \in E$. Допустимая точка x_0 называется *ε-решением* или *ε-оптимумом* программы (C, f), если $f(x_0) \le e + \varepsilon$, где e — значение программы.
- Таким образом, x_0 есть ε-решение программы (C, f), если и только если $x_0 \in C$ и $f(x_0) - \varepsilon$ — нижняя граница образа $f(C)$ или, что то же самое, $f(C) + \varepsilon \subset f(x_0) + E^+$.
- Очевидно, что точка x_0 будет ε-решением безусловной задачи $f(x) \to \inf$ в том и лишь в том случае, когда нуль входит в $\partial_\varepsilon f(x_0)$, т. е.

$$f(x_0) \le \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon \leftrightarrow 0 \in \partial_\varepsilon f(x_0).$$

- Здесь фигурирует ε-субдифференциал $\partial_\varepsilon f(x_0)$. Напомним, что элемент l последнего — это линейный оператор из X в E такой, что $(\forall x \in X) l(x - x_0) \le f(x) - f(x_0) + \varepsilon$.

Приближенная эффективность

- Допустимая точка x_0 называется *ε-оптимальной по Парето* или *ε-Парето-оптимальной* в программе (C, f), если $f(x_0)$ — минимальный элемент множества $U + \varepsilon$, где $U := f(C)$, т. е. если $(f(x_0) - E^+) \cap (f(C) + \varepsilon) = [f(x_0)]$.
- Более подробно, ε-Парето-оптимальность точки x_0 означает, что $x_0 \in C$ и для любой точки $x \in C$ неравенство $f(x_0) \geq f(x) + \varepsilon$ влечет $f(x_0) \sim f(x) + \varepsilon$.



Элиминация ε

- ε-решение при достаточно малом ε можно рассматривать как претендента на «практический оптимум» — на приемлемое на практике решение исходной задачи.
- Правила вычисления ε-субдифференциалов доставляют формальный аппарат учета границ точности решения экстремальной задачи. Соответствующая техника в настоящее время весьма совершенна и, можно сказать, изящна и изощрена. В то же время возникающие точные формулы труднообозримы и не вполне соответствуют практическим приемам оптимизации, при которых применяют эвристические правила «отбрасывания малых».
- Лишенный этих недостатков адекватный аппарат инфинитезимальных субдифференциалов связан с современными возможностями нестандартной теории множеств.

Инфинитезимальный оптимум

- Предположим, что существует конечное значение $e := \inf_{x \in C} f(x)$ программы (C, f).
- Допустимую точку x_0 называют *инфинитезимальным решением*, если верно $f(x_0) \approx e$, т. е. если для каждого $x \in C$ и любого стандартного $\varepsilon \in \mathcal{E}$ выполняется $f(x_0) \leq f(x) + \varepsilon$.
- Точка $x_0 \in X$ является инфинитезимальным решением безусловной задачи $f(x) \to \inf$ в том и только в том случае, если $0 \in Df(x_0)$, где $Df(x_0)$ — внешнее объединение соответствующих ε-субдифференциалов по всем бесконечно малым ε.

Перспективы

- Адаптация современных идей теории моделей для функционального анализа представляется важнейшим направлением развития синтетических методов прикладной и теоретической математики. Здесь возникают новые модели чисел, пространств, видов уравнений. Расширяется содержание всех имеющихся теорем и алгоритмов, обогащается и обновляется вся методология математического моделирования, открывая совершенно фантастические возможности.
- Классический функциональный анализ далеко не сразу занял свое теперешнее место языка непрерывной математики. Сейчас настали времена новых мощных технологий математического анализа. Пути назад в науке нет — новые методы со временем станут столь же элементарными и общеупотребительными в исчислениях и вычислениях как банаховы пространства и линейные операторы.

Заключение

- Благодарю ленинградских и петербургских математиков за их вдохновляющий вклад в прикладной анализ и за неизменную любезность.
- Сердечно поздравляю Владимира Васильевича Жука с 70-летием.
- Спасибо за внимание.
- С Днём Победы!