Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

Нестандартные методы анализа

**А. Г. Кусраев**
**С. С. Кутателадзе**

# БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ АНАЛИЗ

Второе, исправленное издание

Новосибирск
Издательство Института математики
2003

УДК 517.11+517.98
ББК 22.16
К94

**Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.** Булевозначный анализ. — 2-е изд., испр. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2003. — xii+386 с. — (Нестандартные методы анализа).

ISBN 5–86134–115–X.

Булевозначный анализ — один из наиболее разработанных разделов, составляющих современные нестандартные методы анализа. В монографии детально излагается техника спусков и подъемов для булевозначных моделей теории множеств, позволяющая существенно расширить объем и область применимости математических утверждений. Основное внимание уделено изучению изображений классических функционально-аналитических объектов: банаховых пространств и алгебр. Вскрывается имманентная связь последних с решеточно нормированными векторными пространствами, введенными Л. В. Канторовичем. Книга ориентирована на широкий круг читателей, интересующихся современными приложениями нестандартного анализа.

Библиогр. 261.

Ответственный редактор
академик *Ю. Г. Решетняк*

Редактор серии
*С. С. Кутателадзе*

К $\frac{1602080000\text{–}02}{\text{Я}82(03)\text{–}03}$ Без объявл.

ISBN 5–86134–115–X

# Содержание

# От редактора серии

Нестандартные методы анализа в современном понимании состоят в привлечении двух различных — «стандартной» и «нестандартной» — моделей теории множеств для исследования конкретных математических объектов и проблем. Такие методы получили существенное развитие во второй половине XX века и сформировались в несколько направлений.

Первое из названных направлений вслед за его основоположником А. Робинсоном часто называют запоминающимся, хотя и отчасти эпатажным, термином — *нестандартный анализ* (теперь чаще говорят о классическом или робинсоновском нестандартном анализе). Робинсоновский нестандартный анализ характеризуется широким использованием давно известных в практике естествознания, но долгое время запрещенных в математике XX века концепций, связанных с представлениями об актуальных бесконечно больших и актуальных бесконечно малых величинах. В этой связи сейчас за ним закрепилось наименование *инфинитезимальный анализ*, выразительно напоминающее о классическом анализе бесконечно малых.

Инфинитезимальный анализ бурно развивается и уже внес капитальные изменения в систему общематематических представлений. Прежде всего это связано с тем, что в нем предложено новое понимание метода неделимых, восходящего к глубокой древности, и осуществлен синтез подходов к дифференциальному и интегральному исчислению, предложенных его основоположниками. В наши дни инфинитезимальный анализ находит широкое распространение и проникает во все разделы современной математики. Наибольшие изменения происходят в этой связи в негладком анализе, в теории

вероятностей и теории меры, в качественной теории дифференциальных уравнений и в математической экономике.

Второе направление — *булевозначный анализ* — характеризуется широким использованием таких терминов, как спуски и подъемы, циклические оболочки и миксинги, $B$-множества и изображения объектов в моделях. Развитие этого направления, становление которого связано со знаменитыми работами П. Дж. Коэна по гипотезе континуума, привело к принципиально новым идеям и результатам в ряде направлений функционального анализа, прежде всего в теории пространств Канторовича, в теории алгебр фон Неймана, в выпуклом анализе и теории векторных мер.

В монографии [1], изданной в 1990 году Сибирским отделением издательства «Наука» и переизданной в 1994 году издательством Kluwer Academic Publishers на английском языке [5], впервые с единых методологических позиций были рассмотрены оба указанных выше направления, составляющих ядро современных нестандартных методов анализа.

Читательский интерес и стремительное развитие самой дисциплины поставили задачу отразить современное состояние дел, изложив новые темы и результаты. При работе над реализацией проекта выяснилось, что остаться в прежних рамках одной книги уже невозможно. В этой связи в 1999 году было принято решение о подготовке серии монографий под общим названием «Нестандартные методы анализа», каждая из которых трактует различные аспекты этого математического направления.

В названной серии уже вышли три книги [2, 3, 4], опубликованные практически одновременно с их переводами на английский язык [6, 7, 8]. Монография [2] посвящена булевозначному анализу, книга [3] трактует приложения нестандартных методов к теории векторных решеток, а издание [4], посвященное инфинитезимальному анализу, состоит из двух частей единой монографии.

Серия вызвала известный интерес у читателя и, к удивлению редактора и авторов, спрос на изданные книги не удовлетворен. По просьбе издательства было подготовлено переиздание выпуска [2], в котором авторы ограничились исправлением замеченных опечаток и неточностей.

*С. С. Кутателадзе*

## Литература

**1.** Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.—344 с.
**2.** Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Булевозначный анализ. Новосибирск: Изд. Института математики им. С. Л. Соболева, 1999.—384 с.
**3.** Кутателадзе С. С. (ред.) Нестандартный анализ и векторные решетки.—Новосибирск: Изд. Института математики им. С. Л. Соболева, 1999.—380 с.
**4.** Гордон Е. И., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Инфинитезимальный анализ. Части 1 и 2.—Новосибирск: Изд. Института математики им. С. Л. Соболева, 2001.—318 с.+248 с.
**5.** Kusraev A. G. and Kutateladze S. S., Nonstandard Methods of Analysis.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.—435 p.
**6.** Kusraev A. G. and Kutateladze S. S., Boolean Valued Analysis.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.—322 p.
**7.** Kutateladze S. S. (ed.), Nonstandard Analysis and Vector Lattices.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.—307 p.
**8.** Gordon E. I., Kusraev A. G., and Kutateladze S. S. Infinitesimal Analysis.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.—307 p.

# Введение

Как следует из названия, настоящая книга посвящена *булевозначному анализу*. Так называют аппарат исследования произвольных математических объектов, основанный на сравнительном изучении их вида в двух моделях теории множеств, конструкции которых основаны на принципиально различных булевых алгебрах. В качестве этих моделей используются классический канторов рай в форме универсума фон Неймана и специально построенный булевозначный универсум, в котором теоретико-множественные понятия и утверждения получают весьма нетрадиционные толкования. Одновременное использование двух моделей для изучения одного объекта — фамильная черта так называемых нестандартных методов современной математики. В этой связи булевозначный анализ принято относить к разновидностям нестандартного анализа.

Своим возникновением булевозначный анализ обязан выдающемуся достижению П. Дж. Коэна, установившему в начале шестидесятых годов непротиворечивость добавления отрицания гипотезы континуума CH к аксиомам теории множеств Цермело — Френкеля ZFC. Вместе с более ранним результатом К. Гёделя о совместимости CH с ZFC, установленный П. Дж. Коэном факт означает независимость CH от обычных аксиом ZFC. Шаг, совершенный П. Дж. Коэном, связан с преодолением им принципиальной трудности, отмеченной Дж. Шепердсоном и отсутствующей в случае, разобранном К. Гёделем. Доказательство непротиворечивости (ZFC) + ($\neg$ CH) невозможно с помощью стандартных моделей. Точнее говоря, выбрав какую-либо реализацию универсума фон Неймана, мы не можем указать в ней подкласс, служащий моделью (ZFC)+($\neg$ CH), если применять уже имеющуюся у нас интерпретацию предиката принад-

лежности. П. Дж. Коэну удалось предложить новый мощный способ построения невнутренних — нестандартных — моделей ZFC, названный им *методом форсинга.* Термин «форсинг» часто переводят как «вынуждение». Возможно, точнее говорить в этом контексте о методе принуждения. Использованные П. Дж. Коэном приемы — применение аксиомы существования стандартной транзитивной модели для ZFC и насильственное превращение последней в принципиально нестандартную модель методом принуждения — вступают в противоречие с обычной математической интуицией, исходящей, по словам самого П. Дж. Коэна, «из нашей веры в естественную почти физическую модель математического мира» [52, с. 202].

Трудности в восприятии результатов П. Дж. Коэна задолго до их появления прекрасно выразил Н. Н. Лузин в знаменитом докладе «Современное состояние теории функций действительного переменного», сделанном им на Всероссийском съезде математиков в 1927 г.: «Первое, что приходит на ум, это то, что установление мощности continuum'а есть дело свободной аксиомы, вроде аксиомы о параллелях для геометрии. Но в то же время, как при инвариантности всех прочих аксиом геометрии Евклида и при варьировании аксиомы о параллельных меняется самый смысл произнесенных или написанных слов: „точка", „прямая", etc. — смысл каких слов должен меняться, если мы делаем мощность continuum'а подвижной на алефической шкале, все время доказывая непротиворечивость этого движения? Мощность continuum'а, если только мыслить его как множество точек, есть единая некая реальность и она должна находиться на алефической шкале там, где она на ней есть; нужды нет, если определение этого места затруднительно или, как прибавил бы J. Hadamard, „даже невозможно для нас, людей"» [84, с. 11–12].

Весьма характерный взгляд сформулировал П. С. Новиков: «...возможно (я сам придерживаюсь этого мнения), что результат Коэна имеет чисто отрицательное значение и обнаруживает конец развития „наивной" теории множеств в духе Кантора» [96, с. 209].

Стремление облегчить указанные трудности в восприятии результатов и методов П. Дж. Коэна привело Д. Скотта и Р. Соловея к построению булевозначных моделей ZFC, обладающих привлекательной наглядностью с точки зрения классических математиков и в то же время приспособленных для получения теорем о независимости. Аналогичные модели были построены в тот же период П. Вопенкой.

Из уже сказанного видно, что булевозначные модели, приводящие к тем же целям, что и построенные П. Дж. Коэном с помощью форсинга, должны быть в каком-то смысле нестандартными, обязаны обладать чертами, отсутствующими у общепринятых моделей.

Качественно говоря, *в понятии булевозначной модели присутствует новая концепция моделирования*, которую можно назвать заочным моделированием или моделированием по телефону. Поясним суть этой концепции ее сравнением с традиционными подходами. В классическом смысле, сталкиваясь с двумя моделями одной теории, мы пытаемся установить взаимнооднозначное соответствие между фигурирующими в них универсумами. Если такую биекцию удается подобрать, переводя предикаты и операции одной модели в их аналоги в другой, мы говорим об изоморфности моделей. Таким образом, описанное представление об изоморфизме подразумевает очное сопоставление моделей — предъявление биекции универсумов.

Представим себе, что мы лишены возможности одновременного физического поэлементного сравнения моделей, однако можем обмениваться информацией с обладателем другой модели, например, по телефону. В процессе общения легко установить, что собеседник с помощью своей модели изучает объекты, которые он именует знакомыми нам словами, говоря о множествах, их сравнении и принадлежности. Поскольку нас интересует ZFC, мы спрашиваем у него — истинны ли аксиомы ZFC? Поработав в своей модели, он сообщает «да, истинны». Убедившись также, что он использует те же правила вывода, что приняты нами, мы должны признать, что имеющаяся у него модель — это модель интересующей нас теории. Полезно подчеркнуть, что сделав такой вывод, мы ничего не узнали ни об объектах, составляющих его модель, ни о процедурах, с помощью которых он отличает истинные утверждения от ложных.[†]

Итак, *новая концепция моделирования связана как с отказом от отождествления предметных областей, так и с допуском новых процедур верификации утверждений.*

При построении булевозначной модели мы начинаем с выбора некоторой полной булевой алгебры, краеугольного камня булевозначного универсума и области прибытия оценки истинности, со-

[†] “*E*, *Eir* и *Em*” из знаменитого Personal Pronoun Pronouncement представляются существенно более лучшим набором местоимений для данного абзаца (см. [235]).

поставляющей формуле ZFC некоторый элемент алгебры $B$. Точнее говоря, задав $B$, мы строим универсум $\mathbb{V}^{(B)}$, призванный служить универсумом рассмотрения теории ZFC. Каждой формуле $\varphi$, переменные которой теперь пробегают $\mathbb{V}^{(B)}$, сопоставляется элемент $[\![\varphi]\!]$, лежащий в исходной булевой алгебре $B$. Величину $[\![\varphi]\!]$ называют *оценкой истинности* формулы $\varphi$. Оценки истинности используются для анализа формул ZFC. При этом оказывается, что теоремы ZFC получают наибольшую возможную оценку $\mathbb{1}_B$, и мы объявляем их верными внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Детальное изложение упомянутых конструкций занимает главы 1–3 этой книги. Приводимые конструкции и, прежде всего, процедуры спуска и подъема, осуществляющие функториальные связи между универсумом фон Неймана $\mathbb{V}$ и булевозначным универсумом $\mathbb{V}^{(B)}$, составляют техническую основу применений булевозначных моделей к задачам анализа. Необходимые детали аксиоматики теории множеств Цермело — Френкеля для удобства чтения помещены в Приложении. Там же собраны простейшие сведения из теории категорий. В заключительных главах мы демонстрируем важнейшие возможности, доставляемые булевозначным анализом, — способы превращений функциональных пространств в числовые множества, операторов — в функционалы, вектор-функций — в обычные отображения и т. п. Разумеется, отбор объектов анализа и круга приложений к функциональному анализу во многом обусловлен нашими личными научными интересами.

Мы начинаем с детального изучения булевозначных реализаций общих алгебраических систем, которому посвящена глава 4. Теория алгебраических систем, заложенная в трудах А. И. Мальцева и А. Тарского, относится к числу важнейших общематематических достижений. В этой связи ясно, что сведения об булевозначном изображении таких систем необходимы для приложений к любому содержательному разделу математики. Столь же универсальное значение имеют конструкции, представленные в главе 5. Математика, во всяком случае математика как наука о бесконечном, немыслима без вещественных чисел. Булевозначный анализ вскрыл особую роль расширенного пространства Канторовича. Обнаружилось, что каждое из таких пространств служит равноправной моделью поля вещественных чисел. Напомним, что условно полные векторные решетки, называемые также *$K$-пространствами* или *пространства-*

*ми Канторовича*, были введены в тридцатые годы Л. В. Канторовичем как полезная абстракция поля вещественных чисел. Для новых объектов Л. В. Канторович выдвинул *эвристический принцип переноса*, состоящий в том, что элементы $K$-пространства аналогичны вещественным числам, а утверждениям о функционалах отвечают теоремы об операторах со значениями в $K$-пространствах. Время позволило вложить точный смысл в принцип Канторовича. Соответствующий аппарат, и в первую очередь основополагающая теорема Е. И. Гордона, составляет ядро главы 5. Здесь же мы подробно излагаем проблему булевозначной реализации центрального объекта классического функционального анализа — банахова пространства. Оказывается, что решеточно нормированные векторные пространства, также открытые при зарождении теории $K$-пространств, служат изображениями традиционных нормированных пространств.

Глава 6 посвящена теории операторных алгебр. Булевозначный анализ таких алгебр — направление исследований, инициированное пионерскими работами Г. Такеути, — интенсивно развивается в последние десятилетия. Изложение строится на основе результатов главы 4 о булевозначной реализации решеточно нормированных пространств. На этом пути возникает единый метод исследования таких аналитических объектов, как инволютивные банаховы алгебры, банаховы модули, алгебры Йордана — Банаха, алгебры неограниченных операторов и т. п.

Монография ориентирована на широкий круг читателей, интересующихся современными теоретико-модельными методами в их приложении к функциональному анализу. Мы старались сделать книгу возможно более независимой, хотя полностью осуществить замысел не удалось ввиду большого количества математических идей и объектов, вовлеченных в изложение. Надеемся, что читатель поймет наши проблемы и простит пробелы и неточности.

Выполняя приятный долг, мы выражаем благодарность за помощь в подготовке книги своим коллегам по Институту математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН и Институту прикладной математики и информатики Владикавказского научного центра РАН и Правительства Республики Северная Осетия — Алания.

*А. Кусраев*
*С. Кутателадзе*

# Глава 1

# Универсумы множеств

В кредо наивной теории множеств входит мечта о «канторовом рае» — об универсуме — мире множеств, содержащем все мыслимые в обособленном виде образования, каждое из которых представляет собой «соединение в некое целое $M$ определенных хорошо различимых предметов $m$ нашего созерцания или нашего мышления» [37, с. 173].

Реалистические приближения к недостижимому идеалу — адекватные формальные схемы, позволяющие предъявлять весьма богатый спектр конкретных множеств, оставаясь в комфортных условиях достаточной логической строгости, — являются предметом современной теории множеств.

Наиболее существенной частью современных аксиоматических теорий множеств является построение универсумов, дающих удовлетворительные для тех или иных нужд «аппроксимации снизу» для мира наивных множеств. В рамках соответствующих аксиоматик удается точно обосновать и детально осмыслить качественные феноменологические принципы, закладываемые в стандартные и нестандартные математические модели.

В настоящее время наиболее разработанной и общеупотребительной является теория множеств Цермело — Френкеля. В ее рамках мы и ведем изложение. Если читатель пожелает восстановить детали языка и аксиоматики этой теории, он может обратиться к Приложению.

В этой главе изложен формальный аппарат построения универсумов множеств как результата специфических трансфинитных про-

цессов создания так называемых кумулятивных иерархий. Наиболее важным для дальнейшего является детальное описание конструкции универсума фон Неймана.

С не меньшей тщательностью анализируется статут классов множеств в рамках формальной системы, восходящей к Дж. фон Нейману, К. Гёделю и П. Бернайсу и являющейся консервативным расширением теории Цермело — Френкеля.

## 1.1. Булевы алгебры

В текущем параграфе дан эскиз нужных для дальнейшего сведений из теории булевых алгебр. Более полное изложение имеется в монографиях [17, 101, 151, 164, 191].

**1.1.1.** С целью фиксации терминологии напомним некоторые хорошо известные понятия.

Под *упорядоченным множеством* понимают пару $(M, \leq)$, где $\leq$ — отношение порядка на некотором $M$ (см. П.1.10). Разумеется, тот же термин относят к основному множеству $M$. В дальнейшем мы применяем эту стандартную практику во всех аналогичных случаях без особых оговорок.

*Верхняя граница* подмножества $X$ в упорядоченном множестве $M$ — это элемент $a \in M$ такой, что $x \leq a$ для всех $x \in X$. Наименьшую верхнюю границу подмножества $X$ называют его *точной верхней границей*, или *верхней гранью*, или *супремумом* и обозначают $\sup(X)$ или $\sup X$. Иначе говоря, $a = \sup(X)$ в том и только в том случае, если $a$ — верхняя граница $X$ и $a \leq b$ для любой верхней границы $b$ множества $X$.

Двойственным образом, переходя от $\leq$ к $\leq^{-1}$, определяют *нижнюю границу* и *точную нижнюю границу* $\inf(X)$ или $\inf X$, которую называют *инфимумом* множества $X$. Если точная (верхняя или нижняя) граница данного подмножества существует, то она единственна.

Упорядоченное множество $M$ называют *решеткой*, если любое двухэлементное подмножество $\{x, y\}$ множества $M$ имеет точные границы $x \vee y := \sup\{x, y\}$ и $x \wedge y := \inf\{x, y\}$. Для подмножества $X$ решетки $L$ приняты следующие обозначения:

$$\bigvee X := \sup(X), \quad \bigwedge X := \inf(X),$$

$$\bigvee_{\alpha\in\mathrm{A}} x_\alpha := \bigvee\{x_\alpha : \alpha\in\mathrm{A}\},\quad \bigwedge_{\alpha\in\mathrm{A}} x_\alpha := \bigwedge\{x_\alpha : \alpha\in\mathrm{A}\},$$

$$\bigvee_{k=1}^{n} x_k := x_1\vee\ldots\vee x_n := \sup\{x_1,\ldots,x_n\},$$

$$\bigwedge_{k=1}^{n} x_k := x_1\wedge\ldots\wedge x_n := \inf\{x_1,\ldots,x_n\}.$$

Здесь $X$ — подмножество $L$, а $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ — семейство элементов $L$; наконец, $x_1,\ldots,x_n$ — некоторые элементы $L$.

В решетке $L$ возникают бинарные операции $(x,y)\mapsto x\vee y$ и $(x,y)\mapsto x\wedge y$, для которых наблюдается

**(1)** *коммутативность*:

$$x\vee y = y\vee x,\quad x\wedge y = y\wedge x;$$

**(2)** *ассоциативность*:

$$x\vee(y\vee z) = (x\vee y)\vee z,\quad x\wedge(y\wedge z) = (x\wedge y)\wedge z.$$

Из (2) индукцией выводится, что в *решетке всякое непустое конечное множество имеет точные границы.* Если же точные границы существуют у каждого подмножества решетки $L$, то $L$ называют *полной решеткой.*

Говорят, что решетка $L$ *дистрибутивна*, если в ней выполнены следующие соотношения:

**(3)** $x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z)$,

**(4)** $x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z)$.

Если существует наименьший (наибольший) элемент решетки, то он называется *нулем* (соответственно *единицей*). Нуль и единица в решетке $L$ обозначаются символами $\mathbb{0}_L$, $\mathbb{1}_L$ или просто $\mathbb{0}$, $\mathbb{1}$, если ясно, о какой решетке $L$ идет речь. Отметим, что $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$ являются нейтральными элементами:

**(5)** $\mathbb{0}\vee x = x,\quad \mathbb{1}\wedge x = x$.

В соответствии с общими определениями $\bigvee\varnothing = \sup\varnothing := \mathbb{0}$, $\bigwedge\varnothing = \inf\varnothing := \mathbb{1}$. *Дополнение* $x^*$ элемента $x$ в решетке $L$ с нулем и единицей определяют как такой элемент $x^*\in L$, что

**(6)** $x\wedge x^* = \mathbb{0},\quad x\vee x^* = \mathbb{1}$.

Элементы $x$ и $y$ в $L$ называют *дизъюнктными*, если $x \wedge y = \mathbb{0}$. Ясно, что каждый элемент $x$ дизъюнктен любому своему дополнению $x^*$. Отметим, наконец, что если всякий элемент в $L$ имеет хотя бы одно дополнение, то об $L$ говорят как о *решетке с дополнениями.* Само собой, далеко не всякая решетка есть решетка с дополнениями.

**1.1.2.** *Булевой алгеброй* называют дистрибутивную решетку с дополнениями и наибольшим и наименьшим элементами. В частности, в булевой алгебре $B$ по определению имеются нуль $\mathbb{0} := \mathbb{0}_B$ и единица $\mathbb{1} := \mathbb{1}_B$.

На первый взгляд данное определение может показаться несколько странным. В самом деле, из него сразу не видно, по каким причинам дистрибутивную решетку принято называть алгеброй, — ведь слово алгебра относится к общепринятым (ср. алгебра Ли, банахова алгебра, $C^*$-алгебра и т. п.). Возникшее недоумение легко развеивается, ибо в действительности булева алгебра служит алгеброй над двухэлементным полем. Принципиальная важность этого обстоятельства найдет частичное отражение в следующем параграфе. Вместе с тем вполне естественно, что в разных контекстах на булевы алгебры удобно смотреть с разных точек зрения.

Ниже булева алгебра будет интересовать нас преимущественно как дистрибутивная решетка с дополнениями. Стоит подчеркнуть, что важные для функционального анализа конкретные булевы алгебры часто возникают именно как дистрибутивные решетки с дополнениями.

Отметим, что формальный пример булевой алгебры дает одноэлементная решетка, т. е. множество вида $\{x\}$ с очевидным порядком $x \leq x$. Эту алгебру называют *вырожденной.* Вырожденная булева алгебра естественна как алгебраическая система, но представляется нелепой простушкой в интересующем нас контексте булевозначного анализа. Простейшей невырожденной булевой алгеброй служит *двухэлементная решетка* $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}, \mathbb{0} \neq \mathbb{1}$, с порядком: $\mathbb{0} \leq \mathbb{1}$, $\mathbb{0} \leq \mathbb{0}$, $\mathbb{1} \leq \mathbb{1}$. Двухэлементная решетка играет существенную роль в последующих главах. В связи со сказанным условимся, говоря о булевой алгебре $B$, всегда считать, что $\mathbb{0}_B \neq \mathbb{1}_B$, т. е. исключим из рассмотрения вырожденные алгебры.

В булевой алгебре $B$ каждый элемент $x \in B$ имеет единственное дополнение, обозначаемое символом $x^*$. Возникающее отображение $x \mapsto x^*$ $(x \in B)$ идемпотентно (т. е. $(\forall\, x \in B)$ $(x^{**} := (x^*)^* = x)$)

и осуществляет *дуальный изоморфизм* или *антиизоморфизм* $B$ на себя (т. е. является изоморфизмом упорядоченных множеств $(B, \leq)$ и $(B, \leq^{-1})$). В частности, справедливы *формулы де Моргана*:

$$\Big(\bigvee_{\alpha\in \mathrm{A}} x_\alpha\Big)^* = \bigwedge_{\alpha\in \mathrm{A}} x_\alpha^*, \quad \Big(\bigwedge_{\alpha\in \mathrm{A}} x_\alpha\Big)^* = \bigvee_{\alpha\in \mathrm{A}} x_\alpha^*,$$

где $x_\alpha \in B$ $(\alpha \in \mathrm{A})$.

**1.1.3.** Три операции $\vee$, $\wedge$ и $*$, заданные в произвольной булевой алгебре $B$, называют *булевыми*. Можно дать эквивалентное определение булевой алгебры $B$, охарактеризовав ее как универсальную алгебру $(B, \vee, \wedge, *, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ с двумя бинарными операциями $\vee$ и $\wedge$, с одной унарной операцией $*$ и двумя выделенными элементами — «нульарными» операциями — $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$, удовлетворяющими условиям: (1) операции $\vee$ и $\wedge$ коммутативны и ассоциативны (1.1.1 (1, 2)); (2) операции $\vee$ и $\wedge$ двояко дистрибутивны относительно друг друга (1.1.1 (3, 4)); (3) элементы $x$ и $x^*$ взаимно дополнительны (1.1.1 (6)); (4) $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$ являются нейтральными элементами для операций $\vee$ и $\wedge$ соответственно (1.1.1 (5)).

Определив такую универсальную алгебру $B$, можно ввести в ней отношение порядка, полагая $x \leq y$, если $x \wedge y = x$. При этом окажется, что $(B, \leq)$ — дистрибутивная решетка с дополнениями, в которой $\vee$ и $\wedge$ совпадают с решеточными операциями, $*$ — с дополнением, а $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$ — наименьший и наибольший элементы. В литературе можно встретить много эквивалентных систем аксиом, характеризующих булевы алгебры.

**1.1.4.** Используя основные булевы операции $\vee$, $\wedge$ и $*$, вводят ряд других:

$$x - y := x \wedge y^*, \quad x \Rightarrow y := x^* \vee y,$$
$$x \vartriangle y := (x - y) \wedge (y - x) = (x \wedge y^*) \vee (y \wedge x^*),$$
$$x \Leftrightarrow y := (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) = (x^* \vee y) \wedge (y^* \vee x).$$

Приведем несколько легко проверяемых соотношений, которые неоднократно применяются в дальнейшем:

**(1)** $x \Rightarrow y = (x - y)^*, \quad x \Leftrightarrow y = (x \vartriangle y)^*$;

**(2)** $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = (x \wedge y) \Rightarrow z = (x \wedge y) \Rightarrow (x \wedge z)$;

**(3)** $x \leq y \Rightarrow z \leftrightarrow x \wedge y \leq z \leftrightarrow y - z \leq x^*$;
**(4)** $x \leq y \leftrightarrow x \Rightarrow y = \mathbb{1} \leftrightarrow x - y = \mathbb{0}$;
**(5)** $x = y \leftrightarrow x \Leftrightarrow y = \mathbb{1} \leftrightarrow x \vartriangle y = \mathbb{0}$.

Стоит подчеркнуть, что операция $\vartriangle$, называемая *симметрической разностью*, обладает свойствами метрики:

**(6)** $x \vartriangle y = \mathbb{0} \leftrightarrow x = y$;
**(7)** $x \vartriangle y = y \vartriangle x$;
**(8)** $x \vartriangle y \leq (x \vartriangle z) \vee (z \vartriangle y)$.

При этом относительно такой «метрики» решеточные операции становятся нерастягивающими, а дополнение — изометрией:

$$
\begin{gathered}
(x \vee y) \vartriangle (u \vee v) \leq (x \vartriangle u) \vee (y \vartriangle v), \\
(x \wedge y) \vartriangle (u \wedge v) \leq (x \vartriangle u) \vee (y \vartriangle v), \\
x^* \vartriangle y^* = x \vartriangle y.
\end{gathered}
$$

**1.1.5.** Булеву алгебру $B$ называют *полной* ($\sigma$-*полной*), если любое множество (любое счетное множество) в $B$ имеет точные границы. Вместо $\sigma$-полных алгебр чаще говорят просто о $\sigma$-*алгебрах*. С полной булевой алгеброй $B$ связаны отображения $\bigvee, \bigwedge : \mathscr{P}(B) \to B$, сопоставляющие множеству в $B$ его супремум и инфимум соответственно. Эти отображения иногда именуют *бесконечными операциями*. Для них справедливы многие полезные соотношения. Выделяют *бесконечные дистрибутивные законы*:

**(1)** $x \vee \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha = \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x \vee x_\alpha$;
**(2)** $x \wedge \bigvee\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha = \bigvee\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x \wedge x_\alpha$.

Из (1), (2) вытекают следующие часто используемые равенства:

**(3)** $\big(\bigvee\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha\big) \Rightarrow x = \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} (x_\alpha \Rightarrow x)$;
**(4)** $\big(\bigwedge\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha\big) \Rightarrow x = \bigvee\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} (x_\alpha \Rightarrow x)$;
**(5)** $x \Rightarrow \big(\bigvee\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha\big) = \bigvee\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} (x \Rightarrow x_\alpha)$;
**(6)** $x \Rightarrow \big(\bigwedge\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha\big) = \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} (x \Rightarrow x_\alpha)$.

Обеспечены также коммутативность и ассоциативность точных границ, в частных случаях отмеченные ранее в 1.1.1 (1, 2):

**(7)** $\bigvee\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} \bigvee\limits_{\beta \in \mathrm{B}} x_{\alpha,\beta} = \bigvee\limits_{\beta \in \mathrm{B}} \bigvee\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} x_{\alpha,\beta}$;

**(8)** $\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathrm{A}}\bigwedge\limits_{\beta\in\mathrm{B}} x_{\alpha,\beta} = \bigwedge\limits_{\beta\in\mathrm{B}}\bigwedge\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} x_{\alpha,\beta}$;

**(9)** $\bigvee\big(\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} X_\alpha\big) = \bigvee\limits_{\alpha\in\mathrm{A}}\bigvee X_\alpha$;

**(10)** $\bigwedge\big(\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} X_\alpha\big) = \bigwedge\limits_{\alpha\in\mathrm{A}}\bigwedge X_\alpha$,

где $X_\alpha \subset B$ $(\alpha \in \mathrm{A})$. Подчеркнем, что правила (1)–(6) имеют место в произвольной булевой алгебре, а (7)–(10) — в любом упорядоченном множестве с очевидными оговорками о существовании точных границ.

**1.1.6.** Рассмотрим некоторые способы формирования булевых алгебр.

**(1)** Непустое подмножество $B_0$ булевой алгебры $B$ называют *подалгеброй* $B$, если $B_0$ замкнуто относительно булевых операций $\vee$, $\wedge$ и $*$, т. е. $\{x \vee y, x \wedge y, x^*\} \subset B_0$, каковы бы ни были $x, y \in B_0$. Относительно индуцированного из $B$ порядка подалгебра $B_0$ будет булевой алгеброй с теми же нулем и единицей, что и у $B$. В частности, $B_0 := \{\mathbb{0}_B, \mathbb{1}_B\}$ — подалгебра $B$.

Подалгебру $B_0 \subset B$ именуют *правильной* (*$\sigma$-правильной*) в том случае, когда для любого множества (любого счетного множества) $A \subset B_0$ точные границы $\bigvee A$ и $\bigwedge A$, существующие в $B$, входят в $B_0$. Пересечение произвольного семейства подалгебр снова будет подалгеброй. То же верно и для правильных ($\sigma$-правильных) подалгебр, что делает корректным следующее определение. Наименьшую подалгебру алгебры $B$, содержащую непустое подмножество $M \subset B$, называют *подалгеброй, порожденной множеством* $M$. Аналогично вводят *правильную* (*$\sigma$-правильную*) *подалгебру, порожденную множеством* $M$.

**(2)** Под *идеалом* булевой алгебры $B$ понимают непустое множество $J \subset B$, удовлетворяющее условиям

$$x \in J \wedge y \in J \to x \vee y \in J,$$
$$x \in J \wedge y \leq x \to y \in J.$$

Примерами идеалов служат множества $B_a := \{x \in B : x \leq a\}$, где $a \in B$. Такие идеалы называют *главными.* Если $\mathbb{0} \neq e \in B$, то главный идеал $B_e$ является самостоятельной булевой алгеброй относительно индуцированного из $B$ порядка. Роль единицы в $B_e$ играет

элемент $e$. Решеточные операции наследуются из $B$, а дополнение в $B_e$ имеет вид $x \mapsto e - x$ $(x \in B)$.

Идеал $J$ называют *собственным*, если $J \neq B$. Правильный идеал $B$ часто именуют *полосой* или *компонентой* $B$.

**(3)** Возьмем булевы алгебры $B$ и $B'$. Отображение $h : B \to B'$ именуют (*булевым*) *гомоморфизмом*, если для любых $x, y \in B$ выполняются равенства

$$
\begin{gathered}
h(x \vee y) = h(x) \vee h(y), \\
h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y), \\
h(x^*) = h(x)^*.
\end{gathered}
$$

Гомоморфизм $h$ является *изотонным* ($x \leq y \to h(x) \leq h(y)$) отображением. Если $h$ — гомоморфизм, то образ $h(B)$ алгебры $B$ — подалгебра $B'$. Если $h$ биективен, то его называют *изоморфизмом*, а сами булевы алгебры $B$ и $B'$ — *изоморфными*. Об инъективном гомоморфизме принято говорить как о *мономорфизме*. Гомоморфизм называют *полным*, если он сохраняет точные грани всех тех подмножеств, у которых они есть.

Пусть $C$ — произвольное множество и определена некоторая биекция $h : B \to C$. Тогда в $C$ можно ввести порядок, полагая $h(x) \leq h(y)$ в том и только в том случае, если $x \leq y$. При этом $C$ превратится в булеву алгебру, а $h$ станет изоморфизмом булевых алгебр.

**(4)** Пусть $J$ — собственный идеал булевой алгебры $B$. Введем отношение эквивалентности $\sim$ в $B$ правилом

$$
x \sim y \leftrightarrow x \triangle y \in J \quad (x, y \in B).
$$

Обозначим через $\varphi$ каноническое (фактор-)отображение алгебры $B$ на фактор-множество $B/J := B/\sim$. Для классов эквивалентности $u, v \in B/J$ положим $u \leq v$, если существуют элементы $x \in u$ и $y \in v$ такие, что $x \leq y$. Тем самым в $B/J$ определено отношение порядка. При этом $B/J$ становится булевой алгеброй, которую называют *фактор-алгеброй алгебры* $B$ *по идеалу* $J$. Возникающие в $B/J$ булевы операции таковы, что $\varphi$ становится гомоморфизмом. Если $h : B \to B'$ — гомоморфизм, то $\ker(h) := \{x \in B : h(x) = \mathbb{0}\}$ будет идеалом и существует единственный мономорфизм

$g : B/\ker(h) \to B'$, для которого $g \circ \varphi = h$, где $\varphi : B \to B/\ker(h)$ — фактор-гомоморфизм. Тем самым всякий гомоморфный образ булевой алгебры изоморфен ее фактор-алгебре по подходящему идеалу.

**(5)** Возьмем семейство булевых алгебр $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$. Снабдим произведение $B := \prod_{\alpha\in\mathrm{A}} B_\alpha$ покоординатным отношением порядка, полагая $x \le y$ для $x, y \in B$, если $x(\alpha) \le y(\alpha)$ при всех $\alpha \in \mathrm{A}$. Тогда $B$ — булева алгебра. Булевы операции в $B$ совпадают с соответствующими покоординатными операциями в алгебрах $B_\alpha$. Нуль $\mathbb{0}_B$ и единица $\mathbb{1}_B$ в $B$ определяются равенствами $\mathbb{0}_B(\alpha) := \mathbb{0}_\alpha$ и $\mathbb{1}_B(\alpha) := \mathbb{1}_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{A})$, где $\mathbb{0}_\alpha$ и $\mathbb{1}_\alpha$ — нуль и единица в $B_\alpha$. Булеву алгебру $B$ называют *декартовым произведением* семейства булевых алгебр $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$.

**(6)** Вновь рассмотрим семейство булевых алгебр $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$. Существуют булева алгебра $B$ и семейство мономорфизмов $\imath_\alpha : B_\alpha \to B$ $(\alpha \in \mathrm{A})$, удовлетворяющие условиям: (1) семейство подалгебр $(\imath_\alpha(B_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ алгебры $B$ *независимо*, т. е. для любого конечного набора ненулевых элементов $x_k \in \imath_{\alpha_k}(B_{\alpha_k})$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathrm{A}$ и $\alpha_k \ne \alpha_l$ при $k \ne l$, выполняется $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \ne \mathbb{0}$; (2) подалгебра в $B$, порожденная объединением всех $\imath_\alpha(B_\alpha)$, совпадает с $B$. Если булева алгебра $B'$ и семейство мономорфизмов $\imath'_\alpha : B_\alpha \to B'$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ удовлетворяют тем же условиям (1) и (2), то существует изоморфизм $h$ алгебры $B$ на алгебру $B'$ такой, что $\imath_\alpha \circ h = \imath'_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{A})$. Пару $(B, (\imath_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}})$ называют *булевым* (или *тензорным*) *произведением семейства* $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ и обозначают символом $\bigotimes_{\alpha\in\mathrm{A}} B_\alpha$.

**(7)** *Пополнением* булевой алгебры $B$ именуют пару $(\imath, A)$, если выполняются условия:

- **(a)** $A$ — полная булева алгебра;
- **(b)** $\imath$ — мономорфизм из $B$ в $A$, сохраняющий точные границы любых множеств;
- **(c)** правильная подалгебра в $A$, порожденная множеством $\imath(B)$, совпадает с $A$.

Разумеется, термин «пополнение» относят и к самой алгебре $A$. Говорят, что пары $(\imath, A)$ и $(\imath', A')$ *изоморфны*, если существует изоморфизм $h : A \to A'$ такой, что $h \circ \imath = \imath'$. Для любой булевой алгебры существует единственное с точностью до изоморфизма пополнение, которое можно получить, например, классическим методом сечений (восходящим к Дедекинду).

**1.1.7.** Примеры. **(1)** Для непустого множества $X$ упорядочен-

ное по включению множество подмножеств $\mathscr{P}(X)$ есть полная булева алгебра, которую изредка называют *булеаном* $X$. При этом булевы операции совпадают с теоретико-множественными операциями объединения, пересечения и дополнения.

**(2)** Пусть $X$ — топологическое пространство. Множество всех *открыто-замкнутых* (т. е. открытых и замкнутых одновременно) подмножеств пространства $X$, упорядоченное по включению, является подалгеброй булеана $\mathscr{P}(X)$. Эту подалгебру мы обозначим символом $\mathrm{Clop}(X)$. Булевы операции в $\mathrm{Clop}(X)$ наследуются из $\mathscr{P}(X)$, а значит, совпадают с теоретико-множественными. Однако $\mathrm{Clop}\,B(X)$ не есть правильная подалгебра $\mathscr{P}(X)$, т. е. бесконечные операции в $\mathscr{P}(X)$ и $\mathrm{Clop}(X)$ могут существенно отличаться.

**(3)** Замкнутое подмножество $F$ топологического пространства $X$ называют *регулярным*, если $F = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(F))$, т. е. если $F$ совпадает с замыканием множества своих внутренних точек. Аналогично, *регулярное открытое множество* $G$ определяется соотношением $G = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(G))$. Пусть $\mathrm{RC}\,(X)$ и $\mathrm{RO}\,(X)$ — множества регулярных замкнутых подмножеств и регулярных открытых подмножеств топологического пространства $X$. Множества $\mathrm{RC}\,(X)$ и $\mathrm{RO}\,(X)$, упорядоченные по включению, служат полными булевыми алгебрами. Отображение $F \mapsto \mathrm{int}(F)$ $(F \in \mathrm{RC}\,(X))$ устанавливает между ними изоморфизм. Алгебры $\mathrm{RC}\,(X)$ и $\mathrm{RO}\,(X)$ содержатся в булеане $\mathscr{P}(X)$, но не являются его подалгебрами. Так, например, в $\mathrm{RC}\,(X)$ булевы операции имеют вид

$$E \vee F = E \cup F, \quad E \wedge F = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(E \cap F)), \quad F^* = \mathrm{cl}(X - F).$$

**(4)** Пусть $\mathscr{B}or(X)$ — борелевская $\sigma$-алгебра топологического пространства $X$ (т. е. $\sigma$-правильная подалгебра булеана $\mathscr{P}(X)$, порожденная топологией). Рассмотрим в $\mathscr{B}or(X)$ идеал $\mathscr{N}$, состоящий из всех *тощих* множеств (т. е. множеств первой категории). Тогда фактор-алгебра $\mathscr{B}or(X)/\mathscr{N}$ является полной булевой алгеброй. Ее называют *алгеброй борелевских множеств по модулю тощих множеств*. Изоморфная алгебра получится, если вместо $\mathscr{B}or(X)$ взять $\sigma$-алгебру множеств, обладающих свойством Бэра. (Множество $M \subset X$ *обладает свойством Бэра*, если для некоторого открытого $G \subset X$ симметрическая разность $M \vartriangle G$ есть тощее множество.) Если пространство $X$ *бэровское*, т. е. если в нем нет непустых от-

крытых тощих множеств, то указанная алгебра изоморфна алгебре регулярных замкнутых множеств $\mathrm{RC}\,(X)$.

**(5)** Пусть $\mathscr{B}$ — это $\sigma$-полная булева алгебра и задана положительная счетно-аддитивная функция $\mu : \mathscr{B} \to \mathbb{R}$. *Счетная аддитивность* означает, как обычно, что

$$\mu\Bigl(\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n\Bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(x_n)$$

для любой последовательности $(x_n)$ попарно дизъюнктных элементов из $\mathscr{B}$. Такую функцию $\mu$ принято называть (конечной) *мерой*. Положим $\mathscr{N} := \{x \in \mathscr{B} : \mu(x) = 0\}$. Тогда $\mathscr{N}$ — это $\sigma$-полный идеал. На фактор-алгебре $B := \mathscr{B}/\mathscr{N}$ существует единственная счетно-аддитивная функция $\bar{\mu}$, для которой $\mu = \bar{\mu} \circ \varphi$, где $\varphi : \mathscr{B} \to B$ — фактор-гомоморфизм. Алгебра $B$ является полной, а функция $\bar{\mu}$ — строго положительной, т. е. $\bar{\mu}(x) = 0 \to x = \mathbb{0}$. Если $\rho(x, y) := \bar{\mu}(x \vartriangle y)$, то $\rho$ — метрика, а метрическое пространство $(B, \rho)$ полно.

Пусть $(X, \mathscr{B}, \mu)$ — *пространство с конечной мерой*, т. е. $X$ — непустое множество, $\mathscr{B}$ — это $\sigma$-полная подалгебра в $\mathscr{P}(X)$, а $\mu$ — мера. Тогда алгебру $B$ принято называть *алгеброй измеримых множеств по модулю множеств нулевой меры*.

**(6)** Пусть $(X, \mathscr{B}, \mu)$ — то же, что и в (5). Обозначим символом $M(\mu) := M(X, \mathscr{B}, \mu)$ пространство классов эквивалентности $\mu$-измеримых почти всюду конечных функций на $X$. Измеримые функции *эквивалентны*, если они могут принимать различные значения лишь на множестве нулевой меры. В пространстве $M(\mu)$ вводят порядок, полагая $\bar{f} \le \bar{g}$ в том и только в том случае, если $f(x) \le g(x)$ для почти всех $x \in X$. Здесь $\bar{f}$ — класс эквивалентности функции $f$. Упорядоченное множество $M(\mu)$ — решетка. Пусть $\mathbb{1}$ — класс эквивалентности функции, тождественно равной единице на $X$. Положим $B := \{e \in M(\mu) : e \wedge (\mathbb{1} - e) = \mathbb{0}\}$. При этом $B$ — полная булева алгебра относительно индуцированного из $M(\mu)$ порядка,

$$c \vee e = c + e - c \cdot e, \quad c \wedge e = c \cdot e, \quad e^* = \mathbb{1} - e \quad (c, e \in B),$$

где $+$, $\cdot$, $-$ суть сложение, умножение и вычитание в кольце $M(\mu)$.

**(7)** Пусть $H$ — комплексное гильбертово пространство и $\mathscr{L}(H)$ — алгебра всех ограниченных эндоморфизмов $H$, т. е. всюду определенных непрерывных линейных операторов, действующих из $H$

в $H$. *Коммутант* $A'$ множества $A \subset \mathscr{L}(H)$ вводят формулой $A' := \{T \in \mathscr{L}(H) : (\forall S \in A)\ (TS = ST)\}$, а *бикоммутант* — правилом $A'' := (A')'$. *Алгеброй фон Неймана* называют любую самосопряженную ($T \in A \to T^* \in A$) подалгебру $A \subset \mathscr{L}(H)$, совпадающую со своим бикоммутантом.

Возьмем коммутативную алгебру фон Неймана $A$. Множество всех ортопроекторов, содержащихся в $A$, обозначим символом $\mathfrak{P}(A)$. Отношение порядка в $\mathfrak{P}(A)$ задают следующим способом:

$$\pi \le \rho \leftrightarrow \pi(H) \subset \rho(H) \quad (\pi, \rho \in \mathfrak{P}(A)).$$

При этом $\mathfrak{P}(A)$ — полная булева алгебра и булевы операции имеют вид

$$\pi \vee \rho = \pi + \rho - \pi \circ \rho, \quad \pi \wedge \rho = \pi \circ \rho, \quad \pi^* = I_H - \pi.$$

**1.1.8.** Примечания.

**(1)** Теория булевых алгебр берет свое начало от классического сочинения Дж. Буля «Исследование законов мысли, на которых основаны математические теории логики и вероятностей» [124, 401]. О цели и задаче книги Дж. Буль писал: «В предлагаемом вниманию читателей трактате мы намереваемся исследовать фундаментальные законы тех операций, которые совершает разум в процессе рассуждений, дабы выразить их в символическом языке исчисления и на этой основе построить науку логики и ее метод». Следуя своей установке, Дж. Буль осуществил алгебраизацию логической системы, лежащей в основе классических математических рассуждений. В результате он стал автором алгебраической структуры, именуемой ныне булевой алгеброй или алгеброй Буля.

**(2)** Одним из важнейших примеров, рассмотренных в упомянутой книге, является алгебра высказываний. Говоря современным языком, *алгебра высказываний* — булева алгебра, возникающая в результате отождествления эквивалентных формул в множестве всех замкнутых формул исчисления предикатов.

Сказанное в общем виде формализуется так. Пусть $\mathscr{T}$ — теория первого порядка, основанная на классической (двузначной) логике. В множестве всех высказываний $\Phi$ теории $\mathscr{T}$ введем отношение предпорядка, полагая $\varphi \le \psi$ в том и только в том случае, если формула $\varphi \to \psi$ есть теорема теории $\mathscr{T}$. Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$ в $\Phi$:

$$\varphi \sim \psi \leftrightarrow \varphi \le \psi \wedge \psi \le \varphi \quad (\varphi, \psi \in \Phi).$$

Пусть $\mathfrak{A}(\mathscr{T}) := \Phi/\sim$ — соответствующее фактор-множество, снабженное индуцированным порядком. Точнее, если $|\varphi|$ — класс эквивалентности формулы $\varphi \in \Phi$, то $|\varphi| \le |\psi|$ означает, что $\varphi \le \psi$. Возникающее упорядоченное множество $\mathfrak{A}(\mathscr{T})$ является булевой алгеброй. Ее называют иногда *алгеброй Линденбаума — Тарского* теории $\mathscr{T}$. Булевы операции в $\mathfrak{A}(\mathscr{T})$ имеют вид

$$
\begin{gathered}
|\varphi| \vee |\psi| = |\varphi \vee \psi|, \\
|\varphi| \wedge |\psi| = |\varphi \wedge \psi|, \\
|\varphi|^* = |\urcorner \varphi|.
\end{gathered}
$$

Перевод логических проблем формальных теорий на язык соответствующих им булевых алгебр — алгебр Линденбаума — Тарского — именуют *булевым методом.*

**(3)** Классические способы умозаключений (силлогизмы, исключенное третье, модус поненс, обобщение и т. п.) суть абстракции, возникшие в результате идеализации тех реальных операций, которые совершает разум в процессе рассуждений. Неизбежно огрубляя реальность, двузначная логика, строго говоря, дает лишь приблизительное, неполное описание законов мышления, что поясняет интерес к неклассическим логическим системам. Одна из таких систем выработана в рамках интуиционизма. Не вдаваясь в детали, коротко опишем соответствующую алгебру высказываний.

*Псевдобулевой алгеброй* называют решетку $L$ с нулем и единицей, в которой для любых $x, y \in L$ существует псевдодополнение $x \Rightarrow y$ элемента $x$ относительно $y$. По определению *псевдодополнение* $x \Rightarrow y$ — наибольший из элементов $z \in L$, удовлетворяющих неравенству $z \wedge x \le y$. Иначе говоря, верна эквивалентность (ср. 1.1.4 (3))

$$
z \le x \Rightarrow y \leftrightarrow x \wedge z \le y \quad (x, y, z \in L),
$$

которую можно считать и определением $x \Rightarrow y$. Псевдобулева алгебра является дистрибутивной решеткой. Полная решетка будет псевдобулевой алгеброй в том и только в том случае, если в ней выполняется следующий дистрибутивный закон:

$$
x \wedge \bigvee_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha = \bigvee_{\alpha \in \mathrm{A}} x \wedge x_\alpha \quad (x, x_\alpha \in L).
$$

Упорядоченное по включению множество всех открытых подмножеств топологического пространства — пример полной псевдобулевой алгебры. Псевдобулевы алгебры называют *брауэровыми решетками* или, чаще всего, *гейтинговыми алгебрами*. Можно показать, что алгебра Линденбаума — Тарского интуиционистской логики — гейтингова алгебра. Таким образом, гейтинговы алгебры характеризуют интуиционистскую логику так же, как булевы алгебры характеризуют классическую логику, см. [5, 98].

**(4)** Исследование некоторых типов неклассических логик приводит, как и в случае интуиционистской логики, к различным классам алгебраических систем, являющихся дистрибутивными решетками. Наиболее известные разновидности — *импликативная решетка* или решетка с относительными псевдодополнениями, *топологическая булева алгебра* (т. е. булева алгебра $B$ с операцией $\mathbb{I} : B \to B$, удовлетворяющей аксиомам внутренности: $\mathbb{I}(x \wedge y) = \mathbb{I}x \wedge \mathbb{I}y$; $x \leq y \to \mathbb{I}x \leq \mathbb{I}y$, $\mathbb{I}^2 = \mathbb{I}$, $\mathbb{I}\mathbb{0} = \mathbb{0}$, $\mathbb{I}\mathbb{1} = \mathbb{1}$), *алгебра Поста* и т. п. (см., например, [5, 29, 98]). Общая теория решеток — самостоятельное направление с богатой внутренней проблематикой, имеющая многочисленные и глубокие связи с другими разделами математики.

**(5)** Происхождение упомянутых выше логик и решеток связано с «исследованием законов мысли» в духе упомянутой программы Дж. Буля. Принципиально иной тип логик породил анализ законов микромира. Логика квантовой механики значительно отклоняется как от классической, так и от интуиционистской и модальной логик.

*Орторешеткой* называют решетку $L$ с нулем, единицей и одноместной операцией (ортодополнения) $(\,\cdot\,)^{\perp} : L \to L$, удовлетворяющей условиям:

$$x \wedge x^{\perp} = \mathbb{0}, \quad x \vee x^{\perp} = \mathbb{1};$$
$$x^{\perp\perp} := (x^{\perp})^{\perp} = x;$$
$$(x \vee y)^{\perp} = x^{\perp} \wedge y^{\perp}, \quad (x \wedge y)^{\perp} = x^{\perp} \vee y^{\perp}.$$

Дистрибутивная орторешетка является булевой алгеброй. Элементы $x$ и $y$ орторешетки называют *ортогональными* и пишут $x \perp y$, если $x \leq y^{\perp}$ или, что равносильно, $y \leq x^{\perp}$. Орторешетку $L$ именуют *ортомодулярной решеткой* или *(квантовой) логикой*, если для любых $x, y \in L$, $x \leq y$, существует такой элемент $z \in L$, что $x \perp z$ и $x \vee z = y$. Последнее равносильно тому, что из $x \leq y$ следует $y = x \vee (y \wedge x^{\perp})$.

Пример квантовой логики доставляет решетка всех замкнутых подпространств гильбертова пространства с операцией ортогонального дополнения.

### 1.2. Реализация булевых алгебр

Принципиально важную возможность представить булеву алгебру в виде алгебры открыто-замкнутых подмножеств компактного пространства гарантирует теорема Стоуна. Доказательство этой теоремы и описание некоторых связанных с ней технических средств — основная цель настоящего параграфа.

**1.2.1.** Пусть $\mathbb{2} := \mathbb{Z}_2 := \mathscr{P}(\{\varnothing\}) := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ — двухэлементное множество, наделенное структурой поля с помощью соотношений:

$$\mathbb{0} + \mathbb{0} := \mathbb{0}, \quad \mathbb{0} + \mathbb{1} = \mathbb{1} + \mathbb{0} := \mathbb{1}, \quad \mathbb{1} + \mathbb{1} := \mathbb{0},$$
$$\mathbb{0} \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot \mathbb{0} := \mathbb{0}, \quad \mathbb{0} \cdot \mathbb{0} := \mathbb{0}, \quad \mathbb{1} \cdot \mathbb{1} := \mathbb{1}.$$

Отметим, что все элементы поля $\mathbb{2}$ идемпотентны. Рассмотрим теперь произвольное множество $B$, наделенное структурой ассоциативного кольца, в котором каждый элемент идемпотентен: $b \in B \rightarrow b^2 = b$. Тогда $B$ называют *булевым кольцом.* Такое кольцо коммутативно и удовлетворяет тождеству $b = -b$ для $b \in B$. Ясно, что булево кольцо является векторным пространством над полем $\mathbb{2}$, более того, коммутативной алгеброй над этим полем.

Напомним, что единица алгебры считается по определению отличной от ее нуля. Естественно, поле $\mathbb{2}$ можно отождествить с подкольцом булева кольца, составленным из нуля и единицы последнего. Это отражается в обозначениях: для нуля любого кольца используют символ $\mathbb{0}$, для единицы — символ $\mathbb{1}$. Конечно, такое соглашение приводит к довольно обычной коллизии обозначений (в поле $\mathbb{2}$ сложение и умножение можно поменять местами, причем $\mathbb{0}$ станет играть роль $\mathbb{1}$ и наоборот).

Булево кольцо $B$ всегда рассматривают с отношением порядка, определенным правилом:

$$b_1 \leq b_2 \leftrightarrow b_1 b_2 = b_1 \quad (b_1, b_2 \in B).$$

Непосредственно выясняется, что упорядоченное множество $(B, \leq)$ представляет собой дистрибутивную решетку с наименьшим элементом $\mathbb{0}$ и с наибольшим $\mathbb{1}$. При этом решеточные операции связаны с

кольцевыми следующим образом:

$$x \vee y = x + y + xy, \quad x \wedge y = xy.$$

Более того, у каждого элемента $b \in B$ имеется, и притом единственное, дополнение, т. е. такой элемент $b^*$, что

$$b^* \vee b = \mathbb{1}, \quad b^* \wedge b = \mathbb{0}.$$

Очевидно, что $b^* = \mathbb{1} + b$. Итак, всякое булево кольцо станет булевой алгеброй, если в нем определить порядок указанным выше способом.

В свою очередь, в булевой алгебре $B$ можно ввести структуру кольца, полагая

$$x + y := x \vartriangle y, \quad xy := x \wedge y \quad (x, y \in B).$$

При этом $(B, +, \cdot, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ становится булевым кольцом с единицей, для которого вновь возникающее отношение порядка совпадает с уже имеющимся.

Таким образом, булеву алгебру допустимо рассматривать как алгебру с единицей над полем $\mathbb{2}$, в которой каждый элемент идемпотентен.

**1.2.2.** Пусть $B$ — произвольная булева алгебра.

**(1)** *Характером* алгебры $B$ называют (булев или, что то же, кольцевой) гомоморфизм $\chi : B \to \mathbb{2}$. Обозначим символом $\mathrm{X}(B)$ множество всех характеров $B$ с топологией поточечной сходимости. Точнее, топология в $\mathrm{X}(B)$ индуцирована топологией произведения из $\mathbb{2}^B$, причем $\mathbb{2}$ наделяется единственной компактной хаусдорфовой топологией, дискретной топологией $\mathbb{2}$. Напомним, что топологическое пространство $X$ *связно*, если $\varnothing$ и $X$ являются единственными открыто-замкнутыми подмножествами $X$. Топологическое пространство $X$ называют *вполне несвязным* при условии, что любое связное подпространство $X$ содержит не более одной точки. Возникшее топологическое пространство $\mathbb{2}^B$ — канторов дисконтинуум — хаусдорфово, компактно и вполне несвязно. Топологическое пространство с такими свойствами именуют *булевым*. Понятно, что $\mathrm{X}(B)$ — замкнутое подмножество $\mathbb{2}^B$. Следовательно, $\mathrm{X}(B)$ само является булевым пространством. Множество $\mathrm{X}(B)$ называют *пространством характеров* булевой алгебры $B$.

**(2)** Как известно, непустое множество $\mathscr{F} \subset B$ называют *фильтром*, если

$$x \in \mathscr{F} \wedge y \in \mathscr{F} \to x \vee y \in \mathscr{F},$$
$$x \in \mathscr{F} \wedge x \leq y \to y \in \mathscr{F}.$$

Фильтр, отличный от $B$, именуют *собственным.* О максимальных (по включению) элементах множества всех собственных фильтров говорят как об *ультрафильтрах.* Пусть $U(B)$ — множество всех ультрафильтров в $B$, а $U(b)$ — множество ультрафильтров, содержащих $b$. Снабдим $U(B)$ топологией, приняв систему множеств $\{U(b) : b \in B\}$ за базу топологии. Такое определение топологии корректно, ибо, как легко проверить, $U(x \wedge y) = U(x) \cap U(y) \quad (x, y \in B)$. Топологическое пространство $U(B)$ часто называют *стоуновским пространством булевой алгебры* $B$ и обозначают $\mathrm{St}(B)$.

**(3)** Пусть $M(B)$ — множество всех максимальных (собственных) идеалов алгебры $B$. Идеал здесь можно понимать в соответствии с 1.1.6 (2), равно как и в стандартном смысле теории колец. Множество $J \subset B$ будет идеалом в том и только в том случае, если $J^* := \{x^* : x \in J\}$ — фильтр в $B$. Более того, $J \in M(B) \leftrightarrow J^* \in U(B)$. Таким образом, отображение $J \mapsto J^*$ осуществляет биекцию между $M(B)$ и $U(B)$. Множество $M(B)$ принято называть *пространством максимальных идеалов* и наделять той единственной топологией, которая делает гомеоморфизмом отображение $J \mapsto J^*$.

**1.2.3.** Отметим некоторые алгебраические факты, необходимые в связи с применением преобразования Гельфанда в нашей ситуации.

**(1)** *Булево кольцо $B$ является полем в том и только в том случае, если оно содержит в точности два элемента $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$. Следовательно, $\mathbb{2}$ — единственное с точностью до изоморфизма булево поле.*

$\lhd$ В самом деле, ненулевой элемент $x \in B$ обратим, поэтому справедливы импликации:

$$xx^{-1} = \mathbb{1} \to xxx^{-1} = \mathbb{1} \to xx^{-1} = x \to x = \mathbb{1}. \ \rhd$$

Для $\chi \in \mathrm{X}(B)$ обозначим символом $\chi^*$ отображение $x \mapsto \chi(x)^*$ $(x \in B)$. Как видно, $\ker(\chi) := \{x \in B : \chi(x) = \mathbb{0}\}$ — идеал, а $\ker(\chi)^*$ — фильтр.

**(2)** *Отображения* $\chi \mapsto \ker(\chi) \quad (\chi \in \mathrm{X}(B))$ *и* $\chi \mapsto \ker(\chi)^* \quad (\chi \in \mathrm{X}(B))$ *являются гомеоморфизмами* $\mathrm{X}(B)$ *на* $M(B)$ *и* $U(B)$ *соответственно.*

$\lhd$ Отображение $\chi \mapsto \ker(\chi)$ инъективно. Если $J \in M(B)$, то $B/J$ — поле и согласно (1) оно изоморфно $\mathbb{2}$. Положим $\chi := \lambda \circ \varphi$, где $\varphi : B \to B/J$ — фактор-гомоморфизм, а $\lambda : B/J \to \mathbb{2}$ — изоморфизм. Ясно, что $\ker(\chi) = J$, значит, указанное отображение биективно. Остальные утверждения очевидны. $\rhd$

**(3)** *Элемент* $b \in B$ *равен нулю тогда и только тогда, когда* $\chi(b) = \mathbb{0}$ *для всех* $\chi \in \mathrm{X}(B)$.

$\lhd$ Допустим, что $x \neq \mathbb{0}$. Тогда главный идеал $\{y \in B : y \leq x^*\}$ является собственным и его можно расширить до максимального идеала $J \in M(B)$. Это утверждение — теорема Крулля — непосредственно выводится из леммы Куратовского — Цорна (см. П.3.9). В силу (2) $J = \ker(\chi)$ для некоторого $\chi \in \mathrm{X}(B)$. Поскольку $x \notin J$, то должно быть $\chi(x) \neq \mathbb{0}$. $\rhd$

**1.2.4. *Теорема Стоуна.*** *Каждая булева алгебра* $B$ *изоморфна булевой алгебре открыто-замкнутых множеств единственного с точностью до гомеоморфизма булева пространства — стоуновского компакта алгебры* $B$.

$\lhd$ Пусть $C(\mathrm{X}(B), \mathbb{2})$ — алгебра непрерывных $\mathbb{2}$-значных функций, определенных на вполне несвязном компакте $\mathrm{X}(B)$. Преобразование Гельфанда $\mathscr{G}_B$ элементу $x \in B$ ставит в соответствие $\mathbb{2}$-значную функцию

$$\widehat{x} : \chi \mapsto \chi(x) \quad (\chi \in \mathrm{X}(B)).$$

Понятно, что $\mathscr{G}_B : B \to C(\mathrm{X}(B), \mathbb{2})$ — гомоморфизм. Из 1.2.3 (3) вытекает инъективность этого гомоморфизма. Возьмем $f \in C(\mathrm{X}(B), \mathbb{2})$ и положим $V_f := \{\chi \in \mathrm{X}(B) : f(\chi) = \mathbb{1}\}$. Множество $V_f$ открыто-замкнуто. По определению топологии в $\mathrm{X}(B)$, найдутся $b_1, \dots, b_k \in B$ и $c_1, \dots, c_l \in B$ такие, что

$$V_f := \{\chi \in \mathrm{X}(B) : \chi(b_n) = \mathbb{1} \quad (n \leq k), \quad \chi(c_m) = \mathbb{0} \quad (m \leq l)\}.$$

Положим $b_0 := b_1 \wedge \ldots \wedge b_k, c_0 := c_1 \vee \ldots \vee c_l$ и $b := b_0 \wedge c_0^*$. Множество $V_f$ можно описать так:

$$V_f = \{\chi \in \mathrm{X}(B) : \chi(b_0) = \mathbb{1} \wedge \chi(c_0) = \mathbb{0}\} =$$

$$= \{\chi \in \mathrm{X}(B) : \chi(b) = \mathbb{1}\} = \{\chi \in \mathrm{X}(B) : \widehat{b}(\chi) = \mathbb{1}\}.$$

Отсюда видно, что $f = \widehat{b}$, следовательно, $\mathscr{G}_B$ — изоморфизм.

Предположим теперь, что $Q_1$ и $Q_2$ — вполне несвязные компакты и отображение $h : C(Q_1, \mathbb{2}) \to C(Q_2, \mathbb{2})$ есть изоморфизм алгебр. Если $\chi$ — характер алгебры $C(Q_2, \mathbb{2})$, то $\chi \circ h$ — характер алгебры $C(Q_1, \mathbb{2})$. При этом отображение $\chi \mapsto \chi \circ h$ осуществляет гомеоморфизм пространств характеров. С другой стороны, пространство характеров алгебры $C(Q_k, \mathbb{2})$ гомеоморфно компакту $Q_k$. Таким образом, компакты $Q_1$ и $Q_2$ гомеоморфны. Остается заметить, что алгебра $C(\mathrm{X}(B), \mathbb{2})$ изоморфна алгебре открыто-замкнутых множеств пространства $\mathrm{X}(B)$, а значит, и пространства $U(B)$. $\triangleright$

Описанный в этой теореме изоморфизм $B$ и $\mathrm{Clop}(\mathrm{St}(B))$ иногда именуют *преобразованием Стоуна* булевой алгебры $B$.

**1.2.5.** В дальнейшем нас будут интересовать, как правило, полные булевы алгебры. С полными булевыми алгебрами неразрывно связаны *экстремальные компакты*, т. е. компакты, представляющие собой экстремально несвязные пространства. Напомним, что хаусдорфово топологическое пространство называют *экстремально несвязным* или, короче, *экстремальным*, если замыкание любого его открытого подмножества открыто. Ясно, что экстремально несвязное пространство вполне несвязно.

***Теорема Огасавары.*** *Булева алгебра является полной в том и только в том случае, если ее стоуновский компакт экстремален.*

$\triangleleft$ Пусть $B$ — полная булева алгебра, а $h$ — изоморфизм $B$ на алгебру открыто-замкнутых множеств компакта $Q := U(B)$. Возьмем открытое множество $G \subset Q$. Так как $Q$ вполне несвязно, то $G = \bigcup \mathscr{U}$, где $\mathscr{U}$ — совокупность открыто-замкнутых множеств, содержащихся в $G$. Пусть $\mathscr{U}' := \{h^{-1}(U) : U \in \mathscr{U}\}$ и $b := \bigvee \mathscr{U}'$. Открыто-замкнутое множество $h(b)$ и есть замыкание $G$. В самом деле, $\mathrm{cl}(G) \subset h(b)$ и $h(b) \setminus \mathrm{cl}(G)$ открыто. Если последнее множество непусто, то $h(c) \subset h(b) \setminus \mathrm{cl}(G)$ для некоторого $\mathbb{0} \neq c \in B$. Но это означает, что $h(c) \vee h(u) \leq h(b)$ для всех $u \in \mathscr{U}'$. Последнее противоречит равенству $b = \bigvee \mathscr{U}$. Тем самым $\mathrm{cl}(G) = h(b)$ — открытое множество.

Предположим теперь, что компакт $Q$ экстремален. Пусть $\mathscr{G}$ — некоторое множество открыто-замкнутых подмножеств $Q$ и $G :=$

$\bigcup \mathscr{G}$. Множество $G$ открыто и его замыкание $\mathrm{cl}(G)$ также должно быть открытым ввиду экстремальности $Q$. Понятно, что $\mathrm{cl}(G)$ — точная верхняя граница множества $\mathscr{G}$ в булевой алгебре открыто-замкнутых множеств $\mathrm{Clop}(Q)$. $\triangleright$

**1.2.6.** Примеры.

**(1)** Стоуновский компакт булевой алгебры $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ есть одноточечное множество. Если булева алгебра конечна, то она состоит из $2^n$ элементов для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и ее стоуновское пространство содержит в точности $n$ точек.

**(2)** Возьмем непустое множество $X$. Стоуновский компакт булеана $\mathscr{P}(X)$ есть *компактификация Стоуна — Чеха* $\beta(X)$ множества $X$, рассматриваемого как дискретное топологическое пространство.

**(3)** Если $Q$ — вполне несвязный компакт, то стоуновский компакт алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$ гомеоморфен $Q$.

**(4)** Пусть $B$, $B'$ — булевы алгебры и $h : B \to B'$ — гомоморфизм. Пусть $\imath : B \to \mathrm{Clop}(\mathrm{St}(B))$ и $\imath' : B' \to \mathrm{Clop}(\mathrm{St}(B'))$ — преобразования Стоуна алгебр $B$ и $B'$. Существует единственное непрерывное отображение $\theta : \mathrm{St}(B') \to \mathrm{St}(B)$ такое, что

$$h(x) = (\imath')^{-1}\theta^{-1}(\imath(x)) \quad (x \in B).$$

Отображение $h \mapsto \mathrm{St}(h) := \theta$ является биекцией между множествами гомоморфизмов из $B$ в $B'$ и непрерывных отображений из $\mathrm{St}(B')$ в $\mathrm{St}(B)$. Если $B''$ — еще одна булева алгебра и $g : B' \to B''$ — гомоморфизм, то $\mathrm{St}(g \circ h) = \mathrm{St}(h) \circ \mathrm{St}(g)$. Кроме того, $\mathrm{St}(I_B) = I_{\mathrm{St}(B)}$.

Пусть Bool — категория булевых алгебр и гомоморфизмов, а Comp — категория компактов и непрерывных отображений. Сказанное выше можно сформулировать так (см. П.3).

***Теорема.*** *Отображение* St *является контравариантным функтором из категории* Bool *в категорию* Comp.

Два важных частных случая описанной ситуации стоит выделить отдельно.

**(5)** Булева алгебра $B_0$ изоморфна подалгебре булевой алгебры $B$ в том и только в том случае, если стоуновский компакт $\mathrm{St}(B_0)$ является непрерывным образом компакта $\mathrm{St}(B)$.

**(6)** Булева алгебра $B'$ является гомоморфным образом алгебры $B$ (или изоморфна фактор-алгебре алгебры $B$) (см. 1.1.6 (4)) в том и

только в том случае, если стоуновский компакт $\mathrm{St}(B')$ гомеоморфен замкнутому подмножеству компакта $\mathrm{St}(B)$.

**(7)** Пусть $B := \prod_{\alpha\in \mathrm{A}} B_\alpha$, где $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ — непустое семейство булевых алгебр. Стоуновский компакт $\mathrm{St}(B)$ булевой алгебры $B$ совпадает со стоун-чеховской компактификацией топологической суммы $\bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{St}(B_\alpha)\times\{\alpha\}$ пространств $\mathrm{St}(B_\alpha)$.

**(8)** Пусть $B := \bigotimes_{\alpha\in\mathrm{A}} B_\alpha$ — булево произведение непустого семейства булевых алгебр (1.1.6 (6)). Тогда стоуновский компакт $\mathrm{St}(B)$ алгебры $B$ гомеоморфен произведению $\prod_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{St}(B_\alpha)$.

**(9)** *Абсолют* компакта $X$ — это компакт $aX$, удовлетворяющий следующим условиям: (a) $X$ — непрерывный *неприводимый* образ $aX$ (т. е. существует непрерывная сюръекция $aX$ на $X$ и $X$ не является непрерывным образом никакого собственного замкнутого подмножества $aX$); (b) всякий компактный непрерывный неприводимый прообраз компакта $X$ гомеоморфен $aX$.

*Если $oB$ — пополнение булевой алгебры $B$, то $\mathrm{St}(oB) = a\,\mathrm{St}(B)$; т. е. абсолют стоуновского компакта алгебры $B$ гомеоморфен стоуновскому компакту ее пополнения $oB$.*

**1.2.7.** *Атомом* булевой алгебры $B$ называют такой ее ненулевой элемент $a$, что $\{x\in B : \mathbb{0}\le x\le a\} = \{\mathbb{0}, a\}$. Эквивалентно, $a\ne\mathbb{0}$ — атом булевой алгебры $B$, если для любого $x\in B$ либо $a\le x$, либо $a\le x^*$. Говорят, что $B$ *атомична*, или *атомна*, если для всякого ненулевого элемента $x\in B$ существует атом $a\le x$. Булеву алгебру называют *безатомной*, если она не содержит ни одного атома.

Будем говорить, что булева алгебра $B$ *вполне дистрибутивна*, если

$$\bigwedge_{m\in M}\bigvee_{n\in N} x_{m,n} = \bigvee_{f\in N^M}\bigwedge_{m\in M} x_{m,f(m)},$$

где $x_{m,n}\in B$ $(m\in M, n\in N)$, $M$ и $N$ — произвольные множества и $N^M := \{f : f : M\to N\}$. Если в этом определении $M$ и $N$ — счетные множества, то мы говорим, что $B$ — это *$\sigma$-дистрибутивная* или *счетно-дистрибутивная* булева алгебра (см. 5.2.15 (6)).

***Теорема.*** *Пусть $B$ — полная булева алгебра. Равносильны следующие утверждения:*

**(1)** *$B$ изоморфна булеану $\mathscr{P}(A)$ для непустого $A$;*
**(2)** *$B$ вполне дистрибутивна;*
**(3)** *$B$ атомична.*

$\triangleleft$ (1) $\to$ (2) Достаточно заметить, что булеан с теоретико-множественными объединением и пересечением — это вполне дистрибутивная булева алгебра.

(2) $\to$ (3) Рассмотрим двойное семейство $\{x_{b,t} \in B : b \in B, t \in \mathbb{2}\}$, где $\mathbb{2} := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$, $x_{b,\mathbb{0}} := b^*$ и $x_{b,\mathbb{1}} := b$. Тогда

$$\mathbb{1} = \bigwedge_{b \in B} x_{b,\mathbb{0}} \vee x_{b,\mathbb{1}} = \bigwedge_{b \in B} \bigvee_{t \in \mathbb{2}} x_{b,t}.$$

Ввиду того, что $B$ — вполне дистрибутивная булева алгебра, будет

$$\mathbb{1} = \bigvee \{c(f) : f : B \to \mathbb{2}\},$$

где $c(f) := \bigvee \{x_{b,f(b)} : b \in B\}$. Отсюда видно, что для $b \in B$ верно $b = \bigvee \{b \wedge c(f) : f \in \mathbb{2}^B\}$. Поэтому для ненулевого $b \in B$ найдется $g \in \mathbb{2}^B$ такой, что $b \wedge c(g) \neq \mathbb{0}$. С другой стороны, для произвольных $b \in B$ и $f \in \mathbb{2}^B$ возможны лишь два случая:

(a) $f(b) = \mathbb{0} \to x_{b,f(b)} = b^* \to c(f) \leq b^* \leftrightarrow b \wedge c(f) = \mathbb{0}$,

(b) $f(b) = \mathbb{1} \to x_{b,f(b)} = b \to c(f) \leq b$.

Итак, если $b \neq \mathbb{0}$, то либо $b \wedge c(f) = \mathbb{0}$, либо $c(f) \leq b$, т. е. $c(f)$ — атом $B$, если $c(f) \neq \mathbb{0}$. Но так как имеется достаточно много ненулевых $c(f)$, то $B$ — атомичная булева алгебра.

(3) $\to$ (1) Пусть $A$ — множество всех атомов булевой алгебры $B$. Для $x \in B$ обозначим символом $h(x)$ множество всех атомов $a \in B$ таких, что $a \leq x$. Без труда проверяется, что отображение $h : B \to \mathscr{P}(A)$ есть изоморфизм булевых алгебр. $\triangleright$

**1.2.8.** Примечания.

**(1)** Как видно из теоремы 1.2.4, булева алгебра полностью определяется своим стоуновским компактом. Точнее, любое свойство булевой алгебры $B$ можно перевести на топологический язык, после чего оно становится свойством стоуновского компакта $\mathrm{St}(B)$. Такой способ исследования булевых алгебр называют *реализационным методом.*

**(2)** Основная идея, заложенная в теореме Стоуна 1.2.4, проходит и в случае произвольных дистрибутивных решеток. Для дистрибутивной решетки $L$ роль пространства $\mathrm{St}(L)$ играет определенным образом топологизированное множество всех простых идеалов (или

фильтров). Собственный идеал $J \subset L$ называют *простым* в следующем случае:

$$x \wedge y \in J \to x \in J \vee y \in J.$$

Стоуновы пространства дистрибутивных решеток можно использовать для построения новых решеток или для топологического описания теоретико-решеточных свойств (реализационный метод) (см. [5, 29, 98]).

## 1.3. Теория фон Неймана — Гёделя — Бернайса

Схема аксиом подстановки $\mathrm{ZF}_4^{\varphi}$ теории множеств Цермело — Френкеля ZFC (см. Приложение) охватывает бесконечное число аксиом из-за произвола в выборе формулы $\varphi$. Стоит попытаться ввести новые неопределяемые примитивные объекты, определяемые формулами $\varphi$ из $\mathrm{ZF}_4^{\varphi}$. Тогда множество утверждений, содержащихся в схеме $\mathrm{ZF}_4^{\varphi}$, предстанет в форме одной аксиомы о таких объектах. При этом потребуются аксиомы, из которых вытекало бы существование объекта, соответствующего формуле. Поскольку все формулы строятся по единой процедуре за конечное число шагов, то не исключено, что можно достичь желаемого с помощью конечного числа аксиом. Это основное соображение, идущее от фон Неймана, заложено в аксиоматику теории множеств, развитой Гёделем и Бернайсом и обозначаемой NGB.

Первоначальным неопределяемым объектом (понятием) NGB является *класс*. Класс, являющийся элементом какого-либо класса, называют *множеством*. Прочие классы именуют *собственными*. Объективизация классов определяет коренное отличие NGB от ZFC, в метаязыке которой «класс» и «свойство» воспринимаются как синонимы.

При аксиоматическом изложении NGB пользуются, как правило, одной из двух различных модификаций языка ZFC. Первая из них состоит в добавлении к языку ZFC нового одноместного предикатного символа $M$. Содержательно $M(X)$ означает, что $X$ есть множество. Вторая модификация использует два разных типа переменных для множеств и классов. Стоит подчеркнуть, что указанные приемы не являются обязательными для описания NGB, а используются лишь из соображений удобства.

**1.3.1.** Система NGB — это теория первого порядка (с равенством). Строго говоря, язык NGB ничем не отличается от языка ZFC. Однако в качестве переменных принято употреблять прописные латинские буквы $X$, $Y$, $Z$, ... (с индексами). Строчные латинские буквы мы оставляем для argo, возникающего в результате введения сокращающих символов, отсутствующих в языке NGB.

Пусть $M(X)$ служит сокращением для формулы $(\exists\, Y)\ (X \in Y)$ (читается «$X$ есть множество»). Строчные латинские буквы $x$, $y$, $z$, ... (с индексами) будут обозначать переменные для множеств. Точнее, формулы $(\forall\, x)\varphi(x)$ и $(\exists\, x)\varphi(x)$ являются сокращениями для формул $(\forall\, X)\ (M(X) \to \varphi(X))$ и $(\exists\, X)\ (M(X) \wedge \varphi(X))$ соответственно. Содержательно эти формулы означают: «для любого множества верно $\varphi$» и «существует множество, для которого верно $\varphi$». При использовании указанных сокращений переменная $X$ не должна входить в формулу $\varphi$, а также в те формулы, частями которых являются эти сокращения. Впрочем, установленных правил употребления строчных и прописных букв мы будем придерживаться лишь в пределах текущего параграфа. Убедившись же в принципиальной формализуемости теории классов, мы постепенно вернемся к общепринятому — более свободному — математическому языку. Например, перенося теоретико-множественную концепцию отображения в новый мир, мы обычно говорим о *класс-функциях* $F$, подразумевая, что такое $F$ может уже и не быть множеством, но тем не менее обладает привычными свойствами функции. Такая практика представляет собой неотъемлемую привилегию работающего математика.

Приступим к формулировке специальных аксиом NGB.

**1.3.2. *Аксиома экстенсиональности* $\mathbf{NGB_1}$:**
*два класса совпадают, если (и только если) они состоят из одних и тех же элементов*

$$(\forall\, X)(\forall\, Y)(X = Y \leftrightarrow (\forall\, Z)(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y)).$$

**1.3.3. *Аксиомы для множеств*:**

**(1) аксиома (неупорядоченной) пары $\mathbf{NGB_2}$:**

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\exists\, z)(\forall\, u)(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y);$$

**(2) аксиома объединения $\mathbf{NGB_3}$:**

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(z \in y \leftrightarrow (\exists\, u)(u \in x \wedge z \in u));$$

**(3) аксиома степени $\mathbf{NGB_4}$:**

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(z \in y \leftrightarrow z \subset x);$$

**(4) аксиома бесконечности $\mathbf{NGB_5}$:**

$$(\exists\, x)(\varnothing \in x \wedge ((\forall\, y)(y \in x \leftrightarrow y \cup \{y\} \in x))).$$

Как видно, эти аксиомы совпадают с одноименными аналогами из ZFC, сформулированными в П.2.3, П.2.4, П.2.7 и П.2.8. Следует только иметь в виду, что в словесных формулировках слово множество здесь уже означает класс, являющийся элементом класса. В символической же записи аксиом малые латинские буквы свидетельствуют о сокращениях (см. 1.3.1). Так, например, частично развернутая аксиома степени $\mathrm{NGB}_4$ имеет вид

$$(\forall X)(M(X) \to (\exists Y)(M(Y) \wedge (\forall Z)(M(Z) \to (Z \in Y \leftrightarrow Z \subset X)))).$$

В записи аксиомы бесконечности $\mathrm{NGB}_5$ использовано сокращение

$$\varnothing \in x := (\exists\, y)(y \in x \wedge (\forall\, u)(u \notin y)).$$

Существование пустого множества в NGB заранее не предполагается, как и в ZFC, а вытекает из аксиом. Тем не менее иногда это утверждение включают в список NGB в качестве отдельной аксиомы:

**(5)** $(\exists\, y)(\forall\, u)(u \notin y)$.

**1.3.4.** ***Аксиома подстановки*** $\mathbf{NGB_6}$**:** *если класс $X$ однозначен, то для любого множества $y$ класс вторых компонент тех пар из $X$, первые компоненты которых входят в $y$, является множеством:*

$$(\forall\, X)(\mathrm{Un}\,(X) \to (\forall\, y)(\exists\, z)(\forall\, u)(u \in z \leftrightarrow (\exists\, v)((v, u) \in X \wedge v \in y))),$$

где $U_n(X) := (\forall\, u)(\forall\, v)(\forall\, w)((u, v) \in X \wedge (u, w) \in X \to v = w)$.

Как и предполагалось, схема $\mathrm{ZF}_4^{\varphi}$ превратилась в одну аксиому. Здесь же отметим, что схеме аксиом выделения из ZF (см. П.2.5) также соответствует одна аксиома — *аксиома выделения*. Она

утверждает, что для любых множества $x$ и класса $Y$ существует множество, состоящее из элементов, общих для $x$ и $Y$, т. е.

$$(\forall\, x)(\forall\, Y)(\exists\, z)(\forall\, u)(u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in Y).$$

Эта аксиома слабее аксиомы подстановки (она выводится из $\mathrm{NGB}_6$ и нижеследующей теоремы 1.3.14), но в некоторых случаях более удобна в обращении.

Следующая группа из аксиом $\mathrm{NGB}_7$–$\mathrm{NGB}_{13}$ предназначена для формирования классов. Эти аксиомы утверждают, что для некоторых свойств, выраженных формулами, существуют классы всех множеств, обладающих соответствующими свойствами. Единственность при этом вытекает, как это обычно бывает, из аксиомы экстенсиональности $\mathrm{NGB}_1$.

**1.3.5. *Аксиома $\in$-отношения* $\mathbf{NGB_7}$:** *существует класс, состоящий в точности из тех упорядоченных пар множеств, у которых первая компонента служит элементом второй:*

$$(\exists\, X)(\forall\, y)(\forall\, z)((y, z) \in X \leftrightarrow y \in z)).$$

**1.3.6. *Аксиома пересечения* $\mathbf{NGB_8}$:** *для любых двух классов существует их пересечение:*

$$(\forall\, X)(\forall\, Y)(\exists\, Z)(\forall\, u)(u \in Z \leftrightarrow u \in X \wedge u \in Y).$$

**1.3.7. *Аксиома дополнения* $\mathbf{NGB_9}$:** *для каждого класса существует дополнительный ему класс:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(u \in Y \leftrightarrow u \notin X).$$

Отсюда вытекает существование *универсального класса* $\mathbb{U} := \overline{\varnothing}$ — дополнения *пустого класса* $\varnothing$.

**1.3.8. *Аксиома области определения* $\mathbf{NGB_{10}}$:** *для каждого класса $X$ упорядоченных пар существует класс $Y := \operatorname{dom} X$, элементами которого являются в точности первые компоненты элементов класса $X$:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(u \in Y \leftrightarrow (\exists\, v)\ ((u, v) \in X)).$$

**1.3.9. *Аксиома декартова произведения* $\mathbf{NGB_{11}}$:** *для всякого класса $X$ существует класс $Y := X \times \mathbb{U}$, состоящий из всевозможных упорядоченных пар, первые компоненты которых являются элементами класса $X$:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(\forall\, v)((u,v) \in Y \leftrightarrow u \in X).$$

**1.3.10. *Аксиомы перестановки* $\mathbf{NGB_{12}}$ *и* $\mathbf{NGB_{13}}$.** *Пусть $\sigma := (\imath_1, \imath_2, \imath_3)$ — перестановка множества $\{1,2,3\}$. Класс $Y$ назовем σ-транспонированием класса $X$, если $(x_1, x_2, x_3) \in Y$ тогда и только тогда, когда $(x_{\imath_1}, x_{\imath_2}, x_{\imath_3}) \in X$.*

*Для любого класса $X$ существуют его $(2,3,1)$- и $(1,3,2)$-транспонирования:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(\forall\, v)(\forall\, w)((u,v,w) \in Y \leftrightarrow (v,w,u) \in X);$$
$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(\forall\, v)(\forall\, w)((u,v,w) \in Y \leftrightarrow (u,w,v) \in X).$$

**1.3.11. *Аксиома фундирования* $\mathbf{NGB_{14}}$:** *в произвольном непустом классе есть элемент, не имеющий с ним общих элементов:*

$$(\forall\, X)(X \neq \varnothing \to (\exists\, y)(y \in X \wedge y \cap X = \varnothing)).$$

**1.3.12. *Аксиома выбора* $\mathbf{NGB_{15}}$:** *для каждого класса $X$ существует выбирающая функция, т. е. однозначный класс, сопоставляющий всякому непустому множеству из $X$ некоторый его элемент:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(u \neq \varnothing \wedge u \in X \to (\exists! v)(v \in u \wedge (u,v) \in Y)).$$

Это очень сильная форма аксиомы выбора. Она равносильна существованию одновременного выбора по одному элементу из каждого непустого множества.

На этом список специальных аксиом NGB завершается. Как видно, аксиоматика NGB, в отличие от ZFC, конечна. Другое удобное качество системы NGB состоит в том, что она фактически оперирует и с множествами, и со свойствами множеств как с формальными объектами, осуществляя объективизацию, недоступную выразительным средствам ZFC.

**1.3.13.** Из группы аксиом формирования классов выведем несколько утверждений, которые потребуются нам при доказательстве общей теоремы о существовании классов.

**(1)** *Для любого класса существует его* $(2,1)$*-транспонирование*:

$$(\forall X)(\exists Z)(\forall u)(\forall v)((u,v) \in Z \leftrightarrow (v,u) \in X).$$

$\lhd$ Аксиома декартова произведения гарантирует существование класса $X \times \mathbb{U}$.

Последовательное применение аксиом $(2,3,1)$- и $(1,3,2)$-транспонирования к классу $X \times \mathbb{U}$ дает класс $Y$ всех троек $(v,u,w)$ таких, что $(v,u) \in X$. Воспользовавшись аксиомой области определения, заключаем, что $Z := \operatorname{dom}(Y)$ — искомый класс. $\rhd$

**(2)** *Для любых двух классов существует их декартово произведение*:

$$(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)(\forall w)$$
$$(w \in Z \leftrightarrow (\exists u \in X)(\exists v \in Y)(w = (u,v))).$$

$\lhd$ Нужно воспользоваться последовательно аксиомой декартова произведения, утверждением (1), аксиомой пересечения и положить $Z := (\mathbb{U} \times Y) \cap (X \times \mathbb{U})$. $\rhd$

Для $n \geq 2$ в силу 1.3.13 (2) определен класс $\mathbb{U}^n$ всех упорядоченных $n$-ок.

**(3)** *Для любого класса $X$ существует класс* $Z := (\mathbb{U}^n \times \mathbb{U}^m) \cap (X \times \mathbb{U}^m)$:

$$(\forall X)(\exists Z)(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\forall y_1)\dots(\forall y_m)$$
$$((x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \in Z \leftrightarrow (x_1,\dots,x_n) \in X).$$

**(4)** *Для любого класса $X$ существует класс* $Z := (\mathbb{U}^m \times \mathbb{U}^n) \cap (\mathbb{U}^m \times X)$:

$$(\forall X)(\exists Z)(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\forall y_1)\dots(\forall y_m)$$
$$((y_1,\dots y_m,x_1,\dots,x_n) \in Z \leftrightarrow (x_1,\dots,x_n) \in X).$$

$\lhd$ Для доказательства (3) и (4) нужно применить аксиому декартова произведения и аксиому пересечения. $\rhd$

**(5)** *Для любого класса $X$ существует класс $Z$ такой, что*

$$(\forall\, x_1)\ldots(\forall\, x_n)(\forall\, y_1)\ldots(\forall\, y_m)$$
$$((x_1,\ldots,x_{n-1},y_1,\ldots,y_m,x_n)\in Z\leftrightarrow(x_1,\ldots,x_n)\in X).$$

$\lhd$ Следует применить аксиомы перестановки и аксиому декартова произведения. $\rhd$

**1.3.14. *Теорема.*** *Пусть $\varphi$ — формула, в построении которой участвуют только переменные из числа $X_1,\ldots,X_n$, $Y_1,\ldots,Y_m$, причем $\varphi$ предикативна, т. е. в $\varphi$ связаны лишь переменные для множеств. Тогда в* NGB *доказуемо утверждение*

$$(\forall\, Y_1)\ldots(\forall\, Y_m)(\exists\, Z)(\forall\, x_1)\ldots(\forall\, x_n)$$
$$((x_1,\ldots,x_n)\in Z\leftrightarrow\varphi(x_1,\ldots,x_n,Y_1,\ldots,Y_m)).$$

$\lhd$ Пусть формула $\varphi$ записана с учетом принятых сокращений в таком виде, что связанными в ней являются только переменные для множеств. Достаточно рассмотреть те $\varphi$, которые не содержат подформул вида $Y\in W$ и $X\in X$, ибо последние заменяются на эквивалентные: $(\exists\, x)(x=Y\wedge x\in W)$ и $(\exists\, u)(u=X\wedge u\in X)$. Кроме того, можно исключить из $\varphi$ символ равенства, подставив в соответствии с аксиомой экстенсиональности вместо $X=Y$ выражение $(\forall\, u)(u\in X\leftrightarrow u\in Y)$. Доказательство проводится индукцией по *длине $k$ формулы* $\varphi$, т. е. по числу $k$ логических связок и кванторов, входящих в $\varphi$.

При $k=0$ формула $\varphi$ атомна и имеет вид $x_\imath\in x_\jmath$, или $x_\jmath\in x_\imath$, или $x_\imath\in Y_l$ ($\imath<\jmath\leq n,\ l\leq m$). Если $\varphi:=x_\imath\in x_\jmath$, то по аксиоме $\in$-отношения существует класс $W_1$, для которого

$$(\forall\, x_\imath)(\forall\, x_\jmath)((x_\imath,x_\jmath)\in W_1\leftrightarrow x_\imath\in x_\jmath).$$

Если же $\varphi:=x_\jmath\in x_\imath$, то вначале, воспользовавшись той же аксиомой, находим класс $W_2$ со свойством

$$(\forall\, x_\imath)(\forall\, x_\jmath)((x_\jmath,x_\imath)\in W_2\leftrightarrow x_\jmath\in x_\imath),$$

а затем применяем 1.3.13 (1). В результате подберем класс $W_3$, для которого будет

$$(\forall\, x_\imath)(\forall\, x_\jmath)((x_\imath,x_\jmath)\in W_3\leftrightarrow x_\jmath\in x_\imath).$$

Итак, в любом из этих двух случаев существует такой класс $W$, что справедлива формула

$$\Phi := (\forall\, x_\imath)(\forall\, x_\jmath)((x_\imath, x_\jmath) \in W \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)).$$

На основании 1.3.13 (4) в формуле $\Phi$ можно заменить подформулу $(x_\imath, x_\jmath) \in W$ на $(x_1, \dots, x_{\imath-1}, x_\imath) \in Z_1$ для некоторого другого класса $Z_1$ и добавить кванторы $(\forall\, x_1) \dots (\forall\, x_{\imath-1})$ в начале. Пусть $\Psi$ — получаемая при этом формула. В силу 1.3.13 (5) в формуле $\Psi$ вместо подформулы $(x_1, \dots, x_{\imath-1}, x_\imath, x_\jmath) \in Z_1$ допустимо написать $(x_1, \dots, x_\imath, x_{\imath+1}, \dots, x_\jmath) \in Z_2$ для некоторого другого класса $Z_2$ и добавить кванторы $(\forall\, x_{\imath+1}) \dots (\forall\, x_{\jmath-1})$ в начале формулы $\Psi$. Наконец, применив 1.3.13 (3) к $Z_2$, найдем класс $Z$, для которого верна формула

$$(\forall\, x_1) \dots (\forall\, x_n)((x_1, \dots, x_n) \in Z \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)).$$

Для оставшегося случая $x_\imath \in Y_l$ требуемое утверждение следует из существования декартовых произведений $W := \mathbb{U}^{\imath-1} \times Y_l$ и $Z := W \times \mathbb{U}^{n-\imath}$. Тем самым теорема установлена при $k = 0$.

Допустим, что для всех $k < p$ теорема доказана и формула $\varphi$ имеет $p$ логических связок и кванторов. Достаточно рассмотреть случаи, когда $\varphi$ получается из каких-то формул с помощью отрицания, импликации и квантора общности.

Пусть $\varphi := \neg\psi$. По индукционному предположению существует класс $V$ такой, что

$$(\forall\, x_1) \dots (\forall\, x_n)((x_1, \dots, x_n) \in V \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)).$$

По аксиоме дополнения имеется класс $Z := \mathbb{U} - V := \mathbb{U} \setminus V$, удовлетворяющий нужным условиям.

Пусть $\varphi := \psi \rightarrow \theta$. Вновь по индукционному предположению найдутся классы $V$ и $W$ такие, что для $V$ и $\psi$ выполнено отмеченное выше и, кроме того,

$$(\forall\, x_1) \dots (\forall\, x_n)((x_1, \dots, x_n) \in W \leftrightarrow \theta(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)).$$

Искомый класс $Z := \mathbb{U} - (V \cap (\mathbb{U} - W))$ существует ввиду аксиомы пересечения и аксиомы дополнения.

Пусть $\varphi := (\forall\, x)\psi$, а $V$ и $\psi$ те же, что и выше. Если применить аксиому области определения к классу $X := \mathbb{U} - V$, то получим класс $Z_1$, для которого

$$(\forall\, x_1)\ldots(\forall\, x_n)\ \big((x_1,\ldots,x_n) \in Z_1 \leftrightarrow (\exists\, x)^{\neg}\psi(x_1,\ldots,x_n,Y_1,\ldots,Y_m)\big).$$

Класс $Z := \mathbb{U} - Z_1$, который существует по аксиоме дополнения, будет искомым, ибо формула $(\forall\, x)\,\psi$ эквивалентна $^{\neg}(\exists\, x)(^{\neg}\psi)$. $\rhd$

**1.3.15.** Каждая аксиома формирования классов $\mathrm{NGB}_7$– $\mathrm{NGB}_{13}$ является следствием теоремы 1.3.14 при подходящем выборе формулы $\varphi$. С другой стороны, сама эта теорема, как видно из доказательства, выводится из аксиом формирования классов. Замечательно, что вместо бесконечного числа утверждений, содержащихся в 1.3.14, можно обойтись конечным числом аксиом $\mathrm{NGB}_7$–$\mathrm{NGB}_{13}$.

Теорема 1.3.14 позволяет доказывать существование самых разнообразных классов. Так, для всякого класса $Y$ существуют класс всех его подмножеств $\mathscr{P}(Y)$ и объединение всех элементов класса $\bigcup Y$, определяемые обычными формулами

$$(\forall\, u)(u \in \mathscr{P}(Y) \leftrightarrow u \subset Y),$$
$$(\forall\, u)\ \Big(u \in \bigcup Y \leftrightarrow (\exists\, v)(v \in Y \wedge u \in v)\Big).$$

В этом легко можно убедиться, если взять $\varphi(X,Y) := X \subset Y$ и $\varphi(X,Y) := (\exists\, V)(X \in V \wedge V \in Y)$. По аналогичным соображениям возможны определения $Z^{-1}$, $\mathrm{im}(Z)$, $Z \restriction Y$, $Z``Y$, $X \cup Y$ и т. п., где $X$, $Y$ и $Z$ — некоторые классы.

**1.3.16. *Теорема.*** *Всякая теорема* ZFC *является теоремой* NGB.

$\lhd$ Все аксиомы ZF являются теоремами NGB. Докажем единственную неочевидную часть этого утверждения, касающуюся аксиомы подстановки $\mathrm{ZF}_4^{\varphi}$. Пусть формула $\varphi$ не содержит свободных вхождений переменной $y$ и $\{x,t,z_1,\ldots,z_m\}$ — полный набор переменных, использованных в построении $\varphi$. Далее предположим, что для всех $x$, $u$, $v$, $z_1,\ldots,z_m$ выполняется

$$\varphi(x,u,z_1,\ldots,z_m) \wedge \varphi(x,v,z_1,\ldots,z_m) \to u = v.$$

Формула $\varphi$ предикативна, если в ней связанными являются лишь переменные для множеств. По теореме 1.3.14 существует класс $Z$ такой, что

$$(\forall\, x)(\forall\, u)\big((x,u) \in Z \leftrightarrow \varphi(x,u,z_1,\ldots,z_m)\big).$$

Из указанного выше свойства $\varphi$ видно, что класс $Z$ однозначен, т. е. в NGB доказуема $\mathrm{Un}\,(Z)$. По аксиоме подстановки $\mathrm{NGB}_6$ существует множество $y$, для которого

$$(\forall\, v)\big(v \in y \leftrightarrow (\exists\, u)((u, v) \in Z \wedge u \in x)\big).$$

Ясно, что для $y$ выполняется нужное соотношение

$$(\forall\, z_1) \dots (\forall\, z_m)(\forall\, v)\big(v \in y \leftrightarrow (\exists\, u \in x)\varphi(u, v, z_1, \dots, z_m)\big). \ \rhd$$

**1.3.17. *Теорема.*** *Каждая теорема* NGB, *в которой говорится о множествах, является теоремой* ZFC.

$\lhd$ Доказательство можно найти, например, в [52]. Оно требует привлечения некоторых фактов из теории моделей, выходящих за рамки настоящей книги. $\rhd$

Содержание теорем 1.3.16 и 1.3.17 часто формулируют в следующем виде.

**1.3.18. *Теорема.*** *Теория множеств фон Неймана — Гёделя — Бернайса* NGB *является консервативным расширением теории множеств Цермело — Френкеля* ZFC.

**1.3.19.** Примечания.

**(1)** Имеется много изложений теории множеств. Упомянем только некоторые: [8, 13, 20, 21, 34, 36, 37, 52, 90, 91, 105, 127, 150, 163, 180, 248].

Теория NGB (наряду с теорией ZFC) является одной из наиболее простых и удобных аксиоматических систем теории множеств. Обзор других аксиоматических систем дан в [8, 13, 105, 112].

**(2)** Из разнообразия аксиоматических теорий множеств выделим *теорию Бернайса — Морса*, расширяющую NGB. Эта теория имеет специальные аксиомы $\mathrm{NGB}_1$–$\mathrm{NGB}_5$, $\mathrm{NGB}_{14}$ и следующую схему аксиом выделения:

$$(\exists\, X)(\forall\, Y)\big(Y \in X \leftrightarrow M(Y) \wedge \varphi(Y, X_1, \dots, X_n)\big),$$

где $\varphi$ — произвольная формула, не содержащая вхождений переменной $X$.

**(3)** Теорема 3.1.17 принадлежит А. Мостовскому. Из нее следует, в частности, что теория ZF непротиворечива в том и только в том

случае, когда непротиворечива теория NGB. Этот факт получили И. Новак и Дж. Шенфилд (см. [13, 111]).

Из 1.3.14 видно, что если в формуле $\varphi$ область действия кванторов ограничена множеством, то схема аксиом выделения есть теорема NGB. Теория множеств Бернайса — Морса допускает в схеме аксиом выделения квантификацию по произвольным классам. К теории множеств Бернайса — Морса можно также добавить аксиому выбора $\mathrm{NGB}_{15}$.

## 1.4. Ординалы

Концепция ординала является ключевой при изучении бесконечных множеств. Она предназначена для трансфинитного итерирования различных математических построений или рассуждений, а также служит для измерения мощностей. Как именно это делается — тема текущего параграфа.

**1.4.1.** Рассмотрим классы $X$ и $Y$. Скажем, что $X$ есть *отношение порядка* или просто *порядок* на $Y$, если $X$ является антисимметричным, рефлексивным и транзитивным отношением на $Y$. Антисимметричность, рефлексивность и транзитивность отношения записываются так же, как и на языке ZFC (см. П.1.10). Порядок $X$ на $Y$ называют *линейным*, если $Y \times Y \subset X \cup X^{-1}$. Говорят, что отношение $X$ *вполне упорядочивает* $Y$ или что $Y$ — *вполне упорядоченный класс*, если $X$ — порядок на $Y$ и всякий непустой подкласс класса $Y$ имеет наименьший элемент (относительно $X$). Классы $X_1$ и $X_2$, упорядоченные отношениями $R_1$ и $R_2$ соответственно, именуют *подобными*, если существует биекция $h$ из $X_1$ на $X_2$ такая, что $(x, y) \in R_1 \leftrightarrow (h(x), h(y)) \in R_2$ для всех $x, y \in X_1$.

**1.4.2.** Введем отношение $E$ формулой

$$(x, y) \in E \leftrightarrow (x \in y) \vee x = y.$$

Класс $E$ существует в силу аксиомы $\in$-отношения $\mathrm{NGB}_7$ и теоремы 1.3.14. Как видно, $E$ — отношение порядка на универсальном классе $\mathbb{U}$.

Класс $X$ называют *транзитивным* (не путать с транзитивным отношением!), если каждый его элемент является также и его подмножеством:

$$\mathrm{Tr}\,(X) := (\forall\, y)\ (y \in X \to y \subset X).$$

*Ординальным классом* мы будем именовать всякий транзитивный класс, вполне упорядоченный отношением $E$. Запись $\mathrm{Ord}\,(X)$ означает, что $X$ — ординальный класс. Ординальный класс, являющийся множеством, называют *ординалом* (или *порядковым числом*, или *трансфинитным числом*). Класс всех ординалов обозначают символом $\mathrm{On}$. Напомним, что ординалы символизируются, как правило, малыми греческими буквами. При этом приняты следующие сокращения:

$$\alpha < \beta := \alpha \in \beta, \quad \alpha \le \beta := (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta), \quad \alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}.$$

Если $\alpha < \beta$, то говорят, что $\alpha$ *предшествует* $\beta$, а $\beta$ *следует* за $\alpha$. Привлекая аксиому фундирования $\mathrm{NGB}_{14}$, легко установить следующий факт.

**1.4.3.** *Класс является ординальным в том и только в том случае, если он транзитивен и линейно упорядочен отношением $E$.*

$\lhd$ Пусть транзитивный класс $X$ линейно упорядочен отношением $E$. Возьмем непустой подкласс $Y \subset X$ и покажем, что $Y$ имеет наименьший элемент. Существует по меньшей мере один элемент $y \in Y$. Если $y = \varnothing$, то $y$ — искомый наименьший элемент в $Y$. Если же $y \ne \varnothing$, то по аксиоме фундирования можно подыскать элемент $x \in y$ такой, что $x \cap y = \varnothing$. Тогда $x$ — наименьший элемент множества $y$, так как $y$ линейно упорядочено. Ввиду линейной упорядоченности класса $Y$ отношением $E$ элемент $x$ будет наименьшим и в классе $Y$. Тем самым $X$ — ординальный класс и достаточность указанного условия обоснована. Необходимость его очевидна. $\rhd$

Итак, в NGB или ZFC можно пользоваться более простым определением ординала:

$$\mathrm{Ord}\,(X) \leftrightarrow \mathrm{Tr}\,(X) \wedge (\forall\, u \in X)(\forall\, v \in X)(u \in v \vee u = v \vee v \in u).$$

Полезно подчеркнуть, что эквивалентность приведенных определений ординала устанавливается без аксиомы выбора.

Большинство приводимых ниже свойств ординалов можно вывести, не прибегая к аксиоме фундирования, пользуясь только первоначальным определением ординала. Это обстоятельство, важное, например, для обоснования совместимости аксиомы фундирования с остальными аксиомами ZF, для наших дальнейших целей несущественно.

**1.4.4.** Ниже нам потребуются несколько вспомогательных фактов.

**(1)** *Пусть $X$ и $Y$ — произвольные классы. Если $X$ ординален, $Y$ транзитивен и $X \neq Y$, то равносильны соотношения $Y \subset X$ и $Y \in X$.*

$\triangleleft$ При $Y \in X$ класс $Y$ — множество и $Y \subset X$ из-за транзитивности $X$. Допустим, в свою очередь, что $Y \subset X$. Так как $X \neq Y$, то $Z := X - Y \neq \varnothing$. Класс $Z$ имеет наименьший элемент $x \in Z$ (в смысле отношения порядка $E$). Это означает, что $x \cap Z = \varnothing$ или $x \subset Y$. Кроме того, $x \subset X$, ибо $x \in X$ и $X$ транзитивен. Возьмем элемент $y \in Y$. Так как $X$ линейно упорядочен, то $x \in y$ или $x = y$, или, наконец, $y \in x$. Первые два соотношения с учетом транзитивности $Y$ дают $x \in Y$, что противоречит вхождению $x \in Z$. Следовательно, $y \in x$. Тем самым $Y \subset x$. Принимая в расчет уже доказанное включение $x \subset Y$, получаем $x = Y$. Окончательно $x = Y \wedge x \in X \to Y \in X$. $\triangleright$

**(2)** *Пересечение любых двух ординальных классов есть ординальный класс.*

$\triangleleft$ Очевидно. $\triangleright$

**(3)** *Если $X$ и $Y$ — ординальные классы, то*

$$X \in Y \vee X = Y \vee Y \in X.$$

$\triangleleft$ Пусть пересечение $X \cap Y = Z$ не совпадает ни с одним из классов $X$ и $Y$. Тогда согласно (1) и (2) $Z \in X$ и $Z \in Y$, т. е. $Z \in X \cap Y = Z$. Однако для множества $Z \in X$ соотношение $Z \in Z$ невозможно. Следовательно, либо $Z = X$ и тогда $Y \subset X$, либо $Z = Y$ и тогда $X \subset Y$. Остается сослаться на (1). $\triangleright$

**1.4.5. *Теорема.*** *Справедливы следующие утверждения:*

**(1)** *элементами любого ординального класса могут быть только ординалы;*

**(2)** *класс* On *— единственный ординальный класс, не являющийся ординалом;*

**(3)** *для каждого ординала $\alpha$ множество $\alpha + 1$ служит ординалом, причем наименьшим из всех следующих за $\alpha$ ординалов;*

**(4)** *объединение $\bigcup X$ непустого класса ординалов $X \subset$ On — ординальный класс; если $X$ — множество, то $\bigcup X$ есть верхняя граница множества $X$ в упорядоченном классе* On.

$\lhd$ (1) Возьмем ординальный класс $X$ и элемент $x \in X$. Так как $X$ транзитивен, то $x \subset X$, следовательно, $x$ линейно упорядочено отношением $E$. Покажем $\mathrm{Tr}\,(x)$. Если $z \in y \in x$, то $z \in X$ ввиду транзитивности $X$. Из возможных трех случаев $z = x$, $x \in z$ и $z \in x$, первые два приводят к замкнутым циклам $z \in y \in z$ и $z \in y \in x \in z$ соответственно, противоречащим аксиоме фундирования. Стало быть, $z \in x$. Итак, $z \in y \to z \in x$, т. е. $y \subset x$. Это доказывает $\mathrm{Tr}\,(x)$, а заодно и $\mathrm{Ord}\,(x)$.

(2) Линейная упорядоченность класса On следует из 1.4.4 (3), а его транзитивность — из (1), поэтому Ord (On). Если On — множество, то On — ординал и получается противоречие: On $\in$ On. Следовательно, On — ординальный класс, но не ординал. Для произвольного ординального класса $X$ из $X \notin \mathrm{On}$ вытекает $X = \mathrm{On}$. Действительно, утверждение 1.4.4 (3) допускает еще только одну возможность $\mathrm{On} \in X$, которая входит в противоречие с тем, что On — собственный класс.

(3) Если $\alpha$ — ординал, то множество $\alpha + 1$ линейно упорядочено по очевидным соображениям. Для $x \in \alpha + 1$ либо $x \in \alpha$, либо $x = \alpha$, причем в обоих случаях $x \subset \alpha$. Но $\alpha \subset \alpha + 1$, стало быть, $x \subset \alpha + 1$, что и доказывает транзитивность $\alpha + 1$. Окончательно $\alpha + 1$ — ординал и $\alpha < \alpha + 1$. Если $\alpha < \beta$ для некоторого ординала $\beta$, то $\alpha \in \beta$ и $\alpha \subset \beta$, т. е. $\alpha \cup \{\alpha\} \subset \beta$. Согласно 1.4.4 (1) верно либо $\alpha \cup \{\alpha\} \in \beta$, либо $\alpha \cup \{\alpha\} = \beta$, значит, $\alpha + 1 \leq \beta$.

(4) Предположив $X \subset \mathrm{On}$ и $y \in Y := \bigcup X$, подыщем такой элемент $x \in X$, что $y \in x$. Поскольку $x$ — ординал, то $y \subset x$ и, тем более, $y \subset Y$. Ввиду транзитивности класса On (см. (2)) из $x \in X$ следует $x \subset \mathrm{On}$, а потому $Y \subset \mathrm{On}$. Итак, $Y$ — транзитивный подкласс On, стало быть, $Y$ — ординал. Если $\alpha \in X$, то $\alpha \subset Y$ и согласно 1.4.4 (1) $\alpha \leq Y$. Если же $\beta$ — ординал и $\beta \geq \alpha$ для всех $\alpha \in X$, то $Y \subset \beta$ и вновь по 1.4.4 (1) $Y \leq \beta$. Следовательно, $Y = \sup(X)$. $\rhd$

**1.4.6.** Точную верхнюю границу множества ординалов $x$ принято обозначать $\lim(x)$. Ординал $\alpha$ называется *предельным*, если $\alpha \neq \varnothing$ и $\lim(\alpha) = \alpha$. Эквивалентно, $\alpha$ — предельный ординал, если он не представим в виде $\alpha = \beta + 1$ с каким-либо $\beta \in \mathrm{On}$. Обозначим символом $K_{\mathrm{II}}$ класс всех предельных ординалов. Ординалы, не входящие в $K_{\mathrm{II}}$, образуют класс непредельных ординалов $K_{\mathrm{I}} := \mathrm{On} - K_{\mathrm{II}} = \{\alpha \in \mathrm{On} : (\exists \beta \in \mathrm{On})\ (\alpha = \beta + 1)\}$. Обозначим

буквой $\omega$ наименьший предельный ординал (существование которого обеспечено теоремой 1.4.5 и аксиомой бесконечности). Можно показать, что $\omega$ совпадает с классом непредельных ординалов $\alpha$ таких, что каждый предшественник $\alpha$ также является непредельным:

$$\omega = \{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha \cup \{\alpha\} \in K_{\mathrm{I}}\}.$$

Элементы $\omega$ называют *конечными ординалами*, или *натуральными числами*, или *положительными целыми числами.* Наименьший ординал — нулевое множество $0 := \varnothing$ — содержится в $\omega$. Следующий ординал $1 := 0 + 1 = 0 \cup \{0\} = \{\varnothing\}$ содержит единственный элемент 0. Далее, $2 := 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{0, \{0\}\}$, $3 := 2 \cup \{2\} = \{0, \{0\}, \{\{0, \{0\}\}\}$ и т. д. Итак,

$$\omega := \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}, \dots\} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Используется также обозначение

$$\mathbb{N} := \omega - \{0\} = \{1, 2, \dots\}.$$

В следующей теореме перечислены основные свойства множества натуральных чисел $\omega$, совокупность которых известна под названием *системы аксиом Пеано.* Отметим, что по более давней математической традиции термин натуральное число относят только к элементам $\mathbb{N}$. Нуль исторически «менее» натурален.

**1.4.7. *Теорема.*** *Справедливы следующие утверждения:*

**(1)** *нуль является натуральным числом, т. е.* $0 \in \omega$*;*

**(2)** *для каждого натурального числа* $\alpha \in \omega$ *непосредственно следующий за ним ординал* $\alpha + 1$ *— также натуральное число;*

**(3)** $0 \neq \alpha + 1$ *ни для какого натурального числа* $\alpha$*;*

**(4)** *для натуральных чисел* $\alpha$ *и* $\beta$ *из* $\alpha + 1 = \beta + 1$ *следует* $\alpha = \beta$*;*

**(5)** *если класс* $X$ *содержит пустое множество и с каждым ординалом содержит также непосредственно следующий за ним ординал, то* $\omega \subset X$.

**1.4.8. *Теорема*** (принцип трансфинитной индукции). *Пусть $X$ — некоторый класс, обладающий свойствами: (1) $0 \in X$; (2) если $\alpha$ — ординал и $\alpha \in X$, то $\alpha + 1 \in X$; (3) если $x$ — множество ординалов, содержащееся в $X$, то $\lim(x) \in X$. Тогда $\mathrm{On} \subset X$.*

$\lhd$ Предположим, что $\mathrm{On} \not\subset X$. Тогда непустой подкласс $\mathrm{On} - X$ вполне упорядоченного класса On имеет наименьший элемент $\alpha \in \mathrm{On} - X$, причем это означает, что $\alpha \cap (\mathrm{On} - X) = 0$ или $\alpha \subset X$ и $\alpha \neq 0$ ввиду (1). Если $\alpha \in K_{\mathrm{I}}$, т. е. $\alpha = \beta + 1$ для некоторого $\beta \in \mathrm{On}$, то $\beta \in \alpha \subset X \to \beta \in X$ и по условию (2) $\alpha = \beta + 1 \in X$. Если же $\alpha \in K_{\mathrm{II}}$, то из условия (3) выводим $\alpha = \lim(\alpha) \in X$. В обоих случаях имеем $\alpha \in X$, что противоречит включению $\alpha \in \mathrm{On} - X$. $\rhd$

**1.4.9. *Теорема*** (принцип трансфинитной рекурсии). *Пусть $G$ — некоторая класс-функция. Тогда существует единственная функция $F$, для которой*

**(1)** $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{On}$*;*

**(2)** $F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$ *при любом* $\alpha \in \mathrm{On}$, *где* $F \restriction \alpha := F \cap (\alpha \times \mathbb{U})$ *— ограничение* $F$ *на* $\alpha$.

$\lhd$ Определим класс $Y$ соотношением

$$f \in Y \leftrightarrow \mathrm{Fnc}\,(f) \wedge \mathrm{dom}(f) \in \mathrm{On} \wedge (\forall\, \alpha \in \mathrm{dom}(f))\ (f(\alpha) = G(f \restriction \alpha)).$$

Если $f,\ g \in Y$, то либо $f \subset g$, либо $g \subset f$. Действительно, если $\beta := \mathrm{dom}(f)$ и $\gamma := \mathrm{dom}(g)$, то $\beta \leq \gamma$ или $\gamma \leq \beta$. Считая, например, что $\gamma < \beta$, положим $z := \{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha < \gamma \wedge f(\alpha) \neq g(\alpha)\}$. Если $z \neq 0$, то имеется наименьший элемент $\delta \in z$. Тогда для всех $\alpha < \delta$ будет $f(\alpha) = g(\alpha)$, т. е. $f \restriction \delta = g \restriction \delta$. Но по определению класса $Y$ верно также $f(\delta) = G(f \restriction \delta)$ и $g(\delta) = G(g \restriction \delta)$, следовательно, $f(\delta) = g(\delta)$ и $\delta \notin z$. Это противоречит выбору $\delta$, значит, $z = 0$, т. е. $f(\alpha) = g(\alpha)$ при всех $\alpha < \gamma$. Отсюда получаем требуемое включение $g \subset f$. Положим $F = \bigcup Y$. Легко видеть, что $F$ — функция, $\mathrm{dom}(F) \subset \mathrm{On}$ и $F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$ для всех $\alpha \in \mathrm{dom}(F)$. Если $\alpha \in \mathrm{dom}(F)$, то $(\alpha, G(F \restriction \alpha)) \in f$ при некотором $f \in Y$. Тогда $\alpha \in \beta := \mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(F)$ и ввиду транзитивности $\beta$ будет $\alpha \subset \mathrm{dom}(F)$. Итак, класс $\mathrm{dom}(F)$ транзитивен и по 1.4.4 (1) либо $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{On}$, либо $\mathrm{dom}(F) \in \mathrm{On}$. Однако последнее включение невозможно. В самом деле, из $\delta := \mathrm{dom}(F) \in \mathrm{On}$ следует, что функция $f := F \cup \{(\delta, G(F))\}$ входит в $Y$, стало быть, $f \subset F$, откуда выводим противоречие: $f \subset F \to \mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(F) \to \delta \in \mathrm{dom}(F) = \delta$. $\rhd$

**1.4.10.** Бинарное отношение $R$ называют *вполне фундированным*, если для всякого $x \in \mathbb{U}$ класс $R^{-1}(x)$ — множество и для любого непустого $x \in \mathbb{U}$ существует элемент $y \in x$ такой, что $x \cap R^{-1}(y) = 0$. Последнее условие (в предположении аксиомы выбора) равносильно тому, что не существует бесконечной последовательности $(x_n)$ со свойством $x_n \in R(x_{n+1})$ для всех $n \in \omega$. Примером вполне фундированного отношения служит отношение $\in$. Принципы трансфинитной индукции и рекурсии удобно применять в следующем виде.

**1.4.11.** ***Теорема.*** *Пусть $R$ — вполне фундированное отношение. Тогда справедливы утверждения:*

**(1)** (индукция по $R$) *если класс $X$ таков, что для каждого $x \in \mathbb{U}$ соотношение $R^{-1}(x) \subset X$ влечет $x \in X$, то $X = \mathbb{U}$;*

**(2)** (рекурсия по $R$) *для любой функции $G : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ существует такая функция $F$, что $\operatorname{dom}(F) = \mathbb{U}$ и $F(x) = G(F \restriction R^{-1}(x))$ для всех $x \in \mathbb{U}$.*

**1.4.12.** Два множества называют *равномощными*, если существует взаимнооднозначное отображение одного из них на другое. Ординал, который не равномощен никакому предшествующему ординалу, называется *кардиналом*. Любое натуральное число является кардиналом. Кардинал, не являющийся натуральным числом, называют *бесконечным*. Значит, $\omega$ — наименьший бесконечный кардинал. Для любого ординала $\alpha$ обозначим символом $\omega_\alpha$ бесконечный кардинал, для которого упорядоченное множество всех бесконечных кардиналов, меньших $\omega_\alpha$, подобно $\alpha$. Если такой кардинал существует, то он единствен.

**1.4.13.** ***Теорема*** (принцип измерения мощностей). *Справедливы следующие утверждения:*

**(1)** *бесконечные кардиналы образуют некоторый вполне упорядоченный собственный класс;*

**(2)** *для любого ординала $\alpha$ существует кардинал $\omega_\alpha$, причем отображение $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ является подобием класса ординалов и класса бесконечных кардиналов;*

**(3)** *существует отображение $|\cdot|$ из универсального класса $\mathbb{U}$ на класс всех кардиналов такое, что множества $x$ и $|x|$ равномощны для любого $x \in \mathbb{U}$.*

$\lhd$ Доказательство см., например, в [91]. $\rhd$

Кардинал $|x|$ называют *мощностью* или *кардинальным числом множества* $x$. Итак, всякое множество равномощно единственному кардиналу, а именно своему кардинальному числу. Множество $x$ *счетно*, если $|x| = \omega_0 := \omega$, и *не более чем счетно*, если $|x| \leq \omega_0$.

**1.4.14.** Для произвольного ординала $\alpha$ обозначим символом $2^{\omega_\alpha}$ мощность множества $\mathscr{P}(\omega_\alpha)$, т. е. $2^{\omega_\alpha} := |\mathscr{P}(\omega_\alpha)|$. Такое обозначение оправдано тем, что $2^x$ и $\mathscr{P}(X)$ равномощны для любого $x$, где $2^x$ — класс всех отображений из $x$ в $2$. Теорема, установленная Г. Кантором, утверждает, что $|x| < |2^x|$, каково бы ни было множество $x$. В частности, $\omega_\alpha < 2^{\omega_\alpha}$ для любого ординала $\alpha$. Тогда по теореме 1.4.13 будет $\omega_{\alpha+1} \leq 2^{\omega_\alpha}$. Вопрос о том, имеются или нет промежуточные мощности между $\omega_{\alpha+1}$ и $2^{\omega_\alpha}$, т. е. выполнено ли равенство $\omega_{\alpha+1} = 2^{\omega_\alpha}$, составляет содержание *обобщенной проблемы континуума.* При $\alpha = 0$ это классическая *проблема континуума.* Под *гипотезой континуума* CH (обобщенной гипотезой континуума GCH) понимают равенство $\omega_1 = 2^\omega$ (соответственно равенство $\omega_{\alpha+1} = 2^{\omega_\alpha}$ для всех $\alpha \in \mathrm{On}$).

**1.4.15.** Введем порядок в классе $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$, который мы будем называть *каноническим.* Рассмотрим $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2 \in \mathrm{On}$. Будем считать, что $(\alpha_1, \alpha_2) \leq (\beta_1, \beta_2)$, если выполнено любое из следующих условий:

**(1)** $\alpha_1 = \beta_1$ и $\alpha_2 = \beta_2$;
**(2)** $\sup\{\alpha_1, \alpha_2\} < \sup\{\beta_1, \beta_2\}$;
**(3)** $\sup\{\alpha_1, \alpha_2\} = \sup\{\beta_1, \beta_2\}$ и $\alpha_1 < \beta_1$;
**(4)** $\sup\{\alpha_1, \alpha_2\} = \sup\{\beta_1, \beta_2\}$ и $\alpha_1 = \beta_1$ и $\alpha_2 < \beta_2$.

Таким образом, пары $(\alpha, \beta)$ сравниваются по $\sup\{\alpha, \beta\}$, а в множестве упорядоченных пар $(\alpha, \beta)$, имеющих одинаковый $\sup\{\alpha, \beta\}$, порядок лексикографический.

Можно легко проверить, что класс $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ с каноническим порядком есть вполне упорядоченный класс. Аналогично определяется каноническое вполне упорядочение класса $\mathrm{On} \times \mathrm{On} \times \mathrm{On}$ и т. д.

**1.4.16.** Примечания.

**(1)** Идея трансфинита относится к числу наиболее фундаментальных и оригинальных открытий Г. Кантора. Используя эту идею, он создал метод количественного анализа бесконечности, глубоко проникнув в ее сущность. Понятие бесконечности присутствует в

религиозных и философских учениях с древнейших времен. Однако до Г. Кантора вся совокупность представлений о бесконечном составляла преимущественно гуманитарную дисциплину. Г. Кантор сделал само понятие бесконечности предметом математического исследования. Призванная и вдохновленная бесконечным, математика стала «наукой о бесконечном». В этом состоит одна из наиболее распространенных точек зрения на предмет математики наших дней, свидетельствующая величие идеи Г. Кантора.

**(2)** Проблема континуума восходит к Г. Кантору и названа первой в знаменитом докладе Д. Гильберта [97]. Оставаясь десятилетиями нерешенной, она порождала глубокие исследования по основаниям теории множеств. В 1939 г. К. Гёдель установил совместимость обобщенной гипотезы континуума с ZFC [19]. В 1963 г. П. Дж. Коэн показал, что отрицание обобщенной гипотезы континуума также совместимо с ZFC. Оба эти результата принесли с собой новые идеи, методы и проблемы.

**(3)** По Г. Кантору ординал есть порядковый тип некоторого вполне упорядоченного множества $x$, т. е. класс всех упорядоченных множеств, подобных $x$. Однако все порядковые типы, кроме порядкового типа пустого множества, являются собственными классами. Указанное обстоятельство делает невозможным развить теорию порядковых типов (в рамках NGB), ибо нельзя рассматривать классы порядковых типов. Определение 1.4.2 выделяет по одному каноническому представителю из каждого порядкового типа. Такое определение ординала принадлежит Дж. фон Нейману.

**(4)** Здесь мы привели лишь самые основные факты об ординалах. Подробности и дальнейшие сведения можно найти в [55, 91].

### 1.5. Иерархии множеств

Рекурсивные определения, основанные на теореме 1.4.9 или ее вариантах, доставляют, в частности, возрастающие (или убывающие) трансфинитные последовательности множеств, называемые кумулятивными иерархиями. Особый интерес для нас представляют иерархии, приводящие к моделям теории множеств.

**1.5.1.** Рассмотрим некоторое множество $x_0$ и два однозначных класса $Q$ и $R$. Исходя из них, построим новый однозначный класс $G$. Прежде всего положим $G(0) := x_0$. Далее, если $x$ — функция и

$\mathrm{dom}(x) = \alpha + 1$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{On}$, то $G(x) := Q(x(\alpha))$. Если же $\mathrm{dom}(x) = \alpha$ — предельный ординал, то для получения $G(x)$ сначала «накопим» множество из значений $x(\beta)$ при $\beta < \alpha$, а затем к полученному множеству применим $R$, т. е. $G(x) := R(\bigcup \mathrm{im}(x))$. Во всех остальных случаях будем считать, что $G(x) = 0$. В силу теоремы 1.4.9 о трансфинитной рекурсии существует однозначный класс $F$, удовлетворяющий условиям

$$F(0) = x_0,$$
$$F(\alpha + 1) = Q(F(\alpha)),$$
$$F(\alpha) = R\biggl(\bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta)\biggr) \quad (\alpha \in K_{\mathrm{II}}).$$

Такую функцию $F$ часто называют *кумулятивной иерархией*. Объединение элементов класса $\mathrm{im}(F)$, т. е. класс

$$\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} F(\alpha) := \bigcup \mathrm{im}(F),$$

называют *пределом кумулятивной иерархии* $(F(\alpha))_{\alpha\in\mathrm{On}}$.

**1.5.2.** В дальнейшем нас интересует только тот специальный случай, когда $x_0$ — пустое множество, $R$ — тождественное отображение универсального класса $\mathbb{U}$ и $Q$ — некоторая класс-функция, $\mathrm{dom}(Q) = \mathbb{U}$. При этом кумулятивные иерархии строятся индуктивно, начиная с пустого множества, последовательным применением операции $Q$. Варьируя $Q$, можно получать различные кумулятивные иерархии.

Наименьший ординал $\alpha$, для которого $x \in F(\alpha + 1)$, называется (*ординальным*) *рангом множества* $x$ *относительно иерархии* $(F(\alpha))_{\alpha\in\mathrm{On}}$ и обозначается $\mathrm{rank}(x)$. Понятно, что это определение оправдано теоремой 1.3.14, в полном соответствии с которой существует класс rank, удовлетворящий условию

$$(\forall\, x)\ (\forall\, y)\ ((x, y) \in \mathrm{rank} \leftrightarrow \varphi(x, y, F, \mathrm{On})),$$

где $\varphi$ — предикативная формула

$$(\exists\, \alpha \in \mathrm{On})\ (y = \alpha \wedge x \in F(\alpha+1) \wedge (\forall\, \beta \in \mathrm{On})\ (x \in F(\beta+1) \to \alpha \leq \beta)).$$

При этом верно $\mathrm{Un}\,(\mathrm{rank})$, $\mathrm{dom}(\mathrm{rank}) = \bigcup \mathrm{im}\, F$ и $\mathrm{im}(\mathrm{rank}) \subset \mathrm{On}$, т. е. rank — функция из $\bigcup \mathrm{im}(F)$ в On. В обозначении ранга не указано $F$, так как ниже всегда ясно, о какой иерархии идет речь.

**1.5.3.** В качестве простейшего примера рассмотрим случай, когда $x_0 = 0$, $R = I_{\mathbb{U}}$ и $Q := \mathscr{P}_{\mathrm{tr}}$, где $\mathscr{P}_{\mathrm{tr}}$ любому $x \in \mathbb{U}$ сопоставляет класс $\mathscr{P}_{\mathrm{tr}}(x)$ всех транзитивных подмножеств множества $x$. Так как транзитивное подмножество ординала есть ординал, то $Q(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$ или $F(\alpha + 1) = \alpha + 1$ для каждого ординала $\alpha$. Если $\alpha$ пределен, то

$$F(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta) = \bigcup_{\beta+1<\alpha} F(\beta+1) = \bigcup_{\beta+1<\alpha} \beta + 1 = \alpha.$$

Поэтому предел возникающей кумулятивной иерархии — это класс ординалов $\mathrm{On}$.

**1.5.4.** Если на роль $Q$ пригласить операцию образования множества всех подмножеств $\mathscr{P}$, считая, что $x_0 = 0$, $R = I_{\mathbb{U}}$, получится общеизвестная кумулятивная иерархия

$$\begin{aligned} V_0 &:= 0, \\ V_{\alpha+1} &:= \mathscr{P}(V_\alpha) \quad (\alpha \in \mathrm{On}), \\ V_\alpha &:= \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \quad (\alpha \in K_{\mathrm{II}}). \end{aligned}$$

Класс $\mathbb{V} := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha$ — *универсум фон Неймана* (см. Приложение). Напомним, что его нижние уровни имеют вид $V_1 = \mathscr{P}(0) = \{0\} = 1$, $V_2 = \mathscr{P}(1) = \{0, \{0\}\} = 2$, $V_3 = \mathscr{P}(V_2) = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \{0, \{0\}\}\} \neq 3$ и т. д.

**1.5.5.** *Справедливы следующие утверждения*:

**(1)** $V_\alpha$ *— транзитивное множество для каждого* $\alpha \in \mathrm{On}$;
**(2)** $V_\beta \in V_\alpha$ *и* $V_\beta \subset V_\alpha$ *при любых* $\alpha$, $\beta \in \mathrm{On}$, $\beta < \alpha$;
**(3)** *если* $x \in y \in \mathbb{V}$, *то* $\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$;
**(4)** *класс ординалов* $\mathrm{On}$ *содержится в универсуме* $\mathbb{V}$;
**(5)** $\mathrm{rank}(\alpha) = \alpha$ *для* $\alpha \in \mathrm{On}$;
**(6)** *если* $x$ *— множество и* $x \subset \mathbb{V}$, *то* $x \in \mathbb{V}$.

$\lhd$ (1) Применяем трансфинитную индукцию. При $\alpha = 0$ класс $V_0 = 0$ — транзитивное множество. Допустим, что множество $V_\alpha$ транзитивно. Так как $V_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V_\alpha)$, то $V_{\alpha+1}$ — множество и для любых $x$ и $y$ из $x \in y \in V_{\alpha+1}$ вытекает, что $y \subset V_\alpha$ и $x \in V_\alpha$. По индукционному предположению $x \subset V_\alpha$ или $x \in V_{\alpha+1}$, значит,

$y \subset V_{\alpha+1}$. Если $\alpha \in K_{\mathrm{II}}$ и $V_\beta$ — транзитивное множество при всех $\beta < \alpha$, то для каждого $x \in V_\alpha$ будет

$$(\exists\, \beta < \alpha)\ (x \in V_\beta) \to (\exists\, \beta < \alpha)\ (x \subset V_\beta) \to x \subset V_\alpha.$$

Кроме того, $V_\alpha$ есть множество как объединение множества множеств.

(2) Транзитивность $V_\alpha$ уже установлена в (1). Поэтому достаточно показать, что $V_\beta \in V_\alpha$ $(\beta < \alpha)$. Проведем трансфинитную индукцию по $\alpha$. При $\alpha = 1$ доказывать нечего. Пусть $\alpha > 1$ и $V_\beta \in V_\alpha$ для всех $\beta < \alpha$. Неравенство $\beta < \alpha + 1$ выполняется лишь тогда, когда $\alpha = \beta$ или $\beta < \alpha$. Если $\alpha = \beta$, то

$$V_\beta = V_\alpha \in \mathscr{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}.$$

Если же $\beta < \alpha$, то по индукционному предположению $V_\beta \in V_\alpha$, а по (1) $V_\alpha \subset V_{\alpha+1}$, следовательно, $V_\beta \in V_{\alpha+1}$. Осталось заметить, что для предельного ординала $\alpha \in K_{\mathrm{II}}$ при $\beta < \alpha$ всегда верно $V_\beta \in V_\alpha$, так как

$$V_\beta \in V_{\beta+1} \subset \bigcup_{\gamma<\alpha} V_\gamma = V_\alpha.$$

(3) Нетрудно понять, что $\alpha = \mathrm{rank}(x)$ тогда и только тогда, когда $x \in V_{\alpha+1}$ и $x \notin V_\alpha$. Поэтому если $x \in y$, то $y \not\subset V_\alpha$ и тем самым $y \notin V_{\alpha+1}$. По определению $\mathrm{rank}(y) > \alpha$.

(4), (5) Вновь привлекаем трансфинитную индукцию.

При $\alpha = 0$ имеем $0 \in V_0 \subset \mathbb{V}$ и $\mathrm{rank}(0) = 0$, ибо $0 \notin V_0$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{V}$ и $\mathrm{rank}(\alpha) = \alpha$. Тогда $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} \subset V_{\alpha+1}$ или $\alpha + 1 \in \mathscr{P}(V_{\alpha+1}) = V_{\alpha+2}$. С другой стороны, если $\alpha + 1 \in V_{\alpha+1}$, то $\alpha \cup \{\alpha\} \subset V_\alpha$ и получаем противоречие: $\alpha \in V_\alpha$. Значит, $\alpha + 1 \notin V_{\alpha+1}$, а потому $\mathrm{rank}(\alpha+1) = \alpha+1$. Допустим, что $\alpha \in K_{\mathrm{II}}$ и для всех $\beta < \alpha$ имеем $\beta \in \mathbb{V}$ и $\mathrm{rank}(\beta) = \beta$. Тогда

$$\alpha = \{\beta \in \mathrm{On} : \beta < \alpha\} \subset \bigcup_{\beta<\alpha} V_{\beta+1} \subset V_\alpha,$$

откуда выводим: $\alpha \in V_{\alpha+1}$. Кроме того, соотношение $\alpha \in V_\alpha$ влечет, что $\alpha \in V_\beta$ для некоторого $\beta < \alpha$. Привлекая (3) и индукционное предположение, мы немедленно приходим к противоречию:

$$\beta = \mathrm{rank}(\beta) < \mathrm{rank}(\alpha) < \beta.$$

(6) Положим $\alpha := \sup\{\mathrm{rank}(y) : y \in x\}$. Понятно, что $x \subset V_{\alpha+1}$ и $x \in V_{\alpha+2} \subset \mathbb{V}$. $\triangleright$

**1.5.6. *Теорема.*** *Аксиома фундирования* $\mathrm{NGB}_{14}$ *равносильна равенству* $\mathbb{U} = \mathbb{V}$, *т. е. совпадению универсального класса с универсумом фон Неймана.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathbb{U} = \mathbb{V}$ и возьмем непустой класс $X$. Существует элемент $x \in X$, имеющий наименьший ранг $\alpha$, т. е. $\mathrm{rank}(x) = \alpha$ и $\mathrm{rank}(x) \le \mathrm{rank}(y)$ для всех $y \in X$. Если $u \in x \cap X$, то в силу 1.5.5 (3) $\mathrm{rank}(u) < \alpha = \mathrm{rank}(x)$, но это противоречит определению $\alpha$. Стало быть, $x \cap X = 0$.

Докажем теперь, что $\mathbb{V} \ne \mathbb{U}$ противоречит аксиоме фундирования. Действительно, применив эту аксиому к непустому классу $\mathbb{U} - \mathbb{V}$, найдем множество $y \in \mathbb{U} - \mathbb{V}$, для которого $y \cap (\mathbb{U} - \mathbb{V}) = 0$. Последнее соотношение дает $y \subset \mathbb{V}$, а из 1.5.5 (6) выводим $y \in \mathbb{V}$. Это противоречит выбору $y$. $\triangleright$

**1.5.7. *Теорема.*** *Справедливы следующие утверждения:*

**(1)** *(*$\in$-индукция*): если класс $X$ таков, что для всякого множества $x$ из $x \subset X$ вытекает $x \in X$, то $X = \mathbb{V}$;*

**(2)** *(*$\in$-рекурсия*): если $G$ — однозначный класс, то существует единственная функция $F$, определенная на всем $\mathbb{V}$, для которой $F(x) = G(\mathrm{im}(F \upharpoonright x))$ при $x \in \mathbb{V}$;*

**(3)** *индукция по рангу: если для класса $X$ и каждого множества $x$ из $\{y \in \mathbb{V} : \mathrm{rank}(y) < \mathrm{rank}(x)\} \subset X$ следует, что $x \in X$, то $X = \mathbb{V}$.*

$\triangleleft$ Как установлено в 1.5.6, универсум $\mathbb{V}$ совпадает с классом всех множеств $\mathbb{U}$. Поэтому требуемые утверждения вытекают непосредственно из 1.4.11 при условии, что отношения $\in := \{(x, y) \in \mathbb{V}^2 : x \in y\}$ и $R := \{(x, y) \in \mathbb{V}^2 : \mathrm{rank}(x) \le \mathrm{rank}(y)\}$ вполне фундированы. Для $\in$ нужное свойство следует из аксиомы фундирования (см. 1.4.10). Возьмем теперь такую последовательность $(x_n)_{n \in \omega}$ множеств $x_n \in \mathbb{V}$, что $x_{n+1} \in R(x_n)$ $(n \in \omega)$. Тогда последовательность ординалов $\alpha_n := \mathrm{rank}(x_n)$ удовлетворяет условию $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ $(n \in \omega)$ из-за 1.5.5 (3). Это противоречит тому, что класс On вполне упорядочен. Следовательно, $R$ вполне фундированно. $\triangleright$

**1.5.8.** Пусть $\sim$ является отношением эквивалентности на классе $W$. Совокупность всех элементов $W$, эквивалентных данному $x \in W$, образует, вообще говоря, собственный класс, что и препятствует образованию фактор-класса. Эта трудность преодолевается с помощью следующей теоремы.

***Теорема Фреге — Рассела — Скотта.*** *Существует функция* $F : W \to \mathbb{V}$ *такая, что при всех* $x, y \in W$ *выполняется*

$$F(x) = F(y) \leftrightarrow x{\sim}y.$$

$\lhd$ По теореме 1.3.14 существует класс $F$, для которого при всех $x, y \in W$ будет

$$(x, y) \in F \leftrightarrow \varphi(x, y, W, \sim, \mathrm{rank}),$$

где предикативная формула $\varphi$ имеет вид

$$(\forall\, z)\,(z \in y \leftrightarrow z \in W \wedge x{\sim}\, z \wedge (\forall\, u)(x{\sim}u \to \mathrm{rank}(z) \leq \mathrm{rank}(u))).$$

Таким образом, $F$ — функция и $y = F(x)$ — это класс множеств $z$, эквивалентных $x$ и имеющих наименьший ординальный ранг среди всех таких множеств. Если $\alpha = \mathrm{rank}(x)$, то $F(x) \subset W \cap V_{\alpha+1}$, поэтому $F(x)$ — множество. Кроме того, $\mathrm{dom}(F) = W$ и для любых $x, y \in W$ будет $x{\sim}y \leftrightarrow F(x) = F(y)$. В самом деле, если $F(x) = F(y)$, то найдется $w \in W$, для которого $x{\sim}w$ и $y{\sim}w$, т. е. $x{\sim}y$. Обратная импликация очевидна. $\rhd$

Из аксиомы области определения $\mathrm{NGB}_{10}$ и из 1.3.13 (1) следует существование класса $\mathrm{im}(F) := \{F(x) : x \in W\}$. Этот класс мы и назовем *фактор-классом* $W$ по отношению эквивалентности $\sim$, т. е. $W/{\sim} := \mathrm{im}(F)$. При этом принято говорить, что $F$ — *канонический фактор-гомоморфизм* или *каноническая проекция*.

**1.5.9.** Пусть $B$ — фиксированное множество, содержащее более одного элемента. Положим $Q := \mathscr{P}^{(B)} : x \mapsto B^x$ $(x \in \mathbb{V})$, где $B^x$ — как обычно, множество всех отображений из $x$ в $B$. Возникающую при этом кумулятивную иерархию (см. 1.5.1, где $x_0 = 0$, $R = I_{\mathbb{V}}$) обозначают символом $(V_\alpha^{(B)})_{\alpha \in \mathrm{On}}$. Понятно, что *$B$-значный универсум*

$$\mathbb{V}^{(B)} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha^{(B)}$$

является подклассом класса $\mathbb{V}$ и состоит из $B$-значных функций, определенных на множествах $B$-значных функций. Стандартная интерпретация символа $\in$ в $\mathbb{V}^{(B)}$ не дает ничего интересного, ибо для $B$-значных функций $u$, $v$ соотношение $u \in v$ верно лишь в тривиальных случаях. Однако иерархии $(V_\alpha)$ и $(V_\alpha^{(B)})$ существенно различны и это обстоятельство может служить основой нестандартных интерпретаций теории множеств в универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$. Подробнее об этом будет идти речь ниже в гл. 2.

**1.5.10.** Для полноты приведем еще одну кумулятивную иерархию. Следующие операции над множествами называют *гёделевыми* (всего их восемь): образование неупорядоченной пары, теоретико-множественной разности, декартова произведения; $(2,3,1)$-, $(3,2,1)$- и $(1,3,2)$-транспонирование (см. 1.3.10), а также $X \mapsto X^2 \cap \in$ и $X \mapsto \operatorname{dom}(X)$. Для любого множества (множеств) $X$ замыкание $\mathrm{cl}_G(X)$ есть наименьшее множество, содержащее $X$ и замкнутое относительно гёделевых операций. Положим теперь $Q(x) := \mathscr{P}(X) \cap \mathrm{cl}_G(x \cup \{x\})$. Возникающую при этом иерархию называют *конструктивной иерархией* и обозначают $(L_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{On}}$. Конструктивный универсум — это класс $\mathbb{L} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} L_\alpha$; элементы $\mathbb{L}$ — конструктивные множества. Подробности см. в [36, 93].

**1.5.11.** Примечания.

**(1)** Кумулятивная иерархия $(V_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{On}}$ была впервые рассмотрена Дж. фон Нейманом. Релятивизация аксиомы фундирования к классу $\mathbb{V}$ доказуема в NGB–$\{\mathrm{NGB}_{14}\}$. Из этого факта вытекает совместимость $\mathrm{NGB}_{14}$ с остальными аксиомами NGB. Другими средствами показывается, что $\neg\, \mathrm{NGB}_{14}$ также совместима с прочими аксиомами NGB, т. е. $\mathrm{NGB}_{14}$ — независимая аксиома.

**(2)** Если $B$ — полная гейтингова решетка (см. 1.1.8 (3)), то универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ можно превратить в модель интуиционистской теории множеств, используя структуру $B$ и иерархию $(V_\alpha^{(B)})$. В частности, если $B$ — полная булева алгебра, то возникает булевозначная модель теории множеств. Подробнее об этом см. в 2.1.10 (3).

**(3)** Если $B := [0,1]$ — отрезок чисел вещественной прямой, заключенных между нулем и единицей, то класс $\mathbb{V}^{(B)}$ естественно назвать *универсумом нечетких множеств* [35] (см. также [185, 260, 261]). Этот универсум может служить моделью для некоторой теории множеств с подходящей многозначной логикой и составить известную базу для изучения нечетких множеств.

**(4)** Конструктивный универсум $\mathbb{L}$ является наименьшей транзитивной моделью ZF, содержащей все ординалы. Класс $\mathbb{L}$ удовлетворяет аксиоме выбора и обобщенной гипотезе континуума. Таким образом, AC и GCH совместимы с ZF. Утверждение о том, что все множества конструктивны, называют *аксиомой конструктивности* и записывают в виде $\mathbb{V} = \mathbb{L}$. Релятивизация формулы $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ к классу $\mathbb{L}$ доказуема в ZF. Значит, аксиома $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ совместима с ZF. Все эти результаты, а также определение конструктивных множеств

принадлежит К. Гёделю [19] (см. также [36, 93]). Соответствующие утверждения о совместимости аксиомы выбора и GCH верны и для NGB (см. [36, 52, 91, 93]).

**(5)** В [241] показано, что если $B$ представляет собою квантовую логику (см. 1.1.8 (5)), то универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ служит моделью для определенной квантовой теории множеств в смысле, аналогичном указанному ниже в 2.4. Изучение квантовых теорий как логических систем, построение квантовой теории множеств и развитие соответствующей квантовой математики — интересная и актуальная проблематика, но в этом направлении сделано немного. Адекватные математические средства и правильные ориентиры намечаются, возможно, в теории алгебр фон Неймана и выросших из нее различных «некоммутативных» направлений (некоммутативная теория вероятностей, некоммутативное интегрирование и т. п.).

# Глава 2

# Булевозначные универсумы

Общей чертой различных нестандартных методов анализа является привлечение специальных весьма нетрадиционных моделей теории множеств. Аппарат булевозначного анализа базируется на свойствах некоторой кумулятивной иерархии $\mathbb{V}^{(B)}$, очередной слой которой составляют функции, отправляющиеся из предыдущих слоев и прибывающие в наперед выбранную полную булеву алгебру $B$. Построение этой иерархии — булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ — и изучение общих свойств $\mathbb{V}^{(B)}$ служат главными темами текущей главы. Идея, заложенная в конструкцию булевозначного универсума, проста. Заметим, что вместо множества можно предъявить его характеристическую функцию. Путешествуя по этажам универсума фон Неймана и осуществляя последовательные замены, мы приходим к иерархии, составленной только из двузначных функций. Замена 2 на произвольную булеву алгебру $B$ и повторение процесса приводят к искомому $\mathbb{V}^{(B)}$.

Наиболее тонкие моменты, заслуживающие особого внимания, состоят в точном разъяснении того смысла, в котором $\mathbb{V}^{(B)}$ можно рассматривать в качестве модели теории множеств. Мы подробно излагаем процедуру определения и способы нахождения оценок истинности теоретико-множественных формул. Столь же большое внимание уделено освещению основных технических приемов, составляющих фундамент булевозначного анализа, — принципов переноса, перемешивания и максимума.

Соображения логической строгости и возможно более полной независимости изложения заставили нас уделить много места по-

строению отделимого универсума и интерпретации NGB в $\mathbb{V}^{(B)}$. При первом чтении с этими более специальными фрагментами читатель, интересующийся лишь содержательными приложениями к анализу, может познакомиться достаточно бегло.

### 2.1. Универсум над булевой алгеброй

В этом разделе определяется булевозначный универсум, строятся булевы оценки истинности теоретико-множественных формул и сообщаются соответствующие простейшие факты.

**2.1.1.** Начнем с неформальных наводящих соображений, после знакомства с которыми конструкции булевозначного универсума и булевых оценок истинности, возможно, покажутся естественными. Пусть $2 := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ — обычная двухэлементная булева алгебра. Возьмем произвольное множество $x \in \mathbb{V}$ и свяжем с ним какую-либо (характеристическую) функцию $\chi_x$ со значениями в $2$, определяемую (вообще говоря, неоднозначно) теми условиями, что $x \subset \operatorname{dom}(\chi_x)$ и $\chi_x(t) = \mathbb{1}$ в том и только в том случае, когда $t \in x$. Понятно, что имеются веские основания отождествить $x$ с любой такой функцией $\chi_x$. Для того чтобы элементы области определения $\operatorname{dom}(\chi_x)$ двузначной функции $\chi_x$ также оказались двузначными функциями, следовало, конечно, предварительно на этаже $V_\beta$, $\beta < \operatorname{rank}(x)$, в котором располагается $\operatorname{dom}(\chi_x)$, все элементы заменить подходящими характеристическими функциями. Если же хочется обслужить в этом смысле весь мир множеств, т. е. универсум $\mathbb{V}$, то следует начинать с нулевого этажа $\varnothing$. Формализуя эти наблюдения, мы приходим к понятию *2-значного универсума*

$$\mathbb{V}^{(2)} := \{x : (\exists\, \alpha \in \mathrm{On})\ (x \in V_\alpha^{(2)})\},$$

где $V_0^{(2)} := \varnothing$, $V_1^{(2)} := \{\varnothing\}$, $V_2^{(2)} := \{\{\varnothing\}, (\{\varnothing\}, \mathbb{1})\}$ и т. д. Точнее, по аналогии с $\mathbb{V}$ определяем по $\in$-рекурсии кумулятивную иерархию

$$V_\alpha^{(2)} := \{x : \mathrm{Fnc}\,(x) \wedge \operatorname{im}(x) \subset 2 \wedge (\exists\, \beta < \alpha)(\operatorname{dom}(x) \in V_\beta^{(2)})\}.$$

Ясно, что $\mathbb{V}^{(2)}$ состоит из двузначных функций, причем с каждым элементом $x \in \mathbb{V}^{(2)}$ связано множество $\bar{x} := \{y \in \mathbb{V}^{(2)} : x(y) = \mathbb{1}\}$. Правда, разным элементам $\mathbb{V}^{(2)}$ может соответствовать одно и то же

множество. Поэтому отождествим те функции $x$ и $y \in \mathbb{V}^{(2)}$, для которых $\bar{x} = \bar{y}$, не обращая внимания на формальные трудности и препоны, неминуемо встречающиеся на этом пути. Возьмем произвольные $x, y \in \mathbb{V}^{(2)}$. В силу произведенного выше отождествления равенство $x = y$ верно в том и только в том случае, если $\bar{x} = \bar{y}$. Формулу же $x \in y$ естественно считать истинной лишь в том случае, когда $\bar{x} \in \bar{y}$. Положим $[\![x = y]\!] := \mathbb{1}$, $[\![x \in y]\!] := \mathbb{1}$ в случае истинности формул $x = y$, $x \in y$, и пусть $[\![x = y]\!] := \mathbb{0}$, $[\![x \in y]\!] := \mathbb{0}$ в противном случае. Тогда справедливы представления:

$$[\![x \in y]\!] = \bigvee_{t \in \mathrm{dom}(y)} y(t) \wedge [\![t = x]\!],$$

$$[\![x = y]\!] = \bigvee_{t \in \mathrm{dom}(x)} x(t) \Rightarrow [\![t \in y]\!] \wedge \bigvee_{t \in \mathrm{dom}(y)} y(t) \Rightarrow [\![t \in x]\!].$$

Полезно сравнить эти формулы со следующими предложениями теории множеств:

$$u \in v \leftrightarrow (\exists\, w)(w \in v \wedge w = u),$$
$$u = v \leftrightarrow (\forall\, w)(w \in u \to w \in v) \wedge (w \in v \to w \in u).$$

**2.1.2.** Пусть $B$ — фиксированная полная булева алгебра, являющаяся элементом универсума фон Неймана $\mathbb{V}$. Булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ возникает как предел кумулятивной иерархии (1.5.1), если $x_0 := 0$, $R := I_{\mathbb{V}}$, а $Q$ определяется формулой

$$y \in Q(x) \leftrightarrow \mathrm{Fnc}\,(y) \wedge \mathrm{dom}(y) \subset x \wedge \mathrm{im}(y) \subset B.$$

Таким образом, иерархия $(V_\alpha^{(B)})_{\alpha \in \mathrm{On}}$ имеет вид

$$V_0^{(B)} := 0,$$
$$V_{\alpha+1}^{(B)} := \{y : \mathrm{Fnc}\,(y) \wedge \mathrm{dom}(y) \subset V_\alpha^{(B)} \wedge \mathrm{im}(y) \subset B\},$$
$$V_\alpha^{(B)} := \bigcup \{V_\beta^{(B)} : \beta < \alpha\} \quad (\alpha \in K_{\mathrm{II}}).$$

По определению

$$\mathbb{V}^{(B)} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha^{(B)}.$$

Учитывая, что пустое множество — это функция с пустой областью определения, выпишем первый и второй этажи булевозначного универсума: $V_1^{(B)} = \{0\}$, $V_2^{(B)} = \{0\} \cup \{(0, b) : b \in B\}$. Ординальный ранг элемента $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ обозначим символом $\rho(x)$.

**2.1.3.** Поскольку отношение $y \in \operatorname{dom}(x)$ вполне фундированно, то из 1.4.11 (1) вытекает следующий *принцип индукции* для $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$(\forall\, x \in \mathbb{V}^{(B)})((\forall\, y \in \operatorname{dom}(x))\varphi(y) \to \varphi(x)) \to (\forall\, x \in \mathbb{V}^{(B)})\varphi(x),$$

где $\varphi$ — произвольная формула ZFC.

**2.1.4.** Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы приписать оценку истинности каждой формуле ZFC, свободные переменные которой заменены элементами $\mathbb{V}^{(B)}$. Такая оценка должна быть элементом $B$ и обладать тем свойством, что теоремы ZFC станут «истинными» в $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. получат наибольшую оценку истинности — единицу.

Прежде всего, введем оценку истинности для атомных формул $x \in y$ и $x = y$. Это делается с помощью двух класс-функций $[\![\,\cdot \in \cdot\,]\!]$ и $[\![\,\cdot = \cdot\,]\!]$ из $\mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$ в $B$.

Для произвольных $x, y \in \mathbb{V}^{(B)}$ положим

**(1)** $[\![x \in y]\!] := \bigvee\limits_{z \in \operatorname{dom}(y)} y(z) \wedge [\![z = x]\!]$,

**(2)** $[\![x = y]\!] := \bigwedge\limits_{z \in \operatorname{dom}(x)} y(z) \Rightarrow [\![z \in y]\!] \wedge \bigwedge\limits_{z \in \operatorname{dom}(y)} y(z) \Rightarrow [\![z \in x]\!]$.

Используя эти формулы и наделяя $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ канонической структурой вполне упорядоченного класса, рекурсией по $(\rho(x), \rho(y))$ (см. 1.4.15) можно определить функции $[\![\,\cdot \in \cdot\,]\!]$ и $[\![\,\cdot = \cdot\,]\!]$. В самом деле, на нулевом уровне при $(\rho(x),\, \rho(y)) = (0, 0)$ имеем (см. 1.1.1)

$$[\![0 \in 0]\!] = \bigvee \varnothing = \mathbb{0}_B, \quad [\![0 = 0]\!] = \bigwedge \varnothing = \mathbb{1}_B.$$

Кроме того, при $z \in \operatorname{dom}(y)$ (или $z \in \operatorname{dom}(x)$) будет $(\rho(x), \rho(z)) < (\rho(x),\, \rho(y))$ (соответственно $(\rho(z),\, \rho(y)) < (\rho(x),\, \rho(y))$).

Можно пойти по другому пути и воспользоваться трансфинитной рекурсией 1.4.9. Именно, если при всех $u, v \in V_\alpha^{(B)}$ значения $[\![u \in v]\!]$ и $[\![u = v]\!]$ определены, то для $x, y \in V_{\alpha+1}^{(B)}$ можно вычислить

$$[\![x = y]\!] = \bigwedge_{u \in \operatorname{dom}(x)} \Bigg( x(u) \Rightarrow \bigvee_{v \in \operatorname{dom}(y)} y(v) \wedge [\![u = v]\!] \Bigg) \wedge$$
$$\wedge \bigwedge_{v \in \operatorname{dom}(y)} \Bigg( y(v) \Rightarrow \bigvee_{u \in \operatorname{dom}(x)} x(u) \wedge [\![u = v]\!] \Bigg),$$

так как $\mathrm{dom}(x) \subset V_\alpha^{(B)}$ и $\mathrm{dom}(y) \subset V_\alpha^{(B)}$. Теперь уже известны значения $[\![x = z]\!]$ для всех $z \in \mathrm{dom}(y)$. Поэтому можно вычислить

$$[\![x \in y]\!] = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(y)} y(z) \wedge [\![z = x]\!].$$

Случай предельного ординала $\alpha$ не вызывает затруднений.

**2.1.5.** Рассмотрим подробнее обоснование рекурсивного определения 2.1.4. Для $k := 1, 2, 3, 4$ положим

$$\pi_x^k(u, v) := \bigvee \{b \in B : (\exists\, c_1, c_2, c_3, c_4 \in B)((u, v, c_1, c_2, c_3, c_4) \in \\ \in x \wedge c_k = b)\}.$$

Пусть $\pi_1$ и $\pi_2$ — функции, сопоставляющие каждой упорядоченной шестерке $(u, v, c_1, c_2, c_3, c_4)$ соответственно первую и вторую компоненты $u$ и $v$. В этих обозначениях опишем некоторый однозначный класс $Q$. Для произвольного $x \in \mathbb{V}$ множество $Q(x)$ состоит из всевозможных шестерок $(u, v, c_1, c_2, c_3, c_4)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered}
\mathrm{Fnc}\,(u), \quad \mathrm{Fnc}\,(v), \quad \mathrm{im}(u) \cup \mathrm{im}(v) \subset B, \\
\mathrm{dom}(u) \subset \pi_1``x, \quad \mathrm{dom}(v) \subset \pi_2``x; \\
b_1 = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(v)} v(z) \wedge \pi_x^3(u, z), \\
b_2 = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(u)} u(z) \wedge \pi_x^4(v, z), \\
b_3 = b_4 = \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(u)} u(z) \Rightarrow \pi_x^1(z, v) \wedge \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(v)} v(z) \Rightarrow \pi_x^2(u, z).
\end{gathered}$$

Согласно 1.5.1 существует кумулятивная иерархия $(F(\alpha))_{\alpha \in \mathrm{On}}$, для которой

$$\begin{gathered}
F(0) = (0, 0, \mathbb{0}_B, \mathbb{0}_B, \mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B), \\
F(\alpha + 1) = Q(F(\alpha)) \quad (\alpha \in \mathrm{On}), \\
F(\alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} F(\beta) \quad (\alpha \in K_{\mathrm{II}}).
\end{gathered}$$

Легко заметить, что класс $X := \operatorname{im}(F)$ — это функция, причем $\operatorname{im}(X) \subset B^4$ и $\operatorname{dom}(X) = \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$. Если $P_k : B^4 \to B$ символизирует $k$-ю проекцию, то полагаем по определению

$$[\![ \cdot \in \cdot ]\!] := P_1 \circ X, \quad [\![ \cdot = \cdot ]\!] := P_3 \circ X.$$

**2.1.6.** Опишем теперь способ осмысления всякой формулы теории множеств как утверждения об элементах булевозначного универсума. Мы намерены тем самым интерпретировать классическую теорию множеств в универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$ с помощью рассмотренных в 2.1.4 функций $[\![ \cdot \in \cdot ]\!]$ и $[\![ \cdot = \cdot ]\!]$.

Прежде всего, мы определим *интерпретационный класс* $I$ как совокупность всех отображений из множества символов переменных языка теории множеств в универсум $\mathbb{V}^{(B)}$.

*Интерпретацией переменной* $x$ мы будем назвать отображение вычисления $\bar{x}$, сопоставляющее каждому $\nu \in I$ элемент $\bar{x}(\nu) := \nu(x)$.

В качестве интерпретаций формул $x \in y$ и $x = y$ возьмем функции $\nu \mapsto [\![\bar{x}(\nu) \in \bar{y}(\nu)]\!]$, $\nu \mapsto [\![\bar{x}(\nu) = \bar{y}(\nu)]\!]$ $(\nu \in I)$. Теперь для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ с $n$ свободными переменными определим интерпретацию $\nu \mapsto [\![\varphi(\bar{x}_1(\nu), \dots, \bar{x}_n(\nu))]\!]$ индукцией по длине формулы $\varphi$ следующими правилами:

$$\begin{gathered}
[\![\varphi(x) \wedge \psi(y)]\!] : \nu \mapsto [\![\varphi(\bar{x}(\nu))]\!] \wedge [\![\psi(\bar{y}(\nu))]\!], \\
[\![\varphi(x) \vee \psi(y)]\!] : \nu \mapsto [\![\varphi(\bar{x}(\nu))]\!] \vee [\![\psi(\bar{y}(\nu))]\!], \\
[\![\neg\varphi(x)]\!] : \nu \mapsto [\![\varphi(\bar{x}(\nu))]\!]^*, \\
[\![\varphi(x) \to \psi(y)]\!] : \nu \mapsto [\![\varphi(\bar{x}(\nu))]\!] \Rightarrow [\![\psi(\bar{y}(\nu))]\!], \\
[\![(\forall\, t)\varphi(t, x)]\!] : \nu \mapsto \bigwedge\{[\![\varphi(\bar{t}(\nu'), \bar{x}(\nu'))]\!] : \nu' \in I_\nu(x)\}, \\
[\![(\exists\, t)\varphi(t, x)]\!] : \nu \mapsto \bigvee\{[\![\varphi(\bar{t}(\nu'), \bar{x}(\nu'))]\!] : \nu' \in I_\nu(x)\},
\end{gathered}$$

где $x := (x_1, \dots, x_n)$, $y := (y_1, \dots, y_m)$, $\bar{x}(\nu) := (\bar{x}_1(\nu), \dots, \bar{x}_n(\nu))$, $\bar{y}(\nu) := (\bar{y}_1(\nu), \dots, \bar{y}_m(\nu))$, $I_\nu(x) := \{\nu' \in I : \nu(x) = \nu'(x)\}$, причем все свободные переменные формул $\varphi$ и $\psi$ содержатся среди $t, x_1, \dots, x_n$ и $t, y_1, \dots, y_m$ соответственно.

Заметим, что $[\![\varphi(\bar{x}(\nu))]\!]$ зависит только от значений $\bar{x}_k(\nu) = \nu(x_k)$ $(k := 1, \dots, n)$, поэтому мы пишем $[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]$ вместо $[\![\varphi(\bar{x}(\nu))]\!] = [\![\varphi(\bar{x}_1(\nu), \dots, \bar{x}_n(\nu))]\!]$, если $u_k := \bar{x}_k(\nu) \in \mathbb{V}^{(B)}$ $(k := 1, \dots, n)$. Величина $[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]$ — это булева *оценка истинности* формулы $\varphi(u_1, \dots, u_n)$.

Если $\varphi := \varphi(x_1, \dots, x_n)$ — формула и $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^{(B)}$, то полагают по определению

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(u_1, \dots, u_n) \leftrightarrow [\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] = \mathbb{1}_B.$$

В этой ситуации говорят, что $\varphi$ *истинна внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *при заданных значениях* $u_1, \dots, u_n$ *переменных* $x_1, \dots, x_n$ или просто: утверждение $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ *справедливо в* $\mathbb{V}^{(B)}$.

Иногда мы прибегаем к формуле $\varphi$, выраженной в естественном языке, — это обстоятельство отмечается кавычками: $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\varphi$». Отметим также, что *знак удовлетворения* $\models$ приводит к употреблению теоретико-модельных выражений типа «$\mathbb{V}^{(B)}$ — это *булевозначная модель* для $\varphi$» вместо $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi$ и т. п.

**2.1.7.** Введенное понятие интерпретации позволяет судить об элементах $\mathbb{V}^{(B)}$. Однако зачастую более удобным для этой цели оказывается несколько иной язык, называемый *B-языком.* Этот язык получается присоединением к алфавиту языка теории множеств по одному символу константы для каждого элемента из $\mathbb{V}^{(B)}$. При этом, как обычно, элементы из $\mathbb{V}^{(B)}$ отождествляются с соответствующими символами констант. Формулы и высказывания $B$-языка назовем *B-формулами* и *B-высказываниями.* Тогда всякая $B$-формула ($B$-высказывание) получается из некоторой формулы теории множеств путем задания значений из $\mathbb{V}^{(B)}$ для некоторых (соответственно для всех) свободных переменных.

Посмотрим теперь, как упрощаются определения булевых оценок истинности из 2.1.6 при использовании $B$-языка. Именно, булеву оценку истинности любого $B$-высказывания можно получить, полагая

$$\begin{gathered}
[\![\sigma \wedge \tau]\!] := [\![\sigma]\!] \wedge [\![\tau]\!], \\
[\![\sigma \vee \tau]\!] := [\![\sigma]\!] \vee [\![\tau]\!], \\
[\![\neg\sigma]\!] := [\![\sigma]\!]^*, \\
[\![\sigma \to \tau]\!] := [\![\sigma]\!] \Rightarrow [\![\tau]\!], \\
[\![(\forall\, x)\varphi(x)]\!] := \bigwedge \{[\![\varphi(u)]\!] : u \in \mathbb{V}^{(B)}\}, \\
[\![(\exists\, x)\varphi(x)]\!] := \bigvee \{[\![\varphi(u)]\!] : u \in \mathbb{V}^{(B)}\},
\end{gathered}$$

где $\sigma$ и $\tau$ — произвольные $B$-высказывания, а $\varphi$ — какая-либо $B$-формула с одной свободной переменной $x$.

Говорят, что $B$-высказывание $\sigma$ *истинно в* (*внутри*) $\mathbb{V}^{(B)}$, и пишут $\mathbb{V}^{(B)} \models \sigma$, если $[\![\sigma]\!] = \mathbb{1}_B$.

В дальнейшем без специальных оговорок мы используем оба языковых средства 2.1.6 и 2.1.7. При этом удобно употреблять одни и те же буквы при обозначении как переменных, так и элементов универсума $\mathbb{V}^{(B)}$. Если одновременно рассматриваются несколько булевых алгебр $B, C, \ldots$ и есть потребность детализации, то наряду с $[\![\varphi]\!]$ мы будем писать $[\![\varphi]\!]^B$, $[\![\varphi]\!]^C$ и т. д.

**2.1.8. *Теорема.*** *Если формула $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ доказуема в исчислении предикатов, то $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{V}^{(B)}$. В частности, для $x, y, z \in \mathbb{V}^{(B)}$ справедливы соотношения:*

**(1)** $[\![x = x]\!] = \mathbb{1}$;

**(2)** $x(y) \leq [\![y \in x]\!]$ *для всех* $y \in \operatorname{dom}(x)$;

**(3)** $[\![x = y]\!] = [\![y = x]\!]$;

**(4)** $[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leq [\![x = z]\!]$;

**(5)** $[\![x \in y]\!] \wedge [\![x = z]\!] \leq [\![z \in y]\!]$;

**(6)** $[\![y \in x]\!] \wedge [\![x = z]\!] \leq [\![y \in z]\!]$;

**(7)** $[\![x = y]\!] \wedge [\![\varphi(x)]\!] \leq [\![\varphi(y)]\!]$ *для любой $B$-формулы $\varphi$.*

$\lhd$ Легко проверяется, что аксиомы исчисления предикатов истинны внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а правила вывода истинность увеличивают. Точнее, если формула $\varphi$ выводима в исчислении предикатов из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, то $[\![\varphi_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![\varphi_n]\!] \leq [\![\varphi]\!]$.

Покажем теперь справедливость (1)–(7).

(1) Это свойство устанавливается индукцией по вполне фундированному отношению $y \in \operatorname{dom}(x)$. Предположим, что $[\![y = y]\!] = \mathbb{1}$ при всех $y \in \operatorname{dom}(x)$. Тогда по 2.1.4 (1)

$$[\![y \in x]\!] = \bigvee_{t \in \operatorname{dom}(x)} x(t) \wedge [\![t = y]\!] \geq x(y) \wedge [\![y = y]\!] \geq x(y),$$

следовательно, из-за 1.1.4 (4) верно

$$[\![x = x]\!] = \bigwedge_{y \in \operatorname{dom}(x)} x(y) \Rightarrow [\![y \in x]\!] = \mathbb{1}.$$

(2) Учитывая 2.1.4 (1) и доказанное в (1), при $y \in \operatorname{dom}(x)$ оцениваем

$$[\![y \in x]\!] \geq x(y) \wedge [\![y = y]\!] = x(y).$$

(3) Вытекает того, что выражение в 2.1.4 (2), задающее булевозначную оценку истинности равенств, симметрично.

Утверждения (4)–(6) устанавливаются одновременной индукцией. Пусть $\rho(x, y, z) := (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{On}^3$ такая перестановка тройки ординалов $\rho(x)$, $\rho(y)$ и $\rho(z)$, что $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. (Естественно, мы наделяем $\mathrm{On}^3$ канонической структурой вполне упорядоченного класса 1.4.15.) Допустим, что $x, y, z \in \mathbb{V}^{(B)}$ и для всех $u, v, w \in \mathbb{V}^{(B)}$ при $\rho(u, v, w) < \rho(x, y, z)$ выполнены неравенства (4)–(6). Индукционный шаг осуществим для каждого случая раздельно.

(4) Пусть $t \in \operatorname{dom}(x)$. Поскольку $[\![x = y]\!] \leq x(t) \Rightarrow [\![t \in y]\!]$, то согласно 1.1.4 (3)

$$x(t) \wedge [\![x = y]\!] \leq [\![t \in y]\!],$$
$$x(t) \wedge [\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leq [\![t \in y]\!] \wedge [\![y = z]\!].$$

Заметив, что $\rho(t, y, z) < \rho(x, y, z)$, и применив индукционное предположение для (6), получим

$$[\![t \in y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leq [\![t \in z]\!],$$
$$x(t) \wedge [\![y = x]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leq [\![t \in z]\!].$$

Воспользуемся вновь соотношением 1.1.4 (3). Тогда

$$[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leq x(t) \Rightarrow [\![t \in z]\!],$$

следовательно,

$$[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leq \bigwedge_{t \in \operatorname{dom}(x)} x(t) \Rightarrow [\![t \in z]\!].$$

Аналогично,

$$[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leq \bigwedge_{t \in \operatorname{dom}(z)} z(t) \Rightarrow [\![t \in x]\!].$$

В силу 2.1.4 (2) заключаем: $[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leq [\![x = z]\!]$.

(5) Рассмотрим $t \in \operatorname{dom}(y)$. Тогда $\rho(t, x, z) < \rho(x, y, z)$. Значит, по индукционному предположению, для (4) будет

$$y(t) \wedge [\![t = x]\!] \wedge [\![x = z]\!] \leq y(t) \wedge [\![t = z]\!] \leq [\![z \in y]\!].$$

Отсюда ввиду 1.1.5 (2)

$$[\![x = z]\!] \wedge \bigvee_{t \in \operatorname{dom}(y)} y(t) \wedge [\![t = x]\!] \leq [\![z \in y]\!],$$

или $[\![x = z]\!] \wedge [\![x \in y]\!] \leq [\![z \in y]\!]$.

(6) Пусть снова $t \in \operatorname{dom}(x)$. Тогда

$$x(t) \wedge [\![x = z]\!] \leq [\![t \in z]\!],$$
$$[\![t = y]\!] \wedge x(t) \wedge [\![x = z]\!] \leq [\![t = y]\!] \wedge [\![t \in z]\!].$$

На этот раз снова $\rho(t, y, z) < \rho(x, y, z)$. Поэтому по индукционному предположению для (5) и формулы 1.1.5 (2) получаем

$$x(t) \wedge [\![x = z]\!] \wedge [\![t = y]\!] \leq [\![y \in z]\!],$$
$$[\![x = z]\!] \wedge \bigvee_{t \in \operatorname{dom}(x)} x(t) \wedge [\![t = y]\!] \leq [\![y \in z]\!].$$

Итак, $[\![x = z]\!] \wedge [\![y \in x]\!] \leq [\![y \in z]\!]$ согласно 2.1.4 (1).

(7) Доказывается индукцией по длине формулы с учетом уже установленных соотношений. $\triangleright$

В качестве следствия из теоремы 2.1.8 укажем следующие правила вычисления булевых значений истинности формул с ограниченными кванторами.

**2.1.9.** *Для любой $B$-формулы $\varphi$ с одной свободной переменной $x$ и для каждого $u \in \mathbb{V}^{(B)}$ справедливы соотношения*

$$[\![(\exists\, x \in u)\, \varphi(x)]\!] = \bigvee_{v \in \operatorname{dom}(u)} u(v) \wedge [\![\varphi(v)]\!],$$
$$[\![(\forall\, x \in u)\, \varphi(x)]\!] = \bigwedge_{v \in \operatorname{dom}(u)} u(v) \Rightarrow [\![\varphi(v)]\!].$$

$\lhd$ Эти формулы двойственны друг другу, поэтому достаточно доказать одну из них, например, первую. Ввиду 2.1.8 (2) справедливо неравенство

$$[\![(\exists\, x \in u)\, \varphi(x)]\!] \geq \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(u)} u(v) \wedge [\![\varphi(v)]\!].$$

С другой стороны, привлекая 2.1.4 (1) и 2.1.8 (7), получим

$$[\![(\exists\, x \in u)\, \varphi(x)]\!] = \bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(u)} u(v) \wedge [\![t = v]\!] \wedge [\![\varphi(t)]\!] \leq$$
$$\leq \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(u)} u(v) \wedge [\![\varphi(v)]\!]. \ \rhd$$

**2.1.10.** Примечания.

**(1)** Для каждой конкретной формулы теории множеств $\varphi$ при $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $b \in B$ выражение $[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] = b$ снова формула теории множеств. Однако в ZFC закон $\varphi \mapsto [\![\varphi]\!]$ не служит определимым классом, допуская лишь метаязыковое определение.

**(2)** Булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ используют для доказательства относительной совместимости теоретико-множественных утверждений по следующей схеме. Пусть $\mathscr{T}$ и $\mathscr{T}'$ — расширения теории ZF, причем из совместимости ZF следует совместимость $\mathscr{T}'$. Предположим, что можно определить $B$ так, что $\mathscr{T}' \models$ «$B$ — полная булева алгебра» и $\mathscr{T}' \models [\![\varphi]\!]^B = \mathbb{1}$ для каждой аксиомы $\varphi$ теории $\mathscr{T}$. Тогда из совместимости ZF следует совместимость $\mathscr{T}$ (см. [119]).

**(3)** Пусть $\Omega$ — полная гейтингова решетка (см. 1.1.8 (3)). *Псевдодополнение* $b^*$ элемента $b \in \Omega$ вводится формулой $x^* := x \Rightarrow \mathbb{0}$, где $\Rightarrow$ — операция относительного псевдодополнения. Незначительная модификация формул 2.1.4 позволяет определить оценки истинности $[\![\cdot \in \cdot]\!]^\Omega$ и $[\![\cdot = \cdot]\!]^\Omega$, действующие из $\mathbb{V}^{(\Omega)} \times \mathbb{V}^{(\Omega)}$ в $\Omega$. Истинность в $\mathbb{V}^{(\Omega)}$ определяется так же, как и в 2.1.6. При этом в $\mathbb{V}^{(\Omega)}$ оказываются истинными все теоремы интуиционистского исчисления предикатов (см. [144, 148, 245, 246]).

## 2.2. Преобразования булевозначных универсумов

Всякий гомоморфизм булевой алгебры $B$ индуцирует некоторое преобразование универсума $\mathbb{V}^{(B)}$. Изучение таких преобразований

и, в частности, анализ того, как при этом преобразуются булевы оценки истинности формул — тема текущего параграфа.

**2.2.1.** Пусть $\pi$ — гомоморфизм $B$ в полную булеву алгебру $C$. Рекурсией по вполне фундированному отношению $y \in \operatorname{dom}(x)$ определяется отображение $\pi^* : \mathbb{V}^{(B)} \to \mathbb{V}^{(C)}$ такое, что $\operatorname{dom}(\pi^* x) := \{\pi^* y : y \in \operatorname{dom}(x)\}$ и

$$\pi^* x : v \mapsto \bigvee \{\pi(x(z)) : z \in \operatorname{dom}(x), \pi^* z = v\}.$$

*Если гомоморфизм $\pi$ инъективен, то инъективным будет и отображение $\pi^*$. При этом*

$$\pi^* x : \pi^* y \mapsto \pi(x(y)) \quad (y \in \operatorname{dom}(x)).$$

$\lhd$ В самом деле, достаточно установить, что для произвольного ординала $\alpha$ инъективным является сужение $\pi^*$ на $V_\alpha^{(B)}$. Предположим, что это утверждение выполнено для всех $\beta < \alpha$. Пусть $x, y \in V_\alpha^{(B)}$ таковы, что $\pi^* x = \pi^* y$. Заметим, что в этом случае $\pi^* x : \pi^* z \mapsto \pi(x(z))$ $(z \in \operatorname{dom}(x))$ и $\pi^* y : \pi^* z \mapsto \pi(y(z))$ $(z \in \operatorname{dom}(y))$. Тем самым мы приходим к равенству

$$\{(\pi^* z, \pi(x(z))) : z \in \operatorname{dom}(x)\} = \{(\pi^* u, \pi(y(u))) : u \in \operatorname{dom}(y)\}.$$

Поскольку для некоторого $\beta < \alpha$ множества $\operatorname{dom}(x)$ и $\operatorname{dom}(y)$ содержатся в $V_\beta^{(B)}$, то $\pi^*$ инъективен на каждом из этих множеств. Учитывая инъективность $\pi$, получим

$$\{(z, x(z)) : z \in \operatorname{dom}(x)\} = \{(u, y(u)) : u \in \operatorname{dom}(y)\},$$

или, что то же самое, $x = y$. $\rhd$

Гомоморфизм $\pi : B \to C$ называют *полным*, если $\pi\left(\bigvee M\right) = \bigvee \pi(M)$ для каждого множества $M \subset B$. Всюду ниже $\pi$ — полный гомоморфизм из $B$ в полную булеву алгебру $C$.

**2.2.2.** ***Теорема.*** *Справедливы следующие утверждения:*

**(1)** *если $\rho$ — полный гомоморфизм алгебры $C$ в полную булеву алгебру $D$, то $(\rho \circ \pi)^* = \rho^* \circ \pi^*$;*

**(2)** *если гомоморфизм $\pi$ инъективен (сюръективен), то отображение $\pi^*$ инъективно (соответственно, сюръективно);*

**(3)** *при всех $x$ и $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ выполнены равенства*

$$[\![\pi^* x = \pi^* y]\!]^C = \pi([\![x = y]\!]^B),$$
$$[\![\pi^* x \in \pi^* y]\!]^C = \pi([\![x \in y]\!]^B);$$

**(4)** *для любых $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $t \in \mathbb{V}^{(C)}$ справедливо равенство*

$$[\![t \in \pi^* x]\!]^C = \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi([\![u = x]\!]^B) \wedge [\![t \in \pi^* u]\!]^C.$$

$\lhd$ (1) Предположим, что $(\rho \circ \pi)^* y = (\rho^* \circ \pi^*) y$ для всех $y \in \mathrm{dom}(x)$. Тогда для $u := (\rho \circ \pi)^* y$, где $y \in \mathrm{dom}(x)$, последовательно выводим (см. 1.1.5 (9)):

$$((\rho \circ \pi)^* x) u =$$
$$= \bigvee \{(\rho \circ \pi)(x(z)) : z \in \mathrm{dom}(x), (\rho^* \circ \pi^*) z = (\rho^* \circ \pi^*) y\} =$$
$$= \bigvee \Big\{\rho \Big(\bigvee \{\pi(x(z)) : z \in \mathrm{dom}(x), \pi^* z = v\}\Big) : v \in \mathrm{dom}(\pi^* x), \rho^* v =$$
$$= (\rho^* \circ \pi^*) y\Big\} = \bigvee \{\rho((\pi^* x)(v)) : v \in \mathrm{dom}(\pi^* x), \rho^* v = \rho^*(\pi^* y)\} =$$
$$= (\rho^*(\pi^* x))(\rho^*(\pi^* y)) = ((\rho^* \circ \pi^*) x) u.$$

Итак, $(\rho \circ \pi)^* x = \rho^*(\pi^* x)$. Требуемое вытекает теперь из 2.1.3.

(2) Случай инъективного $\pi$ был уже разобран в 2.2.1. Допустим, что $\pi$ — сюръективное отображение. Тогда существуют главный идеал $B_0$ булевой алгебры $B$ и изоморфизм $\rho : C \xrightarrow{\text{на}} B_0$, для которого $\rho^{-1}$ совпадает с сужением $\pi_0$ гомоморфизма $\pi$ на $B_0$. Если $x \in \mathbb{V}^{(C)}$, то согласно (1) $x = I_C^* x = (\pi_0 \circ \rho)^* x = \pi_0^*(\rho^* x) \in \mathrm{im}(\pi_0^*)$. Итак, $\pi_0^*$ отображает $\mathbb{V}^{(B_0)}$ на $\mathbb{V}^{(C)}$. Осталось заметить, что $\mathbb{V}^{(B_0)} \subset \mathbb{V}^{(B)}$ и сужение $\pi^*$ на $\mathbb{V}^{(B_0)}$ совпадает с $\pi_0^*$.

(3) Доказательство проводится индукцией по $(\rho(x), \rho(y))$ при каноническом упорядочении класса $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ (см. 1.4.15).

Предположим, что требуемые формулы выполнены для любых $u$, $v \in \mathbb{V}^{(B)}$ при $(\rho(u), \rho(v)) < (\rho(x), \rho(y))$. Если $z \in \mathrm{dom}(x)$ или

$z \in \operatorname{dom}(y)$, то, очевидно, $\max\{(\rho(z),\rho(x)),(\rho(z),\rho(y))\} < (\rho(x),\rho(y))$. Следовательно, справедливы следующие выкладки (см. 1.1.5 (2, 9)):

$$
\begin{gathered}
[\![\pi^* x \in \pi^* y]\!] = \\
= \bigvee_{t\in\operatorname{dom}(\pi^* y)} (\pi^* y)(t) \wedge [\![t = \pi^* x]\!] = \bigvee_{z\in\operatorname{dom}(y)} (\pi^* y)(\pi^* z) \wedge [\![\pi^* z = \pi^* x]\!] = \\
= \bigvee_{z\in\operatorname{dom}(y)} \Big(\bigvee\{\pi(y(u)) : u\in\operatorname{dom}(y), \pi^* u = \pi^* z\}\Big) \wedge [\![\pi^* z = \pi^* x]\!] = \\
= \bigvee_{z\in\operatorname{dom}(y)} \bigvee\{\pi(y(u)) \wedge [\![\pi^* z = \pi^* x]\!] : u\in\operatorname{dom}(y), \pi^* u = \pi^* z\} = \\
= \bigvee_{u\in\operatorname{dom}(y)} \pi(y(u)) \wedge \pi([\![u = x]\!]) = \pi\Bigg(\bigvee_{u\in\operatorname{dom}(y)} y(u) \wedge [\![u = x]\!]\Bigg) = \\
= \pi([\![x \in y]\!]).
\end{gathered}
$$

Аналогичные вычисления проходят и для булевых оценок истинности равенства (последовательно применяются 2.1.4 (2), 2.2.1, 1.1.5 (10), 2.1.4 (2)):

$$
\begin{gathered}
[\![\pi^* x = \pi^* y]\!] = \\
= \bigwedge_{t\in\operatorname{dom}(\pi^* y)} (\pi^* y)(t) \Rightarrow [\![t \in \pi^* x]\!] \wedge \bigwedge_{t\in\operatorname{dom}(\pi^* x)} (\pi^* x)(t) \Rightarrow [\![t \in \pi^* y]\!] = \\
= \bigwedge_{z\in\operatorname{dom}(y)} (\pi^* y)(\pi^* z) \Rightarrow [\![\pi^* z \in \pi^* x]\!] \wedge \\
\wedge \bigwedge_{z\in\operatorname{dom}(x)} (\pi^* x)(\pi^* z) \Rightarrow [\![\pi^* z \in \pi^* y]\!] = \\
= \bigwedge_{z\in\operatorname{dom}(y)} \bigwedge\{\pi(y(u)) \Rightarrow \pi([\![u \in x]\!]) : u\in\operatorname{dom}(y), \pi^* u = \pi^* z\} \wedge \\
\wedge \bigwedge_{z\in\operatorname{dom}(x)} \bigwedge\{\pi(x(u)) \Rightarrow \pi([\![u \in y]\!]) : u\in\operatorname{dom}(x), \pi^* u = \pi^* z\} = \\
= \bigwedge_{u\in\operatorname{dom}(x)} \pi(x(u) \Rightarrow [\![u \in y]\!]) \wedge \bigwedge_{u\in\operatorname{dom}(y)} \pi(y(u) \Rightarrow [\![u \in x]\!]) = \pi([\![x = y]\!]).
\end{gathered}
$$

(4) В силу (3) и 2.1.8 (4) для $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $t \in \mathbb{V}^{(C)}$ выполнены оценки

$$
\begin{gathered}
[\![t \in \pi^* x]\!] = \\
= \bigvee_{s \in \operatorname{dom}(\pi^* x)} (\pi^* x)(s) \wedge [\![s = t]\!] = \bigvee_{u \in \operatorname{dom}(x)} (\pi^* x)(\pi^* u) \wedge [\![\pi^* u = t]\!] \leq \\
\leq \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi([\![u \in x]\!]) \wedge [\![\pi^* u = t]\!] = \\
= \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\pi^* u \in \pi^* x]\!] \wedge [\![\pi^* u = t]\!] \leq [\![t \in \pi^* x]\!]. \ \rhd
\end{gathered}
$$

**2.2.3. *Теорема.*** *Пусть $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $\pi$ — полный гомоморфизм из $B$ в $C$. Пусть, далее, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — некоторая формула* ZFC. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

**(1)** *если $\varphi$ — формула класса $\Sigma_1$, а гомоморфизм $\pi$ произволен, то*

$$\pi([\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]^B) \leq [\![\varphi(\pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n]\!]^C;$$

**(2)** *если $\varphi$ — ограниченная формула, а $\pi$ произволен, либо если $\pi$ — эпиморфизм, а $\varphi$ — произвольная формула, то*

$$\pi([\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]^B) = [\![\varphi(\pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n)]\!]^C.$$

$\lhd$ Для атомных формул это утверждение обеспечено 2.2.2. Общий случай устанавливается индукцией по длине формулы $\varphi$. При этом нетривиальный индукционный шаг возникает лишь тогда, когда $\varphi$ имеет вид $(\exists\, x)\varphi_0$ или $(\forall\, x)\varphi_0$. Именно здесь необходимы дополнительные предположения о $\varphi$ и $\pi$.

(1) Если на индукционном шаге навешен ограниченный квантор общности, т. е. если $\varphi$ имеет вид $(\forall x \in u)\varphi_0(x, u_1, \dots, u_n)$, то (см. 1.1.5 (3, 10)) проведем следующие выкладки:

$$
\begin{gathered}
[\![\varphi(\pi^* u, \pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n)]\!] = \\
= \bigwedge_{x \in \operatorname{dom}(\pi^* u)} (\pi^* u)(x) \Rightarrow [\![\varphi_0(x, \pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n)]\!] = \\
= \bigwedge_{x \in \operatorname{dom}(u)} (\pi^* u)(\pi^* x) \Rightarrow [\![\varphi_0(\pi^* x, \pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n)]\!] =
\end{gathered}
$$

$$
= \bigwedge_{x\in\mathrm{dom}(u)} \bigwedge\{\pi(u(z)) \Rightarrow [\![\varphi_0(\pi^* x, \pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n)]\!] :
$$

$$
z\in\mathrm{dom}(u), \pi^* z = \pi^* x\} = \bigwedge_{x\in\mathrm{dom}(u)} \pi(u(x) \Rightarrow [\![\varphi_0(x, u_1, \dots, u_n)]\!]) =
$$

$$
= \pi[\![(\forall\, x \in u)\varphi_0(x, u_1, \dots, u_n)]\!] = \pi[\![\varphi(u, u_1, \dots, u_n)]\!].
$$

Далее, для неограниченного квантора существования непосредственно из определений выводим

$$
[\![(\exists\, x)\varphi_0(x, \pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n)]\!] \geq
$$

$$
\geq \bigvee\{[\![\varphi_0(x, \pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n)]\!] : x \in \mathrm{im}(\pi^*)\} =
$$

$$
= \bigvee\{[\![\varphi_0(\pi^* u, \pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n)]\!] : u \in \mathbb{V}^{(B)}\} =
$$

$$
= \bigvee\{\pi([\![\varphi_0(u, u_1, \dots, u_n)]\!]) : u \in \mathbb{V}^{(B)}\} = \pi([\![(\exists\, x)\varphi_0(x, u_1, \dots, u_n)]\!]).
$$

(2) Отметим, прежде всего, что если $\pi$ — сюръекция, то $\pi^*$ также сюръекция, т. е. $\mathrm{im}(\pi^*) = \mathbb{V}^{(C)}$ (см. 2.2.2 (2)). Поэтому для формулы $\varphi := (\exists\, x)\varphi_0$ будет

$$
[\![\varphi(\pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n)]\!] =
$$

$$
= \bigvee\{[\![\varphi_0(x, \pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n)]\!] : x \in \mathbb{V}^{(C)} = \mathrm{im}(\pi^*)\} =
$$

$$
= \bigvee\{[\![\varphi_0(\pi^* u, \pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n)]\!] : u \in \mathbb{V}^{(B)}\} =
$$

$$
= \bigvee\{\pi([\![\varphi_0(u, u_1, \dots, u_n)]\!]) : u \in \mathbb{V}^{(B)}\} = \pi([\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]).
$$

Те же самые рассуждения годятся и для формулы $\varphi$ вида $(\forall\, x)$ $\varphi_0(x, u_1, \dots, u_n)$.

Если же область действия рассматриваемого квантора существования ограничена, т. е. если формула $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ имеет вид $(\exists\, x \in u)\varphi_0(x, u_1, \dots, u_n)$ и $u, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^{(B)}$, то (см. определения и 1.1.5 (2, 9)) законны вычисления

$$
[\![\varphi(\pi^* u, \pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n)]\!] =
$$

$$
= \bigvee_{x\in\mathrm{dom}(\pi^* u)} (\pi^* u)(x) \wedge [\![\varphi_0(x, \pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n)]\!] =
$$

$$= \bigvee_{x\in\mathrm{dom}(u)} (\pi^*u)(\pi^*x) \wedge [\![\varphi_0(\pi^*x, \pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n)]\!] =$$

$$= \bigvee_{x\in\mathrm{dom}(u)} \bigvee\big\{\pi(u(z)) \wedge [\![\varphi_0(\pi^*x, \pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n)]\!] :$$

$$z \in \mathrm{dom}(u), \pi^*z = \pi^*x\big\} =$$

$$= \bigvee_{z\in\mathrm{dom}(u)} \pi\,(u(z) \wedge [\![\varphi_0(z, u_1, \dots, u_n)]\!]) = \pi([\![\varphi(u, u_1, \dots, u_n)]\!]).$$

Случай ограниченного квантора общности рассмотрен выше. $\rhd$

**2.2.4. *Следствие.*** *Пусть $\pi$, $\varphi$, $u_1, \dots, u_n$ — те же, что и в 2.2.3, и выполнено одно из следующих утверждений:*

**(1)** *$\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — формула класса $\Sigma_1$, $\pi$ — произволен;*
**(2)** *$\pi$ — эпиморфизм, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная формула.*

*Тогда*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(u_1, \dots, u_n) \to \mathbb{V}^{(C)} \models \varphi(\pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n).$$

**2.2.5. *Следствие.*** *Пусть $\pi$, $\varphi$ и $u_1, \dots, u_n$ — те же, что и в 2.2.3, а кроме того выполнено одно из следующих условий:*

**(1)** *$\varphi$ — ограниченная формула, а $\pi$ — мономорфизм;*
**(2)** *$\pi$ — изоморфизм, а $\varphi$ — произвольная формула.*

*Тогда*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(u_1, \dots, u_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(C)} \models \varphi(\pi^*u_1, \dots, \pi^*u_n).$$

**2.2.6.** Рассмотрим теперь важный специальный случай изученной ситуации. Пусть $B_0$ — правильная подалгебра полной булевой алгебры $B$. Это означает, что $B_0$ — полная подалгебра и точные границы любого множества в $B_0$ не зависят от того, вычисляются они в $B_0$ или в $B$. В этой ситуации $\mathbb{V}^{(B_0)} \subset \mathbb{V}^{(B)}$, причем если $\imath$ — тождественное вложение $B_0$ в $B$, то $\imath^*$ — вложение $\mathbb{V}^{(B_0)}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$. Из 2.2.5 (1) следует, что если $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — ограниченная формула и $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^{(B_0)}$, то

$$\mathbb{V}^{(B_0)} \models \varphi(u_1, \dots, u_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(u_1, \dots, u_n).$$

Поскольку двухэлементную алгебру $2 := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ можно рассматривать как правильную подалгебру булевой алгебры $B$, то сказанное выше справедливо и для универсума $\mathbb{V}^{(2)}$. Ниже мы увидим, что универсум $\mathbb{V}^{(2)}$ в естественном смысле изоморфен универсуму фон Неймана $\mathbb{V}$.

**2.2.7.** Для произвольного множества $x \in \mathbb{V}$ определим элемент $x^\wedge \in \mathbb{V}^{(2)} \subset \mathbb{V}^{(B)}$ рекурсией по вполне фундированному отношению $y \in x$. Для этого положим

$$\operatorname{dom}(x^\wedge) := \{y^\wedge : y \in x\}, \quad \operatorname{im}(x^\wedge) := \{\mathbb{1}_B\}.$$

Из 2.2.2 (3) для любых $x, y \in V$ будет

$$[\![x^\wedge \in y^\wedge]\!]^B \in 2, \quad [\![x^\wedge = y^\wedge]\!]^B \in 2.$$

Отображение $x \mapsto x^\wedge$ $(x \in \mathbb{V})$ называется *каноническим вложением* класса всех множеств $\mathbb{V}$ в булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$. Элементы из $\mathbb{V}^{(B)}$, имеющие вид $x^\wedge$ при некотором $x \in \mathbb{V}$, называются *стандартными.* Иногда $x^\wedge$ называют *стандартным именем множества* $x$ в $\mathbb{V}^{(B)}$.

**2.2.8.** ***Теорема.*** *Справедливы следующие утверждения:*

**(1)** *если $x \in \mathbb{V}$ и $y \in \mathbb{V}^{(B)}$, то*

$$[\![y \in x^\wedge]\!] = \bigvee\{[\![y = u^\wedge]\!] : u \in x\};$$

**(2)** *если $x, y \in \mathbb{V}$, то*

$$x \in y \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models x^\wedge \in y^\wedge, \quad x = y \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models x^\wedge = y^\wedge;$$

**(3)** *отображение $x \mapsto x^\wedge$ инъективно;*

**(4)** *для любого $y \in \mathbb{V}^{(2)}$ существует единственный элемент $x \in \mathbb{V}$ такой, что $\mathbb{V}^{(B)} \models x^\wedge = y$;*

**(5)** *если $\pi$ — полный гомоморфизм из $B$ в $C$, то для каждого $x \in \mathbb{V}$ будет $\pi^* x^\wedge = x^{\overset{\wedge}{\wedge}}$, где $(\,\cdot\,)^{\overset{\wedge}{\wedge}}$ — каноническое вложение $\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}^{(C)}$.*

$\lhd$ (1) Непосредственный подсчет с привлечением определений 2.1.4 и 2.2.7 дает

$$[\![y \in x^\wedge]\!] = \bigvee_{t \in \operatorname{dom}(x^\wedge)} x^\wedge(t) \wedge [\![t = y]\!] =$$

$$= \bigvee_{t \in x} x^\wedge(t^\wedge) \wedge [\![t^\wedge = y]\!] = \bigvee_{t \in x} [\![t^\wedge = y]\!].$$

(2) Предположим, что для всех $z \in \mathbb{V}$ таких, что $\operatorname{rank}(z) < \operatorname{rank}(y)$, выполнены соотношения

$$(\forall\, x)(x \in z \leftrightarrow [\![x^\wedge \in z^\wedge]\!] = \mathbb{1}),$$
$$(\forall\, x)(x = z \leftrightarrow [\![x^\wedge = z^\wedge]\!] = \mathbb{1}),$$
$$(\forall\, x)(z \in x \leftrightarrow [\![z^\wedge \in x^\wedge]\!] = \mathbb{1}).$$

Согласно (1) $[\![x^\wedge \in y^\wedge]\!] = \bigvee\{[\![t^\wedge = x^\wedge]\!] : t \in y\}$. Поскольку $\operatorname{rank}(t) < \operatorname{rank}(y)$ при $t \in y$, с учетом индуктивного предположения получим, что $[\![x^\wedge \in y^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ в том и только в том случае, если $[\![t^\wedge = x^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ или $t = x$ для некоторого $t \in y$. Далее, по определению

$$[\![x^\wedge = y^\wedge]\!] = \bigwedge_{t \in x} [\![t^\wedge \in y^\wedge]\!] \wedge \bigwedge_{s \in y} [\![s^\wedge \in x^\wedge]\!]$$

и $\operatorname{rank}(s) < \operatorname{rank}(y)$ при $s \in y$. Следовательно, в силу уже доказанного и по индуктивному предположению правая часть последнего равенства равна единице в том и только в том случае, если $t \in y$ для всех $t \in x$ и $s \in x$ для всех $s \in y$, т. е. если $x = y$. Вновь привлекая (1), получаем

$$[\![y^\wedge \in x^\wedge]\!] = \bigvee\{[\![y^\wedge = t^\wedge]\!] : t \in x\}.$$

Значит, $[\![y^\wedge \in x^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ имеет место лишь тогда, когда $[\![y^\wedge = t^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого $t \in x$. Последнее же в силу уже установленного равносильно соотношению $(\exists\, t \in x)(t = y)$, т. е. включению $y \in x$.

(3) Вытекает из (2).

(4) Предположим, что $y \in \mathbb{V}^{(2)}$ и для любого $t \in \operatorname{dom}(y)$ уже установлено, что существует $u \in \mathbb{V}$, для которого $[\![t = u^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Определим $x \in \mathbb{V}$ равенством

$$x := \{u \in \mathbb{V} : (\exists\, t \in \operatorname{dom}(y))(y(t) = \mathbb{1} \wedge [\![u^\wedge = t]\!] = \mathbb{1})\}.$$

Тогда для $u \in x$ будет

$$[\![u^\wedge \in y]\!] = \bigvee_{t \in \operatorname{dom}(y)} y(t) \wedge [\![t = u^\wedge]\!] = \mathbb{1}.$$

Кроме того, используя индукционное предположение, для $t \in \operatorname{dom}(y)$ выводим

$$y(t) \leq [\![ t \in x^{\wedge} ]\!] = \bigvee_{u \in x} [\![ t = u^{\wedge} ]\!].$$

Из всего сказанного следует, что

$$[\![ x^{\wedge} = y ]\!] = \bigwedge_{t \in \operatorname{dom}(y)} y(t) \Rightarrow [\![ t \in x^{\wedge} ]\!] \wedge \bigwedge_{u \in x} [\![ u^{\wedge} \in y ]\!] = \mathbb{1}.$$

(5) Проведем индукцию по вполне фундированному отношению $y \in x$. Предположим, что $(\forall\, y \in x)(\pi^* y^{\wedge} = y^{\hat{\wedge}})$. Тогда

$$\operatorname{dom}(\pi^* x^{\wedge}) = \{ y^{\hat{\wedge}} : y \in x \} = \operatorname{dom}(x^{\hat{\wedge}}).$$

Стало быть, для $y \in x$ будет

$$\begin{gathered}
(\pi^* x^{\wedge})(y^{\hat{\wedge}}) = (\pi^* x^{\wedge})(\pi^* y^{\wedge}) = \\
= \bigvee \{ \pi(x^{\wedge}(y^{\wedge})) : z \in \operatorname{dom}(x^{\wedge}), \pi^* z = \pi^* y^{\wedge} \} \geq \\
\geq \pi(x^{\wedge}(y^{\wedge})) = \mathbb{1}_B = x^{\hat{\wedge}}(y^{\hat{\wedge}}).
\end{gathered}$$

Итак, $\pi^* x^{\wedge} = x^{\hat{\wedge}}$, что обосновывает индукционный шаг. $\triangleright$

**2.2.9.** *Пусть $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}$ и $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — формула* ZFC. *Тогда имеют место утверждения*

**(1)** $\varphi(u_1, \dots, u_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(2)} \models \varphi(u_1^{\wedge}, \dots, u_n^{\wedge})$;

**(2)** *если $\varphi$ — ограниченная формула, то*

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(u_1^{\wedge}, \dots, u_n^{\wedge});$$

**(3)** *если $\varphi$ — формула класса $\Sigma_1$, то*

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) \rightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(u_1^{\wedge}, \dots, u_n^{\wedge}).$$

$\triangleleft$ Заметим, что в проверке нуждается лишь утверждение (1), так как (2) и (3) вытекают из (1), 2.2.4 (1) и 2.2.5 (1). Для атомных

формул (1) обеспечено 2.2.8 (2). При индукции по длине формулы $\varphi$ нетривиальный шаг возникает лишь в том случае, когда появляется квантор существования. Допустим, что $\varphi$ имеет вид $(\exists\, x)$ $\psi(x, u_1, \dots, u_n)$ и $[\![\varphi(u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$, причем для $\psi$ утверждение (1) выполнено. Тогда

$$\mathbb{1} = \bigvee \{ [\![\psi(u, u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!]^{2} : u \in \mathbb{V}^{(2)} \}.$$

Следовательно, $[\![\psi(v, u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого $v \in \mathbb{V}^{(2)}$. Согласно 2.2.8 (4) существует такой $u_0 \in \mathbb{V}$, что $[\![u_0^\wedge = u]\!] = \mathbb{1}$. Отсюда в силу 2.1.8 (7)

$$\mathbb{1} = [\![\psi(v, u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!] \wedge [\![v = u_0^\wedge]\!] \le [\![\psi(u_0^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!].$$

По индукционному допущению имеет место $\psi(u_0, \dots, u_n)$. Значит, верно также и $\varphi(u_1, \dots, u_n)$. Наоборот, если $\varphi(u_1, \dots, u_n)$, то для некоторого $u_0 \in \mathbb{V}$ будет $\psi(u_0, u_1, \dots, u_n)$. По индукционному предположению $[\![\psi(u_0^\wedge, u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$. Еще и $[\![(\exists\, x)\psi(x, u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!] \ge [\![\psi(u_0^\wedge,\, u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!]$, откуда $[\![\psi(u_1^\wedge, \dots, u_n^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$. $\triangleright$

**2.2.10.** Примечания.

**(1)** Пусть $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в булевой алгебре $B$, а $\mathfrak{U}'$ — двойственный к нему идеал, т. е. $\mathfrak{U}' := \{b^* : b \in \mathfrak{U}\}$. Тогда фактор-алгебра $B/\mathfrak{U}'$ двухэлементна и ее можно отождествить с булевой алгеброй $\mathbb{2} := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$. Фактор-гомоморфизм $\pi : B \to \mathbb{2}$ не является, вообще говоря, полным. Это не позволяет применить 2.2.4 и 2.2.5 для установления связи между истинностью в $\mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathbb{V}^{(2)}$. Однако если $\pi$ полон (т. е. если ультрафильтр $\mathfrak{U}$ главный), то из 2.2.5 видно, что для любых формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и набора $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ будет

$$\mathbb{V}^{(2)} \models \varphi(\pi^* u_1, \dots, \pi^* u_n) \leftrightarrow [\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] \in \mathfrak{U},$$

ибо для $b \in B$ равносильны соотношения $\pi(b) = \mathbb{1}$ и $b \in \mathfrak{U}$.

**(2)** Путем факторизации из универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ и ультрафильтра $\mathfrak{U}$ можно сконструировать модель, отличную от $\mathbb{V}^{(2)}$.

Введем в $\mathbb{V}^{(B)}$ отношение $\sim_{\mathfrak{U}}$ по формуле

$$\sim_{\mathfrak{U}} := \{(x, y) \in \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)} : [\![x = y]\!] \in \mathfrak{U}\}.$$

Ясно, что $\sim_{\mathfrak{U}}$ — отношение эквивалентности на $\mathbb{V}^{(B)}$. Обозначим символом $\mathbb{V}^{(B)}/\mathfrak{U}$ фактор-класс (см. 1.5.8) универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ по $\sim_{\mathfrak{U}}$, рассматриваемый вместе с бинарным отношением

$$\in_{\mathfrak{U}} := \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : x, y \in \mathbb{V}^{(B)}, [\![x \in y]\!] \in \mathfrak{U}\},$$

где $x \mapsto \tilde{x}$ — каноническое фактор-отображение из $\mathbb{V}^{(B)}$ в $\mathbb{V}^{(B)}/\mathfrak{U}$. Можно показать, что

$$\mathbb{V}^{(B)}/\mathfrak{U} \models \varphi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \leftrightarrow [\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] \in \mathfrak{U}$$

для $x_2, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ и формулы $\varphi$.

Читатель, знакомый с теорией ультрапроизведений, усмотрит в (2) известную теорему Лося (см. [34, 36, 46, 120]). Нетрудно убедиться в наличии и других глубоких связей с каноническими теоретико-модельными конструкциями. В (3) и (4) мы получим ультрапроизведения путем факторизации подходящего булевозначного универсума.

**(3)** Пусть $T$ — непустое множество (не обязательно всех) главных ультрафильтров на булевой алгебре $B$, а $\mathbb{V}^T$ — как обычно, класс всех отображений из $T$ в $\mathbb{V}$. Ввиду 2.2.8 (4) для каждого $x \in \mathbb{V}^{(2)}$ существует единственный элемент $x^{\vee} \in \mathbb{V}$ такой, что $[\![(x^{\vee})^{\wedge} = x]\!] = \mathbb{1}$. Определим теперь отображение $h : \mathbb{V}^{(B)} \to \mathbb{V}^T$, полагая $h(x) := \{(t, \pi_t^* x) : t \in T\}$ $(x \in \mathbb{V}^{(B)})$, где $\pi_t$ — полный гомоморфизм из $B$ в $\mathbb{2}$, определяемый ультрафильтром $t$, т. е. $\pi_t(b) = \mathbb{1}$, если $b \in t$, и $\pi_t(b) = \mathbb{0}$, если $b \in t'$. Можно показать, что $h$ — сюръективное отображение.

С другой стороны, $h$ инъективен в том и только в том случае, если всякий элемент $b \in B$ принадлежит какому-нибудь ультрафильтру $t \in T$, т. е. $(\forall\, b \in B)(\exists\, t \in T)\ (b \in t)$ (это означает, что $T$ определяет плотное множество точек в стоуновском компакте алгебры $B$, или $B$ атомна, или $B$ изоморфна булеану $\mathscr{P}(T)$). Утверждение об инъективности и есть упомянутая теорема Лося. В этом случае для любых $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ и формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ будет

$$[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] \le b \leftrightarrow (\forall\, t \in T)\ ([\![\varphi(\pi_t^* u_1, \dots, \pi_t^* u_n)]\!] = \mathbb{1} \to b \in t).$$

**(4)** Пусть $T$ — некоторое множество и $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в булеане $\mathscr{P}(T)$. Пусть $\mathbb{V}^{(B)}/\mathfrak{U}$ — обычная *ультрастепень* класса $\mathbb{V}$ по $\mathfrak{U}$ с

каноническим фактор-отображением $g : \mathbb{V}^T \to \mathbb{V}^T/\mathfrak{U}$ (см. 1.5.7). Положим $\lambda(\tilde{x}) := g \circ h(x)$, где $h$ определено в (3), а $x \mapsto \tilde{x}$ — то же, что и в (3). Тем самым определена биекция $\lambda$ между $\mathbb{V}^{(\mathscr{P}(T))}/\mathfrak{U}$ и $\mathbb{V}^T/\mathfrak{U}$. При этом для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и функций $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^T$ будет

$$\mathbb{V}^T/\mathfrak{U} \models \varphi(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n) \leftrightarrow \{t \in T : \varphi(u_1(t), \dots, u_n(t))\} \in \mathfrak{U}.$$

**(5)** Полезно сравнить 2.2.4 и 2.2.5 со следующим утверждением. Если $M$ — *транзитивная модель* ZFC (т. е. $M$ — транзитивный класс, являющийся моделью ZFC), $u_1, \dots, u_n \in M$, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — ограниченная формула и $\psi(x_1, \dots, x_n)$ — формула класса $\Sigma_1$, то

$$(M \models \varphi(u_1, \dots, u_n)) \leftrightarrow \varphi(u_1, \dots, u_n),$$
$$(M \models \psi(u_1, \dots, u_n)) \to \psi(u_1, \dots, u_n).$$

## 2.3. Перемешивание и принцип максимума

Рассмотрим семейство функций $(f_\xi)_{\xi \in \Xi}$, заданных на некотором множестве $A$. Если $(A_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство попарно непересекающихся подмножеств множества $A$, то на $A$ можно определить функцию $f$, сужение которой на $A_\xi$ совпадает с сужением $f_\xi$ на $A_\xi$ при всех $\xi \in \Xi$. Эту функцию естественно назвать *дизъюнктным перемешиванием* семейства $(f_\xi)_{\xi \in \Xi}$. Булевозначный универсум полон в том смысле, что в нем существуют дизъюнктные перемешивания любых семейств его элементов. Указанное обстоятельство позволяет строить различные специальные элементы внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Перейдем к деталям.

**2.3.1.** Множество, состоящее из попарно дизъюнктных элементов булевой алгебры, называют *антицепью.* Иначе говоря, подмножество $A$ множества $B$ есть антицепь (в $B$), если $a_1 \wedge a_2 = \mathbb{0}$ для любых различных $a_1, a_2 \in A$.

Если антицепь имеет вид $A := \{a_\xi : \xi \in \Xi\}$, то всегда предполагают, что $a_\xi \wedge a_\eta = \mathbb{0}$, как только $\xi \neq \eta$. Антицепь $A$ в $B$ называется *разбиением элемента* $b \in B$, если $\bigvee A = b$, и *разбиением единицы* алгебры $B$, если $\bigvee A$ — это единица $B$.

Рассмотрим антицепь $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в булевой алгебре $B$ и семейство $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов универсума $\mathbb{V}^{(B)}$. *Дизъюнктным перемешиванием* или просто *перемешиванием семейства* $(x_\xi)$ *относительно антицепи* $(b_\xi)$ (изредка говорят с *вероятностями* $(b_\xi)$) называют элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$, определенный соотношениями

$$
\operatorname{dom}(x) := \bigcup \{\operatorname{dom}(x_\xi) : \xi \in \Xi\},
$$
$$
x(t) := \bigvee \{b_\xi \wedge x_\xi(t) : \xi \in \Xi\} \quad (t \in \operatorname{dom}(x)).
$$

В последнем равенстве подразумевается, что $x_\xi(t) = \mathbb{0}$ при $t \in \operatorname{dom}(x) - \operatorname{dom}(x_\xi)$. Поскольку $\alpha := \sup_{\xi\in\Xi} \rho(x_\xi) \in \mathrm{On}$, то $\operatorname{dom}(x) \subset \mathbb{V}^{(B)}_{\alpha+1}$. Значит, приведенные соотношения действительно определяют некоторый элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$. Приняты символические обозначения: $\operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi) := \operatorname{mix}\{b_\xi x_\xi : \xi \in \Xi\} := x$.

Для изучения основных свойств перемешиваний докажем один вспомогательный факт.

**2.3.2.** *Пусть $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $b \in B$. Определим функцию $bx$ соотношениями*

$$
\operatorname{dom}(bx) := \operatorname{dom}(x), \quad bx : t \mapsto b \wedge x(t) \quad (t \in \operatorname{dom}(x)).
$$

*Тогда $bx \in \mathbb{V}^{(B)}$ и для любых $x$ и $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ справедливы равенства*

$$
[\![x \in by]\!] = b \wedge [\![x \in y]\!], \quad [\![bx = by]\!] = b \Rightarrow [\![x = y]\!].
$$

$\lhd$ Проверка первого соотношения состоит в непосредственном подсчете булевых значений истинности с привлечением бесконечного дистрибутивного закона 1.1.5 (2). В самом деле,

$$
[\![x \in by]\!] = \bigvee_{t\in\operatorname{dom}(by)} (by)(t) \wedge [\![t = x]\!] =
$$
$$
= b \wedge \bigvee_{t\in\operatorname{dom}(y)} y(t) \wedge [\![t = x]\!] = b \wedge [\![x \in y]\!].
$$

Далее, пользуясь первым равенством и применяя последовательно 1.1.4 (2), 1.1.5 (6), 1.1.4 (4), 1.1.4 (2), 1.1.5 (6), выводим

$$
[\![bx = by]\!] =
$$
$$
= \bigwedge_{t\in\operatorname{dom}(by)} (by)(t) \Rightarrow [\![t \in bx]\!] \wedge \bigwedge_{t\in\operatorname{dom}(bx)} (bx)(t) \Rightarrow [\![t \in by]\!] =
$$
$$
= \bigwedge_{t\in\operatorname{dom}(y)} (b \wedge y(t)) \Rightarrow (b \wedge [\![t \in x]\!]) \wedge
$$

$$\wedge \bigwedge_{t\in \mathrm{dom}(x)} (b\wedge x(t))\Rightarrow (b\wedge [\![t\in y]\!]) =$$

$$= \bigwedge_{t\in \mathrm{dom}(y)} ((b\wedge y(t))\Rightarrow b)\wedge ((b\wedge y(t))\Rightarrow [\![t\in x]\!])\wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{t\in \mathrm{dom}(x)} ((b\wedge x(t))\Rightarrow b)\wedge ((b\wedge x(t))\Rightarrow [\![t\in y]\!]) =$$

$$= \bigwedge_{t\in \mathrm{dom}(y)} b\Rightarrow (y(t)\Rightarrow [\![t\in x]\!])\wedge \bigwedge_{t\in \mathrm{dom}(x)} b\Rightarrow (x(t)\Rightarrow [\![t\in y]\!]) =$$

$$= b\Rightarrow [\![x=y]\!]. \ \triangleright$$

**2.3.3. *Теорема*** (принцип перемешивания). *Пусть* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *антицепь в* $B$ *и* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *семейство элементов* $\mathbb{V}^{(B)}$. *Положим* $x := \mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi)$. *Тогда*

$$[\![x=x_\xi]\!]\geq b_\xi \quad (\xi\in\Xi).$$

*Если, кроме того,* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *разбиение единицы и элемент* $y\in\mathbb{V}^{(B)}$ *удовлетворяет соотношению* $[\![y=x_\xi]\!]\geq b_\xi$ *при всех* $\xi\in\Xi$, *то* $[\![x=y]\!]=\mathbb{1}$.

$\triangleleft$ По определению перемешивания $b_\xi x=b_\xi x_\xi$ для любого $\xi\in\Xi$. Привлекая 2.3.2, выводим

$$\mathbb{1}=[\![b_\xi x=b_\xi x_\xi]\!]=b_\xi\Rightarrow [\![x_\xi=x]\!].$$

Значит, $[\![x=x_\xi]\!]\geq b_\xi$ для всех $\xi\in\Xi$ согласно 1.1.4 (4).

Предположим теперь, что $(b_\xi)$ — разбиение единицы и $[\![y=x_\xi]\!]$ $(\xi\in\Xi)$. Тогда в силу 2.1.8 (4) будет

$$b_\xi\leq [\![x=x_\xi]\!]\wedge [\![x_\xi=y]\!]\leq [\![x=y]\!] \quad (\xi\in\Xi).$$

Следовательно,

$$\mathbb{1}=\bigvee\{b_\xi:\xi\in\Xi\}\leq [\![x=y]\!]\leq \mathbb{1},$$

что и требовалось. $\triangleright$

**2.3.4.** *Возьмем* $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ *и определим* $\bar{x} \in \mathbb{V}^{(B)}$ *соотношениями*

$$\operatorname{dom}(\bar{x}) := \operatorname{dom}(x), \quad \bar{x}(t) := [\![ t \in x ]\!] \quad (t \in \operatorname{dom}(x)).$$

*Тогда* $\mathbb{V}^{(B)} \models x = \bar{x}$.

$\lhd$ К цели приводят следующие несложные вычисления, использующие определения из 2.1.4, а также 1.1.4 (4) и 2.1.8 (2):

$$\begin{gathered}
[\![ x = \bar{x} ]\!] = \\
= \bigwedge_{t \in \operatorname{dom}(x)} x(t) \Rightarrow [\![ t \in \bar{x} ]\!] \wedge \bigwedge_{t \in \operatorname{dom}(\bar{x})} [\![ t \in x ]\!] \Rightarrow [\![ t \in x ]\!] = \\
= \bigwedge_{t \in \operatorname{dom}(x)} x(t) \Rightarrow \Bigg( \bigvee_{u \in \operatorname{dom}(\bar{x})} \bar{x}(u) \wedge [\![ u = t ]\!] \Bigg) \geq \\
\geq \bigwedge_{t \in \operatorname{dom}(x)} x(t) \Rightarrow [\![ t \in x ]\!] = \mathbb{1}. \ \rhd
\end{gathered}$$

**2.3.5.** *Возьмем разбиение единицы* $(b_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset B$ *и семейство* $(x_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset \mathbb{V}^{(B)}$. *Положим* $x := \operatorname{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi x_\xi)$. *Тогда справедливы утверждения*:

**(1)** *если* $(x'_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset \mathbb{V}^{(B)}$ *и* $\mathbb{V}^{(B)} \models x_\xi = x'_\xi$ $(\xi \in \Xi)$, *то*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models x = \operatorname*{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi x'_\xi);$$

**(2)** *если элемент* $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ *таков, что* $\operatorname{dom}(y) = \operatorname{dom}(x)$ *и*

$$y(t) := \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi \wedge [\![ t \in x_\xi ]\!] \quad (t \in \operatorname{dom}(y)),$$

*то* $\mathbb{V}^{(B)} \models x = y$.

$\lhd$ Пусть $x' := \operatorname{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi x'_\xi)$. Из условий выводим

$$b_\xi \leq [\![ x_\xi = x'_\xi ]\!] \wedge [\![ x_\xi = x ]\!] \wedge [\![ x'_\xi = x' ]\!] \leq [\![ x = x' ]\!],$$

стало быть, $[\![ x = x' ]\!] = \mathbb{1}$. Второе утверждение следует из первого и из 2.3.4. $\rhd$

**2.3.6.** *Для любых $b \in B$ и $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ справедливы формулы*

$$[\![bx = x]\!] = b \vee [\![x = \varnothing]\!], \quad [\![bx = \varnothing]\!] = b^* \vee [\![x = \varnothing]\!].$$

*В частности,*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models bx = \mathrm{mix}\{bx, b^*\varnothing\}.$$

$\lhd$ Заметим, что $[\![t \in bx \to t \in x]\!] = \mathbb{1}$, ибо в силу 2.3.2 $[\![t \in bx]\!] = b \wedge [\![t \in x]\!] \leq [\![t \in x]\!]$. Тем самым $[\![bx = x \leftrightarrow (\forall\, t)(t \in x \to t \in bx)]\!] = \mathbb{1}$. С учетом этого равенства вычисляем

$$[\![bx = x]\!] = \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![t \in x]\!] \Rightarrow [\![t \in bx]\!] =$$
$$= \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![t \in x]\!]^* \vee (b \wedge [\![t \in x]\!]) =$$
$$= \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} (b \vee [\![t \in x]\!]^*) \wedge ([\![t \in x]\!]^* \vee [\![t \in x]\!]) =$$
$$= \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} b \vee [\![t \in x]\!]^* = b \vee \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![t \in x]\!]^* =$$
$$= b \vee [\![(\forall\, t)(t \notin x)]\!] = b \vee [\![x = \varnothing]\!].$$

С другой стороны, вновь привлекая 2.3.2 и учитывая, что $b\varnothing = \varnothing$, можно написать

$$b^* \vee [\![x = \varnothing]\!] = b \Rightarrow [\![x = \varnothing]\!] = [\![bx = b\varnothing]\!] = [\![bx = \varnothing]\!]. \ \rhd$$

**2.3.7.** *Допустим, что $(b_\xi)$ — разбиение единицы в $B$, а семейство $(x_\xi) \subset \mathbb{V}^{(B)}$ таково, что $\mathbb{V}^{(B)} \models x_\xi \neq x_\eta$ для любых $\xi \neq \eta$. Тогда существует элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $[\![x = x_\xi]\!] = b_\xi$ при всех $\xi$.*

$\lhd$ Положим $x := \mathrm{mix}(b_\xi x_\xi)$ и $a_\xi := [\![x = x_\xi]\!]$. По условию

$$a_\xi \wedge a_\eta = [\![x = x_\xi]\!] \wedge [\![x_\eta = x]\!] \leq [\![x_\xi \neq x_\eta]\!]^* = \mathbb{0}$$

при $\xi \neq \eta$. Кроме того, $b_\xi \leq a_\xi$ для всех $\xi$ в силу свойств перемешивания. Таким образом, $(a_\xi)$ — также разбиение единицы в $B$. С другой стороны,

$$b_\xi^* = \bigvee_{\eta \neq \xi} b_\eta \leq \bigvee_{\eta \neq \xi} a_\eta = a_\xi^*,$$

поэтому $b_\xi^* \leq a_\xi^* \to b_\xi \geq a_\xi$. Итак, разбиения единицы $(b_\xi)$ и $(a_\xi)$ совпадают. $\triangleright$

Следующий факт, доказательство которого основано на перемешивании двух элементов, часто позволяет сократить объем вычислений.

**2.3.8.** *Рассмотрим $B$-формулы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Допустим, что для некоторого $u_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$ выполнено $[\![\varphi(u_0)]\!] = \mathbb{1}$. Тогда*

$$[\![(\forall\, x)(\varphi(x) \to \psi(x))]\!] = \bigwedge\{[\![\psi(u)]\!] : u \in \mathbb{V}^{(B)}, [\![\varphi(u)]\!] = \mathbb{1}\},$$
$$[\![(\exists\, x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))]\!] = \bigwedge\{[\![\psi(u)]\!] : u \in \mathbb{V}^{(B)}, [\![\varphi(u)]\!] = \mathbb{1}\}.$$

$\triangleleft$ Докажем первое равенство. Прежде всего, очевидно (см. 2.1.7), что

$$c := [\![(\forall\, x)(\varphi(x) \to \psi(x))]\!] = \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\varphi(t)]\!] \Rightarrow [\![\psi(t)]\!] \leq$$
$$\leq \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}, [\![\varphi(t)]\!] = \mathbb{1}} [\![\varphi(t)]\!]^* \vee [\![\psi(t)]\!] = \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}, [\![\varphi(t)]\!] = \mathbb{1}} [\![\psi(t)]\!] =: d.$$

Для обоснования обратного неравенства $d \leq c$ возьмем произвольный элемент $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ и положим $u := \mathrm{mix}\{bt, b^* u_0\}$, где $b := [\![\varphi(t)]\!]$. Тогда в силу 2.1.8 (7) и 2.3.3 можно оценить

$$b \leq [\![\varphi(t)]\!] \wedge [\![t = u]\!] \leq [\![\varphi(u)]\!],$$
$$b^* \leq [\![\varphi(u_0)]\!] \wedge [\![u = u_0]\!] \leq [\![\varphi(u)]\!].$$

Значит, $[\![\varphi(u)]\!] = \mathbb{1}$. Далее, по тем же соображениям

$$b \wedge [\![\psi(u)]\!] \leq [\![u = t]\!] \wedge [\![\psi(u)]\!] \leq [\![\psi(t)]\!].$$

Следовательно, законны оценки

$$[\![\psi(u)]\!] \leq b^* \vee (b \wedge [\![\psi(u)]\!]) \leq b^* \vee [\![\psi(t)]\!] =$$
$$= b \Rightarrow [\![\psi(t)]\!] = [\![\varphi(t)]\!] \Rightarrow [\![\psi(t)]\!].$$

Так как $d \leq [\![\psi(u)]\!]$, то $d \leq [\![\varphi(t)]\!] \Rightarrow [\![\psi(t)]\!]$ $(t \in \mathbb{V}^{(B)})$. Переходя к инфимуму по $t$ в правой части последнего неравенства, получим $d \leq c$.

Второе равенство двойственно первому и выводится из него с помощью формул де Моргана (см. 1.1.2). $\triangleright$

**2.3.9.** Установим теперь центральный результат настоящего параграфа — принцип максимума, утверждающий, что в формуле

$$[\![(\exists\, x)\varphi(x)]\!] = \bigvee\{[\![\varphi(u)]\!] : u \in \mathbb{V}^{(B)}\}$$

точная верхняя граница достигается на некотором $u_0$ из $\mathbb{V}^{(B)}$.

Предварительно напомним одно важное свойство полных булевых алгебр. Начнем с определения

Пусть $B$ — полная булева алгебра. Множество $E \subset B$ называют *минорирующим* или *минорантным* в $B_0 \subset B$, если для всякого $0 < b \in B_0$ найдется такой $x \in E$, что $0 < x \leq b$.

**(1)** ***Теорема*** (принцип исчерпывания). *Пусть $M$ — непустое множество элементов полной булевой алгебры $B$, а $E$ — множество, минорирующее в компоненте $B_0 \subset B$, порожденной множеством $M$. Тогда существует антицепь $E_0 \subset E$ такая, что $\bigvee E_0 = \bigvee M$ и для любого $x \in E_0$ найдется $y \in M$, для которого $x \leq y$.*

$\lhd$ Рассмотрим множество $\mathfrak{A}$ всех антицепей $A$, удовлетворяющих условиям: (a) $A \subset E$, (b) для любого $x \in A$ существует $y \in M$, для которого $x \leq y$. Если $\mathbb{0} \neq y \in M$, то ввиду условия минорантности $y \geq x$ для некоторого $\mathbb{0} \neq x \in E$. Значит, $\{x\} \in \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$ непусто. Множество $\mathfrak{A}$, упорядоченное по включению, удовлетворяет, как легко проверить, условиям леммы Куратовского — Цорна. Следовательно, существует максимальный элемент $E_0 \in \mathfrak{A}$. Нужно показать, что элементы $b_0 := \bigvee E_0$ и $b := \bigvee M$ совпадают. Из определения $\mathfrak{A}$ видно, что $b_0 \leq b$. Если $b_0 \neq b$, то найдутся такие элементы $\mathbb{0} \neq x_0 \in B$ и $x \in M$, что $x_0 \wedge b_0 = \mathbb{0}$ и $x_0 \leq x$. Ввиду условия минорантности $\mathbb{0} < y \leq x$ для некоторого $y \in E$. Множество $E_0 \cup \{y\}$ входит в $\mathfrak{A}$ и существенно шире, чем $E_0$. Это противоречит максимальности $E_0$, а потому $b_0 = b$. $\rhd$

**(2)** ***Следствие.*** *Для любого непустого множества $M \subset B$ существует антицепь $A \subset B$ со свойствами: $\bigvee A = \bigvee M$ и для любого $x \in A$ найдется $y \in M$ такой, что $x \leq y$.*

$\lhd$ Нужно взять минорантное множество $E := \bigcup_{y\in M} [\mathbb{0}, y]$ и применить (1). $\rhd$

**2.3.10.** ***Теорема*** (принцип максимума). *Пусть $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ — некоторая формула, а $u_1, \dots, u_n$ — произвольные элементы из $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда существует $u_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что*

$$[\![(\exists\, x)\varphi(x, u_1, \dots, u_n)]\!] = [\![\varphi(u_0, u_1, \dots, u_n)]\!].$$

*В частности, если* $\mathbb{V}^{(B)} \models (\exists\, x)\varphi(x, u_1, \dots, u_n)$, *то* $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(u_0, u_1, \dots, u_n)$ *для некоторого* $u_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$.

$\triangleleft$ По определению

$$\begin{aligned} b &:= [\![(\exists\, x)\varphi(x, u_1, \dots, u_n)]\!] = \\ &= \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\varphi(u, u_1, \dots, u_n)]\!]. \end{aligned}$$

Класс $A := \{[\![\varphi(u, u_1, \dots, u_n)]\!] : u \in \mathbb{V}^{(B)}\}$ является подмножеством алгебры $B$. Ввиду 2.3.9 (2) существуют разбиение $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элемента $b$ и семейство $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов $\mathbb{V}^{(B)}$, для которых выполняются соотношения

$$\begin{aligned} b_\xi &\leq [\![\varphi(u_\xi, u_1, \dots, u_n)]\!] \quad (\xi \in \Xi), \\ b &= \bigvee \{[\![\varphi(u_\xi, u_1, \dots, u_n)]\!] : \xi \in \Xi\}. \end{aligned}$$

Положим $u_0 := \mathrm{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi u_\xi)$ и заметим, что по 2.3.3 будет $b_\xi \leq [\![u_0 = u_\xi]\!]$ $(\xi \in \Xi)$. Как видно,

$$[\![\varphi(u_0, u_1, \dots, u_n)]\!] \leq b.$$

С другой стороны, привлекая 2.1.8 (7), получим

$$b_\xi \leq [\![u_0 = u_\xi]\!] \wedge [\![\varphi(u_\xi, u_1, \dots, u_n)]\!] \leq [\![\varphi(u_0, \dots, u_n)]\!].$$

Следовательно,

$$[\![\varphi(u_0, \dots, u_n)]\!] \geq \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi = b.$$

Вторая часть теоремы — непосредственное следствие первой. $\triangleright$

### 2.4. Принцип переноса

В этом параграфе проверяется, что универсум $\mathbb{V}^{(B)}$, построенный над произвольной полной булевой алгеброй $B$, вместе с булевыми функциями истинности $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ и $[\![\cdot = \cdot]\!]$ служит булевозначной моделью теории множеств ZFC. Точнее, справедлив следующий факт.

**2.4.1. *Теорема*** (принцип переноса). *Всякая теорема* ZFC *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$. *Символически:* $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{ZFC}$.

Доказательство этой теоремы состоит в проверке соотношений $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{ZF}_k$ для $k := 1, 2, \dots, 6$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{AC}$. Значительная часть усилий при этом приходится на рутинный подсчет, детали которого приводятся ради полноты изложения.

**2.4.2.** *Аксиома экстенсиональности* $\mathrm{ZF}_1$ *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x)(\forall\, y)(x = y \leftrightarrow (\forall\, z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)).$$

$\lhd$ Доказательство немедленно получается из определения булевой оценки истинности равенства 2.1.4 (2) и из 2.1.9. В самом деле, для любых $x$ и $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ положим

$$c := c(x, y) := [\![(\forall\, z \in x)(z \in y)]\!] = \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(x)} x(z) \Rightarrow [\![z \in y]\!].$$

Очевидно, что $c(x, y) \wedge c(y, x) = [\![x = y]\!]$, а с другой стороны,

$$c(x, y) \wedge c(y, x) = [\![(\forall\, z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)]\!].$$

Отсюда в силу 1.1.4 (5) заключаем

$$[\![x = y \leftrightarrow (\forall\, z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)]\!] = \mathbb{1} \quad (x, y \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Переходя к инфимуму по $x$ и $y$, получаем требуемое. $\rhd$

**2.4.3.** *Аксиома объединения* $\mathrm{ZF}_2$ *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(z \in y \leftrightarrow (\exists\, u \in x)(z \in u)).$$

$\lhd$ Возьмем произвольный элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и определим $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ соотношениями

$$\mathrm{dom}(y) := \bigcup \{\mathrm{dom}(u) : u \in \mathrm{dom}(x)\},$$
$$y(t) := [\![(\exists\, u \in x)(t \in u)]\!] \quad (t \in \mathrm{dom}(y)).$$

Достаточно показать, что $[\![y = \bigcup x]\!] = \mathbb{1}$.

В силу 2.1.9 выполняется

$$
\begin{gathered}
[\![ y \subset \bigcup x ]\!] = [\![ (\forall\, t \in y)(\exists\, u \in x)(t \in u) ]\!] = \\
= \bigwedge_{t \in \mathrm{dom}(y)} [\![ (\exists\, u \in x)(t \in u) ]\!] \Rightarrow [\![ (\exists\, u \in x)(t \in u) ]\!] = \mathbb{1}.
\end{gathered}
$$

Далее заметим, что при $u \in \mathrm{dom}(x)$ и $z \in \mathrm{dom}(u)$ будет (см. 2.1.8 (2) и 2.1.9)

$$
\begin{gathered}
x(u) \wedge u(z) \leq x(u) \wedge [\![ z \in u ]\!] \leq \bigvee_{u \in \mathrm{dom}(x)} x(u) \wedge [\![ z \in u ]\!] = \\
= [\![ (\exists\, u \in x)(z \in u) ]\!] = y(z) \leq [\![ z \in y ]\!].
\end{gathered}
$$

Отсюда $x(u) \Rightarrow (u(z) \Rightarrow [\![ z \in y ]\!]) = \mathbb{1}$ ввиду 1.1.4 (2–4). Учитывая это равенство и привлекая 2.1.9, 1.1.5 (6), вычисляем

$$
\begin{gathered}
[\![ \bigcup x \subset y ]\!] = [\![ (\forall\, u \in x)(\forall\, z \in u)(z \in y) ]\!] = \\
= \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} x(u) \Rightarrow \Bigg( \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(u)} u(z) \Rightarrow [\![ z \in y ]\!] \Bigg) = \\
= \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(u)} x(u) \Rightarrow (u(z) \Rightarrow [\![ z \in y ]\!]) = \mathbb{1}.
\end{gathered}
$$

Тем самым $[\![ y = \bigcup x ]\!] = \mathbb{1}$. Следовательно,

$$
[\![ (\exists\, u)\,(u = \bigcup x) ]\!] = \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![ u = \bigcup x ]\!] \geq [\![ y = \bigcup x ]\!] = \mathbb{1}.
$$

Переход к инфимуму по $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ дает требуемое:

$$
[\![ (\forall\, x)(\exists\, y)\,(y = \bigcup x) ]\!] = \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![ (\exists\, y)\,(y = \bigcup x) ]\!] = \mathbb{1}. \ \triangleright
$$

**2.4.4.** *Аксиома степени* $\mathrm{ZF}_3$ *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$
\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)\,(z \in y \leftrightarrow z \subset x).
$$

$\lhd$ Рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и определим $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ так:

$$\operatorname{dom}(y) := B^{\operatorname{dom}(x)},$$
$$y(z) := [\![z \subset x]\!] \quad (z \in \operatorname{dom}(y)).$$

Достаточно показать, что $[\![z \in y \leftrightarrow z \subset x]\!] = \mathbb{1}$ для каждого $z \in \mathbb{V}^{(B)}$. Нетрудно видеть, что

$$[\![z \in y]\!] = \bigvee_{t \in \operatorname{dom}(y)} y(t) \wedge [\![t = z]\!] =$$
$$= \bigvee_{t \in \operatorname{dom}(y)} [\![t \subset x]\!] \wedge [\![t = z]\!] \le [\![z \subset x]\!].$$

Следовательно, $[\![z \in y \to z \subset x]\!] = \mathbb{1}$ согласно 1.1.4 (4). Теперь нужно обосновать равенство $[\![z \subset x \to z \in y]\!] = \mathbb{1}$. Для этого мы несколько модифицируем $z$, а именно, рассмотрим элемент $z' \in \operatorname{dom}(y)$ такой, что $\operatorname{dom}(z') := \operatorname{dom}(x)$ и $z'(t) := [\![t \in z]\!]$ $(t \in \operatorname{dom}(z'))$. Тогда для каждого $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ будет

$$[\![t \in z']\!] = \bigvee_{u \in \operatorname{dom}(z')} z'(u) \wedge [\![t = u]\!] =$$
$$= \bigvee_{u \in \operatorname{dom}(z')} [\![u \in z]\!] \wedge [\![u = t]\!] \le [\![t \in z]\!],$$

значит, $[\![z' \subset z]\!] = \mathbb{1}$. С другой стороны, ввиду 2.1.8 (5) и 2.1.9

$$[\![t \in z \cap x]\!] = \bigvee_{u \in \operatorname{dom}(x)} x(u) \wedge [\![t = u]\!] \wedge [\![t \in z]\!] \le$$
$$\le \bigvee_{u \in \operatorname{dom}(x)} z'(u) \wedge [\![t = u]\!] = [\![t \in z']\!],$$

поэтому $[\![z \cap x \subset z']\!] = \mathbb{1}$ (вновь апелляция к 1.1.4 (4)). Кроме того,

$$[\![z \subset x]\!] = \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![t \in z]\!] \Rightarrow [\![t \in x]\!] \le \bigwedge_{t \in \operatorname{dom}(z')} z'(t) \Rightarrow [\![t \in x]\!] =$$

$$= [\![(\forall\, t \in z')(t \in x)]\!] = [\![z' \subset x]\!] = y(z') \leq [\![z' \in y]\!].$$

Подытоживая все сказанное относительно $z$ и $z'$, получаем

$$[\![z \subset x]\!] \leq [\![x \cap z \subset z']\!] \wedge [\![z' \subset z]\!] \wedge [\![z \subset x]\!] \leq [\![z = z']\!],$$
$$[\![z \subset x]\!] \leq [\![z' \in y]\!].$$

Из последних двух соотношений немедленно вытекает

$$[\![z \subset x]\!] = [\![z \subset x]\!] \wedge [\![z = z']\!] \leq [\![z' \in y]\!] \wedge [\![z = z']\!] \leq [\![z \in y]\!],$$

т. е. $[\![z \subset x]\!] \leq [\![z \in y]\!]$, что равносильно требуемому из-за 1.1.4 (4). $\triangleright$

**2.4.5.** *Аксиома подстановки* $\mathrm{ZF}_4^{\varphi}$ *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, u)(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)\ (\varphi(u, v_1) \wedge \varphi(u, v_2) \to v_1 = v_2) \to$$
$$\to ((\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, t)(\forall\, s \in x)(\varphi(s,t) \leftrightarrow t \in y)).$$

$\triangleleft$ В исчислении предикатов аксиому подстановки можно вывести из аксиомы выделения (см. 1.2.5) и формулы

$$\Phi := (\forall\, x)((\forall\, t \in x)(\exists\, u)\varphi(t,u) \to (\exists\, y)(\forall\, t \in x)(\exists\, u \in y)\varphi(t,u))$$

($y$ не входит свободно в $\varphi$), т. е. $\Phi \wedge \Psi \to \mathrm{ZF}_4^{\varphi}$, где $\Psi$ — аксиома выделения. В силу этого достаточно показать, что $\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models \Psi$.

**(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \Psi := (\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, t)\ (t \in y \leftrightarrow t \in x \wedge \psi(t))$.
Возьмем произвольный элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и рассмотрим функцию $y \in \mathbb{V}^{(B)}$, определяемую формулами

$$\mathrm{dom}(y) := \mathrm{dom}(x),$$
$$y(t) := x(t) \wedge [\![\psi(t)]\!] \quad (t \in \mathrm{dom}(y)).$$

Тогда $[\![(\forall\, t)(t \in y \leftrightarrow t \in x \wedge \psi(t))]\!] = a \wedge b$, где

$$a := [\![(\forall\, t \in y)(t \in x \wedge \psi(t))]\!], \quad b := [\![(\forall\, t \in x)(\psi(t) \to t \in y)]\!].$$

Однако из 2.1.8 (2) и 2.1.9 легко выводится, что $a = b = \mathbb{1}$. В самом деле,

$$a = \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(y)} y(t) \Rightarrow [\![t \in x \wedge \psi(t)]\!] =$$
$$= \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(y)} x(t) \wedge [\![\psi(t)]\!] \Rightarrow [\![t \in x]\!] \wedge [\![\psi(t)]\!] = \mathbb{1}.$$

Аналогично

$$b = \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(x)} x(t) \Rightarrow ([\![\psi(t)]\!] \Rightarrow [\![t \in y]\!]) =$$
$$= \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(x)} x(t) \wedge [\![\psi(t)]\!] \Rightarrow [\![t \in x]\!] \wedge [\![\psi(t)]\!] = \mathbb{1}.$$

**(2)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi$. Пусть $x$ — произвольный элемент $\mathbb{V}^{(B)}$. Так как $B$ — множество, то для каждого фиксированного $t \in \mathrm{dom}(x)$ множеством является класс

$$K := \{[\![\varphi(t,u)]\!] : u \in \mathbb{V}^{(B)}\} \subset B.$$

Из аксиомы подстановки для множеств (т. е. в $\mathbb{V}$) вытекает существование такого ординала $\alpha(t)$, что

$$\{[\![\varphi(t,u)]\!] : u \in V^{(B)}_{\alpha(t)}\} = K.$$

Положим $\alpha := \sup\{\alpha(t) : t \in \mathrm{dom}(x)\}$ и определим $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ формулами

$$\mathrm{dom}(y) := \mathbb{V}^{(B)}_{\alpha}, \quad \mathrm{im}(y) = \{\mathbb{1}\}.$$

Тогда $y$ — искомый элемент, как показывают следующие вычисления:

$$[\![(\forall\, t \in x)(\exists\, u)\varphi(t,u)]\!] = \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(x)} x(t) \Rightarrow \Bigg(\bigvee_{u\in\mathbb{V}^{(B)}} [\![\varphi(t,u)]\!]\Bigg) =$$
$$= \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(x)} x(t) \Rightarrow \Bigg(\bigvee_{u\in\mathbb{V}^{(B)}_{\alpha(t)}} [\![\varphi(t,u)]\!]\Bigg) \leq$$
$$\leq \bigwedge_{t\in\mathrm{dom}(x)} x(t) \Rightarrow \Bigg(\bigvee_{u\in\mathbb{V}^{(B)}_{\alpha}} [\![\varphi(t,u)]\!]\Bigg) =$$

$$= \bigwedge_{t \in \mathrm{dom}(x)} x(t) \Rightarrow [\![(\exists\, u \in y)\varphi(t,u)]\!] = [\![(\forall\, t \in x)(\exists\, u \in y)\varphi(t,u)]\!]. \ \triangleright$$

**2.4.6.** *Аксиома бесконечности* $\mathrm{ZF}_5$ *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\exists\, x)(0 \in x \wedge (\forall\, t)(t \in x \to t \cup \{t\} \in x)).$$

$\triangleleft$ Эта аксиома удовлетворяется, если взять $x := \omega^\wedge$ (см. 2.2.7). Прежде всего, очевидно, что $[\![0^\wedge \in \omega^\wedge]\!] = \mathbb{1}$, так как $0^\wedge \in \mathrm{dom}(\omega^\wedge)$.

Отметим, что при $t \in \mathbb{V}$ и $u := t \cup \{t\}$ будет $[\![u^\wedge = t^\wedge \cup \{t^\wedge\}]\!] = \mathbb{1}$. В самом деле, из-за 2.2.8 (1) верно

$$[\![v \in u^\wedge]\!] = \bigvee_{s \in u} [\![s^\wedge = v]\!] = [\![t^\wedge = v]\!] \vee \bigvee_{s \in t} [\![s^\wedge = v]\!] =$$
$$= [\![t^\wedge = v]\!] \vee [\![v \in t^\wedge]\!] = [\![t^\wedge = v \vee v \in t^\wedge]\!] = [\![v \in t^\wedge \cup \{t^\wedge\}]\!].$$

Теперь с учетом этого на основании 2.1.9 и 2.2.8 (2) легко сосчитать:

$$[\![(\forall\, t \in \omega^\wedge)(t \cup \{t\}) \in \omega^\wedge]\!] = \bigwedge_{t \in \omega} [\![t^\wedge \cup \{t^\wedge\} \in \omega^\wedge]\!] =$$
$$= \bigwedge_{t \in \omega} [\![(t \cup \{t\})^\wedge \in \omega^\wedge]\!] = \mathbb{1}. \ \triangleright$$

**2.4.7.** *Аксиома регулярности* $\mathrm{ZF}_6$ *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x)(\exists\, y)\ (x = 0 \vee (y \in x \wedge y \cap x = 0)).$$

$\triangleleft$ Возьмем произвольный элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$. Покажем, что

$$b := [\![x \neq 0 \wedge (\forall\, y \in x)(y \cap x \neq 0)]\!] = \mathbb{0}_B.$$

Предположим, что $b \neq \mathbb{0}_B$. Так как $b \leq [\![(\exists\, u)(u \in x)]\!]$, то существует элемент $y_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $[\![y_0 \in x]\!] \wedge b \neq \mathbb{0}$ и $\rho(y_0) \leq \rho(y)$ при $[\![y \in x]\!] \wedge b \neq \mathbb{0}$ $(y \in \mathbb{V}^{(B)})$.

Так как, кроме того, для каждого $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ верна оценка

$$[\![y \in x]\!] \wedge b \leq [\![y \cap x \neq 0]\!] = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(y)} y(z) \wedge [\![z \in x]\!],$$

то $[\![z \in x]\!] \wedge [\![y_0 \in x]\!] \wedge b \neq \mathbb{0}$ для некоторого $z \in \mathrm{dom}(y_0)$. Однако $\rho(z) < \rho(y_0)$, что противоречит выбору $y_0$. Таким образом, $b = \mathbb{0}_B$. Отсюда

$$\begin{gathered}\mathbb{1}_B = b^* = [\![\neg(x \neq 0 \wedge (\forall\, y \in x)(y \cap x \neq 0))]\!] = \\ = [\![(\exists\, y)(x = 0 \vee (y \in x \wedge y \cap x = 0))]\!].\end{gathered}$$

Переход к инфимуму по $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ завершает доказательство. $\triangleright$

**2.4.8.** Осталось проверить истинность аксиомы выбора внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Для этого потребуются еще некоторые вспомогательные построения.

Рассмотрим произвольные элементы $x, y \in \mathbb{V}^{(B)}$. Определим одноэлементное множество $\{x\}^B$, неупорядоченную пару $\{x, y\}^B$ и упорядоченную пару $(x, y)^B$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ соотношениями

$$\begin{gathered}\mathrm{dom}(\{x\}^B) := \{x\}, \quad \mathrm{im}(\{x\}^B) := \{\mathbb{1}\}; \\ \mathrm{dom}(\{x, y\}^B) := \{x, y\}, \quad \mathrm{im}(\{x, y\}^B) := \{\mathbb{1}\}; \\ (x, y)^B := \{\{x\}^B, \{x, y\}^B\}^B.\end{gathered}$$

Элементы $\{x\}^B$, $\{x, y\}^B$ и $(x, y) \in \mathbb{V}^{(B)}$ соответствуют своим названиям.

*Справедливы утверждения*

$$\begin{gathered}\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, t)(t \in \{x\}^B \leftrightarrow t = x), \\ \mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, t)(t \in \{x, y\}^B \leftrightarrow t = x \vee t = y), \\ \mathbb{V}^{(B)} \models \text{ «}(x, y)^B \textit{ — упорядоченная пара элементов } x \textit{ и } y\text{».}\end{gathered}$$

В сокращенной записи:

$$[\![\{x\}^B = \{x\}]\!] = [\![\{x, y\}^B = \{x, y\}]\!] = [\![(x, y)^B = (x, y)]\!] = \mathbb{1}.$$

$\triangleleft$ Проверим, например, утверждение относительно неупорядоченной пары. Для любого $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ будет

$$\begin{gathered}[\![t \in \{x, y\}^B]\!] = \bigvee \{[\![t = s]\!] : s \in \mathrm{dom}(\{x, y\}^B)\} = \\ = [\![t = x]\!] \vee [\![t = y]\!] = [\![t = x \vee t = y]\!].\end{gathered}$$

Следовательно,

$$[\![(\forall\, t)(t \in \{x, y\}^B \leftrightarrow t = x \vee t = y)]\!] = \mathbb{1}. \ \rhd$$

**2.4.9.** Введенные в предыдущем пункте и относящиеся к паре элементов понятия легко обобщаются на случай $n$-ок для произвольного $n > 2$. Пусть $x : n \to \mathbb{V}^{(B)}$. Тогда по определению $s := (x(0), \dots, x(n-1))^B \in \mathbb{V}^{(B)}$, если существует отображение $y : n \mapsto \mathbb{V}^{(B)}$ такое, что

$$y(0) = x(0), \quad y(n-1) = s,$$
$$y(k) = (y(k-1), x(k))^B \quad (0 < k \leq n-1).$$

Ясно, что тем самым определена функция из $(\mathbb{V}^{(B)})^n$ в $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$(x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1})^B \quad (x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Отметим одно важное свойство этой функции, ограничившись для простоты случаем $n = 2$. Напомним, что для любых $x$, $y$, $x'$, $y' \in \mathbb{V}$ справедлива эквивалентность

$$(x, y) = (x', y') \leftrightarrow x = x' \wedge y = y'.$$

Это утверждение является теоремой ZF. Значит, оно верно и в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ согласно 2.4.2–2.4.7. Следовательно, для любых $x$, $y$, $x'$, $y' \in \mathbb{V}^{(B)}$ выполняется

$$[\![(x, y) = (x', y')]\!] = [\![x = x']\!] \wedge [\![y = y']\!].$$

Так как $(x, y)^B$ — упорядоченная пара внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то будет

$$[\![(x, y)^B = (x', y')^B]\!] = [\![x = x']\!] \wedge [\![y = y']\!].$$

В частности,

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (x, y)^B = (x', y')^B \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models x = x' \wedge y = y',$$

т. е. функция $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B$ «инъективна во внутреннем смысле». Разумеется, она инъективна и в смысле $\mathbb{V}$, т. е. если $(x, y)^B$ и $(x', y')^B$ совпадают как элементы $\mathbb{V}$, то $x = x'$ и $y = y'$. Но все же это два разных свойства.

**2.4.10.** Напомним, что согласно теореме 1.4.3 ординал можно определить как транзитивное множество, линейно упорядоченное отношением принадлежности $E$. В символической записи

$$\begin{gathered}\mathrm{Ord}\,(x) \leftrightarrow ((\forall\, u \in x)(\forall\, v \in u)(v \in x) \wedge \\ \wedge (\forall\, u \in x)(\forall\, v \in x)(u \in v \vee u = v \vee v \in u)).\end{gathered}$$

Отсюда видно, что $\mathrm{Ord}\,(x)$ — ограниченная формула, значит, в силу 2.2.9 (2) верно

$$\alpha \in \mathrm{On} \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Ord}\,(\alpha^{\wedge}).$$

Кроме того, в 2.2.8 (2) установлено, что

$$[\![\alpha^{\wedge} = \beta^{\wedge}]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \alpha = \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathrm{On}).$$

**2.4.11.** *Аксиома выбора* AC *истинна в* $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x)(\exists\, y)\,(y \text{ — выбирающая функция для } x).$$

$\triangleleft$ В теории ZF можно доказать, что для $x$ найдется выбирающая функция при условии, что существуют ординал $\alpha$ и функция $f$, для которых $\alpha = \mathrm{dom}(f)$ и $\mathrm{im}(f) \supset u := \bigcup x$. В самом деле, выбирающую функцию $y$ можно определить по формуле

$$\begin{gathered}(t, s) \in y \leftrightarrow s \in t \wedge t \in x \wedge (\exists\, \alpha_0 \in \alpha)\,(f(\alpha_0) = s) \wedge \\ \wedge (\forall\, \beta \in \alpha)(f(\beta) \in t \to \alpha_0 \le \beta).\end{gathered}$$

Таким образом, $y(t) = f(\alpha_0)$, где $\alpha_0$ — наименьший элемент множества ординалов $\{\beta \in \alpha : f(\beta) \in t\}$.

В силу 2.4.2–2.4.7 доказанное утверждение является истинным внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Значит, нам осталось проверить, что

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, u)(\exists\, \alpha)(\exists\, f)(\mathrm{Ord}\,(\alpha) \wedge \mathrm{Fnc}\,(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = \alpha \wedge \mathrm{im}(f) \supset u).$$

Возьмем произвольный элемент $u \in \mathbb{V}^{(B)}$ и, пользуясь аксиомой выбора для множеств, подберем ординал $\alpha$ и функцию $g$ так,

чтобы $\operatorname{dom}(g) = \alpha$ и $\operatorname{dom}(u) \subset \operatorname{im}(g) \subset \mathbb{V}^{(B)}$. Определим $f \in \mathbb{V}^{(B)}$ соотношением

$$f := \{(\beta^{\wedge}, g(\beta))^B : \beta < \alpha\} \times \{\mathbb{1}_B\}.$$

Покажем, что $f$ удовлетворяет всем требуемым условиям.

**(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$f$ — бинарное отношение». Действительно, для произвольного $f \in \mathbb{V}^{(B)}$ имеем

$$[\![t \in f]\!] = \bigvee_{\beta<\alpha} [\![t = (\beta^{\wedge}, g(\beta))^B]\!] \leq$$
$$\leq \bigvee \{[\![t = (x, y)^B]\!] : x, y \in \mathbb{V}^{(B)}\} = [\![(\exists\, x)(\exists\, y)\ (t = (x, y))]\!].$$

**(2)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \operatorname{Fnc}(f)$. Ввиду (1) нужно лишь показать однозначность $f$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Возьмем произвольные $t, s_1, s_2 \in \mathbb{V}^{(B)}$ и подсчитаем, применяя последовательно 2.1.4 (1), 2.4.9, 2.1.8 (4), 2.2.8 (2):

$$[\![(t, s_1) \in f \wedge (t, s_2) \in f]\!] = [\![(t, s_1)^B \in f]\!] \wedge [\![(t, s_2)^B \in f]\!] =$$
$$= \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{\gamma<\alpha} [\![(t, s_1)^B = (\beta^{\wedge}, g(\beta))^B]\!] \wedge [\![(t, s_2)^B = (\gamma^{\wedge}, g(\gamma))^B]\!] =$$
$$= \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{\gamma<\alpha} [\![t = \beta^{\wedge}]\!] \wedge [\![t = \gamma^{\wedge}]\!] \wedge [\![s_1 = g(\beta)]\!] \wedge [\![s_2 = g(\gamma)]\!] \leq$$
$$\leq \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{\gamma<\alpha} [\![\beta^{\wedge} = \gamma^{\wedge}]\!] \wedge [\![s_1 = g(\beta)]\!] \wedge [\![s_2 = g(\gamma)]\!] =$$
$$= \bigwedge_{\beta<\alpha} [\![s_1 = g(\beta)]\!] \wedge [\![s_2 = g(\beta)]\!] \leq [\![s_1 = s_2]\!].$$

**(3)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \operatorname{Ord}(\alpha^{\wedge}) \wedge \operatorname{dom}(f) = \alpha^{\wedge}$. То, что $\mathbb{V}^{(B)} \models \operatorname{Ord}(\alpha^{\wedge})$, было уже отмечено в 2.4.10. Далее, для $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ имеем

$$[\![t \in \operatorname{dom}(f)]\!] = [\![(\exists\, s)(t, s) \in f]\!] = \bigvee_{s\in\mathbb{V}^{(B)}} [\![(t, s) \in f]\!] =$$
$$= \bigvee_{s\in\mathbb{V}^{(B)}} \bigvee_{\beta<\alpha} [\![(t, s) = (\beta^{\wedge}, g(\beta))]\!] =$$
$$= \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{s\in\mathbb{V}^{(B)}} [\![t = \beta^{\wedge}]\!] \wedge [\![s = g(\beta)]\!] =$$

$$
= \bigvee_{\beta<\alpha} [\![t = \beta^\wedge]\!] = \bigvee_{\beta^\wedge \in \mathrm{dom}(\alpha^\wedge)} [\![t = \beta^\wedge]\!] = [\![t \in \alpha^\wedge]\!].
$$

**(4)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{im}(f) \supset u$. Возьмем $s \in \mathbb{V}^{(B)}$ и проведем следующие вычисления:

$$
\begin{aligned}
[\![s \in u]\!] &= \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(u)} u(v) \wedge [\![s = v]\!] \leq \\
&\leq \bigvee_{\beta \leq \alpha} [\![s = g(\beta)]\!] = \\
&= \bigvee_{\beta<\alpha} \Bigg( [\![s = g(\beta)]\!] \wedge \bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\beta^\wedge = t]\!] \Bigg) = \\
&= \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![(t, s) = (\beta^\wedge, g(\beta))]\!] = \\
&= \bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![(t, s) \in f]\!] = [\![(\exists\, t)(t, s) \in f]\!] = [\![s \in \mathrm{im}(f)]\!]. \ \triangleright
\end{aligned}
$$

Доказательство теоремы 2.4.1 закончено.

**2.4.12.** Примечания.

**(1)** Замена логической части ZF законами интуиционистской логики (см. 2.1.10 (3)) приводит к интуиционистской теории множеств $\mathrm{ZF_I}$. Модели $\mathrm{ZF_I}$ также можно строить по излагаемой схеме.

Именно, если $\Omega$ — полная гейтингова решетка, то универсум $\mathbb{V}^{(\Omega)}$ станет гейтинговозначной моделью теории $\mathrm{ZF_I}$, если определить соответствующие функции истинности $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ и $[\![\cdot = \cdot]\!]$ из $\mathbb{V}^{(\Omega)} \times \mathbb{V}^{(\Omega)}$ в $\mathbb{V}^{(\Omega)}$. Подробности см. в [144, 148, 245].

**(2)** Пусть $B$ — (квантовая) логика (см. 1.5.11 (5)). Если определить функции $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ и $[\![\cdot = \cdot]\!]$ по формулам 2.1.4 и ввести оценки истинности формул, как в 2.1.7, то в универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$ истинными окажутся аксиомы $\mathrm{ZF_2}$–$\mathrm{ZF_6}$ и AC.

Таким образом, в $\mathbb{V}^{(B)}$ можно развить теорию множеств. В частности, вещественные числа внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ будут соответствовать наблюдаемым в математической модели квантово-механической системы (см. [241]).

### 2.5. Отделимые булевозначные универсумы

Здесь конструируются отделимые булевозначные универсумы. Помимо этого, предлагается интерпретация NGB в таких объектах (ср. [181]).

**2.5.1.** Для элементов $x$ и $y$ универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ соотношение $\mathbb{V}^{(B)} \models x = y$ вовсе не означает, что $x$ и $y$ совпадают как множества, т. е. как элементы $\mathbb{V}$. В самом деле, если для каждого ординала $\alpha$ определить $x_\alpha \in \mathbb{V}^{(B)}$ по формулам $\operatorname{dom}(x_\alpha) = V_\alpha^{(B)}$, $\operatorname{im}(x_\alpha) := \{\mathbb{0}\}$, то, как легко проверить, $[\![x_\alpha = 0]\!] = \mathbb{1}$ при всех $\alpha$. Значит, каждый элемент класса $\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{On}\}$ изображает пустое множество внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Можно убедиться, что для всякого $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ имеется собственный класс $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $[\![x = y]\!] = \mathbb{1}$. Это обстоятельство приводит к техническим неудобствам и, в частности, затрудняет процесс перевода с языка $\mathbb{V}^{(B)}$ на язык $\mathbb{V}$. Указанный дефект модели $\mathbb{V}^{(B)}$ устраняется путем надлежащей факторизации (см. 1.5.8).

**2.5.2.** Введем в универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$ отношение эквивалентности $\sim$:

$$\sim := \{(x, y) \in \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)} : [\![x = y]\!] = \mathbb{1}_B\}.$$

Рассмотрим фактор-класс $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} := \mathbb{V}^{(B)}/\sim$, и пусть $\pi : \mathbb{V}^{(B)} \to \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ — каноническое отображение. Класс $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ называют *отделимым булевозначным универсумом.* Булевы значения истинности равенства $[\![\,\cdot\, = \,\cdot\,]\!]_s$ и принадлежности $[\![\,\cdot\, \in \,\cdot\,]\!]_s$ для класса $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ введем путем снижения соответствующих функций $[\![\,\cdot\, = \,\cdot\,]\!]$ и $[\![\,\cdot\, \in \,\cdot\,]\!]$ на фактор-класс:

$$[\![\,\cdot\, = \,\cdot\,]\!]_s := [\![\,\cdot\, = \,\cdot\,]\!] \circ (\pi^{-1} \times \pi^{-1}),$$
$$[\![\,\cdot\, \in \,\cdot\,]\!]_s := [\![\,\cdot\, \in \,\cdot\,]\!] \circ (\pi^{-1} \times \pi^{-1}).$$

Теперь для любой формулы $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ и для произвольных $\tilde{x}, \dots, \tilde{x}_n \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ определим $[\![\varphi(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)]\!] \in B$ так же, как и в 2.1.7. Тогда будет

$$[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] = [\![\varphi(\pi x_1, \dots, \pi x_n)]\!]_s \quad (x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Истинность формул в $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ задается так же, как и в 2.1.6:

$$\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \models \varphi(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n) \leftrightarrow [\![\varphi(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)]\!]_s = \mathbb{1}_B.$$

Корректность указанных определений не вызывает сомнений, ибо в силу 2.1.8 (7) для любой формулы $\varphi$ в ZFC верно

$$\mathbb{1} = [\![x = y]\!] \to [\![\varphi(x)]\!] = [\![\varphi(y)]\!] \quad (x, y \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Таким образом, при вычислении булевых оценок истинности в отделимом универсуме можно пользоваться произвольными представителями нужных классов эквивалентности. Из этого замечания вытекает, в частности, что теорема 2.1.8 остается верной при замене $\mathbb{V}^{(B)}$ на $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ и снабжении булевых оценок истинности нижним индексом $s$.

В качестве несколько неожиданного примера использования отделимого универсума $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ дадим следующее определение. Взяв $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, введем символ $\vee\widetilde{x}$ для так называемого *уровня* $\widetilde{x}$, т. е. положим

$$\vee\widetilde{x} := \bigvee_{t \in \mathrm{dom}(x)} x(t),$$

где $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ — представитель класса эквивалентности $\widetilde{x} \in \mathbb{V}^{(B)}$.

Определение уровня в первый момент воспринимается как не вполне законное, так как области определения у равных внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ элементов не обязаны совпадать. В то же время

$$[\![(\exists\, y \in \widetilde{x})]\!]_s = [\![(\exists\, y \in \widetilde{x}) y = y]\!]_s =$$
$$= \bigvee_{t \in \mathrm{dom}(x)} x(t) \wedge [\![t = t]\!] = \bigvee_{t \in \mathrm{dom}(x)} x(t) = \vee\widetilde{x}.$$

Как видно, $\vee\widetilde{x} = [\![x \neq \varnothing]\!]_s$, так что понятие уровня корректно. Аналогичным образом, взяв $\widetilde{x}$ из $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ и $b$ из булевой алгебры $B$, мы можем корректно определить элемент $\widetilde{bx} : t \mapsto b \wedge x(t)$ $(t \in \mathrm{dom}(x))$ в универсуме $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$. Действительно, если $[\![x_1 = x_2]\!] = \mathbb{1}$, то в силу ранее установленного 2.3.2 $[\![bx_1 = bx_2]\!] = b \Rightarrow [\![x_1 = x_2]\!] = \mathbb{1}$. В этой связи часто используют запись $0 = \varnothing$, имея в виду, в частности, что $0\varnothing = \varnothing = 0\widetilde{x}$ для всякого $x \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$.

**2.5.3.** Отметим, что изложенное в 2.2–2.4 с очевидными оговорками и уточнениями остается в силе для $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$. Так, $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ является моделью ZFC в смысле 2.4. Аналогично, если $\rho$ — полный гомоморфизм булевых алгебр, то $\rho^*$ оставляет инвариантным любой класс

эквивалентности и, значит, $\rho^*$ индуцирует единственное отображение соответствующих отделимых универсумов, которое обозначаем также $\rho^*$, т. е. имеет место аналог 2.2.2 и т. д. Если $(x_\xi) \subset \mathbb{V}^{(B)}$, $(b_\xi)$ — дизъюнктное семейство в $B$ и $x = \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, то за элементом $\widetilde{x} := \pi x$ сохраним название перемешивания и обозначение $\widetilde{x} = \operatorname{mix}(b_\xi \widetilde{x}_\xi)$ $(\widetilde{x}_\xi = \pi x_\xi)$. Такое определение перемешивания в $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ корректно ввиду 2.3.5 (1). Итак, если $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ и $(\widetilde{x}_\xi) \subset \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, то запись $\widetilde{x} = \operatorname{mix}(b_\xi \widetilde{x}_\xi)$ означает, что

$$b_\xi \leq [\![\widetilde{x} = \widetilde{x}_\xi]\!]_s \quad (\xi \in \Xi).$$

Отметим, что если $(b_\xi)$ — разбиение единицы, то перемешивание $\operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$ единственно (ввиду отделимости) (см. 2.3.3).

Из равенства (см. 2.4.9)

$$[\![(x, y)^B = (x', y')^B]\!] = [\![x = x']\!] \wedge [\![y = y']\!]$$

видно, что отображение $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B$ устойчиво относительно отношения эквивалентности 2.5.2. Поэтому существует инъективное вложение $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \times \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \to \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, обозначаемое тем же символом $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B$, для которого $(\pi x, \pi y)^B = \pi((x, y)^B)$. При этом

$$[\![(\widetilde{x}, \widetilde{y})^B = (\widetilde{x}, \widetilde{y})]\!]_s = \mathbb{1} \quad (\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Принцип максимума также сохраняется и имеет следующее уточнение.

**2.5.4.** *Пусть $\varphi(u, u_1, \dots, u_n)$ — формула, $\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ и $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \models (\exists! u)\varphi(u, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$. Тогда существует единственный элемент $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ такой, что $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \models \varphi(\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$.*

$\lhd$ Пусть $\widetilde{x}_k := \pi(x_k)$, где $x_k \in \mathbb{V}^{(B)}$ $(k := 1, \dots, n)$. Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \models (\exists! u)\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$. В силу принципа максимума существует элемент $x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Положим $\widetilde{x}_0 := \pi(x_0)$. Понятно, что $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \models \varphi(\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$. Если для какого-нибудь элемента $z \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ выполнено $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \models \varphi(z, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$, то будет $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \models \varphi(\widetilde{x}_0, \dots, \widetilde{x}_n) \wedge \varphi(z, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$. По условию $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \models z = \widetilde{x}_0$, а это и означает, ввиду отделимости $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, что $z = \widetilde{x}_0$. $\rhd$

**2.5.5.** Для произвольных $b$ и $c \in B$ положим (см. 1.1.4)

$$[\![b = c]\!] := b \Leftrightarrow c = (b \mathbin{\triangle} c)^* = (b \wedge c) \vee (b^* \wedge c^*).$$

Заметим, что из-за 1.1.4 (3) $a \leq [\![b = c]\!]$ в том и только в том случае, если $a \wedge b = a \wedge c$.

Рассмотрим функцию $f : \operatorname{dom}(f) \to B$, область определения $\operatorname{dom}(f)$ которой содержится в $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$. Говорят, что $f$ — *экстенсиональная функция*, если

$$[\![x = y]\!]_s \leq [\![f(x) = f(y)]\!] \quad (x, y \in \operatorname{dom}(f)).$$

Экстенсиональность $f$, как легко заметить, равносильна соотношению

$$f(x) \wedge [\![x = y]\!]_s \leq f(y) \quad (x, y \in \operatorname{dom}(f)).$$

Если $u : \operatorname{dom}(u) \to B$ — произвольная функция и $\operatorname{dom}(u) \subset \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, то с $u$ можно связать экстенсиональную функцию $\bar{u} : \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \to B$ по формуле

$$\bar{u} : x \mapsto \bigvee_{t \in \operatorname{dom}(u)} u(t) \wedge [\![t = x]\!]_s \quad (x \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}).$$

Еще один класс экстенсиональных функций возникает следующим образом. Пусть $\varphi$ — некоторая $B$-формула. Тогда экстенсиональна функция

$$\bar{\varphi} : x \mapsto [\![\varphi(x)]\!]_s \quad (x \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}).$$

**2.5.6.** ***Теорема.*** *Если $u : \operatorname{dom}(u) \to B$ — функция, причем $\operatorname{dom}(u) \subset \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ и $\operatorname{dom}(u) \in \mathbb{V}$, то существует единственный элемент $x \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ такой, что $\bar{u}(t) = [\![t \in x]\!]_s$ при всех $t \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$. Наоборот, если $x \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, то существует функция $u : \operatorname{dom}(u) \to B$, для которой $\operatorname{dom}(u) \subset \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, $\operatorname{dom}(u) \in \mathbb{V}$ и $\bar{u}(t) = [\![t \in x]\!]_s$ $(t \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)})$.*

$\triangleleft$ Пусть $D$ — такое подмножество неотделимого универсума, что образ $D$ при каноническом фактор-отображении $\pi$ совпадает с $\operatorname{dom}(u)$.

Определим элемент $x' \in \mathbb{V}^{(B)}$ формулой

$$\operatorname{dom}(x') := D, \quad x'(t) := u(\pi t) \quad (t \in D).$$

Положим, наконец, $x := \pi(x')$. Тогда для $t \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ будет

$$[\![t \in x]\!]_s = \bigvee_{y \in D} x'(y) \wedge [\![t = \pi y]\!]_s = \bigvee_{y \in \operatorname{dom}(u)} x(y) \wedge [\![y = t]\!] = \bar{u}(t).$$

Если еще какой-то элемент $z \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ обладает этими свойствами, то $[\![t \in x]\!]_s = [\![t \in z]\!]_s$ для всех $t \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$. Отсюда

$$\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)} \models (\forall\, t)\, (t \in x \leftrightarrow t \in z).$$

В силу аксиомы экстенсиональности внутри $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ получим $[\![x = z]\!]_s = \mathbb{1}$. Отделимость $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ дает $x = z$.

Наоборот, пусть $x \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, а $x'$ — такой элемент неотделимого универсума, что $x = \pi(x')$. Положим $\operatorname{dom}(u) := \pi``(\operatorname{dom}(x'))$ и определим $u : \operatorname{dom}(u) \to B$ так, чтобы $u(\pi t) = x'(t)$ $(t \in \operatorname{dom}(x'))$. Тогда для любого $t \in \widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ выполнено

$$[\![t \in x]\!]_s = \bigvee_{y \in \operatorname{dom}(x')} x'(y) \wedge [\![t = \pi y]\!]_s =$$

$$= \bigvee_{y \in \operatorname{dom}(u)} u(y) \wedge [\![y = t]\!]_s = \bar{u}(t). \ \triangleright$$

**2.5.7.** В дальнейшем мы в основном будем работать с отделимым булевозначным универсумом $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$. При этом часто, не оговаривая этого специально, при вычислениях булевых оценок истинности мы заменяем элементы $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$ их представителями из $\mathbb{V}^{(B)}$ (как это обычно практикуется, например, при работе с пространствами классов эквивалентности измеримых функций в анализе). Кроме того, начиная со следующего предложения, мы используем только обозначения $\mathbb{V}^{(B)}$, $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ вместо $\widetilde{\mathbb{V}}^{(B)}$, $[\![\cdot = \cdot]\!]_s$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]_s$ и осуществляем все аналогичные упрощения, поскольку это не приводит к недоразумениям.

Как видно из 2.5.6, всякий элемент $\mathbb{V}^{(B)}$ определяет некоторое экстенсиональное отображение на $\mathbb{V}^{(B)}$ со значениями в $B$. В то же время лишь часть из экстенсиональных отображений $\mathbb{V}^{(B)}$ в $B$ задается элементами $\mathbb{V}^{(B)}$. Это обстоятельство мотивирует следующее определение.

**2.5.8.** *Классом внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ или $\mathbb{V}^{(B)}$*-классом* называют всякое экстенсиональное отображение $X : \mathbb{V}^{(B)} \to B$, являющееся классом в обычном смысле, т. е. в смысле $\mathbb{V}$. Каждому элементу $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ сопоставим $\mathbb{V}^{(B)}$-класс

$$\langle x \rangle := [\![ \cdot \in x ]\!] : t \mapsto [\![ t \in x ]\!] \quad (t \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Ясно, что такое сопоставление инъективно. Введем теперь булевы оценки истинности, полагая для $\mathbb{V}^{(B)}$-классов $X$ и $Y$ и элемента $z \in \mathbb{V}^{(B)}$:

$$[\![ \langle z \rangle \in X ]\!] := X(z),$$
$$[\![ X = Y ]\!] := \bigwedge_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![ \langle u \rangle \in X ]\!] \Leftrightarrow [\![ \langle u \rangle \in Y ]\!],$$
$$[\![ X \in Y ]\!] := \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![ \langle u \rangle = X ]\!] [\![ \langle u \rangle \in Y ]\!].$$

Первая и третья формулы согласованы, ибо в силу экстенсиональности $X$ выполнено

$$[\![ \langle z \rangle \in X ]\!] = \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} X(u) \wedge [\![ u = z ]\!]$$

и, кроме того, $[\![ \langle z \rangle = \langle u \rangle ]\!] = [\![ z = u ]\!]$ при всех $u, z \in \mathbb{V}^{(B)}$. Из определений видно, что $[\![ X = Y ]\!] = \mathbb{1}$ влечет $X = Y$. Функция $\mathbb{U}_B : x \mapsto \mathbb{1}_B$ $(x \in \mathbb{V}^{(B)})$ представляет собой универсальный класс внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Пустой $\mathbb{V}^{(B)}$-класс — функция, тождественно равная нулю на $\mathbb{V}^{(B)}$.

**2.5.9.** Напомним, что формула называется *предикативной*, если в ней связанными являются лишь переменные для множеств (см. 1.3.14).

**(1)** Определим булеву оценку истинности предикативной формулы индукцией по длине (см. 2.1.6). Для пропозициональных связок это делается так же, как и в 2.1.7, тем самым нужно только уточнить случай кванторов, действие которых ограничено классом множеств. При этом можно рассматривать лишь формулы, не содержащие подформул вида $X_1 \in X_2$, ибо последняя эквивалентна формуле $(\exists\, x)(x = X_1 \wedge x \in X_2)$.

Итак, пусть $\varphi$ — предикативная формула со свободными переменными $X, X_1, \dots, X_n$, а $Y_1, \dots, Y_n$ — некоторые $\mathbb{V}^{(B)}$-классы. Положим по определению

$$[\![(\forall\, x)\, \varphi(x, Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \bigwedge_{y \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\varphi(y, Y_1, \dots, Y_n)]\!],$$
$$[\![(\exists\, x)\, \varphi(x, Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \bigvee_{y \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\varphi(y, Y_1, \dots, Y_n)]\!].$$

Мы будем говорить, что предикативная формула $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ *истинна внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *при заданных значениях* $Y_1, \dots, Y_n$ *переменных* $X_1, \dots, X_n$, если $[\![\varphi(Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \mathbb{1}$. Так же, как и в 2.1.6, условимся, что

$$V^{(B)} \models \varphi(Y_1, \dots, Y_n) \leftrightarrow [\![\varphi(Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \mathbb{1}.$$

**(2)** Понятие истинности в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ распространяют на непредикативные формулы следующим образом. Если $\varphi(X, X_1, \dots, X_n)$ — непредикативная формула, то полагаем

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, X)\, \varphi(X, Y_1, \dots, Y_n) \quad (\mathbb{V}^{(B)} \models (\exists\, X)\, \varphi(X, Y_1, \dots, Y_n)),$$

если и только если $[\![\varphi(Y, Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \mathbb{1}$ для всякого $\mathbb{V}^{(B)}$-класса $Y$ (соответственно существует такой $\mathbb{V}^{(B)}$-класс $Y$, что $[\![\varphi(Y, Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \mathbb{1}$).

$\mathbb{V}^{(B)}$-класс $Y$ называется $\mathbb{V}^{(B)}$-*множеством*, если $\mathbb{V}^{(B)} \models M(Y)$, где $M(X) := (\exists\, Z)(X \in Z)$ (см. 1.3.1). Проще было бы вместо $\mathbb{V}^{(B)}$-множества говорить $B$-множество, однако этот термин мы сохраним для других объектов (см. 3.4).

**2.5.10.** *Если $x \in \mathbb{V}^{(B)}$, то $\mathbb{V}^{(B)}$-класс $\langle x \rangle$ является $\mathbb{V}^{(B)}$-множеством. Наоборот, если $\mathbb{V}^{(B)}$-класс $X$ есть $\mathbb{V}^{(B)}$-множество, то $X = \langle x \rangle$ для некоторого $x \in \mathbb{V}^{(B)}$.*

$\lhd$ Для произвольного элемента $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ верно

$$[\![\langle x \rangle \in \langle \{x\}^B \rangle]\!] = [\![x \in \{x\}^B]\!] = \mathbb{1},$$

поэтому $\mathbb{V}^{(B)} \models M(\langle x \rangle)$. Допустим, что для $\mathbb{V}^{(B)}$-класса $X$ выполняется $\mathbb{V}^{(B)} \models M(X)$. Тогда по определению (см. 2.5.9 (2)) существует $\mathbb{V}^{(B)}$-класс $Z$, для которого

$$\bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} Z(t) \wedge [\![\langle t \rangle = X]\!] = \mathbb{1}.$$

Отсюда в силу принципа исчерпывания можно подобрать такое разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и такое семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathbb{V}^{(B)}$, что

$$[\![\langle x_\xi\rangle = X]\!] \geq b_\xi \quad (\xi \in \Xi).$$

Если $x := \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, то

$$[\![\langle x\rangle = X]\!] \geq [\![\langle x\rangle = \langle x_\xi\rangle]\!] \wedge [\![\langle x_\xi\rangle = X]\!] \geq b_\xi.$$

Следовательно, $[\![\langle x\rangle = X]\!] = \mathbb{1}$ или $\langle x\rangle = X$. $\triangleright$

На основании установленного факта в дальнейшем мы будем отождествлять элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ и соответствующее $\mathbb{V}^{(B)}$-множество $\langle x\rangle$.

**2.5.11.** Пусть $C$ — полная булева алгебра и $\pi : B \to C$ — полный гомоморфизм. Рассмотрим $\mathbb{V}^{(B)}$-класс $X$ и положим по определению

$$(x, b) \in \pi^* X \leftrightarrow b = \bigvee_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} (\pi \circ X)(t) \wedge [\![x = \pi^* t]\!]^C.$$

Тогда $\pi^* X$ — это класс внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Действительно, $\pi^* X$ — подкласс $\mathbb{V}$ в силу теоремы 1.3.14, ибо

$$\pi^* X = \{(x, b) : \varphi(x, b, B, C, X, \pi^*, \ [\![\,\cdot\, = \,\cdot\,]\!], \mathbb{V}^{(B)})\}$$

для предикативной формулы $\varphi(Y, Z, B, \dots)$, имеющей вид

$$Z = \bigvee_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} (\pi \circ X)(t) \wedge [\![Y = \pi^* t]\!].$$

Кроме того, $\pi^* X$ — экстенсиональная функция:

$$(\pi^* X)(x) \wedge [\![x = y]\!] = \bigvee_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} (\pi \circ X)(t) \wedge [\![x = \pi^* t]\!] \wedge$$
$$\wedge [\![x = y]\!] \leq \bigvee_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} (\pi \circ X)(t) \wedge [\![y = \pi^* t]\!] = (\pi^* X)(y).$$

Легко видеть, что для классов сохраняет силу утверждение 2.2.2 (1), т. е. если $\rho$ — полный гомоморфизм, то

$$(\rho \circ \pi)^* X = (\rho^* \circ \pi^*) X.$$

Далее, если $\mathbb{V}^{(B)} \models M(X)$, то $\mathbb{V}^{(C)} \models M(\pi^* X)$. Действительно, если $X = \langle x \rangle$, $x \in \mathbb{V}^{(B)}$, то в силу 2.2.2 (4)

$$\langle \pi^* x \rangle(t) = \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi([\![u \in x]\!]) \wedge [\![t = \pi^* u]\!] =$$
$$= \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} (\pi \circ \langle x \rangle)(u) \wedge [\![t = \pi^* u]\!] = (\pi^* \langle x \rangle)(t).$$

Значит, $\langle \pi^* x \rangle = \pi^* \langle x \rangle = \pi^* X$. Обратное утверждение верно, если $\pi$ инъективен.

Отметим еще, что данное определение согласуется с 2.2.1 благодаря 2.2.2 (4).

**2.5.12.** *Для каждого $\mathbb{V}^{(B)}$-класса $X$ и для всякой предикативной $B$-формулы $\varphi$ с одной свободной переменной имеют место представления*

$$[\![(\forall\, x \in \pi^* X)\, \varphi(x)]\!]^C = \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi \circ X(t) \Rightarrow [\![\varphi(\pi^* t)]\!]^C,$$
$$[\![(\exists\, x \in \pi^* X)\, \varphi(x)]\!]^C = \bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi \circ X(t) \wedge [\![\varphi(\pi^* t)]\!]^C.$$

$\lhd$ Достаточно обосновать одно из этих соотношений, например первое. Вот соответствующие вычисления (где мы использовали 1.1.5 (3), 2.1.8 (7) и тождество $(a \wedge b) \Rightarrow (c \wedge b) = (a \wedge b) \Rightarrow c$):

$$[\![(\forall\, x \in \pi^* X)\, \varphi(x)]\!] = \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(C)}} [\![x \in \pi^* X]\!] \Rightarrow [\![\varphi(x)]\!] =$$
$$= \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(C)}} \Bigg( \bigvee_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi \circ X(t) \wedge [\![x = \pi^* t]\!] \Bigg) \Rightarrow [\![\varphi(x)]\!] =$$
$$= \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(C)}} (\pi \circ X(t) \wedge [\![x = \pi^* t]\!]) \Rightarrow [\![\varphi(x)]\!] \leq$$
$$\leq \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi \circ X(t) \Rightarrow [\![\varphi(\pi^* t)]\!] =$$
$$= \bigwedge_{t \in \mathbb{V}^{(B)}} \Bigg( \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(C)}} (\pi \circ X(t))^* \vee [\![x = \pi^* t]\!]^* \vee [\![\varphi(\pi^* t)]\!] \Bigg) =$$

$$= \bigwedge_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} \bigwedge_{x\in\mathbb{V}^{(C)}} (\pi\circ X(t)\wedge [\![x=\pi^*t]\!]) \Rightarrow ([\![\varphi(\pi^*t)]\!]\wedge[\![x=\pi^*t]\!]) \leq$$

$$\leq \bigwedge_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} \bigwedge_{x\in\mathbb{V}^{(C)}} (\pi\circ X(t)\wedge [\![x=\pi^*t]\!]) \Rightarrow [\![\varphi(x)]\!] =$$

$$= \bigwedge_{x\in\mathbb{V}^{(C)}} \Bigg( \bigvee_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} \pi\circ X(t)\wedge[\![x=\pi^*t]\!]\Bigg) \Rightarrow [\![\varphi(x)]\!] =$$

$$= \bigwedge_{x\in\mathbb{V}^{(C)}} [\![x\in\pi^*X]\!] \Rightarrow [\![\varphi(x)]\!] = [\![(\forall\, x\in\pi^*X)\varphi(x)]\!].$$

**2.5.13.** *Для любых* $\mathbb{V}^{(B)}$*-классов* $X$ *и* $Y$ *выполняется*

$$[\![\pi^*X=\pi^*Y]\!]^C = \pi[\![X=Y]\!]^B,\quad [\![\pi^*X\in\pi^*Y]\!]^C = \pi[\![X\in Y]\!]^B.$$

$\lhd$ Прежде всего заметим, что $\pi\circ Y(t) = (\pi^*Y)(\pi^*t)$ или $\pi[\![t\in Y]\!]^B = [\![\pi^*t\in\pi^*Y]\!]^C$ при $t\in\mathbb{V}^{(B)}$. Это вытекает из 2.5.8 и 2.5.11 с помощью 2.2.2 (3). Далее, воспользовавшись первой из формул 2.5.12, без труда выводим

$$[\![\pi^*X\subset\pi^*Y]\!]^C = [\![(\forall\, x\in\pi^*X)(x\in\pi^*Y)]\!]^C =$$

$$= \bigwedge_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} \pi\circ X(t) \Rightarrow [\![\pi^*t\in\pi^*Y]\!]^C =$$

$$= \bigwedge_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} \pi([\![t\in X]\!]^B \Rightarrow [\![t\in Y]\!]^B) = \pi[\![X\subset Y]\!]^B.$$

Отсюда

$$[\![\pi^*X=\pi^*Y]\!]^C = [\![\pi^*X\subset\pi^*Y]\!]^C \wedge [\![\pi^*Y\subset\pi^*X]\!]^C = \pi[\![X=Y]\!]^B.$$

Наконец, принимая в расчет уже доказанное, по второй из формул 2.5.12 получаем

$$[\![\pi^*X\in\pi^*Y]\!]^C = [\![(\exists\, t\in\pi^*Y)\ (t=\pi^*X)]\!]^C =$$

$$= \bigvee_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} \pi\circ Y(t)\wedge[\![\pi^*t=\pi^*X]\!]^C =$$

$$= \bigvee_{t\in\mathbb{V}^{(B)}} \pi\Big(Y(t)\wedge[\![t=X]\!]^B\Big) = \pi[\![X\in Y]\!]^B.\ \rhd$$

**2.5.14.** Установленное в предыдущих пунктах позволяет перенести на рассматриваемый случай различные утверждения из 2.2. Отметим из них только следующие.

**(1)** *Если* $\varphi(Y_1, \dots, Y_n)$ — *ограниченная предикативная формула, то для любых* $\mathbb{V}^{(B)}$*-классов* $X_1, \dots, X_n$ *будет*

$$\pi[\![\varphi(X_1, \dots, X_n)]\!]^B = [\![\varphi(\pi^* X_1, \dots, \pi^* X_n)]\!]^C.$$

*Отсюда, в частности, следует, что если* $\pi$ — *мономорфизм, то*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(X_1, \dots, X_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(C)} \models \varphi(\pi^* X_1, \dots, \pi^* X_n).$$

**(2)** *Если* $\varphi$ — *предикативная формула класса* $\Sigma_1$*, то для тех же* $X_1, \dots, X_n$ *будет*

$$\pi[\![\varphi(X_1, \dots, X_n)]\!]^B \leq [\![\varphi(\pi^* X_1, \dots, \pi^* X_n)]\!]^C.$$

*В частности, верна импликация*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(X_1, \dots, X_n) \to \mathbb{V}^{(C)} \models \varphi(\pi^* X_1, \dots, \pi^* X_n).$$

$\triangleleft$ Доказательство проводится по схеме 2.2.3. Возьмем для примера случай ограниченного квантора общности: $\varphi := (\forall\, x \in Y)\psi$. Для $\mathbb{V}^{(B)}$-классов $Y, X_1, \dots, X_n$ в соответствии с 2.5.12 и 2.5.13 имеем

$$\begin{gathered}
[\![\varphi(\pi^* Y, \pi^* X_1, \dots, \pi^* X_n)]\!] = \\
= \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![\pi^* x \in \pi^* Y]\!] \Rightarrow [\![\psi(\pi^* x, \pi^* X_1, \dots, \pi^* X_n)]\!] = \\
= \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(B)}} \pi[\![x \in Y]\!] \Rightarrow \pi[\![\psi(x, X_1, \dots, X_n)]\!] = \\
= \pi\Bigg( \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![x \in Y]\!] \Rightarrow [\![\psi(x, X_1, \dots, X_n)]\!] \Bigg) = \\
= \pi[\![(\forall\, x \in Y)\psi(x, X_1, \dots, X_n)]\!] = \pi[\![\varphi(Y, X_1, \dots, X_n)]\!]. \ \triangleright
\end{gathered}$$

**2.5.15.** Используя каноническое вложение $(\,\cdot\,)^\wedge : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^{(B)}$, можно каждому классу $X \subset \mathbb{V}$ сопоставить $\mathbb{V}^2$-класс $X'$ по формуле

$$X'(t) := \begin{cases} \mathbb{1}_2, & \text{если} \ \ (\exists\, x \in X)(t = x^\wedge), \\ \mathbb{0}_2, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Экстенсиональность $X'$ тривиально следует из 2.1.8 (4). Далее, положим $X^\wedge := \imath^{*}``X'$, где $\imath$ — тождественное вложение $2$ в $B$. Итак, $X^\wedge$ есть $\mathbb{V}^{(B)}$-класс, для которого

$$X^\wedge(t) = \bigvee\{[\![t = x^\wedge]\!] : x \in X\} \quad (t \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Отметим, что поскольку $\mathrm{Ord}\,(X)$ — ограниченная предикативная формула, то в силу 2.2.8 (4), 2.2.9 (1) и 2.5.14 $\mathrm{On}^\wedge$ — ординальный класс внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Ord}\,(\mathrm{On}^\wedge)$.

Формулы 2.5.12, очевидно, могут быть специализированы:

$$[\![(\forall\, x \in Y^\wedge)\varphi(x)]\!] = \bigwedge\{\varphi(x^\wedge)]\!] : x \in Y\},$$
$$[\![(\exists\, x \in Y^\wedge)\varphi(x)]\!] = \bigvee\{[\![\varphi(x^\wedge)]\!] : x \in Y\}.$$

**2.5.16.** *Пусть $\varphi$ и $\psi$ — предикативные формулы со свободными переменными $X, X_1, \dots, X_n$, а $Y_1, \dots, Y_n$ — некоторые $\mathbb{V}^{(B)}$-классы. Тогда при условии, что $[\![\varphi(x_0, Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$, будет*

$$[\![(\exists\, x)(\varphi(x, Y_1, \dots, Y_n) \vee \psi(x, Y_1, \dots, Y_n))]\!] =$$
$$= \bigvee\{[\![\psi(x, Y_1, \dots, Y_n)]\!] : x \in \mathbb{V}^{(B)} \wedge [\![\varphi(x, Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \mathbb{1}\},$$
$$[\![(\forall\, x)(\varphi(x, Y_1, \dots, Y_n) \to \psi(x, Y_1, \dots, Y_n))]\!] =$$
$$= \bigwedge\{[\![\psi(x, Y_1, \dots, Y_n)]\!] : x \in \mathbb{V}^{(B)} \wedge [\![\varphi(x, Y_1, \dots, Y_n)]\!] = \mathbb{1}\}.$$

$\triangleleft$ Доказательство проводится по той же схеме, что и в 2.3.8. $\triangleright$

**2.5.17.** ***Теорема*** (принцип максимума). *Пусть $\varphi(x)$ — предикативная $B$-формула от одной свободной переменной ($\varphi$ может содержать константы, являющиеся $\mathbb{V}^{(B)}$-классами или $\mathbb{V}^{(B)}$-множествами). Тогда имеют место следующие утверждения:*

**(1)** *существует элемент $x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого*

$$[\![(\exists\, x)\varphi(x)]\!] = [\![\varphi(x_0)]\!];$$

**(2)** *если $\mathbb{V}^{(B)} \models (\exists\, x)\varphi(x)$, то существует элемент $x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_0)$;*

**(3)** *если $\mathbb{V}^{(B)} \models (\exists! x)\varphi(x)$, то существует единственный элемент $x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_0)$.*

◁ Доказательство, основанное на принципе перемешивания (см. 2.5.3), ничем не отличается от рассуждений, приведенных в 2.3.10 и 2.5.4. ▷

**2.5.18. *Теорема*** (принцип переноса). *Все теоремы* NGB *истинны в модели* $\mathbb{V}^{(B)}$.

◁ Достаточно убедиться в справедливости аксиом NGB внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

**(1)** Истинность аксиомы экстенсиональности для классов внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ следует сразу же из определений 2.5.8 и 2.5.9. Утверждение $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{NGB}_2$–$\mathrm{NGB}_5$ установлено в 2.4.

**(2)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{NGB}_6$. Это доказывается так же, как и в 2.4.5. Нужно только выражения $\varphi(t,u)$ всюду заменить на $(t,u) \in X$ (см. 2.4.5 и 1.3.4).

**(3)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \bigwedge_{k=7}^{13} \mathrm{NGB}_k$. Достаточно убедиться в том, что внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ истинно утверждение 1.3.14, частными случаями которого являются аксиомы $\mathrm{NGB}_7$–$\mathrm{NGB}_{13}$. Пусть формула $\varphi(X_1,\dots,X_n, Y_1,\dots,Y_m)$ удовлетворяет всем условиям из 1.3.14. Рассмотрим произвольные $\mathbb{V}^{(B)}$-классы $Y_1,\dots,Y_m$ и определим $\mathbb{V}^{(B)}$-класс $Z$ формулой

$$Z(t) := [\![(\exists\, x_1,\dots,x_n)(t = (x_1,\dots,x_n)\wedge \wedge\varphi(x_1,\dots,x_n,Y_1,\dots,Y_m))]\!].$$

Легко проверить, что тогда

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x_1,\dots,x_n)(\exists\, t)((t = (x_1,\dots,x_n)\wedge \wedge t \in Z \leftrightarrow \varphi(x_1,\dots,x_n,Y_1,\dots,Y_N))).$$

**(4)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{NGB}_{14}$. Заменив в 2.4.7 малую латинскую букву $x$ на прописную $X$, получим требуемые рассуждения.

**(5)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{NGB}_{15}$. Пусть $G$ — функция из On на $\mathbb{V}^{(B)}$. Положим

$$F(t) := \bigvee\{[\![t = (\alpha^\wedge, G(\alpha))^B]\!] : \alpha \in \mathrm{On}\}.$$

Тогда $F$ есть $\mathbb{V}^{(B)}$-класс и аналогично тому, как это сделано в 2.4.10, можно просто вычислить: $[\![\mathrm{Fnc}\,(F)]\!] = \mathbb{1}$, $[\![\mathrm{Ord}\,(\mathrm{On}^\wedge) \wedge \mathrm{dom}(F) = \mathrm{On}^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\mathrm{im}(F) \supset \mathbb{U}_B]\!] = \mathbb{1}$. Таким образом, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ универсальный класс $\mathbb{U}_B$ можно вполне упорядочить. Отсюда вытекает, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «существует выбирающая функция для класса $\mathbb{U}^{(B)}$». ▷

**2.5.19.** Теорема 2.5.18 дает возможность оперировать с классами внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. В качестве примера рассмотрим определение категории в булевозначной модели.

*Категория* $\mathfrak{K}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ состоит из классов $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$, $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$, $\mathrm{Com}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, называемых соответственно *классом объектов, классом морфизмов, композицией категории* $\mathfrak{K}$, таких, что $\mathbb{V}^{(B)} \models (\mathfrak{K}1)$–$(\mathfrak{K}3)$:

($\mathfrak{K}1$) существуют отображения $D$ и $R$ из $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ в $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ такие, что для любых объектов $a$ и $b$ класс $\mathfrak{K}(a,b) := H_{\mathfrak{K}}(a,b) := \{\alpha \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K} : D(\alpha) = a, R(\alpha) = b\}$ является множеством (называемым *множеством морфизмов из $a$ в $b$*);

($\mathfrak{K}2$) $\mathrm{Com}$ — ассоциативная частичная бинарная операция на $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$, причем

$$\mathrm{dom}(\mathrm{Com}) := \{(\alpha,\beta) \in (\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K})^2 : D(\beta) = R(\alpha)\};$$

($\mathfrak{K}3$) для каждого объекта $a \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ существует морфизм $1_a$, называемый *тождественным морфизмом объекта* $a$, для которого $D(1_a) = R(1_a) = a$, $\mathrm{Com}(1_a, \alpha) = \alpha$ при $D(\alpha) = a$ и $\mathrm{Com}(\beta, 1_a) = \beta$ при $R(\beta) = a$.

Вместо $\mathrm{Com}(\alpha,\beta)$ обычно пишут $\beta\alpha$ или $\beta \circ \alpha$.

**2.5.20.** Примечания.

**(1)** Модель $\mathbb{V}^{(B)}$ можно характеризовать аксиоматически следующим образом. Существует единственный с точностью до сохраняющей булевы оценки истинности биекции класс $\mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющий условиям:

- **(a)** имеются два отображения $[\![\cdot \in \cdot]\!]$, $[\![\cdot = \cdot]\!] : \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)} \to B$ такие, что обычные аксиомы равенства истинны внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. 2.1.7, 2.1.8);
- **(b)** $\mathbb{V}^{(B)}$ отделим, т. е. $[\![x = y]\!] = \mathbb{1}_B$ влечет $x = y$ при $x, y \in \mathbb{V}^{(B)}$;
- **(c)** аксиомы экстенсиональности и фундирования истинны внутри $\mathbb{V}^{(B)}$;
- **(d)** для $\mathbb{V}^{(B)}$ справедливо утверждение 2.5.6.

**(2)** Пусть $\pi$ — полный гомоморфизм из $B$ в полную булеву алгебру $C$. Тогда $\pi^*$ — единственное отображение из $\mathbb{V}^{(B)}$ в $\mathbb{V}^{(C)}$, для которого, во-первых, $[\![\pi^* x = \pi^* y]\!]^C = \pi[\![x = y]\!]^B \quad (x, y \in \mathbb{V}^{(B)})$, а, во-вторых, при $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $z \in \mathbb{V}^{(C)}$ будет выполнено неравенство $[\![z \in \pi^* y]\!]^C \le \sup\{[\![z = \pi^* x]\!] : x \in \mathbb{V}^{(B)}\}$.

# Глава 3

# Функторы булевозначного анализа

Принципы переноса и максимума позволяют проводить внутри булевозначного универсума конструкции, обычные для математической практики. В булевозначной модели имеются поля вещественных и комплексных чисел, банаховы пространства, дифференциальные операторы и т. д. Изображающие их объекты можно воспринимать как нестандартные реализации исходных математических образований.

Таким образом, считая модель $\mathbb{V}^{(B)}$ нестандартным представлением математического мира и учитывая, что $\mathbb{V}^{(B)}$ строится в пределах универсума фон Неймана, мы можем заглянуть внутрь булевозначного мира и увидеть нестандартные изображения стандартных объектов. При переборе алгебр $B$ взору наблюдателя открываются многие ипостаси одной и той же идеи, выраженной теоретико-множественной формулой. Сравнение таких ипостасей между собой составляет метод исследования заложенной в них математической идеи. При этом обнаруживается, что существенно различные аналитические объекты являются просто разными реализациями одной и той же концепции. Тем самым выявляются внутренние причины многих неочевидных параллелей и аналогий, а также возникают дополнительные возможности для изучения старых объектов.

Изложенное напоминает знаменитую платонову пещеру. Если кому-то удалось вырваться из этой пещеры, то он, желая поведать увиденное остальным, мог бы ночью зажечь снаружи пещеры

несколько костров. Тогда каждая вещь на поверхности проявится внутри пещеры не одной тенью (как у Платона), а набором различимых теней. Теперь узники пещеры могут постигать суть недоступных вещей, изучая множество теней, несущих бóльшую информацию.

Сравнительный анализ объектов с помощью булевозначных моделей проводится в два этапа, которые условно можно назвать синтаксическим и семантическим.

На *синтаксическом этапе* изучаемое математическое утверждение (определение, конструкция, свойство и т. п.) превращается в формальный текст символического языка теории множества, а точнее, в текст подходящего арго. Здесь часто приходится изучать сложность полученного текста и, в частности, выяснять, является ли этот текст или какие-то его фрагменты ограниченными формулами.

*Семантический этап* заключается в интерпретации имеющегося формального текста в булевозначном универсуме. Здесь в терминах обычной теории множеств, т. е. в универсуме фон Неймана $\mathbb{V}$, осмысливаются (дешифруются, переводятся) тексты, содержащие утверждения, истинные для объектов булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$. Это делается с помощью точно определенных операций над элементами и подмножествами булевозначного универсума и универсума фон Неймана.

В текущей главе рассматриваются основные операции булевозначного анализа — каноническое вложение, спуск, подъем и погружение. Важнейшие свойства этих операций удобно формулировать, привлекая понятия категории и функтора. Читатель может освежить свои знания основ теории категорий с помощью Приложения.

## 3.1. Каноническое вложение

Здесь мы более подробно изучим способ вложения класса всех множеств в булевозначный универсум.

**3.1.1.** ***Теорема.*** *Справедливы следующие утверждения:*

**(1)** *если класс $X \subset \mathbb{V}$ и элемент $z \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что $\mathbb{V}^{(B)} \models z \in X^{\wedge}$, то $z = \operatorname{mix}_{x\in X}(b_x x^{\wedge})$ для некоторого разбиения единицы $(b_x)_{x\in X}$ в $B$;*

**(2)** *для $\mathbb{V}^{2}$-класса $Y$ существует единственный класс $X \subset \mathbb{V}$ такой, что $\mathbb{V}^{2} \models X^{\wedge} = Y$;*

**(3)** *для $X \subset \mathbb{V}$ и $Y \subset \mathbb{V}$ выполняется*

$$X \in Y \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models X^\wedge \in Y^\wedge, \quad X = Y \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models X^\wedge = Y^\wedge;$$

**(4)** *если $\pi : B \to C$ — полный гомоморфизм, то $\pi^* X^\wedge = X^{\overset{\wedge}{\wedge}}$ для каждого класса $X \subset \mathbb{V}$, где $X^{\overset{\wedge}{\wedge}}$ — каноническое вложение $X$ в $\mathbb{V}^{(C)}$.*

$\lhd$ (1) Для $x \in X$ положим $b_x := [\![x^\wedge = z]\!]$. Тогда при $x, y \in X$, $x \neq y$, в силу 2.2.8 (2) выполняется

$$b_x \wedge b_y \leq [\![x^\wedge = y^\wedge]\!] = \mathbb{0}.$$

С другой стороны,

$$\bigvee\{b_x : x \in X\} = X^\wedge(z) = [\![z \in X^\wedge]\!] = \mathbb{1},$$

так что $(b_x)_{x \in X}$ — разбиение единицы и $z = \operatorname{mix}_{x \in X}(b_x x^\wedge)$.

(2) Следует из 2.2.8. В самом деле, если $X' := \{y \in \mathbb{V}^{(2)} : [\![y \in Y]\!] = \mathbb{1}_2\}$ и $X := \{x \in \mathbb{V} : x^\wedge \in X'\}$, то для $t \in \mathbb{V}^{(2)}$ по 2.2.8 (3, 4) будет

$$X^\wedge(t) = \bigvee\{[\![t = x^\wedge]\!]^2 : x \in X\} = \bigvee\{[\![t = x^\wedge]\!]^2 : Y(x) = \mathbb{1}_2\} =$$
$$= \bigvee\{Y(x) \wedge [\![t = x^\wedge]\!]^2 : x \in \mathbb{V}^{(2)}\} = Y(t).$$

Единственность вытекает из 2.2.8 (4) и 2.5.15.

(3) Нужно сопоставить 2.5.15 и (2).

(4) Если $\imath_1$ и $\imath_2$ — вложения алгебры $2$ в $B$ и $C$ соответственно, то $\pi \circ \imath_1 = \imath_2$ и в силу 2.5.11

$$\pi^* X^\wedge = \pi^* \circ \imath_1^*(X^\wedge) = \imath_2^* X^\wedge = X^{\overset{\wedge}{\wedge}}. \ \rhd$$

**3.1.2.** *Если $x$ и $y$ — некоторые множества, то*

$$\{x\}^\wedge = \{x^\wedge\}^B, \quad \{x, y\}^\wedge = \{x^\wedge, y^\wedge\}^B, \quad (x, y)^\wedge = (x^\wedge, y^\wedge)^B.$$

$\lhd$ Все три формулы ограничены, поэтому из 2.2.9 выводим

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \{x\}^\wedge = \{x^\wedge\} \wedge \{x, y\}^\wedge = \{x^\wedge, y^\wedge\} \wedge (x, y)^\wedge = (x^\wedge, y^\wedge).$$

Остается привлечь нужные соотношения из 2.4.8. $\rhd$

**3.1.3.** *Пусть формула* $\varphi$ *класса* $\Sigma_1$ *удовлетворяет всем условиям теоремы 1.3.14. Возьмем классы* $Z_1, \dots, Z_n, Y_1, \dots, Y_m$, *и пусть класс* $Y$ *определяется формулой*

$$Y := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in Z_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in Z_n \wedge \\ \wedge \varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)\}.$$

*Тогда внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *имеет место соотношение*

$$Y^\wedge = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in Z_1^\wedge \wedge \ldots \wedge x_n \in Z_n^\wedge \wedge \\ \wedge \varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1^\wedge, \dots, Y_m^\wedge)\}.$$

$\lhd$ Согласно теореме 1.3.14 $Y$ — единственный класс, удовлетворяющий $\Phi(Z_1, \dots, Z_n, Y_1, \dots, Y_m)$ и $\Psi(Z_1, \dots, Z_n, Y_1, \dots, Y_m)$, где $\Phi$ и $\Psi$ имеют вид

$$\Phi := (\forall u \in Y)(\exists x_1 \in Z_1) \ldots (\exists x_n \in Z_n)(u = (x_1, \dots, x_n) \wedge \varphi(x_1, \dots, Y_m)),$$
$$\Psi := (\forall\, x_1 \in Z_1) \ldots (\forall\, x_n \in Z_n)(\exists\, u) \\ (u = (x_1, \dots, x_n) \wedge \varphi(x_1, \dots, Y_m) \to u \in Y).$$

Как видно, $\Phi$ и $\Psi$ — формулы класса $\Sigma_1$, значит, по 2.5.14 будет

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi(Z_1^\wedge, \dots, Y_m^\wedge) \wedge \Psi(Z_1^\wedge, \dots, Y_m^\wedge).$$

Последнее равносильно требуемому. $\rhd$

**3.1.4.** *Для любых классов* $X \subset \mathbb{V}$ *и* $Y \subset \mathbb{V}$ *справедливы утверждения*:

**(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (X \cup Y)^\wedge = X^\wedge \cup Y^\wedge$;
**(2)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (X \times Y)^\wedge = X^\wedge \times Y^\wedge$;
**(3)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (\bigcup X)^\wedge = \bigcup (X^\wedge)$;
**(4)** $\mathrm{Rel}\,(X) \to \mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Rel}\,(X^\wedge)$;
**(5)** $(F : X \to Y) \to \mathbb{V}^{(B)} \models F^\wedge : X^\wedge \to Y^\wedge$;
**(6)** $\mathrm{Rel}\,(X) \to \mathbb{V}^{(B)} \models (X``Y)^\wedge = (X^\wedge)``(Y^\wedge)$;
**(7)** $\mathrm{Rel}\,(X) \to \mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{dom}(X^\wedge) = \mathrm{dom}(X)^\wedge \wedge \mathrm{im}(X^\wedge) = \mathrm{im}(X)^\wedge$.

$\lhd$ Формулы (1)–(5) следуют из 3.1.3 (см. П.1.11, П.1.12). Для получения (6) и (7) нельзя применить 3.1.3. Поэтому мы выведем их прямым подсчетом, привлекая 2.4.9, 3.1.1 и 3.1.2.

Начнем с выкладки для (6):

$$\llbracket t \in (X^\wedge)``(Y^\wedge)\rrbracket = \llbracket (\exists\, u \in X^\wedge)(\exists\, v \in Y^\wedge)(u = (v,t))\rrbracket =$$
$$= \bigvee_{u\in X}\bigvee_{v\in Y}\llbracket u^\wedge = (v^\wedge, t)\rrbracket = \bigvee_{v\in Y}\ \bigvee_{(z,w)\in X}\llbracket z^\wedge = v^\wedge\rrbracket \wedge \llbracket w^\wedge = t\rrbracket =$$
$$= \bigvee\{\llbracket w^\wedge = t\rrbracket : v \in Y, (v,w) \in X\} =$$
$$= \llbracket (\exists\, w \in (X^\wedge)``(Y^\wedge))\,(t = w)\rrbracket = \llbracket t \in (X``Y)^\wedge\rrbracket.$$

Завершим доказательство выкладкой для (7):

$$\llbracket t \in \mathrm{dom}(X^\wedge)\rrbracket = \llbracket (\exists\, u \in X^\wedge)(\exists\, v)(u = (t,v))\rrbracket =$$
$$= \bigvee_{(z,w)\in X}\ \bigvee_{v\in\mathbb{V}^{(B)}}\llbracket z^\wedge = t\rrbracket \wedge \llbracket w^\wedge = v\rrbracket =$$
$$= \bigvee\{\llbracket z^\wedge = t\rrbracket : z \in \mathrm{dom}(X)\} = \llbracket t \in \mathrm{dom}(X)^\wedge\rrbracket. \ \rhd$$

**3.1.5. *Теорема.*** *Пусть $X$ и $Y$ — непустые множества, $F \subset X \times Y$. Рассмотрим соответствие $\Phi := (F, X, Y)$. Тогда элемент $\Phi^\wedge \in \mathbb{V}^{(B)}$ удовлетворяет следующим условиям:*

**(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi^\wedge$ *— соответствие из $X^\wedge$ в $Y^\wedge$ и $\mathrm{Gr}(\Phi^\wedge) = F^\wedge$;*

**(2)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi^\wedge(A^\wedge) = \Phi(A)^\wedge$ *при всех $A \in \mathscr{P}(X)$;*

**(3)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (\Psi \circ \Phi)^\wedge = \Psi^\wedge \circ \Phi^\wedge$ *для любого соответствия $\Psi$;*

**(4)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (I_X)^\wedge = I_{X^\wedge}$.

$\lhd$ (1) Если формула $\varphi(X, Y, F, \Phi)$ утверждает, что $\Phi$ — соответствие из $X$ в $Y$ и $F = \mathrm{Gr}(\Phi)$, то $\varphi$ — ограниченная формула и требуемое вытекает из 2.2.9.

(2) Следует из 3.1.4 (6).

(3), (4) Опять имеем дело с ограниченными формулами, поэтому достаточно сослаться на 2.2.9. $\rhd$

**3.1.6. *Следствие.*** *Для любого отображения $f : X \to Y$ элемент $f^\wedge$ удовлетворяет условиям*

**(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models f^\wedge : X^\wedge \to Y^\wedge$;

**(2)** $\mathbb{V}^{(B)} \models f^\wedge(x^\wedge) = f(x)^\wedge$ *при всех $x \in X$;*

**(3)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (g \circ f)^\wedge = g^\wedge \circ f^\wedge$ *для любого $g : Y \to Z$.*

**3.1.7.** Введем категории $\mathscr{V}_*$ и $\mathscr{V}_*^{(B)}$, связанные с универсумами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^{(B)}$. Не оговаривая каждый раз особо, условимся предполагать, что классы объектов и морфизмов категории не пересекаются (этого можно добиться, применяя разные индексы, см. П.3.2). Пусть $\mathscr{V}_*$ — категория непустых множеств и соответствий. Так что $\mathrm{Ob}\,\mathscr{V}_* := \mathbb{V}\setminus\{\varnothing\}$ и $\mathscr{V}_*(x,y)$ — множество всех непустых соответствий из $x$ в $y$. Композиция — это обычная суперпозиция соответствий.

Класс объектов категории $\mathscr{V}_*^{(B)}$ — непустые $\mathbb{V}^{(B)}$-множества:

$$\mathrm{Ob}\,\mathscr{V}_*^{(B)} := \{x\in\mathbb{V}^{(B)} : [\![x\neq\varnothing]\!]=\mathbb{1}\}.$$

Множество морфизмов из объекта $x\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{V}_*^{(B)}$ в объект $y\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{V}_*^{(B)}$ определяется формулой

$$\mathscr{V}_*^{(B)}(x,y) := \{\alpha\in\mathbb{V}^{(B)} : [\![\alpha\subset x\times y \text{ и } \mathrm{Gr}(\alpha)\neq\varnothing]\!]=\mathbb{1}\}.$$

Если $\alpha$ и $\beta$ — морфизмы категории $\mathscr{V}_*^{(B)}$, причем $[\![D(\beta)=R(\alpha)]\!]=\mathbb{1}$, то по принципу максимума существует единственный элемент $\gamma\in\mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $[\![\gamma=\beta\circ\alpha]\!]=\mathbb{1}$. Элемент $\gamma$ принимается в качестве композиции морфизмов $\alpha$ и $\beta$ в категории $\mathbb{V}^{(B)}$.

Подкатегории $\mathscr{V}_*$ и $\mathscr{V}_*^{(B)}$, состоящие из тех же объектов и из отображений в качестве морфизмов, обозначим соответственно через $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}^{(B)}$. Пусть $\mathscr{F}^\wedge$ символизирует отображение из $\mathscr{V}_*$ в $\mathscr{V}_*^{(B)}$, сопоставляющих множеству $x\in\mathbb{V}\setminus\{\mathbb{0}\}$ и соответствию $\alpha$ элементы $x^\wedge\in\mathbb{V}^{(B)}$ и $\alpha^\wedge\in\mathbb{V}^{(B)}$. Из 3.1.5 и 3.1.6 вытекает

**3.1.8. *Теорема.*** *Отображение $\mathscr{F}^\wedge$ — ковариантный функтор из категории $\mathscr{V}_*$ в категорию $\mathscr{V}_*^{(B)}$ (и также из категории $\mathscr{V}$ в $\mathscr{V}^{(B)}$).*

Функтор $\mathscr{F}^\wedge$ (а также его ограничение на подкатегорию $\mathscr{V}$) называют *функтором канонического вложения* или же *функтором стандартного имени.*

**3.1.9.** Остановимся на свойствах ординалов внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

**(1)** Нам уже известно (см. 2.4.10), что $\mathrm{Ord}\,(X)$ — ограниченная формула. Поскольку $\lim(\alpha)\leq\alpha$ для всякого ординала $\alpha$, то формулу $\mathrm{Ord}\,(x)\wedge x=\lim(x)$ можно записать в виде $\mathrm{Ord}\,(x)\wedge(\forall\,t\in x)(\exists\,s\in x)(t\in s)$, а значит, она также ограничена. Наконец, запись

$$\mathrm{Ord}\,(x)\wedge x=\lim(x)\wedge(\forall\,t\in x)(t=\lim(t)\to t=0)$$

убеждает, что «наименьший предельный ординал» — также ограниченная формула. Таким образом, согласно 2.2.9 $\alpha$ — (наименьший) предельный ординал в том и только в том случае, когда $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\alpha^\wedge$ — (наименьший) предельный ординал». Так как $\omega$ — наименьший предельный ординал (см. 1.4.6), то $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\omega^\wedge$ — наименьший предельный ординал».

**(2)** Из 1.4.5 (2), 2.5.15 и 2.5.16 следует, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathrm{On}^\wedge$ — единственный ординальный класс, не являющийся ординалом». Таким образом, для любого $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ имеет место соотношение

$$[\![\mathrm{Ord}\,(x)]\!] = \bigvee\{[\![x = \alpha^\wedge]\!] : \alpha \in \mathrm{On}\}.$$

**(3)** *Для произвольного* $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ *выполнено* $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Ord}\,(x)$ *в том и только в том случае, если существуют ординал* $\beta \in \mathrm{On}$ *и разбиение единицы* $(b_\alpha)_{\alpha\in\beta} \subset B$ *такие, что* $x = \mathrm{mix}_{\alpha\in\beta}(b_\alpha\alpha^\wedge)$. *Иными словами, любой ординал внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *есть перемешивание некоторого множества стандартных ординалов.*

$\lhd$ Этот факт вытекает из (2) и 3.1.1 (1). $\rhd$

**(4)** Из 2.5.16 получаем формулы квантификации по ординалам:

$$[\![(\forall\, x)(\mathrm{Ord}\,(x) \to \psi(x))]\!] = \bigwedge_{\alpha\in\mathrm{On}} [\![\psi(\alpha^\wedge)]\!],$$
$$[\![(\exists\, x)(\mathrm{Ord}\,(x) \wedge \psi(x))]\!] = \bigvee_{\alpha\in\mathrm{On}} [\![\psi(\alpha^\wedge)]\!].$$

**3.1.10.** Класс $X$ называют *конечным*, если $X$ совпадает с образом некоторой функции, определенной на конечном ординале. Символически конечность класса $X$ записывают в виде $\mathrm{Fin}(X)$, так что

$$\mathrm{Fin}(X) := (\exists\, n)(\exists\, f)(n \in \omega \wedge \mathrm{Fnc}\,(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = n \wedge \mathrm{im}(f) = X).$$

Легко заметить, что выписанная формула не ограничена. Поскольку в силу $\mathrm{NGB}_6$ выполнено $\mathrm{Fin}(X) \to M(X)$, вместо конечных классов мы будем говорить о конечных множествах. Символом $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ обозначен класс всех конечных подмножеств класса $X$, т. е.

$$\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) := \{Y \in \mathscr{P}(X) : \mathrm{Fin}(Y)\}.$$

Выясним теперь, что происходит с конечными множествами при каноническом вложении $\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. узнаем, что из себя представляет класс $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^{\wedge}$. Сначала покажем, что

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^{\wedge} \subset \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X^{\wedge}).$$

$\lhd$ Заметим, что если $f$ — отображение из некоторого $n \in \omega$ в $X$, то $[\![\mathrm{im}(f^{\wedge}) \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}$. Действительно, по 3.1.6 $[\![f^{\wedge} : n^{\wedge} \to X^{\wedge}]\!] = [\![n^{\wedge} \in \omega^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$, поэтому

$$[\![\mathrm{im}(f^{\wedge}) \in \mathscr{P}(X^{\wedge}) \wedge \mathrm{Fin}(\mathrm{im}(f^{\wedge}))]\!] = \mathbb{1}.$$

Теперь для произвольного $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ легко сосчитать (см. 2.2.8 (1), 3.1.4 (7), 3.1.6):

$$\begin{gathered}
[\![t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^{\wedge}]\!] = \\
= \bigvee_{u \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)} [\![t = u^{\wedge}]\!] = \bigvee_{n \in \omega} \bigvee_{f : n \to X} [\![t = \mathrm{im}(f)^{\wedge}]\!] = \\
= \bigvee_{n \in \omega} \bigvee_{f : n \to X} [\![t = \mathrm{im}(f^{\wedge})]\!] \wedge [\![n^{\wedge} \in \omega^{\wedge}]\!] \wedge [\![f^{\wedge} : n^{\wedge} \to X^{\wedge}]\!] \leq \\
\leq [\![t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X^{\wedge})]\!]. \ \rhd
\end{gathered}$$

**3.1.11.** *Для любого класса $X$ выполняется*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^{\wedge} = \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X^{\wedge}).$$

$\lhd$ Предположим, что для $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ справедливы равенства

$$[\![t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X^{\wedge})]\!] = [\![(\exists n \in \omega^{\wedge})(\exists f)(f : n \leftrightarrow X^{\wedge} \wedge t = \mathrm{im}(f)]\!] = \mathbb{1}.$$

Тогда существует такое счетное разбиение единицы $(b^{(n)})_{n \in \omega} \subset B$, что

$$[\![(\exists\, f)(f : n^{\wedge} \to X^{\wedge} \wedge t = \mathrm{im}(f)]\!] \geq b^{(n)} \quad (n \in \omega).$$

Для каждого $n \in \omega$ по принципу максимума можно подыскать $f'_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ так, чтобы было выполнено неравенство

$$[\![f'_n : n^{\wedge} \to X^{\wedge}]\!] \wedge [\![t = \mathrm{im}(f'_n)]\!] \geq b^{(n)}.$$

Пользуясь утверждением 3.1.6, подберем $f_n'' \in \mathbb{V}^{(B)}$ так, чтобы $[\![f_n'' : n^\wedge \to X^\wedge]\!] \geq (b^{(n)})^*$, и положим $f_n := \operatorname{mix}\{b^{(n)} f_n',\ (b^{(n)})^* f_n''\}$. Тогда $[\![f_n : n^\wedge \to X^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![t = \operatorname{im}(f_n)]\!] \geq b^{(n)}$. Далее, для каждого $k \in n$ имеем $[\![f_n(k^\wedge) \in X^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Следовательно, $f_n(k) = \operatorname{mix}(b_x^{(k)} x^\wedge)$ для некоторого разбиения единицы $(b_x^{(k)})_{x \in X}$ (см. 3.1.1 (1)). Таким образом,

$$[\![f_n(k^\wedge) = x^\wedge]\!] \geq b_x^{(k)} \quad (x \in X, k \in n).$$

Пусть $X^n$ — как обычно, класс всех отображений из $n$ в $X$. Заметим, что для $g \in X^n$ и $k \in n$ будет

$$[\![f_n(k^\wedge) = g^\wedge(k^\wedge)]\!] = [\![f_n(k^\wedge) = g(k)^\wedge]\!] \geq b_{g(k)}^{(k)},$$

стало быть, $[\![f_n = g^\wedge]\!] \geq b_{g,n}$, где $b_{g,n} := \bigwedge\{b_{g(k)}^{(k)} : k \in n\}$. Но тогда выполнено также

$$[\![\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(g^\wedge)]\!] \geq b_{g,n} \quad (g \in X^n).$$

По определению $\operatorname{im}(g) \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)$, а в силу 3.1.4 (7) верно

$$[\![\operatorname{im}(g^\wedge) \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^\wedge]\!] = \mathbb{1}.$$

Отсюда получаем

$$[\![t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^\wedge]\!] \geq [\![t = \operatorname{im}(f_n)]\!] \wedge$$
$$\wedge [\![\operatorname{im}(f_n) = \operatorname{im}(g^\wedge)]\!] \wedge [\![\operatorname{im}(g^\wedge) \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^\wedge]\!] \geq b^{(n)} \wedge b_{g,n}.$$

Пользуясь определением элемента $b_{g,n}$ и дистрибутивными законами 1.1.5 (1, 2), можно сосчитать:

$$\bigvee\{b^{(n)} \wedge b_{g,n} : n \in \omega \wedge g \in X^n\} = \bigvee_{n \in \omega} b^{(n)} \wedge \Big(\bigvee_{g \in X^n} \bigwedge_{k \in n} b_{g(k)}^{(k)}\Big) =$$
$$= \bigvee_{n \in \omega} b^{(n)} \wedge \Big(\bigwedge_{k \in n} \bigvee_{g \in X^n} b_{g(k)}^{(k)}\Big) = \bigvee_{n \in \omega} b^{(n)} \wedge \Big(\bigwedge_{k \in n} \bigvee_{x \in X} b_x^{(k)}\Big) = \bigvee_{n \in \omega} b^{(n)} = \mathbb{1}.$$

Как видно, $[\![t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Поэтому, привлекая 2.5.16, можно заключить,что $[\![\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X^\wedge) \subset \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Противоположное включение обосновано в 3.1.10. $\triangleright$

**3.1.12.** *Для любого класса $X$ и для каждого $n \in \omega$ имеют место соотношения*

**(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (X^n)^\wedge = (X^\wedge)^{n^\wedge}$;

**(2)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{P}(X)^\wedge \subset \mathscr{P}(X^\wedge)$.

$\lhd$ (1) Принимая в расчет 3.1.6, для произвольного $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ можно написать:

$$\llbracket t \in (X^n)^\wedge \rrbracket = \bigvee \{ \llbracket t = u^\wedge \rrbracket : u \in X^n \} =$$
$$= \bigvee \{ \llbracket t = u^\wedge \rrbracket \wedge \llbracket u^\wedge : n^\wedge \to X^\wedge \rrbracket : u \in X^n \} \leq$$
$$\leq \bigvee \{ \llbracket t = u \rrbracket \wedge \llbracket u : n^\wedge \to X^\wedge \rrbracket : u \in \mathbb{V}^{(B)} \} =$$
$$= \llbracket (\exists\, u)(u : n^\wedge \to X^\wedge \wedge t = u) \rrbracket = \llbracket t \in (X^\wedge)^{n^\wedge} \rrbracket.$$

Этим установлено равенство

$$\llbracket (X^n)^\wedge \subset (X^\wedge)^{n^\wedge} \rrbracket = \mathbb{1}.$$

Для оценки истинности обратного включения рассмотрим такой элемент $u \in \mathbb{V}^{(B)}$, что $\llbracket u : n^\wedge \to X^\wedge \rrbracket = \mathbb{1}$. Тогда $\llbracket u(k^\wedge) \in X^\wedge \rrbracket = \mathbb{1}$ $(k \in n)$, значит, $\llbracket u(k^\wedge) = \operatorname{mix}(b_x^{(k)} x^\wedge) \rrbracket = \mathbb{1}$ для некоторого разбиения единицы $(b_x^{(k)})_{x \in X}$ (см. 3.1.1 (1)). Переходя к более мелким разбиениям единицы, если нужно, можно подобрать такое разбиение единицы, $(b_\xi)$ и такие семейства $(x_{k,\xi}) \subset X$ $(k \in n)$, что $\llbracket u(k^\wedge) = \operatorname{mix}(b_\xi x_{k,\xi}^\wedge) \rrbracket = \mathbb{1}$ для всех $k \in n$. Определим функции $u_\xi : n \to X$ соотношениями $u_\xi(k) := x_{k,\xi}$. Тогда $\llbracket u = u_\xi^\wedge \rrbracket \geq b_\xi$ и $\llbracket u_\xi^\wedge \in (X^n)^\wedge \rrbracket = \mathbb{1}$, значит, $\llbracket u \in (X^n)^\wedge \rrbracket = \mathbb{1}$. В силу 2.5.16 получаем $\llbracket (X^\wedge)^{n^\wedge} \subset (X^n)^\wedge \rrbracket = \mathbb{1}$.

(2) Устанавливается прямым подсчетом. $\rhd$

**3.1.13.** Примечания.

**(1)** С кардиналами внутри модели $\mathbb{V}^{(B)}$ дело обстоит не так просто, как с ординалами (см. 3.1.9). Нетрудно заметить, что $\neg\,\mathrm{Card}(x)$ есть $\Sigma_1$-формула, значит, $\llbracket \mathrm{Card}(\alpha^\wedge) \rrbracket = \mathbb{1} \to \mathrm{Card}(\alpha)$. Однако формула $\mathrm{Card}(x)$ не входит в класс $\Sigma_1$. По этой причине обратная импликация может нарушиться, а ординал потерять свойство быть кардиналом при каноническом вложении в $\mathbb{V}^{(B)}$. В действительности для бесконечных кардиналов $\lambda < \varkappa$ можно подобрать такую полную

булеву алгебру $B$, что $\mathbb{V}^{(B)} \models |\lambda^\wedge| = |\varkappa^\wedge|$. Это обстоятельство называют *смещением кардинальных чисел.* Возможен такой выбор $B$, что $\mathbb{V}^{(B)} \models 2^{\omega_\alpha} = \omega_{\beta+1}$ для некоторых $\alpha < \beta$. Так устанавливается совместимость $\neg\,\mathrm{GCH}$ с ZFC [36, 119, 248].

**(2)** Несмотря на сказанное в (1), кардиналы в $\mathbb{V}^{(B)}$ ведут себя прилично, если подчинить $B$ условию счетности антицепей, т. е. если всякая антицепь в $B$ не более чем счетная (говорят также, что булева алгебра $B$ *счетного типа*). Для таких $B$ выполняется

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{Card}(\alpha^\wedge) \leftrightarrow \mathrm{Card}(\alpha),$$
$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\omega_\alpha)^\wedge = \omega_{\alpha^\wedge}.$$

**(3)** Свойства конструктивных множеств (см. 1.5.10) внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ похожи на свойства ординалов. Именно, если $L(x)$ — формула, утверждающая, что $x$ — конструктивное множество, то

$$[\![L(u)]\!] = \bigvee\{[\![u = v]\!] : v \in \mathbb{L}\} \quad (u \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

При этом сохраняют силу утверждения 3.1.9 (2)–3.1.9 (4), если заменить в последних $\mathrm{Ord}$ на $L$ (см. [36, 119, 248]).

**(4)** Ввиду 3.1.11 может показаться, что в 3.1.12 (2) имеет место равенство, т. е. $[\![\mathscr{P}(X^\wedge) = \mathscr{P}(X)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Однако это не так: если $B$ — алгебра регулярных замкнутых подмножеств канторова $\omega$-дисконтинуума, то $[\![\mathscr{P}(\omega^\wedge) \neq \mathscr{P}(\omega)^\wedge]\!] = \mathbb{1}$.

### 3.2. Функтор спуска

Здесь излагаются основные приемы перевода сообщений об элементах универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ в утверждения об обычных множествах. Роль переводчика выполняет операция спуска. *Слово спуск используется для обозначения как результата, так и способа изображения элементов из* $\mathbb{V}^{(B)}$ *в универсуме* $\mathbb{V}$. Таким образом, неформально говоря, спуск действует из $\mathbb{V}^{(B)}$ в $\mathbb{V}$.

**3.2.1.** Рассмотрим произвольный $\mathbb{V}^{(B)}$-класс $X\colon \mathbb{V}^{(B)} \to B$ и положим

$$X{\downarrow} := \{x \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![x \in X]\!] = \mathbb{1}_B\}.$$

Это равенство определяет некоторый подкласс $X{\downarrow}$ универсального класса $\mathbb{V}$, называемый *спуском* $\mathbb{V}^{(B)}$-класса $X$. Пусть $X_\varphi := \bar{\varphi}$ —

класс внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, определяемый $B$-формулой $\varphi$ (см. 2.5.5). Тогда спуск класса $X_\varphi$ имеет вид

$$X_\varphi{\downarrow} = \{x \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![\varphi(x)]\!] = \mathbb{1}\}.$$

При этом формулу $x \in X_\varphi{\downarrow}$ выражают словами «$x$ удовлетворяет $\varphi$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$». Так, например, если $f \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $[\![\mathrm{Fnc}\,(f)]\!] = \mathbb{1}$, то говорят, что $f$ — *функция внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ или *функция в модели* $\mathbb{V}^{(B)}$. Очевидно, что спуск универсального $\mathbb{V}^{(B)}$-класса $\mathbb{U}_B$ совпадает с $\mathbb{V}^{(B)}$. Сразу же отметим две полезные формулы, вытекающие непосредственно из 2.5.16:

$$[\![X_\varphi \subset X_\psi]\!] = \bigwedge\{[\![\psi(x)]\!] : x \in X_\varphi{\downarrow}\},$$

$$[\![X_\varphi \cap X_\psi \neq \varnothing]\!] = \bigvee\{[\![\psi(x)]\!] : x \in X_\varphi{\downarrow}\},$$

где $\varphi$ и $\psi$ — произвольные $B$-формулы.

В дальнейшем систематически используется следующий прием сокращения записей. Пусть символ $f$ — (общепринятое) обозначение для некоторой $n$-местной функции, например, $\{\,\cdot\,,\cdot\,\}$, $(\,\cdot\,,\cdot\,)$, $\Phi(\,\cdot\,)$, $\pi_\Phi(\,\cdot\,)$ и т. п. Тогда для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ существует единственный элемент $x_f \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![x_f = f(x_1, \dots, x_n)]\!] = [\![(\exists\, x)(x_1, \dots, x_n, x) \in f]\!].$$

В этой ситуации вместо $x_f{\downarrow}$ пишем просто $f(x_1, \dots, x_n){\downarrow}$. Например, $\Phi(A){\downarrow}$ — это класс, определяемый соотношением

$$y \in \Phi(A) \leftrightarrow ([\![(\exists\, x \in A)(y \in \Phi(x))]\!] = \mathbb{1}).$$

**3.2.2.** Пусть $X$ — подкласс класса $\mathbb{V}^{(B)}$ (т. е. $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$ в смысле $\mathbb{V}$). Говорят, что $X$ является *циклическим* (или *полным*) и пишут $\mathrm{Cyc}(X)$, если $X$ замкнут относительно перемешиваний любых своих подсемейств по произвольным разбиениям единицы. Иными словами, класс $X$ цикличен, когда для любого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset B$ и каждого семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset X$ будет $\mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi) \in X$. Очевидно, что пересечение любого множества циклических множеств — снова циклическое множество. Наименьшее циклическое множество, содержащее данное множество $M \subset \mathbb{V}^{(B)}$, называют *циклической оболочкой* или *циклическим расширением* $M$ и обозначают $\mathrm{cyc}(M)$. Понятно, что множество $M \subset \mathbb{V}^{(B)}$ будет циклическим в том и только в том случае, если $M = \mathrm{cyc}(M)$.

**3.2.3.** *Пусть $X$ и $Y$ — классы внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Имеют место утверждения*:

**(1)** $[\![X \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1} \to X{\downarrow} \neq \varnothing \wedge \mathrm{Cyc}(X{\downarrow})$;

**(2)** $X \in \mathbb{V}^{(B)} \to X{\downarrow} \in \mathbb{V}$;

**(3)** $X = Y \leftrightarrow X{\downarrow} = Y{\downarrow}$.

$\lhd$ (1) Непустота класса $X\downarrow$ вытекает из принципа максимума. Если $(x_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset X{\downarrow}$ и $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы, то для $x := \mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi)$ выполнено

$$[\![x \in X]\!] \geq [\![x = x_\xi]\!] \wedge [\![x_\xi \in X]\!] \geq b_\xi \quad (\xi \in \Xi).$$

Значит, $[\![x \in X]\!] \geq \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi = \mathbb{1}$ и $x \in X{\downarrow}$.

(2) Предположим, что $X \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $x \in X{\downarrow}$. Пусть $u : \mathrm{dom}(u) \to B$ — такая функция, что $\mathrm{dom}(u) \subset \mathbb{V}^{(B)}$, $\mathrm{dom}(u) \in \mathbb{V}$ и $\bar{u}(\,\cdot\,) = [\![\,\cdot \in X]\!]$ (см. 2.5.6). Тогда

$$\bigvee\{u(t) \wedge [\![t = x]\!] : t \in \mathrm{dom}(u)\} = \mathbb{1}.$$

Привлекая принцип исчерпывания 2.3.9, найдем разбиение единицы $(b_\xi) \subset B$ и семейство $(t_\xi) \subset \mathrm{dom}(u)$, для которых $u(t_\xi) \wedge [\![x = t_\xi]\!] \geq b_\xi$. Отсюда видно, что $x = \mathrm{mix}(b_\xi t_\xi)$. Обозначим $\mathrm{Part}(B)$ множество всех разбиений единицы в $B$ и положим

$$Y := \bigcup\{(\mathrm{dom}(u))^\theta : \theta \in \mathrm{Part}(B)\}.$$

Рассмотрим функцию $F$, сопоставляющую каждому $x$ множество упорядоченных пар $(\theta, v)$ таких, что $\theta \in \mathrm{Part}(B)$, $v : \theta \to \mathrm{dom}(u)$ и если $\theta := (b_\xi)$, то $x = \mathrm{mix}(b_\xi x_\xi)$, где $x_\xi := v(b_\xi)$. Ясно, что $\mathrm{dom}(F) \supset X{\downarrow}$, $\mathrm{im}(F) \subset \mathscr{P}(\mathrm{Part}(B) \times Y)$ и $F(x) \cap F(y) = \varnothing$ при $x \neq y$. Таким образом, $|X{\downarrow}| \leq |\mathscr{P}(\mathrm{Part}(B) \times Y)|$ и $X{\downarrow} \in \mathbb{V}$.

(3) Если $X{\downarrow} = Y{\downarrow}$, то согласно 2.5.16

$$[\![X \subset Y]\!] = \bigwedge_{t \in X\downarrow} [\![t \in Y]\!] = \bigwedge_{t \in Y\downarrow} [\![t \in Y]\!] = \mathbb{1}.$$

Аналогично, $[\![Y \subset X]\!] = \mathbb{1}$, поэтому $[\![X = Y]\!] = \mathbb{1}$. $\rhd$

**3.2.4.** Пусть $X$ и $Y$ — два $\mathbb{V}^{(B)}$-класса, а $X \times_B Y$ — их декартово произведение внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, которое существует из-за 1.3.13 (2) и 2.5.18.

*Отображение*

$$(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B : (x, y) \mapsto (x, y)^B \quad (x \in X{\downarrow},\ y \in Y{\downarrow})$$

*осуществляет биекцию класса* $X{\downarrow} \times Y{\downarrow}$ *на класс* $(X \times_B Y){\downarrow}$. *При этом*

$$[\![\mathrm{Pr}_{X\downarrow}(x, y) = \mathrm{Pr}_X(x, y)]\!] = [\![\mathrm{Pr}_{Y\downarrow}(x, y) = \mathrm{Pr}_Y(x, y)]\!] = \mathbb{1}$$
$$(x \in X{\downarrow},\ y \in Y{\downarrow}),$$

*где* $\mathrm{Pr}_{X\downarrow}$ *и* $\mathrm{Pr}_{Y\downarrow}$ *— канонические проекторы на компоненты* $X{\downarrow}$ *и* $Y{\downarrow}$ *соответственно, а* $\mathrm{Pr}_X$ *и* $\mathrm{Pr}_Y$ *— канонические проекторы внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *на* $X$ *и* $Y$ *соответственно.*

(Следует иметь в виду, что $\mathrm{Pr}_X$ и $\mathrm{Pr}_Y$ — классы внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а $\mathrm{Pr}_{X\downarrow}$ и $\mathrm{Pr}_Y$ — классы в смысле $\mathbb{V}$.)

$\lhd$ Как отмечалось ранее (см. 2.4.9 и 2.5.3), функция $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B$ является инъективным вложением класса $\mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$ в класс $\mathbb{V}^{(B)}$. Ввиду этого достаточно установить, что $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B$ отображает $X{\downarrow} \times Y{\downarrow} \subset \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$ на $(X \times_B Y){\downarrow}$. Для любых $x \in X{\downarrow}$ и $y \in Y{\downarrow}$ имеем

$$\begin{aligned}
&[\![(x, y)^B \in X \times Y]\!] = \\
&= [\![(\exists\, u)(\exists\, v)(u \in X \wedge v \in Y \wedge (u, v) = (x, y)^B)]\!] = \\
&= \bigvee_{u \in \mathbb{V}^{(B)}} \bigvee_{v \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![u \in X]\!] \wedge [\![v \in Y]\!] \wedge [\![(u, v) = (x, y)^B]\!] \geq \\
&\geq [\![x \in X]\!] \wedge [\![y \in Y]\!] \wedge [\![(x, y) = (x, y)^B]\!] = \mathbb{1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $(x, y)^B \in (X \times_B Y){\downarrow}$. Рассмотрим теперь произвольный элемент $z \in (X \times_B Y){\downarrow}$ и заметим, что в силу принципа максимума найдутся элементы $x$ и $y \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которых

$$\begin{aligned}
\mathbb{1} = [\![z \in X \times Y]\!] &= [\![(\exists\, u \in X)(\exists\, v \in Y)(z = (u, v))]\!] = \\
&= [\![x \in X]\!] \wedge [\![y \in Y]\!] \wedge [\![z = (x, y)]\!].
\end{aligned}$$

Отсюда $x \in X{\downarrow}$, $y \in Y{\downarrow}$ и $z = (x, y)^B$. Наконец, для $x \in X{\downarrow}$, $y \in Y{\downarrow}$ и $z \in \mathbb{V}^{(B)}$ будет

$$[\![z = \mathrm{Pr}_X(x, y)]\!] = [\![((x, y), z) \in \mathrm{Pr}_X]\!] = [\![z = x]\!] = [\![z = \mathrm{Pr}_{X\downarrow}(x, y)]\!],$$

что обеспечивает справедливость требуемого соотношения для канонического проектора на $X$. Аналогично обстоит дело и с проектированием на вторую компоненту. $\triangleright$

**3.2.5.** Рассмотрим бинарное отношение $X$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Это означает, что $X$ — класс внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $[\![X$ — бинарное отношение$]\!] = \mathbb{1}$. В соответствии с 3.2.4 и аксиомой области определения NGB существует класс $Y$ такой, что

$$(x,y) \in Y \leftrightarrow (x,y)^B \in X{\downarrow}.$$

В самом деле, нужно положить

$$Y := \operatorname{dom}((\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B \cap (\mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)} \times X{\downarrow})).$$

Ясно, что $Y$ — бинарное отношение и $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)^B$ осуществляет биекцию между $Y$ и $X{\downarrow}$. Класс $Y$ назовем *спуском бинарного отношения* $X$ и для его обозначения сохраним символ $X{\downarrow}$. Совершенно аналогично определяется спуск $n^\wedge$-местного отношения $X$, а именно

$$X{\downarrow} := \{(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{V}^{(B)})^n : (x_1,\dots,x_n)^B \in X{\downarrow}\}.$$

Таким образом, спуск класса $X$ и спуск бинарного отношения $X$ не одно и то же, а общее обозначение $X{\downarrow}$ — удобная вольность, которую следует всегда иметь в виду, чтобы избежать недоразумений. Например, равенство $(X \times_B Y){\downarrow} = X{\downarrow} \times Y{\downarrow}$ следует воспринимать всего лишь как иную запись первой части 3.2.4. Эти же замечания относятся и к определяемым ниже спускам соответствий, категорий и т. п.

**3.2.6. *Теорема.*** *Каковы бы ни были классы $X$ и $Y$, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ справедливы следующие формулы:*

**(1)** $\operatorname{dom}(X){\downarrow} = \operatorname{dom}(X{\downarrow})$, $\operatorname{im}(X){\downarrow} = \operatorname{im}(X{\downarrow})$;
**(2)** $(X \cap Y){\downarrow} = X{\downarrow} \cap Y{\downarrow}$;
**(3)** $(X \restriction Y){\downarrow} = (X{\downarrow}) \restriction (Y{\downarrow})$;
**(4)** $(X^{-1}){\downarrow} = (X{\downarrow})^{-1}$;
**(5)** $(X \circ Y){\downarrow} = (X{\downarrow}) \circ (Y{\downarrow})$;
**(6)** $(X``Y){\downarrow} = (X{\downarrow})``(Y{\downarrow})$;
**(7)** $(\mathbb{V}^{(B)} \models \operatorname{Fnc}(X)) \leftrightarrow \operatorname{Fnc}(X{\downarrow})$;
**(8)** $(\mathbb{V}^{(B)} \models X \subset Y) \leftrightarrow X{\downarrow} \subset Y{\downarrow}$;
**(9)** $[\![x = y]\!] \le [\![X(x) = X(y)]\!] \quad (x, y \in \mathbb{V}^{(B)})$;
**(10)** $(X{\downarrow})^n = (X^{n^\wedge}){\downarrow} \quad (n \in \omega)$.

$\lhd$ (1) В силу принципа максимума для любого $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ существует такой $y \in \mathbb{V}^{(B)}$, что

$$[\![x \in \operatorname{dom}(X)]\!] = [\![(\exists\, u)((x, u) \in X)]\!] = [\![(x, y)^B \in X]\!].$$

Отсюда видно, что из $x \in \operatorname{dom}(X){\downarrow}$ в силу принципа максимума следует $x \in \operatorname{dom}(X{\downarrow})$. Наоборот, если $x \in \operatorname{dom}(X{\downarrow})$, то $[\![(x, y) \in X]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого $y \in \mathbb{V}^{(B)}$. Значит,

$$[\![x \in \operatorname{dom}(X)]\!] = \bigvee\{[\![(x, u) \in X]\!] : u \in \mathbb{V}^{(B)}\} \geq [\![(x, y) \in X]\!],$$

откуда $x \in \operatorname{dom}(X){\downarrow}$. Аналогично доказывается второе соотношение.

(2) По определению для произвольного $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ будет

$$[\![x \in X \cap Y]\!] = [\![x \in X \wedge x \in Y]\!] = [\![x \in X]\!] \wedge [\![x \in Y]\!].$$

Стало быть, $x \in (X \cap Y){\downarrow}$ в том и только в том случае, если одновременно $x \in X{\downarrow}$ и $x \in Y{\downarrow}$.

(3) Привлекая (2), 3.2.4 и определение ограничения $X \restriction Y$, выводим

$$(X \restriction Y){\downarrow} = (X \cap (Y \times \mathbb{U}_B)){\downarrow} = X{\downarrow} \cap (Y{\downarrow} \times \mathbb{V}^{(B)}) = (X{\downarrow}) \restriction (Y{\downarrow}).$$

(4) Вытекает из определения $X^{-1}$.

(5) Для любого класса $Z$ обозначим $\sigma Z$ класс, полученный из $Z$ применением $\sigma$-транспонирования, где $\sigma := (\imath_1, \imath_2, \imath_3)$ — перестановка множества $\{1, 2, 3\}$ (см. 1.3.10). Тогда нетрудно проверить, что $(\sigma Z){\downarrow} = \sigma(Z{\downarrow})$. Если $Z \in \mathbb{V}^{(B)}$ таков, что $\mathbb{V}^{(B)} \models Z = (Y \times \mathbb{U}_B) \cap (\mathbb{U}_B \times X)$, а $\sigma := \{1, 3, 2\}$, то

$$\mathbb{V}^{(B)} \models X \circ Y = \operatorname{dom}(\sigma Z).$$

Теперь на основании (1), (2) и 3.2.4 можно написать цепочку равенств:

$$\begin{aligned}(X \circ Y){\downarrow} = \operatorname{dom}(\sigma Z){\downarrow} = \operatorname{dom}(\sigma(Z{\downarrow})) = \\ = \operatorname{dom}(\sigma((Y{\downarrow} \times \mathbb{V}^{(B)}) \cap (\mathbb{V}^{(B)} \times X{\downarrow})) = (X{\downarrow}) \circ (Y{\downarrow}).\end{aligned}$$

(6) Последовательное использование (1) и (3) дает

$$(X``Y){\downarrow} = (\mathrm{im}(X \restriction Y)){\downarrow} = \mathrm{im}((X \restriction Y){\downarrow}) = \\ = \mathrm{im}((X{\downarrow}) \restriction (Y{\downarrow})) = (X{\downarrow})``(Y{\downarrow}).$$

(7) Допустим, что $[\![\mathrm{Fnc}\,(X)]\!] = \mathbb{1}$. Тогда $X{\downarrow}$ — бинарное отношение, и, кроме того,

$$[\![(x,y) \in X]\!] \wedge [\![(x,z) \in X]\!] \leq [\![y = z]\!]$$

для любых $x, y, z \in \mathbb{V}^{(B)}$. Отсюда видно, что при $(x,y) \in X{\downarrow}$ и $(x,z) \in X{\downarrow}$ будет $[\![y = z]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $y = z$. Иными словами, выполняется $\mathrm{Fnc}\,(X{\downarrow})$. В свою очередь, если $X{\downarrow}$ — однозначное бинарное отношение, то, воспользовавшись правилом 2.5.16, выводим

$$[\![\mathrm{Fnc}\,(X)]\!] = \bigwedge_{x \in \mathbb{V}^{(B)}} \bigwedge \{[\![y = z]\!] : (x,y) \in X{\downarrow}, (x,z) \in X{\downarrow}\} = \mathbb{1}.$$

(8) Принимая в расчет (2) и 3.2.3 (3), можно написать

$$\mathbb{1} = [\![X \subset Y]\!] \leftrightarrow \mathbb{1} = [\![X \cap Y = X]\!] \leftrightarrow X{\downarrow} \cap Y{\downarrow} = X{\downarrow} \leftrightarrow X{\downarrow} \subset Y{\downarrow}.$$

(9) Формула $(\forall\, x)(\forall\, y)(x = y \to X``\{x\} = X``\{y\})$ является теоремой ZF, поэтому имеет единичную оценку истинности. Развертывая значения оценки истинности для кванторов, а затем для импликации, получим требуемое.

(10) Если $[\![t : n^{\wedge} \to X]\!] = \mathbb{1}$, то для каждого $k \in n$ существует единственный элемент $x \in X{\downarrow}$, для которого $[\![t(k^{\wedge}) = x]\!] = \mathbb{1}$. Полагая $s(k) := x$ при $k \in n$, получим отображение $s : n \to X{\downarrow}$, которое обозначим $t{\downharpoonleft}$. Итак,

$$[\![t{\downharpoonleft}(k) = t(k^{\wedge})]\!] = \mathbb{1} \quad (k \in n).$$

Наоборот, если $s : n \to X{\downarrow}$, то определяем $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ соотношением

$$t := \{(k^{\wedge}, s(k))^B : k \in n\} \times \mathbb{1}_B.$$

При этом $[\![t : n^{\wedge} \to X]\!] = \mathbb{1}$, $[\![t(k^{\wedge}) = s(k)]\!] = \mathbb{1}$ для $k \in n$ и $t{\downharpoonleft} = s$. Из всего сказанного следует, что отображение $t \mapsto t{\downharpoonleft}$ — биекция между $\{x \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![x \in X^{n^{\wedge}}]\!] = \mathbb{1}\}$ и $(X{\downarrow})^n$.

Теперь нужно вспомнить определение $s := (x(0), \dots, x(n-1))^B$ (см. 2.4.9). Пусть $x : n \to X{\downarrow}$ и $y : n \to X{\downarrow}$ таковы, что $y(0) = x(0)$, $y(k) = (y(k-1), x(k))^B$ для $0 \neq k \in n$ и $y(n-1) = s$. По доказанному существуют такие $p, q \in \mathbb{V}^{(B)}$, что $[\![p, q : n^\wedge \to X]\!] = \mathbb{1}$, причем $p{\downarrow}x$ и $q{\downarrow} = y$. Далее, нетрудно проверить, что

$$[\![p(0) = q(0) \wedge (\forall\, k \in n^\wedge)(k \neq 0 \to q(k) = (q(k-1), p(k)))]\!] = \mathbb{1}.$$

Следовательно, $[\![q(n^\wedge - 1) = (p(0^\wedge), \dots, p(n^\wedge - 1)) \in X^{n^\wedge}]\!] = \mathbb{1}$. С другой стороны, $[\![s = q(n^\wedge - 1)]\!] = \mathbb{1}$, поэтому $s \in (X^{n^\wedge}){\downarrow}$. Таким образом, отображение

$$(x(0), \dots, x(n-1)) \mapsto (x(0), \dots, x(n-1))^B$$

— инъекция $(X{\downarrow})^n$ в $(X^{n^\wedge}){\downarrow}$. Аналогичные рассуждения показывают, что образ $(X{\downarrow})^n$ при этом есть все $(X^{n^\wedge}){\downarrow}$. $\triangleright$

**3.2.7.** Несколько иначе, чем в 3.2.6, обстоит дело со спусками дополнения к классу и объединения классов. Рассмотрим произвольный класс $Y \subset \mathbb{V}^{(B)}$. Поскольку формула $x \in \mathbb{V}^{(B)} \wedge (\forall\, y \in Y)([\![x = y]\!] = 0)$ предикативная, существует класс $Y^{\mathfrak{c}}$, определяемый соотношением

$$x \in Y^{\mathfrak{c}} \leftrightarrow x \in \mathbb{V}^{(B)} \wedge (\forall\, y \in Y)([\![x = y]\!] = \mathbb{0}).$$

Пусть теперь $X$ — класс внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Обозначим символом $X^c$ $\mathbb{V}^{(B)}$-класс, являющийся дополнением к классу $X$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е.

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x)(x \in X^c \leftrightarrow x \notin X).$$

Существование $\mathbb{V}^{(B)}$-класса $X^c$ вытекает из 2.5.18. Рассмотрим формулу

$$\begin{aligned} \varphi(y, B, Y, \mathbb{V}^{(B)}, [\![\,\cdot\, = \,\cdot\,]\!]) &:= (\forall\, a)(\forall\, b)(\forall\, x)(b : a \to Y \wedge \\ &\wedge \text{«}b \text{ — разбиение единицы»} \wedge x : a \to Y \wedge y = \\ &= \operatorname*{mix}_{\alpha \in a}(b(\alpha) \cdot x(\alpha))), \end{aligned}$$

утверждающую, что $y$ есть перемешивание некоторого семейства элементов класса $Y$. Можно убедиться, что эта формула предикативна, значит, существует класс $\mathrm{mix}(Y)$ такой, что

$$(\forall\, y)(y \in \mathrm{mix}(Y) \leftrightarrow \varphi(y, B, Y, \mathbb{V}^{(B)}, [\![\,\cdot\, = \,\cdot\,]\!]).$$

В качестве примера укажем на то, что для произвольного класса $X \subset \mathbb{V}$ будет $X^\wedge{\downarrow} = \mathrm{mix}(X_1)$, где $X_1 := \{x^\wedge : x \in X\}$, а каноническое вложение осуществляет инъекцию $X$ в $\mathrm{mix}(X_1)$ (см. 3.1.1 (1)).

**3.2.8.** *Если класс $Y$ является множеством, то*

$$\mathrm{mix}(Y) = \mathrm{cyc}(Y).$$

$\lhd$ Нужно лишь обосновать, что множество $\mathrm{mix}(Y)$ всевозможных перемешиваний $\mathrm{mix}_{y \in Y}(b_y y)$ элементов множества $Y$ циклично. Рассмотрим разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и элементы

$$y_\xi := \mathop{\mathrm{mix}}_{y \in Y}(b_{\xi,y} y) \quad (\xi \in \Xi)$$

в множестве $\mathrm{mix}(Y)$. Положим $y_0 := \mathrm{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi y_\xi)$ и $b_{(\xi,y)} := b_\xi \wedge b_{\xi,y}$ $(\xi \in \Xi, y \in Y)$. Если $(\xi, y) \neq (\eta, z)$, то

$$b_{(\xi,y)} \wedge b_{(\eta,z)} = b_\xi \wedge b_\eta \wedge b_{\xi,y} \wedge b_{\eta,z} = \mathbb{0}.$$

Кроме того, нетрудно вычислить (см. 1.1.5 (2))

$$\bigvee_{(\xi,y) \in \Xi \times Y} b_{(\xi,y)} = \bigvee_{\xi \in \Xi} \left( b_\xi \wedge \bigvee_{y \in Y} b_{\xi,y} \right) = \mathbb{1}.$$

Следовательно, $(b_{(\xi,y)})$ — разбиение единицы. Для любого $y \in Y$ будет

$$[\![y_0 = y]\!] \geq [\![y_0 = y_\xi]\!] \wedge [\![y_\xi = y]\!] \geq b_\xi \wedge b_{\xi,y}.$$

Отсюда видно, что $y_0 = \mathrm{mix}(b_{(\xi,y)} y)$, а потому $y_0 \in \mathrm{mix}(Y)$, т. е. $\mathrm{mix}(Y)$ — циклическое множество. $\rhd$

**3.2.9.** *Для любых непустых классов $X$ и $Y$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполнено*:

**(1)** $X^c{\downarrow} = X{\downarrow}^{\mathfrak{c}}$;

**(2)** $(X \cup Y){\downarrow} = \mathrm{mix}(X{\downarrow} \cup Y{\downarrow})$.

$\lhd$ (1) Ввиду определений и предложения 2.5.16 имеют место эквивалентности

$$x \in X^c{\downarrow} \leftrightarrow [\![x \in X^c]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [\![x \notin X]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow [\![x \in X]\!] = \mathbb{0} \leftrightarrow \bigvee \{[\![x = s]\!] : s \in X{\downarrow}\} = \mathbb{0} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, s \in X{\downarrow})([\![s = x]\!] = \mathbb{0}) \leftrightarrow x \in (X{\downarrow})^{\mathfrak{c}}.$$

(2) Из предложения 3.2.6 (8) видно, что $X{\downarrow} \cup Y{\downarrow} \subset (X \cup Y){\downarrow}$. Наоборот, если $z \in (X \cup Y){\downarrow}$, то

$$(\exists\, x \in X)(\exists\, y \in Y)(x = z \vee y = z).$$

Привлекая принцип максимума, подберем $x_0, y_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$ так, чтобы $b \vee c = \mathbb{1}$, где $b := [\![x_0 \in X]\!] \wedge [\![x_0 = z]\!]$ и $c := [\![y_0 \in Y]\!] \wedge [\![y_0 = z]\!]$. Возьмем произвольные $x_1 \in X{\downarrow}$ и $y_1 \in Y{\downarrow}$ и положим $x = \operatorname{mix}\{bx_0, b^*x_1\}$, $y := \operatorname{mix}\{cy_0, c^*y_1\}$. Тогда $x \in X{\downarrow}$, ибо

$$b \le [\![x = x_0]\!] \wedge [\![x_0 \in X]\!] \le [\![x \in X]\!],$$
$$b^* \le [\![x_1 = x]\!] \wedge [\![x_1 \in X]\!] \le [\![x \in X]\!].$$

По аналогичной причине $y \in Y{\downarrow}$. Кроме того,

$$b \le [\![x = x_0]\!] \wedge [\![x_0 = z]\!] \le [\![x = z]\!],$$
$$b^* \le c \le [\![y = y_0]\!] \wedge [\![y_0 = z]\!] \le [\![y = z]\!],$$

т. е. $z = \operatorname{mix}\{bx, b^*y\}$ и $z \in \operatorname{mix}(X{\downarrow} \cup Y{\downarrow})$. $\triangleright$

Здесь можно отметить дополнительно, что фактически

**(3)** $(X \cup Y){\downarrow} = \bigcup_{b \in B} bX{\downarrow} \oplus b^*Y{\downarrow}$,

*где* $bX{\downarrow} \oplus b^*Y{\downarrow}$ *— множество элементов вида* $\operatorname{mix}\{bx, b^*y\}$ $(x \in X{\downarrow}$, $y \in Y{\downarrow})$.

**3.2.10.** Иногда операцию спуска приходится осуществлять повторно. Поясним, как это происходит.

Пусть $X$ — некоторый класс. Организуем класс-функцию $Y$ по формуле

$$Y := \{(x, y) : x \in \mathbb{V}^{(B)} \wedge y = x{\downarrow}\}.$$

*Двойным спуском* класса $X$ называется класс $\bigcup \operatorname{im}(Y{\restriction}(X{\downarrow}))$, обозначаемый $X{\downarrow\downarrow}$. Таким образом,

$$X{\downarrow\downarrow} = \bigcup \{x{\downarrow} : x \in X{\downarrow}\}.$$

Разумеется, если $X \in \mathbb{V}^{(B)}$, то $X{\downarrow\downarrow} \in \mathbb{V}$ (см. 3.2.3 (2)).

**3.2.11.** *Для любого непустого $\mathbb{V}^{(B)}$-класса $X$ справедливы соотношения*

**(1)** $(\bigcup X){\downarrow} = \bigcup(X{\downarrow\downarrow})$;
**(2)** $(\bigcap Y){\downarrow} = \bigcap(X{\downarrow\downarrow})$;
**(3)** $\mathscr{P}(X){\downarrow\downarrow} \subset \mathscr{P}(X{\downarrow})$.

$\lhd$ Доказательство опирается на 2.5.16. Вот вычисления:

(1) $u \in \bigcup(X{\downarrow\downarrow}) \leftrightarrow (\exists\, v \in X{\downarrow\downarrow})(u \in v) \leftrightarrow (\exists\, z \in X{\downarrow})(u \in z{\downarrow}) \leftrightarrow (\exists\, z \in X{\downarrow})([\![u \in z]\!] = \mathbb{1}) \leftrightarrow [\![(\exists\, z \in X)(u \in z)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow [\![u \in \bigcup X]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow u \in (\bigcup X){\downarrow}$ .

(2) $u \in \bigcap(X{\downarrow\downarrow}) \leftrightarrow (\forall\, v \in X{\downarrow\downarrow})(u \in v) \leftrightarrow (\forall\, z \in X{\downarrow})(u \in z{\downarrow}) \leftrightarrow (\forall\, z \in X{\downarrow})([\![u \in z]\!] = \mathbb{1}) \leftrightarrow [\![(\forall\, z \in X)(u \in z)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow [\![u \in \bigcap X]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow u \in (\bigcap X){\downarrow}$ .

(3) $u \in \mathscr{P}(X){\downarrow\downarrow} \leftrightarrow (\exists\, z \in \mathscr{P}(X){\downarrow})(u = z{\downarrow}) \leftrightarrow (\exists\, z)([\![z \subset X]\!] = \mathbb{1} \wedge u = z{\downarrow}) \leftrightarrow (\exists\, z)(z{\downarrow} \subset X{\downarrow} \wedge u = z{\downarrow}) \to u \in \mathscr{P}(X{\downarrow})$. $\rhd$

**3.2.12.** ***Теорема.*** *Пусть $X$, $Y$, $f \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что $[\![X \ne \varnothing]\!] = [\![Y \ne \varnothing]\!] = [\![f : X \to Y]\!] = \mathbb{1}$. Тогда существует единственное отображение $f{\downarrow}\colon X{\downarrow} \to Y{\downarrow}$ — спуск $f$ — такое, что*

$$[\![f(x) = f{\downarrow}(x)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X{\downarrow}).$$

*Спуск отображений обладает свойствами:*

**(1)** *Результат $f{\downarrow}$ спуска отображения $f$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ — экстенсиональное отображение, т. е.*

$$[\![x = x']\!] \le [\![f{\downarrow}(x) = f{\downarrow}(x')]\!] \quad (x, x' \in X{\downarrow});$$

**(2)** *если $Z$, $g \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что выполнено $[\![Z \ne \varnothing]\!] = [\![g : Y \to Z]\!] = \mathbb{1}$, то*

$$(g \circ f){\downarrow} = g{\downarrow} \circ f{\downarrow};$$

**(3)** *$f{\downarrow}$ сюръективно (соответственно инъективно, биективно) в том и только в том случае, если $[\![f$ сюръективно (соответственно инъективно, биективно)$]\!] = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ Пусть $h$ — спуск соответствия $f$ в смысле 3.2.5. Из 3.2.6 (1, 7) вытекает, что $h : X{\downarrow} \to Y{\downarrow}$. Далее, поскольку $(x, h(x))^B \in f{\downarrow}$ для любого $x \in X{\downarrow}$, то

$$[\![h(x) = f(x)]\!] = [\![(x, h(x)) \in f]\!] = [\![(x, h(x))^B \in f]\!] = \mathbb{1}.$$

Отображение $h$ однозначно определяется этим свойством, ибо если $g : X{\downarrow} \to Y{\downarrow}$ обладает тем же свойством, то

$$[\![h(x) = g(x)]\!] \geq [\![g(x) = f(x)]\!] \wedge [\![h(x) = f(x)]\!] = \mathbb{1}$$

и $h(x) = g(x)$ для каждого $x \in X{\downarrow}$ ввиду отделимости $\mathbb{V}^{(B)}$. Используя определяющее свойство отображения $h$ и 3.2.6 (9), оцениваем

$$[\![x = x']\!] \leq [\![f(x) = f(x')]\!] \wedge [\![f(x) = h(x)]\!] \wedge \\ \wedge [\![f(x') = h(x')]\!] \leq [\![h(x) = h(x')]\!].$$

Тем самым установлено (1), а (2) следует из 3.2.6 (5). Осталось обосновать (3). Утверждение относительно сюръективности без труда выводится из 3.2.6 (6), а биективность есть конъюнкция сюръективности и инъективности. Инъективность $f$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ равносильна соотношению

$$[\![x = x']\!] = [\![f(x) = f(x')]\!] = [\![h(x) = h(x')]\!] \quad (x, x' \in X{\downarrow}).$$

Отсюда $x = x'$ в том и только в том случае, если $h(x) = h(x')$, а это и означает инъективность отображения $h$. $\triangleright$

**3.2.13. *Теорема.*** *Пусть $X, Y, F \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что $[\![X \neq \varnothing]\!] = [\![Y \neq \varnothing]\!] = [\![\varnothing \neq F \subset X \times Y]\!] = \mathbb{1}$. Пусть $\Phi \in \mathbb{V}^{(B)}$ — соответствие из $X$ в $Y$ с графиком $F$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi = (F, X, Y)$. Тогда тройка $\Phi{\downarrow} := (F{\downarrow}, X{\downarrow}, Y{\downarrow})$ — спуск $\Phi$ — единственное соответствие, удовлетворяющее равенству*

$$\Phi{\downarrow}(x) = \Phi(x){\downarrow} \quad (x \in X{\downarrow}).$$

*Спуск соответствий обладает свойствами:*

**(1)** *$\Phi(A){\downarrow} \in \Phi{\downarrow}(A{\downarrow})$ для любого $A \in \mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющего условию $[\![A \subset X]\!] = \mathbb{1}$;*

**(2)** *$\pi_\Phi(A){\downarrow} = \pi_{\Phi{\downarrow}}(A{\downarrow})$ при всех $A \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которых верно $[\![A \subset X]\!] = \mathbb{1}$;*

**(3)** *$(\Phi' \circ \Phi){\downarrow} = \Phi'{\downarrow} \circ \Phi{\downarrow}$ для еще одного соответствия $\Phi'$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$;*

**(4)** *$(I_X){\downarrow} = I_{X{\downarrow}}$.*

$\lhd$ Все утверждения, кроме (2), элементарно выводятся из 3.2.6. Отметим только, что определяющее равенство $\Phi{\downarrow}(x) = \Phi(x){\downarrow}$ $(x \in X{\downarrow})$ нужно понимать в соответствии с 3.2.1. Именно по принципу максимума существует $\Psi \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $[\![\Psi : X \to \mathscr{P}(Y)]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\Phi(x) = \Psi(x)]\!] = \mathbb{1}$ для всех $x \in X{\downarrow}$. Ввиду 3.2.12 $\Psi{\downarrow}\colon X{\downarrow} \to \mathscr{P}(Y){\downarrow}$ и $[\![\Phi(x) = \Psi{\downarrow}(x)]\!] = \mathbb{1}$ при $x \in X{\downarrow}$. Но тогда $\Phi{\downarrow}$ определяется соотношением

$$\Phi{\downarrow}(x) = (\Psi{\downarrow}(x)){\downarrow} = \Psi(x){\downarrow\downarrow} \quad (x \in X{\downarrow}).$$

Отсюда, в частности, видно, что $\Phi{\downarrow}(A{\downarrow}) = \Psi(A){\downarrow\downarrow}$. Учитывая это, докажем (2). Прежде всего, заметим, что

$$[\![\pi_\Phi(A) = \bigcap \Psi(A)]\!] = \mathbb{1},$$

т. е. внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполнено $\pi_\Phi(A) = \bigcap\{\Psi(a) : a \in A\}$. Отсюда, пользуясь правилом 3.2.11 (2), выводим

$$\pi_\Phi(A){\downarrow} = \Big(\bigcap \Psi(A)\Big){\downarrow} = \bigcap(\Psi(A){\downarrow\downarrow}) =$$
$$= \bigcap\{\Phi{\downarrow}(a) : a \in A{\downarrow}\} = \pi_{\Phi{\downarrow}}(A{\downarrow}). \ \rhd$$

**3.2.14. (1)** *Пусть $X$ и $Y$ — непустые множества внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а семейство $(f_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathbb{V}^{(B)}$ таково, что*

$$[\![f_\xi : X \to Y]\!] = \mathbb{1} \quad (\xi \in \Xi).$$

*Тогда для каждого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset B$ перемешивание $\mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi f_\xi)$ — функция из $X$ в $Y$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и*

$$\mathop{\mathrm{mix}}_{\xi\in\Xi}(b_\xi f_\xi){\downarrow}(x) = \mathop{\mathrm{mix}}_{\xi\in\Xi}(b_\xi f_\xi{\downarrow}(x)) \quad (x \in X{\downarrow}).$$

$\lhd$ Положим $g := \mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi f_\xi)$. Так как

$$b_\xi \le [\![g = f_\xi]\!] \wedge [\![f_\xi : X \to Y]\!] \le [\![g : X \to Y]\!],$$

то $[\![g : X \to Y]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $g$ — функция из $X$ в $Y$. Кроме того, для каждого $x \in X{\downarrow}$ в силу 3.2.12

$$b_\xi \leq [\![g{\downarrow}(x) = g(x)]\!] \wedge [\![g(x) = f_\xi(x)]\!] \wedge$$
$$\wedge [\![f_\xi{\downarrow}(x) = f_\xi(x)]\!] \leq [\![g{\downarrow}(x) = f_\xi{\downarrow}(x)]\!].$$

Отсюда вытекает, что $g{\downarrow}(x) = \mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi f_\xi{\downarrow}(x))$. $\rhd$

**(2)** *Пусть $X$, $Y$ и $(b_\xi)$ те же, а $(\Phi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов $\mathbb{V}^{(B)}$, являющихся соответствиями из $X$ в $Y$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда перемешивание $\mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi\Phi_\xi)$ будет соответствием из $X$ в $Y$, причем*

$$\mathop{\mathrm{mix}}_{\xi\in\Xi}(b_\xi\Phi_\xi){\downarrow}(x) = \mathop{\mathrm{mix}}_{\xi\in\Xi}(b_\xi\Phi_\xi{\downarrow}(x)) \quad (x \in X{\downarrow}).$$

$\lhd$ Доказательство аналогично 3.2.14 (1). $\rhd$

**3.2.15.** Обозначим символом $\mathscr{F}^{\downarrow}$ отображение, сопоставляющее каждому непустому $\mathbb{V}^{(B)}$-множеству $X$ его спуск $X{\downarrow}$ и каждому соответствию $\Phi$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ — соответствие $\Phi{\downarrow}$.

***Теорема.*** *Отображение $\mathscr{F}^{\downarrow}$ является ковариантным функтором из категории $\mathscr{V}_*^{(B)}$ в категорию $\mathscr{V}_*$ (соответственно из категории $\mathscr{V}^{(B)}$ в категорию $\mathscr{V}$).*

**3.2.16. *Теорема.*** *Пусть $\mathfrak{K}$ — это некоторая категория внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда существует единственная категория $\mathfrak{K}'$ (в смысле $\mathbb{V}$) такая, что $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}' = (\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}){\downarrow}$, $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}' = (\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}){\downarrow}$ и $\mathrm{Com}' = \mathrm{Com}{\downarrow}$, где $\mathrm{Com}'$ — композиция категории $\mathfrak{K}'$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models$«$\mathrm{Com}$ — композиция категории $\mathfrak{K}$».*

$\lhd$ Из 3.2.6 (7) следует, что $\mathrm{Com}'$ — частичная бинарная операция в классе $(\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}){\downarrow}$. Поскольку $[\![\mathrm{Com}(\alpha,\beta) = \mathrm{Com}'(\alpha,\beta)]\!] = \mathbb{1}$ для любых $\alpha$, $\beta \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}'$, то из ассоциативности $\mathrm{Com}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ без труда выводится ассоциативность $\mathrm{Com}'$. Пусть $D$ и $R$ — $\mathbb{V}^{(B)}$-классы, фигурирующие в определении категории $\mathfrak{K}$ (см. 2.5.19). Положим $D' := D{\downarrow}$ и $R' := R{\downarrow}$. Благодаря 3.2.6 (1) и 3.2.6 (7), $D'$ и $R'$ — отображения из $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}'$ в $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}'$. Вновь привлекая 3.2.6 (1), заключаем, что для $\alpha, \beta \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}'$ равносильны соотношения $(\alpha,\beta) \in \mathrm{dom}(\mathrm{Com}')$ и $[\![(\alpha,\beta) \in \mathrm{dom}(\mathrm{Com})]\!] = \mathbb{1}$. С другой стороны, равенство $R'(\alpha) = D'(\beta)$ выполняется лишь в том случае, когда $[\![R(\alpha) = D(\beta)]\!] = \mathbb{1}$. Существование тождественных морфизмов в $\mathfrak{K}'$ очевидно. Следовательно, $\mathfrak{K}$ удовлетворяет всем условиям определения 2.5.19. $\rhd$

**3.2.17.** Категория $\mathfrak{K}'$ из 3.2.16 называется *спуском категории* $\mathfrak{K}$ и обозначается $\mathfrak{K}{\downarrow}$. Пусть $\mathrm{Set}_*^B$ — категория непустых множеств и

соответствий внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Более подробно, $\operatorname{Mor}\mathrm{Set}_*^B$, $\operatorname{Ob}\mathrm{Set}_*^B$, $\mathrm{Com} : \mathbb{V}^{(B)} \to B$ имеют вид

$$\operatorname{Ob}\mathrm{Set}_*^B : x \mapsto [\![x \neq \varnothing]\!],$$
$$\operatorname{Mor}\mathrm{Set}_*^B : \alpha \mapsto [\![(\exists\, x)(\exists\, y)(\exists\, f)$$
$$(x \neq \varnothing \wedge y \neq \varnothing \wedge f \neq \varnothing \wedge f \subset x \times y \wedge \alpha = (f, x, y)]\!],$$
$$\mathrm{Com} : u \mapsto [\![(\exists \alpha)(\exists \beta)(\exists \gamma)$$
$$(\alpha, \beta, \gamma \text{ — соответствия}) \wedge \gamma = \alpha \circ \beta \wedge u = (\alpha, \beta, \gamma)]\!].$$

Нетрудно видеть, что спуск категории $\mathrm{Set}_*^B$ совпадает с категорией $\mathscr{V}_*^{(B)}$, введенной в 3.1.7. Аналогично определяется категория $\mathrm{Set}^B$ непустых множеств и отображений внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, при этом $\mathscr{V}^{(B)} = \mathrm{Set}^B{\downarrow}$.

**3.2.18.** Примечания.

**(1)** Как уже отмечалось в 3.2.5, общий символ $\downarrow$ используется для обозначения различных, но имеющих общую природу операций. Таким образом, запись $X{\downarrow}$ может быть осмыслена однозначно лишь при дополнительной информации о том, какой именно объект $X$ спускается. Ситуация здесь вполне аналогична употреблению знака $+$ для записи весьма произвольных групповых операций: сложение чисел, векторов, линейных операторов и т. п. Точное толкование всегда легко восстанавливается по контексту.

**(2)** Двойной спуск 3.2.10 возникает и в связи с другими теоретико-множественными операциями. Так, например, если $\prod X$ — класс всех отображений $f$ из $X$ в $\bigcup X$ таких, что $f(x) \in x$ для любого $x \in X$, а $\sum X := \bigcup\{x \times \{x\} : x \in X\}$, то для каждого $X \in \mathbb{V}^{(B)}$ имеются естественные биекции

$$\Big(\prod X\Big){\downarrow\!\downarrow} = \prod(X{\downarrow\!\downarrow}), \quad \Big(\sum X\Big){\downarrow} = \sum(X{\downarrow\!\downarrow}).$$

В выражении $(\prod X){\downarrow\!\downarrow}$ повторный спуск — спуск отображений.

**(3)** Очевидно, что в 3.2.11 (3) включение строгое (если $B \neq 2$). Отметим также, что $\mathscr{P}(X){\downarrow}$ — алгебраическая система сигнатуры $(\vee, \wedge, *, 0, 1)$. Можно показать, что это полная булева алгебра, являющаяся пополнением множества $\mathscr{P}(X){\downarrow\!\downarrow}$, упорядоченного по включению в следующем смысле. Существует сохраняющая порядок инъекция $\imath : \mathscr{P}(X){\downarrow\!\downarrow} \to \mathscr{P}(X){\downarrow}$, для которой при $a \in \mathscr{P}(X){\downarrow}$, $a < \mathbb{1}$,

найдется $b \in \mathscr{P}(X){\downarrow\downarrow}$, так что будет $a \leq \imath(b) < \mathbb{1}$. Положение здесь вполне аналогично конструкции пополнения булевой алгебры (см. [36, 101]).

**(4)** При доказательстве 3.2.6 (10) было установлено, в частности, что для каждого $X \in \mathbb{V}^{(B)}$ отображение $\downharpoonleft$ осуществляет биекцию между множествами $\mathscr{V}(n, X{\downarrow})$ и $\mathscr{V}^{(B)}(n^{\wedge}, X)$. В действительности этот факт носит весьма общий характер и отражает глубокую взаимосвязь функторов $\mathscr{F}^{\wedge}$ и $\mathscr{F}^{\downarrow}$. Подробнее об этом см. в 3.5.

## 3.3. Функтор подъема

В этом параграфе вводится процедура подъема, действующая в направлении, противоположном спуску. Мы определяем соответствующий функтор и изучаем его основные свойства.

**3.3.1.** Рассмотрим произвольный подкласс $X$ класса $\mathbb{V}^{(B)}$.

**(1)** *Существует $\mathbb{V}^{(B)}$-класс $Y$, заданный формулой*

$$Y(t) := \bigvee\{[\![t = x]\!] : x \in X\} \quad (t \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

$\lhd$ Действительно, по теореме 1.3.14 имеется класс $Y$ (в смысле универсум $\mathbb{V}$) такой, что

$$(y, b) \in Y \leftrightarrow y \in \mathbb{V}^{(B)} \wedge b \in B \wedge \left(b = \bigvee_{x \in X} [\![x = y]\!]\right).$$

Как видно, класс $Y$ однозначен и $\operatorname{dom} Y = \mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $Y$ — отображение из $\mathbb{V}^{(B)}$ в $B$. Кроме того, это отображение экстенсионально, ибо в силу 2.1.8 (4)

$$Y(t) \wedge [\![t = s]\!] = \bigvee\{[\![t = x]\!] \wedge [\![t = s]\!] : x \in X\} \leq$$
$$\leq \bigvee\{[\![s = x]\!] : x \in X\} = Y(s).$$

Следовательно, $Y$ есть класс внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. $\rhd$

Итак, по любому классу $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$ однозначно определяется класс $Y$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, который называют *подъемом класса* $X$ и обозначают $X{\uparrow}$. В случае, когда $X$ — множество, существует единственный элемент $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $X{\uparrow}(t) = [\![t \in y]\!]$ для всех $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ (см.

2.5.6). Этот $y$ и считается в дальнейшем *подъемом множества* $X$ в соответствии с 2.5.10. В качестве примера отметим, что для класса $X \subset \mathbb{V}$ класс $X^\wedge$ — подъем класса $\{x^\wedge : x \in X\}$ (см. 2.5.15).

**(2)** Предположим теперь, что $X$ — бинарное отношение такое, что $X \subset \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$. Чтобы осуществить подъем отношения $X$, нужно сначала погрузить $X$ в $\mathbb{V}^{(B)}$, а затем применить указанную выше процедуру. Для достижения нашей цели воспользуемся функцией $(x, y) \mapsto (x, y)^B$ (см. 3.2.4). Таким образом, мы даем следующее определение *подъема бинарного отношения*:

$$X{\uparrow}\colon t \mapsto \bigvee \{[\![t = (x, y)^B]\!] : (x, y) \in X\}.$$

В частности, если $X$ — произведение классов $Y \subset \mathbb{V}^{(B)}$ и $Z \subset \mathbb{V}^{(B)}$, то получаем *подъем произведения*

$$(Y \times Z){\uparrow}\colon t \mapsto \bigvee \{[\![t = (x, y)^B]\!] : y \in Y, z \in Z\}.$$

**3.3.2.** *Пусть $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$ — непустой класс и $\varphi$ — некоторая $B$-формула. Тогда*

$$[\![(\forall\, u \in X{\uparrow})\varphi(u)]\!] = \bigwedge \{[\![\varphi(u)]\!] : u \in X\},$$
$$[\![(\exists\, u \in X{\uparrow})\varphi(u)]\!] = \bigvee \{[\![\varphi(u)]\!] : u \in X\}.$$

$\lhd$ Выведем последнюю формулу (см. 1.1.5 (2, 7)):

$$[\![(\exists\, u \in X{\uparrow})\varphi(u)]\!] = [\![(\exists\, u)(u \in X{\uparrow} \wedge \varphi(u))]\!] =$$
$$= \bigvee_{v \in \mathbb{V}^{(B)}} \bigvee_{u \in X} [\![u = v]\!] \wedge [\![\varphi(v)]\!] =$$
$$= \bigvee_{u \in X} \Bigg( \bigvee_{v \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![v = u]\!] \wedge [\![\varphi(v)]\!] \Bigg) = \bigvee \{[\![\varphi(u)]\!] : u \in X\}.$$

Случай квантора общности рассматривается аналогично. $\rhd$

**3.3.3.** *Каковы бы ни были класс $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$ и непустой $\mathbb{V}^{(B)}$-класс $Y : \mathbb{V}^{(B)} \to B$, справедливы следующие правила сокращения стрелок*:

**(1)** $X{\uparrow}{\downarrow} = \mathrm{mix}(X)$;

**(2)** $Y{\downarrow}{\uparrow} = Y$.

$\lhd$ (1) Случай пустого класса тривиален.

Если $x \in X$, то $[\![x \in X{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$, следовательно, $x \in X{\uparrow}{\downarrow}$. Отсюда и из 3.2.3 вытекает $\mathrm{mix}(X) \subset X{\uparrow}{\downarrow}$. Обратное включение выводится из 3.3.2 и принципа перемешивания.

(2) Для произвольного $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ ввиду 2.5.16 будет

$$[\![y \in Y{\downarrow}{\uparrow}]\!] = \bigvee\{[\![y = t]\!] : t \in Y{\downarrow}\} = [\![(\exists t \in Y)(t = y)]\!] = [\![y \in Y]\!]. \ \rhd$$

**(3)** При использовании перемешивания семейства упорядоченных пар полезно следующее предложение.

*Пусть* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *разбиение единицы в* $B$, *а* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *и* $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *семейства элементов* $\mathbb{V}^{(B)}$. *Тогда*

$$\underset{\xi\in\Xi}{\mathrm{mix}}\, b_\xi(x_\xi, y_\xi)^B = \big(\underset{\xi\in\Xi}{\mathrm{mix}}\, b_\xi x_\xi, \underset{\xi\in\Xi}{\mathrm{mix}}\, b_\xi y_\xi\big)^B.$$

$\lhd$ Сначала покажем, что $b(x, y)^B = b(bx, by)^B$ для любых $x, y \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $b \in B$. Для этого последовательно применим 2.3.2, 2.4.9 и 2.3.6:

$$\begin{aligned}
&[\![b(x, y)^B = b(bx, by)^B]\!] = b \to [\![(x, y)^B = (bx, by)^B]\!] = b \to \\
&\to ([\![x = bx]\!] \wedge [\![y = by]\!]) = b \to ((b^* \Rightarrow [\![x = \varnothing]\!]) \wedge \\
&\wedge (b^* \Rightarrow [\![y = \varnothing]\!])) = b^* \vee ((b \vee [\![x = \varnothing]\!]) \wedge (b \vee [\![y = \varnothing]\!])) = \\
&= (b^* \vee b \vee [\![x = \varnothing]\!]) \wedge (b^* \vee b \vee [\![y = \varnothing]\!]) = \mathbb{1}.
\end{aligned}$$

Теперь положим

$$x := \underset{\xi\in\Xi}{\mathrm{mix}}\, b_\xi x_\xi, \quad y := \underset{\xi\in\Xi}{\mathrm{mix}}\, b_\xi y_\xi.$$

С учетом уже доказанного будет

$$b_\xi(x_\xi, y_\xi)^B = b_\xi(b_\xi x_\xi, b_\xi y_\xi)^B = b_\xi(b_\xi x, b_\xi y)^B = b_\xi(x, y)^B.$$

Осталось сослаться на принцип перемешивания. $\rhd$

Установленный факт позволяет рассматривать перемешивания в классе $\mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$. Именно, будем считать, что по определению

$$\underset{\xi\in\Xi}{\mathrm{mix}}\, b_\xi(x_\xi, y_\xi) := \big(\underset{\xi\in\Xi}{\mathrm{mix}}\, b_\xi x_\xi, \underset{\xi\in\Xi}{\mathrm{mix}}\, b_\xi y_\xi\big).$$

Теперь можно сказать, что отображение $(x, y) \mapsto (x, y)^B$ сохраняет перемешивания.

**3.3.4. *Теорема.*** *Для любых классов $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$ и $Y \subset \mathbb{V}^{(B)}$ справедливы утверждения:*

**(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models X{\uparrow} \subset Y{\uparrow}$, *если* $X \subset Y$;

**(2)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (X \cup Y){\uparrow} = X{\uparrow} \cup Y{\uparrow}$;

**(3)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (\mathrm{mix}(X) \cap \mathrm{mix}(Y)){\uparrow} = X{\uparrow} \cap Y{\uparrow}$;

**(4)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (X \times Y){\uparrow} = X{\uparrow} \times Y{\uparrow}$.

*Если $X$ и $Y$ — отношения, а $Z$ — класс, то выполнены также*

**(5)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{dom}(X){\uparrow} = \mathrm{dom}(X{\uparrow}) \wedge \mathrm{im}(X){\uparrow} = \mathrm{im}(X{\uparrow})$;

**(6)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (X^{-1}){\uparrow} = (X{\uparrow})^{-1}$;

**(7)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (\mathrm{mix}(X)``\,\mathrm{mix}(Z)){\uparrow} = (X{\uparrow})``(Z{\uparrow})$;

**(8)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (\mathrm{mix}(X) \circ \mathrm{mix}(Y)){\uparrow} = (X{\uparrow}) \circ (Y{\uparrow})$;

**(9)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (Z^n){\uparrow} = (Z{\uparrow})^{n^\wedge}$ *для* $n \in \mathbb{N}$.

$\triangleleft$ (1) Вытекает из определения подъема.

(2) Обоснование этого факта содержится в следующих выкладках:

$$[\![t \in (X \cup Y){\uparrow}]\!] = \bigvee\{[\![t = u]\!] : u \in X \cup Y\} =$$
$$= \bigvee_{u \in X} [\![t = u]\!] \vee \bigvee_{u \in Y} [\![t = u]\!] = [\![t \in X{\uparrow} \vee t \in Y{\uparrow}]\!].$$

(3) Допустим, что мы уже доказали равенство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ подъема пересечения классов $X$ и $Y$ и пересечения подъемов $X{\uparrow}$ и $Y{\uparrow}$. Тогда по 3.2.6 (2) и 3.3.3 будет

$$\mathrm{mix}(X \cap Y) = (X \cap Y){\uparrow\downarrow} = (X{\uparrow} \cap Y{\uparrow}){\downarrow} =$$
$$= X{\uparrow\downarrow} \cap Y{\uparrow\downarrow} = \mathrm{mix}(X) \cap \mathrm{mix}(Y).$$

Пусть, наоборот, известно, что циклическая оболочка пересечения классов $X$ и $Y$ равна пересечению их циклических оболочек. Тогда, привлекая снова 3.2.6 (2) и 3.3.3, получим

$$(X \cap Y){\uparrow\downarrow} = X{\uparrow\downarrow} \cap Y{\uparrow\downarrow} = (X{\uparrow} \cap Y{\uparrow}){\downarrow},$$

следовательно, $[\![(X \cap Y){\uparrow} = X{\uparrow} \cap Y{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$ согласно 3.2.3 (3).

Для завершения доказательства нужно установленную эквивалентность применить к классам $\mathrm{mix}(X)$ и $\mathrm{mix}(Y)$ и воспользоваться правилами сокращения стрелок 3.3.3.

(4) Руководствуясь 3.3.2, вычисляем

$$
\begin{gathered}
[\![ z \in X{\uparrow} \times Y{\uparrow} ]\!] = [\![ (\exists\, u \in X{\uparrow})(\exists\, v \in Y{\uparrow})\, z = (u, v) ]\!] = \\
= \bigvee_{u \in X} \bigvee_{v \in Y} [\![ z = (u, v) ]\!] = \bigvee_{(u,v) \in X \times Y} [\![ z = (u, v)^B ]\!] = [\![ z \in (X \times Y){\uparrow} ]\!].
\end{gathered}
$$

(5) Предполагая, что $X$ — бинарное отношение, нетрудно проверить справедливость цепочки равенств (см. 1.1.5 (2, 7)):

$$
\begin{aligned}
&[\![ x \in \operatorname{dom}(X{\uparrow}) ]\!] = [\![ (\exists y)((x, y) \in X{\uparrow}) ]\!] = \\
&= \bigvee_{y \in \mathbb{V}^{(B)}} \bigvee_{(s,t) \in X} [\![ (x, y)^B = (s, t)^B ]\!] = \\
&= \bigvee_{(s,t) \in X} \bigvee_{y \in \mathbb{V}^{(B)}} [\![ x = s ]\!] \wedge [\![ y = t ]\!] = \\
&= \bigvee_{s \in \operatorname{dom} X} [\![ x = s ]\!] = [\![ x \in \operatorname{dom}(X){\uparrow} ]\!].
\end{aligned}
$$

Утверждение об $\operatorname{im}(X)$ устанавливается аналогично.

(6) $[\![ (x, y) \in (X{\uparrow})^{-1} ]\!] = [\![ (y, x) \in X{\uparrow} ]\!] = \bigvee\limits_{(s,t) \in X} [\![ (s, t) = (y, x) ]\!] =$

$$
= \bigvee_{(t,s) \in X^{-1}} [\![ (t, s) = (x, y) ]\!] = [\![ (x, y) \in (X^{-1}){\uparrow} ]\!].
$$

(7), (8) Легко видеть, что

$$
\begin{gathered}
\operatorname{mix}(X) \cap (\operatorname{mix}(Z) \times \mathbb{V}^{(B)}) = \operatorname{mix}(X) \cap \operatorname{mix}(Z \times \mathbb{V}^{(B)}); \\
(\operatorname{mix}(Y) \times \mathbb{V}^{(B)}) \cap (\mathbb{V}^{(B)} \times \operatorname{mix}(X)) = \\
= \operatorname{mix}(Y \times \mathbb{V}^{(B)}) \cap \operatorname{mix}(\mathbb{V}^{(B)} \times X).
\end{gathered}
$$

Далее действуем по схеме 3.2.6 (5, 6), привлекая (3), (4) и учитывая, что $[\![ \mathbb{V}^{(B)}{\uparrow} = \mathbb{U}_B ]\!] = \mathbb{1}$.

(9) Заметим, что с учетом 3.3.3 (3) $\operatorname{mix}(Z^n) = \operatorname{mix}(Z)^n$. Отсюда согласно 3.2.6 (10) и 3.3.3 (1)

$$
\big((Z{\uparrow})^{n^\wedge}\big){\downarrow} = (Z{\uparrow\downarrow})^n = (Z^n){\uparrow\downarrow},
$$

что в силу 3.2.3 (3) дает требуемое равенство. $\triangleright$

**3.3.5.** Рассмотрим класс $X$, элементами которого являются подмножества $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $X \subset \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$. *Двойным подъемом* класса $X$, обозначаемым $X{\uparrow\uparrow}$, называется подъем класса $\{x{\uparrow} \colon x \in X\}$. Следовательно,

$$[\![t \in X{\uparrow\uparrow}]\!] = \bigvee\{[\![t = x{\uparrow}]\!] : x \in X\} \quad (t \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Введем еще обозначение:

$$\mathrm{mix}``X := \{\mathrm{mix}(u) : u \in X\}.$$

Понятно, что $[\![X{\uparrow\uparrow} = (\mathrm{mix}``X){\uparrow\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$. Обозначим $\mathscr{P}_0(X)$ класс непустых элементов $\mathscr{P}(X)$, т. е.

$$\mathscr{P}_0(X) := \{z : z \subset X \wedge z \neq \varnothing\}.$$

**3.3.6.** *Пусть $X$ — непустой $\mathbb{V}^{(B)}$-класс и $Y \subset \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$. Тогда*

**(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \bigcup(Y{\uparrow\uparrow}) = (\bigcup Y){\uparrow}$;
**(2)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \bigcap(Y{\uparrow\uparrow}) = \bigcap(\mathrm{mix}``(Y{\uparrow}))$;
**(3)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \bigcup X = (\bigcup(X{\downarrow\downarrow})){\uparrow}$;
**(4)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{P}_0(X{\downarrow}){\uparrow\uparrow} = \mathscr{P}_0(X)$.

$\lhd$ Доказательство оставляем в качестве упражнения. $\rhd$

**3.3.7.** Вернемся к теореме 3.3.4 и заметим, что в силу пунктов (1) и (4) этой теоремы подъем отношения — снова отношение. Для приложений к анализу важно, чтобы при подъеме сохранялись также «образы точек и множеств» $X(t)$ и $X``A$, что не всегда имеет место согласно 3.3.4 (7). Более того, при подъеме функция может потерять свойство однозначности. Последнее легко понять, если учесть, что процедура подъем–спуск приводит к циклической оболочке (3.3.3 (1)), а функции, полученные путем спуска, обязательно экстенсиональны 3.2.6 (9).

Приведем соответствующий пример. Пусть $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$ — циклическое множество и $f : X \to \{\mathbb{0}^\wedge, \mathbb{1}^\wedge\}$ — двузначная функция. Допустим, что $f(x) = \mathbb{0}^\wedge$ и $f(y) = \mathbb{1}^\wedge$ для некоторых $x, y \in X$, $x \neq y$, а элемент $b \in B$ отличен от $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$. Если на элементе $z := \mathrm{mix}\{bx, b^*y\} \in X$ функция $f$ принимает значение $\mathbb{0}^\wedge$, то $\mathbb{0} < b^* \le [\![z = y]\!] \not\le [\![f(z) = f(y)]\!] = \mathbb{0}$. Аналогично, при $f(z) = \mathbb{1}^\wedge$ будет $0 < b \le [\![z = x]\!] \not\le [\![f(z) = f(x)]\!] = \mathbb{0}$.

С другой стороны, $[\![z = y]\!] \leq [\![f{\uparrow}(z) = f{\uparrow}(y)]\!]$ по 3.2.6 (9). Значит, либо $[\![f{\uparrow}(y) = f(y)]\!] \neq \mathbb{1}$, либо $[\![f{\uparrow}(x) = f(x)]\!] \neq \mathbb{1}$, т. е. не для любых $x \in X$ выполняется $[\![f{\uparrow}(x) = f(x)]\!] = \mathbb{1}$. Таким образом, проблему сохранения функциональной зависимости при подъеме следует рассмотреть специально.

**3.3.8.** *Для произвольного отношения* $X \subset \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$ *равносильны следующие условия*:

**(1)** *если* $b \leq [\![x_1 = x_2]\!]$ *при* $x_1$, $x_2 \in \operatorname{dom}(X)$, $b \in B$, *то для любого* $u \in \mathbb{V}^{(B)}$ *будет*

$$\bigvee\{b \wedge [\![y_1 = u]\!] : y_1 \in X(x_1)\} = \bigvee\{b \wedge [\![y_2 = u]\!] : y_2 \in X(x_2)\};$$

**(2)** *если* $x_1$, $x_2 \in \operatorname{dom}(X)$ *и* $y_1 \in X(x_1)$, *то*

$$[\![x_1 = x_2]\!] \leq \bigvee\{[\![y_1 = y_2]\!] : y_2 \in X(x_2)\};$$

**(3)** $\operatorname{mix}(X(x)) = \operatorname{mix}(X)(x) \quad (x \in \operatorname{dom}(X))$;

**(4)** $[\![X{\uparrow}(x) = X(x){\uparrow}]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in \operatorname{dom}(X))$;

**(5)** $[\![x_1 = x_2]\!] \leq [\![X(x_1){\uparrow} = X(x_2){\uparrow}]\!] \quad (x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(X))$.

$\lhd$ (1) $\to$ (2) Полагаем в (1) $b := [\![x_1 = x_2]\!]$ и $u := y_1$.

(2) $\to$ (3) Включение $\subset$ очевидно. Для доказательства противоположного включения возьмем разбиение единицы $(b_\xi) \subset B$ и семейство пар $((x_\xi, y_\xi)) \subset X$. Пусть $(x, y) = \operatorname{mix}(b_\xi(x_\xi, y_\xi))$. Нужно установить, что $y \in \operatorname{mix}(X(x))$. Из (2) следует, что

$$b_\xi \leq [\![x = x_\xi]\!] \leq \bigvee\{[\![y' = y_\xi]\!] : y' \in X(x)\} = [\![y_\xi \in X(x){\uparrow}]\!].$$

Значит, $b_\xi \leq [\![y = y_\xi]\!] \wedge [\![y_\xi \in X(x){\uparrow}]\!] \leq [\![y \in X(x){\uparrow}]\!]$, так что $[\![y \in X(x){\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$. Но тогда $y \in X(x){\uparrow}{\downarrow} = \operatorname{mix}(X(x))$, что и нужно.

(3) $\to$ (4) Ввиду предложений 3.3.3 (1) и 3.2.6 (6) имеем

$$X(x){\uparrow}{\downarrow} = \operatorname{mix}(X(x)) = \operatorname{mix}(X)(x) = (X{\uparrow}{\downarrow})(x) = (X{\uparrow}(x)){\downarrow}\ .$$

Вновь используя 3.3.3 (2), приходим к нужному соотношению.

(4) $\to$ (5) Достаточно применить 3.2.6 (9).

(5) $\to$ (1) Если $b \leq [\![x_1 = x_2]\!]$ и $x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(X)$, то $b(X(x_1){\uparrow} = b(X(x_2){\uparrow})$ в соответствии с 2.3.2. С другой стороны, по определению подъема

$$[\![u \in b(X(x_k){\uparrow})]\!] = \bigvee\{b \wedge [\![u = y]\!] : y \in X(x_k)\},$$

что и приводит к требуемому. $\rhd$

**3.3.9.** Вернемся теперь к понятию экстенсиональности, с которым мы уже имели дело в 3.2.6 (9) и 3.2.12 (1), в более общей ситуации. Бинарное отношение $R \subset \mathbb{V}^{(B)} \times \mathbb{V}^{(B)}$ называют *экстенсиональным по второй компоненте*, если оно удовлетворяет одному (а тогда и любому) из равносильных условий 3.3.8 (1)–(5). Заметим, что если $R$ — функция, то каждое из условий (2) и (5) из 3.3.8 превращается в соотношение (ср. 2.5.5)

$$[\![x_1 = x_2]\!] \leq [\![R(x_1) = R(x_2)]\!] \quad (x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(R)).$$

Пусть $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$ и $Y \subset \mathbb{V}^{(B)}$ — множества. Соответствие $\Phi := (F, X, Y)$ называют *экстенсиональным*, если его график $F$ есть экстенсиональное по второй компоненте отношение. Если же, сверх того, $\operatorname{dom}(\Phi) = \operatorname{mix}(\operatorname{dom}(\Phi))$ и $\Phi(x) = \operatorname{mix}(\Phi(x))$ для каждого $x \in \operatorname{dom}(\Phi)$, то говорят, что $\Phi$ *вполне экстенсионально*. Легко усмотреть, что из полной экстенсиональности $\Phi$ вытекает $F = (X \times Y) \cap \operatorname{mix}(F)$.

Будем говорить, что множества $A$ и $C \subset \mathbb{V}^{(B)}$ *находятся в общем положении*, если

$$[\![a = c]\!] \leq \bigvee \{[\![a = b]\!] \wedge [\![b = c]\!] : b \in A \cap C\}$$

для любых $a \in A$ и $c \in C$. При выполнении этого условия в последнем соотношении фактически имеется равенство, ибо $[\![a = b]\!] \wedge [\![b = c]\!] \leq [\![a = c]\!]$.

*Равносильны следующие утверждения*:

**(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (A \cap C){\uparrow} = A{\uparrow} \cap C{\uparrow}$;

**(2)** $\operatorname{mix}(A \cap C) = \operatorname{mix}(A) \cap \operatorname{mix}(C)$;

**(3)** *$A$ и $C$ находятся в общем положении.*

$\lhd$ Эквивалентность (1) и (2) вытекает из 3.2.6 (1), 3.3.3 (1) и 3.2.4 (3). Докажем (1) $\leftrightarrow$ (3). Заметим, что включение $A{\uparrow} \cap C{\uparrow} \subset (A \cap C){\uparrow}$ равносильно формуле

$$(\forall\, a \in A{\uparrow})(\forall\, c \in C{\uparrow})(a = c \to (\exists\, b \in A \cap C)(a = b \wedge b = c)).$$

Булева оценка истинности последней равна

$$\bigwedge_{a \in A, c \in C} [\![a = c]\!] \Rightarrow \bigvee_{b \in A \cap C} [\![a = b]\!] \wedge [\![b = c]\!].$$

Отсюда видно, что (3) равносильно включению $A{\uparrow}\cap C{\uparrow}\subset(A\cap C){\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Обратное включение верно всегда. $\triangleright$

Итак, если $A \subset C$, то множества $A$ и $C$ находятся в общем положении по тривиальной причине. В общем положении находятся любые два множества вида $A := \{a^{\wedge} : a \in A'\}$, где $A' \in \mathbb{V}$.

*Подъемом соответствия* $\Phi := (F, X, Y)$ мы будем называть элемент $\Phi{\uparrow} := (F{\uparrow}, X{\uparrow}, Y{\uparrow})^B \in \mathbb{V}^{(B)}$, где $F{\uparrow}$ — подъем $F$ (см. 3.3.1 (2)).

**3.3.10. *Теорема.*** *Пусть $X$ и $Y$ — подмножества класса $\mathbb{V}^{(B)}$ и $\Phi$ — экстенсиональное соответствие из $X$ в $Y$. Подъем $\Phi{\uparrow}$ — единственное соответствие из $X{\uparrow}$ в $Y{\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, для которого*

$$[\![\operatorname{dom}(\Phi{\uparrow}) = (\operatorname{dom}(\Phi)){\uparrow}]\!] = \mathbb{1},$$
$$[\![\Phi{\uparrow}(x) = \Phi(x){\uparrow}]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in \operatorname{dom}(\Phi)).$$

*Подъем соответствий обладает свойствами:*

**(1)** *если* $\operatorname{dom}(\Phi)$ *и множество* $A \subset X$ *находятся в общем положении, то* $\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi(A){\uparrow} = \Phi{\uparrow}(A{\uparrow})$;

**(2)** *суперпозиция* $\Psi \circ \Phi$ *экстенсиональных соответствий* $\Phi$ *и* $\Psi$ *будет экстенсиональным соответствием. Если, сверх того, имеет место равенство* $\operatorname{dom}(\Psi \circ \Phi) = \operatorname{dom}(\Phi)$, *а множества* $\operatorname{dom}(\Psi)$ *и* $\Phi(x)$ *находятся в общем положении при всех* $x \in \operatorname{dom}(\Phi)$, *то*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\Psi \circ \Phi){\uparrow} = \Psi{\uparrow} \circ \Phi{\uparrow};$$

**(3)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (I_X){\uparrow} = I_{X{\uparrow}}$.

$\triangleleft$ Ввиду 3.3.4 и 3.3.8 достаточно обосновать единственность $\Phi{\uparrow}$ и свойства (1)–(3). При этом случай пустого соответствия опускаем из-за его очевидности. Пусть $\Psi$ — соответствие внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющее тем же соотношениям, что и $\Phi{\uparrow}$, т. е. $[\![\operatorname{dom}(\Psi) = \operatorname{dom}(\Phi){\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\Psi(x) = \Phi(x){\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in \operatorname{dom}(\Phi))$. Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \models \operatorname{dom}(\Psi) = \operatorname{dom}(\Phi{\uparrow})$ и

$$[\![(\forall\, x \in \operatorname{dom}(\Psi))\Psi(x) = \Phi{\uparrow}(x)]\!] =$$
$$= \bigwedge_{x\in\operatorname{dom}(\Phi)} [\![\Psi(x) = \Phi{\uparrow}(x)]\!] = \bigwedge_{x\in\operatorname{dom}(\Phi)} [\![\Psi(x) = \Phi(x){\uparrow}]\!] = \mathbb{1}.$$

(1) Учитывая 3.3.9 (1) и установленные свойства $\Phi\!\uparrow$, для произвольного $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ можно выписать эквивалентности:

$$
\begin{gathered}
y \in \Phi\!\uparrow(A\!\uparrow) \leftrightarrow (\exists\, x)(x \in (\mathrm{dom}(\Phi))\!\uparrow \wedge x \in A\!\uparrow \wedge y \in \Phi\!\uparrow(x)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists\, x)(x \in (A \cap \mathrm{dom}(\Phi))\!\uparrow \wedge y \in \Phi\!\uparrow(x)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists\, x \in (A \cap \mathrm{dom}(\Phi))\!\uparrow)\, y \in \Phi(x)\!\uparrow .
\end{gathered}
$$

Следовательно, имеют место равенства

$$
\begin{gathered}
[\![ y \in \Phi\!\uparrow(A\!\uparrow) ]\!] = \bigvee_{x \in A \cap \mathrm{dom}(\Phi)} [\![ y \in \Phi(x)\!\uparrow ]\!] = \\
= \bigvee_{x \in A \cap \mathrm{dom}(\Phi)} \bigvee_{v \in \Phi(x)} [\![ y = v ]\!] = \bigvee_{v \in \Phi(A)} [\![ y = v ]\!] = [\![ y \in \Phi(A)\!\uparrow ]\!].
\end{gathered}
$$

(2) Установим экстенсиональность соответствия $\Theta := \Psi \circ \Phi$. Возьмем $x_1,\ x_2 \in \mathrm{dom}(\Theta)$, $y_1 \in \Phi(x_1)$ и $z_1 \in \Psi(y_1)$. Согласно 3.3.8 (2) справедливы оценки

$$
\begin{gathered}
\bigvee_{z_2 \in \Theta(x_2)} [\![ z_1 = z_2 ]\!] = \bigvee_{y_2 \in \Phi(x_2)} \Bigg( \bigvee_{z_2 \in \Psi(y_2)} [\![ z_1 = z_2 ]\!] \Bigg) \geq \\
\geq \bigvee_{y_2 \in \Phi(x_2)} [\![ y_1 = y_2 ]\!] \geq [\![ x_1 = x_2 ]\!].
\end{gathered}
$$

Вновь привлекая 3.3.8 (2), замечаем, что $\Theta$ — экстенсиональное соответствие. Следовательно, ввиду уже доказанного, для $\Theta$ верно

$$
[\![ \Theta\!\uparrow(x) = \Theta(x)\!\uparrow ]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in \mathrm{dom}(\Theta)).
$$

Учитывая также установленное в (1), можно написать внутри $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$
\begin{gathered}
\Theta\!\uparrow(x) = \Theta(x)\!\uparrow = \Psi(\Phi(x))\!\uparrow = \Psi\!\uparrow(\Phi(x)\!\uparrow) = \\
= \Psi\!\uparrow(\Phi\!\uparrow(x)) = (\Psi\!\uparrow \circ \Phi\!\uparrow)(x) \quad (x \in \mathrm{dom}(\Theta)).
\end{gathered}
$$

Тем самым из 3.3.2 вытекает соотношение

$$
\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall x \in \mathrm{dom}(\Theta\!\uparrow))\, (\Theta\!\uparrow(x) = (\Psi\!\uparrow \circ \Phi\!\uparrow)(x)),
$$

которое равносильно требуемому, ибо $\mathrm{dom}(\Psi\!\uparrow \circ \Phi\!\uparrow) = \mathrm{dom}(\Theta\!\uparrow)$.

(3) Очевидно. $\triangleright$

**3.3.11. *Теорема.*** *Пусть $X$ и $Y$ — подмножества класса $\mathbb{V}^{(B)}$, а $f$ — экстенсиональное отображение из $X$ в $Y$. Тогда $f{\uparrow}$ — единственный элемент из $\mathbb{V}^{(B)}$, для которого*

$$[\![f{\uparrow}\colon X{\uparrow}\to Y{\uparrow}]\!] = [\![f{\uparrow}(x) = f(x)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X).$$

*Подъем отображений обладает свойствами:*

**(1)** *если $Z$ — подмножество $\mathbb{V}^{(B)}$ и $g : Y \to Z$ — экстенсиональное отображение, то отображение $g \circ f$ также экстенсионально и*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (g \circ f){\uparrow} = g{\uparrow} \circ f{\uparrow};$$

**(2)** $\mathbb{V}^{(B)} \models f(A){\uparrow} = f{\uparrow}(A{\uparrow}) \quad (A \subset X)$;

**(3)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«отображение $f{\uparrow}$ инъективно» в том и только в том случае, если $f$ инъективно;*

**(4)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«отображение $f{\uparrow}$ сюръективно» в том и только в том случае, если* $\mathrm{mix}(\mathrm{im}\, f) = \mathrm{mix}(Y)$.

**3.3.12.** Из предложения 3.3.3 непосредственно вытекают правила сокращения стрелок для соответствий и отображений.

*Пусть $\Phi$ и $f$ — экстенсиональные соответствия из $X$ в $Y$, причем $f$ однозначно. Пусть, далее, $\Psi$ — соответствие внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда справедливы равенства*

**(1)** $\Phi{\uparrow\downarrow}(x) = \mathrm{mix}(\Phi(x)) \quad (x \in \mathrm{dom}(\Phi))$,

**(2)** $f{\uparrow\downarrow}(x) = f(x) \quad (x \in \mathrm{dom}(f))$,

**(3)** $\Psi{\downarrow\uparrow} = \Psi$,

**(4)** $\pi_{\Phi{\uparrow\downarrow}}(A) = \pi_{\Phi{\uparrow}}(A{\uparrow}){\downarrow} \quad (A \subset X)$,

**(5)** $\pi_{\Phi{\uparrow\downarrow}}(A){\uparrow} = \pi_{\Phi{\uparrow}}(A{\uparrow}) \quad (A \subset X)$.

*Если к тому же $\Phi$ вполне экстенсионально и $A \subset \mathrm{dom}(\Phi)$, то*

**(6)** $\pi_{\Phi}(A){\uparrow} = \pi_{\Phi{\uparrow}}(A{\uparrow})$.

$\lhd$ (1) Из 3.2.13, 3.3.10 и 3.3.3 (1) для $x \in \mathrm{dom}(\Phi)$ непосредственно выводим

$$\Phi{\uparrow\downarrow}(x) = \Phi{\uparrow}(x){\downarrow} = \Phi(x){\uparrow\downarrow} = \mathrm{mix}(\Phi(x)).$$

(2, 3) Очевидно.

(4) Для произвольного $A \subset X$ получаем

$$z \in \pi_{\Phi{\uparrow}}(A{\uparrow}){\downarrow} \leftrightarrow [\![(\forall\, a \in A{\uparrow}) z \in \Phi{\uparrow}(a)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \bigwedge_{a\in A} [\![ z \in \Phi\!\uparrow\!(a) ]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow (\forall\, a \in A)(z \in \Phi\!\uparrow\!(a)\!\downarrow) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, a \in A) z \in \Phi\!\uparrow\!\downarrow\!(a) \leftrightarrow z \in \pi_{\Phi\uparrow\downarrow}(A).$$

(5) В силу 3.3.3 (2) из уже доказанного вытекает нужное равенство.

(6) Для вполне экстенсионального $\Phi$ в силу (1) будет

$$\pi_{\Phi\uparrow\downarrow}(A) = \bigcap_{a\in A} \Phi\!\uparrow\!\downarrow\!(a) = \bigcap_{a\in A} \Phi(a) = \pi_\Phi(A).$$

Требуемое вытекает из (5). $\triangleright$

**3.3.13.** Рассмотрим категорию $\mathscr{P}\mathscr{V}_*^{(B)}$, состоящую из непустых подмножеств класса $\mathbb{V}^{(B)}$ и экстенсиональных соответствий, имеющих непустой график, с обычной суперпозицией в качестве композиции:

$$\mathrm{Ob}\, \mathscr{P}\mathscr{V}_*^{(B)} := \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)}) \setminus \{\varnothing\};$$
$$\mathscr{P}\mathscr{V}_*^{(B)}(X,Y) := \{\Phi : \Phi \text{ — экстенсиональное соответствие из } X$$
$$\text{в } Y \text{ и } \mathrm{Gr}(\Phi) \neq \varnothing\},$$
$$\mathrm{Com}(\Phi,\Psi) := \Psi \circ \Phi \quad (\Phi,\Psi \in \mathrm{Mor}\, \mathscr{P}\mathscr{V}_*^{(B)}).$$

Подкатегорию категории $\mathscr{P}\mathscr{V}_*^{(B)}$, состоящую из циклических множеств и вполне экстенсиональных соответствий, обозначим через $\mathscr{G}\mathscr{P}\mathscr{V}_*^{(B)}$. Пусть еще $\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$ и $\mathscr{G}\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$ — подкатегории категорий $\mathscr{P}\mathscr{V}_*^{(B)}$ и $\mathscr{G}\mathscr{P}\mathscr{V}_*^{(B)}$ соответственно с теми же классами объектов, но с классами экстенсиональных отображений в качестве морфизмов. Корректность этих определений обеспечена 3.3.10 и 3.3.11. Рассмотрим теперь отображение $\mathscr{F}^{\uparrow}$, сопоставляющее каждому объекту $X$ и каждому морфизму $\Phi$ категории $\mathscr{P}\mathscr{V}_*^{(B)}$ их подъемы $X\!\uparrow$ и $\Phi\!\uparrow$ соответственно. Ввиду теоремы 3.3.10 $\mathscr{F}^{\uparrow}$ действует в категорию $\mathscr{V}_*^{(B)}$ (см. 3.1.7).

**3.3.14. *Теорема.*** *Отображение $\mathscr{F}^{\uparrow}$ есть ковариантный функтор из категории $\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$ в категорию $\mathscr{V}^{(B)}$.*

**3.3.15.** Примечания.

**(1)** Употребление символа $\uparrow$ для обозначения разного рода подъемов аналогично ситуации с обозначением спусков. Поэтому здесь уместны все предостережения и соглашения, высказанные в 3.2.5 и 3.2.18 (1).

Терминология, использующая «подъемы и спуски», была предложена С. С. Кутателадзе в [76, 77] в память об М. К. Эшере (см. [155, 184]).

**(2)** Функторы $\mathscr{F}^{\wedge}$ и $\mathscr{F}^{\uparrow}$ действуют в одну и ту же категорию и во многом напоминают друг друга (ср., например, определения 2.5.15 и 3.3.1(1), формулы 3.3.2 с аналогичными формулами из 2.5.15, 3.3.3 и 3.1.1 (1), 3.3.4 и 3.1.4, 3.3.10 и 3.1.5). Более глубокая аналогия обнаружится в следующем параграфе.

**(3)** Формулы 3.3.2 и соответствующие им аналоги из 2.5.15 являются частными случаями следующих правил. Если $\varphi$ и $\psi$ — предикативные формулы с $n+1$ и $m+1$ свободными переменными соответственно, а $X_1, \dots, X_n$ и $Y_1, \dots, Y_m$ — некоторые $\mathbb{V}^{(B)}$-классы, то

$$
\begin{gathered}
[\![(\forall\, u)(\varphi(u, \bar{X}) \to \psi(u, \bar{Y})]\!] = \bigwedge\{[\![\psi(u, \bar{X})]\!] : x \in A\},\\
[\![(\exists\, u)(\varphi(u, \bar{X}) \wedge \psi(u, \bar{Y})]\!] = \bigvee\{[\![\psi(u, \bar{X})]\!] : x \in A\},
\end{gathered}
$$

где $A$ — любой подкласс класса $\mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющий условию

$$
\operatorname{mix}(A) = \{x \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![\varphi(x, \bar{X})]\!] = \mathbb{1}\} \neq \varnothing \quad (\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)).
$$

**(4)** Операцией подъема мы уже неявно пользовались в 2.4. Поясним этот момент. Пусть $x$ — подмножество неотделимого универсума, а $x' \subset \mathbb{V}^{(B)}$ — его образ при факторизации (см. 2.5.2, 2.5.7): $x' := \pi``x := \{\pi t : t \in x\}$.

Определим формулами $\operatorname{dom}(y) := x$, $\operatorname{im}(y) := \{\mathbb{1}\}$ элемент $y$ неотделимого универсума. Тогда $[\![\pi y = x'{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$. В самом деле,

$$
\begin{gathered}
[\![\pi t \in x'{\uparrow}]\!] = \bigvee_{u \in x'} [\![\pi t = u]\!] = \bigvee_{u \in x} [\![\pi t = \pi u]\!] = \\
= \bigvee_{u \in \operatorname{dom}(y)} y(u) \wedge [\![t = u]\!] = [\![t \in y]\!] = [\![\pi t \in \pi y]\!].
\end{gathered}
$$

Таким образом, элемент $y$ из 2.4.5 (2), элементы $\{x\}^B$ и $\{x,y\}^B$ из 2.4.8, $f$ из 2.4.11 (1–3) — все это подъемы в неотделимом универсуме. Кроме того, $X^\wedge$ есть подъем класса $\{x^\wedge : x \in X\}$ (см. 3.3.1 (1)).

**(5)** В утверждениях 3.3.10 (1, 2) нельзя опустить условие общего положения. Соответствующие контрпримеры легко строятся, используя следующее соображение. Допустим, что $A \subset X$ и $\Phi$ — соответствие из $X$ в $X$ с графиком $\{(x,x) : x \in M\}$. Если $A \subset X$, причем $A \cap M = \varnothing$, но $A \cap \operatorname{mix}(M) \neq \varnothing$, то $\Phi(A) = \varnothing$ и $[\![\Phi(A)\!\uparrow = \varnothing]\!] = \mathbb{1}$. С другой стороны, $[\![\Phi\!\uparrow\!(A\!\uparrow) \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}$, ибо для $z \in A \cap \operatorname{mix}(M)$ будет $[\![z \in \Phi\!\uparrow\!(A\!\uparrow)]\!] = \mathbb{1}$.

Отметим, что в нескольких ранних публикациях [61, 70, 77] аналоги вышеуказанных утверждений сформулированы в неявном предположении, что $A \subset \operatorname{dom}(\Phi)$ или $\operatorname{im}(\Phi) \subset \operatorname{dom}(\Psi)$. Отсутствие явных оговорок такого рода может привести к недоразумениям при работе с соответствиями общего вида. Однако для всюду определенных соответствий и, в частности, отображений никакой опасности нет. Высказанные замечания относятся и к правилам подсчета поляр (см. 3.3.12 (6)).

## 3.4. Функтор погружения

В приложениях булевозначных моделей к анализу весьма полезен следующий прием. Изучаемый аналитический объект погружается в булевозначный универсум так, что внутри модели он становится более простым и (или) хорошо изученным объектом. Эта процедура оказывается функториальной, т. е. позволяет изучать не только внутреннюю структуру отдельных объектов, но и их взаимосвязи.

**3.4.1.** Возникающие при спусках множества наделены добавочной алгебраической структурой. Поэтому претендовать на погружение в $\mathbb{V}^{(B)}$ могут лишь объекты, должным образом связанные с полной булевой алгеброй $B$.

Введем необходимую нам терминологию. Рассмотрим произвольное множество $X$. Отображение $d : X \times X \to B$ называют *$B$-полуметрикой*, если для любых $x$, $y$, $z \in X$ выполнены условия

**(1)** $d(x,x) = \mathbb{0}$;

**(2)** $d(x,y) = d(y,x)$;

**(3)** $d(x,y) \leq d(x,z) \vee d(z,y)$.

Если, кроме того, из $d(x,y) = \mathbb{0}$ вытекает $x = y$, то $d$ называют *$B$-метрикой* или *булевой метрикой* на $X$. Пару $(X,d)$ именуют *$B$-множеством* или *булевым множеством*.

Содержащееся в классе $\mathbb{V}^{(B)}$ множество $X$ обладает канонической $B$-метрикой

$$d(x,y) := [\![x \neq y]\!] = [\![x = y]\!]^* \quad (x, y \in X).$$

То, что $d$ есть $B$-метрика, следует из 2.1.8 (1, 3, 4) и отделимости $\mathbb{V}^{(B)}$. Рассматривая подмножества класса $\mathbb{V}^{(B)}$ как $B$-множества, мы всегда будем иметь в виду указанную булеву метрику. Многие понятия из гл. 2 естественно переносятся на $B$-множества путем дуализации относительно дополнения в алгебре $B$. Поэтому при введении новых понятий излишние подробности иногда опускаются.

**3.4.2.** Пусть $(b_\xi)$ — разбиение единицы в $B$ и $(x_\xi)$ — семейство элементов $B$-множества $X$. *Перемешиванием семейства* $(x_\xi)$ *относительно* $(b_\xi)$ называют элемент $x \in X$ такой, что $b_\xi \wedge d(x, x_\xi) = \mathbb{0}$ для всех $\xi$. Как и раньше, перемешивание обозначаем символом $x = \operatorname{mix} b_\xi x_\xi$. Перемешивание (если оно существует) единственно. В самом деле, если $y \in X$ и $(\forall\, \xi)(b_\xi \wedge d(y, x_\xi) = \mathbb{0})$, то

$$b_\xi \wedge d(x,y) \leq b_\xi \wedge (d(x, x_\xi) \vee d(x_\xi, y)) = \mathbb{0}.$$

Бесконечный дистрибутивный закон 1.1.5 (2) в $B$ влечет

$$d(x,y) = \bigvee \{b_\xi \wedge d(x,y)\} = \mathbb{0},$$

значит, $x = y$.

Подчеркнем, что в отличие от универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. 2.3) перемешивания в $B$-множестве существуют не всегда.

**3.4.3.** Рассмотрим $B$-множество $(X,d)$. Взяв $A \subset X$, обозначим символом $\operatorname{mix}(A)$ множество всех перемешиваний элементов из $A$. Если $\operatorname{mix}(A) = A$, то говорят, что $A$ — *циклическое подмножество в $X$*. Пересечение всех циклических множеств, содержащих $A$, обозначается $\operatorname{cyc}(A)$. Булево множество $X$ называют *расширенным* (или *полным*), если в нем существуют перемешивания $\operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$ любых семейств $(x_\xi) \subset X$ относительно любых разбиений единицы $(b_\xi) \subset B$.

В случае, когда такие перемешивания существуют лишь для конечных семейств элементов, само $X$ называют *разложимым*. Так же, как и в 3.2.8, показывается, что если $X$ — расширенное $B$-множество, то $\operatorname{mix}(A) = \operatorname{cyc}(A)$ для любого $A \subset X$. Циклическое подмножество $B$-множества не всегда является расширенным $B$-множеством. В то же время циклическое подмножество $\mathbb{V}^{(B)}$ со своей канонической $B$-метрикой есть расширенное $B$-множество.

**3.4.4.** *Пусть* $\mathrm{A}$ — *некоторое множество и для каждого* $\alpha \in \mathrm{A}$ *задано* $B$-*множество* $(X_\alpha, d_\alpha)$. *Положим* $X := \Pi_{\alpha\in\mathrm{A}} X_\alpha$ *и определим отображение* $d : X \times X \to B$ *соотношением*:

$$d(x, y) := \bigvee \{d_\alpha(x(\alpha), y(\alpha)) : \alpha \in \mathrm{A}\}.$$

*Тогда* $d$ — *булева метрика на* $X$, *причем* $(X, d)$ *расширенно в том и только в том случае, когда* $X_\alpha$ *расширенно для любого* $\alpha \in \mathrm{A}$.

$\lhd$ Без труда проверяется, что указанное отображение является $B$-метрикой. Кроме того, если $(b_\xi)$ — разбиение единицы, а $(x_\xi)$ — семейство элементов произведения $X$, то $x = \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$ в том и только в том случае, если $x(\alpha) = \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi(\alpha))$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$. Отсюда и вытекает утверждение о расширенности $X$. $\rhd$

В дальнейшем произведение $B$-множеств всегда рассматривается как $B$-множество с указанной в 3.4.4 булевой метрикой.

**3.4.5.** *Пусть множество* $A$ *лежит в расширенном* $B$-*множестве* $(X, d)$. *Тогда для любого* $x \in X$ *булево расстояние от* $x$ *до* $A$, *заданное как*

$$\operatorname{dist}(x, A) := \bigwedge \{d(x, a) : a \in A\},$$

*достигается на некотором* $a \in \operatorname{mix}(A)$. *Иными словами, для каждого* $x \in X$ *существует такой* $a \in \operatorname{mix}(A)$, *что* $\operatorname{dist}(x, A) = d(x, a)$.

$\lhd$ Если $b_0 := \operatorname{dist}(x, A)$, то существуют разбиение $(b_\xi)$ элемента $b_0^*$ и семейство $(a_\xi) \subset A$ такие, что $b_\xi \wedge d(x, a_\xi) = \mathbb{0}$ для всех $\xi$. Положим $a := \operatorname{mix}\{b_0 a_0, b_\xi a_\xi\}$, где $a_0$ — произвольный элемент из $A$. Поскольку $(b_\xi) \cup \{b_0\}$ — разбиение единицы, то $a \in \operatorname{mix}(A)$. Кроме того, для любого $\xi$ будет

$$b_\xi \wedge d(x, a) \leq (b_\xi \wedge d(x, a_\xi)) \vee (b_\xi \wedge d(a_\xi, a)) = \mathbb{0}.$$

Значит, $b_0^* \wedge d(x, a) = \bigvee \{b_\xi \wedge d(x, a)\} = \mathbb{0}$ или $d(x, a) \leq b_0$. Противоположное неравенство очевидно. $\rhd$

**3.4.6.** Отметим три полезных следствия 3.4.5.

**(1)** *Булево расстояние от точки $x \in X$ до подмножества $A$ расширенного $B$-множества $X$ равно нулю в том и только в том случае, если $x \in \operatorname{mix}(A)$.*

**(2)** *Булево расстояние между двумя множествами $A_1 \subset X$* и $A_2 \subset X$ определим формулой

$$\bar{d}(A_1, A_2) := \bigvee_{\alpha \in A_1} \operatorname{dist}(a, A_2) \vee \bigvee_{\alpha \in A_2} \operatorname{dist}(A_1, a).$$

Легко проверить, что $\bar{d}$ — булева полуметрика на $\mathscr{P}(X)$, которая, вообще говоря, не является метрикой. Полуметрику $\bar{d}$ естественно назвать *$B$-полуметрикой Хаусдорфа, ассоциированной с $d$.*

*Если $X$ расширенно, то $\bar{d}(A_1, A_2) = \mathbb{0}$ в том и только в том случае, если* $\operatorname{mix}(A_1) = \operatorname{mix}(A_2)$.

**(3)** *Пусть $\mathscr{P}_{\mathrm{cyc}}(X)$ — множество всех циклических подмножеств $B$-множества $(X, d)$. Тогда $(X, d)$ расширенно в том и только в том случае, когда $(\mathscr{P}_{\mathrm{cyc}}(X), \bar{d})$ — расширенное $B$-множество.*

$\lhd$ Действительно, пусть $X$ расширенно. Тогда согласно (2) $\bar{d}$ — метрика на $\mathscr{P}_{\mathrm{cyc}}(X)$ и нужно лишь обосновать расширенность $(\mathscr{P}_{\mathrm{cyc}}(X), \bar{d})$. Для этого рассмотрим разбиение единицы $(b_\xi)$ и семейство $(A_\xi)$ в $\mathscr{P}_{\mathrm{cyc}}(X)$. Определим $A \subset X$ как совокупность всех перемешиваний вида $\operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, где $x_\xi \in A_\xi$ при всех $\xi$. Тогда для любых $x \in A$ и $x' \in A_\xi$ в силу коммутативности точных границ 1.1.5 (8) справедливы равенства

$$b_\xi \wedge \operatorname{dist}(x', A) = \bigwedge \{b_\xi \wedge d(x', a) : a \in A\} = \mathbb{0},$$
$$b_\xi \wedge \operatorname{dist}(x, A_\xi) = \bigwedge \{b_\xi \wedge d(x, a) : a \in A_\xi\} = \mathbb{0}.$$

Далее, в силу дистрибутивных законов 1.1.5 (1, 2) будет $b_\xi \wedge \bar{d}(A, A_\xi) = \mathbb{0}$. Последнее верно при каждом $\xi$, значит, $A = \operatorname{mix}(b_\xi A_\xi)$. Цикличность $A$ доказывается как в 3.2.8.

Обратное утверждение следует из того, что отображение $x \mapsto \{x\}$ — инъекция $X$ в $\mathscr{P}_{\mathrm{cyc}}(X)$, причем $\bar{d}(\{x\}, \{y\}) = d(x, y)$ для любых $x, y \in X$. $\rhd$

**3.4.7.** Рассмотрим $B$-множества $(X, d_X)$ и $(Y, d_Y)$. Соответствие $\Phi$ из $X$ в $Y$ называют *нерастягивающим*, если

$$\bar{d}_Y(\Phi(x), \Phi(y)) \leq d_X(x, y) \quad (x, y \in \mathrm{dom}(\Phi)),$$

где $\bar{d}_Y$ — это $B$-полуметрика Хаусдорфа, ассоциированная с $d_Y$.

**(1)** *Нерастягиваемость соответствия $\Phi$ равносильна каждому из условий* (*ср.* 3.3.8 (1, 2)):

**(a)** *если* $d_X(x_1, x_2) \leq b$ $(x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(\Phi))$, *то для каждого* $y \in Y$ *выполняется*

$$b \vee \mathrm{dist}(y, \Phi(x_1)) = b \vee \mathrm{dist}(y, \Phi(x_2));$$

**(b)** $\mathrm{dist}(y_1, \Phi(x_2)) \leq d_X(x_1, x_2)$ *для всех* $x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(\Phi)$ *и* $y_1 \in \Phi(x_1)$.

Если $X$ и $Y$ служат подмножествами $\mathbb{V}^{(B)}$, то для обозначения одного и того же свойства соответствия мы вынуждены после введенного определения употреблять два (противоположных по общепринятому смыслу) термина — нерастягиваемость и экстенсиональность. Во избежание недоразумений следует помнить, что экстенсиональность осмыслена с помощью булевой оценки истинности равенства $[\![\cdot = \cdot]\!]$, а нерастягиваемость относится к изучаемой $B$-*метрике.*

Соответствие $\Phi$ называют *вполне нерастягивающим*, если оно нерастягивающее и

$$\Phi(x) = \mathrm{mix}(\Phi(x)) \quad (x \in \mathrm{dom}(\Phi)).$$

**(2)** *Спуск любого соответствия является вполне нерастягивающим (или, что то же, вполне экстенсиональным) соответствием.*

$\lhd$ Требуемое означает, что если $\Psi$ — соответствие внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $\Phi := \Psi{\downarrow}$, то $\Phi$ — экстенсиональное соответствие и $\Phi(x)$ — циклическое множество при каждом $x \in \mathrm{dom}(\Phi)$. Экстенсиональность $\Phi$ вытекает из 3.2.6 (9), 3.2.13 и 3.3.8 (5), а цикличность $\Phi(x)$ — из 3.2.3 (1) и 3.2.13 (1). $\rhd$

Отображение $f : X \to Y$ будет нерастягивающим, если

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_X(x, x') \quad (x, x' \in X).$$

Если в последнем соотношении выполняется равенство, то говорят, что $f$ есть $B$-*изометрия.* Биективную $B$-изометрию называют *изоморфизмом* $B$-множеств.

**3.4.8.** Всякое множество $X \in \mathbb{V}$ можно превратить в $B$-множество, определив на нем *дискретную $B$-метрику*:

$$d(x, y) := \begin{cases} \mathbb{1}_B, & \text{если } x \neq y, \\ \mathbb{0}_B, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

При этом пару $(X, d)$ именуют *дискретным $B$-множеством.* В дискретном $B$-множестве отсутствует перемешивание $\operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, если только множество элементов $(x_\xi)$ содержит более одного элемента, а разбиение единицы $(b_\xi)$ отлично от тривиального разбиения $\{\mathbb{0}_B, \mathbb{1}_B\}$. Любое соответствие из дискретного $B$-множества в произвольное $B$-множество является нерастягивающим.

Дискретные и расширенные $B$-множества — два крайних примера «$B$-квалификации», доставляемых элементами универсумов $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. 3.2.3). Компромиссные варианты $B$-множеств дает класс $\mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$. В анализе встречаются также $B$-множества иного происхождения.

**3.4.9.** *Пусть $\pi$ — полный мономорфизм из $B$ в булеву алгебру $C$. Положим*

$$d_\pi(x, y) := \bigwedge \{b^* : \pi(b) \wedge x = \pi(b) \wedge y\} \quad (x, y \in C).$$

*Тогда $d_\pi$ есть $B$-метрика на $C$ и булевы операции на $C$ являются нерастягивающими отображениями.*

$\vartriangleleft$ Если $\pi = I_B$, то $d_\pi(b, b') = (b \Leftrightarrow b')^* = b \ \triangle \ b'$. Рассмотрим еще одну полную булеву алгебру $C'$ и полный мономорфизм $\pi' : B \to C'$. Гомоморфизм $h : C \to C'$ будет нерастягивающим отображением $B$-множеств $(C, d_\pi)$ и $(C', d_{\pi'})$ тогда и только тогда, если $h \circ \pi = \pi'$. В самом деле, нерастягиваемость $h$ в метриках $d_\pi$ и $d_{\pi'}$ означает, что $\pi(b) \wedge x = \pi(b) \wedge y$ влечет $\pi'(b) \wedge h(x) = \pi'(b) \wedge h(y)$ для любых $x, y \in C$ и $b \in B$. Если $\pi' = h \circ \pi$, то, применяя $h$ к равенству $\pi(b) \wedge x = \pi(b) \wedge y$, получим $\pi'(b) \wedge h(x) = \pi'(b) \wedge h(y)$. Наоборот, если в последнем равенстве взять $x = \mathbb{1}_C$ и $y := \pi(b)$, то будет $\pi'(b) = \pi'(b) \wedge h\pi(b)$ или $\pi'(b) \leq h \circ \pi(b)$. Отсюда ввиду произвольности $b \in B$ выводим $\pi' = h \circ \pi$. $\vartriangleright$

**3.4.10.** Разберем еще одну конструкцию с $B$-множествами, аналогичную 2.2.10. Пусть $\psi$ — ультрафильтр на булевой алгебре $D$.

Рассмотрим булево множество $(X, d_X)$ с $D$-значной $B$-метрикой $d_X$. Введем бинарное отношение $\sim_\psi$ в $X$ формулой

$$(x, y) \in \sim_\psi \leftrightarrow d_X(x, y)^* \in \psi.$$

Из определения булевой метрики видно, что $\sim_\psi$ — отношение эквивалентности. Пусть $X/{\sim_\psi}$ — фактор-множество множества $X$ по отношению $\sim_\psi$, а $\pi_X : X \to X/{\sim_\psi}$ — каноническое отображение. Если проделать то же самое с булевым множеством $(D, \triangle)$, то в качестве $D/{\sim_\psi}$ мы получим двухэлементную булеву алгебру так, что $D/{\sim_\psi} \simeq \{\mathbb{0}_D, \mathbb{1}_D\}$. Как видно, существует единственное отображение $\tilde{d} : X/{\sim_\psi} \to D/{\sim_\psi}$ такое, что $\tilde{d}(\pi_X x, \pi_X y) = \pi_D(d(x, y))$ $(x, y \in X)$. Кроме того, $\tilde{d}$ — дискретная булева метрика на $X/{\sim_\psi}$. Если $d_X$ — дискретная метрика, то $\sim_\psi = I_X$ и $X/{\sim_\psi} = X$. Некоторые теоретико-множественные операции в $X$ и $X/{\sim_\psi}$ связаны простыми соотношениями. Если $(X_\alpha)$ — семейство подмножеств множества $X$, то $(\bigcup X_\alpha)/{\sim_\psi} = \bigcup (X_\alpha/{\sim_\psi})$. В случае степеней между $X^n/{\sim_\psi}$ и $(X/{\sim_\psi})^n$ существует естественная биекция, задаваемая формулой

$$\pi_{X^n}(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\pi_X x_1, \dots, \pi_X x_n) \quad (x_1, \dots, x_n \in X).$$

Отметим также, что если $A \subset X$, то $A/{\sim_\psi} = \pi_X(A)$ и $\pi_A = \pi_X \restriction A$.

Возьмем еще одно $B$-множество $(Y, d_Y)$, и пусть $F \subset X \times Y$. Тогда, как легко проверить,

$$\operatorname{dom}(F/{\sim_\psi}) = \operatorname{dom}(F)/{\sim_\psi}, \quad \operatorname{im}(F/{\sim_\psi}) = \operatorname{im}(F)/{\sim_\psi}.$$

**3.4.11.** *Пусть $\rho$ — произвольный автоморфизм (т. е. гомоморфизм в себя) булевой алгебры $B$, а $\psi_\rho$ — элемент $\mathbb{V}^{(B)}$, определяемый функцией $\{(b^\wedge, \rho(b)) : b \in B\}$ в соответствии с 2.5.6. Тогда имеют место следующие утверждения:*

- **(1)** *$\rho(b) = [\![b^\wedge \in \psi_\rho]\!]$ для любого $b \in B$;*
- **(2)** *для множества $A \subset B$ выполняется $[\![A^\wedge \subset \psi_\rho \to (\bigwedge A)^\wedge \in \psi_\rho]\!] = \mathbb{1}$ в том и только в том случае, если $\rho\,(\bigwedge A) = \bigwedge \rho(A)$;*
- **(3)** *$[\![\psi_\rho$ — ультрафильтр на $B^\wedge]\!] = \mathbb{1}$.*

$\triangleleft$ (1) Проверяется вычислением с применением 2.2.8 (1, 2).

(2) Используя (1), для $A \subset B$ выводим

$$[\![A^\wedge \subset \psi_\rho]\!] = \bigwedge_{a \in A} [\![a \in \psi_\rho]\!] = \bigwedge_{a \in A} \rho(a) = \bigwedge \rho(A).$$

Поскольку $\rho\left(\bigwedge A\right) \le \bigwedge \rho(A)$ в силу изотонности $\rho$, неравенство $[\![A^{\wedge} \subset \psi_\rho]\!] \le [\![(\bigwedge A)^{\wedge} \in \psi_\rho]\!]$ равносильно равенству $\rho\left(\bigwedge A\right) = \bigwedge \rho(A)$.

(3) Прежде всего заметим, что $\mathbb{V}^{(B)} \models \psi_\rho \subset B^{\wedge}$. В самом деле, для каждого $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ имеем

$$[\![t \in \psi_\rho]\!] = \bigvee_{b\in B} \rho(b) \wedge [\![t = b^{\wedge}]\!] \le \bigvee_{b\in B} [\![t = b^{\wedge}]\!] = [\![t \in B^{\wedge}]\!].$$

Далее, из (1) следует, что $[\![0^{\wedge} \notin \psi_\rho]\!] = \mathbb{1}$, а из (2) видно, что $[\![\psi_\rho$ — базис фильтра$]\!] = \mathbb{1}$. Кроме того, если $b \in B$, то

$$[\![(\exists a \in \psi_\rho)(a \le b^{\wedge})]\!] = \bigvee_{a\in B} \rho(a) \wedge [\![a^{\wedge} \le b^{\wedge}]\!] = \bigvee_{a\le b} \rho(a) =$$
$$= \rho(b) = [\![b^{\wedge} \in \psi_\rho]\!],$$

так что

$$[\![(\forall\, b \in B^{\wedge})((\exists\, a \in \psi_\rho)a \le b) \to b \in \psi_\rho]\!] = \mathbb{1}.$$

Итак, $\psi_\rho$ — фильтр в $B^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и осталось показать, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «для любого $b \in B^{\wedge}$ либо $b \in \psi_\rho$, либо $b^* \in \psi_\rho$». Обоснование этого утверждения содержится в выкладках:

$$[\![(\forall\, b \in B^{\wedge})(b \in \psi_\rho \vee b^* \in \psi_\rho)]\!] =$$
$$= \bigwedge_{b\in B} [\![b^{\wedge} \in \psi_\rho]\!] \vee [\![(b^*)^{\wedge} \in \psi_\rho]\!] = \bigwedge_{b\in B} \rho(b) \vee \rho(b^*) =$$
$$= \bigwedge \{\rho(b \vee b^*) : b \in B\} = \rho(\mathbb{1}) = \mathbb{1}. \ \triangleright$$

**3.4.12.** Пусть $\psi := \psi_\imath$, где $\imath$ — тождественный гомоморфизм на $B$. Согласно 3.4.11 $\mathbb{V}^{(B)} \models$«$\psi$ — ультрафильтр на $B^{\wedge}$ и $A^{\wedge} \subset \psi$ влечет $\bigwedge(A)^{\wedge} \in \psi$», каково бы ни было множество $A \subset B$.

Возьмем произвольное $B$-множество $(X, d)$. Из 3.1.16 видно, что $(X^{\wedge}, d^{\wedge})$ есть $B$-множество внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. На основании 3.4.10, 3.4.11 и принципа максимума существуют такие $\tilde{X}$, $\sim := \sim_\psi$ и $\pi_X \in \mathbb{V}^{(B)}$, что

**(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\sim$ — отношение эквивалентности на $X^{\wedge}$»;
**(2)** $\mathbb{V}^{(B)} \models \tilde{X} := X^{\wedge}/\sim$;
**(3)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\pi_X : X \to \tilde{X}$ — фактор-отображение»;
**(4)** $[\![(x^{\wedge}, y^{\wedge})^B \in \sim]\!] = d(x, y)^*$ $(x, y \in X)$.

Если применить описанную процедуру к $B$-множеству $(B, \triangle)$ (см. 3.4.9), то в качестве $\tilde{B}$ получим двухэлементную булеву алгебру, так что $\mathbb{V}^{(B)} \models \tilde{B} \simeq \{\mathbb{0}_B^{\wedge}, \mathbb{1}_B^{\wedge}\}^B$. Таким образом, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существует единственная $\{\mathbb{0}_B^{\wedge}, \mathbb{1}_B^{\wedge}\}$-значная булева метрика $\tilde{d}$ на $\tilde{X}$, для которой

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x, y \in X^{\wedge})\tilde{d}(\pi_X(x), \pi_X(y)) = \pi_B(d^{\wedge}(x, y)).$$

Как видно из 3.4.10, для дискретного $B$-множества $(X, d)$ будет $\sim\, = I_{X^{\wedge}}$ и $X^{\sim} = X^{\wedge}$.

Будем говорить, что подмножества $A$ и $C$ некоторого $B$-множества $(X, d)$ *находятся в общем положении*, если

$$d(a, c) \geq \bigwedge\{d(a, b) \vee d(b, c) : b \in A \cap C\}$$

для любых $a \in A$ и $c \in C$. Так же, как и в 3.3.9, в указанном соотношении фактически имеет место равенство, ибо $d(a, c) \leq d(a, b) \vee d(b, c)$.

**(5)** *Множества $A$ и $C$ находятся в общем положении в том и только в том случае, если*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (A \cap C)^{\sim} = A^{\sim} \cap C^{\sim}.$$

$\lhd$ Заметим, что $(A \cap C)^{\sim} = \pi_X((A \cap C)^{\wedge}) = \pi_X(A^{\wedge} \cap C^{\wedge})$ и $A^{\sim} \cap C^{\sim} = \pi_X(A^{\wedge}) \cap \pi_X(C^{\wedge})$. Следовательно, включение $(A \cap C)^{\sim} \subset A^{\sim} \cap C^{\sim}$ верно всегда, а $A^{\sim} \cap C^{\sim} \subset (A \cap C)^{\sim}$ равносильно формуле

$$(\forall\, a \in A^{\wedge})(\forall\, c \in C^{\wedge})(a{\sim}c \to (\exists\, b \in (A \cap C)^{\wedge})(b{\sim}a \wedge b{\sim}c)).$$

Расписывая булеву оценку истинности последней и учитывая равенство $[\![a^{\wedge}{\sim}c^{\wedge}]\!] = d(a, c)^*$, получим

$$\bigwedge_{a \in A, c \in C} d(a, c)^* \Rightarrow \left(\bigvee_{b \in A \cap C} d(a, b)^* \wedge d(b, c)^*\right) = \mathbb{1}.$$

Теперь ясно, что $[\![A^{\sim} \cap C^{\sim} \subset (A \cap C)^{\sim}]\!] = \mathbb{1}$ тогда и только тогда, если для любых $a \in A$ и $c \in C$ верно

$$d(a, c)^* \leq \left(\bigwedge_{b \in A \cap C} d(a, b) \vee d(b, c)\right)^*.$$

Но это означает, что $A$ и $C$ находятся в общем положении. $\rhd$

**3.4.13. *Теорема.*** *Пусть $(X, d_X)$ и $(Y, d_Y)$ — некоторые $B$-множества и $\Phi$ — нерастягивающее соответствие из $X$ в $Y$. Тогда внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существует единственное соответствие $\Phi^{\sim}$ из $X^{\sim}$ в $Y^{\sim}$ такое, что*

$$\operatorname{dom}(\Phi^{\sim}) = (\operatorname{dom}(\Phi))^{\sim},$$
$$[\![\Phi^{\sim}(\pi_X x^{\wedge}) = \pi_Y(\Phi(x)^{\wedge})]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in \operatorname{dom}(\Phi)).$$

*При этом имеют место следующие утверждения:*

**(1)** *если множества $A \subset X$ и $\operatorname{dom}(\Phi)$ находятся в общем положении, то*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \Phi(A)^{\sim} = \Phi^{\sim}(A^{\sim});$$

**(2)** *суперпозиция $\Psi \circ \Phi$ нерастягивающих соответствий $\Phi$ и $\Psi$ будет нерастягивающим соответствием, а если $\operatorname{dom}(\Psi \circ \Phi) = \operatorname{dom}(\Phi)$ и множества $\operatorname{dom}(\Psi)$ и $\Phi(x)$ находятся в общем положении при всех $x \in \operatorname{dom}(\Phi)$, то*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\Psi \circ \Phi)^{\sim} = \Psi^{\sim} \circ \Phi^{\sim};$$

**(3)** $\mathbb{V}^{(B)} \models (I_X)^{\sim} = I_{X^{\sim}}$.

$\triangleleft$ Как известно из 3.1.5, $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\Phi^{\wedge}$ — соответствие из $X^{\wedge}$ в $Y^{\wedge}$». Положим $\Phi^{\sim} := \pi_Y \circ \Phi^{\wedge} \circ \pi_X^{-1}$. Ясно, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\Phi^{\sim}$ — соответствие из $X^{\sim}$ в $Y^{\sim}$ и $\operatorname{dom}(\Phi^{\sim}) = \pi_X(\operatorname{dom}(\Phi^{\wedge})) = \pi_X((\operatorname{dom}(\Phi))^{\wedge}) = (\operatorname{dom}(\Phi))^{\sim}$». Покажем теперь, что для любых $x \in Z := \operatorname{dom}(\Phi)$ и $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ булевы оценки истинности $b_1 := [\![y \in \Phi^{\sim} \circ \pi_X(x^{\wedge})]\!]$ и $b_2 := [\![y \in \pi_Y \circ \Phi^{\wedge}(x^{\wedge})]\!]$ совпадают. В самом деле,

$$b_1 = [\![(\exists s \in Z^{\wedge})(\exists t \in Y^{\wedge})(y = \pi_Y(t) \wedge t \in \Phi^{\wedge}(s) \wedge \pi_X(s) = \pi_X(x^{\wedge}))]\!] =$$
$$= \bigvee_{s \in Z} \bigvee_{t \in Y} [\![t^{\wedge} \in \Phi(s)^{\wedge}]\!] \wedge [\![y = \pi_Y(t^{\wedge})]\!] \wedge [\![\pi_X(s^{\wedge}) = \pi_X(x^{\wedge})]\!] \geq$$
$$\geq \bigvee_{t \in Y} [\![y = \pi_Y(t^{\wedge})]\!] \wedge [\![t^{\wedge} \in \Phi(x)^{\wedge}]\!] =$$
$$= [\![(\exists\, t \in Y^{\wedge})(y = \pi_Y(t) \wedge t \in \Phi^{\wedge}(x^{\wedge}))]\!] = b_2.$$

С другой стороны, учитывая равенства

$$d_X(s,x)^* = [\![\pi_X(s^\wedge) = \pi_X(x^\wedge)]\!],$$
$$\bar{d}_Y(\Phi(x),\Phi(s))^* = [\![\pi_Y(\Phi(x)^\wedge) = \pi_Y(\Phi(s)^\wedge)]\!]$$

и привлекая нерастягиваемость соответствия $\Phi$, получаем

$$b_1 \leq \bigvee_{s\in Z}\bigvee_{t\in Y}[\![\pi_Y(\Phi(s)^\wedge) = \pi_Y(\Phi(x)^\wedge)]\!] \wedge [\![t^\wedge \in \Phi(s)^\wedge]\!]\wedge$$
$$\wedge[\![y = \pi_Y(t^\wedge)]\!] \leq \bigvee_{s\in Z}[\![y \in \pi_Y(\Phi^\wedge(x^\wedge))]\!] = b_2.$$

Итак, $b_1 = b_2$, что немедленно влечет справедливость определяющего соотношения $[\![\pi_Y(\Phi(x)^\wedge) = \Phi^\sim(\pi_X(x^\wedge))]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in Z)$. Тем самым выполнено соотношение

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall x \in (\mathrm{dom}(\Phi))^\wedge)\Phi^\sim(\pi_X x) = \pi_Y\Phi^\wedge(x).$$

Отсюда вытекает единственность $\Phi^\sim$, ибо $\mathrm{dom}(\Phi^\sim) = (\mathrm{dom}(\Phi))^\sim = \pi_X((\mathrm{dom}(\Phi))^\wedge)$.

(1) Привлекая 3.4.12 (5), легко заметить, что

$$\Phi^\sim(A^\sim) = \Phi^\sim(A^\sim \cap \mathrm{dom}(\Phi^\sim)) = \Phi^\sim((A \cap \mathrm{dom}(\Phi))^\sim).$$

С другой стороны, $\Phi(A)^\sim = \Phi(A \cap \mathrm{dom}(\Phi))^\sim$. Стало быть, не ограничивая общности можно считать, что $A \subset \mathrm{dom}(\Phi)$. В силу определяющего свойства $\Phi^\sim$, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ справедлива цепочка равенств

$$\Phi^\sim(A^\sim) = \bigcup_{a\in A^\sim}\Phi^\sim(a) = \bigcup_{a\in A^\wedge}\Phi^\sim(\pi_X a) =$$
$$= \bigcup_{a\in A^\wedge}\pi_Y(\Phi^\wedge(a)) = \pi_Y(\Phi^\wedge(A^\wedge)) = \pi_Y(\Phi(A)^\wedge) = \Phi(A)^\sim.$$

(2) Пусть $\Psi$ — нерастягивающее соответствие из $Y$ в $U$. Возьмем $x_1, x_2 \in Z$, $y_1 \in \Phi(x_1)$ и $u_1 \in \Psi(y_1)$. Тогда по 3.4.7 (1)

$$\mathrm{dist}(u_1, \Psi\circ\Phi(x_2)) \leq \bigwedge\{\mathrm{dist}(u_1,\Psi(y)) : y \in \Phi(x_2)\} \leq$$
$$\leq \bigwedge\{d(y_1,y) : y \in \Phi(x_2)\} = \mathrm{dist}(y_1,\Phi(x_2)) \leq d(x_1,x_2).$$

Отсюда ввиду произвольности $x_1$, $x_2$, $y_1$ и $u_1$ получаем нерастягиваемость соответствия $\Psi \circ \Phi$.

Далее, учитывая (1), 3.1.5 (2) и определяющие соотношения для $(\Psi \circ \Phi)^\sim$, $\Psi^\sim$ и $\Phi^\sim$, можно написать ($x \in Z$):

$$(\Psi^\sim \circ \Phi^\sim)(\pi_X x^\wedge) = \Psi^\sim(\Phi(x)^\sim) = \Psi(\Phi(x))^\sim =$$
$$= \pi_Y((\Psi \circ \Phi)(x)^\wedge) = \pi_Y((\Psi \circ \Phi)^\wedge(x^\wedge)) = (\Psi \circ \Phi)^\sim(\pi_X x^\wedge).$$

Стало быть, $[\![(\Psi \circ \Phi)^\sim = \Psi^\sim \circ \Phi^\sim]\!] = \mathbb{1}$, ибо $Z^\sim = \operatorname{dom}(\Psi^\sim \circ \Phi^\sim)$.

(3) Очевидное следствие из 3.1.5 (4). $\triangleright$

**3.4.14.** ***Теорема.*** *Для любого нерастягивающего отображения $f : X \to Y$ существует единственный элемент $f^\sim \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что*

$$[\![f^\sim : X^\sim \to Y^\sim]\!] = [\![f^\sim \circ \pi_X = \pi_Y \circ f^\wedge]\!] = \mathbb{1}.$$

*При этом справедливы утверждения:*

**(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models f(A)^\sim = f^\sim(A^\sim)$ *для каждого* $A \subset X$*;*

**(2)** *если $g : Y \to Z$ — нерастягивающее отображение, то $g \circ f$ — нерастягивающее отображение и $\mathbb{V}^{(B)} \models (g \circ f)^\sim = g^\sim \circ f^\sim$;*

**(3)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$f^\sim$ инъективно» в том и только в том случае, если $f$ — это $B$-изометрия;*

**(4)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$f^\sim$ сюръективно» в том и только в том случае, если $\bigvee\{d(f(x), y) : x \in X\} = \mathbb{1}$ для всякого $y \in Y$.*

**3.4.15.** Рассмотрим категории $\mathrm{BSet}_*$ и $\mathrm{CBSet}_*$. Объекты этих категорий — непустые $B$-множества и непустые расширенные $B$-множества соответственно; морфизмы — нерастягивающие и вполне нерастягивающие соответствия соответственно. При этом композиция морфизмов — суперпозиция соответствий.

Подкатегории категорий $\mathrm{BSet}_*$ и $\mathrm{CBSet}_*$, состоящие из тех же объектов и из нерастягивающих отображений, мы обозначим соответственно через BSet и CBSet. Пусть $\mathscr{F}^\sim$ — функция, сопоставляющая объекту $X$ и морфизму $\Phi$ категории BSet элементы $\mathscr{F}^\sim(X) := X^\sim$ и $\mathscr{F}^\sim(\Phi) := \Phi^\sim$.

**3.4.16.** *Отображение $\mathscr{F}^\sim$ является ковариантным функтором из категории* BSet *в категорию* $\mathscr{V}^{(B)}$.

**3.4.17.** Примечания.

**(1)** Концепция булевой метрики появилась в начале пятидесятых годов при изучении различных «расстояний» на абстрактных множествах со значениями в упорядоченных системах (см. [123, 140, 220]). К сожалению, какой-либо особо богатой геометрии, связанной с этой концепцией, обнаружено не было, чем, по-видимому, и объясняется непопулярность $B$-метрик в последующие годы. Причину такого курьеза можно усмотреть с помощью теорем 3.4.13 и 3.5.4.

Геометрия булевых метрик весьма содержательна и интересна в сочетании с топологическими или функционально-аналитическими структурами. Наличие должным образом согласованной $B$-метрики указывает на целесообразность изучения рассматриваемой структуры с помощью булевозначных моделей.

**(2)** Отображение $[\![\cdot = \cdot]\!] : X^2 \to B$ называется *булевозначным равенством* (*отношением равенства*), если оно удовлетворяет условиям 2.2.8 $(1, 3, 4)$. Такие отображения широко используются при булевозначной интерпретации теорий первого порядка (см. [144]). Легко видеть, что понятие булевозначного равенства есть просто «зеркальное отражение» идеи булевой метрики, ибо условия 2.2.8 $(1, 3, 4)$ выполнены в том и только в том случае, если отображение $(x, y) \mapsto [\![x = y]\!]^*$ есть булева метрика. В этом контексте идея булевой метрики весьма плодотворна.

**(3)** Принятые в этом параграфе определения 3.4.1 мотивированы тем, что рассматриваемые в анализе структуры обладают некоторой естественной $B$-(полу)метрикой. В то же время $B$-значное равенство приходится здесь вводить достаточно искусственно.

**(4)** Можно показать, что справедливо утверждение, обратное к 3.4.6. Именно, если $\psi$ — ультрафильтр на $B^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то отображение $\rho_\psi : B \to B$, определенное формулой $\rho_\psi(b) := [\![b^\wedge \in \psi]\!]$, есть автоморфизм $B^\wedge$. При этом $\rho_{\psi_\rho} = \rho$ и $[\![\psi_{\rho_\psi} = \psi]\!] = \mathbb{1}$.

**(5)** По поводу 3.4.13 $(1, 2)$ можно высказать те же замечания, что и в 3.3.15 $(5)$.

## 3.5. Взаимосвязи основных функторов

Между основными функторами, описанными в предыдущих четырех параграфах, существуют интересные и весьма полезные в приложениях связи. Изучение последних составляет содержание текущего параграфа.

**3.5.1.** Напомним, что для произвольного $X \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$ множество $\mathrm{mix}(X)$ состоит из всевозможных перемешиваний $\mathrm{mix}(b_\xi x_\xi)$ семейств $(x_\xi) \subset X$ относительно любых разбиений единицы $(b_\xi) \subset B$ (см. 3.2.7). При этом операция mix действует как взятие циклической оболочки (3.2.8). Распространим mix на экстенсиональные соответствия.

*Пусть $X$ и $Y$ — подмножества класса $\mathbb{V}^{(B)}$, а $\Phi$ — экстенсиональное соответствие из $X$ в $Y$. Существует единственное вполне экстенсиональное соответствие $\Psi$ из $\mathrm{mix}(X)$ в $\mathrm{mix}(Y)$, для которого*

$$\Psi(x) = \mathrm{mix}(\Phi(x)) \quad (x \in \mathrm{dom}(\Phi)).$$

$\lhd$ Действительно, следует положить $\Psi := \Phi\uparrow\downarrow$ и воспользоваться утверждениями 3.3.12 (1) и 3.4.7 (2). Из 3.2.13 и 3.3.3 (1) видно, что $\mathrm{Gr}(\Psi) = \mathrm{mix}(\mathrm{Gr}(\Phi))$. $\rhd$

Положим по определению $\mathrm{mix}(\Phi) := \Psi$. Если $\Theta$ — еще одно экстенсиональное соответствие и $\mathrm{dom}(\Theta) \subset Y$, то в силу 3.2.13 (3) и 3.3.4 (8) будет $\mathrm{mix}(\Theta \circ \Phi) = \mathrm{mix}(\Theta) \circ \mathrm{mix}(\Phi)$ тогда и только тогда, когда $(\Theta \circ \Phi)\uparrow = \Theta\uparrow \circ \Phi\uparrow$. Кроме того, очевидно, $\mathrm{mix}(I_X) = I_{\mathrm{mix}(X)}$.

**3.5.2.** Возьмем непустое множество $X$. Обозначим символом $B_0(X)$ множество всех разбиений единицы в $B$ вида $(b_x = b(x))_{x \in X}$:

$$b \in B_0(X) \leftrightarrow (b \in B^X \wedge (\forall x \in X)(\forall y \in X)(x \neq y) \to b(x) \wedge b(y) = 0)).$$

Элементу $y \in X$ поставим в соответствие разбиение единицы $\imath y := \imath_X y := (b_x)_{x \in X}$, где $b_x = \mathbb{1}$ при $x = y$ и $b_x = 0$ при $x \neq y$. Понятно, что $\imath_X$ является инъекцией из $X$ в $B_0(X)$. Для элементов $u$, $v \in B_0(X)$ определим

$$d(u, v) := \bigwedge \{u(x)^* \vee v(x)^* : x \in X\}.$$

Нетрудно проверить, то $d$ есть $B$-метрика на $B_0(X)$. Более того, $(B_0(X), d)$ — расширенное $B$-множество. Последнее устанавливается по существу теми же рассуждениями, что и в 3.2.8. Итак, $B_0(\cdot)$ — отображение из $\mathbb{V}$ в CBSet. Распространим это отображение на соответствия.

Возьмем соответствие $\Phi := (F, X, Y)$. Положим соответствие $B_0(\Phi) := (G, B_0(X), B_0(Y))$, где

$$
\begin{gathered}
G := \{(u,v) \in B_0(X) \times B_0(Y) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in X)(\forall\, y \in Y)(u(x) \wedge v(y) \neq 0 \to (x,y) \in F)\}.
\end{gathered}
$$

Если $\Phi$ однозначно, то и $B_0(\Phi)$ однозначно.

Непосредственно из определений выводится, что

$$
\begin{gathered}
B_0(I_X) = I_{B_0(X)}, \\
B_0(\Psi \circ \Phi) = B_0(\Psi) \circ B_0(\Phi), \\
\Phi = \imath_Y^{-1} \circ B_0(\Phi) \circ \imath_X.
\end{gathered}
$$

Из сказанного следует, что отображение $B_0(\,\cdot\,)$ является ковариантным функтором из $\mathscr{V}_*$ в $\mathrm{CBSet}_*$.

**3.5.3.** Некоторые взаимосвязи между основными операциями булевозначного анализа приводились ранее в форме правил сокращения стрелок. Придадим этим правилам функториальные формулировки.

**(1)** *Функтор спуска $\mathscr{F}^{\downarrow}$ и функтор подъема $\mathscr{F}^{\uparrow}$ устанавливают изоморфизм между категориями $\mathscr{V}^{(B)}$ и $\mathscr{C}\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$. Иначе говоря, $\mathscr{F}^{\uparrow} \circ \mathscr{F}^{\downarrow}$ и $\mathscr{F}^{\downarrow} \circ \mathscr{F}^{\uparrow}$ совпадают с тождественными функторами на $\mathscr{V}^{(B)}$ и $\mathscr{C}\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$ соответственно.*

$\lhd$ Тождественность функтора $\mathscr{F}^{\uparrow}\circ\mathscr{F}^{\downarrow}$ легко вытекает из правил «спуск–подъем» 3.3.3 (2) и 3.3.12 (3), а функтора $\mathscr{F}^{\downarrow}\circ\mathscr{F}^{\uparrow}$ — из правил «подъем–спуск» 3.3.3 (1) и 3.3.12 (1). $\rhd$

**(2)** *Функтор* $\mathrm{mix} : \mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)} \to \mathscr{C}\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$ *совпадает с суперпозицией $\mathscr{F}^{\uparrow} \circ \mathscr{F}^{\downarrow}$ и является $\mathscr{C}\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$-рефлектором категории $\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$. В частности, $\mathscr{C}\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$ — рефлективная подкатегория в $\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$.*

$\lhd$ Равенство $\mathrm{mix} := \mathscr{F}^{\uparrow} \circ \mathscr{F}^{\downarrow}$ вытекает из 3.3.3 (1) и 3.3.12 (2). Возьмем непустые множества $A$, $C \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$, и пусть $C$ циклично. Тогда всякое экстенсиональное отображение $g : A \to C$ допускает единственное экстенсиональное распространение $\bar{g} = g{\uparrow}{\downarrow} \colon \mathrm{mix}(A) \to C$ (см. 3.2.12, 3.3.11 и 3.3.12 (2)). Следовательно, отображение ограничения $\theta_{A,C} : h \mapsto h \restriction A$ служит биекцией $\mathscr{C}\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}\,(\mathrm{mix}(A), C)$ на $\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}(A, C)$. Семейство отображений $\theta_{A,C}$ обозначим через $\theta$. Тогда $\theta$ есть сопряжение от mix к функтору тождественного вложения $\mathscr{C}\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$ в $\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$. В самом деле, если $A'$, $C' \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$ и $C'$ циклично, то для любых экстенсиональных отображений $f : \mathrm{mix}\, A \to C$,

$g : A' \to A$, $h : C \to C'$ будет $(f \circ \mathrm{mix}(g)) \restriction A' = (f \restriction A) \circ g$. Тем более верно

$$(h \circ (f \circ \mathrm{mix}(g))) \restriction A' = h \circ (f \restriction A) \circ g,$$

или, что то же,

$$\theta_{A',C'}(h \circ f \circ \mathrm{mix}(g)) = h \circ \theta_A(f) \circ g. \ \rhd$$

**(3)** *Суперпозиция функтора канонического вложения и функтора спуска естественно изоморфна функтору $B_0$; символически $\mathscr{F}^{\downarrow} \circ \mathscr{F}^{\wedge} \sim B_0$.*

$\lhd$ Для любого множества $X$ отображение

$$\theta_X : (b_x)_{x \in X} \mapsto \underset{x \in X}{\mathrm{mix}}(b_x x^{\wedge}) \quad ((b_x)_{x \in X} \in B_0(X))$$

является биекцией $B_0(X)$ на $X^{\wedge}{\downarrow}$. Отображение $\theta : X \mapsto \theta_X$ ($X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{V}_*$) есть изоморфизм функторов $B_0$ и $\mathscr{F}{\downarrow} \circ \mathscr{F}^{\wedge}$. Для этого достаточно заметить, что при $u \in B_0(X)$ и $v \in B_0(Y)$, $a := \theta_X(u)$ и $b := \theta_Y(v)$ будет $(a, b) \in \Phi^{\wedge}{\downarrow}$ в том и только в том случае, если $(x, y) \in \Phi$ всякий раз, когда $u(x) \wedge v(x) \neq 0$. $\rhd$

**3.5.4. *Теорема.*** *Пусть $(X, d_X)$ — это $B$-множество и $X' := X^{\sim}{\downarrow}$. Тогда имеют место утверждения:*

**(1)** *существует инъекция $\imath_X : X \to X'$ такая, что*

$$d_X(x_1, x_2) = [\![ \imath_X x_1 \neq \imath_X x_2 ]\!] \quad (x_1, x_2 \in X);$$

**(2)** *для любого $x' \in X'$ существуют разбиение единицы $(b_\xi)$ и семейство $(x_\xi) \subset X$ такие, что $x' = \mathrm{mix}(b_\xi \imath(x_\xi))$;*

**(3)** *если $\Phi$ — нерастягивающее соответствие из $X$ в $B$-множество $Y$, $Y' := Y^{\sim}{\downarrow}$ и $\Phi' := \Phi^{\sim}{\downarrow}$, то $\Phi'$ — единственное вполне экстенсиональное соответствие из $X'$ в $Y'$, для которого $\mathrm{dom}(\Phi') = \mathrm{mix}(\imath_X(\mathrm{dom}(\Phi)))$,*

$$\Phi'(\imath_X x) = \mathrm{mix}(\imath_X(\Phi(x))) \quad (x \in \mathrm{dom}(\Phi)).$$

$\lhd$ (1) По определению $X^{\sim}$ и $\pi_X$ (см. 3.4.12 (1–3)) для любого $x \in X$ будет $[\![ \pi_X x^{\wedge} \in X^{\sim} ]\!] = \mathbb{1}$, поэтому существует единственный элемент $x' \in X'$ такой, что $[\![ x' = \pi_X x^{\wedge} ]\!] = \mathbb{1}$. Положим $\imath_X x := x'$. Тем самым определено отображение $\imath := \imath_X : X \to X'$, причем $[\![ \imath x =$

$\pi_X x^\wedge]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in X)$. Используя последнее соотношение и равенство 3.4.12 (4), для произвольных $x_1$, $x_2 \in X$ выводим

$$[\![\imath x_1 \neq \imath x_2]\!] = [\![\pi_X x_1^\wedge = \pi_X x_2^\wedge]\!]^* = [\![x_1 {\sim} x_2]\!]^* = d_X(x_1, x_2).$$

Отсюда, в частности, вытекает инъективность $\imath$.

(2) Сначала заметим, что имеет место формула $[\![t \in (\mathrm{im}(\imath))\!\uparrow = \pi_X(X^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$. Действительно, для $t \in \mathbb{V}^{(B)}$ по определению инъекции $\imath$ верно

$$[\![t \in (\mathrm{im}(\imath))\!\uparrow]\!] = \bigvee_{x \in X} [\![t = \imath x]\!] = \bigvee_{x \in X} [\![t = \pi_X x^\wedge]\!] = [\![t \in \pi_X(X^\wedge)]\!].$$

Теперь с учетом правила сокращения 3.3.3 (1) будет

$$X' = \pi_X(X^\wedge)\!\downarrow = (\mathrm{im}(\imath))\!\uparrow\downarrow = \imath(X)\!\uparrow\downarrow = \mathrm{mix}(\imath(X)).$$

(3) Поскольку $\Phi^\sim$ — соответствие из $X^\sim$ в $Y^\sim$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то $\Phi'$ — вполне экстенсиональное соответствие из $X'$ в $Y'$ согласно 3.4.7 (2).

Применяя свойства спуска соответствий (см. 3.2.13 (1)), для произвольных $x \in X$ и $y \in Y$ можно написать:

$$\imath_Y y \in \Phi'(\imath_X x) \leftrightarrow [\![\imath_Y y \in \Phi^\sim(\imath_X x)]\!] = \mathbb{1}.$$

В правой части этой эквивалентности можно $\imath_X x$ заменить на $\pi_X x^\wedge$ ввиду конструкции $\imath_X$. Далее, по теореме 3.4.13

$$[\![\imath_Y y \in \Phi^\sim(\pi_X x^\wedge)]\!] = [\![\imath_Y y \in \pi_Y(\Phi(x)^\wedge)]\!].$$

Из всего сказанного следует, что $\imath_Y y \in \Phi'(\imath_X x)$ в том и только в том случае, если $\imath_Y y \in \pi_Y(\Phi(x)^\wedge)\!\downarrow$, а это и влечет требуемое соотношение. В самом деле, доказанное в (1) и (2) позволяет заключить, что $A^\sim\!\downarrow = \pi_Y(A^\wedge)\!\downarrow = \mathrm{mix}(\imath_Y(A))$ для любого $A \subset Y$. Учитывая еще правило 3.2.13 (1), выводим

$$\Phi'(\imath_X x) = \Phi^\sim\!\downarrow(\imath_X x) = \Phi^\sim(\pi_X(x^\wedge))\!\downarrow = \pi_Y(\Phi(x)^\wedge) = \mathrm{mix}(\imath_Y(\Phi(x))),$$

где $x \in \mathrm{dom}(\Phi)$. Положим $X_1 := \mathrm{im}(\imath_X)$, $Y_1 := \mathrm{im}(\imath_Y)$ и $\Phi_1 := \imath_Y^{-1} \circ \Phi' \circ \imath_X$. Тогда $\Phi_1$ — экстенсиональное соответствие из $X_1$ в $Y_1$ и выполнены равенства

$$X' = \mathrm{mix}(X_1), \quad Y' = \mathrm{mix}(Y_1), \quad \Phi'(x) = \mathrm{mix}(\Phi_1(x)) \quad (x \in \mathrm{dom}(\Phi_1)).$$

Отсюда вытекает $\Phi' = \mathrm{mix}(\Phi_1)$ и тем самым единственность $\Phi'$. $\triangleright$

**3.5.5.** Опишем модифицированные спуски и подъемы соответствий.

**(1)** Пусть $X$ — непустое $B$-множество, $Y$ — произвольный элемент $\mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $[\![Y \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}$. Рассмотрим $\Phi \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\Phi = (F, X^{\sim}, Y)$ — соответствие из $X^{\sim}$ в $Y$». По теореме 3.2.13 $\Phi{\downarrow}$ — соответствие из $X' := X^{\sim}{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$. Положим по определению $\Phi{\downarrow\!\!\!\!\!\!\downarrow} := \Phi{\downarrow} \circ \imath_X$. Соответствие $\Phi{\downarrow\!\!\!\!\!\!\downarrow}$ называется *модифицированным спуском соответствия* $\Phi$. Ввиду теорем 3.2.13 и 3.5.4 $\Phi{\downarrow\!\!\!\!\!\!\downarrow}$ — единственное вполне нерастягивающее соответствие из $X$ в $Y{\downarrow}$, для которого

$$y \in \Phi{\downarrow\!\!\!\!\!\!\downarrow}(x) \leftrightarrow [\![y \in \Phi(\imath_X x)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X).$$

Заметим также, что $\Phi{\downarrow\!\!\!\!\!\!\downarrow} = (F{\downarrow}^{-}, X, Y{\downarrow})$, где

$$F{\downarrow}^{-} := \{(x, y) \in X \times Y{\downarrow} : (\imath_X x, y)^B \in F\}.$$

**(2)** Предположим теперь,что $\Psi := (F, X, Y{\downarrow})$ — нерастягивающее соответствие. Операция подъема из 3.3 к $\Psi$ непосредственно неприменима. Однако соответствие $\Psi \circ \imath_X$, как видно, экстенсионально, и к нему можно применить подъем. Положим по определению $\Psi{\uparrow\!\!\!\!\!\!\uparrow} := (\Psi \circ \imath_X^{-1}){\uparrow}$ и назовем $\Psi{\uparrow\!\!\!\!\!\!\uparrow}$ *модифицированным подъемом соответствия* $\Psi$. В силу теорем 3.3.10, 3.5.4 $\Psi{\uparrow\!\!\!\!\!\!\uparrow}$ — единственное соответствие из $X^{\sim}$ в $Y$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ такое, что

$$[\![\mathrm{dom}(\Psi){\uparrow\!\!\!\!\!\!\uparrow} = (\mathrm{dom}(\Psi))^{\sim}]\!] = \mathbb{1},$$
$$[\![\Psi{\uparrow\!\!\!\!\!\!\uparrow}(\imath_X x) = \Psi(x){\uparrow}]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in \mathrm{dom}(\Psi)).$$

Заметим вновь, что $\Psi{\uparrow\!\!\!\!\!\!\uparrow} = (F_{-}{\uparrow}, X^{\sim}, Y)$, где

$$F_{-} := \{(\imath_X x, y)^B : (x, y) \in F\}.$$

**(3)** Допустим, что $X$ — дискретное $B$-множество. Тогда $\Phi{\downarrow\!\!\!\!\!\!\downarrow}$ есть соответствие из $X$ в $Y{\downarrow}$ и оно однозначно определяется соотношением

$$y \in \Phi{\downarrow\!\!\!\!\!\!\downarrow}(x) \leftrightarrow [\![y \in \Phi(x^{\wedge})]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X).$$

С другой стороны, в этом случае всякое соответствие $\Psi$ из $X$ в $Y{\downarrow}$ является нерастягивающим, так что существует единственное соответствие $\Psi{\uparrow\!\!\!\!\!\!\uparrow}$ из $X^{\wedge}$ в $Y$, для которого

$$[\![\Psi{\uparrow\!\!\!\!\!\!\uparrow}(x^{\wedge}) = \Psi(x){\uparrow}]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X).$$

**3.5.6. Теорема.** *Пусть* $[\![X^{\sim}, Y]\!]$ *— множество элементов* $\Phi \in \mathbb{V}^{(B)}$, *для которых* $[\![\Phi$ *— соответствие из* $X^{\sim}$ *в* $Y]\!] = \mathbb{1}$, *а* $[\![X, Y{\downarrow}]\!]$ *— множество всех вполне нерастягивающих соответствий из* $X$ *в* $Y{\downarrow}$. *Модифицированные спуск и подъем — взаимно обратные отображения, осуществляющие биекцию между* $[\![X^{\sim}, Y]\!]$ *и* $[\![X, Y{\downarrow}]\!]$.

$\lhd$ Обозначим для простоты $\imath := \imath_X$. Из 3.5.4 (2) и 3.3.3 (1) видно, что $X^{\sim} = \operatorname{im}(\imath){\uparrow}$. Отсюда в силу 3.3.10 (3) вытекает $I_{X^{\sim}} = (I_{\operatorname{im}(\imath)}){\uparrow}$. Далее, привлекая правила сокращения стрелок для соответствий, получим, что внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполняются равенства

$$\Phi{\mapsdown}{\mapsup} = ((\Phi{\downarrow} \circ \imath) \circ \imath^{-1}){\uparrow} = (\Phi{\downarrow} \circ I_{\operatorname{im}(\imath)}){\uparrow} = \Phi{\downarrow}{\uparrow} \circ (I_{\operatorname{im}(\imath)}){\uparrow} = \Phi \circ I_{X^{\sim}} = \Phi.$$

С другой стороны, для вполне нерастягивающего $\Psi$ имеем

$$\Psi{\mapsup}{\mapsdown}(x) = (\Psi \circ \imath^{-1}){\uparrow}{\downarrow}(\imath x) = (\operatorname{mix}(\Psi)) \circ \imath^{-1}(\imath x) =$$
$$= \operatorname{mix}(\Psi(x)) = \Psi(x) \quad (x \in \operatorname{mix}(\operatorname{dom}(\Psi)) = \operatorname{dom}(\Psi)). \ \rhd$$

**3.5.7. Теорема.** *Функтор спуска* $\mathscr{F}^{\downarrow}$ *является правым сопряженным к функтору погружения* $\mathscr{F}^{\sim}$. *При этом модифицированный спуск* ${\mapsdown}$ *есть сопряжение, а модифицированный подъем* ${\mapsup}$ *— косопряжение.*

$\lhd$ Рассмотрим функторы $\mathscr{H}^{\sim}$ и $\mathscr{H}^{\downarrow}$ из категории $\mathrm{BSet} \times \mathscr{V}^{(B)}$ в категорию $\mathscr{V}$, определяемые соотношениями

$$\mathscr{H}^{\sim}(X, Y) := \mathscr{V}^{(B)}(X^{\sim}, Y), \quad \mathscr{H}^{\downarrow}(X, Y) := \mathrm{BSet}_0(X, Y{\downarrow});$$
$$\mathscr{H}^{\sim}(\alpha, \beta) := \Phi' \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \Phi' = \beta \circ \Phi \circ \alpha^{\sim};$$
$$\mathscr{H}^{\downarrow}(\alpha, \beta) := \beta{\downarrow} \circ \Psi \circ \alpha,$$

где $X \in \operatorname{Ob}\mathrm{BSet}$, $Y \in \operatorname{Ob}\mathscr{V}^{(B)}$, $\alpha \in \mathrm{BSet}(X_1, X)$, $\beta \in \mathscr{V}^{(B)}(Y, Y_1)$, $\Phi \in \mathscr{H}^{\sim}(X, Y)$, $\Psi \in \mathscr{H}^{\downarrow}(X, Y)$.

Требуемое утверждение состоит в том, что модифицированный спуск ${\mapsdown}$ — это изоморфизм функторов $\mathscr{H}^{\sim}$ и $\mathscr{H}^{\downarrow}$. Ввиду теоремы 3.5.6 нужно лишь установить, что ${\mapsdown}$ — функторный морфизм функтора $\mathscr{H}^{\sim}$ в функтор $\mathscr{H}^{\downarrow}$, или, другими словами, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}^{\sim}(X, Y) \arrow[r, "{\mapsdown}"] \arrow[d, "\mathscr{H}^{\sim}(\alpha,\beta)"'] & \mathscr{H}^{\downarrow}(X, Y) \arrow[d, "\mathscr{H}^{\downarrow}(\alpha,\beta)"] \\
\mathscr{H}^{\sim}(X_1, Y_1) \arrow[r, "{\mapsdown}"'] & \mathscr{H}^{\downarrow}(X_1, Y_1)
\end{tikzcd}$$

для любых указанных выше $X$, $X_1$, $Y$, $Y_1$, $\alpha$ и $\beta$. Последнее равносильно справедливости равенства $(\mathscr{H}(\alpha,\beta)\Phi){\downarrow} = \mathscr{H}^{\downarrow}(\alpha,\beta)(\Phi{\downarrow})$ при каждом $\Phi \in \mathscr{H}^{\sim}(X,Y)$, или, учитывая определение $\mathscr{H}^{\sim}$ и $\mathscr{H}^{\downarrow}$, совместности условий

$$\Psi \in \mathscr{H}^{\downarrow}(X,Y), \quad [\![\Psi = \beta \circ \Phi \circ \alpha^{\sim}]\!] = \mathbb{1},$$
$$(\beta{\downarrow}) \circ (\Phi{\downarrow}) \circ \alpha = \Psi{\downarrow}.$$

Последние выполнены в том и только в том случае, если

$$[\![\beta \circ \Phi \circ \alpha^{\sim} = (\beta{\downarrow} \circ (\Phi{\downarrow}) \circ \alpha){\uparrow}]\!] = \mathbb{1}.$$

Однако, как видно из правил сокращения стрелок и определений модифицированных спусков и подъемов, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ имеют место равенства

$$(\beta{\downarrow} \circ (\Phi{\downarrow}) \circ \alpha){\uparrow} = (\beta{\downarrow} \circ (\Phi{\downarrow}) \circ \imath \circ \alpha \circ \imath^{-1}){\uparrow} =$$
$$= \beta{\downarrow}{\uparrow} \circ (\Phi{\downarrow}{\uparrow}) \circ (\imath \circ \alpha \circ \imath^{-1}){\uparrow} = \beta \circ \Phi \circ (\imath \circ \alpha \circ \imath^{-1}){\uparrow}\ .$$

Осталось заметить, что $[\![(\imath\circ\alpha\circ\imath^{-1}){\uparrow} = \alpha^{\sim}]\!] = \mathbb{1}$, и теорема доказана. $\triangleright$

**3.5.8.** Приведем еще некоторые важные следствия теоремы 3.5.4 (сохраняя принятые в ней посылки и обозначения).

**(1)** *Если $(X, d_X)$ — расширенное $B$-множество, то $\imath_X$ — биекция между $X$ и $X'$.*

$\triangleleft$ Нужно только заметить, что в случае, когда $x = \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$ для разбиения единицы $(b_\xi)$ и семейства $(x_\xi) \subset X$ будет $\imath_X x = \operatorname{mix}(b_\xi \imath_X x_\xi)$. $\triangleright$

**(2)** *Для всякого $B$-множества $(X, d_X)$ существует тройка $(X'$, $d'_X$, $\imath_X)$, называемая $B$-расширением $(X, d_X)$ и удовлетворяющая условиям*:

- **(a)** *$(X', d'_X)$ — расширенное $B$-множество, а $\imath_X$ — изометрическое отображение $X$ в $X'$;*
- **(b)** *$X' = \operatorname{mix}(\operatorname{im}(\imath_X))$;*
- **(c)** *для любого нерастягивающего соответствия $\Phi$ из $X$ в расширенное $B$-множество $Y$ существует единственное вполне нерастягивающее соответствие $\Phi'$ из $X'$ в $Y$ такое, что $\operatorname{dom}(\Phi') = \operatorname{mix}(\imath(\operatorname{dom}(\Phi)))$ и*

$$\operatorname{mix}(\Phi(x)) = \Phi(\imath_X x) \quad (x \in \operatorname{dom}(\Phi));$$

**(d)** *если тройка* $(X'', d''_X, \imath'_X)$ *удовлетворяет* (a)–(c), *то существует* $B$*-изоморфизм* $\imath$ *между* $X'$ *и* $X''$, *для которого* $\imath \circ \imath_X = \imath'_X$.

$\lhd$ Для доказательства нужно в 3.5.4 (3) взять в качестве $Y$ расширенное $B$-множество и воспользоваться следствием (1). $\rhd$

**(3)** *Если* $X \in \operatorname{Ob} \mathscr{V}^{(B)}$, *то существует* $\jmath_X \in \mathbb{V}^{(B)}$ *такой, что* $[\![\jmath_X$ — *изоморфизм* (*в категории* $\mathscr{V}^{(B)}$) $X$ *на* $X{\downarrow}^{\sim}]\!] = \mathbb{1}$.

$\lhd$ В самом деле, если $Y := X{\downarrow}$, то, полагая $\jmath_X := \imath_Y{\uparrow}$, получим, что $\jmath_X$ — изоморфизм между $Y{\uparrow} = X$ и $Y^{\sim} = X{\downarrow}^{\sim}$, ибо $\imath_Y$ есть изоморфизм между $Y$ и $Y^{\sim}{\downarrow}$. $\rhd$

**(4)** *Если* $X$ *и* $Y$ — *расширенные* $B$*-множества, а* $\Phi$ — *соответствие из* $X^{\sim}$ *в* $Y^{\sim}$ *внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$, *то существует единственное вполне нерастягивающее соответствие* $\Psi$ *из* $X$ *в* $Y$ *такое, что* $\Psi^{\sim} = \Phi$.

$\lhd$ Действительно, $\Phi' := \Phi{\downarrow}$ — вполне экстенсиональное соответствие из $X' := X^{\sim}{\downarrow}$ в $Y' := Y^{\sim}{\downarrow}$. Значит, $\Psi := \imath_Y^{-1} \circ \Phi' \circ \imath_X$ — вполне нерастягивающее соответствие из $X$ в $Y$. Если $\Psi' := \Psi^{\sim}{\downarrow}$, то по 3.5.4 (3) будет $\imath_Y^{-1} \circ \Psi \circ \imath_X = \imath_Y^{-1} \circ \Psi' \circ \imath_X$. Принимая во внимание (1), $\Psi = \Psi'$. Отсюда $\Phi = \Phi'{\uparrow} = \Psi'{\uparrow} = \Psi{\uparrow}$. $\rhd$

**(5)** *Если* $X$ *и* $Y$ — *расширенные* $B$*-множества, то отображение* $\Phi \mapsto \Phi^{\sim}$ *задает биекцию между множествами морфизмов* $\mathrm{CBSet}_*(X, Y)$ *и* $\mathscr{V}_*^{(B)}(X^{\sim}, Y^{\sim})$.

**3.5.9.** *Пусть* $X$ *и* $Y$ — *произвольные* $B$*-множества и* $\Phi$ — *вполне нерастягивающее соответствие из* $X$ *в* $Y$. *Тогда для любого множества* $A \subset \operatorname{dom}(\Phi)$ *будет*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \pi_\Phi(A)^{\sim} = \pi_{\Phi^{\sim}}(A^{\sim}).$$

$\lhd$ Заметим, что соотношения $(\forall\, a \in A^{\wedge})(y \in \Phi^{\sim}(\pi_X a))$ и $y \in \pi_{\Phi^{\sim}}(A^{\sim})$ равносильны, так как $A^{\sim} = \pi_X(A^{\wedge})$. Пользуясь теоремой 3.4.13 и полной нерастягиваемостью $\Phi$, можно для $y \in \imath_Y(Y)$ написать эквивалентности

$$y \in \pi_{\Phi^{\sim}}(A^{\sim}){\downarrow} \leftrightarrow \bigwedge \{ [\![ y \in \Phi^{\sim}(\pi_X a^{\wedge}) ]\!] : a \in A \} = \mathbb{1} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, a \in A) [\![ y \in \pi_Y(\Phi(a)^{\wedge}) ]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow (\forall\, a \in A)(y \in \Phi(a)^{\sim}{\downarrow}) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall\, a\in A) y\in \operatorname{mix}(\imath_Y(\Phi(a))) \leftrightarrow (\forall\, a\in A)\, y\in \imath_Y(\operatorname{mix}(\Phi(a))) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow y\in \bigcap_{a\in A} \imath_A(\Phi(a)) \leftrightarrow y\in \imath_Y(\pi_\Phi(A)).$$

Следовательно,

$$\pi_{\Phi^\sim}(A^\sim) = \imath_Y(\pi_\Phi(A)){\uparrow} = \pi_\Phi(A)^\sim. \ \ \triangleright$$

**3.5.10. *Теорема.*** *Функторы $\mathscr{F}^\sim$ и $\mathscr{F}^\downarrow$ устанавливают эквивалентность категорий* $\mathrm{CBSet}_*$ *и* $\mathscr{V}_*^{(B)}$. *В частности,* $\mathscr{F}^\sim$ *и* $\mathscr{F}^\downarrow$ *— сопряженные друг к другу полные унивалентные функторы, сохраняющие индуктивные и проективные пределы (на указанных категориях).*

$\triangleleft$ Достаточно обосновать справедливость следующих двух утверждений;

(1) функтор $\mathscr{F}^\downarrow \circ \mathscr{F}^\sim$ естественно изоморфен тождественному функтору на $\mathrm{CBSet}_*$, а изоморфизм осуществляется отображениями $\imath_X : X\mapsto X'$ $(X\in \mathrm{CBSet}_*)$;

(2) функтор $\mathscr{F}^\sim \circ \mathscr{F}^\downarrow$ естественно изоморфен тождественному функтору на $\mathscr{V}_*^{(B)}$; изоморфизм задается отображениями $\jmath_X \in \mathscr{V}^{(B)}$ $(X, X{\downarrow}^\sim)$ $(X\in \mathscr{V}_*^{(B)})$.

Для доказательства (1) достаточно воспользоваться следствием 3.5.8 (1) и заметить, что ввиду 3.5.4 (3) при $X$, $Y\in \operatorname{Ob}\mathrm{CBSet}_*$ и $\Phi\in \mathrm{CBSet}_*(X,Y)$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ \imath_X\ } & X^\sim{\downarrow} \\ {\scriptstyle\Phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\Phi^\sim\downarrow} \\ Y & \xrightarrow[\ \imath_Y\ ]{} & Y^\sim{\downarrow} \end{array}$$

Далее, из 3.5.8 (3, 4) вытекает, что для любых $X$, $Y\in \operatorname{Ob}\mathscr{V}_*^{(B)}$ и $\Phi\in \mathscr{V}_*^{(B)}(X,Y)$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ \jmath_X\ } & X{\downarrow}^\sim \\ {\scriptstyle\Phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\Phi\downarrow^\sim} \\ Y & \xrightarrow[\ \jmath_Y\ ]{} & Y{\downarrow}^\sim \end{array}$$

коммутативна. Отсюда получаем (2). $\triangleright$

**3.5.11.** *Для любых* $X \in \operatorname{Ob}\mathrm{CBSet}_*$ *и* $Y \in \operatorname{Ob}\mathscr{V}_*^{(B)}$ *выполнено:* $(\jmath_Y){\downarrow} = \imath_{Y{\downarrow}}$, $\mathbb{V}^{(B)} \models (\imath_X)^{\sim} = \jmath_{X^{\sim}}$.

$\lhd$ Первое равенство вытекает непосредственно из определений: $(\jmath_Y){\downarrow} = (\imath_{Y{\downarrow}}){\uparrow\downarrow} = \imath_{Y{\downarrow}}$. Для доказательства второго положим

$$b := [\![(\imath_X)^{\sim} = \jmath_{X^{\sim}}]\!], \quad b_x := [\![\imath_{X^{\sim}}\pi_X x^{\wedge} = \jmath_{X^{\sim}}\pi_X x^{\wedge}]\!] \quad (x \in X).$$

Заметим, что $b = \bigwedge\{b_x : x \in X\}$, поэтому нужно показать, что $b_x = \mathbb{1}$ для каждого $x \in X$. Однако если $x \in X$, то по 3.4.13 и по определению $\jmath_X$ имеем $b_x = [\![\pi_{X^{\sim}\downarrow}(\imath_X x)^{\wedge} = (\imath_{X^{\sim}\downarrow}){\uparrow} \circ \pi_X(x^{\wedge})]\!]$. Наконец, привлекая равенства

$$[\![\pi_X x^{\wedge} = \imath_X x]\!] = [\![\pi_{X^{\sim}\downarrow} y^{\wedge} = \imath_{X^{\sim}\downarrow} y]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X, y \in Y^{\sim}{\downarrow}),$$

справедливые ввиду определения $\imath_X$ из доказательства 3.5.4 (1), и полагая $y = \imath_X x$, получим

$$b_x = [\![\pi_{X^{\sim}\downarrow}(\imath_X x)^{\wedge} = \imath_{X^{\sim}\downarrow}(\imath_X x)]\!] = \mathbb{1},$$

что и требовалось. $\rhd$

# Глава 4

# Булевозначный анализ алгебраических систем

В каждом булевозначном универсуме имеется полный набор математических объектов, включающий в частности множества с дополнительными структурами: группы, кольца, алгебры и т. п. Применение функтора спуска к алгебраическим системам в булевозначной модели выделяет образования с новыми свойствами и ведет к выявлению фактов об их строении и взаимосвязях. Такой прием исследования называют *прямой булевозначной интерпретацией*. При этом появляются новые теоремы или, точнее говоря, путем непосредственного перевода расширяется содержательный объем уже имеющихся теорем. Возникающие таким образом сведения далеко не всегда оказываются по-настоящему новыми, полезными или интересными, и прямая булевозначная интерпретация может стать бесполезной забавой.

В связи с этим естественно спросить: какие практически важные математические структуры можно получить при булевозначной интерпретации наиболее употребительных структур? Какие при этом справедливы принципы переноса? Ясно, что здесь речь должна идти о специфических объектах, дополнительные особенности строения которых позволяют говорить об их булевозначной реализации, каковая, при ее должном понимании, невозможна для произвольных объектов.

В предыдущей главе показано, что абстрактное $B$-множество можно погрузить в булевозначный универсум так, что булево рас-

стояние между элементами становится булевой оценкой истинности их несовпадения. Соответствующий элемент универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ является по определению булевозначной реализацией рассматриваемого $B$-множества. Если $B$-множество обладало дополнительной структурой, то можно попытаться наделить аналогичной структурой и его булевозначную реализацию с тем, чтобы использовать технику спусков и подъемов для изучения исходного объекта. Таким образом, сформулированные выше вопросы можно трактовать как проблему поиска квалифицированных булевозначных реализаций структурированных $B$-множеств.

В текущей главе мы займемся анализом названной проблемы для объектов общей алгебры. Центральным для нас будет понятие алгебраической $B$-системы. Последняя представляет собой непустое $B$-множество с нерастягивающими операциями и некоторым количеством $B$-предикатов, т. е. $B$-значных нерастягивающих отображений. Оказывается, что булевозначной реализацией алгебраической $B$-системы служит обычная — двузначная — алгебраическая система того же типа. Это означает, что подходящее расширение любой алгебраической $B$-системы совпадает со спуском двузначной алгебраической системы внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. С другой стороны, двузначную алгебраическую систему можно превратить в алгебраическую $B$-систему, если в ней выделена полная булева алгебра конгруэнции. Важно при этом проследить за тем, какие формулы остаются истинными при переходе из $B$-системы к двузначной системе и наоборот. Иными словами, здесь возникают варианты принципа переноса или принципа сохранения соотношений, давно известные в некоторых разделах математики. Общие факты иллюстрируются конкретными алгебраическими системами, в которых полные булевы алгебры конгруэнций связаны с отношениями порядка или дизъюнктности.

## 4.1. Алгебраические $B$-системы

Введем класс алгебраических систем, подходящий для булевозначной интерпретации языков первого порядка. Такие системы возникают как $B$-множества, снабженные нерастягивающими операциями и предикатами.

**4.1.1.** Напомним, что *сигнатура* — это тройка $\sigma := (F, P, \mathfrak{a})$, где $F$ и $P$ — некоторые (возможно, пустые) множества, а $\mathfrak{a}$ — отображение из $F \cup P$ в $\omega$.

Под *$n$-местной операцией* и *$n$-местным предикатом* на $B$-множестве $A$ мы будем понимать нерастягивающие отображения $f : A^n \to A$ и $p : A^n \to B$ соответственно. По определению отображения $f$ и $p$ *нерастягивающие*, если

$$d(f(a_0, \dots, a_{n-1}), f(a'_0, \dots, a'_{n-1})) \leq \bigvee_{k=0}^{n-1} d(a_k, a'_k),$$

$$d_s\big(p(a_0, \dots, a_{n-1}), p(a'_0, \dots, a'_{n-1})\big) \leq \bigvee_{k=0}^{n-1} d(a_k, a'_k)$$

для всех $a_0,\, a'_0, \dots, a_{n-1},\, a'_{n-1} \in A$, где $d$ — это $B$-метрика множеств $A$ и $d_s$ — *симметрическая разность* на $B$, т. е. $d_s(b_1, b_2) := b_1 \vartriangle b_2$ (см. 1.1.4). *Алгебраической $B$-системой сигнатуры $\sigma$* называют пару $(A, \nu)$, где $A$ — непустое $B$-множество, называемое *основным*, а $\nu$ — такое отображение, что $\mathrm{dom}(\nu) = F \cup P$, причем $\nu(f)$ есть $\mathfrak{a}(f)$-местная операция на $A$ при всех $f \in F$, а $\nu(p)$ есть $\mathfrak{a}(p)$-местный предикат на $A$ для каждого $p \in P$. Нерастягивающее отображение из $A^n$ в $B$ именуют также *$B$-предикатом* или *$B$-значным предикатом.* Отображение $\nu$ называют *интерпретирующим* и иногда пишут для удобства $f^\nu$ и $p^\nu$ вместо $\nu(f)$ и $\nu(p)$. Сигнатуру алгебраической $B$-системы $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ мы часто будем обозначать через $\sigma(\mathfrak{A})$, а основное множество $A$ — через $|\mathfrak{A}|$. Поскольку $A^0 = \{\varnothing\}$, то нульместные операции и предикаты на $A$ — это отображения из $\{\varnothing\}$ в множество $A$ и в алгебру $B$ соответственно. Будем отождествлять отображение $g : \{\varnothing\} \to A \cup B$ с элементом $g(\varnothing)$. Таким образом, нульместные операции на $A$ суть выделенные элементы $A$, а множество всех нульместных предикатов на $A$ есть булева алгебра $B$. Если $F := \{f_1, \dots, f_n\}$ и $P := \{p_1, \dots, p_m\}$, то алгебраическую $B$-систему сигнатуры $\sigma$ часто записывают в виде $(A, \nu(f_1), \dots, \nu(f_n), \nu(p_1), \dots, \nu(p_m))$ и даже $(A, f_1, \dots, f_n,\, p_1, \dots, p_m)$, а вместо $\sigma = (F, P, \mathfrak{a})$ используют обозначение $\sigma = (f_1, \dots, f_n,\, p_1, \dots, p_m)$.

**4.1.2.** Если $B$ — двухэлементная булева алгебра $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$, то вместо алгебраической $B$-системы говорят о *двузначной системе* или просто об *алгебраической системе.* В этом случае в качестве $B$-множества получаются произвольные множества, а $n$-местные операция и предикат на $B$-множестве $A$ специализируются как произвольное

отображение из $A^n$ в $A$ и любая характеристическая функция $p : A^n \to \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$, отождествляемая с множеством $\{x \in A^n : p(x) = \mathbb{1}\}$. Значит, алгебраическая система сигнатуры $\sigma$ — это пара $(A, \nu)$, где $A$ — непустое множество, а $\nu$ — функция из $\operatorname{dom}(\nu) = F \cup P$ в $\mathbb{V}$ такая, что $\nu(f) : A^{\mathfrak{a}(f)} \to A, \quad \nu(p) \subset A^{\mathfrak{a}(p)} \quad (f \in F,\ p \in P)$.

С другой стороны, если $(A, \nu)$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma$ и $A \subset \mathbb{V}^{(B)}$, то, рассматривая $A$ как $B$-множество (с $B$-метрикой $d(a, a') := [\![a = a']\!]^* = [\![a \neq a']\!]$ $(a, a' \in A)$), для каждого $p \in P$ можно определить $n$-местный $B$-предикат $\nu'(p)$ на $A$, $n := \mathfrak{a}(p)$, по формуле (см. 3.4.5)

$$\nu'(p) := (a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto \operatorname{dist}((a_0, \dots, a_{n-1}), \nu(p)).$$

Нерастягиваемость отображения $\nu'(p) : A^n \to B$ очевидна. Пусть, кроме того, $\nu(f)$ — нерастягивающее отображение для всех $f \in F$. Положим $\nu'(f) := \nu(f)$, $f \in F$. Тогда $(A, \nu')$ — алгебраическая $B$-система.

Разумеется, что рассмотрение конкретных алгебраических систем проходит достаточно свободно. Вместо торжественного выписывания формальных деталей сигнатуры, обычно указывают лишь наиболее важные символы и даже отождествляют всю алгебраическую систему с ее основным множеством. Такая практика представляет собой еще одну неотъемлемую привилегию работающего математика.

**4.1.3.** Алгебраическую $B$-систему $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ именуют *расширенной* (*разложимой*), если $A$ есть расширенное (разложимое) $B$-множество (3.4.3). Назовем $B$-значный предикат $p$ на множестве $A$ *достоверным*, если существует такой элемент $x \in A$, что $p(x) = \mathbb{1}$.

**(1)** *Нерастягивающее отображение $p$ из расширенного $B$-множества $A$ в $B$ является достоверным $B$-значным предикатом в том и только в том случае, если $\mathbb{1} = \bigvee\{p(x) : x \in A\}$.*

$\lhd$ Действительно, если выполнено указанное условие, то найдутся семейство $(x_\xi) \subset A$ и разбиение единицы $(b_\xi) \subset B$ такие, что $p(x_\xi) \geq b_\xi$. Если $x := \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, то $p(x) = \mathbb{1}$. $\rhd$

С каждой алгебраической $B$-системой $\mathfrak{A}$ можно связать алгебраическую систему $\overline{\mathfrak{A}}$ с тем же основным множеством $|\overline{\mathfrak{A}}| := |\mathfrak{A}|$, интерпретирующее отображение которого $\overline{\nu}$ определяется следующим образом. Если $f$ — функциональный символ, то $\overline{\nu}(f) := \nu(f)$; если

же $p$ — предикатный символ и $n = \mathfrak{a}(p)$, то $\overline{\nu}(p) := \{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in A^n : p(x_0, \dots, x_{n-1}) = \mathbb{1}\}$. Ясно, что предикат $\overline{\nu}(p)$ может оказаться пустым для некоторого $p$. Говорят, что алгебраическая система $\overline{\mathfrak{A}}$ есть *очистка* $\mathfrak{A}$ или что $\overline{\mathfrak{A}}$ получается из $\mathfrak{A}$ *процедурой очистки.*

**(2)** *Если $(A, \nu)$ — алгебраическая $B$-система и $(A, \overline{\nu})$ — ее очистка, то для каждого достоверного предиката $p^\nu$ имеем*

$$p^\nu : x \mapsto \operatorname{dist}(x, \overline{\nu}(p))^* \quad (x \in A^{\mathfrak{a}(p)}).$$

$\lhd$ В силу теоремы о реализации $B$-множеств (см. 3.5.8) $B$-множество $A$ допускает расширение $A' \subset \mathbb{V}^{(B)}$, а $p^\nu$ допускает единственное продолжение $\nu'(p)$ до $B$-значного предиката на $A'$. При этом $\nu'(p)(x) = \operatorname{dist}(x, \operatorname{mix}(\overline{\nu}(p)))^* = \operatorname{dist}(x, \overline{\nu}(p))^* = [\![x \in p^\nu\!\uparrow]\!]$ $(x \in A^{\mathfrak{a}(p)})$. Отсюда и вытекает требуемое, ибо допущение $A \subset A'$ не ограничивает общности. $\rhd$

Предложение (2) позволяет алгебраическую $B$-систему с достоверными предикатами отождествить с некоторой алгебраической системой, а именно с ее очисткой. Естественно спросить: а какие алгебраические системы получаются описанной процедурой очистки из разложимых (расширенных) алгебраических $B$-систем? Ответ на этот вопрос будет сформулирован в терминах конгруэнций алгебраической системы.

**4.1.4.** Рассмотрим произвольную алгебраическую систему $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ сигнатуры $\sigma := (F, P, \mathfrak{a})$. Отношение эквивалентности $\rho$ на множестве $A$ называется *конгруэнцией* системы $\mathfrak{A}$, если для каждого $f \in F$ и для любых $x_0, \dots, x_{n-1}$, $y_0, \dots, y_{n-1} \in A$, $n = \mathfrak{a}(f)$, из соотношений $(x_0, y_0) \in \rho, \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}) \in \rho$ вытекает $(f^\nu(x_0, \dots, x_{n-1}), f^\nu(y_0, \dots, y_{n-1})) \in \rho$. Множество всех конгруэнций на алгебраической системе $\mathfrak{A}$ обозначается символом $\operatorname{Cong}(\mathfrak{A})$. Введем отношение порядка в $\operatorname{Cong}(\mathfrak{A})$ посредством формулы

$$\rho_1 \le \rho_2 \leftrightarrow \rho_1 \subset \rho_2 \quad (\rho_1, \rho_2 \in \operatorname{Cong}(\mathfrak{A})).$$

Ясно, что *тождественная конгруэнция* $I_A := \{(x, x) : x \in A\}$ и *тривиальная, «неразборчивая» конгруэнция* $A \times A$ являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами $\operatorname{Cong}(\mathfrak{A})$.

**(1)** ***Теорема.*** *Упорядоченная система* $\operatorname{Cong}(\mathfrak{A})$ *является полной решеткой. Точная нижняя граница множества* $\mathscr{P} \subset \operatorname{Cong}(\mathfrak{A})$

*совпадает с пересечением* $\bigcap\{\rho : \rho \in \mathscr{P}\}$. *Точная верхняя граница множества* $\mathscr{P} \subset \mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$ *представляет собой объединение всевозможных композиций* $\rho_1 \circ \ldots \circ \rho_n$, *где* $\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$ — *произвольное конечное подмножество в* $\mathscr{P}$.

Из этой теоремы видно, что для $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$ конгруэнция $\rho_1 \vee \rho_2$ совпадает с объединением всевозможных отношений вида $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_1 \circ \ldots \circ \rho_1 \circ \rho_2$. Следовательно, если $\rho_1$ и $\rho_2$ перестановочны, т. е. $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$, то $\rho_1 \vee \rho_2 = \rho_1 \circ \rho_2$. Наоборот, если $\rho_1 \vee \rho_2 = \rho_1 \circ \rho_2$, то конгруэнции $\rho_1$ и $\rho_2$ перестановочны.

Множество конгруэнций $\Lambda$ на алгебраической системе $\mathfrak{A}$ назовем *независимым* (*конечно независимым*), если для любых семейств (конечных семейств) $(\lambda_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\Lambda$ и $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $A$ существует такой элемент $a \in A$, что $(a, a_\xi) \in \lambda_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$.

Множество $\Lambda$ называется *полным*, если (a) $\inf(\Lambda) := \bigcap(\Lambda) = I_A$ и (b) для любого $p \in P$ и для произвольной $n$-ки $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in A^n$, $n = \mathfrak{a}(p)$, из соотношения $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \notin \nu(p)$ вытекает существование такой конгруэнции $\lambda \in \Lambda$, что $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \notin \nu(p)$, как только $(x_0, y_0) \in \lambda, \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}) \in \lambda$ (см. [88]).

Условие (b) в определении полного множества конгруэнций удобно формулировать в терминах перемешивания. Рассмотрим семейство $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ в множестве $A$. Если для некоторого $a \in A$ выполняется $(a, a_\lambda) \in \lambda$ при всех $\lambda \in \Lambda$, то естественно сказать, что $a$ есть *перемешивание семейства* $(a_\lambda)$ *относительно* $\Lambda$.

Множество $U \subset A^n$ назовем *устойчивым относительно* $\Lambda$-*перемешивания*, если для любого семейства $((a_\lambda^0, \ldots, a_\lambda^{n-1}))$ в $U$ выполняется $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in U$, где $a_k$ есть перемешивание $(a_\lambda^k)$ относительно $\Lambda$.

**(2)** *Независимое множество конгруэнций* $\Lambda$ *алгебраической системы* $\mathfrak{A}$ *является полным в том и только в том случае, если* $\inf(\Lambda) = I_A$ *и любой предикат* $\nu(p)$, $p \in P$, *устойчив относительно* $\Lambda$-*перемешиваний.*

$\triangleleft$ В самом деле, допустим, что все предикаты устойчивы относительно $\Lambda$-перемешиваний.

Пусть $p \in P$, $n = \mathfrak{a}(p)$, $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \notin \nu(p)$, и тем не менее для всякого $\lambda \in \Lambda$ существуют такие $(y_\lambda^0, \ldots, y_\lambda^{n-1}) \in \nu(p)$, что $(x_k, y_\lambda^k) \in \lambda$ $(k = 0, \ldots, n-1)$.

Пусть $y_k$ — перемешивание семейства $(y_{\lambda,k})_{\lambda\in\Lambda}$ относительно $\Lambda$. Тогда $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \nu(p)$.

В то же время $(x_k, y_k) \in \lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Поэтому $x_k = y_k$ ($k = 0, \dots, n-1$), ибо $\bigcap \Lambda = I_A$. Тем самым мы приходим к противоречию.

Наоборот, предположим, что $\Lambda$ — полное множество. Возьмем $p \in P$ и семейство $n$-ок $(a_{\lambda,0}, \dots, a_{\lambda,n-1})$, содержащееся в $\nu(p)$. Пусть $a_k$ — перемешивание семейства $(a_{\lambda,k})_{\lambda\in\Lambda}$ относительно $\Lambda$. Если $(a_0, \dots, a_{n-1}) \notin \nu(p)$, то ввиду полноты $\Lambda$ найдется конгруэнция $\lambda \in \Lambda$, для которой $(a_{\lambda,0}, \dots, a_{\lambda,n-1}) \notin \nu(p)$. Это противоречит выбору $(a_{\lambda,0}, \dots, a_{\lambda,n-1})$, значит, $\nu(p)$ устойчив относительно перемешиваний. Как видно, необходимость верна без предположения о независимости $\Lambda$. $\triangleright$

**4.1.5.** Условимся называть *булевой алгеброй конгруэнций* каждую из таких булевых алгебр $\mathscr{B} \subset \mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$, что в $\mathscr{B}$ точные нижние границы произвольных множеств наследуются из решетки $\mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$ и наименьшая конгруэнция $I_A$ служит нулем $\mathscr{B}$. Следует подчеркнуть, что булево дополнение $\rho^*$ элемента $\rho \in \mathscr{B}$ может не быть дополнением $\rho$ в решетке $\mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$, т. е. точная верхняя граница $\rho$ и $\rho^*$ в $\mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$ может оказаться меньше $A \times A$.

*Базой алгебраической системы* $\mathfrak{A}$ назовем всякую полную булеву алгебру конгруэнций $\mathscr{B} \subset \mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$, если любой предикат $\nu(p)$ ($p \in P$) устойчив относительно $\Lambda^*$-перемешиваний для любого разбиения единицы $\Lambda \subset \mathscr{B}$, где $\Lambda^* := \{b^* : b \in \Lambda\}$. Алгебраическую систему с базой $\mathscr{B}$ назовем *расширенной* (*разложимой*), если для любого (соответственно любого конечного) разбиения единицы $\Lambda \subset \mathscr{B}$ множество конгруэнций $\Lambda^*$ является независимым. Имеет место следующее очевидное предложение.

*Алгебраическая система* $\mathfrak{A}$ *имеет базу* $\mathscr{B}$, *изоморфную полной булевой алгебре* $B$, *в том и только в том случае, если существует инъективное отображение* $h : B \to \mathrm{Cong}(\mathfrak{A})$, *удовлетворяющее условиям*:

**(1)** *$h$ сохраняет точные нижние границы любых множеств и* $h(\mathbb{0}) = I_A$;

**(2)** *любой предикат* $\nu(p)$ ($p \in P$) *устойчив относительно* $h(\Lambda^*)$-*перемешиваний для всякого разбиения единицы* $\Lambda \subset B$.

*При этом* $\mathfrak{A}$ *расширена* (*разложима*) *тогда и только тогда, когда множество* $h(\Lambda^*)$ *независимо для каждого* (*для любого конечного*) *разбиения единицы* $\Lambda \subset B$.

**4.1.6.** Алгебраическую $B$-систему $\mathfrak{A}$ называют *наполненной*, ес-

ли для любого $\mathbb{0} \neq b \in B$ существуют элементы $x,\ y \in A$, $x \neq y$, такие, что $d(x,y) \leq b$. Понятно, что разложимая $B$-система наполнена, хотя обратное, вообще говоря, не имеет места.

***Теорема.*** *Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ в том и только в том случае получается процедурой очистки из некоторой наполненной алгебраической $B$-системы $\mathfrak{A}'$, если $\mathfrak{A}$ имеет базу, изоморфную $B$. При этом $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ расширены (разложимы) или нет одновременно.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathfrak{A}'$ — наполненная алгебраическая $B$-система. Каждому $b \in B$ поставим в соответствие отношение $h(b) := \{(x,y) \in A^2 : d(x,y) \leq b\}$. Так как $\nu(f)$ — нерастягивающее отображение для каждого $f \in F$, то $h(b)$ будет конгруэнцией на $A$. Очевидно, что $h(\mathbb{0}) = I_A$ и $h$ сохраняет точные нижние границы. Инъективность $h$ вытекает из наполненности $\mathfrak{A}$. Допустим, что алгебраическая система $\mathfrak{A}$ получается из $\mathfrak{A}'$ процедурой очистки. Заметим, что множество вида $\{z \in A : p(z) = \mathbb{1}\}$ устойчиво относительно любых перемешиваний в $B$-множестве $A$. Теперь из 4.1.5 видно, что $\mathfrak{A}$ имеет базу, изоморфную $B$.

Наоборот, пусть алгебраическая система $\mathfrak{A}$ имеет базу $\mathscr{B}$ и существует булев изоморфизм $h$ из $B$ на $\mathscr{B}$. Положим по определению

$$d(x,y) := \bigwedge\{b \in B : (x,y) \in h(b)\} \quad (x,y \in A).$$

Если $b_1,\ b_2 \in B$ таковы, что $(x,z) \in h(b_1)$ и $(z,y) \in h(b_2)$, то $(x,y) \in h(b_2) \circ h(b_1)$. Но $h(b_2) \circ h(b_1) \subset h(b_1 \vee b_2)$, поэтому $d(x,y) \leq b_1 \vee b_2$. Переходя к инфимуму по указанным $b_1$ и $b_2$ и пользуясь дистрибутивным законом 1.1.5 (1), получим $d(x,y) \leq d(x,z) \vee d(z,y)$. Теперь ясно, что $d$ — булева полуметрика на $A$. Так как $h$ сохраняет точные нижние границы, то

$$h(d(x,y)) = \bigcap\{h(b) : b \in B \wedge (x,y) \in h(b)\}.$$

Отсюда выводим, что $d(x,y) \leq b$ тогда и только тогда, когда $(x,y) \in h(b)$. В частности, $d(x,y) = \mathbb{0}$ влечет $x = y$, а для $\mathbb{0} \neq b \in B$ можно подыскать такие $x, y \in A$, что $x \neq y$ и $d(x,y) \leq b$.

Остается показать, что если $\Lambda$ — разбиение единицы в $B$, то для семейства $(a_b)_{b\in\Lambda} \subset A$ перемешивание относительно $h(\Lambda^*)$ совпадает с перемешиванием в смысле $B$-метрики $d$, т. е. с $\mathrm{mix}_{b\in\Lambda}(ba_b)$. Но это

тривиально вытекает из уже доказанного: $(a, a_b) \in h(b^*) \leftrightarrow d(a, a_b) \leq b^* \leftrightarrow b \wedge d(a, a_b) = \mathbb{0}$. Определим теперь $\mathfrak{A}' := (A', \nu')$, полагая $A' := A$, $\nu'(f) = \nu(f)$, $f \in F$ и

$$\nu'(p) : x \mapsto \operatorname{dist}(x, \nu(p)) \quad (p \in P,\ x \in A^{\mathfrak{a}(p)}).$$

Если $f \in F$ и $n = \mathfrak{a}(f)$, то для любого $b \in B$ и элементов $x_0, y_0, \dots, x_{n-1}, y_{n-1} \in A$ из соотношений $(x_k, y_k) \in h(b)$, $k < n$ следует, что $(f^\nu(x_0, \dots, x_{n-1}),\ f^\nu(y_0, \dots, y_{n-1})) \in h(b)$. Это означает, что

$$d(f^\nu(x_0, \dots, x_{n-1}),\ f^\nu(y_0, \dots, y_{n-1})) \leq b.$$

Переходя к точной нижней границе по $b$ и замечая, что

$$\bigwedge\{b : (x_k, y_k) \in h(b), k < n\} = \bigvee_{k=0}^{n-1} d(x_k, y_k),$$

мы заключаем, что $f^\nu = \nu(f)$ — нерастягивающее отображение. Возьмем $p \in P$, $\mathfrak{a}(p) = m$ и элементы $x := (x_0, \dots, x_{m-1})$ и $y := (y_0, \dots, y_{m-1})$ из $A^m$. Тогда

$$d(x, y) \wedge \operatorname{dist}(x, \nu(p)) \leq \operatorname{dist}(y, \nu(p)),$$

откуда и видна нерастягиваемость $\nu'(p)$. Кроме того, в силу свойства устойчивости $\nu(p)$ (см. 4.1.3 (2)) будет $\nu(p) = \{x \in A^m : \nu'(p)(x) = \mathbb{1}\}$. Итак, $\mathfrak{A}$ есть очистка наполненной алгебраической $B$-системы $\mathfrak{A}'$. Расширенность систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ означает, что $\Lambda^*$, где $\Lambda$ — разбиения единицы в $\mathscr{B}$, есть независимое множество и что в $(A, d)$ существуют любые перемешивания. Однако последние два утверждения эквивалентны. По аналогичным соображениям эквивалентны также утверждения о разложимости этих двух систем. $\rhd$

**4.1.7.** Рассмотрим некоторые конкретные примеры алгебраических $B$-систем. Напомним, что ассоциативное кольцо $R$ называется *булевым кольцом*, если всякий его элемент *идемпотентен*, т. е. если $(\forall\, x \in R)\ (x^2 = x)$. Булево кольцо с единицей является булевой алгеброй, и наоборот, всякая булева алгебра $B$ является булевым кольцом с единицей. При этом кольцевые нуль и единица совпадают с булевыми нулем и единицей соответственно (см. 1.2.1).

**(1)** Пусть $B_0$ — некоторая булева алгебра и $X$ — унитальный модуль над булевым кольцом $B_0$. Пусть $B$ — пополнение алгебры $B_0$, а $\jmath$ — изоморфизм $B_0$ на плотную подалгебру в $B$. Положим по определению

$$d_\jmath(x,y) := \bigwedge\{\jmath(b) : b^*x = b^*y, b \in B_0\} \quad (x, y \in X).$$

Нетрудно видеть, что $d_\jmath$ есть $B$-полуметрика на $X$. Проверим, например, неравенство треугольника. Если $b^*x = b^*z$ и $c^*z = c^*y$, то для $e := b^* \cdot c^* = b^* \wedge c^* = (b \vee c)^*$ будет $ex = ez$ и $ey = ez$. Следовательно, $ex = ey$ и $d_\jmath(x,y) \le e \le \jmath(b \vee c) = \jmath(b) \vee \jmath(c)$ и, в силу произвольности $b$ и $c$, получим $d_\jmath(x,y) \le d_\jmath(x,z) \vee d_\jmath(z,y)$. Назовем модуль $X$ *латерально точным*, если для любого разбиения единицы $(b_\xi)$ в $B_0$ из $(\forall\,\xi)$ $(b_\xi x = 0)$ следует $x = 0$, каков бы ни был элемент $x \in X$. Понятно, что для латерально точного унитального $B_0$-модуля $X$ полуметрика $d_\jmath$ является метрикой. Аналогично неравенству треугольника для $d_\jmath$ проверяется нерастягиваемость модульных операций:

$$d_\jmath(x+u, y+v) \le d_\jmath(x,y) \vee d_\jmath(u,v) \quad (x, y, u, v \in X),$$
$$d_\jmath(bx, cy) \le d_\jmath(x,y) \vee d_s(b,c) \quad (x, y \in X;\ b, c \in B).$$

Из последнего неравенства следует, в частности,

$$d_\jmath(bx, by) \le d_\jmath(x,y) \quad (b \in B;\ x, y \in X).$$

Кроме того, очевидно, что $d_\jmath(-x,-y) = d_\jmath(x,y)$. Таким образом, множество $X$ с операциями $+$, $-$ и с унарными операциями умножения на $b \in B_0$ есть алгебраическая $B$-система.

**(2)** Пусть $R$ — коммутативное кольцо с единицей. Рассмотрим множество всех его идемпотентных элементов $B_0 := \{e \in R : e \cdot e = e\}$. Тогда $B_0$ — булево кольцо с единицей и $R$ — модуль над $B_0$. Если $B$ и $\jmath$ те же, что и в (1), то на $R$ возникает $B$-полуметрика $d_\jmath$. Естественно определяется *латеральная точность* $R$ над $B_0$. В силу (1) получаем, что коммутативное кольцо $R$ с единицей, латерально точное над подкольцом своих идемпотентов $B_0$, является алгебраической $B$-системой сигнатуры $(+, -, \cdot, \mathbb{1})$.

**(3)** Пусть $C$ — некоторая булева алгебра, а $\imath$ — гомоморфизм булевой алгебры $B_0$ в $C$. Поскольку $\imath(B_0)$ — подкольцо булева кольца $C$, то на $C$ естественно определяется структура унитального модуля над $B_0$. Если $B$ и $\jmath$ те же, что и в (1), то $B$-полуметрика $d_\jmath$ имеет вид

$$d_\jmath(x,y) := \bigwedge\{\jmath(b) : \imath(b^*)x = \imath(b^*)y\}.$$

Модуль $C$ будет латерально точным, если $\imath$ — полный мономорфизм.

Ввиду указанной выше связи между булевыми и кольцевыми операциями булева алгебра $C$ является алгебраической $B$-системой сигнатуры $(\vee, \wedge, *, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ в случае полного мономорфизма $\imath$. Эта система будет расширенной, если, например, $B_0$ и $C$ — полные булевы алгебры.

**4.1.8.** Обратимся к $B$-значной интерпретации языков первого порядка. Пусть $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ — алгебраическая $B$-система сигнатуры $\sigma := \sigma(\mathfrak{A}) := (F, P, \mathfrak{a})$.

Пусть $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ — формула сигнатуры $\sigma$ с $n$ свободными переменными и $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$. Естественно определяется значение истинности $|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \in B$ формулы $\varphi$ в системе $\mathfrak{A}$ при заданных значениях $a_0, \dots, a_{n-1}$ переменных $x_0, \dots, x_{n-1}$. Определение дается, как обычно, индукцией по длине формулы $\varphi$. Для пропозициональных связок и кванторов полагаем

$$\begin{aligned}
|\varphi \wedge \psi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) &:= |\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \wedge |\psi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1});\\
|\varphi \vee \psi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) &:= |\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \vee |\psi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1});\\
|\neg\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) &:= |\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1})^*;\\
|(\forall\, x_0)\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n-1}) &:= \bigwedge_{a_0 \in A} |\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1});\\
|(\exists\, x_0)\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{n-1}) &:= \bigvee_{a_0 \in A} |\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}).
\end{aligned}$$

Осталось рассмотреть случай атомных формул. Пусть $p \in P$ — некоторый $m$-местный предикатный символ, $q \in P$ — нульместный предикатный символ, а $t_0, \dots, t_{m-1}$ — термы сигнатуры $\sigma$, принимающие значения $b_0, \dots, b_{m-1}$ при заданных значениях $a_0, \dots, a_{n-1}$ перемен-

ных $x_0, \dots, x_{n-1}$. Положим по определению

$$|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) := \nu(q), \text{ если } \varphi = q^{\nu};$$
$$|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) := d(b_0, b_1)^*, \text{ если } \varphi = (t_0 = t_1);$$
$$|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) := p^{\nu}(b_0, \dots, b_{m-1}), \text{ если } \varphi = p^{\nu}(t_0, \dots, t_{m-1}),$$

где $d$ — это $B$-метрика на множестве $A$.

Говорят, что $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ *истинна в системе* $\mathfrak{A}$ *при заданных значениях* $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ *переменных* $x_0, \dots, x_{n-1}$ (или, короче, $\varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ *истинна в* $\mathfrak{A}$) и пишут $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$, если $|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \mathbb{1}_B$. При $B := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ получаем обычное определение истинности формулы в алгебраической системе (см. [34, 88]).

Напомним, что замкнутую формулу $\varphi$ сигнатуры $\sigma$ называют *тождественно истинной*, если она выполняется на любой алгебраической $\mathbb{2}$-системе сигнатуры $\sigma$.

**4.1.9. *Теорема.*** *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— произвольная алгебраическая* $B$*-система. Тогда имеют место следующие утверждения:*

**(1)** *всякая теорема исчисления предикатов истинна в* $\mathfrak{A}$*;*

**(2)** *каждая тождественно истинная замкнутая формула сигнатуры* $\sigma(\mathfrak{A})$ *истинна в* $\mathfrak{A}$*.*

$\lhd$ (1) Здесь следует убедиться, что аксиомы исчисления предикатов истинны в $\mathfrak{A}$, а правила вывода не нарушают истинности в $\mathfrak{A}$ (ср. 2.1.8). Для этого нужно лишь проследить за вычислениями булевых значений истинности (см. [34, 61, 70, 119, 247, 248]).

(2) Если замкнутая формула $\varphi$ не выполняется на $\mathfrak{A}$, то $b := |\varphi|^{\mathfrak{A}} < \mathbb{1}_B$. Пусть $h : B \to \mathbb{2} := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ — полный гомоморфизм, причем $h(b) = \mathbb{0}$. Существование такого $h$ следует из того, что идеал $[\mathbb{0}, b]$ можно продолжить до максимального идеала, который берется за $h^{-1}(\mathbb{0})$. Если $\nu$ — интерпретирующее отображение $\mathfrak{A}$, то положим $\nu'(f) := f^{\nu}$ для функциональных символов и $\nu'(p) := h \circ p^{\nu}$ для предикатных символов. Тогда $\mathfrak{A}' := (|\mathfrak{A}|, \nu')$ — алгебраическая $\mathbb{2}$-система и $|\varphi|^{\mathfrak{A}'} = h(b) = \mathbb{0}$, т. е. $\varphi$ не выполняется на $\mathfrak{A}'$ и не может быть тождественно истинной. $\rhd$

**4.1.10.** Рассмотрим алгебраические $B$-системы $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ и $\mathfrak{C} := (C, \mu)$ одной и той же сигнатуры $\sigma$. Отображение $h : A \to C$ называется *гомоморфизмом* $B$*-системы* $\mathfrak{A}$ *в алгебраическую* $B$*-систему* $\mathfrak{C}$, если для любых $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ верно

**(1)** $d_B(h(a_1), h(a_2)) \leq d_A(a_1, a_2)$;

**(2)** $h(f^\nu) = f^\mu$, если $\mathfrak{a}(f) = 0$;

**(3)** $h(f^\nu(a_0, \dots, a_{n-1})) = f^\mu(h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))$, если $0 \neq n := \mathfrak{a}(f)$;

**(4)** $p^\nu(a_0, \dots, a_{n-1}) \leq p^\mu(h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))$, где $n := \mathfrak{a}(p)$.

Гомоморфизм $h$ называется *сильным*, если

**(5)** для произвольного $p \in P$, $\mathfrak{a}(p) := n \neq 0$, и для любых $c_0, \dots, c_{n-1} \in C$ справедливо неравенство

$$p^\mu(c_0, \dots, c_{n-1}) \geq \bigvee_{a_0, \dots, a_{n-1} \in A} \{p^\nu(a_0, \dots, a_{n-1}) \wedge$$
$$\wedge d_C(c_0, h(a_0)) \wedge \dots \wedge d_C(c_{n-1}, h(a_{n-1}))\}.$$

Если гомоморфизм $h$ инъективен, а условия (1) и (4) выполняются с равенством, то говорят, что $h$ — *изоморфизм из* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{C}$. Ясно, что любой сюръективный изоморфизм $h$ и, в частности, отображение $I_A : A \to A$ являются сильными гомоморфизмами. Суперпозиция (сильных) гомоморфизмов есть (сильный) гомоморфизм. Если $h$ — гомоморфизм и существует отображение $h^{-1}$, также являющееся гомоморфизмом, то $h$ — изоморфизм. Отметим вновь, что в случае двухэлементной булевой алгебры $B := \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ возникают обычные понятия гомоморфизма, сильного гомоморфизма, изоморфизма (см. [34, 88]).

**4.1.11.** Рассмотрим некоторое множество $\Phi$ формул одной и той же фиксированной сигнатуры $\sigma$. Определим категорию $B$-AS($\Phi$) следующим образом. Класс Ob $B$-AS($\Phi$) состоит из всех алгебраических $B$-систем сигнатуры $\sigma$, на каждой из которых истинны все формулы из $\Phi$. Класс Mor $B$-AS($\Phi$) — класс всех гомоморфизмов алгебраических $B$-систем из Ob $B$-AS($\Phi$) с обычной суперпозицией в качестве композиции морфизмов. Ясно, что изоморфизм в категории $B$-AS($\Phi$) — это $B$-изометрический сильный гомоморфизм. Обозначим символом $B$-CAS($\Phi$) полную подкатегорию категории $B$-AS($\Phi$), в которой объекты — расширенные алгебраические $B$-системы.

**4.1.12.** Согласно 4.1.5 и 4.1.6 структура алгебраической $B$-системы восстанавливается по полной булевой алгебре конгруэнций.

С другой стороны, один из общих способов порождения полных булевых алгебр связан с отношением дизъюнктности. Рассмотрим некоторые простейшие взаимосвязи этих понятий. Начнем с некоторых напоминаний.

Возьмем множества $X$ и $Y$. Пусть $\Phi$ — соответствие из $X$ в $Y$. *Поляра* $\pi_\Phi(A)$ множества $A \subset X$ и *обратная поляра* $\pi_\Phi^{-1}(C)$ множества $C \subset Y$ относительно соответствия $\Phi$ вводятся формулами (см. П.3.10):

$$\pi_\Phi(A) := \bigcap_{x \in A} \Phi(x), \quad \pi_\Phi^{-1}(C) := \bigcap_{y \in C} \Phi^{-1}(y).$$

Множество $K \subset Y$ называют $\Phi$-*компонентой* (или просто *компонентой*, когда ясно, о каком $\Phi$ идет речь), если $K = \pi_\Phi(\pi_\Phi^{-1}(K))$, или, что то же, $K = \pi_\Phi(A)$ для некоторого $A \subset X$. Совокупность всех $\Phi$-компонент обозначается символом $\mathfrak{K}_\Phi(Y)$. Наименьшая компонента, содержащая данное множество $C \subset Y$, обозначается $[C]$. При этом $[C] = \pi_\Phi(\pi_\Phi^{-1}(C))$.

**(1)** ***Теорема.*** *Множество $\mathfrak{K}_\Phi(Y)$ при упорядочении по включению становится полной решеткой. Точные границы произвольного семейства $(K_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов в $\mathfrak{K}_\Phi(Y)$ вычисляются по формулам*

$$\bigwedge_{\xi \in \Xi} K_\xi = \bigcap_{\xi \in \Xi} K_\xi, \quad \bigvee_{\xi \in \Xi} K_\xi = \left[ \bigcup_{\xi \in \Xi} K_\xi \right].$$

*Взятие обратной поляры $K \mapsto \pi_\Phi^{-1}(K)$ является антитонной биекцией $\mathfrak{K}_\Phi(Y)$ на $\mathfrak{K}_{\Phi^{-1}}(X)$.*

**(2)** Соответствие $\Delta$ из $X$ в $X$ называют *отношением дизъюнктности* или *дизъюнктностью* (в множестве $X$), если выполнены условия:

**(a)** $\Delta = \Delta^{-1}$, т. е. $\Delta$ симметрично;

**(b)** $\Delta \cap I_X \subset \Theta \times \Theta$,

где $\Theta := \pi_\Delta(X)$ — наименьшая $\Delta$-компонента;

**(c)** $[x] \cap [y] \subset \Theta \to (x, y) \in \Delta$.

Дизъюнктность $\Delta$ называют *простой*, если она подчинена дополнительному требованию

**(d)** $(x, y) \in \Delta \to x \in \Theta \vee y \in \Theta$.

Ввиду симметричности $\Delta$ решетки $\mathfrak{K}_\Delta(X)$ и $\mathfrak{K}_{\Delta^{-1}}(X)$ совпадают. Если $A \subset X$, то поляру $\pi_\Delta(A)$ называют *дизъюнктным дополнением* $A$ и обозначают также $A^\perp$. Соотношения $x \in \pi_\Delta(A)$ и

$C \subset \pi_\Delta(A)$ записывают в виде $x \perp A$ и $C \perp A$. Заметим также, что $A^{\perp\perp} := (A^\perp)^\perp = [A]$.

**(3) *Теорема.*** *Множество $\mathfrak{K}_\Delta(X)$ всех компонент относительно дизъюнктности $\Delta$, упорядоченное по включению, является полной булевой алгеброй. Булево дополнение компоненты совпадает с ее дизъюнктным дополнением.*

$\triangleleft$ В (1) уже упомянуто, что $\mathfrak{K}_\Delta(X)$ — полная решетка. Нулем и единицей этой решетки являются множества $\Theta$ и $X$ соответственно. Привлекая элементарные правила оперирования с полярами из П.3.10 и дистрибутивность теоретико-множественных операций для произвольных компонент $K$, $L$, $M$, можно выписать цепочку равенств:

$$(K \vee L) \wedge M = ((K \vee L)^\perp \cup M^\perp)^\perp = ((K^\perp \cap L^\perp) \cup M^\perp)^\perp =$$
$$= ((K^\perp \cup M^\perp) \cap (L^\perp \cup M^\perp))^\perp = [(K^\perp \cup M^\perp)^\perp \cup (L^\perp \cup M^\perp)^\perp] =$$
$$= (K^{\perp\perp} \cap M^{\perp\perp}) \vee (L^{\perp\perp} \cap M^{\perp\perp}) = (K \wedge M) \vee (L \wedge M).$$

Итак, решетка $\mathfrak{K}_\Delta(X)$ дистрибутивна. Ясно, что $K \cap K^\perp = \Theta$. С другой стороны,

$$K \vee K^\perp = [K \cup K^\perp] = (K^\perp \wedge K)^\perp = \Theta^\perp = X,$$

т. е. $K^\perp$ является дополнением $K$ в решетке $\mathfrak{K}_\Delta(X)$. $\triangleright$

**4.1.13.** Рассмотрим множество $X$ с фиксированной дизъюнктностью $\Delta$. Пусть $\jmath$ — изоморфизм $\mathfrak{K}_\Delta(X)$ на полную булеву алгебру $B$. Введем отображение $s : X \to B$ по формуле $s(x) := \jmath([x])$ $(x \in X)$. Допустим, что наименьшая компонента одноточечна, т. е. $\Theta := \{\theta\} = [\theta]$ для некоторого $\theta \in X$. Будем говорить, что $B$-метрика $d$ и дизъюнктность $\Delta$ на множестве $X$ *согласованы*, если

$$d(x, \theta) = s(x) \quad (x \in X).$$

Рассмотрим отображение $\delta : (x, y) \mapsto (s(x) \wedge s(y))^*$, где элементы $x, y$ берутся из $X$.

***Теорема.*** *Пусть на множестве $X$ заданы дизъюнктность и согласованная с ней $B$-метрика $d$. Тогда тройка $\mathfrak{X} := (X, \delta, \theta)$ является алгебраической $B$-системой, на которой выполняются аксиомы простой дизъюнктности* (a)–(d) *из 4.1.12 (2).*

$\lhd$ Прежде всего заметим, что

$$d(x,y)^* \wedge s(x) = d(x,y)^* \wedge d(x,\theta) \leq$$
$$\leq d(x,y)^* \wedge (d(x,y) \vee d(y,\theta)) \leq d(y,\theta) = s(y).$$

Отсюда видно, что $s$ — нерастягивающее отображение. Следовательно, нерастягивающим будет и отображение $\delta$. Итак, $\mathfrak{X}$ — алгебраическая $B$-система с двуместным предикатом $\delta$ и выделенным элементом $\theta$. По определению 4.1.8 будет

$$|x\delta y|^{\mathfrak{X}} = \delta(x,y), \quad |x \neq \theta|^{\mathfrak{X}} = s(x) \quad (x, y \in X).$$

Проверим аксиомы дизъюнктности для $\delta$. Симметричность $\delta$ очевидна. То, что $\{\theta\}$ — наименьшая компонента, видно из выкладок:

$$|x \in \pi_\delta(X) \to x = \theta|^{\mathfrak{X}} = \left(\bigwedge_{y \in X} \delta(x,y)\right) \Rightarrow s(x^*) =$$
$$= \bigvee_{y \in X} (s(x) \wedge s(y)) \vee s(x)^* = s(x)^* \vee \bigvee_{y \in X} s(y) = \mathbb{1}.$$

Ясно также, что для $x, y \in X$ верно

$$\delta(x,x) = |x\delta x|^{\mathfrak{X}} = s(x)^* = |x = \theta|^{\mathfrak{X}}.$$

Значит, выполнено условие (b) из определения дизъюнктности. Заметим далее, что

$$|u \in [x]|^{\mathfrak{X}} = s(u) \Rightarrow s(x) \quad (x, u \in X).$$

Исходя из этого, вычисляем:

$$|[x] \cap [y] = \{\theta\}|^{\mathfrak{X}} = \left(\bigwedge_{u \in X} (s(u) \Rightarrow s(x)) \wedge (s(u) \Rightarrow s(y))\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s(u)^* = \bigwedge_{u \in X} s(u)^* \vee (s(x) \bigwedge s(y))^* = \delta(x,y).$$

Тем самым $|[x] \cap [y] = \{\theta\} \to x\delta y|^{\mathfrak{X}} = \mathbb{1}$ и $\delta$ — отношение дизъюнктности. Простота $\delta$ означает, что при любых $x, y \in X$ справедливо

$$|x\delta y \to x = \theta \vee y = \theta|^{\mathfrak{X}} = \mathbb{1},$$

или, что то же самое,

$$\delta(x, y) \Rightarrow s(x)^* \vee s(y)^* = \mathbb{1}.$$

Последнее вытекает из определения $\delta$. $\triangleright$

Пусть $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ — алгебраическая $B$-система, а $\Delta$ — то же, что и в 4.1.13. Предположим, что все операции системы $\mathfrak{A}$ *сохраняют дизъюнктность*, т. е. для любого функционального символа $f$ и для любых элементов $a \in A$, $x_0, \dots, x_{n-1} \in A$ ($n := \mathfrak{a}(f)$) из соотношений $x_k \perp a$ ($k := 0, 1, \dots, n-1$) вытекает $f^\nu(x_0, \dots, x_{n-1}) \perp a$. Если, кроме того, $B$-метрика и дизъюнктность $\Delta$ согласованы, то тройку $(A, \nu, \Delta)$ называют *алгебраической $B$-системой с дизъюнктностью.*

**4.1.14.** Примечания.

**(1)** При доказательстве теоремы Стоуна 1.2.4 было установлено, что булева алгебра $B$ изоморфна алгебре непрерывных функций $C(\mathrm{St}(B), \mathbb{2})$, где $\mathrm{St}(B)$ — вполне несвязный компакт. Можно попытаться в этом утверждении двухэлементное поле $\mathbb{2}$ заменить на произвольную универсальную алгебру. На этом пути возникает важный пример алгебраической $B$-системы — *булева степень* универсальной алгебры, введенная Р. Ф. Аренсом и И. Капланским [117] (см. также [142, 143, 218]).

**(2)** В данном параграфе и ниже в этой главе мы рассматриваем лишь вопросы, связанные с булевозначной реализацией алгебраических $B$-систем и со спецификой соответствующей техники спусков и подъемов. Логико-алгебраические аспекты алгебраических $B$-систем более подробно обсуждаются, например, в [4, 144].

## 4.2. Спуски алгебраических систем

В настоящем параграфе операция спуска распространяется на общие алгебраические системы и приводится несколько конкретных примеров.

**4.2.1.** Пусть $\sigma := (F, P, \mathfrak{a})$ — некоторая сигнатура. Из общих свойств канонического вложения класса множеств $\mathbb{V}$ в универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. 3.1.6, 3.1.9) следует, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathfrak{a}^\wedge$ — отображение из $F^\wedge \cup P^\wedge$ в множество положительных целых чисел $\omega^\wedge$».

Кроме того, $\mathbb{V}^{(B)} \models \sigma^\wedge = (F^\wedge, P^\wedge, \mathfrak{a}^\wedge)$, следовательно, $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\sigma^\wedge$ есть сигнатура».

Если $\sigma$ — некоторая сигнатура внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то $\sigma{\downarrow}$ не будет, вообще говоря, сигнатурой в обычном смысле.

В самом деле, пусть $\sigma = (F, P, \mathfrak{a})^B \in \mathbb{V}^{(B)}$ для некоторых $F$, $P$, $\mathfrak{a} \in \mathbb{V}^{(B)}$, причем $[\![\mathfrak{a} : F \cup P \to \omega^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Тогда для каждого $u \in F{\downarrow} \cup P{\downarrow}$ найдется такое счетное разбиение единицы $(b_n)_{n\in\omega} \subset B$, что $\mathfrak{a}{\downarrow}(u) = \mathrm{mix}(b_n n^\wedge)$.

Таким образом, при спуске произвольной сигнатуры возникают функциональные и предикатные символы «смешанной арности». Разумеется, можно было бы изучать более общий случай операций и предикатов смешанной арности, причем принципиальных трудностей при этом не возникло бы. Другое направление обобщения связано с рассмотрением алгебраических систем с бесконечноместными операциями и предикатами. Настоящее изложение не затрагивает подобные вопросы.

**4.2.2.** Прежде чем дать общие определения, рассмотрим спуск весьма простой и важной алгебраической системы — двухэлементной булевой алгебры. Возьмем два произвольных элемента $0,\ 1 \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которых $[\![0 \neq 1]\!] = \mathbb{1}_B$. Можно считать, например, что $0 := \mathbb{0}_B^\wedge$ и $1 := \mathbb{1}_B^\wedge$.

*Спуск $C$ двухэлементной булевой алгебры $\{0,1\}^B \in \mathbb{V}^{(B)}$ представляет собой полную булеву алгебру, изоморфную $B$. Изоморфизм $\chi : B \to C$ можно выбрать так, чтобы*

$$[\![\chi(b) = 1]\!] = b, \quad [\![\chi(b) = 0]\!] = b^* \quad (b \in B).$$

$\lhd$ Поскольку $0, 1 \in C$, то для каждого $b \in B$ перемешивание $c := \mathrm{mix}(b1, b^*0)$ также входит в $C$, причем $[\![c = 1]\!] \geq b$ и $[\![c = 0]\!] \geq b^*$. С другой стороны,

$$[\![c = 1]\!] \wedge [\![c = 0]\!] = [\![c = 1 \wedge c = 0]\!] \leq [\![0 = 1]\!] = \mathbb{0},$$

значит, $[\![c = 1]\!] = b$ и $[\![c = 0]\!] = b^*$. Полагая $\chi(b) := c$, получим отображение $\chi : B \to C$. Инъективность $\chi$ очевидна. Проверим,

что $\chi$ сюръективно. Действительно, если $c \in C$, то для $b := [\![c = 1]\!]$ имеем

$$[\![\chi(b) = 0]\!] = b^* = [\![c = 0]\!], \quad [\![\chi(b) = 1]\!] = b,$$

поэтому

$$[\![\chi(b) = c]\!] \geq [\![\chi(b) = 1]\!] \wedge [\![c = 1]\!] = b.$$

Аналогично $[\![\chi(b) = c]\!] \geq b^*$, стало быть, $\chi(b) = c$.

Осуществим теперь спуск булевых операций из $\{0, 1\}^{(B)}$. Тогда для любых $x$, $y$, $z \in C$ справедливы эквивалентности

$$\begin{gathered} z = x \wedge y \leftrightarrow [\![z = 1 \leftrightarrow x = 1 \wedge y = 1]\!] = \mathbb{1}, \\ z = x \vee y \leftrightarrow [\![z = 0 \leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0]\!] = \mathbb{1}, \\ x = y^* \leftrightarrow [\![x = 1 \leftrightarrow y = 0]\!] = \mathbb{1}. \end{gathered}$$

Исходя из этих соотношений, легко проверить, что $C$ — булева алгебра, а $\chi$ — булев изоморфизм. Покажем, к примеру, что $\chi$ сохраняет точные верхние границы любых двух элементов.

Пусть $b_1$, $b_2 \in B$, $b_0 := b_1 \vee b_2$ и $c_l := \chi(b_l)$ при $l = 0, 1, 2$. Тогда по определению

$$[\![c_l = 1]\!] = b_l, \quad [\![c_l = 0]\!] = b_l^* \quad (l = 0, 1, 2),$$

следовательно,

$$[\![c_0 = 0]\!] = b_0^* = b_1^* \wedge b_2^* = [\![c_1 = 0]\!] \wedge [\![c_2 = 0]\!],$$

или, что то же самое, $[\![c_0 = 0 \leftrightarrow c_1 = 0 \wedge c_2 = 0]\!] = \mathbb{1}$. Таким образом, $c_0 = c_1 \vee c_2$ или $\chi(b_0) = \chi(b_1) \vee \chi(b_2)$. Аналогично проверяется сохранение точных нижних границ и дополнений. $\triangleright$

**4.2.3.** Рассмотрим теперь алгебраическую систему $\mathfrak{A}$ сигнатуры $\sigma^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, и пусть $[\![\mathfrak{A} = (A, \nu)^B]\!] = \mathbb{1}$ для некоторых $A$, $\nu \in \mathbb{V}^{(B)}$. Под *спуском алгебраической системы* $\mathfrak{A}$ понимается пара $\mathfrak{A}{\downarrow} := (A{\downarrow}, \mu)$, где $\mu$ — функция, определяемая соотношениями:

$$\begin{gathered} \mu : f \mapsto (\nu{\downharpoonleft}(f)){\downarrow} \quad (f \in F), \\ \mu : p \mapsto \chi^{-1} \circ (\nu{\downharpoonleft}(p)){\downarrow} \quad (p \in P). \end{gathered}$$

Здесь $\chi$ — канонический изоморфизм булевых алгебр $B$ и $\{0,1\}^B$, определенный в 4.2.2.

Говоря более подробно, модифицированный спуск $\nu\downarrow$ есть отображение с областью определения $\operatorname{dom}(\nu\downarrow) = F \cup P$. Для каждого $p \in P$ имеем $[\![\mathfrak{a}(p)^\wedge = \mathfrak{a}^\wedge(p^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$, $[\![\nu\downarrow(p) = \nu(p^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$, следовательно,

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \nu\downarrow(p) : A^{\mathfrak{a}(f)^\wedge} \to \{0,1\}^B.$$

Теперь ясно, что $(\nu\downarrow(p))\downarrow\colon (A\downarrow)^{\mathfrak{a}(f)} \to C := \{0,1\}^B\downarrow$ и можно положить $\mu(p) := \chi^{-1} \circ (\nu\downarrow(p))\downarrow$.

Пусть символ $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ обозначает фиксированную формулу сигнатуры $\sigma$ с $n$ свободными переменными. Выпишем формулу $\Phi(x_0, \dots, x_{n-1}, \mathfrak{A})$ языка теории множеств, выражающую тот факт, что $\mathfrak{A} \models \varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$. Напомним, что соотношение $\mathfrak{A} \models \varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ определяет $n$-местный предикат в $A$, или, что то же самое, отображение из $A^n$ в $\{0,1\}$. В силу принципа максимума и принципа переноса существует единственный элемент $|\varphi|^{\mathfrak{A}} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![|\varphi|^{\mathfrak{A}} : A^{n^\wedge} \to \{0,1\}^B]\!] = \mathbb{1},$$
$$[\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a\uparrow) = 1]\!] = [\![\Phi(a(0), \dots, a(n-1), \mathfrak{A})]\!] = \mathbb{1}$$

для каждого $a : n \to A\downarrow$. В дальнейшем вместо $|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a\uparrow)$ будем писать $|\varphi|^{\mathfrak{A}}\ (a_0, \dots, a_{n-1})$, где $a_l := a(l)$. Итак, соотношение

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \text{«}\varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \text{ истинна в модели } \mathfrak{A}\text{»}$$

равносильно следующему: $[\![\Phi(a_0, \dots, a_{n-1}, \mathfrak{A})]\!] = \mathbb{1}$.

**4.2.4. *Теорема.*** *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда $\mathfrak{A}\downarrow$ — расширенная алгебраическая $B$-система сигнатуры $\sigma$. При этом для любой формулы $\varphi$ сигнатуры $\sigma$ выполняется*

$$\chi \circ |\varphi|^{\mathfrak{A}\downarrow} = |\varphi|^{\mathfrak{A}}\downarrow .$$

$\lhd$ Нам уже известно, что $A\downarrow$ — расширенное $B$-множество. Далее, модифицированный спуск $\nu'$ элемента $\nu \in \mathbb{V}^{(B)}$ есть отображение, причем $\operatorname{dom}(\nu') = F \cup P$ (см. 3.5.5 (3)). Кроме того,

$$[\![\nu'(f) : A^{\mathfrak{a}(f)^\wedge} \to A]\!] = \mathbb{1} \quad (f \in F),$$
$$[\![\nu'(p) : A^{\mathfrak{a}(p)^\wedge} \to \{0,1\}]\!] = \mathbb{1} \quad (p \in P).$$

Отсюда с учетом 3.2.6 (10) и 3.2.12 выводим, что $\nu'(f)\downarrow$ и $\nu'(p)\downarrow$ являются нерастягивающими отображениями из $(A\downarrow)^{\mathfrak{a}(f)}$ в $A\downarrow$ и из $(A\downarrow)^{\mathfrak{a}(p)}$ в $C := \{0,1\}^B\downarrow$ соответственно. Значит, $(A\downarrow, \mu)$ — расширенная алгебраическая $B$-система.

Пусть теперь $\varphi$ — формула сигнатуры $\sigma$ и покажем, что

$$[\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}\,(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = |\varphi|^{\mathfrak{A}\downarrow}(a_0,\dots,a_{n-1})$$

для любых $a_0,\dots,a_{n-1} \in A\downarrow$.

Тогда в силу 3.2.12 и определения $\chi$ из 4.2.2 имеют место равенства

$$|\varphi|^{\mathfrak{A}\downarrow}(a_0,\dots,a_{n-1}) = [\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}\!\downarrow(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = \\ = \chi^{-1}(|\varphi|^{\mathfrak{A}}\!\downarrow(a_0,\dots,a_{n-1})),$$

откуда вытекает требуемое соотношение.

Будем действовать индукцией по длине формулы $\varphi$. Пусть сначала $\varphi$ — атомная формула. Если $q \in P$ и $\mathfrak{a}(q) = 0$, то $[\![\nu(q^\wedge) = 0 \vee \nu(q^\wedge) = 1]\!] = \mathbb{1}$, так что $\nu'(q) \in C$ и $\mu(q) = \chi^{-1}(\nu'(q)) \in B$. По 4.2.2 $\mu(q) = [\![\chi \circ \mu(q) = 1]\!] = [\![1 = \nu(q^\wedge)]\!]$. Далее, рассмотрим термы $t_0,\dots,t_{m-1}$ сигнатуры $\sigma$, принимающие значения $b_0,\dots,b_{m-1}$ при значениях $a_0,\dots,a_{n-1}$ переменных $x_0,\dots,x_{n-1}$. Пусть $p \in P$ и $\mathfrak{a}(p) = m$. Если $\varphi(x_0,\dots,x_{n-1}) := p(t_0,\dots,t_{m-1})$, то

$$[\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}\,(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = [\![\nu\!\downarrow\!(p)(b_0,\dots,b_{m-1}) = 1]\!] = \\ = [\![\chi \circ p^{\mu}(b_0,\dots,b_{m-1}) = 1]\!] = p^{\mu}(b_0,\dots,b_{m-1}).$$

Если же $\varphi(x_0,\dots,x_{n-1}) := (t_0(x_0,\dots,x_{n-1}) = t_1(x_0,\dots,x_{n-1}))$, то

$$[\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = [\![b_0 = b_1]\!] = d(b_0,b_1)^*.$$

Предположим теперь, что $\varphi_1$ и $\varphi_2$ имеют вид $\varphi \wedge \psi$ и $(\forall\, x_0)\varphi$ соответственно, причем для $\varphi$ и $\psi$ требуемое утверждение уже доказано. Тогда

$$[\![|\varphi_1|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = [\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1\,\wedge \\ \wedge\,|\psi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = [\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!]\,\wedge \\ \wedge\,[\![|\psi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = |\varphi_1|^{\mathfrak{A}\downarrow}(a_0,\dots,a_{n-1});$$

$$[\![|\varphi_2|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = [\![(\forall\, x_0 \in A)|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = \\ = \bigwedge_{a_0 \in A\downarrow} [\![|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}) = 1]\!] = |\varphi_2|^{\mathfrak{A}\downarrow}(a_0,\dots,a_{n-1}).$$

Аналогично разбираются случаи квантора общности и остальных пропозициональных связок. $\triangleright$

**4.2.5. *Теорема.*** *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебраические системы одной и той же сигнатуры $\sigma^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Положим $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}{\downarrow}$ и $\mathfrak{B}' := \mathfrak{B}{\downarrow}$. Тогда если $h$ — гомоморфизм (сильный гомоморфизм) внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ системы $\mathfrak{A}$ в систему $\mathfrak{B}$, то $h' := h{\downarrow}$ — гомоморфизм (сильный гомоморфизм) $B$-систем $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$. Наоборот, если $h' : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{B}'$ — гомоморфизм (сильный гомоморфизм) алгебраических $B$-систем, то $h := h'{\uparrow}$ — гомоморфизм (сильный гомоморфизм) внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ из системы $\mathfrak{A}$ в систему $\mathfrak{B}$.*

$\triangleleft$ Ограничимся обоснованием п. 4.1.10 (3) из определения гомоморфизма, т. е. рассмотрим лишь случай ненульместного функционального символа. Для других символов сигнатуры $\sigma$ рассуждения аналогичны. Пусть $\mathfrak{A} := (A, \nu)^B$ для некоторых $A,\ \nu \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathfrak{A}' = (A', \nu')$. Предположим, что $\mu \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $\mu' \in \mathbb{V}$ — интерпретирующие отображения систем $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ соответственно. Рассмотрим функциональный символ $f$ арности $n = \mathfrak{a}(f)$ и элементы $a_0, \dots, a_{n-1} \in A'$. Как и раньше, запись $t = g(a_0, \dots, a_{n-1})$ для $g \in \mathbb{V}^{(B)}$ будет служить обозначением для формулы $t = g(a)$, где $a \in \mathbb{V}^{(B)}$ — такой элемент из $\mathbb{V}^{(B)}$, что $[\![a : n^\wedge \to A]\!] = \mathbb{1}$ и $a{\downarrow}(l) = a_l$ $(l < n)$. Если $h \in \mathbb{V}^{(B)}$ — гомоморфизм внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, то

$$[\![h(\nu(f^\wedge)(a_0, \dots, a_{n-1})) = \mu(f^\wedge)(h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))]\!] = \mathbb{1}.$$

Кроме того, по определению спусков (см. 3.5.5 (3))

$$\begin{gathered}
[\![\nu(f^\wedge) = \nu{\downarrow}(f)]\!] = [\![\mu(f^\wedge) = \mu{\downarrow}(f)]\!] = \mathbb{1};\\
[\![\nu{\downarrow}(f)(a_0, \dots, a_{n-1}) = \nu'(f)(a_0, \dots, a_{n-1})]\!] = \mathbb{1};\\
[\![\mu{\downarrow}(f)(b_0, \dots, b_{n-1}) = \mu'(f)(b_0, \dots, b_{n-1})]\!] = \mathbb{1};\\
[\![h(t) = h'(t)]\!] = \mathbb{1} \quad (t \in A').
\end{gathered}$$

Суммируя все эти соотношения, ввиду отделимости $\mathbb{V}^{(B)}$ получим

$$h'(\nu'(f)(a_0, \dots, a_{n-1})) = \mu'(f)(h(a_0), \dots, h(a_{n-1})).$$

Наоборот, предположим, что выполнено последнее равенство. Заменив в этом равенстве $h'$ на $h := h'{\uparrow}$, получим формулу, истинную внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Последовательно заменяя в ней $\nu'(f)$ на $\nu{\downarrow}(f)$ и $\nu{\downarrow}(f)$ на $\nu(f^\wedge)$, а затем $\mu'(f)$ на $\mu{\downarrow}(f)$ и $\mu{\downarrow}(f)$ на $\mu(f^\wedge)$, приходим к новой формуле, истинной внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Эта новая формула и есть требуемое свойство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. $\triangleright$

***Следствие.*** *В обозначениях теоремы 4.2.5* $[\![h$ *— изоморфизм алгебраических систем* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}]\!] = \mathbb{1}$ *в том и только в том случае, если* $h'$ *— изоморфизм алгебраических* $B$*-систем* $\mathfrak{A}'$ *и* $\mathfrak{B}'$.

**4.2.6.** Как уже отмечалось в 4.1.3, расширенную алгебраическую $B$-систему $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ можно рассматривать как обычную (т. е. $\{0, 1\}$-значную) алгебраическую систему $\mathfrak{A}' := (A, \nu')$ той же сигнатуры, если заменить $B$-значные предикаты $p^\nu$ множествами $\nu'(p) := \{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in A^n : p^\nu(x) = \mathbb{1}\}$. Это отнюдь не означает, что если $\mathfrak{A}$ является $B$-моделью формулы $\varphi$ сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{A}'$ будет $\{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$-значной моделью, т. е. моделью в обычном смысле для той же формулы $\varphi$. Вместе с тем для некоторых формул дело обстоит именно так. Этот вопрос будет рассмотрен подробнее в следующем параграфе.

Здесь же ограничимся несколькими конкретными примерами алгебраических $B$-систем, получаемых с помощью спуска. Если формула $\varphi$ представляет собой аксиомы группы кольца, модуля и т. п. и алгебраическая система $\mathfrak{A}$ является двузначной моделью для $\varphi$, то говорим, как обычно, что $\mathfrak{A}$ — группа, кольцо, модуль и т. п. Если же $\mathfrak{A}$ есть $B$-модуль для $\varphi$, то говорим, что $\mathfrak{A}$ — это $B$-группа, $B$-кольцо, $B$-модуль и т. д.

Рассмотрим произвольную группу $G$. Эндоморфизм $\pi : G \to G$ назовем *проектором*, если $\pi \circ \pi = \pi$. Будем говорить, что $\mathscr{B}$ — булева алгебра проекторов в группе $G$, если $\mathscr{B}$ состоит из попарно коммутирующих проекторов в $G$ и образует булеву алгебру с нулем $\mathbb{0}_{\mathscr{B}} := 0$ и единицей $\mathbb{1}_{\mathscr{B}} := I_G$ относительно операций:

$$\pi_1 \vee \pi_2 := \pi_1 + \pi_2 - \pi_1 \circ \pi_2, \pi_1 \wedge \pi_2 := \pi_1 \circ \pi_2, \pi^* := 1 - \pi$$
$$(\pi_1, \pi_2, \pi \in \mathscr{B}).$$

Порядок в $\mathscr{B}$ таков, что $\pi_1 \le \pi_2$ в том и только в том случае, если $\pi_1(G) \subset \pi_2(G)$.

Алгебраическую систему $(G, \mathscr{B})$ и самое группу $G$ мы называем BAP-*группой* или *группой с выделенными проекциями* или, короче, *группой с проекциями*. При этом мы говорим, что $\mathscr{B}$ — *выделенная булева алгебра* проекций BAP-группы $(G, \mathscr{B})$. Назовем BAP-группу $(G, \mathscr{B})$ *расширенной*, если $\mathscr{B}$ порядково полная булева алгебра и для любого семейства $(x_\xi) \subset G$ и любого разбиения единицы $(\pi_\xi) \subset \mathscr{B}$ существует единственный элемент $x \in G$ такой, что $\pi_\xi x_\xi = \pi_\xi x$ для

всех $\xi$. Пусть $(G, \mathscr{B})$ и $(G', \mathscr{B}')$ — две BAP-группы. Групповой гомоморфизм $h : G \to G'$ называется BAP-*гомоморфизмом*, если существует булев изоморфизм $\jmath : \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$, такой, что $h \circ \pi = \jmath(\pi) \circ h$ для всех $\pi \in \mathscr{B}$.

Пусть теперь $R$ — кольцо и аддитивная группа этого кольца имеет булеву алгебру проекторов $\mathscr{B}$. Если, сверх того, каждый проектор $\pi \in \mathscr{B}$ является кольцевым гомоморфизмом, то говорят, что $(R, \mathscr{B})$ — это BAP-*кольцо* или *кольцо с проекциями*.

*Носителем элемента* $x \in R$ назовем проектор $[x] := \bigwedge\{\pi \in \mathscr{B} : \pi x = x\}$. Ясно, что если носители $[x]$ и $[y]$ дизъюнктны (как элементы булевой алгебры $\mathscr{B}$), то $x \cdot y = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно. Если $x \cdot y = 0$, то говорят, что $x$ и $y$ *ортогональны*. Элемент называется *регулярным*, если он ортогонален только к нулевому элементу. *Делителем нуля* именуют всякий элемент, ортогональный к какому-нибудь ненулевому элементу.

Кольцо называют *полупервичным*, если оно не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. *Нильпотентность идеала* $J \subset K$ означает, что $J^n := \underbrace{J \cdot \ldots \cdot J}_{n \text{ раз}} = \{0\}$ для некоторого натурального $n$.

Пусть $S$ — *мультипликативное подмножество* кольца с единицей $K$, т. е. $1 \in S$ и $xy \in S$ для любых $x$ и $y \in S$. В множестве $K \times S$ введем отношение эквивалентности, полагая

$$(x, s) \sim (x', s') \leftrightarrow (\exists\, t \in S)(t(sx' - s'x) = 0).$$

Пусть $S^{-1}K := K \times S/\sim$, а $(x, s) \mapsto x/s$ — каноническое фактор-отображение. Множество $S^{-1}K$ можно снабдить структурой кольца с помощью равенств

$$(x/s) + (y/t) := (tx + sy)/st, \quad (x/s)(y/t) := (xy)/(st).$$

Отображение $x \mapsto x/1\,(x \in K)$ есть гомоморфизм из $K$ в $S^{-1}K$, называемый *каноническим*. Кольцо $S^{-1}K$ называется *кольцом частных кольца $K$ по подмножеству $S$*.

**4.2.7. *Теорема.*** *Пусть $\mathscr{G}$ — группа внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $G := \mathscr{G}\!\downarrow$. Тогда $G$ — группа, причем в ней выделены полная булева алгебра проекторов $\mathscr{B}$ и изоморфизм $\jmath : B \xrightarrow{\text{на}} \mathscr{B}$ такие, что*

$$b \leq [\![x = 0]\!] \leftrightarrow \jmath(b)x = 0 \quad (x \in G,\ b \in B).$$

*Более того,* $(G,\mathscr{B})$ *— расширенная* BAP*-группа и имеют место эквивалентности:*

**(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$\mathscr{G}$ коммутативна» $\leftrightarrow$ «$G$ коммутативна»;*

**(2)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$\mathscr{G}$ — группа без кручения» $\leftrightarrow$ «$G$ — группа без кручения».*

$\lhd$ По теореме 4.2.4 $\mathscr{G}{\downarrow}$ — расширенная алгебраическая $B$-система и притом $B$-группа.

Спуск операции суммы $+$ обозначим тем же символом. Покажем, что $G$ — группа. Ограничимся существованием обратных элементов.

Пусть $\varphi := (\forall\, x)(\exists!\, y)(x + y = 0)$. Тогда по 4.1.8

$$|\varphi|^G := \bigwedge_{x\in G}\ \bigvee_{y\in G} |x + y = 0|^G = \mathbb{1}.$$

В силу расширенности $B$-множества $G$ для каждого $x \in G$ существует $y \in G$ такой, что

$$\mathbb{1} = |x + y = 0|^G = d(x + y, 0)^* = [\![x + y = 0]\!],$$

следовательно, $x + y = 0$. Если $x + z = 0$ для некоторого $z \in G$, то $|x + z = 0|^G = \mathbb{1}$. Поскольку $G$ есть $B$-группа, то

$$\mathbb{1} = |x + y = 0 \wedge x + z = 0|^G \Rightarrow |y = z|^G,$$

значит, $|y = z|^G = [\![z = y]\!] = \mathbb{1}$ и $z = y$.

Конгруэнциями группы $G$ являются в точности эквивалентности, определяемые различными ее нормальными подгруппами. Поэтому в силу теоремы 4.1.6 существует изоморфизм $\jmath$ из $B$ на некоторую полную булеву алгебру $\mathscr{B}'$ нормальных подгрупп группы $G$ такой, что

$$b \le [\![x = 0]\!] \leftrightarrow x \in \jmath(b^*) \quad (b \in B,\ x \in G).$$

Если $b \in B$, то $f(b) \cap f(b^*) = 0$. С другой стороны, для каждого $x \in G$ существуют $x_1 := \operatorname{mix}\{bx, b^*0\}$, $x_2 := \operatorname{mix}\{b^*x, b0\}$ и поскольку $b^* \le [\![x_1 = 0]\!]$, $b \le [\![x_2 = 0]\!]$, то $x_1 \in \jmath(b)$, $x_2 \in \jmath(b^*)$. Кроме того, $[\![x = x_1 + x_2]\!] \ge [\![x_1 = x]\!] \wedge [\![x_2 = 0]\!] \ge b$ и $[\![x = x_1 + x_2]\!] \ge [\![x_1 = 0]\!] \wedge$

$[\![x_2 = x]\!] \geq b^*$, значит, $x = x_1 + x_2$. Итак, всякая подгруппа вида $\jmath(b)$ выделяется прямым слагаемым и ей соответствует оператор проектирования $\pi_b$ на $\jmath(b)$ параллельно дополнительной подгруппе $\jmath(b^*)$. Точнее, $\pi_b$ определяется условиями: $\pi_b x = x$ для всех $x \in \jmath(b)$ и $\pi_b x = 0$ при $x \in \jmath(b^*)$. Обозначим той же буквой $\jmath$ изоморфизм $b \mapsto \pi_b$, $b \in B$, и положим $\mathscr{B} := \jmath(B)$. Ясно, что $\mathscr{B}$ и $\jmath$ удовлетворяют требуемым условиям. Расширенность группы $G$ равносильна расширенности соответствующего $B$-множества, ибо $x = \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$ в том и только в том случае, если $\jmath(b_\xi)x = \jmath(b_\xi)x_\xi$ при всех $\xi$.

Допустим, что $\mathscr{G}$ — группа с кручением. Тогда

$$[\![(\exists\, x \in \mathscr{G})(\exists\, n \in \omega^\wedge)(nx = 0) \wedge (0 \neq x) \wedge (0 < n)]\!] = \mathbb{1},$$

значит, существуют элемент $0 \neq x \in G$ и разбиение единицы $(b_n)_{n\in\omega}$ в $B$ такие, что $b_n \leq [\![n^\wedge x = 0]\!]$ для всех $n \in \omega$. Заметим, что $[\![n^\wedge x = nx]\!] = \mathbb{1}$. Стало быть, $b_n \leq [\![x \neq 0]\!]$, $b_n \leq [\![nx = 0]\!]$ и $\jmath(b_n)(nx) = n\jmath(b_n)x = 0$. Хотя бы для одного $0 \neq n \in \omega$ проектор $\jmath(b_n)$ ненулевой, но это означает, что $G$ — группа с кручением. Наоборот, если $nx = 0$ для некоторых $0 \neq x \in G$ и $n \in \omega$, то $[\![n^\wedge x = 0]\!] = [\![nx = 0]\!] = \mathbb{1}$, поэтому $[\![(\exists\, n \in \omega^\wedge)(nx = 0) \wedge (n > 0)]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $[\![\mathscr{G}$ — группа с кручением$]\!] = \mathbb{1}$. Утверждение, касающееся коммутативности, очевидно. $\triangleright$

**4.2.8.** ***Теорема.*** *Пусть $\mathscr{K}$ — кольцо внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $K := \mathscr{K}{\downarrow}$. Тогда $K$ — расширенное* BAP*-кольцо с выделенной булевой алгеброй проекторов $\mathscr{B}$ и существует изоморфизм $\jmath : B \xrightarrow{\text{на}} \mathscr{B}$ такой, что*

$$b \leq [\![x = 0]\!] \leftrightarrow \jmath(b)x = 0 \quad (x \in K,\ b \in B).$$

*При этом справедливы следующие эквивалентности:*

**(1)** *$\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{K}$ коммутативно (полупервично)» $\leftrightarrow$ «$K$ коммутативно (полупервично)»;*

**(2)** *$\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{K}$ не имеет делителей нуля» $\leftrightarrow$ «любые два элемента из $K$ ортогональны лишь в том случае, когда дизъюнктны их носители»;*

**(3)** *$\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{S}$ служит мультипликативным подмножеством кольца $\mathscr{K}$» $\leftrightarrow$ «$S := \mathscr{S}{\downarrow}$ — мультипликативное подмножество в $K$», при этом $(\mathscr{S}^{-1}\mathscr{K}){\downarrow} \simeq S^{-1}K$ (здесь $\simeq$ означает кольцевой изоморфизм);*

**(4)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$\mathscr{K}$ — поле» $\leftrightarrow$ «$K$ полупервично, ортогональность элементов $K$ равносильна дизъюнктности их носителей и всякий регулярный элемент в нем обратим»;*

**(5)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$\mathfrak{R}$ — радикал кольца с единицей $\mathscr{K}$» $\leftrightarrow$ «$\mathfrak{R}{\downarrow}$ — радикал кольца с единицей $K$»; иными словами, если $\mathscr{K}$ имеет единицу, то $\mathfrak{R}(\mathscr{K}){\downarrow} = \mathfrak{R}(K)$;*

**(6)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$(\mathscr{K}, \mathscr{D})$ — это* BAP-*кольцо» $\leftrightarrow$ «отображение $\pi \mapsto \pi{\downarrow}$ $(\pi \in \mathscr{D}{\downarrow})$ есть изоморфизм $\mathscr{D}{\downarrow}$ на некоторую булеву алгебру проекторов $D$ в $K$, причем $\mathscr{B}$ есть правильная подалгебра в $D$ и $(K, D)$ — это* BAP-*кольцо».*

$\lhd$ По теореме 4.2.7 $K$ — расширенная BAP-группа и существует изоморфизм $\jmath$ из $B$ на полную булеву алгебру $\mathscr{B}$ аддитивных проекторов, удовлетворяющий нужному условию. Снабдим $K$ операцией умножения в соответствии с общим определением 4.2.3. Более подробно для элементов $x$, $y \in K$ имеем $[\![x, y \in \mathscr{K}]\!] = \mathbb{1}$, поэтому в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует произведение $z$ этих элементов: $[\![z \in \mathscr{K}]\!] = [\![z = x \cdot y]\!] = \mathbb{1}$. Примем $z$ за произведение $x$ и $y$ в $K$. Итак,

$$z = x \cdot y \leftrightarrow [\![z = x \cdot y]\!] = \mathbb{1} \quad (x, y, z \in K).$$

То, что при этом получается кольцо, без труда выводится с использованием теоремы 4.2.4. Возьмем произвольный элемент $b \in B$ и покажем, что проектор $\jmath(b)$ есть кольцевой гомоморфизм. Действительно, операция умножения в $K$ является спуском соответствующей операции в $\mathscr{K}$, поэтому она экстенсиональна и, значит, сохраняет перемешивание. Следовательно, учитывая определение проектора $\jmath(b)$ (см. 4.2.7), для любых $x$, $y \in K$ получим

$$\begin{gathered} \jmath(b)xy = \operatorname{mix}\{bxy, b^*0\} = \\ = \operatorname{mix}\{bx, b^*0\} \cdot \operatorname{mix}\{by, b^*0\} = \jmath(b)x \cdot \jmath(b)y. \end{gathered}$$

Обратимся теперь к обоснованию утверждений (1)–(6).

(1) Устанавливается по аналогии с 4.2.7 (1).

(2) Утверждение $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{K}$ не имеет делителей нуля» равносильно тому, что для любых $x$ и $y \in \mathscr{K}{\downarrow}$ верно $b := [\![xy = 0]\!] = [\![x = 0]\!] \vee [\![y = 0]\!]$. Если выполняется последнее соотношение и

$xy = 0$, то $b = \mathbb{1}$, стало быть, для $e := [\![x = 0]\!]$ и $c := [\![y = 0]\!]$ имеем $e^* \wedge c^* = 0$. Кроме того, $\jmath(e^*)x = x$ и $\jmath(c^*)y = y$, поэтому $[x] \le \jmath(e^*)$ и $[y] \le \jmath(c^*)$. Отсюда видно, что носители $[x]$ и $[y]$ дизъюнктны. Если же $[x] \circ [y] = 0$, то, как отмечалось в 4.2.6, $x \cdot y = 0$.

Наоборот, допустим, что равенство $xy = 0$ равносильно дизъюнктности носителей $[x]$ и $[y]$. Тогда для $b := [\![xy = 0]\!]$ из равенств $0 = \jmath(b)xy = (\jmath(b)x) \cdot (\jmath(b)y)$ вытекает, что проекторы $\pi := [\jmath(b)x]$ и $\rho := [f(b)y]$ дизъюнктны. Заметим, что $\jmath(b) \circ \pi^* x = 0$ и $\jmath(b) \circ \rho^* y = 0$, а потому

$$[\![x = 0]\!] \vee [\![y = 0]\!] \ge (b \wedge f^{-1}(\pi^*)) \vee (b \wedge \jmath^{-1}(\rho^*)) = b.$$

(3) Утверждение о мультипликативности ясно. Докажем, что спуск кольца частных есть кольцо частных. Заметим сначала, что $(\mathscr{S} \times \mathscr{K}){\downarrow} = S \times K$. Рассмотрим отношение эквивалентности $\mathscr{P} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такое, что для $x,\ x' \in K$ и $s,\ s' \in S$

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (x, s)\mathscr{P}(x', s') \leftrightarrow (\exists\, t \in \mathscr{S})(t(sx' - s'x) = 0).$$

Если $P := \mathscr{P}{\downarrow}$, то $P$ — отношение эквивалентности в $K \times S$, причем

$$(x, s)P(x', s') \leftrightarrow (\exists\, t \in S)\, (t(sx' - s'x) = 0).$$

Далее, спуск фактор-множества $\mathscr{S} \times \mathscr{K} / \mathscr{P}$ биективен с множеством $KS \times K/P$. Наконец, для $x, y \in K$ и $s, t \in S$ равенства

$$(x/s) + (y/t) = (tx + sy)/st, \quad (x/s)(y/t) = (xy/st)$$

верны в том и только в том случае, если они истинны внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Осталось сопоставить сказанное с определением кольца частных.

(4) Допустим, что $[\![\mathscr{K}$ — поле$]\!] = \mathbb{1}$. Тогда $K$ полупервично и из $xy = 0$ вытекает $[x] \circ [y] = 0$ для всех $x$ и $y \in K$ согласно (1) и (2). Для всякого регулярного элемента $x \in K$ будет $\jmath(b)xy = 0 \to \jmath(b)y = 0$, каковы бы ни были $b \in B$ и $y \in K$. Но тогда $[\![xy = 0]\!] \le [\![y = 0]\!]$, т. е. $[\![x \ne 0]\!] = \mathbb{1}$. Таким образом, существует элемент $u \in K$ такой, что $[\![xu = ux = 1]\!] = \mathbb{1}$, поэтому $xu = ux = \mathbb{1}$, т. е. $x$ обратим в кольце $K$. Наоборот, пусть $K$ полупервично, всякий регулярный элемент в нем обратим и ортогональность элементов $K$ равносильна дизъюнктности их носителей. Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{K}$ — коммутативное

кольцо», следовательно, $[\![\mathscr{K}$ — поле$]\!] = [\![(\forall\, x)(x \in \mathscr{K} \wedge x \neq 0 \to$ «$x$ обратим»$)]\!] = \bigwedge\{[\![(\exists\, z)(z = x^{-1})]\!] : x \in K \wedge [\![x \neq 0]\!] = \mathbb{1}\}$. Значит, достаточно показать, что если $[\![x \neq 0]\!] = \mathbb{1}$, то $[\![x$ обратим$]\!] = \mathbb{1}$, каков бы ни был $x \in K$. Допустим, что $[\![x \neq 0]\!] = \mathbb{1}$ и $xy = 0$ для некоторого $y \in K$. Тогда для $\pi := [x]$ и $\rho := [y]$ имеем $\pi \circ \rho = 0$. С другой стороны, $\jmath(b)x = 0$ влечет $b \leq [\![x = 0]\!] = [\![x \neq 0]\!]^* = \mathbb{1}^* = \mathbb{0}$, стало быть, $\rho := \jmath(1) = I_K$. Отсюда получаем $\pi \leq \rho^* = 0$ или $y = 0$. Следовательно, элемент $x$ обратим в кольце $K$. Это немедленно приводит к соотношению $[\![x$ обратим в $\mathscr{K}]\!] = \mathbb{1}$.

(5) Элемент $x$ входит в радикал кольца в том и только в том случае, если для любого $y$ элемент $1 - yx$ обратим слева. Остается заметить, что $1 - yx$ обратим слева в $K$ тогда и только тогда, когда $[\![1 - yx$ обратим слева в $\mathscr{K}]\!] = \mathbb{1}$.

(6) Если $[\![(\mathscr{K}, \mathscr{D})$ — это BAP-кольцо$]\!] = \mathbb{1}$ и $\pi \in \mathscr{D}{\downarrow}$, то по 4.2.7 $\pi{\downarrow}\colon K \to K$ — гомоморфизм. С другой стороны, $[\![\pi \circ \pi = \pi]\!] = \mathbb{1}$, поэтому $(\pi{\downarrow}) \circ (\pi{\downarrow}) = (\pi \circ \pi){\downarrow} = \pi{\downarrow}$, т. е. $\pi{\downarrow}$ — проектор. То, что $D$ — булева алгебра, будет установлено в 4.2.9. Тем самым $(K, D)$ — это BAP-кольцо. По определению $\mathscr{B} = \{\pi{\downarrow}\colon \pi \in \{\mathbb{0}_{\mathscr{D}}, \mathbb{1}_{\mathscr{D}}\}^B{\downarrow}\}$ (см. 4.2.7), поэтому $\mathscr{B} \subset D$. Аналогично устанавливается противоположная импликация. $\rhd$

**4.2.9. *Теорема.*** *Пусть $\mathscr{D}$ — полная булева алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $D := \mathscr{D}{\downarrow}$. Тогда $D$ — полная булева алгебра и существует полный мономорфизм $\imath : B \to D$ такой, что*

$$b \leq [\![x \leq y]\!] \leftrightarrow \imath(b)x \leq \imath(b)y$$

*для всех $x, y \in D$ и $b \in B$.*

$\lhd$ В силу 4.2.4 $D$ — расширенная алгебраическая $B$-система сигнатуры $(\vee, \wedge, *, 0, 1)$. То, что $D$ — булева алгебра, также следует из 4.2.4. Временно обозначив булевы операции в $D$ через $\widetilde{\vee}$, $\widetilde{\wedge}$, проверим, например, дистрибутивность.

Рассмотрим термы $t_1(x, y, z) := (x \wedge y) \vee z$, $t_2(x, y, z) := (x \vee z) \wedge (x \vee y)$ и формулу $\psi := (\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)\varphi(x, y, z)$, где $\varphi(x, y, z) := (t_1(x, y, z) = t_2(x, y, z))$. Тогда согласно 4.2.4 будет

$$\mathbb{1} = [\![|\psi|^{\mathscr{D}} = 1]\!] = |\psi|^D = \bigwedge_{a,b,c \in D} |\varphi|^D(a, b, c),$$

значит, $|\varphi|^D(a,b,c) = \mathbb{1}$ для всех $a,b,c \in D$. Далее,

$$\begin{aligned} \mathbb{1} = |\varphi|^D(a,b,c) = d(t_1(a,b,c), t_2(a,b,c))^* = \\ = [\![t_1(a,b,c) = t_2(a,b,c)]\!] = [\![(a\widetilde{\wedge}b)\widetilde{\vee}c = (a\widetilde{\vee}c)\widetilde{\wedge}(b\widetilde{\vee}c)]\!]. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду отделимости $\mathbb{V}^{(B)}$ получаем $(a\widetilde{\wedge}b)\widetilde{\vee}c = (a\widetilde{\vee}c)\widetilde{\wedge}(b\widetilde{\vee}c)$. Точно так же проверяется справедливость остальных аксиом булевой алгебры. Итак, $D$ — булева алгебра.

Полнота $D$ не есть свойство первого порядка, поэтому она не выводима по указанной схеме. Пусть $\leq \in \mathbb{V}^{(B)}$ — обычное отношение порядка в $\mathscr{D}$, т. е.

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x \in \mathscr{D})(\forall\, y \in \mathscr{D})(x \leq y \leftrightarrow x \wedge y = x).$$

Положим $\widetilde{\leq} := (\leq)\!\downarrow$. Тогда для $x, y \in D$ выполняется $x\widetilde{\leq}y$ в том и только в том случае, если $x\widetilde{\wedge}y = x$. Рассмотрим соответствие $\Phi := (\widetilde{\leq}, D, D)$. Ясно, что $\Phi$ вполне нерастягивающее. Далее, если $A \subset D$, то $\pi_\Phi(A)$ $(\pi_\Phi^{-1}(A))$ — множество всех верхних (соответственно нижних) границ множества $A$ (относительно порядка $\widetilde{\leq}$). Таким образом,

$$\sup(A) = \pi_\Phi(A) \cap \pi_\Phi^{-1}(\pi_\Phi(A)),$$

если $\sup(A)$ существует. Если $\Psi := (\leq, \mathscr{D}, \mathscr{D})^B$, то $\Psi$ — соответствие внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $\Phi = \Psi\!\downarrow$. В силу полноты $\mathscr{D}$ существует такой элемент $a \in D$, что $[\![a = \sup(A)]\!] = \mathbb{1}$ или $[\![\pi_\Psi(A) \cap \pi_\Psi^{-1}(\pi_\Psi(A)) = a]\!] = \mathbb{1}$. Привлекая правило спуска поляр (см. 3.2.13 (2)), выполним простые вычисления:

$$\begin{aligned} a = (\pi_\Psi^{-1}(\pi_\Psi(A\!\uparrow)) \cap \pi_\Psi(A\!\uparrow))\!\downarrow = \\ = \pi_\Psi^{-1}(\pi_\Psi(A\!\uparrow\downarrow)) \cap \pi_\Phi(A\!\uparrow\downarrow) = \sup(\mathrm{mix}(A)) = \sup(A). \end{aligned}$$

Следовательно, $a = \sup(A)$ и полнота $D$ обоснована. Пусть $\lambda \in \mathbb{V}^{(B)}$ — тождественное вложение алгебры $\{\mathbb{0}_\mathscr{D}, \mathbb{1}_\mathscr{D}\}^B$ в $\mathscr{D}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Положим $\imath_1 = \lambda\!\downarrow$ и $\imath := \imath_1 \circ \imath_2$, где $\imath_2$ — изоморфизм $B$ на $\{\mathbb{0}_\mathscr{D}, \mathbb{1}_\mathscr{D}\}^B\!\downarrow$. Тогда $\imath$ — мономорфизм. Полнота мономорфизма $\imath$ следует из того, что для $A \subset B$ верно $\imath(\pi_{\Phi'}(A)) \subset \pi_\Phi(\imath(A))$, где $\Phi' := \imath^{-1} \circ \Phi \circ \imath$.

Далее, ввиду очевидного соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, x, y \in \mathscr{D})(\forall\, c \in \{\mathbb{0}_\mathscr{D}, \mathbb{1}_\mathscr{D}\})(\lambda(c)x = \\ = \lambda(c)y \leftrightarrow (c = \mathbb{0}_\mathscr{D}) \vee (c = \mathbb{1}_\mathscr{D} \wedge x = y)) \end{aligned}$$

для любых $x, y \in D$ и $b \in B$ будет

$$[\![\imath(b)x = \imath(b)y]\!] = b^* \vee (b \wedge [\![x = y]\!]).$$

Отсюда получаем

$$\imath(b)x = \imath(b)y \leftrightarrow b \leq [\![x = y]\!],$$

следовательно,

$$d(x, y)^* = [\![x = y]\!] = \bigvee \{b \in B : \imath(b)x = \imath(b)y\}.$$

Теперь ясно, что если $\varphi(x, y) := x \leq y$, то

$$|\varphi|^D(x, y) = \bigvee \{b \in B : \imath(b)x \leq \imath(b)y\}, \ [\![|\varphi|^{\mathscr{D}}(x, y) = \mathbb{1}]\!] = [\![x \leq y]\!],$$

откуда и вытекает требуемая эквивалентность. $\triangleright$

Отметим теперь несколько следствий для BAP-колец и булевых алгебр, доказательства которых содержатся по существу в 4.2.5, 4.2.7, 4.2.8, 4.3.2.

Возьмем BAP-кольца $K_1$ и $K_2$ и пусть $\jmath_1$ и $\jmath_2$ — изоморфизмы $B$ на выделенные булевы алгебры проекторов в $K_1$ и $K_2$ соответственно. Гомоморфизм $h : K_1 \to K_2$ назовем *$B$-однородным*, если $h \circ \jmath_1(b) = \jmath_2(b) \circ h$ $(b \in B)$. Будем говорить также, что $K_1$ — *кольцо с выделенной булевой алгеброй проекторов $B$ и $h$ перестановочен с проекторами из $B$*.

**4.2.10. (1) *Теорема.*** *Пусть $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ —это* BAP-*кольца с одной и той же выделенной алгеброй проекторов $\mathscr{D}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Положим $D := \mathscr{D}\!\downarrow$, $K_l := \mathscr{K}_l\!\downarrow$ и $l := 1, 2$. Тогда $K_1$ и $K_2$ — это* BAP-*кольца с выделенной алгеброй проекторов $D$ и если внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ верно, что $h$ — гомоморфизм из кольца $\mathscr{K}_1$ в кольцо $\mathscr{K}_2$, перестановочный с проекторами из $\mathscr{D}$, то $h\!\downarrow$ — гомоморфизм из кольца $K_1$ в кольцо $K_2$, перестановочный с проекторами из $D$. Если $h$ — изоморфизм $\mathscr{K}_1$ на $\mathscr{K}_2$, то $h\!\downarrow$ — изоморфизм $K_1$ на $K_2$.*

**(2) *Теорема.*** *Пусть $\mathscr{D}_1$ и $\mathscr{D}_2$ — полные булевы алгебры внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Положим $D_k := \mathscr{D}_k\!\downarrow$, и пусть $\imath_k : B \to D_k$ — канонический мономорфизм при $k := 1, 2$ (см. 4.2.9). Если $h \in \mathbb{V}^{(B)}$ есть изоморфизм*

*$\mathscr{D}_1$ на $\mathscr{D}_2$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то существует изоморфизм $H$ алгебры $D_1$ на $D_2$, для которого коммутативна диаграмма:*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\imath_1"'] \arrow[dr, "\imath_2"] & \\ D_1 \arrow[rr, "H"'] & & D_2 \end{tikzcd}$$

*Наоборот, если $H : D_1 \to D_2$ — такой изоморфизм булевых алгебр, что указанная диаграмма коммутативна, то алгебры $\mathscr{D}_1$ и $\mathscr{D}_2$ изоморфны внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.*

### 4.3. Погружение алгебраических *B*-систем

В текущем параграфе функтор погружения, изученный в 3.4, распространяется на категории алгебраических $B$-систем.

**4.3.1.** Пусть $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ — алгебраическая $B$-система сигнатуры $\sigma := (F, P, \mathfrak{a})$. Рассмотрим отображение $\nu' : F \cup P \to \mathbb{V}^{(B)}$, действующее по правилу

$$\nu' : s \mapsto \nu(s)^{\sim} := \mathscr{F}^{\sim}(\nu(s)) \quad (s \in F \cup P),$$

где $\mathscr{F}^{\sim}$ — функтор погружения (см. 3.4.12–3.4.16). В соответствии с общим определением погружения соответствий 3.4.13 для каждого $f \in F$, $\mathfrak{a}(f) = n$, отображение $\lambda'(f) : (A^{\sim})^{n^{\wedge}} \to A^{\sim}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ определяется соотношением

$$[\![\nu'(f)(\imath_A(x_0), \dots, \imath_A(x_{n-1})) = \imath_A \circ \nu(f)(x_0, \dots, x_{n-1})]\!] = \mathbb{1},$$

где $\imath_A$ — каноническое вложение $A$ в $A' := A^{\sim}{\downarrow}$ (см. 3.5.4). Аналогично для $p \in P$, $\mathfrak{a}(p) = m$, элемент $\nu'(p) \in \mathbb{V}^{(B)}$ — это такое отображение из $(A^{\sim})^{m^{\wedge}}$ в $\{0,1\}^B \in \mathbb{V}^{(B)}$, что

$$[\![\nu'(p)(\imath_A(x_0), \dots, \imath_A(x_{m-1})) = \imath_B \circ \nu(p)(x_0, \dots, x_{m-1})]\!] = \mathbb{1}.$$

Как видно, модифицированный подъем $\mu := (\nu'){\uparrow}$ отображения $\nu' : F \cup P \to \operatorname{im}(\nu')$ представляет собой интерпретирующее отображение внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Пару $(A^{\sim}, \mu)$ или элемент $(A^{\sim}, \mu)^B \in \mathbb{V}^{(B)}$ называют *булевозначной реализацией алгебраической $B$-системы* $\mathfrak{A}$ и обозначают символом $\mathfrak{A}^{\sim}$.

**4.3.2. Теорема.** *Для любой алгебраической $B$-системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры $\sigma$ ее булевозначная реализация $\mathfrak{A}^{\sim}$ является алгебраической системой сигнатуры $\sigma^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. При этом для всякой формулы $\varphi$ сигнатуры $\sigma$ с $n$ свободными переменными и для произвольных $a_0, \dots, a_{n-1} \in A := |\mathfrak{A}|$ выполняется*

$$|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = [\![ |\varphi|^{\mathfrak{A}^{\sim}}(\imath_A(a_0), \dots, \imath_A(a_{n-1})) = 1 ]\!].$$

$\lhd$ Напомним, что, рассматривая произвольное множество как $B$-множество, мы имеем в виду дискретную $B$-метрику на ней. В силу этого $\sigma^{\sim} = \sigma^{\wedge}$ (см. 3.4.12). Благодаря 3.5.5, выполнено

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \text{«}\mu \text{ — функция и } \operatorname{dom}(\mu) = F^{\wedge} \cup P^{\wedge}\text{»}.$$

По теореме 3.4.14 $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mu(f^{\wedge})$ — отображение из $(A^{\sim})^{\mathfrak{a}(f)^{\wedge}}$ в $A^{\sim}$» при всех $f \in F$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mu(p)$ — отображение из $(A^{\sim})^{\mathfrak{a}(p)^{\wedge}}$ в $\{0,1\}$» для каждого $p \in P$. Отсюда немедленно вытекает, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathfrak{A}^{\sim}$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma^{\wedge}$».

Рассмотрим теперь формулу $\varphi$ сигнатуры $\sigma$. В силу теоремы 3.5.5 (3) для $f \in F$ и $p \in P$ будет

$$\imath_A \circ f^{\nu}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \mu(f^{\wedge}){\downarrow}(\imath_A(a_0), \dots, \imath_A(a_{n-1})) \quad (a_l \in A),$$
$$\imath_B \circ p^{\nu}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \mu(p^{\wedge}){\downarrow}\,(\imath_A(a_0), \dots, \imath_A(a_{n-1})) \quad (a_l \in A).$$

Используя эти равенства, индукцией по длине формулы $\varphi$ выводим

$$|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = |\varphi|^{\mathfrak{A}'}(\imath_A(a_0), \dots, \imath_A(a_{n-1})) \quad (a_0, \dots, a_{n-1} \in A),$$

где $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}^{\sim}{\downarrow}$. Осталось привлечь теорему 4.2.4. $\rhd$

**4.3.3. Теорема.** *Пусть* $\mathfrak{A} := (A, \nu)$ — алгебраическая $B$-система *сигнатуры $\sigma$. Тогда существуют такие $\mathscr{A}$ и $\mu \in \mathbb{V}^{(B)}$,* что выполнены *условия:*

**(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$(\mathscr{A}, \mu)$ — *алгебраическая система сигнатуры $\sigma^{\wedge}$*»;

**(2)** *если $\mathfrak{A}' := (A', \nu')$ — спуск системы $(\mathscr{A}, \mu)$, то $\mathfrak{A}'$ — расширенная алгебраическая $B$-система сигнатуры $\sigma$;*

**(3)** *существует изоморфизм* $\imath$ *из* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{A}'$ *такой, что* $A' = \operatorname{mix}(\imath(A))$;

**(4)** *для любой формулы* $\varphi$ *сигнатуры* $\sigma$ *с* $n$ *свободными переменными выполняется*

$$|\varphi|^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = |\varphi|^{\mathfrak{A}'}(\imath(a_0), \dots, \imath(a_{n-1})) = \\ = \chi^{-1} \circ (|\varphi|^{\mathfrak{A}^\sim}){\downarrow}(\imath(a_0), \dots, \imath(a_{n-1}))$$

*при всех* $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ *и* $\chi$ *из 4.2.2.*

$\lhd$ Положим $\mathscr{A} := A^\sim$, $\imath := \imath_A$, а $\mu$ определим как в 4.3.1. Тогда требуемые утверждения вытекают из 3.5.5 (3), 4.2.4 и 4.3.2. $\rhd$

**4.3.4. *Теорема.*** *Рассмотрим алгебраические* $B$*-системы* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *одной и той же сигнатуры.*

**(1)** *Пусть* $h$ *— нерастягивающее отображение из* $|\mathfrak{A}|$ *в* $|\mathfrak{B}|$. *Тогда* $h$ *является гомоморфизмом (сильным гомоморфизмом, изоморфизмом) в том и только в том случае, если* $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«*$h^\sim$ *— гомоморфизм (сильный гомоморфизм, изоморфизм) из* $\mathfrak{A}^\sim$ *в* $\mathfrak{B}^\sim$*». Гомоморфизм* $h^\sim$ *сюръективен внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *тогда и только тогда, когда* $|\mathfrak{B}| = \operatorname{mix}(h(|\mathfrak{A}|))$.

**(2)** *Пусть* $g \in \mathbb{V}^{(B)}$ *и* $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«*$g : \mathfrak{A}^\sim \to \mathfrak{B}^\sim$ *— гомоморфизм алгебраических* $B$*-систем». Если при этом* $\mathfrak{B}$ *— расширенная алгебраическая* $B$*-система, то существует единственный гомоморфизм* $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *такой, что* $g = h^\sim$.

$\lhd$ (1) Если $h' := h^\sim{\downarrow}$, $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}^\sim{\downarrow}$, $\mathfrak{B}' := \mathfrak{B}^\sim{\downarrow}$, $\imath := \imath_{|\mathfrak{A}|}$ и $\jmath := \imath_{|\mathfrak{B}|}$, то $h' \circ \imath = \jmath \circ h$ (см. 3.5.4 (3)). Покажем, что $h$ — гомоморфизм в том и только в том случае, если $h'$ — гомоморфизм. При этом ограничимся обоснованием 4.1.10 (3) с $n = 1$. Иными словами, нужно показать, что $h$ и $h'$ одновременно сохраняют или нет одноместные операции. Пусть $\nu$, $\lambda$, $\mu(\nu)$ и $\mu(\lambda)$ — интерпретирующие отображения систем $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}^\sim$ и $\mathfrak{B}^\sim$ соответственно. Если $h$ — гомоморфизм, то $h \circ f^\nu = f^\lambda \circ h$. Кроме того, $\imath \circ f^\nu = (f^{\mu(\nu)}{\downarrow}) \circ \imath$ и $\jmath \circ f^\lambda = (f^{\mu(\lambda)}{\downarrow}) \circ \jmath$, следовательно,

$$h' \circ (f^{\mu(\nu)}{\downarrow}) \circ \imath = \jmath \circ h \circ f^\nu = \jmath \circ f^\lambda \circ h = (f^{\mu(\lambda)}{\downarrow}) \circ h' \circ \imath.$$

Учитывая также соотношение $|\mathfrak{A}^{\sim}{\downarrow}| = \operatorname{mix}(\imath(|\mathfrak{A}|))$, получим $h' \circ (f^{\mu(\nu)}{\downarrow}) = (f^{\mu(\lambda)}{\downarrow}) \circ h'$. Наоборот, если верно последнее равенство, то, рассуждая в противоположном направлении, найдем $h \circ f^{\nu} = f^{\lambda} \circ h$. Случай произвольных операций или произвольных предикатов несколько более громоздок, но не вызывает принципиальных трудностей. Итак, $h$ — гомоморфизм, сильный гомоморфизм или изоморфизм алгебраических $B$-систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладает отображение $h'$ из $\mathfrak{A}'$ в $\mathfrak{B}'$. Ввиду этого требуемое вытекает из 4.2.5 и 4.3.3.

(2) Если $\mathfrak{A}$ — расширенная алгебраическая система, то требуемое вытекает из 3.5.8 (4). В общем случае нужно вначале привлечь 3.5.8 (2). Искомый гомоморфизм имеет вид $h := \jmath^{-1} \circ (g{\downarrow}) \circ \imath$. $\triangleright$

**4.3.5.** Отметим некоторые следствия теорем 4.3.3 и 4.3.4.

**(1)** ***Теорема.*** *Если $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система конечной сигнатуры $\sigma$, то $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathfrak{A}^{\wedge}$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma^{\wedge}$». При этом для всякой формулы сигнатуры $\varphi$ с $n$ свободными переменными будет*

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \leftrightarrow [\![\mathfrak{A}^{\wedge} \models \varphi(a_0^{\wedge}, \dots, a_{n-1}^{\wedge})]\!] = \mathbb{1},$$

*каковы бы ни были $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$.*

$\triangleleft$ Для доказательства нужно лишь заметить, что если $\mathfrak{A} := (A, f_0, \dots, f_{k-1}, p_0, \dots, p_{m-1})$, то предложение $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ записывается ограниченной формулой теории множеств $\psi(A^{\wedge}, f_0^{\wedge}, \dots, f_n^{\wedge}, p_0^{\wedge}, \dots, p_{m-1}^{\wedge}, a_0^{\wedge}, \dots, a_{n-1}^{\wedge})$, и сослаться на 2.2.9. $\triangleright$

**(2)** ***Теорема.*** *Для всякой алгебраической $B$-системы $\mathfrak{A}$ существуют расширенная алгебраическая $B$-система $\mathfrak{A}'$ сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A})$ и изоморфизм $\imath$ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$ такие, что*

- **(a)** $|\mathfrak{A}'| = \operatorname{mix}(\imath(|\mathfrak{A}|))$;
- **(b)** *если $h$ — гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в расширенную алгебраическую $B$-систему $\mathfrak{B}$, то существует единственный гомоморфизм $h' : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{B}$ такой, что $h' \circ \imath = h$;*
- **(c)** *если $\mathfrak{A}''$ — расширенная алгебраическая $B$-система, а изоморфизм $\imath' : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}''$ удовлетворяет условию* (a) *(с заменой $\mathfrak{A}'$ на $\mathfrak{A}''$), то существует единственный изоморфизм $h$ из $\mathfrak{A}'$ на $\mathfrak{A}''$ такой, что $h \circ \imath = \imath'$.*

$\triangleleft$ Пусть $(\mathscr{A}, \mu)$ — булевозначная реализация алгебраической $B$-системы $\mathfrak{A}$. Тогда спуск $\mathfrak{A}' := (\mathscr{A}, \mu){\downarrow}$ удовлетворяет всем требуемым

условиям. Действительно, в силу 4.3.3 (3, 4) каноническое вложение $\imath := \imath_{|\mathfrak{A}|}$ является изоморфизмом, причем выполнено (a). Если $h$ и $\mathfrak{B}$ — те, что указаны в (b), то по теореме 4.3.4 $g := h^{\sim}\!\downarrow$ — гомоморфизм из $\mathfrak{A}'$ в $\mathfrak{B}' := \mathfrak{B}^{\sim}\!\downarrow$. В силу расширенности $\mathfrak{B}$ каноническое отображение $\jmath := \imath_{|\mathfrak{B}|}$ является изоморфизмом «на». Ясно, что $h' := \jmath^{-1} \circ g$ и есть искомый гомоморфизм. Полезно отметить, что если $a \in |\mathfrak{A}'|$ и $a = \mathrm{mix}(b_\xi \imath(a_\xi))$, то $h'(a) = \mathrm{mix}(b_\xi h \circ \imath(a_\xi))$. Утверждение (c) вытекает из (a) и из теоремы 4.3.4. $\triangleright$

Любую пару $(\mathfrak{A}', \imath)$, где $\mathfrak{A}'$ — расширенная алгебраическая $B$-система, а $\imath$ — изоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$, удовлетворяющую условию (a) теоремы (2), естественно назвать *максимальным расширением* $\mathfrak{A}$. Тогда из теоремы (2) можно извлечь следующее утверждение.

**(3)** *Всякая алгебраическая $B$-система обладает единственным с точностью до изоморфизма максимальным расширением.*

Возьмем полный гомоморфизм $\pi$ из $B$ в полную булеву алгебру $C$. Пусть $\mathfrak{A} := (A, f_0, \dots, f_{k-1}, p_0, \dots, p_{m-1})$ — алгебраическая система конечной сигнатуры внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Обозначим

$$\pi^*(\mathfrak{A}) := (\pi^*(A), \pi^*(f_0), \dots, \pi^*(p_{m-1}))^C, \quad \pi^*(\mathfrak{A}) \in \mathbb{V}^{(C)},$$

где $\pi^* : \mathbb{V}^{(B)} \to \mathbb{V}^{(C)}$ — ассоциированное с $\pi$ отображение (см. 2.2).

**(4)** ***Теорема.*** *Элемент $\pi^*(\mathfrak{A})$ представляет собой алгебраическую систему конечной сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A})$ внутри $\mathbb{V}^{(C)}$. Отображение $a \mapsto \pi^*(a)$ $(a \in A\!\downarrow)$ является гомоморфизмом из $\mathfrak{A}\!\downarrow$ в $\pi^*(\mathfrak{A})\!\downarrow$. Для любой формулы $\varphi$ сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A})$ с $n$ свободными переменными и для произвольных $a_0, \dots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}\!\downarrow|$ выполняется формула*

$$\mathfrak{A}\!\downarrow \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \to \pi^*(\mathfrak{A})\!\downarrow \models \varphi(\pi^*(a_0), \dots, \pi^*(a_{n-1})).$$

*В частности, если $\mathfrak{B}$ — алгебраическая $B$-система конечной сигнатуры и $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^{\sim}$, то для $a_0, \dots, a_{n-1} \in |\mathfrak{B}|$ имеем*

$$\mathfrak{B} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \to \pi^*(\mathfrak{A})\!\downarrow \models \varphi(\pi^* \circ \imath(a_0), \dots, \pi^* \circ \imath(a_{n-1})),$$

*где $\imath := \imath_{|\mathfrak{B}|}$. Если $\pi$ — мономорфизм, то $\pi^*$ — изоморфизм из $\mathfrak{A}\!\downarrow$ в $\pi^*(\mathfrak{A})\!\downarrow$ и в указанных формулах верна также и обратная импликация. Если $\pi$ — изоморфизм, то $\pi^*$ — изоморфизм алгебраических $B$-систем.*

$\triangleleft$ Для доказательства этого факта нужно собрать воедино 2.2.4, 2.2.5, 4.1.10, 4.2.5 и воспользоваться рассуждением из (1). $\triangleright$

**(5)** *Для всякой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполняется $[\![\mathfrak{A}{\downarrow}^{\sim}$ изоморфна $\mathfrak{A}]\!] = \mathbb{1}$.*

**(6)** ***Теорема.*** *Булевозначная реализация $(\mathscr{A}, \nu, \delta)$ алгебраической $B$-системы с дизъюнктностью $(A, \nu, \Delta)$ является алгебраической системой с простой дизъюнктностью внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Если $(A', \nu') := (\mathscr{A}, \mu){\downarrow}$ и $\Delta' := \{(x, y) \in A' \times A' : \delta{\downarrow}(x, y) = \mathbb{1}\}$, то $(A', \nu', \Delta')$ — расширенная алгебраическая $B$-система с дизъюнктностью и для любых $x, y \in A$ справедливы эквивалентности*

$$x \perp y \leftrightarrow \imath x \perp \imath y \leftrightarrow [\![\imath x = \theta \vee \imath y = \theta]\!] = \mathbb{1},$$

*где $\imath = \imath_A : A \to A'$ — каноническая инъекция.*

$\triangleleft$ Достаточно привлечь 4.1.13 и 4.3.3. $\triangleright$

**4.3.6.** Остановимся теперь подробнее на важном вопросе, затронутом в 4.2.6. Возьмем алгебраическую $B$-систему $\mathfrak{A}$ сигнатуры $\sigma$. Для формулы $\varphi$ той же сигнатуры и элементов $a_0, \dots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$ мы временно будем использовать более информативную запись $\mathfrak{A} \models_B \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ вместо $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$.

Применяя процедуру очистки, описанную в 4.1.3, к $B$-системе $\mathfrak{A}$, мы получим двузначную алгебраическую систему $\overline{\mathfrak{A}}$. Можно говорить об истинности $\varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ как в $\mathfrak{A}$, так и в $\overline{\mathfrak{A}}$, ибо $|\mathfrak{A}| = |\overline{\mathfrak{A}}|$ и $\sigma(\overline{\mathfrak{A}}) = \sigma$. Возникает естественный вопрос, как связаны утверждения $\mathfrak{A} \models_B \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$ и $\overline{\mathfrak{A}} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$. Теоремы 4.2.7 и 4.2.8 дают примеры таких формул $\varphi$, для которых из $\mathfrak{A} \models_B \varphi$ вытекает $\overline{\mathfrak{A}} \models \varphi$. С другой стороны, нетрудно построить пример, нарушающий эту импликацию.

Действительно, пусть $B := \mathscr{P}([0,1])$ и $A := \mathbb{R}^{[0,1]}$ — множество всех вещественных функций на отрезке $[0,1]$ с $B$-метрикой

$$d(f, g) := \{t \in [0,1] : f(t) \neq g(t)\} \quad (f, g \in A).$$

Введем $B$-значный бинарный предикат $[\![\,\cdot\, \leq \,\cdot\,]\!]$ на $A$ формулой

$$[\![f \leq g]\!] := \{t \in [0,1] : f(t) \leq g(t)\} \quad (f, g \in A).$$

Тогда $\mathfrak{A} := (A, [\![\,\cdot\, \leq \,\cdot\,]\!])$ — алгебраическая $B$-система и $\mathfrak{A} \models_B \varphi$, где $\varphi := (\forall\, x)(\forall\, y)(x \leq y \vee y \leq x)$. Кроме того, очевидно, что $\overline{\mathfrak{A}} := (A, \leq)$ — очистка $\mathfrak{A}$, если положить

$$f \leq g \leftrightarrow (\forall\, t \in [0,1]) f(t) \leq g(t).$$

Очевидно, что $\overline{\mathfrak{A}} \models \neg\varphi$. Итак, если $\mathscr{T}^B(\mathfrak{A})$ и $\mathscr{T}(\overline{\mathfrak{A}})$ — множества всех формул (с константами из $|\mathfrak{A}|$), истинных в системах $\mathfrak{A}$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ соответственно, то никакое из этих двух множеств не будет, вообще говоря, подмножеством другого. Можно ожидать поэтому, что имеют место лишь соотношения вида $\mathscr{T}^B(\mathfrak{A}) \cap \Phi(?)\mathscr{T}(\overline{\mathfrak{A}}) \cap \Phi$ для некоторого класса $\Phi$ формул сигнатуры $\sigma$. Для точных формулировок необходим определенный синтаксический анализ текстов.

**4.3.7.** Выделим необходимые нам типы формул.

**(1)** Классы *генерических* и *строго генерических формул* определяются рекурсией по длине формулы. Вот соответствующие правила формирования:

- **(a)** Всякая атомная формула является строго генерической.
- **(b)** Если $\varphi$ и $\psi$ — строго генерические формулы, то строго генерическими будут также $\varphi \wedge \psi$, $(\exists\, x)\varphi$, $(\forall\, x)\varphi$.
- **(c)** Каждая строго генерическая формула является генерической.
- **(d)** Если $\varphi$ и $\psi$ — генерические формулы, то генерическими будут также $\varphi \wedge \psi$, $(\exists\, x)\varphi$, $(\forall\, x)\varphi$.
- **(e)** Если $\varphi$ — строго генерическая формула, то $\neg\varphi$ — генерическая формула.
- **(f)** Если $\varphi$ — строго генерическая формула, а $\psi$ — генерическая формула, то $\varphi \to \psi$ — генерическая формула.

**(2)** *Базисной хорновской формулой* называют дизъюнкцию $\theta_1 \vee \ldots \vee \theta_n$, где самое большее одна из формул $\theta_k$ атомна, а остальные — отрицания атомных формул. Формулу называют *хорновской*, если она строится из базисных хорновских формул посредством $\wedge$, $\exists$ и $\forall$.

**(3)** *Всякая генерическая формула исчисления предикатов логически эквивалентна хорновской формуле и наоборот.*

**4.3.8.** Примеры.

**(1)** Пусть $\varphi$ — формула сигнатуры $\{\leq\}$ с единственным предикатным символом. Если $\varphi$ — аксиомы решеточно упорядоченного множества (= решетки; см. 1.1.1), то $\varphi$ — генерическая формула. Дистрибутивность в указанной сигнатуре не записывается генерической формулой. Однако если возьмем сигнатуру $\sigma := \{\wedge, \vee\}$, где $\wedge$ и $\vee$ — двуместные функциональные символы, то формула

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ атомная и, значит, строго генерическая. Более того, дистрибутивная решетка — строго генерическая формула сигнатуры $\{\wedge, \vee\}$.

**(2)** Возьмем формулы $\varphi$ и $\psi$ сигнатуры $\{\wedge, \vee, *, 0, 1\}$. Пусть $\varphi$ — аксиомы булевой алгебры (см. 1.1.2), а $\psi :=$ «существует по крайней мере один атом», т. е.

$$\psi := (\exists\, x)(\forall\, y)(x \neq 0 \wedge y = y \to x = y \vee y = 0).$$

Тогда $\varphi$ — строго генерическая формула, но $\psi$ не является генерической.

**(3)** Пусть $\sigma := \{+, 0\}$, где $+$ — двуместный функциональный символ, 0 — символ константы. Если $\varphi$ — аксиомы группы (ассоциативность групповой операции, аксиома нуля, существование обратного элемента), то $\varphi$ — строго генерическая формула сигнатуры $\sigma$.

**(4)** Пусть $\sigma := \{+, \cdot, 0, 1\}$, где $+$, $\cdot$ — двуместные функциональные символы, 0 и 1 — символы констант. Пусть $\varphi$ — аксиомы кольца, а $\psi$ — аксиомы области целостности, т. е. $\psi := \varphi \wedge \theta$, где

$$\theta := (\forall\, x)(\forall\, y)(x \cdot y = 0 \to x = 0 \vee y = 0).$$

Тогда $\varphi$ — строго генерическая формула, а $\psi$ — генерическая формула.

**4.3.9.** Продолжим наш синтаксический анализ следующим утверждением.

**(1)** ***Теорема Йеха.*** *Пусть $\mathfrak{A}$ — расширенная алгебраическая B-система, а $\varphi$ — формула сигнатуры $\sigma(\mathfrak{A})$ и $a_0, \dots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$. Если $\varphi$ строго генерическая, то*

**(a)** $\mathfrak{A} \models_B \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \leftrightarrow \overline{\mathfrak{A}} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$.

*Если $\varphi$ генерическая, то*

**(b)** $\mathfrak{A} \models_B \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) \to \overline{\mathfrak{A}} \models \varphi(a_0, \dots, a_{n-1})$.

$\triangleleft$ Доказательство ведется индукцией по длине формулы $\varphi$. В соответствии с теоремой 4.3.3 можно считать, что $\mathfrak{A} = \mathscr{A}{\downarrow}$, где $\mathscr{A}$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Если $\varphi$ — атомная формула, то утверждение непосредственно следует из определения очистки, ибо для предикатного символа $p \in \sigma(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{a}(p) = n$, верно

$$p^{\nu}(a_0, \dots, a_{n-1}) = 1 \leftrightarrow (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \overline{\nu}(p)$$

для всех $a_0, \dots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$. Для конъюнкции $\varphi := \psi \wedge \theta$, учитывая определение 4.1.8 и индукционное предположение, имеем

$$[\![\psi \wedge \theta]\!]^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1} \leftrightarrow |\psi|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1} \wedge |\theta|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1} \leftrightarrow \overline{\mathfrak{A}} \models \psi \wedge \overline{\mathfrak{A}} \models \theta \leftrightarrow \overline{\mathfrak{A}} \models \psi \wedge \theta.$$

Аналогично обстоит дело с квантором общности $\varphi := (\forall\, x)\psi$:

$$|(\forall\, x)\varphi|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1} \leftrightarrow (\forall\, a \in |\mathfrak{A}|)\psi(a)|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, a \in |\mathfrak{A}|)\overline{\mathfrak{A}} \models \psi(a) \leftrightarrow \overline{\mathfrak{A}} \models (\forall\, x)\psi.$$

Рассмотрим случай квантора существования $\varphi := (\exists\, x)\psi$. В силу принципа максимума существует элемент $z \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![\mathscr{A} \models (\exists\, x)\psi]\!] = [\![z \in |\mathscr{A}| \wedge \mathscr{A} \models \psi(z)]\!].$$

По теореме 4.3.3 эту формулу можно переписать так:

$$[\![z \in |\mathscr{A}|]\!] \wedge |\psi(z)|^{\mathfrak{A}} = |(\exists\, x)\psi|^{\mathfrak{A}}.$$

Отсюда и из индукционного предположения видно, что верны эквивалентности

$$|(\exists\, x)\psi|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1} \leftrightarrow (\exists\, z \in |\mathfrak{A}|)|\psi(z)|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, z \in |\overline{\mathfrak{A}}|)(\overline{\mathfrak{A}} \models \psi(z) \leftrightarrow \overline{\mathfrak{A}} \models (\exists\, x)\psi),$$

ибо по определению 4.2.3 $|\mathfrak{A}| = |\mathscr{A}|{\downarrow}$. Итак, в каждом из рассмотренных случаев индукционный шаг осуществим для строго генерической формулы $\varphi$, что доказывает (a).

Переходя к (b), заметим, что случаи $\wedge$, $\exists$ и $\forall$ рассматриваются так же, как выше. Пусть $\varphi := \neg\psi$, где $\psi$ — строго генерическая формула. Осталось проанализировать случаи формирования $\varphi$ с помощью отрицания и импликации (см. 4.1.7 (e, f)). Если $|\varphi|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1}$, то $|\psi|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{0}$ и в силу установленного в (a) $\psi$ не может быть истинной в $\overline{\mathfrak{A}}$. Но тогда $\overline{\mathfrak{A}} \models \varphi$. Наконец, рассмотрим формулу вида $\varphi := \theta \to \psi$, где $\theta$ — строго генерическая формула, а $\psi$ — генерическая формула. Предположим, что $|\theta \to \psi|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1}$. Если $\overline{\mathfrak{A}} \models \theta$, то доказанное в (a) дает $|\theta|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1}$, поэтому $|\psi|^{\mathfrak{A}} = \mathbb{1}$. По индукционному предположению будет $\overline{\mathfrak{A}} \models \psi$. Тем самым $\overline{\mathfrak{A}} \models \theta \to \psi$. $\triangleright$

Отметим, что теорема Йеха позволяет заменить доказательство некоторых фрагментов теорем 4.2.7–4.2.9 синтаксическим разбором соответствующих предложений. Разумеется, можно сформулировать и общий факт такого рода.

**(2)** ***Следствие.*** *Пусть $\mathscr{A}$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ — булевозначная реализация и очистка расширенной алгебраической $B$-системы. Для любого хорновского предложения $\varphi$ верно $[\![\mathscr{A} \models \varphi]\!] = \mathbb{1} \to \overline{\mathfrak{A}} \models \varphi$.*

**4.3.10.** Пусть $\Phi$ — некоторое множество формул одной и той же сигнатуры $\sigma$. Введем категорию $\mathrm{AS}^{(B)}(\Phi)$ следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Ob}\,\mathrm{AS}^{(B)}(\Phi) := \{\mathfrak{A} \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![\mathfrak{A} \text{ — алгебраическая система} \\
\text{сигнатуры } \sigma^{\wedge} \text{ и } \mathfrak{A} \models \Phi]\!] = \mathbb{1}\}; \\
\mathrm{AS}^{(B)}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) := \{h \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![h \text{ — гомоморфизм из } \mathfrak{A} \text{ в } \mathfrak{B}]\!] = \mathbb{1}\}; \\
\mathrm{Com}(f, g) = h \leftrightarrow [\![h = g \circ f]\!] = \mathbb{1}.
\end{gathered}
$$

То, что этими условиями действительно определяется категория, следует из принципа переноса, принципа максимума, теоремы 4.3.2, а также из других свойств функтора погружения. Так же, как и раньше, мы будем обозначать символами $\mathscr{F}^{\sim}$ и $\mathscr{F}^{\downarrow}$ отображения погружения и спуска соответственно, действующие в категориях алгебраических систем: $\mathscr{F}^{\sim}\colon B\text{-}\mathrm{AS}(\Phi) \to \mathrm{AS}^{(B)}(\Phi)$, $\mathscr{F}^{\downarrow} : \mathrm{AS}^{(B)}(\Phi) \to B\text{-}\mathrm{AS}(\Phi)$.

***Теорема.*** *Справедливы следующие утверждения:*

**(1)** *отображение $\mathscr{F}^{\downarrow}$ есть ковариантный функтор из категории $\mathrm{AS}^{(B)}(\Phi)$ в категорию $B\text{-}\mathrm{CAS}^{(B)}(\Phi)$;*

**(2)** *отображение $\mathscr{F}^{\sim}$ является ковариантным функтором из категории $B\text{-}\mathrm{AS}(\Phi)$ (а также из $B\text{-}\mathrm{CAS}(\Phi)$) в категорию $\mathrm{AS}^{(B)}(\Phi)$;*

**(3)** *функторы $\mathscr{F}^{\downarrow}$ и $\mathscr{F}^{\sim}$ осуществляют эквивалентность категорий $\mathrm{AS}^{(B)}(\Phi)$ и $B\text{-}\mathrm{CAS}(\Phi)$.*

**4.3.11. (1)** ***Теорема.*** *Пусть $D$ — полная булева алгебра и $\jmath : B \to D$ — полный мономорфизм. Тогда существуют полная булева алгебра $\mathscr{D}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и изоморфизм $H$ из $D$ на $D' := \mathscr{D}{\downarrow}$ такие, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\jmath"'] \arrow[dr, "\imath'"] & \\ D \arrow[rr, "H"'] & & D' \end{tikzcd}$$

*где $\imath'$ — канонический мономорфизм из $B$ в $D'$.*

**(2)** ***Теорема.*** *Пусть $(K, D)$ — это* BAP*-кольцо и $\jmath : B \to D$ — полный мономорфизм. Тогда существуют* BAP*-кольцо $(\mathscr{K}, \mathscr{D})$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и изоморфизм $h$ кольца $K$ в кольцо $K' := \mathscr{K}{\downarrow}$ такие, что для любого $b \in B$ коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\jmath(b)"'] & K' \arrow[d, "\imath'(b)"] \\ K \arrow[r, "h"'] & K' \end{tikzcd}$$

*где $\imath'$ — канонический мономорфизм из $B$ в $D'$.*

Аналогичные результаты имеют место и для BAP-групп.

**4.3.12.** Примечания.

**(1)** Пусть $C$ и $D$ — булевы алгебры, а $P$ и $Q$ — их стоуновские компакты. Определим тензорное произведение $C \otimes D$ алгебр $C$ и $D$ как булеву алгебру открыто-замкнутых подмножеств декартова произведения $P \times Q$ (см. 1.1.6 (6) и 1.2.6 (8)). Пусть $C \widehat{\otimes} D$ — пополнение булевой алгебры $C \otimes D$ (см. 1.1.6 (7) и 1.2.6 (9)). Если $D$ — булева алгебра, а элемент $\mathscr{D} \in \mathbb{V}^{(B)}$ таков, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{D}$ — пополнение булевой алгебры $D^{\wedge}$», то алгебры $\mathscr{D}{\downarrow}$ и $B \widehat{\otimes} D$ изоморфны (см. [234]).

**(2)** Теоремы Соловея — Тенненбаума (см. 4.3.11) могут быть положены в основу итерирования конструкции булевозначной модели. Пусть $\mathscr{D} \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{D}$ — полная булева алгебра». По схеме 2.1 внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ можно построить $\mathbb{V}^{(B)}$-классы — булевозначный универсум $(\mathbb{V}^{(B)})^{(\mathscr{D})}$, соответствующие булевы оценки истинности $[\![\cdot = \cdot]\!]^{\mathscr{D}}$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]^{\mathscr{D}}$, а также каноническое вложение $(\,\cdot\,)^{\wedge}$ универсального класса $\mathbb{U}_B$ в $(\mathbb{V}^{(B)})^{\mathscr{D}}$. Положим $D := \mathscr{D}{\downarrow}$, $\mathbb{W}^{(D)} := (\mathbb{V}^{(B)})^{(\mathscr{D})}{\downarrow}$,

$[\![\cdot\ =\ \cdot]\!]^D := ([\![\cdot\ =\ \cdot]\!]^{\mathscr{D}}){\downarrow}, [\![\cdot\ \in\ \cdot]\!]^D := ([\![\cdot\ \in\ \cdot]\!]^{\mathscr{D}}){\downarrow}$, $\jmath := (\,\cdot\,)^{\wedge}{\downarrow}$. Пусть $\imath : B \to D$ — канонический мономорфизм, а $\imath^* : \mathbb{V}^{(B)} \to \mathbb{V}^{(D)}$ — соответствующая инъекция (см. 2.2).

Тогда существует единственная биекция $h : \mathbb{V}^{(D)} \to \mathbb{W}^{(D)}$ такая, что

$$[\![x = y]\!]^D = [\![h(x) = h(y)]\!]^{\mathscr{D}}, \quad [\![x \in y]\!]^D = [\![h(x) \in h(y)]\!]^{\mathscr{D}},$$

каковы бы ни были $x$ и $y \in \mathbb{V}^{(B)}$.

При этом диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{V}^{(B)} \arrow[dl, "\imath^*"'] \arrow[dr, "\jmath"] & \\ \mathbb{V}^{(D)} \arrow[rr, "h"'] & & \mathbb{W}^{(D)} \end{tikzcd}$$

коммутативна. Детали см. в [234]. О родственных булевозначных конструкциях в теории универсальных алгебр см. [218].

**(3)** Дальнейшие итерации описанной выше конструкции приводят к трансфинитной последовательности булевозначных расширений. На этом пути возникает сильный метод — итерированный форсинг, с помощью которого была установлена относительная совместимость гипотезы Суслина с ZFC (см. [234]).

## 4.4. Упорядоченные алгебраические системы

Полная булева алгебра конгруэнций, необходимая для булевозначной реализации алгебраической системы, часто порождается отношением порядка. Указанное обстоятельство приводит к возможности булевозначной реализации упорядоченных алгебраических систем. Необходимые дополнительные сведения можно найти в [5, 50, 106, 122].

**4.4.1.** *Упорядоченной группой* называют алгебраическую систему $(G, +, 0, \leq)$, для которой соблюдены условия:

**(1)** $(G, +, 0)$ — группа;

**(2)** $(G, \leq)$ — (частично) упорядоченное множество;

**(3)** структуры группы и порядка согласованы так, что групповые трансляции являются изотонными отображениями,

т. е. $G$ является моделью для $(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, a)(\forall\, b)(x \leq y \leftrightarrow a + x + b \leq a + y + b)$.

(Аддитивная запись групповой операции не означает, что она коммутативна.) Говорят, что $G$ — *линейно упорядоченная группа*, если помимо (1)–(3) выполняется

**(4)** $(G, \leq)$ — линейно упорядоченное множество, т. е. на $G$ выполняется формула $(\forall\, x)(\forall\, y)\ (x \leq y \vee y \leq x)$.

Элемент $x \in G$ называется *положительным*, если $x \geq 0$. Множество всех положительных элементов именуют *положительным конусом* и обозначают через $G^+$. Подмножество $K$ группы $G$ является положительным конусом относительно некоторого группового порядка на $G$, если выполняются условия:

**(a)** $K \cap (-K) = \{0\}$;

**(b)** $K + K = K$;

**(c)** $x + K = K + x\ (x \in G)$.

При этом конус $K$ и соответствующий ему порядок связаны соотношениями

$$x \leq y \leftrightarrow y - x \in K \leftrightarrow -x + y \in K.$$

Группа $G$ линейно упорядочена в том и только в том случае, если справедливо

**(d)** $G = G^+ \cup (-G^+)$.

Конус положительных элементов называется *воспроизводящим*, если $G = G^+ - G^+$. При соблюдении этого условия говорят также, что $G$ — *направленная группа.* По определению упорядоченная группа $G$ *целозамкнута* (*архимедова*) в том и только в том случае, если для любых $x$, $y \in G$ из неравенств $nx \leq y$, $n \in \omega$ (соответственно $nx \leq y$, $\pm n \in \omega$) следует, что $x \leq 0$ (соответственно $x = 0$). Гомоморфизм $h : G \to G'$ упорядоченных групп положителен, если $h(x) \geq 0$ для каждого $0 \leq x \in G$.

**4.4.2.** *Решеточно упорядоченной группой* называют упорядоченную группу $G$, в которой всякое непустое конечное множество $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\} \subset G$ имеет точную верхнюю границу $x_0 \vee \ldots \vee x_{n-1} := \sup\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ и точную нижнюю границу $x_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} := \inf \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$. Для всякого элемента $x$ решеточно упорядоченной группы $G$ определены элементы $|x| := x \vee (-x)$, $x^+ := x \vee 0$ и $x^- := (-x)^+ = -x \wedge 0$, называемые соответственно *модулем*, *положитель-*

*ной частью* и *отрицательной частью* $x$. В любой решеточно упорядоченной группе выполняются соотношения:

**(1)** $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$, $x^+ \wedge x^- = 0$;
**(2)** $(x+y)^+ \leq x^+ + y^+$, $(x+y)^- \leq x^- + y^-$;
**(3)** $(nx)^+ = nx^+$, $(nx)^- = nx^-$, $|nx| = n|x|$ $(n \in \omega)$;
**(4)** $|x+y| \leq |x| + |y| + |x|$;
**(5)** $|x+y-x| = x+|y|-x$; $(x+y-x)^- = x+y^- - x$;
**(6)** $u \wedge x = 0, u \wedge y = 0 \to u \wedge (x+y) = 0$;

Решеточно упорядоченная группа $G$ коммутативна в том и только в том случае, если вместо (4) выполняется $|x+y| \leq |x| + |y|$ для всех $x$, $y \in G$. Из прочих свойств решеточно упорядоченной группы $G$ отметим, что $G$ — группа без кручения, $G$ является дистрибутивной решеткой и в ней справедливы соотношения

$$a + \Big(\bigvee x_\alpha\Big) + b = \bigvee (a + x_\alpha + b),$$
$$a + \Big(\bigwedge x_\alpha\Big) + b = \bigwedge (a + x_\alpha + b).$$

Подгруппа $G_0$ решеточно упорядоченной группы называется *о-идеалом*, *порядковым идеалом* или *выпуклой подгруппой*, если для любых $x$ и $y$ из $|x| \leq |y|$ и $y \in G_0$ следует, что $x \in G_0$. Если, сверх того, подгруппа $G_0$ нормальна, то ее именуют $l$-идеалом.

**4.4.3.** Всюду ниже $G$ будет решеточно упорядоченной группой. Введем в $G$ отношение дизъюнктности $\perp$ по формуле

$$\perp := \{(x,y) \in G \times G : |x| \wedge |y| = 0\}.$$

Ясно, что $\perp$ удовлетворяет всем аксиомам отношения дизъюнктности из 4.1.12 (2). Полную булеву алгебру, составленную из $\perp$-компонент $\mathfrak{K}_\perp(G)$, называют *базой* $G$ и обозначают $\mathscr{B}(G)$. Допустим, что компонента $K \in \mathscr{B}(G)$ выделяется прямым слагаемым группы $G$. Тогда соответствующий проектор $\pi_K$ — положительный эндоморфизм в $G$, причем $\pi_K x \leq x$ для всех $0 \leq x \in G$. Если всякая компонента в $K$ выделяется прямым слагаемым, то множество $\mathfrak{Pr}(G)$ всех проекторов вида $\pi_K$ $(K \in \mathscr{B}(G))$ есть полная булева алгебра, изоморфная $\mathscr{B}(G)$. В этой ситуации говорят, что $G$ — *группа с проекциями на компоненты*. Решеточно упорядоченная группа $G$

с проекциями на компоненты называется *расширенной* или *ортогонально полной*, если она расширена относительно алгебры проекторов $\mathfrak{Pr}(G)$. *Максимальным расширением решеточно упорядоченной группы* $G$ назовем расширенную решеточно упорядоченную группу $G'$ вместе с $o$-изоморфизмом $\imath : G \to G'$ такую, что $G' = \operatorname{mix}(\imath(G))$ и для каждого $0 < x' \in G'$ найдется $0 < x \in G$, $\imath(x) \leq x'$ (здесь mix вычисляется относительно булевой алгебры $\mathfrak{Pr}(G)$).

Напомним, что $[x]$ обозначает наименьшую компоненту, содержащую $x$. Из свойств, перечисленных в 4.4.2, вытекает такой факт.

**(1)** *Справедливы следующие соотношения*:

$$
\begin{gathered}
[x + y] = [x \vee y] = [x] \vee [y] \quad (x, y \in G^+);\\
[x] = [|x|] = [x^+] \vee [x^-] \quad (x \in G);\\
[x + y - x] = x + [y] - x \quad (x, y \in G);\\
x \perp y \to x + y = y + x \quad (x, y \in G).
\end{gathered}
$$

**(2)** *Всякая компонента* $K \in \mathscr{B}(G)$ *является* $o$-*идеалом.*

$\lhd$ Действительно, если $x$ и $y \in A^\perp$ для некоторого $A \subset G$, то в силу второго соотношения из (1) и 4.4.2 можно написать

$$
\{x + y\}^\perp \supset \{x\}^\perp \wedge \{y\}^\perp \wedge \{x\}^\perp \supset A,
$$

значит, $x + y \in \{x + y\}^{\perp\perp} \subset A^\perp$. Тем самым установлено, что $A^\perp$ — подгруппа в $G$. С другой стороны, если $y \in A^\perp$ и $|x| \leq |y|$, то $\{x\}^\perp \supset \{y\}^\perp \supset A$, поэтому $x \in \{x\}^{\perp\perp} \subset A^\perp$, что и требовалось. $\rhd$

**4.4.4.** Если группа $G$ не коммутативна, то компоненты в ней не обязательно будут нормальными подгруппами, т. е. не являются, вообще говоря, $l$-идеалами. В связи с этим вводится следующее понятие. Компоненту $K \in \mathscr{B}(G)$ назовем *инвариантной*, если $x + K - x \subset K$ для каждого $x \in G$. В силу 4.4.3 (2) это равносильно тому, что $K$ есть $l$-идеал. Множество всех инвариантных компонент обозначим символом $\mathscr{B}_\imath(G)$.

**(1)** *Множество всех инвариантных компонент* $\mathscr{B}_\imath(G)$ *является правильной подалгеброй булевой алгебры всех компонент.*

$\lhd$ Ясно, что пересечение любого множества инвариантных компонент будет инвариантной компонентой. Поэтому достаточно установить, что инвариантной компонентой будет дизъюнктное дополнение каждой инвариантной компоненты. Возьмем $K \in \mathscr{B}_\imath(G)$ и

$x \in K^{\perp}$. Тогда для любых $y \in K$ и $a \in G$ будет $0 = (a+|y|-a) \wedge |x| = -a+(a+|y|-a) \wedge |x|+a = |y| \wedge (-a+|x|+a)$, тем самым $-a+|x|+a \in K^{\perp}$. Это и означает, что компонента $K^{\perp}$ инвариантна. $\triangleright$

**(2)** *Для решеточно упорядоченной группы $G$ равносильны утверждения*:

**(a)** *всякая компонента инвариантна, т. е. $\mathscr{B}(G) = \mathscr{B}_\imath(G)$*;

**(b)** *для любых $x, y \in G$ имеет место равенство*

$$\{x\}^{\perp} = y + \{x\}^{\perp} - y;$$

**(c)** *если элемент $x \in G$ дизъюнктен какому-нибудь из своих сопряженных $y + x - y$, то $x = 0$.*

$\triangleleft$ Условие (b) является очевидным следствием (a). Допустим, что выполнено (b) и $x \perp (y + x - y)$ для некоторых $x$ и $y \in G$. Тогда

$$x \in \{y + x - y\}^{\perp} = y + \{x\}^{\perp} - y = \{x\}^{\perp},$$

откуда немедленно вытекает, что $x = 0$. Наконец, пусть выполнено (c) и компонента $K$ имеет вид $A^{\perp}$, $A \subset G$. Возьмем произвольные $x \in K$, $y \in G$, $a \in A$ и положим $z := (y + |x| - y) \wedge |a|$. Ясно, что $0 \leq z \wedge (-y + z + y) \leq |x| \wedge |a| = 0$, так что $z = 0$. Но это означает, что $|y + x - y| = y + |x| - y \in A^{\perp} = K$, т. е. $y + K - y \subset K$. $\triangleright$

Введем симметричное отношение $\vartriangle$ в $G$ формулой

$$\vartriangle := \{(x, y) \in G \times G : (\forall\, a)(\forall\, b)(a + |x| - a) \wedge (b + |y| - b) = 0\}.$$

Если для некоторых $x$ и $y \in G$ неверно, что $x \vartriangle y$, то найдутся такие $a_0$ и $b_0 \in G$, что $u_0 := (a_0 + |x| - a_0) \wedge (b_0 + |y| - b_0) \neq 0$. Легко видеть, что $u_0 \in \{a_0 + |x| - a_0\}^{\vartriangle\vartriangle}$, а с другой стороны, $\{a_0 + |x| - a_0\}^{\vartriangle\vartriangle} = \{x\}^{\vartriangle\vartriangle}$. Отсюда вытекает, что $u_0 \in \{x\}^{\vartriangle\vartriangle}$ и аналогично $u_0 \in \{y\}^{\vartriangle\vartriangle}$. Заметим еще, что наименьшая $\vartriangle$-компонента есть $\{0\}$ и $\vartriangle \cap I_G \subset \perp \cap I_G = \{(0, 0)\}$. Таким образом, $\vartriangle$ — отношение дизъюнктности на $G$ (см. 4.1.12 (2)).

**(3)** *Множество всех $\vartriangle$-компонент совпадает с полной булевой алгеброй инвариантных $\perp$-компонент: $\mathfrak{R}_{\vartriangle}(G) = \mathscr{B}_\imath(G)$.*

**4.4.5.** Предположим теперь, что группа $G$ имеет *инвариантную базу*, т. е. все ее компоненты инвариантны. Это означает в

точности, что $\vartriangle=\perp$. Понятно, что коммутативная решеточно упорядоченная группа имеет инвариантную базу. В указанной ситуации можно превратить $G$ в алгебраическую $B$-систему. Пусть $\jmath$ — изоморфизм полной булевой алгебры $B$ на (инвариантную) базу $\mathscr{B}(G)$. Положим по определению

$$p(x) := \jmath^{-1}(\{x^-\}^{\vartriangle}) \quad (x \in G).$$

Отображение $p : G \to B$ обладает рядом важных свойств.

**(1)** *Для любых $x$ и $y \in G$ имеют место соотношения:*

**(a)** $0 \le x \to p(x) = \mathbb{1}$;

**(b)** $p(x) \wedge p(-x) = \jmath^{-1}(\{x\}^{\perp})$;

**(c)** $p(x) \wedge p(y) \le p(x+y)$;

**(d)** $p(x) = p(y + x - y)$;

**(e)** $p(x) \vee p(-x) = \mathbb{1}$.

$\lhd$ Первое утверждение очевидно. Для доказательства (b) необходимо заметить, что $\{x\}^{\perp} = \{x^+\}^{\perp} \wedge \{x^-\}^{\perp} = \{x^-\}^{\perp} \wedge \{(-x)^-\}^{\perp}$ благодаря дизъюнктности $x^+$ и $x^-$. Тогда ясно, что $\jmath^{-1}(\{x^-\}^{\perp}) = \jmath^{-1}(\{x^-\}^{\perp}) \wedge \jmath^{-1}(\{(-x)^-\}^{\perp}) = p(x) \wedge p(-x)$. Аналогичными рассуждениями с учетом 4.4.2 (2, 6) устанавливается (c). Соотношение (d) вытекает из 4.4.2 (5) ввиду инвариантности компонент. Привлекая вновь дизъюнктность элементов $x^+$ и $x^-$, можно написать

$$(\{x^+\}^{\perp} \vee \{x^-\}^{\perp})^{\perp} = \{x^+\}^{\perp\perp} \wedge \{x^-\}^{\perp\perp} = \{0\}.$$

Отсюда выводим $\{x^+\}^{\perp} \vee \{x^-\}^{\perp} = G$, что равносильно требуемому. $\rhd$

Введем два отображения $\sigma$ и $d : G \times G \to B$ следующими формулами:

$$\sigma(x,y) := p(y-x), \quad d(x,y) := \jmath^{-1}(\{x-y\}^{\vartriangle}) \quad (x, y \in G).$$

Из 4.4.5 (a)–(d) непосредственно вытекает

**(2)** *Отображение $\sigma$ обладает следующими свойствами:*

**(a)** $\sigma(x,x) = 0$ *(рефлексивность);*

**(b)** $\sigma(x,y) \wedge \sigma(y,z) \le \sigma(x,z)$ *(транзитивность);*

**(c)** $\sigma(x,y) = \sigma(a + x - b, a + y - b)$ *(инвариантность);*

**(d)** $\sigma(x,y) \wedge \sigma(y,x) = d(x,y)^*$ *(антисимметричность).*

Ввиду (d) $d(x,y) = \sigma(x,y)^* \vee \sigma(y,x)^*$, следовательно, $d$ — это $B$-метрика на $G$, инвариантная относительно правых и левых сдвигов, а $\sigma$ является $B$-предикатом. Наконец, ясно, что $d(x,0) = \jmath^{-1}(\{x\}^{\perp\perp})$, т. е. $B$-метрика $d$ согласована с дизъюнктностью $\perp$ (см. 4.1.13).

**4.4.6. *Теорема.*** *Пусть $G$ — решеточно упорядоченная группа с инвариантной базой. Тогда $G$, рассматриваемая с $B$-предикатом $\sigma$ и соответствующей $B$-метрикой $d$, представляет собой алгебраическую $B$-систему сигнатуры $(+, 0, \leq)$, на которой выполняются аксиомы линейно упорядоченной группы.*

$\lhd$ Как уже отмечалось выше, $B$-метрика $d$ инвариантна относительно сдвигов. С учетом этого можно написать

$$d(x+y, u+v) = d(x, -y+u+v) \leq d(x,u) \vee d(u, -y+u+v),$$
$$d(u, -y+u+v) = d(u+y-u, v) \leq d(y,v) \vee d(u+y-u, y),$$
$$d(u+y-u, y) = d(u+y, u+y) = 0.$$

Из этих соотношений видно, что $d(x+y, u+v) \leq d(x,u) \vee d(y,v)$, т. е. операция суммы есть нерастягивающее отображение. Далее, благодаря 4.4.5 (3) по определению $d$ будет

$$d(x,y)^* \wedge p(x) = p(x) \wedge p(x-y) \wedge p(y-x) \leq p(y),$$

каковы бы ни были $x$ и $y \in G$. Отсюда без труда выводится, что $\sigma(x,y) \wedge d(x,u)^* \wedge d(y,v)^* \leq \sigma(u,v)$, а это означает нерастягиваемость отображения $\sigma$.

Итак, $(G, +, 0, \sigma)$ служит алгебраической $B$-системой сигнатуры $(+, 0, \leq)$ при следующей интерпретации символа $\leq$: если $x, y \in G$, то $|x \leq y|^G := \sigma(x,y)$. Тогда унарный $B$-предикат $p$ на $G$ будет, очевидно, интерпретацией свойства быть положительным элементом, т. е. $|0 \leq x|^G = p(x)$. Тот факт, что $G$ является $B$-моделью для аксиом линейно упорядоченной группы, есть просто иная трактовка свойств 4.4.5 (1–5). Проверим, например, согласованность порядка $\sigma$ с групповой структурой и линейную упорядоченность.

Если $\varphi$ — замкнутая формула из 4.4.1 (3), то, расписывая булевы оценки истинности для кванторов в соответствии с 4.1.8, получим

$$|\varphi|^G = \bigwedge_{x,y,a,b \in G} |x \leq y \to a+x+b \leq a+y+b|^G.$$

Далее, учитывая, что $\sigma$ служит интерпретацией символа $\leq$, напишем:

$$|x \leq y \to a+x+b \leq a+y+b|^G = \sigma(x,y) \Rightarrow \sigma(a+x+b,\, a+y+b).$$

Однако согласно 4.4.5 (4) выполняется

$$\sigma(a+x+b,\, a+y+b) = p(a+y+b-(a+x+b)) = \\ = p(a+(y-x)-a) = p(y-x) = \sigma(x,y).$$

Значит, $\mathbb{1} = \sigma(x,y) \Rightarrow \sigma(a+x+b,\, a+y+b)$, поэтому $|\varphi|^G = \mathbb{1}$.

Пусть теперь $\varphi$ — аксиома линейной упорядоченности 4.4.1 (4). Вновь пользуясь правилами 4.1.8, напишем:

$$|\varphi|^G = \bigwedge_{x,y\in G} |x \le y \vee y \le x|^G = \bigwedge_{x,y\in G} \sigma(x,y) \vee \sigma(y,x).$$

Заметим, далее, что в силу 4.4.5 (5) выполняется

$$\sigma(x,y) \vee \sigma(y,x) = p(y-x) \vee p(x-y) = \mathbb{1},$$

стало быть, $|\varphi|^G = \mathbb{1}$. $\triangleright$

**4.4.7.** Обратимся теперь к случаю решеточно упорядоченных колец. Алгебраическая система $(A, +, \cdot, 0, \le)$ называется *упорядоченным кольцом*, если справедливы утверждения:

**(1)** $(K, +, 0, \le)$ — коммутативная упорядоченная группа;

**(2)** $(K, +, \cdot, 0)$ — кольцо (не обязательно коммутативное или ассоциативное);

**(3)** умножение в кольце $K$ согласовано с порядком так, что из $0 \le x,\ y \in K$ следует $0 \le xy$, т. е. $K$ является моделью для формулы

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(x \ge 0 \wedge y \ge 0 \to x \cdot y \ge 0).$$

Таким образом упорядоченное кольцо представляет собой кольцо, аддитивная группа которого упорядочена и, кроме того, кольцевые гомотетии, соответствующие положительным элементам, являются положительными эндоморфизмами указанной упорядоченной группы. Часто мы будем приписывать упорядоченному кольцу свойства соответствующей упорядоченной группы. Так, например, понятия решеточно или линейно упорядоченного кольца, положительного конуса и т. п. относятся к упорядоченной группе кольца и не нуждаются в пояснениях. Порядок на $K$ называется *кольцевым*, если он удовлетворяет всем условиям из (1) и (3).

Упорядоченное кольцо $K$ называют *коммутативным*, если помимо (1)–(3) выполняется также аксиома

**(4)** $(\forall\, x)(\forall\, y)\ (xy = yx)$.

Подмножество $P$ кольца $K$ является положительным конусом некоторого кольцевого порядка в том и только в том случае, если

$$P \cap (-P) = \{0\}; \quad P + P \subset P; \quad P \cdot P \subset P.$$

В решеточно упорядоченном кольце $K$ помимо указанных в 4.4.2 соотношений выполняется также: $(xy)^+ \le x^+y^+ + x^-y^-$; $(xy)^- \le x^+y^- + x^-y^+$; $|xy| \le |x| \cdot |y|$.

**4.4.8.** Всякое решеточно упорядоченное кольцо $K$ можно превратить в упорядоченную $B$-группу, но при этом $K$ не будет, вообще говоря, $B$-кольцом. Дело в том, что кольцевое умножение может не быть нерастягивающей операцией относительно соответствующей $B$-метрики. Чтобы исключить это нежелательное явление, необходима более тесная взаимосвязь умножения и порядка. Решеточно упорядоченное кольцо $K$ называется *$f$-кольцом*, если оно удовлетворяет следующему условию: если $x$, $y \in K$ и $x \wedge y = 0$, то $(ax) \wedge y = 0$ и $(xa) \wedge y = 0$ для любого $0 \le a \in K$. Отметим, что во всяком $f$-кольце выполняется: $|x| \wedge |y| = 0 \to xy = 0$. Если в $f$-кольце нет ненулевых нильпотентных элементов, то верно и обратное утверждение или, как еще говорят, $f$-кольцо является *точным*. В частности, $f$-кольцо без делителей нуля является линейно упорядоченным, а линейно упорядоченное кольцо без ненулевых нильпотентных элементов не содержит делителей нуля. Из прочих свойств $f$-кольца отметим следующие:

$$(x \vee y)z = (xz) \vee (yz); \quad z(x \vee y) = (zx) \vee (zy);$$
$$(x \wedge y)z = (xz) \wedge (yz); \quad z(x \wedge y) = (zx) \wedge (zy);$$
$$|xy| = |x| \cdot |y|.$$

*Для любого решеточно упорядоченного кольца $K$ равносильны следующие утверждения*:

**(1)** *$K$ является $f$-кольцом*;

**(2)** $\{xy\}^{\perp\perp} \le \{x\}^{\perp\perp} \wedge \{y\}^{\perp\perp}$;

**(3)** $d(xy, uv) \le d(x, u) \vee d(y, v)$.

$\triangleleft$ Допустим, что $K$ есть $f$-кольцо. Если $|x| \wedge |u| = 0$ или $|y| \wedge |u| = 0$, то $|xy| \wedge |u| = (|x| \cdot |y|) \wedge |u| = 0$. Значит, из $u \in \{x\}^{\perp}$ или $u \in \{y\}^{\perp}$ следует $u \in \{x \cdot y\}^{\perp}$, т. е. $\{x\}^{\perp} \cup \{y\}^{\perp} \subset \{xy\}^{\perp}$. Отсюда $\{xy\}^{\perp\perp} \leq (\{x\}^{\perp} \cup \{y\}^{\perp})^{\perp} = \{x\}^{\perp\perp} \wedge \{y\}^{\perp\perp}$. Пусть теперь выполнено (2). Заметим, что $|xy - uv| = |x(y-v) + (x-u)v| \leq |x| \cdot |y-v| + |x-u| \cdot |v|$, поэтому

$$\{xy - uv\}^{\perp\perp} \leq \{y - v\}^{\perp\perp} \vee \{x - u\}^{\perp\perp}.$$

Это неравенство равносильно (3) в силу определения $B$-метрики $d$ из 4.4.5. Наконец, предположим, что отображение $(x, y) \mapsto xy$ нерастягивающее. Положим в (3) $u = 0$, $v = y := a$ и перепишем его в виде $\{x \cdot a\}^{\perp\perp} \subset \{x\}^{\perp\perp} \vee \{0\}^{\perp\perp} = \{x\}^{\perp\perp}$ или $\{xa\}^{\perp} \supset \{x\}^{\perp}$. Если теперь $x \wedge y = 0$ для некоторого $y \in K$, то $y \in \{xa\}^{\perp}$ и при $a \geq 0$ выполняется $(xa) \wedge y = 0$. Аналогично устанавливается, что $(ax) \wedge y = 0$ и тем самым $K$ есть $f$-кольцо. $\triangleright$

**4.4.9. *Теорема.*** *Всякое (ассоциативное, коммутативное) $f$-кольцо $K$ вместе с $B$-предикатом $\sigma$ и соответствующей $B$-метрикой $d$ представляет собой алгебраическую $B$-систему, которая является $B$-моделью для аксиом (ассоциативного, коммутативного) линейно упорядоченного кольца. При этом элемент $0 \neq e \in K$ является кольцевой единицей указанного $B$-кольца в том и только в том случае, если $e$ — порядковая и кольцевая единица кольца $K$.*

$\triangleleft$ Как установлено в 4.4.6, $K$ является линейно упорядоченной $B$-группой с указанными $\sigma$ и $d$. Добавим к этой $B$-группе нерастягивающее отображение $(x, y) \mapsto xy$ и докажем, что полученная алгебраическая $B$-система есть $f$-кольцо. Ассоциативность, коммутативность и дистрибутивность в $B$-системе $K$ тривиально следуют из соответствующих свойств кольца $K$. Проверим аксиому согласованности 4.4.7 (3). Для этого заметим, что благодаря 4.4.7 и 4.4.8 (2) выполнено

$$\{(xy)^{-}\}^{\perp} \geq \{x^{+}y^{-}\}^{\perp} \wedge \{x^{-}y^{+}\}^{\perp} \geq \{x^{-}\}^{\perp} \wedge \{y^{-}\}^{\perp}.$$

По определению $p$ заключаем, что $p(x) \wedge p(y) \leq p(xy)$. Теперь оста-

ется вычислить булевы оценки истинности по правилам 4.1.8:

$$
\begin{gathered}
|(\forall\, x)(\forall\, y)(x \geq 0 \wedge y \geq 0 \rightarrow xy \geq 0)|^K = \\
= \bigwedge_{x,y \in K} |x \geq 0|^K \wedge |y \geq 0|^K \Rightarrow |xy \geq 0|^K = \\
= \bigwedge_{x,y \in K} p(x) \wedge p(y) \Rightarrow p(x \cdot y) = \mathbb{1}.
\end{gathered}
$$

Заметим далее, что для $e \in K$ равенство $\mathbb{1} = |\theta < e|^K = |e \geq 0 \wedge e \neq 0|^K$ означает, что $p(e) \wedge d(e, 0) = \mathbb{1}$, т. е. $e \geq 0$ и $e$ является порядковой единицей. С другой стороны,

$$
|(\forall\, x)(xe = ex = x)|^K = \bigwedge_{x \in K} d(x, ex)^* \wedge d(x, xe)^*,
$$

поэтому $e$ будет единицей $B$-кольца тогда и только тогда, когда $e$ — порядковая единица в $K$ и для каждого $x \in K$ выполняется $d(xe, x) = d(ex, x) = 0$. Последнее означает: $x = ex = xe$, что и требовалось. $\triangleright$

**4.4.10. *Теорема.*** *Пусть $\mathscr{G}$ — упорядоченная группа в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ и $G := \mathscr{G}{\downarrow}$. Тогда $G$ — упорядоченная группа, расширенная относительно булевой алгебры проекторов $\mathscr{B}$ и существует изоморфизм $\jmath$ из $B$ на $\mathscr{B}$ такой, что*

$$
b \leq [\![ 0 \leq x ]\!] \leftrightarrow 0 \leq \jmath(b)x \quad (x \in G,\ b \in B).
$$

*При этом имеют место следующие эквивалентности:*

**(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$\mathscr{G}$ направлена (целозамкнута, архимедова)» $\leftrightarrow$ «$G$ направлена (целозамкнута, архимедова)»;*

**(2)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$\mathscr{G}$ решеточно упорядочена (порядково полна)» $\leftrightarrow$ «$G$ решеточно упорядочена (порядково полна)»;*

**(3)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$\mathscr{G}$ — упорядоченное кольцо» $\leftrightarrow$ «$G$ — расширенное упорядоченное кольцо с булевой алгеброй проекторов $\mathscr{B}$»;*

**(4)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$\mathscr{G}$ — линейно упорядоченное тело» $\leftrightarrow$ «$G$ — расширенное $f$-кольцо без ненулевых нильпотентных элементов, $\mathscr{B}$ — алгебра проекторов на всевозможные компоненты $G$ и всякий регулярный элемент в $G$ обратим».*

$\lhd$ То, что $G$ — расширенная группа с полной булевой алгеброй проекторов $\mathscr{B}$, было установлено в 4.2.7. Пусть $\mathscr{G}^+$ — положительный конус группы $\mathscr{G}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&[\![\mathscr{G}^+ + \mathscr{G}^+ \subset \mathscr{G}^+]\!] = [\![\mathscr{G}^+ \cap -\mathscr{G}^+ = \{0\}]\!] = \\
&= [\![(\forall\, x \in \mathscr{G})(x + \mathscr{G}^+ = \mathscr{G}^+ + x)]\!] = \mathbb{1}.
\end{aligned}
$$

Положим $G^+ := \mathscr{G}^+\!\downarrow$ и заметим, что $G^+ + G^+ \subset G^+$, $G^+ \cap -G^+ = \{0\}$ по правилам спусков пересечения и образа. Далее, для любого $x \in G$ будет $[\![x + \mathscr{G}^+ = \mathscr{G}^+ + x]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $x + \mathscr{G}^+ = \mathscr{G}^+ + x$, но тогда

$$
(x + G^+) = (x + \mathscr{G}^+)\!\downarrow = (\mathscr{G}^+ + x)\!\downarrow = G^+ + x.
$$

Итак, $G$ — упорядоченная группа с положительным конусом $G^+$. Существование изоморфизма $\jmath : B \to \mathscr{B}$ также доказано в 4.2.7. При этом равносильны соотношения $b \le [\![x = y]\!]$ и $\jmath(b)x = \jmath(b)y$. Возьмем $x \in G$ и заметим, что $[\![0 \le x \leftrightarrow (\exists\, y \in \mathscr{G}^+)(x = y)]\!] = \mathbb{1}$. Это означает, что $b \le [\![0 \le x]\!]$ в том и только в том случае, когда $b \le [\![(\exists\, y \in \mathscr{G}^+)(x = y)]\!]$. Последнее равносильно существованию $y \in \mathscr{G}^+\!\downarrow =: G^+$, такого что $b \le [\![x = y]\!]$ или $\jmath(b)x = \jmath(b)y \ge 0$. Докажем теперь эквивалентности (1)–(4).

(1) Направленность $\mathscr{G}$ означает, что $[\![\mathscr{G}^+ - \mathscr{G}^+ = \mathscr{G}]\!] = \mathbb{1}$. Но это равносильно направленности $G$, ибо $(\mathscr{G}^+ - \mathscr{G}^+)\!\downarrow = \mathscr{G}^+\!\downarrow - \mathscr{G}^+\!\downarrow = G^+ - G^+$. Целозамкнутость $\mathscr{G}$ — это не что иное, как

$$
\bigwedge\{[\![x \le 0]\!] : [\![(\exists\, y \in \mathscr{G})(\forall\, n \in \omega^\wedge)(nx \le y)]\!] = \mathbb{1}\} = \mathbb{1}.
$$

Поэтому $\mathscr{G}$ целозамкнута в том и только в том случае, если для каждого $x \in G$ верна импликация

$$
(\exists\, y \in G)([\![(\forall\, n \in \omega^\wedge)(nx \le y)]\!] = \mathbb{1} \to [\![x \le 0]\!] = \mathbb{1}),
$$

или

$$
((\exists\, y \in G)(\forall\, n \in \omega)[\![n^\wedge x \le y]\!] = \mathbb{1}) \to [\![x \le 0]\!] = \mathbb{1}.
$$

Последняя строчка представляет собой эквивалентную запись целозамкнутости группы $G$. Аналогично доказывается утверждение об архимедовости $G$.

(2) Пусть $\mathscr{G}$ решеточно упорядочена. Покажем, что на алгебраической системе $G$ истинна замкнутая формула $(\forall\, x)(\forall\, y)(\exists\, z)$ $(z = \sup\{x, y\})$, т. е. что в $G$ для любых двух элементов существует точная верхняя граница. Если $x$ и $y \in G$, то $[\![\{x, y\} \subset \mathscr{G}]\!] = \mathbb{1}$. Поэтому $[\![(\exists\, u \in \mathscr{G})(u = \sup\{x, y\})]\!] = \mathbb{1}$. В силу принципа максимума существует $z \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![z \in \mathscr{G}]\!] \wedge [\![z = \sup\{x, y\}]\!] = \mathbb{1}.$$

Это означает, с одной стороны, что $z \in G$, а с другой —

$$|z = \sup\{x, y\}|^{\mathscr{G}\downarrow} = \mathbb{1}.$$

По определению отношения порядка отсюда получаем $z = x \vee y$. Те же рассуждения приводят к существованию точной нижней границы $x \wedge y$.

Предположим теперь, что $[\![\,\mathscr{G}$ — порядково полная группа$\,]\!] = \mathbb{1}$. Покажем, что тогда и $G$ будет порядково полной. Сначала напомним следующее эквивалентное определение точной верхней границы $\sup(A)$ множества $A$ в произвольном упорядоченном множестве:

$$\sup(A) = \pi_{\leq}(A) \cap \pi_{\leq}^{-1}(\pi_{\leq}(A)).$$

Возьмем теперь произвольное ограниченное сверху подмножество $A$ системы $\mathscr{G}\downarrow$. Это означает, что $\pi_{\leq}(A) \neq \varnothing$. Но тогда по правилам спуска и подъема поляр $[\![\pi_{\leq}(A\uparrow) \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}$, или, что то же самое, $[\![A\uparrow$ — ограниченное сверху подмножество в $\mathscr{G}]\!] = \mathbb{1}$. Отсюда по принципу максимума выводим, что для некоторого $a \in \mathscr{G}\downarrow$ будет

$$[\![a = \sup(A\uparrow) = \pi_{\leq}\ (A\uparrow) \cap \pi_{\leq}^{-1}(\pi_{\leq}\ (A\uparrow))]\!] = \mathbb{1}.$$

Привлекая вновь нужные правила спуска и подъема, получим, что $a = \sup(\mathrm{mix}(A))$. Наконец, учитывая полную экстенсиональность отношения $\leq$, заключаем $\sup(\mathrm{mix}(A)) = \sup(A)$. Итак, $A$ имеет точную верхнюю границу. Таким образом, $G$ — порядково полная упорядоченная группа.

(3) Следует из 4.2.8 и из установленных свойств $G$.

(4) Пусть $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{G}$ — линейно упорядоченное тело». Благодаря (3) и 4.2.8, можно заключить, что $G$ — упорядоченное расширенное

ассоциативное кольцо с булевой алгеброй положительных проекторов $\mathscr{B}$, не имеющее ненулевых нильпотентных элементов. Так как $\mathscr{G}$ является моделью для $(\forall\, x)(\forall\, y)(x \wedge y = 0 \to x = 0 \vee y = 0)$, то для любых $x, y \in G$ будет $[\![x \wedge y = 0]\!] \leq (x = 0) \vee (y = 0)$. Если $x \wedge y = 0$, то $b^* \leq [\![x = 0]\!]$ и $b \leq [\![y = 0]\!]$, или $\jmath(b)x = x$ и $\jmath(b)y = 0$ для подходящего $b \in B$. Отсюда уже без труда выводится, что $\mathscr{B}$ — булева алгебра проекторов на компоненты. Но тогда ортогональная полнота $G$ равносильна расширенности $G$ относительно $\mathscr{B}$. Так как проекторы $\jmath(b)$ $(b \in B)$ мультипликативны (см. 4.2.8), то ядро всякого проектора есть кольцевой идеал. Это немедленно приводит к справедливости в $G$ характеристического свойства $f$-кольца (см. 4.4.8 (2)).

Наоборот, если $G$ удовлетворяет указанным в (4) условиям, то ввиду (2) $[\![\,\mathscr{G}$ — решеточно упорядоченное кольцо$\,]\!] = \mathbb{1}$. Как нетрудно видеть, $\mathscr{G}$ будет и $f$-кольцом без ненулевых нильпотентных элементов внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Но тогда для $x, y \in G$ из $[\![xy = 1]\!] = \mathbb{1}$ следует $[\![|x| \wedge |y| = 0]\!] = \mathbb{1}$, или $|x| \wedge |y| = 0$, следовательно, найдется такой элемент $b \in B$, что $\jmath(b)x = 0$ и $\jmath(b^*)y = 0$. Отсюда $b \leq [\![x = 0]\!]$ и $b^* \leq [\![y = 0]\!]$, значит, $[\![x = 0 \vee y = 0]\!] \geq b \vee b^* = \mathbb{1}$. Тем самым установлено, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{G}$ не имеет делителей нуля». Но $f$-кольцо без делителей нуля линейно упорядочено, так что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{G}$ линейно упорядочено». Наконец, в силу 4.2.8 ненулевые элементы $\mathscr{G}$ обратимы и, стало быть, $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{G}$ — линейно упорядоченное тело». $\triangleright$

**4.4.11.** Таким образом, решеточно упорядоченные группы и $f$-кольца определенным способом превращаются в линейно упорядоченные $B$-группы и $B$-кольца. Это означает в силу 4.3, что они имеют булевозначные реализации, являющиеся линейно упорядоченными группами и кольцами соответственно. Следовательно, всякую информацию о строении линейно упорядоченных групп и колец можно использовать для изучения более общих классов групп и колец. Продемонстрируем это положение на примере следующих известных фактов (см. [5, 106]).

**(1)** ***Теорема Гёльдера.*** *Любая архимедова линейно упорядоченная группа изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел.*

**(2)** *Всякая архимедова направленная группа коммутативна.*

**(3)** ***Теорема.*** *Архимедово линейно упорядоченное кольцо либо*

*является нулевым (т. е. произведение любых двух элементов равно нулю), либо порядково и алгебраически изоморфно однозначно определенному подкольцу поля действительных чисел.*

**4.4.12. *Теорема.*** *Пусть $G$ — архимедова решеточно упорядоченная группа, база которой изоморфна булевой алгебре $B$. Тогда в булевозначной модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует подгруппа $\mathscr{G}$ аддитивной группы поля действительных чисел, такая, что решеточно упорядоченная группа $G' := \mathscr{G}\!\downarrow$ является максимальным расширением группы $G$.*

$\triangleleft$ В соответствии с 4.4.6 группу $G$ можно превратить в линейно упорядоченную $B$-группу. Пусть $\mathscr{G}$ — булевозначная реализация этой алгебраической $B$-системы. Тогда по 4.3.3 $\mathscr{G}$ — линейно упорядоченная группа внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. По теореме 4.4.10 $G' := \mathscr{G}\!\downarrow$ — решеточно упорядоченная группа, причем известно, что $G' = \mathrm{mix}(\imath(G))$, где $\imath$ — канонический изоморфизм из $G$ в $G'$. Если $b \in B$, а $L_b \in \mathscr{B}(G)$ и $\pi_b \in \mathfrak{Pr}(G')$ — соответствующие компонента и проектор, то условия $x \in L_b$ и $(I - \pi_b)(\imath(x)) = 0$ равносильны для любого $x \in G$. Действительно, по определению $B$-метрики на $G$ (см. 4.4.5) соотношение $x \in L_b$ означает $d(x, 0) \leq b$, а из теоремы 4.4.10 видно, что $\pi_b \imath(x) = \imath(x)$ выполняется лишь в том случае, если $b^* \leq [\![\imath(x) = 0]\!]$. Но при этом известно, что

$$[\![\imath(x) = 0]\!] = [\![\imath(x) \neq 0]\!]^* = d(x, 0)^*.$$

Итак, установлено, что соответствие $L' \mapsto \imath^{-1}(L')$ $(L' \in \mathscr{B}(G'))$ является изоморфизмом баз $\mathscr{B}(G')$ и $\mathscr{B}(G)$. Возьмем теперь $0 < x \in G'$. Если $x = \mathrm{mix}(\pi_\xi \imath(x_\xi))$, то $0 < \pi_\xi \circ \imath(x_\xi) \leq \imath(x_\xi)$ для некоторого $\xi$. В силу указанного изоморфизма баз существует $0 < z \in G$, для которого $z \in \{\pi_\xi \circ \imath(x_\xi)\}^{\perp\perp}$. Теперь для $x_0 := x_\xi \wedge z$ имеем

$$0 < \imath(x_0) \leq \imath(z) \wedge \pi_\xi \circ \imath(x_\xi) \leq \pi_\xi \circ \imath(x_\xi) \leq x.$$

Тем самым $\imath(G)$ минорантно в $G'$. Допустим теперь, что для некоторых $x, y \in G'$ выполняется $n|x| \leq y$ $(n \in \omega)$. Пусть $y = \mathrm{mix}(\pi_\xi \imath(y_\xi))$ и $x = \mathrm{mix}(\pi_\xi \imath(x_\xi))$ для некоторых семейств $(x_\xi)$ и $(y_\xi)$ в $G$ и разбиения единицы $(\pi_\xi)$ в $\mathfrak{Pr}(G')$. Положим $\Xi_0 := \{\xi \in \Xi : \pi_\xi \circ \imath(|x_\xi|) = 0\}$. Ввиду минорантности $\imath(G)$ для каждого $\xi \in \Xi \backslash \Xi_0$ существует $0 < u_\xi \in G$,

для которого $\imath(u_\xi) \le \pi_\xi(\imath|x_\xi|)$. Далее, для тех же $\xi$ и для всех $n \in \omega$ будет

$$\imath(nu_\xi) \le \pi_\xi \circ \imath(n|x_\xi|) = \pi_\xi(n|x|) \le \pi_\xi y = \pi_\xi \circ \imath(y_\xi) \le \imath(y_\xi),$$

или $nu_\xi \le y_\xi$. Благодаря архимедовости $G$, получаем $u_\xi = 0$. Это означает, что $\Xi_0 = \Xi$, а потому $x = 0$. Следовательно, группа $G'$ архимедова, а по 4.4.10 $[\![\mathscr{G}$ — архимедова$]\!] = \mathbb{1}$. По теореме Гёльдера 4.4.11 (1) $\mathscr{G}$ изоморфна аддитивной подгруппе группы действительных чисел $\mathscr{R}$. По теореме 4.3.4 можно считать, что $\mathscr{G}$ есть линейно упорядоченная подгруппа в $\mathscr{R}$. $\triangleright$

**4.4.13. *Теорема.*** *Пусть $K$ — архимедово $f$-кольцо. Тогда в $K$ существуют две взаимно дополнительные компоненты $K_0$ и $K_1$, такие что если базы $\mathscr{B}(K_0)$ и $\mathscr{B}(K_1)$ изоморфны булевым алгебрам $B_0$ и $B_1$ соответственно, то имеют место утверждения:*

**(1)** *в булевозначной модели $\mathbb{V}^{(B_0)}$ существует подгруппа $\mathscr{K}_0$ группы действительных чисел такая, что решеточно упорядоченная группа $K_0' := \mathscr{K}_0{\downarrow}$ с нулевым умножением есть максимальное расширение $f$-кольца $K_0$;*

**(2)** *в булевозначной модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует подкольцо $\mathscr{K}_1$ кольца действительных чисел такое, что $f$-кольцо $K_1' := \mathscr{K}_1'{\downarrow}$ является максимальным расширением $K$.*

*При этом $f$-кольцо $K_0' \oplus K_1'$ является максимальным расширением $f$-кольца $K$.*

$\triangleleft$ Мы уже видели в 4.4.12, что реализация аддитивной группы $f$-кольца $K$ в модели $\mathbb{V}^{(B)}$, $B = \mathscr{B}(K)$, будет подгруппой аддитивной группы действительных чисел. Однако согласно 4.4.9 $K$ является $B$-кольцом, а по теореме 4.3.3 $[\![\mathscr{K}$ — кольцо$]\!] = \mathbb{1}$. Положим $b_0 := [\![\mathscr{K}$ — нулевое кольцо$]\!]$ и $b_1 := [\![\mathscr{K}$ — подкольцо кольца действительных чисел$]\!]$. Благодаря принципу переноса и теореме 4.4.11 (3), $b_0 \vee b_1 = \mathbb{1}$. С другой стороны, $b_0 \wedge b_1 = \mathbb{0}$, ибо кольцо не может быть одновременно нулевым и подкольцом кольца действительных чисел. Пусть $K_0$ и $K_1$ — компоненты в $K$, соответствующие элементам $b_0$ и $b_1$, т. е. $K_0$ и $K_1$ определены условиями

$$x \in K_1 \leftrightarrow d(x, 0) \le b_l \quad (l = 0, 1),$$

где $d$ — это $B$-метрика $B$-системы $K$. Положим $B_l := [0, b_l]$ и заметим, что база $\mathscr{B}(K_l)$ изоморфна $B_l$, причем $b_l$ — единица алгебры $B_l$.

Обозначим $\mathscr{K}_l := \pi_l^*(\mathscr{K}) \in \mathbb{V}^{(B_l)}$, где $\pi_l : b \mapsto b \wedge b_l$, $b \in B$. Так как $\pi_l$ — эпиморфизм $B$ на $B_l$, то $\mathbb{V}^{(B_0)} \models$ «$\pi_0^*(\mathscr{K})$ — подгруппа аддитивной группы действительных чисел» и $\mathbb{V}^{(B_1)} \models$ «$\pi_1^*(\mathscr{K})$ — подкольцо кольца действительных чисел». По теореме 4.4.12 $K' := K{\downarrow}$ есть расширение упорядоченной группы $K$. Поскольку $b_l = [\![\pi_l^*(\mathscr{K}) \simeq \mathscr{K}]\!]$, то $K_l' := \mathscr{K}_l{\downarrow} \simeq \jmath(b_l)(K_l)$, следовательно,

$$K' \simeq K_0' \oplus K_1'.$$

Отсюда видно, что $K'$ есть максимальное расширение $K$. $\triangleright$

### 4.5. Спуски полей

Здесь устанавливается, что рационально полные коммутативные полупервичные кольца биективно соответствуют полям в булевозначных моделях теории множеств. Отсюда, в частности, выводится возможность переноса хорновских свойств полей на такие кольца. Необходимые факты из теории колец изложены в деталях, например, в [82, 104].

**4.5.1.** Всюду в данном параграфе $K$ — коммутативное кольцо с единицей 1, причем $1 \neq 0$. В этом случае полупервичность кольца равносильна отсутствию в нем ненулевых нильпотентных элементов, т. е. таких элементов $0 \neq x \in K$, что $x^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Напомним также, что коммутативное кольцо называют *областью целостности* или *целостным кольцом*, если $0 \neq 1$ и 0 — единственный делитель нуля.

**(1)** *Отношение $\perp$ в полупервичном кольце $K$, определяемое равенством*

$$\perp := \{(x, y) \in K \times K : xy = 0\},$$

*есть отношение дизъюнктности, причем наименьшая $\perp$-компонента совпадает с одноточечным множеством $\{0\}$. Дизъюнктность $\perp$ будет простой в том и только в том случае, когда $K$ — область целостности.*

$\triangleleft$ Отношение $\perp$ симметрично ввиду коммутативности $K$. Для произвольного элемента $x \in \pi_\perp(K)$ будет $x^2 = 0$, поэтому $x = 0$. Следовательно, второе свойство дизъюнктности (см. 4.1.12 (2)) вытекает из полупервичности $K$. Если $z = xy \neq 0$, то для произвольных $u \in \pi_\perp(x)$ и $v \in \pi_\perp(y)$ будет $uz = (ux)y = 0$ и $zv = x(yv) = 0$.

Тем самым

$$z \in \pi_\perp\bigl(\pi_\perp(x) \cup \pi_\perp(y)\bigr) = [x] \cap [y].$$

Иначе говоря, выполнено и третье условие из определения дизъюнктности 4.1.12 (2). Итак, $\perp$ — отношение дизъюнктности в $K$. Привлекая определение 4.1.12 (2), видим, что дизъюнктность $\perp$ проста лишь в том случае, когда из равенства $xy = 0$ вытекает либо $x = 0$, либо $y = 0$. $\triangleright$

Легко видеть, что *аннулятор* $L^\perp$ непустого множества $L \subset K$, определяемый формулой

$$L^\perp := \pi_\perp(L) := \bigl\{k \in K : kL = \{0\}\bigr\},$$

служит идеалом кольца $K$. Идеалы такого вида называют *аннуляторными идеалами.* Можно показать, что множество $J \subset K$ является аннуляторным идеалом в том и только в том случае, если $J = J^{\perp\perp}$, где $J^{\perp\perp} := (J^\perp)^\perp$. Из 4.1.12 (3) вытекает следующее утверждение.

**(2)** *Аннуляторные идеалы любого коммутативного полупервичного кольца $K$ образуют полную булеву алгебру $\mathscr{B}(K)$, причем решеточные операции в $\mathscr{B}(K)$ имеют вид:*

$$L \wedge M := L \cap M, \quad L \vee M := (L \cup M)^{\perp\perp} \quad (L, M \in \mathscr{B}(K)),$$

*а булево дополнение $L^*$ идеала $L \in \mathscr{B}(K)$ совпадает с его аннулятором $L^\perp$.*

**4.5.2.** Пусть $B$ — полная булева алгебра аннуляторных идеалов кольца $K$. Определим в $K$ булево расстояние, положив

$$d(k_1, k_2) := \{k_1 - k_2\}^{\perp\perp} \quad (k_1, k_2 \in K).$$

**(1)** *Коммутативное полупервичное кольцо $K$ с $B$-метрикой $d$ и дизъюнктностью $\perp$ представляет собой $B$-кольцо с дизъюнктностью.*

$\triangleleft$ Убедимся сначала, что выполнены свойства булевой метрики из 3.4.1. Свойства (1) и (2) видны непосредственно из определения $d$. Для проверки свойства (3) из 3.4.1 возьмем $k \in \{k_1 - k_2\}^\perp \cap \{k_2 - k_3\}^\perp$ и заметим, что $k(k_1 - k_2) = 0$ и $k(k_2 - k_3) = 0$, т. е. $k(k_1 - k_3) = 0$ или $k \in \{k_1 - k_3\}^\perp$. Отсюда выводим

$$d(k_1, k_3) = \{k_1 - k_3\}^{\perp\perp} \subset (\{k_1 - k_2\}^\perp \cap \{k_2 - k_3\}^\perp)^\perp =$$
$$= \{k_1 - k_2\}^{\perp\perp} \vee \{k_2 - k_3\}^{\perp\perp} = d(k_1, k_2) \vee d(k_2, k_3).$$

Если $d(k_1, k_2) = \mathbb{0}$, то $\{k_1 - k_2\}^\perp = K$, значит, $(k_1 - k_2)^2 = 0$. Но так как в $K$ нет ненулевых нильпотентных элементов, то $k_1 = k_2$.

Проверим, что кольцевые операции — нерастягивающие отображения. Надо показать, что

$$\{k_1 - k_1'\}^\perp \cap \{k_2 - k_2'\}^\perp \subseteq \{(k_1 + k_2) - (k_1' + k_2')\}^\perp;$$
$$\{k_1 - k_1'\}^\perp \cap \{k_2 - k_2'\}^\perp \subseteq \{k_1 k_2 - k_1' k_2'\}^\perp.$$

Первое включение очевидно. Имеют место очевидные соотношения $k_1k_2 - k_1'k_2' = k_1k_2 - k_1k_2' + k_1k_2' - k_1'k_2' = k_1(k_2 - k_2') + k_2'(k_1 - k_1')$, откуда следует второе включение.

Кольцевые операции очевидным образом сохраняют дизъюнктность, т. е. из $x, y \in a^\perp$ следует, что $xy, x + y \in a^\perp$. Согласованность дизъюнктности с $B$-метрикой $d$ тривиально следует из определений, ибо $d(x, 0) = x^{\perp\perp}$ (см. 4.1.13). $\triangleright$

**(2)** *Для любых* $x, y \in K$ *имеет место равенство* $d(xy, 0) = d(x, 0) \wedge d(y, 0)$.

$\triangleleft$ Нужно установить равенство $\{xy\}^{\perp\perp} = \{x\}^{\perp\perp} \wedge \{y\}^{\perp\perp}$, в котором включение $\subset$ очевидно. Возьмем $u \in \{x\}^{\perp\perp} \wedge \{y\}^{\perp\perp} = (\{x\}^\perp \cup \{y\}^\perp)^\perp$. Это означает, что для любых $a, b \in K$ из $ax = 0$ следует $au = 0$, а из $by = 0$ следует $bu = 0$. Применив эти соображения при $b := v^2x$ и $a := v^2u$, для произвольного $v \in K$ выводим

$$v \perp xy \to (v^2x)y = 0 \to (v^2u)y = 0 \to$$
$$\to v^2u^2 = 0 \to (vu)^2 = 0 \to vu = 0.$$

Итак, для любого $v \in \{xy\}^\perp$ выполнено $v \perp u$, стало быть, $u \in \{xy\}^{\perp\perp}$. $\triangleright$

**4.5.3.** Элемент $e \in K$ называют *идемпотентом*, если $e^2 = e$. Идемпотенты коммутативного кольца $K$ с единицей образуют булеву алгебру $\mathfrak{P}(K)$ (не обязательно полную), в которой булевы операции имеют вид

$$e \wedge d = e \cdot d, \quad e \vee d = e + d - e \cdot d, \quad e^* = 1 - e \quad (e, d \in \mathfrak{P}(K)).$$

Кольцо $K$ называют *регулярным* (в смысле фон Неймана), если каждый главный идеал в нем порождается идемпотентом или,

эквивалентно, если каждый главный идеал в нем выделяется прямым слагаемым. Регулярность кольца $K$ равносильна разрешимости в нем уравнения $a^2x = a$ для любого элемента $a \in K$ (уравнения $aa'a = a$ в некоммутативном случае).

*Если коммутативное полупервичное кольцо $K$ разложимо относительно введенной булевой метрики, то каждый аннуляторный идеал порождается идемпотентом и, в частности, оно регулярно. При этом отображение $\jmath : e \mapsto e{\cdot}K$ осуществляет булев изоморфизм $\mathfrak{P}(K)$ на $\mathscr{B}(K)$.*

$\triangleleft$ Возьмем аннуляторный идеал $b \in \mathscr{B}(K)$. В силу разложимости $B$-кольца $K$ существует элемент $e \in K$, для которого $b \wedge d(1,e) = 0$ и $b^* \wedge d(0,e) = 0$, т. е. $e := \operatorname{mix}\{b1, b^*0\}$. Этот элемент является идемпотентом, так как из 4.5.2 (2) вытекает $d(e^2,e) = d(e,0) \wedge d(1,e) \leq b \wedge b^\perp = 0$. В частности, $e \perp (1-e)$, поэтому аннуляторные идеалы $d(e,0) = \{e\}^{\perp\perp}$ и $d(1,e) = \{1-e\}^{\perp\perp}$ дизъюнктны, следовательно, $d(e,0) = b$ и $d(1,e) = b^\perp$. Теперь, используя равенство $d(ex,x) = d(1,e) \wedge d(x,0)$ (см 4.5.2 (2)), для произвольного $x \in K$ выводим:

$$x \in b \leftrightarrow d(x,0) \leq b \leftrightarrow d(ex,x) = 0 \leftrightarrow ex = x.$$

Таким образом, $b = eK$. Оставшиеся детали очевидны. $\triangleright$

**4.5.4.** Множество $S \subset K$ называют *плотным*, если $S^\perp = \{0\}$, т. е. если для любого $k \in K$ из равенства $k \cdot S = \{0\}$ следует $k = 0$. Кольцо $K$ называют *рационально полным*, если для любого плотного идеала $J \subset K$ и произвольного группового гомоморфизма $h : J \to K$, для которого $h(kx) = kh(x)$ при всех $k \in K$ и $x \in J$, существует элемент $r \in K$ такой, что $h(x) = rx$ для всех $x \in J$.

***Теорема.*** *Рационально полное кольцо является расширенным $B$-кольцом. Если кольцо регулярно, то верно и обратное утверждение: расширенное $B$-кольцо рационально полно.*

$\triangleleft$ Пусть $(b_\xi)$ — разбиение единицы в булевой алгебре аннуляторных идеалов $B$ и $(k_\xi)$ — произвольное семейство в кольце $K$. Пусть $J$ — множество всех сумм вида $\sum_\xi x_\xi$, где $x_\xi \in b_\xi$ и в сумме имеется лишь конечное число ненулевых слагаемых $x_\xi$. Тогда $J$ — плотный идеал. Определим отображение $h : J \to K$ формулой $h(x) := k_\xi x\,(x \in b_\xi)$. Ясно, что $h$ удовлетворяет нужным условиям из определения рациональной полноты, поэтому при некотором

$r \in K$ имеет место представление $h(x) = rx$ для всех $x \in J$. Если $x \in b_\xi$, то $h(x) = rx = k_\xi x$ или $x(r - k_\xi) = 0$. Тем самым $b_\xi \subset \{r - k_\xi\}^\perp = d(r, k_\xi)$, значит, будет $b_\xi \wedge d(r, k_\xi) = 0$ и $r = \operatorname{mix}(b_\xi k_\xi)$.

Предположим теперь, что кольцо $K$ регулярно. Возьмем идеал $J \subset K$ и $K$-гомоморфизм $h : J \to K$. Используя лемму Куратовского — Цорна, можно в множестве $J \cap \mathfrak{P}(K)$ выбрать максимальное множество попарно дизъюнктных элементов $(e_\xi)$. Виду того, что рассматриваемое $B$-кольцо расширенно, существует элемент $k \in K$, для которого $e_\xi k = e_\xi h(e_\xi) = h(e_\xi)$. Заметим, что $e_\xi kx = xh(e_\xi) = e_\xi h(x)$, т. е. $e_\xi(h(x) - kx) = 0$ для всех $\xi$ и $x \in J$. Если теперь $h(x) \neq kx$, то для некоторого ненулевого идемпотента $e_0 \in \mathfrak{P}(K)$ будет $e_0(h(x) - kx) \neq 0$. Но тогда должно быть $e_0 \perp e_\xi$ для всех $\xi$, что противоречит максимальности семейства $(e_\xi)$. $\rhd$

**4.5.5.** Отметим три следствия из установленного факта.

**(1)** *Рационально полное полупервичное кольцо регулярно.*

**(2)** *Аннуляторный идеал рационально полного коммутативного полупервичного кольца является рационально полным кольцом.*

Говорят, что кольцо $K$ *самоинъективно*, если оно инъективно как $K$-модуль. Напомним, что $K$-модуль $M$ называют *инъективным*, если для любых данных $K$-модуля $N$, $K$-подмодуля $N_0$ и $K$-гомоморфизма $h_0 : N_0 \to M$ существует продолжение до $K$-гомоморфизма $h : N \to M$. Критерий Бэра утверждает, что $K$-модуль $M$ инъективен в том и только в том случае, если для любых идеала $J \subset K$ и $K$-гомоморфизма $h : J \to M$ существует элемент $m \in M$ такой, что $h(x) = mx$ для всех $x \in J$ (см., например, [82] или [104]).

**(3)** *Кольцо рационально полно тогда и только тогда, если оно самоинъективно.*

$\lhd$ $\to$ Рассмотрим гомоморфизм $h : J \to K$, где $J$ — идеал рационально полного кольца $K$. Согласно 4.5.4 $K_0 := J^{\perp\perp} = eK$ для некоторого идемпотента $e \in K$. Так как кольцо $K_0$ рационально полно, а отображение $eh : J \to K_0$ является гомоморфизмом, то существует элемент $k \in K$ такой, что $eh(x) = kx$ при всех $x \in J$. Остается заметить, что $eh(x) = h(ex) = h(x)$ $(x \in J)$.

$\leftarrow$ Это следует из критерия Бэра. $\rhd$

**4.5.6. *Теорема.*** *Пусть элемент* $\mathscr{K} \in \mathbb{V}^{(B)}$ *таков, что* $[\![\mathscr{K}$ *— поле*$]\!] = \mathbb{1}$. *Тогда* $\mathscr{K}{\downarrow}$ *— рационально полное коммутативное полу-*

*первичное кольцо и существует изоморфизм $\jmath$ алгебры $B$ на булеву алгебру аннуляторных идеалов $\mathscr{B}(\mathscr{K}{\downarrow})$ такой, что*

$$b \le [\![x = 0]\!] \leftrightarrow x \in \jmath(b^*) \quad (x \in K,\ b \in B).$$

$\lhd$ Вытекает из 4.2.8, 4.5.3 и 4.5.4. Нужно только заметить, что в силу 4.2.8 (4) проекторы $\jmath(b)$ соответствуют в точности аннуляторным идеалам $\jmath(b)$. $\rhd$

**4.5.7. (1) *Теорема.*** *Пусть $K$ — полупервичное коммутативно рационально полное кольцо и $B = \mathscr{B}(\mathscr{K}{\downarrow})$ — полная булева алгебра аннуляторных идеалов. Тогда в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует поле $\mathscr{K} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такое, что кольца $K$ и $\mathscr{K}{\downarrow}$ изоморфны.*

$\lhd$ Воспользуемся теоремой 4.3.3. Кольцо $K$ является расширенной алгебраической $B$-системой в силу 4.5.4. Следовательно, изоморфизм $\imath$ из 4.3.3 (3) будет биекцией. Так как $K$ — коммутативное $B$-кольцо, то из 4.3.3 (4) вытекает, что $[\![\mathscr{K}$ — коммутативное кольцо$]\!] = \mathbb{1}$. Остается доказать, что в кольце $\mathscr{K}$ обратим любой ненулевой элемент, т. е. $[\![\mathscr{K} \models \varphi]\!] = \mathbb{1}$, где $\varphi$ — $(\forall y)(\exists x)(y \ne 0 \to xy = 1)$. В силу 4.3.3 (4) достаточно установить, что $|\varphi|^K = \mathbb{1}$, т. е. $K \models_B \varphi$.

Так как кольцо $K$ регулярно (см. 4.5.3 и 4.5.4), то для произвольного $y \in K$ найдется элемент $x \in K$ такой, что $y^2x = y$. Имеют место очевидные импликации

$$\begin{gathered} y^2x = y \to y(yx-1) = 0 \to y \in \{yx-1\}^{\perp} \to \\ \to \{y\} \subset \{yx-1\}^{\perp} \to \{y\}^{\perp\perp} \subset \{yx-1\}^{\perp\perp\perp} \to \\ \to \{y\}^{\perp\perp} \subset \{yx-1\}^{\perp}. \end{gathered}$$

Учитывая определение $d$, выводим $d(y,0) \le d(yx,1)^{\perp}$. Привлекая определение $B$-значной интерпретации атомных формул из 4.1.8, получаем, что для любого $y \in K$ существует $X \in K$ такой, что $|y \ne 0 \to yx = 1|^K = \mathbb{1}$. Вновь воспользовавшись определениями 4.1.8, приходим к требуемому $|\varphi|^K = \mathbb{1}$. $\rhd$

**(2) *Следствие.*** *Хорновские теории рационально полных коммутативных полупервичных колец и полей совпадают.*

**4.5.8.** Приведем теперь построение полного кольца частных, основанное на установленных результатах о булевозначной реализации. Сначала напомним некоторые определения.

Кольцо $\widehat{K}$ называют *классическим кольцом частных* кольца $K$, если существует мономорфизм колец $\lambda : K \to \widehat{K}$ такой, что элемент $\lambda(x)$ обратим в $\widehat{K}$ для каждого регулярного элемента $x \in K$ и имеет место представление

$$\widehat{K} = \{\lambda(x)\lambda(y)^{-1} : x, y \in K,\ y \text{ регулярен в } K\}.$$

Если $K$ — область целостности, то $\widehat{K}$ — поле, которое называют *полем частных кольца* $K$. Классическое кольцо частных мы будем обозначать символом $Q_{\mathrm{cl}}(K) := \widehat{K}$. Заметим, что $Q_{\mathrm{cl}}(K) = S^{-1}h(K)$, если в качестве мультипликативного множества $S$, фигурирующего в 4.2.6, взять множество всех регулярных элементов (т. е. всех неделителей нуля) кольца $K$.

В то же самое время кольцо $K$ является алгебраической $B$-системой и согласно 4.3.5 (2) обладает максимальным расширением $(K', \imath)$, где $\imath : K \to K'$ — кольцевой мономорфизм. Кольцо $Q_B(K) := K'$ принято называть также *ортогональным пополнением* кольца $K$.

Кольцо $Q(K) := Q_{\mathrm{cl}}\big(Q_B(K)\big)$ вместе с мономорфизмом $\varkappa := \lambda \circ \imath$ называют *полным кольцом частных* кольца $K$.

***Теорема.*** *Пусть $K$ — коммутативное полупервичное кольцо и $B$ — булева алгебра его аннуляторных идеалов. Пусть $\mathscr{K}$ — булевозначная реализация кольца $K$ как алгебраической $B$-системы. Тогда $[\![\mathscr{K}$ — целостное кольцо$]\!] = \mathbb{1}$ и при это существуют элементы $\mathscr{F}, \lambda \in \mathbb{V}^{(B)}$ такие, что справедливы утверждения:*

**(1)** *$\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{F}$ — поле частных целостного кольца $\mathscr{K}$, а $\lambda : \mathscr{K} \to \mathscr{F}$ — вложение кольца $\mathscr{K}$ в поле частных»;*

**(2)** *$(\mathscr{F}{\downarrow}, \lambda{\downarrow} \circ \imath)$ — полное кольцо частных кольца $K$, где $\imath : K \to K' := K{\downarrow}$ — каноническое вложение.*

$\triangleleft$ Булевозначная реализация $\mathscr{K} := K^{\sim}$ алгебраической $B$-системы ($B$-кольца) $K$ будет кольцом внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, см. 4.3.1, 4.3.3 и 4.5.2 (1). В соответствии с 4.1.13 $B$-значная дизъюнктность $\Delta$ в кольце $K$ определяется формулой $\Delta(x, y) := \big(d(x, 0) \wedge d(y, 0)\big)^*$, поэтому в силу 4.5.2 (2) будет $\Delta(x, y) := \big(d(xy, 0)\big)^* = [\![xy = 0]\!]$. Отсюда видно, что для булевозначной реализации $\delta$ этой дизъюнктности выполняется $[\![\delta(x, y) \leftrightarrow xy = 0]\!]$. Таким образом, $\delta$ связана с кольцевым умножением в $\mathscr{K}$ так же, как и $\Delta$ с кольцевым умножением в $K'$.

Согласно 4.3.5 (6) дизъюнктность $\delta$ простая, а это означает ввиду 4.5.1 (1), что $[\![ \mathscr{K}$ — целостное кольцо $]\!] = \mathbb{1}$.

Существование элементов $\mathscr{F}, \lambda \in \mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющих условию (1), вытекает из принципа максимума и утверждения о том, что область целостности имеет кольцо частных, которое является полем. Пусть $K' := \mathscr{K}\!\downarrow$ и $\imath : K \to K'$ — канонический мономорфизм, см. 4.3.3. Тогда $K'$ — ортогональное пополнение кольца $K$, т. е. $K' = Q_B(K)$. Кроме того, из 4.2.8 (3) следует, что $\mathscr{F}\!\downarrow = Q_{\mathrm{cl}}(K')$. Окончательно получаем $\mathscr{F}\!\downarrow = Q(K)$. $\triangleright$

**4.5.9.** Из установленной теоремы можно извлечь разнообразные следствия о строении кольца частных. Рассмотрим некоторые из них.

**(1)** *Полное кольцо частных любого коммутативного полупервичного кольца рационально полно и, следовательно, самоинъективно и регулярно.*

$\triangleleft$ Непосредственно следует из 4.5.5 (1, 3), 4.5.6 и 4.5.8. $\triangleright$

**(2)** *Булева алгебра $B := \mathscr{B}(K)$ изоморфна булевой алгебре аннуляторных идеалов каждого из колец $K'$ и $Q(K)$. Изоморфизмы осуществляются отображениями:*

$$g_\imath : L \mapsto \imath^{-1}(L) \ (L \in \mathscr{B}(K')), \quad g_\kappa : L \mapsto \kappa^{-1}(L) \ (L \in \mathscr{B}(Q(K))).$$

$\triangleleft$ Вытекает из 4.2.8 и 4.3.5 (6). $\triangleright$

**(3)** *Полное кольцо частных $Q(K)$ коммутативного полупервичного кольца $K$ является инъективным $K$-модулем.*

$\triangleleft$ В силу критерия Бэра (см. 4.5.5) достаточно показать, что если $J$ — идеал в $K$ и $h : J \to Q(K)$ — $K$-гомоморфизм, то для некоторого $q \in Q(K)$ имеет место представление $h(x) = qx$ $(x \in J)$. Согласно теореме 4.5.8, можно не ограничивая общности считать, что $K \subset K' := \mathscr{K}\!\downarrow \subset Q(K) = \mathscr{F}\!\downarrow$. Заметим, что для $x \in J$ и $k \in K$ из $x \perp k$ следует $h(x) \perp k$. Тем самым $x \in b \to h(x) \in g_\kappa^{-1}(b)$ для каждого $b \in B$, следовательно, $h$ — экстенсиональное отображение. Пусть $\mathscr{J} := J\!\uparrow$ и $\eta := h'\!\uparrow$. Тогда $\mathscr{J}$ — идеал в $\mathscr{K}$, а $\eta : \mathscr{J} \to \mathscr{F}$ — $\mathscr{K}$-гомоморфизм.

Теперь достаточно показать, что для некоторого $q \in \mathscr{F}$ выполняется $\eta(x) = qx$ для всех $x \in \mathscr{J}$. Последнее без труда выводится из следующего очевидного соотношения $a\eta(x) = \eta(ax) = x\eta(a)$, справедливого для всех $a, x \in \mathscr{J}$. В самом деле, если $a \neq 0$, то положим $q := \eta(a)a^{-1} \in \mathscr{F}$. $\triangleright$

Подмодуль $M$ некоторого $K$-модуля $\widehat{M}$ называют *массивным* (или *существенным*), если для любого элемента $0 \neq x \in \widehat{M}$ найдется такой элемент $k \in K$, что $kx \neq 0$ и $kx \in M$. Инъективной оболочкой кольца $K$ называют пару $(\widehat{K}, \tau)$ такую, что $\widehat{M}$ — инъективный $K$-модуль, $\tau : M \to \widehat{M}$ — мономорфизм и $\tau(M)$ — массивный подмодуль в $\widehat{M}$.

**(4)** *Пара $(Q(K), \kappa)$ является инъективной оболочкой кольца $K$, рассматриваемого как $K$-модуль.*

$\lhd$ В силу доказанного в (3) нужно лишь установить, что $\kappa(K)$ есть массивный подмодуль $K$-модуля $Q(K)$. При этом можно считать, что $K \subset Q(K)$. Следовательно, нужно показать, что для любого $0 \neq q \in Q(K)$ существует $k \in K$ со свойствами $kq \neq 0$ и $kq \in K$.

Из определения $Q(K)$ видно, что существуют семейства $(x_\xi) \subset K$ и $(y_\xi) \subset K$ и разбиение единицы $(b_\xi) \subset B$ такие, что $q = xy^{-1}$, $x = \mathrm{mix}(b_\xi x_\xi)$ и $y = \mathrm{mix}(b_\xi y_\xi)$.

Поскольку $q \neq 0$, для некоторого индекса $\xi$ будет $ex_\xi \neq 0$, где $e$ — идемпотент в $K'$, соответствующий идеалу $b := b_\xi$. Верно также, что $ey_\xi \neq 0$, так как $y$ — регулярный элемент.

Пусть $a$ — произвольный ненулевой элемент из идеала $b$, причем $ax_\xi \neq 0$. Положим $k := ay_\xi = aey_\xi$. Тогда $qk = a(ex)(y_\xi y^{-1}) = ax_\xi = aex_\xi \in b \subset K$. $\rhd$

*Дробью* называют гомоморфизм $K$-модулей $J \to K$, где $J$ — плотный идеал в кольце $K$. В множестве дробей вводится эквивалентность: две дроби эквивалентны если они совпадают на пересечении областей определения. Фактор-множество естественным образом наделяется структурой кольца (подробности см. в [82]). Это кольцо обозначим символом $Q'(K)$.

**(5)** *Кольца $Q(K)$ и $Q'(K)$ изоморфны.*

$\lhd$ Вновь будем считать $K$ подкольцом кольца $Q(K)$. Учитывая (4), каждой дроби $h \in Q'(K)$ можно сопоставить элемент $\sigma(h)$, для которого $h(x) = \sigma(h)x$ для всех $x$ из области определения $h$. Легко видеть, что отображение $h \mapsto \sigma(h)$ является мономорфизмом колец, поэтому нужно обосновать сюръективность этого гомоморфизма.

Для произвольного $q \in Q'(K)$ положим $J := \{k \in K : qk \in K\}$. Тогда $J$ — плотный идеал в $K$. Если дробь $h_q$ задается формулой $h_q : x \mapsto qx$, то $\sigma(h_q) = q$. $\rhd$

*Кольцом частных (в смысле Утуми)* кольца $K$ назовем пару $(R, \nu)$, где $R$ — кольцо и $\nu : K \to R$ — кольцевой мономорфизм, если

существует мономорфизм $\tau : R \to Q(K)$ такой, что $\kappa = \tau \circ \nu$.

**(6)** *Пусть $K'$ обозначает максимальное расширение полупервичного кольца $K$ как алгебраической $B$-системы. Тогда $K'$ — кольцо частных кольца $K$.*

$\triangleleft$ Следует из определения кольца частных, если положить $\nu := \imath$ и $\tau := \lambda$. $\triangleright$

**(7)** *Существует единственное с точностью до изоморфизма рационально полное кольцо частных $Q(K)$ коммутативного полупервичного кольца $K$.*

$\triangleleft$ Вытекает, например, из единственности инъективной оболочки с точностью до изоморфизма. $\triangleright$

**4.5.10.** Примечания.

**(1)** Идея о том, что регулярные коммутативные кольца можно изучать, рассматривая свойства подходящих полей, не является новой. Например, коммутативные регулярные кольца исследовались путем представления их в виде подпрямых произведений полей или в виде кольца глобальных сечений расслоения полей над топологическим булевым пространством [219, 226]. Изложенный в этом параграфе подход на основе булевозначных реализаций унифицирует указанную идею, обладая техническими и методологическими преимуществами.

**(2)** Теорема из 4.5.8 показывает, что с точки зрения $\mathbb{V}^{(B)}$ полное кольцо частных коммутативного полупервичного кольца $K$ есть просто поле частных области целостности, полученной при погружении $K$ в $\mathbb{V}^{(B)}$, где в качестве $B$ берется булева алгебра аннуляторных идеалов $K$.

**(3)** Детальное освещение сведений из теории колец, использованных в этом параграфе, можно найти в [82, 104, 147]. Результаты, изложенные в 4.5.6 и 4.5.7, получены Е. И. Гордоном [25]. Несколько позже аналогичные результаты опубликовала Кэй Смит в [231]. Фактически она установила эквивалентность категорий регулярных коммутативных колец и булевозначных полей. Используя этот факт, она показала, что регулярное коммутативное кольцо имеет алгебраическое замыкание.

**(4)** Изложенные методы применимы к более общим классам колец. Так, например, отношение из 4.5.1 будет дизъюнктностью и в случае некоммутативного кольца без ненулевых нильпотентных элементов. Следовательно, множество аннуляторных идеалов такого

кольца $K$ образует полную булеву алгебру $B$, а само кольцо $K$ реализуется в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ как кольцо без делителей нуля.

**(5)** Отправляясь от результатов настоящего параграфа и пользуясь теми же средствами, можно получить аналогичные результаты о модулях, см. [26].

Модуль $M$ над кольцом $K$ называют *отделимым*, если для любого элемента $x \in M$ и любого плотного идеала $J \subset K$ из равенства $J \cdot x = \{0\}$ следует, что $x = 0$.

***Теорема.*** *Пусть $\mathscr{M}$ — линейное пространство над полем $\mathscr{K}$ в модели $\mathbb{V}^{(B)}$, а $\imath : B \to \mathscr{B}(\mathscr{K}{\downarrow})$ — булев изоморфизм из 4.5.3 (2). Тогда $\mathscr{M}{\downarrow}$ — унитальный отделимый инъективный модуль над кольцом $\mathscr{K}$ и выполняется соотношение*

$$b \le [\![x = 0]\!] \leftrightarrow \imath(b)x = 0 \quad (x \in \mathscr{M}{\downarrow},\ b \in B).$$

**(6)** Отделимость $K$-модуля $M$ гарантирует, что $B$-полуметрика $d$, определяемая формулой

$$d(x, y) := \bigwedge \{b \in B :\ b^* x = b^* y\} \quad (x, y \in M),$$

является $B$-метрикой. Таким образом, отделимый $K$-модуль имеет структуру алгебраической $B$-системы, что приводит к следующему результату (см. [26]).

***Теорема.*** *Пусть $K$ — некоторое рационально полное коммутативное кольцо, $B = \mathscr{B}(K)$ и $\mathscr{K}$ — булевозначная реализация кольца $K$. Пусть $M$ — унитальный отделимый инъективный $K$-модуль. Тогда существует элемент $\mathscr{M} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $[\![\mathscr{M}$ — линейное пространство над полем $\mathscr{K}\,]\!]$, причем существуют изоморфизмы алгебраических $B$-систем $\imath_K : K \to \mathscr{K}{\downarrow}$ и $\imath_M : M \to \mathscr{M}{\downarrow}$ такие, что*

$$\imath_M(ax) = \imath_K(a)\imath_M(x) \quad (a \in K,\ x \in M).$$

# Глава 5

# Булевозначный анализ банаховых пространств

Булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$, связанный с фиксированной булевой алгеброй $B$, представляет собой одну из тех арен, где разыгрываются математические события. В самом деле, в силу принципов переноса и максимума в $\mathbb{V}^{(B)}$ имеются числа и группы, интегралы Лебега и Римана, выполняются теоремы Радона — Никодима и осуществимо жорданово разложение матрицы. Простейшая техника спусков и подъемов, с которой мы ознакомились на примере алгебраических систем, показывает, что каждый из математических объектов в $\mathbb{V}^{(B)}$ есть реализация аналогичного классического объекта с дополнительной структурой, определяемой алгеброй $B$. В частности, высказанное соображение относится и к алгебраическим системам, используемым в функциональном анализе.

В настоящей главе излагаются факты, связанные с булевозначной реализацией классических объектов анализа. Основной предмет рассмотрения — банаховы пространства в булевозначном универсуме. Оказывается, что такие пространства неразрывно связаны с концепциями теории упорядоченных векторных пространств и, прежде всего, с $K$-пространствами, введенными в начале тридцатых годов Л. В. Канторовичем. Открытие этой связи является наиболее значительным общематематическим достижением булевозначного анализа.

Основополагающий результат булевозначного анализа в этом направлении — это теорема Гордона (см. 5.2.2), которую можно сфор-

мулировать так: *расширенное $K$-пространство есть интерпретация поля вещественных чисел в подходящей булевозначной модели.* При этом любая теорема о вещественных числах, сформулированная в рамках теории множеств Цермело — Френкеля, имеет свой аналог для соответствующего $K$-пространства. Перевод одних теорем в другие осуществляется с помощью общих операций булевозначного анализа.

Как центральные результаты текущей главы следует выделить также теоремы 5.2.4, 5.4.2 и 5.5.11. Первая из них утверждает, что любую архимедову векторную решетку можно погрузить в булевозначную модель так, что она превращается в векторную подрешетку поля действительных чисел, рассматриваемого как векторная решетка над некоторым плотным подполем. Вторая теорема говорит о том, что решеточно нормированное пространство можно реализовать в подходящей булевозначной модели как плотное линейное подпространство (над некоторым полем, например, полем рациональных чисел) банахова пространства. Наконец, смысл третьей теоремы состоит в следующем: банахово пространство возникает с помощью процедуры ограниченного спуска из булевозначной модели в том и только в том случае, если оно содержит полную булеву алгебру проекторов единичной нормы, обладающую свойством цикличности. Последнее равносильно также и тому, что упомянутое банахово пространство есть порядково полное решеточно нормированное пространство, а исходная скалярная норма является смешанной. Этот факт служит основой для развиваемого в следующей главе подхода к инволютивным банаховым алгебрам.

## 5.1. Векторные решетки

Здесь эскизно изложены основные понятия теории векторных решеток. Более детализированное изложение можно найти в [1, 18, 44, 45, 116, 186, 227, 258].

**5.1.1.** Пусть $\mathbb{F}$ — линейно упорядоченное поле. Рассмотрим алгебраическую систему $E$, сигнатура которой содержит символы $+, 0, \leq, \lambda$, где $\lambda$ пробегает поле $\mathbb{F}$, обозначая всякий раз одноместную операцию на $E$. Последнюю называют *растяжением вектора* в $\lambda$ раз или умножением вектора на скаляр $\lambda$. Допустим, что для $E$ выполнены условия:

**(1)** $(E, +, 0, \leq)$ — коммутативная упорядоченная группа;
**(2)** $E$ — векторное пространство над $\mathbb{F}$;
**(3)** умножение на любой положительный скаляр $\lambda \in \mathbb{F}$ является положительным эндоморфизмом упорядоченной группы $(E, +, 0, \leq)$.

В рассматриваемой ситуации говорят, что задано *упорядоченное векторное пространство* $E$.

Таким образом, упорядоченное векторное пространство можно определить как пару $(E, \leq)$, где $E$ — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а $\leq$ — *векторный порядок* в $E$, т. е. отношение порядка в $E$, согласованное со структурой векторного пространства. Последнее, неформально говоря, означает, что неравенства в $E$ «можно складывать и умножать на положительные элементы поля $\mathbb{F}$». Формально говоря, отношение векторного порядка в $E$ должно быть конусом в $E^2$ и одновременно отношением порядка в $E$. Задание векторного порядка в векторном пространстве $E$ над полем $\mathbb{F}$ равносильно также указанию множества (*положительного конуса*) $E^+ \subset E$ со свойствами: $E^+ + E^+ \subset E^+$; $\lambda E^+ \subset E^+$ $(0 \leq \lambda \in \mathbb{F})$; $E^+ \cap (-E^+) = 0$. При этом порядок $\leq$ и конус $E^+$ связаны соотношением

$$x \leq y \leftrightarrow y - x \in E^+ \quad (x, y \in E).$$

Понятия и результаты теории упорядоченных групп применимы, разумеется, и к упорядоченным векторным пространствам. Ясно, например, что для упорядоченного векторного пространства понятия архимедовости, линейной упорядоченности, $o$-идеала и т. д. относятся к соответствующей упорядоченной группе.

**5.1.2.** *Векторной решеткой* называют упорядоченное векторное пространство, являющееся решеточно упорядоченной группой. Тем самым в каждой векторной решетке $E$ существуют точная верхняя граница $\sup\{x_1, \dots, x_n\} := x_1 \vee \dots \vee x_n$ и точная нижняя граница $\inf\{x_1, \dots, x_n\} := x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ произвольного непустого конечного множества $\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$. В частности, любой элемент $x$ векторной решетки имеет *положительную часть* $x^+ := x \vee \mathbb{0}$, *отрицательную часть* $x^- := (-x)^+ := -x \wedge \mathbb{0}$ и *модуль* $|x| := x \vee (-x)$.

Напомним, что в векторной решетке $E$ *дизъюнктность* вводится формулой

$$\perp := \{(x, y) \in E \times E : |x| \wedge |y| = 0\}.$$

*Компонентой* (или *полосой*) векторной решетки $E$ называют множество вида

$$M^{\perp} := \{x \in E : (\forall\, y \in M) x \perp y\},$$

где $M$ — произвольное непустое множество в $E$. Компоненту $K$ вида $\{u\}^{\perp\perp}$ называют *главной*, а элемент $|u|$ — *порядковой единицей* (в $K$). Совокупность всех компонент векторной решетки, упорядоченная по включению, образует полную булеву алгебру $\mathscr{B}(E)$, в которой булевы операции имеют вид:

$$L \wedge K = L \cap K, \quad L \vee K = (L \cup K)^{\perp\perp}, \quad L^* = L^{\perp} \quad (L, K \in \mathscr{B}(E)).$$

Алгебра $\mathscr{B}(E)$ носит название *базы* $E$.

Пусть $K$ — компонента векторной решетки $E$ и $0 \leq x \in E$. Если в $E$ существует элемент $\sup\{u \in K : 0 \leq u \leq x\}$, то он называется *проекцией* $x$ на компоненту $K$ и обозначается через $[K]x$ (или $\mathrm{Pr}_K\, x$). Для произвольного $x \in E$ полагают $[K]x := [K]x^{+} - [K]x^{-}$.

Проекция элемента $x \in E$ на компоненту $K$ существует тогда и только тогда, когда справедливо разложение $x = y + z$, где $y \in K$ и $z \in K^{\perp}$. При этом $y = [K]x$ и $z = [K^{\perp}]x$. Допустим, что всякий элемент $x \in E$ имеет проекцию на $K$. Тогда оператор $x \mapsto [K]x$ $(x \in E)$ линеен, идемпотентен и $0 \leq [K]x \leq x$ для всех $0 \leq x \in E$.

Говорят, что векторная решетка *допускает проекции на компоненты* (на главные компоненты), если для всякой компоненты (главной компоненты) $K$ определен оператор проектирования $[K]$.

Если векторная решетка $E$ допускает проекции на компоненты и всякое дизъюнктное множество положительных элементов в $E$ имеет супремум, то $E$ называют *расширенной*.

**5.1.3.** Элемент $\mathbb{1} \in E$ именуют (порядковой) *единицей*, если $\{\mathbb{1}\}^{\perp\perp} = E$, т. е. если в $E$ нет отличных от нуля элементов, дизъюнктных $\mathbb{1}$. Другими словами, порядковая единица $E$ — это порядковая единица компоненты $E$ векторной решетки $E$. Пусть для некоторого $0 \leq e \in E$ выполняется $e \wedge (\mathbb{1} - e) = 0$. Тогда говорят, что $e$ — *единичный элемент* (относительно $\mathbb{1}$). Множество $\mathfrak{C}(\mathbb{1}) := \mathfrak{C}(E)$ всех единичных элементов с индуцированным из $E$ порядком есть булева алгебра. Решеточные операции в $\mathfrak{C}(\mathbb{1})$ наследуются из $E$, а булево дополнение имеет вид $e^* = 1 - e$ $(e \in \mathfrak{C}(\mathbb{1}))$.

Всюду ниже, где не указано явно поле $\mathbb{F}$, подразумевается векторная решетка над линейно упорядоченным полем действительных

чисел $\mathbb{R}$. В идеале $I(u) := \bigcup_{n=1}^{\infty}[-nu, nu]$, порожденном элементом $0 \leq u \in E$, можно ввести полунорму

$$\|x\|_u := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : |x| \leq \lambda u\} \quad (x \in I(u)).$$

Если $I(u) = E$, то говорят, что $u$ — *сильная единица*, а $E$ — *векторная решетка ограниченных элементов*. Полунорма $\|\cdot\|_u$ будет нормой в том и только в том случае, если $E$ архимедова.

Элемент $x \geq 0$ векторной решетки называется *дискретным*, если $[0, x] = [0, 1]x$, т. е. если из $0 \leq y \leq x$ следует, что $y = \lambda x$ для некоторого $0 \leq \lambda \leq 1$. Векторная решетка $E$ называется *дискретной*, если для каждого $0 < y \in E$ найдется такой дискретный элемент $x \in E$, что $0 < x \leq y$. В случае, когда $E$ не имеет ненулевых дискретных элементов, говорят, что $E$ *непрерывна*.

**5.1.4.** *Пространством Канторовича* или же *$K$-пространством* называют такую векторную решетку, в которой всякое непустое порядково ограниченное подмножество имеет точные границы. Изредка вместо $K$-пространства используют более полный термин — условно порядково полная векторная решетка. Если в векторной решетке существуют точные границы непустых счетных ограниченных множеств, то ее называют *$K_\sigma$-пространством*. Всякое $K_\sigma$-пространство, и тем более всякое $K$-пространство, архимедово.

Множество проекторов на всевозможные компоненты в $E$ обозначим символом $\mathfrak{Pr}(E)$. Для проекторов $\pi$ и $\rho$ положим $\pi \leq \rho$ при условии, что $\pi x \leq \rho x$ при всех $0 \leq x \in E$.

***Теорема.*** *Пусть $E$ — произвольное $K$-пространство. Тогда проектирование на компоненты определяет изоморфизм $K \mapsto [K]$ булевых алгебр $\mathscr{B}(E)$ и $\mathfrak{Pr}(E)$. Если в $E$ имеется единица, то отображения $\pi \mapsto \pi\mathbb{1}$ из $\mathfrak{Pr}(E)$ в $\mathfrak{C}(E)$ и $e \mapsto \{e\}^{\perp\perp}$ из $\mathfrak{C}(E)$ в $\mathscr{B}(E)$ также являются изоморфизмами булевых алгебр.*

Проектор $\pi_u$ на компоненту вида $\{u\}^{\perp\perp}$, где $0 \leq u \in E$, может быть найден по более простому правилу, нежели указано в 5.1.2:

$$\pi_u x = \sup\{x \wedge (nu) : n \in \mathbb{N}\} \quad (0 \leq x \in E).$$

В частности, в $K_\sigma$-пространстве существует проекция любого элемента на всякую главную компоненту.

Пусть $E$ — это $K_\sigma$-пространство с единицей $\mathbb{1}$. Проекция единицы на компоненту $\{x\}^{\perp\perp}$ называется *следом* элемента $x$ и обозначается символом $e_x$. Таким образом, $e_x := \sup\{\mathbb{1} \wedge (n|x|) : n \in \mathbb{N}\}$. След $e_x$ служит как единицей в $\{x\}^{\perp\perp}$, так и единичным элементом в $E$. Для каждого вещественного числа $\lambda$ через $e^x_\lambda$ обозначают след положительной части элемента $\lambda\mathbb{1} - x$, т. е. $e^x_\lambda := e_{(\lambda\mathbb{1}-x)^+}$. Возникающую при этом функцию $\lambda \mapsto e^x_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ называют *спектральной функцией* или *характеристикой элемента* $x$.

**5.1.5. (1)** Пусть $E$ — алгебра над полем $\mathbb{F}$, наделенная таким отношением порядка, что $E$ можно рассматривать как упорядоченное векторное пространство, конус положительных элементов которого замкнут относительно умножения. Тогда $E$ называют *упорядоченной алгеброй* над полем $\mathbb{F}$ или, короче, *упорядоченной* $\mathbb{F}$-*алгеброй.* Можно сказать, что упорядоченная алгебра — это алгебраическая система $E$, сигнатура которой содержит символы $+, 0, \leq, \,\cdot\,$ и $\lambda$, где $\lambda$ пробегает множество элементов поля $\mathbb{F}$, обозначая всякий раз одноместную операцию растяжения вектора в $\lambda$ раз, причем соблюдены условия:

**(a)** $E$ — упорядоченное векторное пространство;

**(b)** $(E, +, \mathbb{0}, \leq, \cdot\,)$ — упорядоченное кольцо.

Будем говорить, что $E$ — *решеточно упорядоченная алгебра* (*$f$-алгебра*), если $E$ — упорядоченная алгебра и соответствующее упорядоченное кольцо решеточно упорядочено (является $f$-кольцом). *Точной* называют такую $f$-алгебру, в которой для любых двух элементов $x$ и $y$ из $x \cdot y = 0$ следует, что $x \perp y$. Нетрудно показать, что $f$-алгебра является точной в том и только в том случае, если в ней нет ненулевых нильпотентных элементов. Точность $f$-алгебры равносильна отсутствию в ней строго положительных элементов с нулевым квадратом (см. 4.4.8).

**(2)** *Комплексной векторной решеткой* принято называть *комплексификацию* $E \otimes iE$ вещественной векторной решетки $E$, где, как обычно, символ $i$ обозначает *мнимую* единицу. В это определение часто включают дополнительное требование существования *модуля*

$$|z| := \sup\{\mathrm{Re}(e^{i\theta} z) : 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

у любого элемента $z \in E \otimes iE$. Легко сформулировать требования к $E$, обеспечивающие автоматическое наличие модуля в $E \otimes$

$iE$. Например, достаточно считать, что $E$ — это $K$-пространство (или хотя бы $K_\sigma$-пространство). Таким образом, *комплексное $K$-пространство* — комплексификация вещественного $K$-пространства. Говоря о порядковых свойствах комплексной векторной решетки $E \otimes iE$, имеют в виду ее вещественную часть $E$. Понятия подрешетки, идеала, компоненты, проектора и т. п. естественно распространяются на случай комплексной векторной решетки путем надлежащей комплексификации.

**5.1.6.** С отношением порядка в векторной решетке связаны различные типы сходимости. Пусть $(\mathrm{A}, \leq)$ — *направленное множество*, т. е. $\leq \circ \leq^{-1} = \mathrm{A}^2$. Рассмотрим *сеть* $(x_\alpha) := (x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ в $E$. Ее называют *возрастающей* (*убывающей*), если $x_\alpha \leq x_\beta$ ($x_\beta \leq x_\alpha$) при $\alpha \leq \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathrm{A}$).

Говорят, что сеть $(x_\alpha)$ *порядково сходится* или *o-сходится* к элементу $x \in E$, если существует убывающая сеть $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ в $E$ со свойствами $\inf_{\alpha \in \mathrm{A}} e_\alpha = 0$ и $|x - x_\alpha| \leq e_\alpha$ ($\alpha \in \mathrm{A}$). При этом $x$ называют *o-пределом* сети $(x_\alpha)$ и пишут $x = o\text{-}\lim x_\alpha$ или $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$. В $K$-пространстве $E$ для порядково ограниченной сети вводятся также *верхний* и *нижний o-пределы* формулами:

$$\limsup_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha := \overline{\lim_{\alpha \in \mathrm{A}}}\, x_\alpha := \inf_{\alpha \in \mathrm{A}} \sup_{\beta \geq \alpha} x_\beta,$$
$$\liminf_{\alpha \in \mathrm{A}} x_\alpha := \underline{\lim_{\alpha \in \mathrm{A}}}\, x_\alpha := \sup_{\alpha \in \mathrm{A}} \inf_{\beta \geq \alpha} x_\beta.$$

Между указанными объектами имеется очевидная связь:

$$x = o\text{-}\lim x_\alpha \leftrightarrow \limsup x_\alpha = x = \liminf x_\alpha.$$

Говорят, что сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *сходится с регулятором к* $x \in X$, если существуют элемент $0 \leq u \in E$, называемый *регулятором сходимости*, и числовая сеть $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset \mathbb{R}$ со свойствами $\lim \lambda_\alpha = 0$ и $|x - x_\alpha| \leq \lambda_\alpha u$ ($\alpha \in \mathrm{A}$). При этом $x$ называют *r-пределом* сети $(x_\alpha)$ и пишут $x = r\text{-}\lim x_\alpha$ или $x_\alpha \xrightarrow{(r)} x$. Как видно, сходимость с регулятором $u$ — это сходимость в нормированном пространстве $(I(u), \|\cdot\|_u)$.

Наличие в $K$-пространстве $o$-сходимости позволяет определить сумму бесконечного семейства $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$.

В самом деле, для $\theta := \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ обозначим $y_\theta := x_{\xi_1} + \ldots + x_{\xi_n}$. Тогда возникает сеть $(y_\theta)_{\theta\in\Theta}$, где множество $\Theta := \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ естественным образом упорядочено по включению. Если существует предел $x = o\text{-}\lim_{\theta\in\Theta} y_\theta$, то элемент $x$ называют *$o$-суммой* семейства $(x_\xi)$ и пишут $x = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi$. Понятно, что при $x_\xi \geq 0$ $(\xi \in \Xi)$ для существования $o$-суммы семейства $(x_\xi)$ необходимо и достаточно, чтобы сеть $(y_\theta)_{\theta\in\Theta}$ была порядково ограничена; при этом $o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi = \sup_{\theta\in\Theta} y_\theta$. Если элементы семейства $(x_\xi)$ попарно дизъюнктны, то

$$o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi = \sup_{\xi\in\Xi} x_\xi^+ - \sup_{\xi\in\Xi} x_\xi^-.$$

Всякое $K$-пространство $E$ является *$o$-полным* в следующем смысле. Если сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ в $E$ удовлетворяет условию

$$\limsup |x_\alpha - x_\beta| = \inf_{\gamma\in\mathrm{A}} \sup_{\alpha,\beta\geq\gamma} |x_\alpha - x_\beta| = 0,$$

то существует такой элемент $x \in E$, что $x = o\text{-}\lim x_\alpha$.

**5.1.7.** Примеры.

**(1)** Пусть $(E_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ — семейство векторных решеток ($f$-алгебр) над одним и тем же упорядоченным полем $\mathbb{F}$. Тогда декартово произведение $E := \Pi_{\alpha\in\mathrm{A}} E_\alpha$, рассматриваемое с покоординатными операциями и порядком, является векторной решеткой ($f$-алгеброй) над полем $\mathbb{F}$. При этом решетка $E$ порядково полна, расширена или дискретна тогда и только тогда, когда этим свойством обладают все сомножители $E_\alpha$. База $\mathscr{B}(E)$ изоморфна произведению семейства булевых алгебр $(\mathscr{B}(E_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$. Элемент $e \in E$ будет единицей в том и только в том случае, если $e(\alpha)$ — единица в $E_\alpha$ при всех $\alpha \in \mathrm{A}$. В частности, совокупность $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}$ ($\mathbb{C}^{\mathrm{A}}$) всех вещественных (комплексных) функций на непустом множестве A представляет собой расширенное дискретное $K$-пространство (комплексное $K$-пространство).

**(2)** Всякий идеал, а значит, и фундамент векторной решетки ($K$-пространства) является векторной решеткой ($K$-пространством). База векторной решетки изоморфна базе любого его фундамента. В частности, $K$-пространством является $l_p(A)$ для любого $1 \leq p \leq \infty$ (см. (1)).

**(3)** Пусть $N$ — это $o$-идеал векторной решетки $E$. Тогда фактор-пространство $\widetilde{E} := E/N$ также будет векторной решеткой, если

определить в нем отношение порядка с помощью положительного конуса $\varphi(E^+)$, где $\varphi : E \to \widetilde{E}$ — канонический фактор-гомоморфизм. Векторная решетка $\widetilde{E}$ архимедова в том и только в том случае, когда $N$ замкнут относительно сходимости с регулятором. Если $E$ есть $f$-алгебра, а $o$-идеал $N$ является также и кольцевым идеалом, то $\widetilde{E}$ — $f$-алгебра. Если $E$ — это $K_\sigma$-пространство и $N$ секвенциально $o$-замкнут, то $\widetilde{E}$ будет $K_\sigma$-пространством, а гомоморфизм $\varphi$ — секвенциально $o$-непрерывным. База векторной решетки $\widetilde{E}$ изоморфна полной булевой алгебре $\Delta$-компонент $\mathfrak{R}_\Delta(E)$, где $\Delta := \{(x, y) \in E \times E : |x| \wedge |y| \in N\}$.

**(4)** Пусть $(\Omega, \mathscr{A})$ — измеримое пространство, т. е. $\Omega$ — непустое множество и $\mathscr{A}$ — $\sigma$-алгебра его подмножеств. Обозначим через $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A})$ множество всех вещественных (комплексных) измеримых функций на $\Omega$ с операциями и порядком, индуцированными из $\mathbb{R}^\Omega$ (из $\mathbb{C}^\Omega$). Возьмем какой-нибудь $\sigma$-полный идеал $\mathscr{N}$ алгебры $\mathscr{A}$. Пусть $N$ — множество таких функций $f \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A})$, что $\{t \in \Omega : f(t) \neq 0\} \in \mathscr{N}$, и положим $M(\Omega, \mathscr{A}, N) := \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A})/N$. Тогда $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{A})$ и $M(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{N})$ — вещественные (комплексные) $K_\sigma$-пространства и одновременно $f$-алгебры. Предположим, что $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — счетно-аддитивная положительная мера. Векторная решетка $M(\Omega, \mathscr{A}, \mu) := M(\Omega, \mathscr{A}, \mu^{-1}(0))$ будет расширенным $K$-пространством, если мера $\mu$ конечна или $\sigma$-конечна. Вообще порядковая полнота решетки $M(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ связана со свойством прямой суммы для меры $\mu$ [44, 158]. Однако для простоты мы ограничимся случаем $\sigma$-конечной меры $\mu$. Пространство $M(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ непрерывно тогда и только тогда, когда $\mu$ не имеет атомов. Напомним, что *атомом меры* $\mu$ называют множество $A \in \mathscr{A}$ такое, что $0 < \mu(A)$ и если $A' \in \mathscr{A}$, $A' \subset A$, то либо $\mu(A') = 0$, либо $\mu(A') = \mu(A)$. Дискретность $M(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ равносильна тому, что мера $\mu$ *чисто атомическая*, т. е. всякое множество ненулевой меры содержит атом $\mu$. Класс эквивалентности функции, тождественно равной единице, будет порядковой и кольцевой единицей в $M(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. База $K$-пространства $M(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ изоморфна булевой алгебре $\mathscr{A}/\mu^{-1}(0)$ измеримых множеств по модулю множеств нулевой меры. В силу (2) $K$-пространствами будут также пространства $L_p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, являющиеся фундаментами $M(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.

**(5)** Пусть $H$ — комплексное гильбертово пространство и $A$ — сильно замкнутая коммутативная алгебра самосопряженных огра-

ниченных операторов в $H$. Обозначим $\mathfrak{P}(A)$ множество всех ортопроекторов в $H$, входящих в алгебру $A$. Тогда $\mathfrak{P}(A)$ — полная булева алгебра. Пусть $A_\infty$ — множество всех плотно определенных самосопряженных операторов $a$ в $H$ таких, что спектральная функция $\lambda \mapsto e_\lambda^a$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ оператора $a$ принимает свои значения в $\mathfrak{P}(A)$. Пусть $\overline{A}_\infty$ — множество плотно определенных нормальных операторов $a$ в $H$ таких, что если $a = u|a|$ — полярное разложение $a$, то $|a| \in A_\infty$. В множествах $A_\infty$ и $\overline{A}_\infty$ естественно вводится структура упорядоченного векторного пространства. Так, для $a$ и $b \in A_\infty$ сумма $a+b$ и произведение $a \cdot b$ определяются как единственные самосопряженные расширения операторов $h \mapsto ah+bh$ и $h \mapsto a \cdot bh$ $(h \in \operatorname{dom}(a) \cap \operatorname{dom}(b))$, где $\operatorname{dom}(c)$ — область определения $c$. Кроме того, для $a \in \mathfrak{A}_\infty$ полагают $a \geq 0$ в том и только в том случае, если $\langle ah, h\rangle \geq 0$ для всех $h \in \operatorname{dom}(a)$. Операции и порядок в $\overline{A}_\infty$ получаются путем комплексификации $A_\infty$.

Множества $A_\infty$ и $\overline{A}_\infty$ с указанными операциями и порядком представляют расширенное $K$-пространство и комплексное расширенное $K$-пространство с базой единичных элементов $\mathfrak{P}(A)$. При этом $A$ — это $K$-пространство ограниченных элементов в $A_\infty$.

**(6)** Пусть $Q$ — топологическое пространство. Пусть, далее, $\operatorname{Bor}(Q) := \operatorname{Bor}(Q, \mathbb{R})$ — множество всех борелевских функций из $Q$ в $\mathbb{R}$ с поточечными операциями суммы и произведения, а также с поточечным отношением порядка. Тогда $\operatorname{Bor}(Q, \mathbb{R})$ — это $K_\sigma$-пространство.

Обозначим через $N$ множество таких борелевских функций $f \in \operatorname{Bor}(Q)$, что $\{t \in Q : f(t) \neq 0\}$ — тощее множество (т. е. множество первой категории). Пусть $B(Q)$ — фактор-пространство $\operatorname{Bor}(Q)/N$ с индуцированными из $\operatorname{Bor}(Q)$ операциями и порядком. Тогда $B(Q)$ — это $K$-пространство, база которого изоморфна булевой алгебре борелевских подмножеств $Q$ по модулю множеств первой категории.

Если топологическое пространство $Q$ *бэровское* (т. е. всякое непустое открытое множество в $Q$ нетощее), то база $\mathscr{B}(B(Q))$ изоморфна булевой алгебре всех регулярных открытых (или регулярных замкнутых) подмножеств $Q$.

Оба пространства $\operatorname{Bor}(Q)$ и $B(Q)$ являются точными $f$-алгебрами. Функция, тождественно равная единице, служит в них порядковой и кольцевой единицей. Заменив $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$, получим комплексное $K$-пространство $B(Q)$.

**(7)** Пусть вновь $Q$ — топологическое пространство, а $C(Q)$ — пространство всех непрерывных действительных функций на $Q$. Тогда $C(Q)$ — подрешетка и подалгебра в $\mathrm{Bor}(Q)$. В частности, $C(Q)$ — это точная архимедова $f$-алгебра. Вообще говоря, $C(Q)$ не будет $K$-пространством. Порядковая полнота $C(Q)$ связана с экстремальной несвязностью пространства $Q$ (см. 1.2.5). Для равномеризуемого топологического пространства $Q$ база векторной решетки $C(Q)$ изоморфна алгебре регулярных открытых множеств.

Пусть теперь $\mathrm{LSC}(Q)$ — множество (классов эквивалентности) полунепрерывных снизу функций $f : Q \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ таких, что $f^{-1}(-\infty)$ нигде не плотно, а внутренность множества $f^{-1}([-\infty, \infty))$ плотна в $Q$. Как обычно, две функции считают эквивалентными, если их значения различаются лишь на тощем множестве. Сумму $f + g$ (произведение $f \cdot g$) элементов $f, g \in \mathrm{LSC}(Q)$ определим как полунепрерывную снизу регуляризацию поточечной суммы $t \mapsto f(t) + g(t)$ $(t \in Q_0)$ (поточечного произведения $t \mapsto f(t) \cdot g(t)$ $(t \in Q_0)$), где $Q_0$ — плотное подмножество $Q$, на котором конечны $f$ и $g$. Тем самым $\mathrm{LSC}(Q)$ превращается в расширенное $K$-пространство и $f$-алгебру, причем база $\mathrm{LSC}(Q)$ изоморфна алгебре регулярных открытых множеств. Таким образом, $K$-пространства $B(Q)$ и $\mathrm{LSC}(Q)$ изоморфны в случае бэровского $Q$. Если же $Q$ равномеризуемо, то $C(Q)$ есть (порядково) плотная подрешетка в $\mathrm{LSC}(Q)$.

**5.1.8.** Особую роль в теории векторных решеток играет пространство непрерывных функций, принимающих бесконечные значения на нигде не плотном множестве. Для введения этого пространства необходимы еще некоторые вспомогательные факты. Взяв произвольные $f : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ и $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, положим

$$\{f < \lambda\} := \{t \in Q : f(t) < \lambda\}, \quad \{f \le \lambda\} := \{t \in Q : f(t) \le \lambda\}.$$

**(1)** *Пусть $Q$ — произвольное топологическое пространство, $\Lambda$ — плотное множество в $\overline{\mathbb{R}}$ и $\lambda \mapsto U_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ — возрастающее отображение из $\Lambda$ в упорядоченное по включению множество $\mathscr{P}(Q)$. Тогда равносильны следующие утверждения*:

**(a)** *имеется, и притом единственная, непрерывная функция $f : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что*

$$\{f < \lambda\} \subset U_\lambda \subset \{f \le \lambda\} \quad (\lambda \in \Lambda),$$

**(b)** *для любых* $\lambda$, $\mu \in \Lambda$ *из* $\lambda < \mu$ *вытекает*

$$\mathrm{cl}(U_\lambda) \subset \mathrm{int}(U_\mu).$$

$\lhd$ Импликация (a) $\to$ (b) тривиальна. Докажем (b) $\to$ (a). Для каждого $t \in Q$ положим $f(t) := \inf\{\lambda \in \Lambda : t \in U_\lambda\}$. Тем самым определена функция $f : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ и нетрудно проверить, что $\{f < \lambda\} \subset U_\lambda \subset \{f \leq \lambda\}$. Ясно также, что

$$\{f < \lambda\} = \bigcup\{U_\mu : \mu < \lambda, \mu \in \Lambda\}, \{f \leq \lambda\} = \bigcap\{U_\nu : \lambda < \nu, \nu \in \Lambda\}.$$

Заметим, что пока была использована только изотонность отображения $\lambda \mapsto U_\lambda$.

Рассмотрим теперь отображения

$$\lambda \mapsto V_\lambda := \mathrm{int}(U_\lambda), \quad \lambda \mapsto W_\lambda := \mathrm{cl}(U_\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda).$$

Как видно, они возрастают. Тем самым существуют такие функции $g$ и $h : Q \to \overline{\mathbb{R}}$, что

$$\{g < \lambda\} \subset V_\lambda \subset \{g \leq \lambda\}, \quad \{h < \lambda\} \subset W_\lambda \subset \{h \leq \lambda\} \quad (\lambda \in \Lambda).$$

Из определения $W_\lambda$ следует, что $U_\mu \subset W_\lambda$ при $\mu < \lambda$. В силу плотности $\Lambda$ в $\mathbb{R}$ для любых $t \in Q$ и $\nu > f(t)$ найдутся такие $\lambda$, $\mu \in \Lambda$, что $f(t) < \mu < \lambda < \nu$, значит, $t \in U_\mu \subset W_\lambda$ и $h(t) < \lambda < \nu$. Устремляя $\nu$ к $f(t)$, получим $h(t) \leq f(t)$. Это же неравенство очевидно и при $f(t) = +\infty$. Аналогично $V_\mu \subset U_\lambda$ при $\mu < \lambda$, следовательно, $f(t) \leq g(t)$ для всех $t \in Q$. Записывая (b) в виде $W_\mu \subset V_\lambda$ при $\mu < \lambda$, вновь с помощью приведенных выше рассуждений заключаем, что $g(t) \leq h(t)$ при всех $t \in Q$. Таким образом, $f = g = h$. Непрерывность $f$ вытекает из равенств

$$\{f < \lambda\} = \{g < \lambda\} = \bigcup\{V_\mu : \mu < \lambda,\ \mu \in \Lambda\},$$
$$\{f \leq \lambda\} = \{h \leq \lambda\} = \bigcap\{W_\mu : \mu > \lambda,\ \mu \in \Lambda\},$$

так как $V_\mu$ открыто, а $W_\mu$ замкнуто при всех $\mu \in \Lambda$. $\rhd$

**(2)** *Пусть $Q$ — экстремальный компакт, т. е. $Q$ — компактное топологическое пространство, в котором замыкание всякого открытого*

*множества открыто. Пусть $Q_0$ — открытое плотное подмножество $Q$ и $f : Q_0 \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда существует единственная непрерывная функция $\bar{f} : Q_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $f(t) = \bar{f}(t)$ $(t \in Q_0)$.*

$\lhd$ В самом деле, если $U_\mu := \mathrm{cl}(\{f < \mu\})$, то отображение $\mu \mapsto U_\mu$ $(\mu \in \mathbb{R})$ возрастает и удовлетворяет условию (b) из (1). Стало быть, существует и при этом единственная функция $\bar{f} : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ со свойствами $\{\bar{f} < \mu\} \subset U_\mu \subset \{\bar{f} \le \mu\}$ $(\mu \in \mathbb{R})$. Несложно понять, что при этом $\bar{f} \restriction Q_0 = f$, т. е. ограничение $\bar{f}$ на $Q_0$ совпадает с $f$. $\rhd$

**(3)** Обозначим символом $C_\infty(Q)$ множество всех непрерывных функций $x : Q \to \overline{\mathbb{R}}$, которые могут принимать значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотном множестве.

Введем в $C_\infty(Q)$ отношение порядка, полагая $x \le y$ в том и только в том случае, если $x(t) \le y(t)$ для всех $t \in Q$. Далее, возьмем $x$ и $y \in C_\infty(Q)$ и положим $Q_0 := \{|x| < +\infty\} \cap \{|y| < +\infty\}$. Тогда $Q_0$ открыто и плотно в $Q$. Согласно (2) существует единственная непрерывная функция $z : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $z(t) = x(t) + y(t)$ при $t \in Q_0$. Эту функцию $z$ мы и примем за сумму элементов $x$ и $y$. Аналогично определяется произведение любых двух элементов. Отождествляя число $\lambda$ с функцией, тождественно равной $\lambda$ на $Q$, получим произведение любых $x \in C_\infty(Q)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Легко видеть, что $C_\infty(Q)$ с введенными операциями и порядком является векторной решеткой и одновременно точной $f$-алгеброй. Ниже увидим, что $C_\infty(Q)$ — расширенное $K$-пространство. Функция, тождественно равная единице, является кольцевой и порядковой единицей. База векторной решетки $C_\infty(Q)$ изоморфна булевой алгебре всех открыто-замкнутых подмножеств компакта $Q$.

**5.1.9.** Пусть $E$ и $F$ — векторные решетки.

**(1)** Линейный оператор $U : E \to F$ называют: *положительным*, если $U(E_+) \subset F_+$; *регулярным*, если он допускает представление в виде разности двух положительных операторов; наконец, *порядково ограниченным* или *o-ограниченным*, если образ всякого $o$-ограниченного подмножества $E$ относительно $U$ есть $o$-ограниченное подмножество $F$. Если $F$ — это $K$-пространство, то оператор регулярен в том и только в том случае, если он $o$-ограничен.

Множества всех регулярных и положительных операторов из $E$ в $F$ обозначаются символами $L^\sim(E, F)$ и $L^\sim(E, F)_+$ соответственно.

***Теорема Рисса — Канторовича.*** *Если $E$ — векторная решетка, а $F$ — некоторое $K$-пространство, то пространство регулярных операторов $L^{\sim}(E,F)$, упорядоченное конусом положительных операторов $L^{\sim}(E,F)_{+}$, представляет собой $K$-пространство.*

**(2)** Рассмотрим векторную решетку $E$ и некоторую ее векторную подрешетку $D \subset E$. Линейный оператор $U$ из $D$ в $E$ называют *нерасширяющим* (или *стабилизатором*), если для всякого $x \in D$ верно $Ux \in \{x\}^{\perp\perp}$. Нерасширяющий оператор может и не быть регулярным. Регулярный нерасширяющий оператор именуют *ортоморфизмом.*

Пусть $\mathrm{Orth}(E)$ обозначает множество всех ортоморфизмов, действующих в $E$, а $\mathscr{Z}(E)$ — это $o$-идеал, порожденный в $L^{\sim}(E)$ тождественным оператором $I_E$. Пространство $\mathscr{Z}(E)$ часто называют *центром* векторной решетки $E$. Определим теперь пространство всех ортоморфизмов $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$. Обозначим сначала буквой $\mathfrak{M}$ всевозможные пары $(D,\pi)$, где $D$ — фундамент $E$, а $\pi$ — ортоморфизм из $D$ в $E$. Элементы $(D,\pi)$ и $(D',\pi')$ множества $\mathfrak{M}$ объявим эквивалентными, если на пересечении $D \cap D'$ ортоморфизмы $\pi$ и $\pi'$ совпадают. Фактор-множество множества $\mathfrak{M}$ по указанному отношению и есть $\mathrm{Orth}(E)$. Каждый ортоморфизм $\pi \in \mathrm{Orth}(E)$ отождествим с соответствующим классом эквивалентности в $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$. Тогда имеют место включения $\mathscr{Z}(E) \subset \mathrm{Orth}(E) \subset \mathrm{Orth}^{\infty}(E)$. В множестве $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$ естественно вводится структура упорядоченной алгебры.

**(a)** ***Теорема.*** *Если $E$ — архимедова векторная решетка, то $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$ — точная $f$-алгебра с единицей $I_E$. При этом $\mathrm{Orth}(E)$ есть $f$-подалгебра $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$, а $\mathscr{Z}(E)$ — это $f$-подалгебра ограниченных элементов в $\mathrm{Orth}(E)$.*

**(b)** ***Теорема.*** *Всякая архимедова $f$-алгебра $E$ с единицей $\mathbb{1}$ алгебраически и решеточно изоморфна $f$-алгебре ортоморфизмов. При этом идеал $I(\mathbb{1})$ отображается на $\mathscr{Z}(E)$.*

Если $E$ — архимедова векторная решетка, то база каждой из $f$-алгебр $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$, $\mathrm{Orth}(E)$ и $\mathscr{Z}(E)$ изоморфна базе $E$. Если $E$ — это $K$-пространство, то $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$ — расширенное $K$-пространство, а $\mathrm{Orth}(E)$ — его фундамент.

**5.1.10.** Примечания.

**(1)** Создание теории упорядоченных векторных пространств относят к 1930-м годам и связывают с исследованиями Г. Биркгофа,

Л. В. Канторовича, М. Г. Крейна, Х. Накано, Ф. Рисса, Г. Фрейденталя и др. В наше время теория и приложения упорядоченных векторных пространств — обширная область математики, составляющая, по существу, одно из основных направлений современного функционального анализа. Это направление хорошо представлено в монографической литературе, см. [1, 18, 44, 45, 115, 116, 165, 171, 178, 182, 183, 186, 227, 229, 258]. Отметим также обзоры [9, 10, 11], в которых имеется обширная библиография.

**(2)** Сведения, изложенные в этом параграфе, являются начальными в теории векторных решеток и содержатся в любой из книг [18, 44, 116, 186, 227]. Векторные решетки называют также пространствами Рисса, см. [186, 258].

**(3)** Порядково полные векторные решетки, т. е. $K$-пространства, выделил и начал изучать Л. В. Канторович. Это было сделано в его первой основополагающей работе на эту тему [38], в которой он писал: «В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы». Здесь Л. В. Канторович сформулировал важную методологическую установку — *эвристический принцип переноса*, согласно которому элементы $K$-пространства — суть обобщенные числа.

**(4)** Эвристический принцип переноса Л. В. Канторовича нашел многочисленные подтверждения в исследованиях как самого автора, так и его последователей (см. [39–43]. Уже в начальный период развития теории предпринимались формализации этих эвристических соображений. На этом пути возникли так называемые теоремы о сохранении соотношений, которые утверждают, что если какое-то предложение, включающее конечное число функциональных соотношений, доказано для вещественных чисел, то аналогичный факт автоматически оказывается верным и для элементов $K$-пространства (см. [18, 45]). В то же время оставался совершенно неясным внутренний механизм, управляющий феноменом сохранения соотношений, границы его применимости, а также общие причины многих аналогий и параллелей с классической теорией функций. Глубина и универсальность принципа Канторовича были объяснены в рамках булевозначного анализа (см. 5.2.15 (1)).

## 5.2. Реализация векторных решеток

В текущем параграфе устанавливается, что архимедовы векторные решетки реализуются как подгруппы аддитивной группы действительных чисел в подходящей булевозначной модели. С помощью такой реализации выводятся основные структурные свойства векторных решеток: функциональное исчисление, интегральное представление элементов, представление пространствами функций и т. п.

**5.2.1.** Пусть $\mathbb{R}$ — линейно упорядоченное поле вещественных чисел, а $\mathbb{R}^{\wedge}$ — его образ при каноническом вложении класса всех множеств в универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. 2.2.7). Так как $\mathbb{R}$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma := (+, \cdot, 0, 1, \leq)$, то по следствию 4.3.5 (1) $\mathbb{R}^{\wedge}$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Более того, для всякой формулы $\varphi(u_0, \dots, u_{n-1})$ сигнатуры $\sigma$ и для любых $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ выполняется $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ в том и только в том случае, если внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполняется $\varphi(x_0^{\wedge}, \dots, x_{n-1}^{\wedge})$. В частности, в качестве $\varphi$ можно взять аксиомы архимедова линейно упорядоченного поля. Следовательно, $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathbb{R}^{\wedge}$ — архимедово линейно упорядоченное поле». Однако нельзя утверждать, что $\mathbb{R}^{\wedge}$ — поле действительных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. [149]). Дело в том, что аксиома полноты поля действительных чисел не выражается ограниченной формулой. Вот одна из эквивалентных формулировок аксиомы полноты:

$$(\forall A)\,(A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \varnothing \wedge \pi_{\leq}(A) \neq \varnothing \to (\exists\, x \in \mathbb{R})(x = \sup(A))),$$

т. е. всякое непустое множество действительных чисел, имеющее верхнюю границу, имеет и точную верхнюю границу. В этой аксиоме квантор общности пробегает множество всех подмножеств множества $\mathbb{R}$.

Напомним (см. 3.1.1), что $B_0(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^{\wedge}{\downarrow}$ состоит из всех перемешиваний вида $\mathrm{mix}_{t \in \mathbb{R}}(b_t t^{\wedge})$, где $(b_t)_{t \in \mathbb{R}}$ — разбиение единицы в $B$. По теореме 4.4.10 $B_0(\mathbb{R})$ — расширенное точное $f$-кольцо. Можно отождествить $f$-кольцо $B_0(\mathbb{R})$ с $f$-кольцом всех непрерывных функций $x$ из стоуновского компакта $\mathrm{St}(B)$ алгебры $B$ в множество $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ с дискретной топологией, принимающих значения $\pm\infty$ на нигде не плотном множестве. Ясно, что $B_0(\mathbb{R})$ является на самом деле $f$-алгеброй, так как можно считать $\mathbb{R} \subset B_0(\mathbb{R})$ при отождествлении числа $\lambda$ с функцией, тождественно равной $\lambda$ на $\mathrm{St}(B)$.

**5.2.2.** В силу принципа переноса и принципа максимума существует такой элемент $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(B)}$, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{R}$ — упорядоченное поле вещественных чисел». Понятно, что внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ поле $\mathscr{R}$ единственно с точностью до изоморфизма, т. е. если $\mathscr{R}'$ — еще одно поле вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}'$ изоморфны». Как уже говорилось выше, $\mathbb{R}^\wedge$ — архимедово упорядоченное поле внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, следовательно, $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathbb{R}^\wedge \subset \mathscr{R}$ и $\mathscr{R}$ — (метрическое) пополнение поля $\mathbb{R}^\wedge$». При этом для единицы 1 поля $\mathbb{R}$ будет $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$1 := 1^\wedge$ есть единица поля $\mathscr{R}$».

Перейдем теперь к рассмотрению спуска $\mathscr{R}{\downarrow}$ алгебраической системы $\mathscr{R} := (|\mathscr{R}|, +, \cdot, 0, 1, \leq)$. Таким обрахом, спуск основного множества системы $\mathscr{R}$ мы рассматриваем вместе со спущенными операциями и порядком в $\mathscr{R}$. Более подробно, сложение, умножение и порядок в $\mathscr{R}{\downarrow}$ вводятся следующими правилами (см. 4.2.3):

$$
\begin{gathered}
x + y = z \leftrightarrow [\![x + y = z]\!] = \mathbb{1}, \\
xy = z \leftrightarrow [\![xy = z]\!] = \mathbb{1}, \\
x \leq y \leftrightarrow [\![x \leq y]\!] = \mathbb{1}, \\
\lambda x = y \leftrightarrow [\![\lambda^\wedge x = y]\!] = \mathbb{1} \\
(x, y, z \in \mathscr{R}{\downarrow},\ \lambda \in \mathbb{R}).
\end{gathered}
$$

***Теорема Гордона.*** *Пусть $\mathscr{R}$ — поле действительных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Алгебраическая система $\mathscr{R}{\downarrow}$ (т. е. множество $|\mathscr{R}|{\downarrow}$ со спущенными операциями и порядком) есть расширенное $K$-пространство. При этом существует (канонический) изоморфизм $\chi$ булевой алгебры $B$ на булеву алгебру проекторов $\mathfrak{Pr}(\mathscr{R}{\downarrow})$ (или единичных элементов $\mathfrak{C}(\mathscr{R}{\downarrow})$) такой, что имеют место эквивалентности*

$$
\begin{gathered}
\chi(b)x = \chi(b)y \leftrightarrow b \leq [\![x = y]\!], \\
\chi(b)x \leq \chi(b)y \leftrightarrow b \leq [\![x \leq y]\!]
\end{gathered}
$$

*для всех $x, y \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и $b \in B$.*

$\lhd$ Доказательство этого результата содержится, по сути дела, в 4.4.10. В самом деле, согласно 4.4.10 (2, 4) $\mathscr{R}{\downarrow}$ — расширенное и порядково полное $f$-кольцо с единицей $\mathbb{1} := 1^\wedge$. Отображение $\lambda \mapsto \lambda^\wedge \cdot 1$ является изоморфизмом поля $\mathbb{R}$ в $\mathscr{R}{\downarrow}$. Полагая $\lambda x := \lambda^\wedge x$ $(x \in \mathscr{R}{\downarrow},\ \lambda \in \mathbb{R})$, получим требуемую векторную структуру на $\mathscr{R}{\downarrow}$. Тем самым $\mathscr{R}{\downarrow}$ — расширенное $K$-пространство. $\rhd$

**5.2.3.** Используя те же обозначения, что и в 5.2.2, выясним смысл некоторых утверждений в терминах $K$-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$.

**(1)** *Пусть* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *— разбиение единицы в* $B$ *и* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *— произвольное семейство в* $\mathscr{R}{\downarrow}$. *Тогда*

$$\operatorname*{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi) = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi}\chi(b_\xi)x_\xi.$$

$\lhd$ Действительно, если $x = \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, то из определения перемешивания с учетом теоремы 5.2.2 следует, что $\chi(b_\xi)x = \chi(b_\xi)x_\xi$ для каждого $\xi$. Суммируя по $\xi$ это соотношение, получим требуемое. $\rhd$

**(2)** *Для множества* $A \subset \mathscr{R}{\downarrow}$ *и произвольных* $a \in \mathscr{R}{\downarrow}$ *и* $b \in B$ *справедлива эквивалентность*

$$\chi(b)a = \sup(\chi(b)(A)) \leftrightarrow b \leq [\![a = \sup(A{\uparrow})]\!].$$

$\lhd$ Действительно, благодаря 5.2.2 равенство $\chi(b)a = \sup\{\chi(b)x : x \in A\}$ выполняется в том и только в том случае, если $b \leq [\![x \leq a]\!]$ при всех $x \in A$ и для каждого $y \in \mathscr{R}{\downarrow}$ из соотношения $(\forall\, x \in A)(b \leq [\![x \leq y]\!])$ вытекает $b \leq [\![a \leq y]\!]$. Последнее утверждение есть просто иная запись соотношения $b \leq [\![\sup(A{\uparrow}) = a]\!]$. $\rhd$

**(3)** *Рассмотрим сеть* $s : \mathrm{A} \to \mathscr{R}{\downarrow}$, *где* $\mathrm{A}$ *— направленное множество. Тогда модифицированный подъем* $s{\Uparrow} : \mathrm{A}^{\wedge} \to \mathscr{R}$ *является сетью внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$, *причем для любых* $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ *и* $b \in B$ *выполняется*

$$\chi(b)x = o\text{-}\lim(\chi(b) \circ s) \leftrightarrow b \leq [\![x = \lim(s{\Uparrow})]\!].$$

$\lhd$ Соотношение $\chi(b)x = o\text{-}\lim(\chi(b) \circ s)$ равносильно существованию сети $r : \mathrm{A} \to \mathscr{R}{\downarrow}$ такой, что $r(\alpha) \leq r(\beta)$ при $\alpha \leq \beta$, $\inf\{r(\alpha) : \alpha \in \mathrm{A}\} = 0$ и $|\chi(b)x - \chi(b)s(\alpha)| \leq \chi(b)r(\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$.

Благодаря 5.2.3 (2) и равенству $r(\mathrm{A}){\uparrow} = r{\Uparrow}(\mathrm{A}^{\wedge})$, последние три соотношения означают, что справедливы неравенства

$$b \leq [\![(\forall\, \alpha \in \mathrm{A}^{\wedge})(|x - s{\Uparrow}(\alpha)| \leq r(\alpha))]\!],$$
$$b \leq [\![\inf(r{\Uparrow}(\mathrm{A}^{\wedge}) = 0)]\!],$$
$$b \leq [\![(\forall\, \alpha, \beta \in \mathrm{A}^{\wedge})(\alpha \leq \beta \to r{\Uparrow}(\alpha) \leq r{\Uparrow}(\beta)]\!],$$

более короткая запись которых и есть формула $b \leq [\![x = \lim(s{\Uparrow})]\!]$. $\rhd$

Совершенно аналогично доказывается следующее предложение.

**(4)** *Пусть $s$ и $\mathrm{A} \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что $[\![s : \mathrm{A} \to \mathscr{R}$ — сеть$]\!] = \mathbb{1}$. Тогда спуск $s{\downarrow}\colon \mathrm{A}{\downarrow} \to \mathscr{R}{\downarrow}$ является сетью, причем для всяких $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и $b \in B$ верно*

$$\chi(b)x = o\text{-}\lim(\chi(b) \circ (s{\downarrow})) \leftrightarrow b \leq [\![x = \lim(s)]\!].$$

**(5)** *Для каждого элемента $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ имеют место равенства*

$$e_x = \chi([\![x \neq 0]\!]), \quad e_\lambda^x = \chi([\![x < \lambda]\!]) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

$\lhd$ Заметим, что вещественное число $t$ отлично от нуля в том и только в том случае, если точная верхняя граница множества $\{1 \wedge (n|t|) : n \in \omega\}$ есть 1. Следовательно, по принципу переноса для $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ имеем $[\![x \neq 0]\!] = [\![\sup\{1^\wedge \wedge (n|x|) : n \in \omega^\wedge\} = 1]\!]$. Если $A := \{1 \wedge (n|x|) : n \in \omega\}$, то $[\![\sup(A{\uparrow}) = \sup\{1^\wedge \wedge (n|x|) : n \in \omega^\wedge\}]\!] = \mathbb{1}$ и $e_x = \sup(A)$. Следовательно, $b := [\![x \neq 0]\!] = [\![e_x = \mathbb{1}]\!]$. Аналогично выводим $b^* = [\![e_x = 0]\!]$. Привлекая свойства $\chi$, получаем $e_x = \chi(b)$. Возьмем теперь произвольное число $\lambda \in \mathbb{R}$ и заметим, что $\lambda^\wedge = \lambda^\wedge\mathbb{1}$, значит, $e_\lambda^x = e_{(\lambda^\wedge - x)^+}$. В силу уже доказанного

$$\chi^{-1}(e_\lambda^x) = [\![(\lambda^\wedge - x) \vee 0 \neq 0]\!] = [\![\lambda^\wedge - x > 0]\!] = [\![x < \lambda^\wedge]\!]. \ \rhd$$

**5.2.4. *Теорема.*** *Пусть $X$ — архимедова векторная решетка с базой $B := \mathscr{B}(X)$. Пусть $\mathscr{R}$ — поле вещественных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда существует линейный и решеточный изоморфизм $\imath$ из $X$ в расширенное $K$-пространство $\mathscr{R}{\downarrow}$ такой, что выполняются условия:*

**(1)** *изоморфизм $\imath$ сохраняет точные границы непустых ограниченных множеств;*

**(2)** *порядковый идеал $J(\imath(X))$, порожденный множеством $\imath(X)$, есть фундамент $\mathscr{R}{\downarrow}$;*

**(3)** *для любого $y \in J(\imath(X))$ справедливы равенства*

$$\inf\{\imath(x) : x \in X, \imath(x) \geq y\} =$$
$$= y = \sup\{\imath(x) : x \in X, \imath(x) \leq y\};$$

**(4)** *для $x \in X$ и $b \in B$ выполняется $b \leq [\![\imath(x) = 0]\!]$ в том и только в том случае, если $x \in b^\perp$.*

$\lhd$ В теореме 4.4.12 было доказано, что существует подгруппа $\mathscr{X}$ аддитивной группы поля действительных чисел $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(B)}$, а также аддитивный и решеточный изоморфизм $\imath := \imath_X$ из $X$ в $\mathscr{X}$. Пусть $e$ — ненулевой положительный элемент группы $\mathscr{X}$. Заменяя в случае необходимости $\mathscr{X}$ на изоморфную ей группу $e^{-1}\mathscr{X}$, можно считать, что $e = \mathbb{1} \in \mathscr{X}$. Заметим, что $X^\wedge$ — векторное пространство над полем $\mathbb{R}^\wedge$. Нетрудно понять, что фактор-отображение $\varphi := \varphi_X : X^\wedge \to \mathscr{X}$ в этой ситуации будет $\mathbb{R}^\wedge$-линейным. В частности, $[\![\varphi((\lambda x)^\wedge) = \lambda^\wedge \varphi(x^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$ $(\lambda \in \mathbb{R},\, x \in X)$. Отсюда получаем $[\![\imath(\lambda x) = \lambda^\wedge \imath(x)]\!] = \mathbb{1}$ или $\imath(\lambda x) = \lambda \imath(x)$ (см. 5.2.2). Теперь для $\mathbb{1} = \operatorname{mix}(b_\xi \imath(e_\xi))$, $(e_\xi) \subset X$ и для $\lambda \in \mathbb{R}$ можно написать

$$b_\xi \le [\![\lambda^\wedge = \lambda^\wedge \cdot \imath e_\xi]\!] \wedge [\![\lambda^\wedge \cdot \imath e_\xi = \imath(\lambda e_\xi)]\!] \wedge [\![\imath(\lambda e_\xi) \in \mathscr{X}]\!] \le [\![\lambda^\wedge \in \mathscr{X}]\!].$$

Стало быть, $\lambda^\wedge \in \mathscr{X}$, поэтому $[\![\mathbb{R}^\wedge \subset \mathscr{X} \subset \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}$. Более того, $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{X}$ — векторная подрешетка поля $\mathscr{R}$, рассматриваемого со структурой векторной решетки над $\mathbb{R}^\wedge$». Но тогда $\mathscr{X}{\downarrow}$ — векторная подрешетка расширенного $K$-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$, а $\imath$ можно считать вложением $X$ в $\mathscr{R}{\downarrow}$. Остается проверить (1)–(4).

(1) Возьмем такие $A \subset X$ и $a \in X$, что $a = \sup(A)$. Пусть $z = \sup(\imath(A))$, где супремум вычисляется в $\mathscr{R}{\downarrow}$.

Из очевидного соотношения $[\![\mathscr{X}$ минорантно в $\mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}$ выводится без труда, что $\mathscr{X}{\downarrow}$ минорантно в $\mathscr{R}{\downarrow}$. Но тогда $\imath(X)$ также минорантно в $\mathscr{R}{\downarrow}$ (см. 4.4.12). Если $\imath(a) \ge z$, то для некоторого $0 < x \in X$ будет $\imath(x) \le \imath(a) - z$ или $z \le \imath(a - x)$. Это означает, что $a - x$ есть верхняя граница множества $A$ и в силу равенства $a = \sup(A)$ должно быть $a - x \ge a$ или $x \le 0$. Полученное противоречие показывает, что $z = \imath(a)$.

(2) Поскольку $\imath(X)$ минорантно в $\mathscr{R}{\downarrow}$, то $\mathscr{R}{\downarrow} = \imath(X)^{\perp\perp}$. Тем более выполняется равенство $\mathscr{R}{\downarrow} = J(\imath(X))^{\perp\perp}$, где $J(\imath(X))$ — порядковый идеал, порожденный множеством $\imath(X)$.

(3) Соотношение $[\![\mathbb{R}^\wedge \subset \mathscr{X} \subset \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}$ позволяет заключить, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{X}$ — плотная подгруппа в $\mathscr{R}$». Поэтому для любого $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ верно

$$\inf\{x' \in X : x' \ge x\} = x = \sup\{x' \in X : x' \le x\}.$$

Привлекая 5.2.3 (2), отсюда выводим непосредственно

$$\inf\{x' \in \mathscr{X}{\downarrow} : x' \ge x\} = x = \sup\{x' \in \mathscr{X}{\downarrow} : x' \le x\}$$

и остается учесть минорантность $\imath(X)$ в $\mathscr{X}\!\downarrow$.

(4) Было обосновано в 4.4.12. $\triangleright$

**5.2.5.** Отметим несколько следствий установленной реализационной теоремы.

**(1)** *Пусть $X$ — архимедова векторная решетка, база $\mathscr{B}(X)$ которой изоморфна булевой алгебре $B$. Найдется элемент $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющий условиям:*

- **(a)** $\mathbb{V}^{(B)} \models$ *«$\mathscr{X}$ — векторная подрешетка поля вещественных чисел $\mathscr{R}$, рассматриваемого со структурой векторной решетки над $\mathbb{R}^{\wedge}$».*
- **(b)** $X' := \mathscr{X}\!\downarrow$ *— расширенная векторная решетка с проекциями, представляющая $r$-плотную подрешетку $K$-пространства $\mathscr{R}\!\downarrow$;*
- **(c)** *существует линейный и решеточный изоморфизм $\imath : X \to X'$ с сохранением точных границ, причем для $x \in X'$ имеются разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{Pr}(X')$ и семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $X$ такие, что*

$$x = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi \circ \imath(x_\xi).$$

$\triangleleft$ Все эти утверждения, по существу, содержатся в 5.2.4. Покажем, например, $r$-плотность $X'$ в $\mathscr{R}\!\downarrow$. Если $x \in \mathscr{R}\!\downarrow$, то $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$x$ — вещественное число и оно может быть аппроксимировано с любой точностью элементами $\mathscr{X}$». Иными словами, справедливо равенство

$$[\![(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{\wedge})(\varepsilon > 0 \to (\exists\, \lambda \in \mathscr{X})(|\lambda - x| < \varepsilon))]\!] = \mathbb{1}.$$

Расписывая булевы оценки истинности для кванторов, для любого $\varepsilon > 0$ найдем $\lambda \in X'$ такой, что $|\lambda - x| \le \varepsilon\mathbb{1}$, а это и требовалось. $\triangleright$

**(2)** *Если $X$ — это $K$-пространство, то $\mathscr{X} = \mathscr{R}$, а $\imath(X)$ — фундамент в $\mathscr{R}\!\downarrow$. Образом $X$ при изоморфизме $\imath$ служит все $\mathscr{R}\!\downarrow$ в том и только в том случае, если $X$ — расширенное $K$-пространство.*

$\triangleleft$ Требуемое вытекает из 5.2.2 и 5.2.4 (2, 3). $\triangleright$

**(3)** *Расширенные $K$-пространства порядково изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют изоморфные базы.*

$\triangleleft$ Действительно, если $X$ и $Y$ — расширенные $K$-пространства, а $h$ — порядковый изоморфизм $X$ на $Y$, то соответствие $K \mapsto h(K)$

($K \in \mathscr{B}(X)$) есть изоморфизм баз. Наоборот, если $\mathscr{B}(X)$ и $\mathscr{B}(Y)$ изоморфны булевой алгебре $B$, то ввиду (2) $X$ и $Y$ порядково изоморфны расширенному $K$-пространству $\mathscr{R}{\downarrow}$. $\triangleright$

**(4)** *Расширением* $K$-пространства $X$ называют пару $(Y, \imath)$, где $Y$ — также $K$-пространство, а $\imath$ — изоморфизм $X$ на некоторый фундамент в $Y$.

В классе $\mathrm{Ext}(X)$ всех расширений $K$-пространства введем предпорядок следующим образом. Для $(Y, \imath)$ и $(Z, \jmath)$ из $\mathrm{Ext}(X)$ положим $(Y, \imath) \prec (Z, \jmath)$, если существует изоморфизм $h$ пространства $Y$ на некоторый фундамент в $Z$ такой, что $h \circ \imath = \jmath$. Максимальный элемент предупорядоченного класса $\mathrm{Ext}(X)$ называют *максимальным расширением* $X$ и обозначают символом $mX$. Из (1) и (2) вытекает такой результат.

*Всякое $K$-пространство обладает максимальным расширением. Максимальное расширение единственно с точностью до порядкового изоморфизма и является расширенным $K$-пространством.*

**(5)** *Пусть $X$ — расширенное $K$-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$. Тогда в $X$ можно, и притом единственным способом, определить умножение так, что $X$ становится точным $f$-кольцом, а $\mathbb{1}$ — единицей умножения.*

$\triangleleft$ Отождествим число $\lambda \in \mathbb{R}$ с элементом $\lambda \cdot 1$. В силу (2) $X$ изоморфно $\mathscr{R}{\downarrow}$ и при этом изоморфизме 1 переходит в $\mathbb{1} := 1^{\wedge} \in \mathscr{R}{\downarrow}$, ибо $[\![1^{\wedge}$ — единица поля $\mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}$. Спуск операции умножения в $\mathscr{R}$ доставляет искомую мультипликативную структуру. Если $\times : X^2 \to X$ — еще одно умножение в $X$, удовлетворяющее указанным условиям, то оно экстенсионально и его подъем $(\times){\uparrow}$ есть умножение в $\mathscr{R}$ с единицей 1. Ясно, что тогда $\times = \cdot$, в силу единственности мультипликативной структуры поля $\mathscr{R}$. $\triangleright$

**(6)** *Для любой архимедовой векторной решетки $X$ существуют единственное с точностью до линейного и решеточного изоморфизма $K$-пространство $oX$, а также линейный изоморфизм $\jmath : X \to oX$, сохраняющий точные границы, такие, что*

$$\sup\{\jmath(x) : x \in X, \jmath(x) \le y\} = y = \inf\{\jmath(x) : x \in X, \jmath(x) \ge y\}$$

для каждого $y \in oX$.

$\triangleleft$ Пусть $\mathscr{R}$ и $J(\imath(X))$ те же, что и в 5.2.4. Тогда пара $(J(\imath(X)), \imath)$ удовлетворяет всем указанным условиям. Если $(Y, \jmath)$ — какая-либо пара с теми же свойствами, то базы $\mathscr{B}(Y)$ и $\mathscr{B}(\mathscr{R}{\downarrow})$ изоморфны

между собой, а в силу (2) изоморфными будут и $K$-пространства $mY$ и $\mathscr{R}{\downarrow}$. Значит, можно считать, что $\imath(X) \subset Y \subset \mathscr{R}{\downarrow}$, причем $Y$ — фундамент $\mathscr{R}{\downarrow}$. Тогда $J(\imath(X)) \subset Y$. Но для каждого $y \in Y$ должны существовать такие $x'$ и $x'' \in X$, что $\imath(x') \leq y \leq \imath(x'')$, т. е. должно быть $Y \subset J(\imath(X))$. $\triangleright$

Пусть $F$ — это $K$-пространство и $A \subset F$. Обозначим через $dA$ множество всех $c \in F$, представимых в виде $o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi a_\xi$, где $(a_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset A$ и $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{Pr}(F)$. Пусть $rA$ — множество всех элементов $x \in F$ вида $x = r\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n$, где $(a_n)$ — произвольная последовательность в $A$, сходящаяся с регулятором.

**(7)** *Для архимедовой векторной решетки $X$ имеет место формула $oX = rdX$.*

**5.2.6. *Теорема.*** *Пусть $X$ — некоторое $K_\sigma$-пространство с единицей $\mathbb{1}$. Спектральная функция $\lambda \mapsto e_\lambda^x$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) элемента $x \in X$ обладает следующими свойствами:*

**(1)** $e_\lambda^x \leq e_\mu^x$ *при* $\lambda \leq \mu$;

**(2)** $e_{+\infty}^x := \bigvee\limits_{\mu\in\mathbb{R}} e_\mu^x = \mathbb{1}$, $e_{-\infty}^x := \bigwedge\limits_{\mu\in\mathbb{R}} e_\mu^x = 0$;

**(3)** $\bigvee\limits_{\mu<\lambda} e_\mu^x = e_\lambda^x$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;

**(4)** $x \leq y \leftrightarrow (\forall\, \lambda \in \mathbb{R})\ (e_\lambda^y \leq e_\lambda^x)$;

**(5)** $e_\lambda^{x+y} = \bigvee\{e_\mu^x \cdot e_\nu^y : \mu, \nu \in \mathbb{R}, \mu + \nu = \lambda\}$;

**(6)** $e_\lambda^{x\cdot y} = \bigvee\{e_\mu^x \cdot e_\nu^y : 0 \leq \mu, \nu \in \mathbb{R}, \mu\nu = \lambda\}$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$;

**(7)** $e_\lambda^{-x} = \bigvee\{\mathbb{1} - e_{-\mu}^x : \mu \in \mathbb{R}, \mu < \lambda\} = (\mathbb{1} - e_{-\lambda}^x) \cdot e_{(x+\lambda\mathbb{1})}$;

**(8)** $x = \inf(A) \leftrightarrow (\forall\, \lambda \in \mathbb{R})(e_\lambda^x = \bigvee\{e_\lambda^a : a \in A\})$;

**(9)** $e_\lambda^{x\vee y} = e_\lambda^x \cdot e_\lambda^y$;

**(10)** $e_\lambda^{cx} = ce_\lambda^x + c^*$ *при* $\lambda > 0$,
$e_\lambda^{cx} = ce_\lambda^x$ *при* $\lambda \leq 0$ $\quad (c \in \mathfrak{C}(X))$.

*При вычислении точных границ в (2), (3) и (5)–(7) можно считать, что $\mu$ и $\nu$ действуют в некоторое плотное подполе $\mathbb{P}$ поля $\mathbb{R}$.*

$\triangleleft$ Предположим сначала, что $X$ — это $K$-пространство. В силу теоремы 5.2.4, без ограничения общности можно считать, что $X = \mathscr{R}{\downarrow}$. Но тогда требуемые утверждения легко выводятся из 5.2.3 (5) и свойств чисел. Докажем, например, (6) и (8). Пусть $x \geq 0$, $y \geq 0$, и предположим, что существует произведение $x \cdot y$. Тогда $x$ и $y$ — неотрицательные числа внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. В силу 5.2.3 (5) $e_\lambda^{x\cdot y} = \chi([\![x \cdot y < \lambda^\wedge]\!])$, $e_\lambda^x = \chi([\![x < \lambda^\wedge]\!])$ и $e_\lambda^y = \chi([\![y < \lambda^\wedge]\!])$. В то же время внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполнено

$$
\begin{gathered}
(\forall\, x \in \mathscr{R})(\forall\, y \in \mathscr{R})\big(x \geq 0 \wedge y \geq 0 \to (x \cdot y < \lambda \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists\, 0 < \mu,\, \nu \in \mathbb{P}^{\wedge})(x < \mu) \wedge (y < \nu) \wedge (\lambda = \mu\nu))\big),
\end{gathered}
$$

следовательно,

$$
[\![x \cdot y < \lambda^{\wedge}]\!] = \bigvee_{\substack{0<\mu,\nu\in\mathbb{P}\\ \lambda=\mu\nu}} \{[\![x < \mu^{\wedge}]\!] \wedge [\![y < \nu^{\wedge}]\!]\}.
$$

Отсюда и вытекает требуемое.

Возьмем теперь $A \subset X$ и допустим, что $x = \inf(A)$. Тогда $e_\lambda^x = \chi([\![x < \lambda^{\wedge}]\!]) = \chi([\![\inf(A\!\uparrow) < \lambda^{\wedge}]\!])$ в силу 5.2.3 (1, 5). Однако $A\!\uparrow$ — некоторое множество вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, поэтому

$$
\mathbb{V}^{(B)} \models \inf(A\!\uparrow) < \lambda^{\wedge} \leftrightarrow (\exists\, a \in A\!\uparrow)(a < \lambda^{\wedge}).
$$

Вычисляя булевы оценки истинности, находим

$$
[\![x < \lambda^{\wedge}]\!] = \bigvee_{a\in A} [\![a < \lambda^{\wedge}]\!],
$$

следовательно,

$$
e_\lambda^x = \bigvee\{\chi([\![a < \lambda^{\wedge}]\!]) : a \in A\} = \bigvee\{e_\lambda^a : a \in A\}.
$$

Наоборот, допустим, что $e_\lambda^x$ есть супремум множества $\{e_\lambda^a : a \in A\}$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$
[\![x < \lambda^{\wedge}]\!] = [\![(\exists\, a \in A\!\uparrow)(a < \lambda^{\wedge})]\!] = [\![\inf(A\!\uparrow) < \lambda^{\wedge}]\!]
$$

для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$, значит,

$$
[\![(\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^{\wedge})(x < \lambda \leftrightarrow \inf(A\!\uparrow) < \lambda)]\!] = \mathbb{1}.
$$

Последнее влечет $[\![x = \sup(A\!\uparrow)]\!] = \mathbb{1}$ и, привлекая 5.2.3 (2), получим $x = \inf(A)$.

Последнее утверждение теоремы вытекает из того, что если $\mathbb{P}$ — плотное подполе $\mathbb{R}$, то $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «поле $\mathbb{P}^{\wedge}$ плотно в $\mathscr{R}$». В том случае, когда $X$ — это $K_\sigma$-пространство, можно считать $X \subset \mathscr{R}\!\downarrow$. Если в качестве поля $\mathbb{P}$ взять поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то точные границы во всех рассматриваемых формулах будут вычисляться по счетным множествам. Следовательно, точные границы в этих формулах, вычисленные в пространстве $\mathscr{R}\!\downarrow$, фактически принадлежат $X$, стало быть, совпадают с соответствующими точными границами в $X$. $\triangleright$

**5.2.7.** Установим три полезных признака $o$-сходимости.

**(1)** *Пусть вновь $X$ — это $K$-пространство с единицей $\mathbb{1}$. Возьмем порядково ограниченную сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ положительных элементов в $X$. Тогда $(x_\alpha)$ — это сеть, $o$-сходящаяся к нулю в том и только в том случае, если для любого $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ сеть единичных элементов $(e_\varepsilon^{x_\alpha})$ также $o$-сходится к $\mathbb{1}$.*

$\lhd$ В самом деле, по теореме 5.2.4 можно считать $x_\alpha$ положительными элементами $K$-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$. Отображение $s:\alpha\mapsto s(\alpha):=x_\alpha$ имеет модифицированный подъем $\delta:=s{\uparrow}$, который является сетью в $\mathscr{R}$, т. е. числовой сетью внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Ввиду 5.2.3 (3) $o$-$\lim(x_\alpha)=0$ в том и только в том случае, если $[\![\lim(\delta)=0]\!]=\mathbb{1}$. Последнее можно переписать в эквивалентной форме так:

$$\mathbb{V}^{(B)}\models(\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}^\wedge)(\varepsilon>0\to$$
$$\to(\exists\,\alpha\in\mathrm{A}^\wedge)(\forall\,\beta\in\mathrm{A}^\wedge)(\beta\geq\alpha\to\delta(\beta)=x_\beta<\varepsilon)).$$

Расписывая булевы оценки истинности для кванторов, найдем еще одну равносильную запись:

$$(\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,(b_\alpha))(\forall\,\beta\in\mathrm{A})(\alpha\leq\beta\to b_\alpha\leq[\![\delta(\beta^\wedge)=x_\beta<\varepsilon^\wedge]\!]),$$

где $(b_\alpha)$ — разбиение единицы в $B$. Наконец, привлекая 5.2.3 (5), получим

$$(\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,(b_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}})(\forall\,\beta\in\mathrm{A})(\alpha\leq\beta\to\chi(b_\alpha)\leq e_\varepsilon^{x_\beta})$$

или

$$(\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,(b_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}})(\chi(b_\alpha)\leq\bigwedge\{e_\varepsilon^{x_\beta}:\beta\geq\alpha\}).$$

Так как $\vee(b_\alpha)=\mathbb{1}$, то отсюда видно, что $o$-$\lim x_\alpha=0$ равносильно утверждению: для каждого $\varepsilon>0$ верно

$$o\text{-}\lim(e_\varepsilon^{x_\alpha})=\liminf(e_\varepsilon^{x_\alpha})=\bigvee_{\alpha\in\mathrm{A}}\bigwedge\{e_\varepsilon^{x_\beta}:\beta\geq\alpha\}=\mathbb{1}.\ \rhd$$

**(2)** *Порядково ограниченная сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ в $K$-пространстве $X$ с единицей $\mathbb{1}$ $o$-сходится к элементу $x\in X$ в том и только в том случае, если для любого $\varepsilon>0$ существует разбиение единицы $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ в $\mathfrak{Pr}(X)$ такое, что*

$$\pi_\alpha|x-x_\beta|\leq\varepsilon\mathbb{1}\quad(\alpha,\beta\in\mathrm{A},\ \beta\geq\alpha).$$

$\lhd$ Для доказательства вновь привлечем 5.2.4. Пусть $s$, $\delta$ те же, что и в (1). Рассуждая, как и выше, найдем, что $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ равносильно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение единицы $(b_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{A}}$ в $B$ такое, что

$$b_\alpha \leq [\![|x_\beta - x| \leq \varepsilon^\wedge]\!] \quad (\alpha, \beta \in \mathrm{A},\ \beta \geq \alpha).$$

Если $\pi_\alpha := \chi(b_\alpha)$ (см. 5.2.2), то последнее соотношение означает, что

$$\pi_\alpha |x_\beta - x| \leq \varepsilon \mathbb{1} \quad (\alpha, \beta \in \mathrm{A},\ \beta \geq \alpha).\ \rhd$$

**(3)** *Порядково ограниченная сеть $(x_\alpha)$ в $K$-пространстве $X$ с единицей $o$-сходится к элементу $x \in X$ в том и только в том случае, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует возрастающая сеть проекторов $(\rho_\alpha)$ такая, что $o\text{-}\lim(\rho_\alpha) = I_X$ и $\rho_\alpha |x - x_\beta| \leq \varepsilon \mathbb{1} \quad (\alpha, \beta \in \mathrm{A},\ \beta \geq \alpha)$.*

$\lhd$ В самом деле, нужно лишь в (2) положить $\rho_\alpha := \bigvee\{\pi_\beta : \beta \geq \alpha\}$. $\rhd$

**5.2.8.** Обратимся теперь к результатам о функциональной реализации векторных решеток.

**(1)** Пусть $B$ — полная булева алгебра. *Разложением* (не путать с разбиением) *единицы* в алгебре $B$ называют отображение $e : \mathbb{R} \to B$, обладающее свойствами 5.2.6 (1–3) спектральной функции.

Множество всех разложений единицы в $B$ обозначим символом $\mathfrak{R}(B)$. В этом множестве введем сложение, умножение на действительные числа и порядок по правилам (ср. 5.2.6 (4–6)):

$$\begin{gathered}
(e_1 + e_2)(\lambda) := \bigvee\{e_1(\mu) \cdot e_2(\nu) : \mu, \nu \in \mathbb{R};\ \mu + \nu = \lambda\};\\
(\alpha e)(\lambda) := e(\lambda/\alpha) \quad (\alpha > 0);\\
(-e)(\lambda) := \bigvee_{\mu<\lambda} 1 - e(-\mu) = 1 - \bigwedge_{\mu<\lambda} e(-\mu);\\
(0 \cdot e)(\lambda) := \mathbb{0}(\lambda) := \begin{cases} \mathbb{1}, & \text{если } \lambda > 0,\\ 0, & \text{если } \lambda \leq 0; \end{cases}\\
e_1 \leq e_2 \leftrightarrow (\forall\, \lambda \in \mathbb{R})\, e_1(\lambda) \geq e_2(\lambda).
\end{gathered}$$

*Множество $\mathfrak{R}(B)$ с введенными операциями и порядком есть расширенное $K$-пространство, изоморфное $\mathscr{R}{\downarrow}$.*

$\lhd$ Согласно 5.2.2, без ограничения общности можно считать, что $B$ — база единичных элементов $K$-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$. Элементу $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ поставим в соответствие его спектральную функцию $\lambda \mapsto e_\lambda^x$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Тем самым получим инъективный решеточный гомоморфизм из $\mathscr{R}{\downarrow}$ в $\mathfrak{R}(B)$, как видно из теоремы 5.2.6. Нужно обосновать сюръективность этого гомоморфизма. Возьмем произвольное разложение единицы $e : \mathbb{R} \to B$. Пусть $\Sigma$ — множество всех разбиений числовой прямой, т. е. $\sigma \in \Sigma$, если $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ — строго возрастающая функция, $\lim_{n\to\infty} \sigma(n) = \infty$ и $\lim_{n\to\infty} \sigma(-n) = -\infty$ (как обычно, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел). В расширенном $K$-пространстве $\mathscr{R}{\downarrow}$ существует сумма $x_\sigma := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sigma(n+1)b_{n\sigma}$, где $b_{n\sigma} := e(\sigma(n+1)) - e(\sigma(n))$. Положим $A := \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ и $x = \inf(A)$. Инфимум существует, ибо $x_\sigma \geq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\sigma}(n)b_{n\sigma}$ для фиксированного разбиения $\overline{\sigma} \in \Sigma$. Заметим также, что $x_\sigma = \operatorname{mix}(b_{n\sigma}\sigma(n+1)^\wedge)$ и

$$[\![x_\sigma < \lambda^\wedge]\!] = \bigvee\{b_{n\sigma} : \sigma(n+1) < \lambda\} = \bigvee\{e(\sigma(n+1)) : \sigma(n+1) < \lambda\}.$$

Так как $[\![x = \inf(A{\uparrow})]\!] = \mathbb{1}$, то справедливы вычисления:

$$\begin{gathered}[\![x < \lambda^\wedge]\!] = [\![(\exists\, a \in A{\uparrow})a < \lambda^\wedge]\!] = \\ = \bigvee_{a\in A} [\![a < \lambda^\wedge]\!] = \bigvee_{\sigma\in\Sigma} \bigvee_{\sigma(n+1)<\lambda} b_{n\sigma} = \\ = \bigvee_{\sigma\in\Sigma} \bigvee_{\sigma(n+1)<\lambda} e(\sigma(n)) = \bigvee_{\mu<\lambda} e(\mu) = e(\lambda).\end{gathered}$$

Итак, $e$ — спектральная функция элемента $x$. $\rhd$

**(2)** ***Теорема.*** *Пусть $Q$ — стоуновский компакт полной булевой алгебры $B$, а $\mathscr{R}$ — поле действительных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Векторная решетка $C_\infty(Q)$ служит расширенным $K$-пространством, линейно и решеточно изоморфным $\mathscr{R}{\downarrow}$. Изоморфизм устанавливается сопоставлением элементу $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ функции $\widehat{x} : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ по формуле*

$$\widehat{x}(q) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : [\![x < \lambda^\wedge]\!] \in q\}.$$

$\lhd$ Мы уже убедились в (1), что $K$-пространство $\mathscr{R}{\downarrow}$ изоморфно пространству всех $B$-значных спектральных функций, причем элементу $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ соответствует функция $\lambda \mapsto [\![x < \lambda^\wedge]\!]$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Пусть

элементу $[\![x < \lambda^\wedge]\!] \in B$ соответствует открыто-замкнутое множество $U_\lambda$ стоуновского компакта $Q$. Тогда в силу 5.1.8 (2) каждому элементу $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ соответствует единственная непрерывная функция $\widehat{x} : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $\{\widehat{x} < \lambda\} \subset U_\lambda \subset \{\widehat{x} \leq \lambda\}$. Но тогда $\widehat{x}(q) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : q \in U_\lambda\} = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : [\![x < \lambda^\wedge]\!] \in q\}$. Из соотношений $\bigwedge\{[\![x < \lambda^\wedge]\!]\} = 0$ и $\bigvee\{[\![x < \lambda^\wedge]\!]\} = \mathbb{1}$ (см. 5.2.6 (2)) следует, что замкнутое множество $\bigcap\{U_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ имеет пустую внутренность, а открытое множество $\bigcup\{U_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ плотно в $Q$. Значит, функция $\widehat{x}$ может принимать значения $\pm\infty$ только на нигде не плотном множестве, а потому $\widehat{x} \in C_\infty(Q)$. Элементарную проверку того, что отображение $x \mapsto \widehat{x}$ есть линейный и решеточный изоморфизм, опускаем. $\rhd$

**5.2.9.** Отметим некоторые следствия доказанной теоремы.

**(1)** *Пусть $X$ — это $K$-пространство и $\{e_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — полное множество попарно дизъюнктных положительных элементов в $X$. Пусть $Q$ — стоуновский компакт булевой алгебры компонент $\mathscr{B}(X)$. Тогда существует и притом единственный линейный и решеточный изоморфизм $X$ на фундамент $K$-пространства $C_\infty(Q)$ такой, что $e_\xi$ переходит в характеристическую функцию некоторого открыто-замкнутого множества $Q_\xi \subset Q$. Этот изоморфизм сопоставляет элементу $x \in X$ функцию $\widehat{x} : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ по правилу*

$$\widehat{x}(q) := \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R} : \{e_\lambda^\xi\}^{\perp\perp} \in q\right\} \quad (q \in Q_\xi),$$

*где $(e_\lambda^\xi)$ — характеристика проекции $x$ на компоненту $\{e_\xi\}^{\perp\perp}$ относительно единицы $e_\xi$.*

**(2)** *Пространство $X$ является расширенным ($K$-пространством ограниченных элементов) в том и только в том случае, если его образом при указанном изоморфизме служит все $C_\infty(Q)$ (подпространство $C(Q)$ всех непрерывных конечных функций на компакте $Q$).*

**(3)** *Любая архимедова векторная решетка ($f$-алгебра) $X$ линейно и решеточно изоморфна векторной подрешетке (и подалгебре) пространства $C_\infty(Q)$, где $Q$ — стоуновский компакт базы $\mathscr{B}(X)$.*

Обозначим через $C_\infty(Q, S\mathbb{Z})$ подмножество функций из $C_\infty(Q)$, принимающих целые значения на открыто-замкнутом множестве $S$ в $Q$. Понятно, что $C_\infty(Q, S\mathbb{Z})$ — расширенное $f$-кольцо.

**(4)** *Полная решеточно упорядоченная группа $G$ изоморфна некоторому фундаменту расширенной решеточно упорядоченной группы $C_\infty(Q, S\mathbb{Z})$, где $Q$ — стоуновский компакт базы $\mathscr{B}(G)$.*

$\lhd$ Если $\mathscr{G}$ — булевозначная реализация $G$, то $\mathscr{G}$ — полная линейно упорядоченная группа в силу 4.4.10 и 4.4.12. Но тогда либо $\mathscr{G}$ изоморфна $\mathscr{R}$, либо $\mathscr{G}$ — бесконечная циклическая группа. Следовательно, найдется такой $b \in B$, что $b = [\![\mathscr{G} \simeq \mathbb{Z}^{\wedge}]\!]$ и $b^* = [\![\mathscr{G} \simeq \mathscr{R}]\!]$. Так же, как и в 4.4.13, устанавливается, что $G$ разлагается в прямую сумму двух компонент, одна из которых реализуется как $\mathscr{R}$ в $\mathbb{V}^{([0,b^*])}$, а другая — как $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{V}^{([0,b])}$. Остается привлечь теорему (1) и заметить, что $\mathbb{Z}^{\wedge}{\downarrow} \simeq B_0(\mathbb{Z}) \simeq C_\infty(S, S\mathbb{Z})$, где $S$ — открыто-замкнутое множество в $Q$, соответствующее элементу $b \in B$. $\rhd$

Аналогично выводится и следующее утверждение.

**(5)** *Любое $f$-кольцо $o$-изоморфно прямому произведению двух $f$-колец $K_1$ и $K_2$ таких, что $K_1$ — фундамент и подкольцо расширенного $f$-кольца $C_\infty(Q_1, S_1\mathbb{Z})$, а $K_2$ — фундамент расширенной группы $C_\infty(Q_2, S_2\mathbb{Z})$ с нулевым умножением, где $Q_l$ — стоуновский компакт алгебры $\mathscr{B}(K_l)$ и $S_l \in \mathscr{B}(Q_l)$ $(l := 1, 2)$.*

**5.2.10.** Построим интеграл типа Стилтьеса по спектральной мере. Пусть $\Omega$ — произвольное непустое множество, а $\Sigma$ — некоторая $\sigma$-алгебра подмножеств $\Omega$. Рассмотрим булеву алгебру $B$ единичных элементов некоторого фиксированного $K_\sigma$-пространства $X$. *Спектральной мерой* называют $\sigma$-непрерывный булев гомоморфизм $\mu$ из $\Sigma$ в $B$. Здесь $\sigma$-непрерывность означает, что для всякой последовательности $(e_n)_{n\in\omega}$ элементов $\sigma$-алгебры $\Sigma$ выполняется

$$\mu\Bigg(\bigvee_{n=0}^{\infty} e_n\Bigg) = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mu(e_n).$$

Возьмем измеримую функцию $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Для произвольного разбиения числовой прямой $\Lambda := (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $-\infty \leftarrow \dots \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \to +\infty$, положим $e_n := f^{-1}([\lambda_n, \lambda_{n+1}))$ и составим интегральные суммы

$$\underline{\sigma}(f, \Lambda) := \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n \mu(e_n), \quad \overline{\sigma}(f, \Lambda) := \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{n+1} \mu(e_n),$$

где суммы вычисляются в $X$. Ясно, что при любом выборе $t_n \in e_n$ $(n \in \mathbb{Z})$ будет

$$\underline{\sigma}(f, \Lambda) \leq \sum_{-\infty}^{\infty} f(t_n)\mu(e_n) \leq \overline{\sigma}(f, \Lambda).$$

Понятно также, что при измельчении разбиения $\Lambda$ величина $\underline{\sigma}(f,\Lambda)$ возрастает, а $\overline{\sigma}(f,\Lambda)$ убывает. Если существует такой элемент $x \in X$, что $\sup \underline{\sigma}(f,\Lambda) = x = \inf \overline{\sigma}(f,\Lambda)$, где точные границы берутся по всевозможным разбиениям $\Lambda := (\lambda_l)_{l\in\mathbb{Z}}$ числовой прямой при $\delta(\Lambda) := \sup_{n\in\mathbb{Z}}\{\lambda_n - \lambda_{n-1}\} \to 0$, то говорят, что *функция $f$ интегрируема по спектральной мере $\mu$* и пишут при этом

$$I(f) := I_\mu(f) := \int\limits_\Omega f\,d\mu := \int\limits_\Omega f(t)\,d\mu(t) := x.$$

Заметим, что $0 \le \overline{\sigma}(f,\Lambda) - \underline{\sigma}(f,\Lambda) \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\mu(e_k) = \delta\mathbb{1}$, где $\delta := \delta(\Lambda)$. Поэтому функция $f$ интегрируема по спектральной мере $\mu$ в том и только в том случае, если существуют суммы $\overline{\sigma}(f,\Lambda)$ и $\underline{\sigma}(f,\Lambda)$ хотя бы для одного разбиения $\Lambda$. В частности, ограниченная измеримая функция интегрируема.

**(1)** *Пусть $X = \mathscr{R}{\downarrow}$, а $\mu$ — спектральная мера со значениями в $B := \mathfrak{C}(X)$. Тогда для любой измеримой функции $f$ выполняется*

$$[\![ I_\mu(f) < \lambda^\wedge ]\!] = \mu(\{f < \lambda\}) \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

*причем $I_\mu(f)$ — единственный элемент $K$-пространства $X$, удовлетворяющий этому условию.*

$\lhd$ Возьмем произвольное число $\lambda \in \mathbb{R}$, и пусть $b \le [\![ \lambda^\wedge \le I_\mu(f) ]\!]$. По теореме из 5.2.2 для любого разбиения $\Lambda$ будет $b\lambda \le bI_\mu(f) \le b\overline{\sigma}(f,\Lambda)$. Если разбиение $\Lambda := (\lambda_l)_{l\in\mathbb{Z}}$ таково, что $\lambda_0 = \lambda$ и $c_n := \{u \in \Omega : \lambda_n \le f(u) < \lambda_{n+1}\}$, то при $n < -1$ имеем $\lambda b \wedge \mu(c_n) \le \lambda_{n+1} b \wedge \mu(c_n)$ и $\lambda_{n+1} < \lambda$. Следовательно, должно быть $b \wedge \mu(c_n) = 0$. Поэтому для $c := \bigvee_{n=-1}^{-\infty} c_n$ будет $b \wedge \mu(c) = 0$ или $b \le \mu(c)^* = \mu(\Omega - c) = \mu(\{f \ge \lambda\})$. Итак, $[\![ I_\mu(f) \ge \lambda^\wedge ]\!] = \mu(\{f \ge \lambda\})$, а это равносильно требуемому соотношению.

Допустим, что $[\![ x < \lambda^\wedge ]\!] = \mu(\{f < \lambda\})$ для некоторого $x \in X$. В силу установленного свойства $I_\mu(f)$ можно написать

$$\begin{aligned} &[\![ (\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^\wedge)(I_\mu(f) < \lambda \leftrightarrow x < \lambda) ]\!] = \\ &= \bigwedge_{\lambda\in\mathbb{R}} [\![ I_\mu(f) < \lambda^\wedge ]\!] \Leftrightarrow [\![ x < \lambda^\wedge ]\!] = \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Учитывая плотность $\mathbb{R}^\wedge$ в $\mathscr{R}$, получаем, что $x = I_\mu(f)$. $\rhd$

**(2)** *В условиях предложения* (1) *функция $\lambda \mapsto \mu(\{f < \lambda\})$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, является характеристикой элемента $I_\mu(f)$.*

**5.2.11. *Теорема.*** *Пусть $X$ — расширенное $K_\sigma$-пространство, а $\mu : \Sigma \to B := \mathfrak{C}(X)$ — некоторая спектральная мера. Спектральный интеграл $I_\mu(\,\cdot\,)$ представляет собой секвенциально $o$-непрерывный (линейный мультипликативный и решеточный) гомоморфизм из $f$-алгебры измеримых функций $\mathscr{M}(\Omega, \Sigma)$ в $X$.*

$\triangleleft$ Не ограничивая общности, будем считать, что $X \subset \mathscr{R}{\downarrow}$. Суммы $\overline{\sigma}(f, \Lambda)$ и $\underline{\sigma}(f < \Lambda)$ существуют, так как суммируются попарно дизъюнктные элементы, а пространство $X$ расширенно. Отсюда, как уже отмечалось, вытекает существование $I_\mu(f)$. Линейность и положительность оператора $I_\mu$ очевидны. Докажем его секвенциальную $o$-непрерывность. Возьмем убывающую последовательность $(f_n)_{n\in\omega}$ измеримых функций, для которой выполнено $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ при всех $t \in \Omega$. Пусть $x_n := I_\mu(f_n)$ $(n \in \omega)$ и $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Если обозначить $c_n := \{t \in \Omega : f_n(t) < \varepsilon\}$, то $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} c_n$. В силу 5.2.3 (5) и 5.2.10 (2) можно написать

$$o\text{-}\lim_{n\to\infty} e_\varepsilon^{x_n} = o\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu(c_n) = \bigvee_{n\in\omega} \mu(c_n) = \mu(\Omega) = \mathbb{1}.$$

По признаку $o$-сходимости 5.2.7 (1) получаем $o\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Далее, для любых измеримых функций $f$ и $g : \Omega \to \mathbb{R}$ из 5.2.6 (9) и 5.2.10 (2) вытекает

$$e_\lambda^{f\vee g} = \mu(\{f \vee g < \lambda\}) = \mu(\{f < \lambda\} \cap \{g < \lambda\}) =$$
$$= \mu(\{f < \lambda\}) \wedge \mu(\{g < \lambda\}) = e_\lambda^{I(f)} \wedge e_\lambda^{I(g)} = e_\lambda^{I(f)\vee I(g)}.$$

Следовательно, $I(f \vee g) = I(f) \vee I(g)$. Это означает, что $I := I_\mu$ — решеточный гомоморфизм. Аналогично для $f \geq 0$ и $g \geq 0$ из 5.2.6 (6) и 5.2.8 (2) видно, что при $\lambda \in \mathbb{Q}$ будет

$$e_\lambda^{I(fg)} = \mu(\{fg < \lambda\}) = \bigvee \{\mu(\{f < \varkappa\}) \wedge \mu(\{g < \nu\}) : \lambda = \nu\varkappa,$$
$$0 \leq \varkappa, \nu \in \mathbb{Q}\} = \bigvee \{e_\varkappa^{I(f)} \cdot e_\nu^{I(g)} : 0 \leq \varkappa, \nu \in \mathbb{Q}, \nu\varkappa = \lambda\} = e_\lambda^{I(f)\cdot I(g)}.$$

Итак, $I(f) \cdot I(g) = I(fg)$. Для произвольных $f$ и $g$ последнее равенство вытекает из уже установленных свойств спектрального интеграла:

$$I_\mu(fg) = I_\mu(f^+g^+) + I_\mu(f^-g^-) - I_\mu(f^+g^-) - I_\mu(f^-g^+) =$$
$$= I_\mu(f)^+ I_\mu(g)^+ + I_\mu(f)^- I_\mu(g)^- - I_\mu(f)^- I_\mu(g)^+ - I_\mu(f)^+ I_\mu(g) =$$
$$= I_\mu(f) \cdot I_\mu(g). \ \triangleright$$

**5.2.12.** *Пусть* $e_0, \dots, e_{n-1} : \mathbb{R} \to B$ *— произвольный конечный набор спектральных функций со значениями в* $\sigma$*-алгебре* $B$*. Тогда существует единственная* $B$*-значная спектральная мера* $\mu$*, определенная на борелевской* $\sigma$*-алгебре* $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ *пространства* $\mathbb{R}^n$*, для которой*

$$\mu\left(\prod_{l=0}^{n-1}(-\infty, \lambda_l)\right) = \bigwedge_{l=0}^{n-1} e_l(\lambda_l),$$

*каковы бы ни были* $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$*.*

$\triangleleft$ Не ограничивая общности, можно предположить, что $B = \mathrm{Clop}\,B(Q)$, где $Q$ — стоуновский компакт $B$. Согласно 5.2.8 (2) существуют непрерывные функции $x_l : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ $(l := 0, \dots, n-1)$ такие, что $e_l(\lambda) = \{x_l < \lambda\}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $l = 0, \dots, n-1$. Положим $f(t) := (x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)) \in \mathbb{R}^n$, если все $x_l(t)$ конечны и $f(t) = \infty$, если $x_l(t) = +\infty$ хотя бы для одного индекса $l$. Тем самым определено непрерывное отображение $f : Q \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ (базис фильтра окрестностей точки $\infty$ состоит из дополнений к всевозможным шарам с центром в нуле). Ясно, что $f$ измеримо относительно борелевских алгебр $\mathrm{Bor}(Q)$ и $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\mathfrak{B}_\sigma(Q)$ есть $\sigma$-алгебра подмножеств $Q$, порожденная алгеброй $\mathrm{Clop}(Q)$, а $\Delta$ — это $\sigma$-идеал в $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)$, состоящий из тощих множеств. Тогда существует изоморфизм $h$ фактор-алгебры $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)/\Delta$ на $\sigma$-алгебру $B := \mathrm{Clop}(Q)$. Обозначим через $[A]_\Delta$ класс эквивалентности множества $A \in \mathrm{Clop}_\sigma(Q)$. Пусть $\mu : \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n) \to B$ действует по формуле $\mu(A) := h([f^{-1}(A)]_\Delta) \quad (A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n))$. Очевидно, что $\mu$ — спектральная мера. Если $A = \prod_{l=0}^{n-1}(-\infty, \lambda_l)$, то $f^{-1}(A) = \bigcap_{l=0}^{n-1}\{x_l < \lambda_l\} = \bigwedge_{l=0}^{n-1} e_l(\lambda_l)$, значит, $\mu(A) = e_0(\lambda_0) \wedge \dots \wedge e_{n-1}(\lambda_{n-1})$. Если $\mu'$ — еще одна спектральная мера с теми же свойствами, что и $\mu$, то множество $\mathscr{B} := \{A \subset \mathbb{R}^n : \mu(A) = \mu'(A)\}$ является $\sigma$-алгеброй и содержит все множества вида $(-\infty, \lambda_0) \times \dots \times (-\infty, \lambda_{n-1})$. Поэтому $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{B}$ и $\mu = \mu'$. $\triangleright$

Возьмем теперь некоторые элементы $x_0, \dots, x_{n-1}$ в $K_\sigma$-пространстве $X$ с единицей $\mathbb{1}$. Пусть $e^{x_l} : \mathbb{R} \to B := \mathfrak{C}(\mathbb{1})$ — характеристика

элемента $x_l$. В соответствии с доказанным предложением существует спектральная мера $\mu : \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n) \to B$, для которой

$$\mu\left(\prod_{l=0}^{n-1}(-\infty, \lambda_l)\right) = \bigwedge_{l=0}^{n-1} e^{x_l}(\lambda_l).$$

Интеграл от измеримой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по мере $\mu$ обозначим через $I(f, \mathfrak{r}) := I(f, x_0, \dots, x_{n-1})$, где $\mathfrak{r} := (x_0, \dots, x_{n-1})$. Напомним, что $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ — пространство всех борелевских функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ — является $K_\sigma$-пространством и точной $f$-алгеброй.

**5.2.13. *Теорема.*** *Для любого упорядоченного набора $\mathfrak{r} := (x_0, \dots, x_{n-1})$ элементов расширенного $K_\sigma$-пространства $X$ отображение $f \mapsto I(f, \mathfrak{r})$ $(f \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ представляет собой гомоморфизм $f$-алгебры $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ в $X$, удовлетворяющий условиям*

**(1)** *$I(d\lambda_l, \mathfrak{r}) = x_l$ $(l < n)$, где $d\lambda_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — это $l$-я координатная функция $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \mapsto \lambda_l$;*

**(2)** *если последовательность $(f_k) \subset \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ такова, что $\lim_{n\to\infty} f_k(t) = f(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}^n$, то выполняется $o$-$\lim_{n\to\infty} I(f_k, \mathfrak{r}) = I(f, \mathfrak{r})$.*

$\triangleleft$ Благодаря теореме 5.2.11, нужно лишь доказать утверждение (1). При этом ограничимся для простоты случаем $n = 1$.

Итак, пусть $x \in X$, а $\mu$ — спектральная мера, ассоциированная с характеристикой $(e^x_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ элемента $x$. Докажем, что тогда

$$x = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda d\mu(\lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda de^x_\lambda.$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Пусть разбиение $\Lambda := (\lambda_l)$ числовой прямой таково, что $\lambda_{l+1} - \lambda_l < \varepsilon$ для всех $l \in \mathbb{Z}$. Положим

$$\sigma := \sum_{-\infty}^{\infty} \xi_n \mu([\lambda_{n-1}, \lambda_n)) = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi_n (e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}}),$$

где $\xi_n \in [\lambda_{n-1}, \lambda_n)$. В силу 5.2.3 (5)

$$b_n := e^x_{\lambda_n} - e^x_{\lambda_{n-1}} = e^x_{\lambda_n} \wedge (e^x_{\lambda_{n-1}})^* = [\![\lambda^\wedge_{n-1} \leq x < \lambda^\wedge_n]\!].$$

Заметим, что $b_n = [\![\xi_n^{\wedge} = \sigma]\!]$ (см. 5.2.2). С другой стороны,

$$b_n = [\![\lambda_{n-1}^{\wedge} \leq x < \lambda_n^{\wedge}]\!] \wedge [\![\lambda_{n-1}^{\wedge} - \lambda_{n-1}^{\wedge} \leq \varepsilon^{\wedge}]\!] \wedge$$
$$\wedge [\![\lambda_{n-1}^{\wedge} \leq \xi_n < \lambda_n^{\wedge}]\!] \leq [\![\, |x - \xi_n^{\wedge}| \leq \varepsilon^{\wedge}]\!],$$

следовательно, $[\![\, |x - \sigma| \leq \varepsilon^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$ или $|x - \sigma| < \varepsilon\mathbb{1}$. Это означает, что $x$ есть $r$-предел требуемых интегральных сумм. $\triangleright$

**5.2.14. *Теорема Фрейденталя.*** *Пусть $E$ — некоторое $K_\sigma$-пространство с единицей $\mathbb{1}$. Всякий элемент $x \in E$ допускает представление*

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, de_\lambda^x,$$

*где интеграл — предел с регулятором $\mathbb{1}$ интегральных сумм $x(\beta) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_n (e_{t_{n+1}}^x - e_{t_n}^x)$ при $\delta(\beta) := \sup_{n \in \mathbb{Z}} (t_{n+1} - t_n) \to 0$, где $t_n < \tau_n \leq t_{n+1}, \beta := (t_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [t_n, t_{n+1}]$.*

**5.2.15.** Примечания.

**(1)** Теорема Гордона из 5.2.2 впервые установлена в [22] и переоткрыта Т. Йехом в [160], где расширенное $K$-пространство задано другой системой аксиом и фигурирует под именем полной стоуновой алгебры. Теорему Гордона, устанавливающую булевозначный статут понятия $K$-пространства, можно сформулировать так: расширенное $K$-пространство есть интерпретация поля действительных чисел в подходящей булевозначной модели. При этом любая теорема (в рамках теории ZFC) о вещественных числах имеет свой аналог для соответствующего $K$-пространства. Тем самым принцип Канторовича, гласящий, что «элементы $K$-пространства — суть обобщенные числа», получает в булевозначном анализе четкую математическую формулировку. Теорема 5.2.5 (1) получена в [63], см. также [162]. О булевозначном анализе векторных решеток см. [12, 23, 24, 71].

**(2)** Результаты этого параграфа, за редким исключением, хорошо известны в теории векторных решеток. Однако доказательства нетрадиционны: все основные факты выводятся путем интерпретации простых свойств поля действительных чисел в булевозначной модели. Тот факт (см. 5.2.8), что для полной булевой алгебры $B$

множество всех разложений единицы $\mathfrak{R}(B)$ есть расширенное $K$-пространство, база которого изоморфна $B$, установил Л. В. Канторович [45]. Результат 5.2.9 (1) о реализации произвольного $K$-пространства в виде фундамента в $C_\infty(Q)$ впервые установили независимо Б. З. Вулих и Т. Огасавара (см. [18, 45]). Теоремы 5.2.9 (3–5) вытекают из теоремы о представлении $K$-пространств и из 4.4.13. В связи с 5.2.7 и 5.2.5 (3–6) вполне уместно также вспомнить и другие результаты Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера (см. [45]), многие открытия которых лежат за пределами нашего рассмотрения.

**(3)** Существование изоморфизма $h$ в доказательстве теоремы 5.2.12 вытекает из следующей теоремы (см. [101; теорема 29.1]).

***Теорема Люмиса — Сикорского.*** *Пусть $Q$ — стоунов компакт булевой $\sigma$-алгебры $B$. Пусть $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)$ — это $\sigma$-алгебра подмножеств $Q$, порожденная множеством $\mathrm{Clop}(Q)$ всех открыто-замкнутых множеств, а $\Delta$ — это $\sigma$-идеал в $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)$, состоящий из тощих множеств. Тогда алгебра $B$ будет изоморфна фактор-алгебре $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)/\Delta$. Если $\imath_0$ — изоморфизм $B$ на $\mathrm{Clop}(Q)$, то отображение $\imath : b \mapsto [\imath_0(b)]_\Delta \quad (b \in B)$, где $[A]_\Delta$ — класс эквивалентности множества $A \in \mathrm{Clop}_\sigma(Q)$ по идеалу $\Delta$, является изоморфизмом алгебры $B$ на алгебру $\mathrm{Clop}_\sigma(Q)/\Delta$.*

В соответствии с этим фактом нужно положить $h := \imath^{(-1)}$.

**(4)** Борелевские функции от элементов произвольного $K_\sigma$-пространства с единицей, по-видимому, впервые рассмотрел В. И. Соболев [102]. В этой же работе утверждалось, что всякая спектральная функция со значениями в $\sigma$-алгебре определяет спектральную меру на борелевской $\sigma$-алгебре действительной прямой. Однако такую меру нельзя в общем случае получить методом продолжения Каратеодори. Как показал Д. А. Владимиров, для полной булевой алгебры счетного типа продолжение по Каратеодори возможно лишь в том случае, когда она регулярна. Тем самым метод продолжения из 5.2.12 существенно отличается от продолжения по Каратеодори.

**(5)** В случае, когда $n = 1$, теорему 5.2.12 получил М. Райт в [255] как следствие установленной им теоремы Рисса для операторов со значениями в $K_\sigma$-пространстве.

**(6)** Вопрос о совпадении $\mathbb{R}^\wedge$ и $\mathscr{R}$ внутри $(\mathbb{V})^{(B)}$ полностью решен А. Е. Гутманом в [149]: искомое равенство выполнено в том и только в том случае, когда булева алгебра $B$ является $\sigma$-дистрибутивной.

Там же дан пример безатомной булевой алгебры $B$ с указанными свойствами (ср. 1.2.7).

## 5.3. Решеточно нормированные пространства

Функциональные пространства часто допускают естественную нормировку посредством элементов векторной решетки. Это обстоятельство является определяющим для некоторых структурных свойств изучаемых пространств. Помимо этого, норма со значениями в векторной решетке позволяет выделить интересный класс мажорируемых операторов. Начальные сведения об указанных объектах излагаются в текущем параграфе.

**5.3.1.** Рассмотрим векторное пространство $X$ над $\mathbb{R}$ и вещественную векторную решетку $E$. Не оговаривая каждый раз, будем считать, что все рассматриваемые векторные решетки архимедовы. Отображение $p : X \to E_+$ назовем *векторной* ($E$-*значной*) *нормой*, если оно удовлетворяет условиям:

**(1)** $p(x) = \mathbb{0} \leftrightarrow x = \mathbb{0} \quad (x \in X)$;

**(2)** $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad (x \in X,\ \lambda \in \mathbb{R})$;

**(3)** $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad (x, y \in X)$.

Векторную норму $p$ именуют *разложимой* или *нормой Канторовича*, если

**(4)** для любых $e_1, e_2 \in E_+$ и $x \in X$ из $p(x) = e_1 + e_2$ следует существование таких $x_1, x_2 \in X$, что $x = x_1 + x_2$ и $p(x_l) = e_l$ $(l := 1, 2)$.

Тройку $(X, p, E)$ (или, проще, $X, (X, p)$, опуская подразумеваемые параметры) называют *решеточно нормированным пространством*, если $p$ есть $E$-значная норма на векторном пространстве $X$. Если норма $p$ разложима, то и само пространство $X$ называют *разложимым*.

**5.3.2.** Возьмем сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ в пространстве $X$. Говорят, что она *o-сходится* к элементу $x \in X$ и пишут $o\text{-}\lim x_\alpha = x$, если существует убывающая сеть $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ в $E_+$ такая, что $\inf e_\gamma = \mathbb{0}$ и для любого $\gamma \in \Gamma$ найдется индекс $\alpha(\gamma) \in \mathrm{A}$, для которого $p(x - x_\alpha) \leq e_\gamma$ при всех $\alpha \geq \alpha(\gamma)$. Пусть для некоторого элемента e $\in E_+$ выполнено условие: каково бы ни было число $\varepsilon > \mathbb{0}$, найдется индекс $\alpha(\varepsilon) \in \mathrm{A}$ такой, что $p(x - x_\alpha) \leq \varepsilon e$ при всех $\alpha \geq \alpha(\varepsilon)$. Тогда мы будем говорить, что $(x_\alpha)$ *сходится с регулятором e* или $r$-сходится к $x \in X$ и писать

$x = r\text{-}\lim x_\alpha$. Скажем, что $(x_\alpha)$ — это *порядково фундаментальная* или *o-фундаментальная* (*r-фундаментальная*) сеть, если сеть $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{A}\times\mathrm{A}}$ является $o$-сходящейся ($r$-сходящейся) к нулю. Решеточно нормированное пространство называют *порядково полным*, короче, *o-полным* (*r-полным*), если всякая $o$-фундаментальная ($r$-фундаментальная) сеть в нем $o$-сходится ($r$-сходится) к элементу этого пространства.

Возьмем семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и свяжем с ним сеть $(y_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$, где $\mathrm{A} = \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ — множество всех конечных подмножеств $\Xi$ и $y := \sum_{\xi\in\alpha} x_\xi$. Если существует $x := o\text{-}\lim_\alpha y_\alpha$, то говорят, что семейство $(x_\xi)$ *порядково суммируемо* или *o-суммируемо* и $x$ — это *сумма семейства* $(x_\xi)$. При этом принято писать $x = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi$.

**5.3.3.** Элементы $x, y \in X$ называют *дизъюнктными* и пишут $x \perp y$, если $p(x) \wedge p(y) = \mathbb{0}$. Так же, как и в 5.1.2, определяется упорядоченное по включению множество всех компонент

$$\mathscr{B}(X) := \{M^\perp : M \subset X,\ M \neq \varnothing\};\ M^\perp := \{x \in X : (\forall y \in M)\ x \perp y\}.$$

Нетрудно показать, что если $X$ разложимо, то $\mathscr{B}(X)$ — полная булева алгебра. Будем называть ее *базой* $X$. Компонента $K \in \mathscr{B}(X)$ является подпространством $X$. Фактически $K = h(L) := \{x \in X : p(x) \in L\}$ для некоторой компоненты $L$ в $E$. Отображение $L \mapsto h(L)$ является булевым гомоморфизмом из $\mathscr{B}(E)$ на $\mathscr{B}(X)$.

Норму $p$ назовем *d-разложимой*, а $X$ — *d-разложимым* пространством, если для каждого $x \in X$ и дизъюнктных $e_1, e_2 \in E_+$ существуют такие $x_1, x_2 \in X$, что $x = x_1 + x_2$ и $p(x_k) = e_k$ $(k := 1, 2)$. Напомним, что под булевой алгеброй проекторов в векторном пространстве $X$ подразумевают множество коммутирующих линейных идемпотентных операторов со следующими булевыми операциями:

$$\pi_1 \vee \pi_2 := \pi_1 + \pi_2 - \pi_1 \circ \pi_2,\ \ \pi_1 \wedge \pi_2 = \pi_1 \circ \pi_2,\ \ \pi^* = I_X - \pi.$$

Нулем и единицей этой булевой алгебры служат нулевой и тождественный операторы в $X$.

**5.3.4.** ***Теорема.*** *Пусть $E_0 := p(X)^{\perp\perp}$ — решетка с проекциями, а $X$ — это $d$-разложимое пространство. Тогда существуют полная булева алгебра проекторов $\mathscr{B}$ в $X$ и изоморфизм $h$ из $\mathfrak{Pr}(E_0)$ на $\mathscr{B}$ такие, что $\pi \circ p = p \circ h(\pi)$ для всех $\pi \in \mathfrak{Pr}(E_0)$.*

$\lhd$ Из $d$-разложимости $X$ и из возможности проектирования на компоненты в $E_0$ выводим, что отображение $L \mapsto h(L)$ $(L \in \mathscr{B}(E_0))$ служит изоморфизмом булевых алгебр $\mathscr{B}(E_0)$ и $\mathscr{B}(X)$. Кроме того, для $K \in \mathscr{B}(X)$ компонента $K^\perp$ является *алгебраическим дополнением* $K$, т. е. $K \cap K^\perp = \mathbb{0}$ и $K + K^\perp = X$. Следовательно, существует оператор проектирования $\pi_K : X \to X$ на компоненту $K$ параллельно $K^\perp$. Положим $\mathscr{B} := \{\pi_K : K \in \mathscr{B}(X)\}$. При этом $\mathscr{B}$ — полная булева алгебра, изоморфная $\mathscr{B}(X)$. Проектору $\rho \in \mathfrak{Pr}(E_0)$ поставим в соответствие оператор проектирования $\pi_K \in \mathscr{B}$, где $K = h(\rho(E_0))$. Полученное отображение $\rho \mapsto \pi_K$ мы обозначим той же буквой $h$. Тогда $h$ — изоморфизм $\mathfrak{Pr}(E_0)$ на $\mathscr{B}$.

Возьмем $\pi \in \mathfrak{Pr}(E_0)$ и $x \in X$. По определению $h$ будет $h(\pi)x \in h(\pi(E_0))$ или $p(h(\pi)x) \in \pi(E_0)$, поэтому $\pi^\perp p(h(\pi)x) = \mathbb{0}$. Тем самым $\pi p(h(\pi) = ph(\pi)(\pi \in \mathfrak{B}(E_0))$. Заметим далее, что для дизъюнктных $x$, $y \in X$ верно $p(x+y) = p(x) + p(y)$. Действительно, неравенство $p(x) \leq p(x+y) + p(y)$ влечет $p(x) \leq p(x+y)$, ибо $p(x) \perp p(y)$. Точно так же $p(y) \leq p(x+y)$. Но тогда $p(x) + p(y) = p(x) \vee p(y) \leq p(x+y)$. Для $x \in X$ можно написать

$$p(x) = p(h(\pi)x + h(\pi^\perp)x) = p(h(\pi)x) + p(h(\pi^\perp)x).$$

Учитывая установленное выше соотношение $\pi ph(\pi^\perp) = \mathbb{0}$, получаем $\pi p(x) = \pi p(h(\pi)x)$ $(x \in X)$, т. е. $\pi p = \pi ph(\pi)$. Окончательно $\pi p = \pi ph(\pi) = ph(\pi)$ для всех $(\pi) \in \mathfrak{Pr}(E_0)$. $\rhd$

**5.3.5.** Разложимое $o$-полное решеточно нормированное пространство называют *пространством Банаха — Канторовича.*

Пусть $(Y, q, F)$ — пространство Банаха — Канторовича, причем $q(Y)^{\perp\perp} = F$. Можно показать, что при этом $F$ будет $K$-пространством и $q(Y) = F_+$ (см. [67]). Согласно 5.3.4, булевы алгебры $\mathfrak{Pr}(F)$ и $\mathfrak{Pr}(Y)$ отождествляются и $\pi \circ q = q \circ \pi$ для всех $\pi \in \mathfrak{Pr}(F)$. Множество $M \subset X$ называют *ограниченным* (*по норме*), если существует $e \in E_+$, для которого $p(x) \leq e$ при всех $x \in M$. Пространство $X$ называют *$d$-полным*, если в нем $o$-суммируемо всякое ограниченное семейство, состоящее из попарно дизъюнктных элементов.

*Для любого ограниченного семейства $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в $Y$ и разбиения единицы $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в $\mathfrak{Pr}(Y)$ существует $x := o\text{-}\sum_{\xi \in \Xi} \pi_\xi x_\xi$. При этом $x$ — единственный элемент, удовлетворяющий соотношениям $\pi_\xi x = \pi_\xi x_\xi \quad (\xi \in \Xi)$.*

$\lhd$ Если $e := \sup p(x_\xi)$, то для $\alpha, \beta \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ будет

$$q(y_\alpha - y_\beta) = q\Bigg(\sum_{\xi \in \alpha \Delta \beta} \pi_\xi x_\xi\Bigg) \le \Bigg(\sum_{\xi \in \alpha \Delta \beta} \pi_\xi\Bigg)e,$$

где $y_\alpha := \sum_{\xi \in \alpha} \pi_\xi x_\xi$ и $\alpha \mathbin{\Delta} \beta$ — симметрическая разность $\alpha$ и $\beta$. Отсюда видно, что сеть $(y_\alpha)$ является $o$-фундаментальной. Стало быть, существует $x = o\text{-}\lim_\alpha y_\alpha$. $\rhd$

Из этого предложения видна, в частности, $d$-полнота $Y$. Кроме того, непосредственно из определений вытекает, что $Y$ будет и $r$-полным.

**5.3.6.** Пусть $(Y, q, F)$ — пространство Банаха — Канторовича, причем $F = q(Y)^{\perp\perp}$. Говорят, что $Y$ *расширенно*, если $mF = F$, т. е. если расширенным является нормирующее пространство $F$. Это равносильно тому, что $Y$ разложимо, $o$-полно и всякое дизъюнктное семейство в нем $o$-суммируемо. Пространство $Y$ называют *максимальным расширением* решеточно нормированного пространства $(X, p, E)$ при соблюдении условий:

(1) $F = mE$ (и, в частности, $Y$ расширенно);

(2) существует линейная изометрия $\imath : X \to Y$;

(3) если $Z$ — разложимое $o$-полное подпространство $Y$ и $\imath(X) \subset Z$, то $Z = Y$. Ниже будет показано, что максимальным расширением обладает всякое решеточно нормированное пространство.

Предположим, что $F$ — идеал в $E$. Как видно, множество $Z := \{x \in X : p(x) \in F\}$ также будет векторным пространством. Если $q$ — ограничение $p$ на $Z$, то $(Z, q, F)$ — решеточно нормированное пространство, которое называют *ограничением* $X$ *относительно* $F$ или, короче, $F$-*ограничением* $X$.

**5.3.7.** Примеры.

**(1)** Положим $X := E$ и $p(x) := |x| := x \vee (-x) \quad (x \in X)$. Тогда $p$ — разложимая норма.

**(2)** Пусть $Q$ — топологическое пространство, а $Y$ — нормированное пространство. Пусть $X := C_b(Q, Y)$ — пространство непрерывных ограниченных вектор-функций из $Q$ в $Y$. Положим $E := \mathrm{C}_b(Q, \mathbb{R})$. Для $f \in X$ векторную норму $p(f)$ введем соотношением $p(f) : t \mapsto \|f(t)\|$ $(t \in Q)$. Тогда $p$ — разложимая норма, а $X$ является $r$-полным в том и только в том случае, если $Y$ банахово.

**(3)** Пусть $(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство с $\sigma$-конечной мерой, $Y$ — нормированное пространство, $E$ — фундамент в $M(\Omega, \Sigma, \mu)$. Пусть, далее, $M(\mu, Y)$ — пространство классов эквивалентности $\mu$-измеримых вектор-функций, действующих из $\Omega$ в $Y$. Как обычно, вектор-функции эквивалентны, если они принимают равные значения почти во всех точках множества $\Omega$. Если $z \in M(\mu, Y)$ — класс эквивалентности измеримой вектор-функции $\overline{z} : \Omega \to Y$, то символом $p(z) := \lvert z \rvert$ обозначим класс эквивалентности скалярной измеримой функции $t \mapsto \|z(t)\|$ $(t \in \Omega)$. Положим по определению

$$E(Y) := \{z \in M(\mu, Y) : \ p(z) \in E\}.$$

Тогда $(E(Y), p, E)$ — решеточно нормированное пространство с разложимой нормой. Если $Y$ банахово, то $E(Y)$ — пространство Банаха — Канторовича, а $M(\mu, Y)$ — его максимальное расширение.

**(4)** Возьмем те же $E$ и $Y$, а также нормирующее пространство $Z \subset Y'$, т. е. такое подпространство, что $\|y\| = \sup\{\langle y, y'\rangle : \|y'\| \leq 1, \ y' \in Z\}$ $(y \in Y)$. Здесь $Y'$ — сопряженное пространство, а $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ — билинейная форма двойственности $Y \leftrightarrow Y'$. Вектор-функцию $z : \Omega \to Y$ назовем *$Z$-измеримой*, если для каждого $y' \in Z$ измерима функция $t \mapsto \langle z(t), y'\rangle$ $(t \in \Omega)$. Класс эквивалентности последней функции обозначим символом $\langle z, y'\rangle$. Пусть $\mathscr{M}$ — множество $Z$-измеримых вектор-функций $z$, для которых множество $\{\langle z, y'\rangle : y' \in Z, \ \|y\| \leq 1\}$ ограничено в $M(\Omega, \Sigma, \mu)$. Буквой $\mathscr{N}$ обозначим множество таких $z \in \mathscr{M}$, что для каждого $y' \in Z$ измеримая функция $t \mapsto \langle z(t), \ y'\rangle$ равна нулю почти всюду, т. е. $\langle z, y'\rangle = \mathbb{0}$. Для $z \in \mathscr{M}/\mathscr{N}$ положим

$$p(z) := \lvert z \rvert := \sup\{\langle u, y'\rangle : y' \in Z, \ \|y'\| \leq 1\},$$

где $u$ — произвольный представитель класса $z$, а супремум берется в $K$-пространстве $M(\Omega, \Sigma, \mu)$. Определим теперь пространство

$$E_s(Y, Z) := \{z \in \mathscr{M}/\mathscr{N} \ : \ p(z) \in E\}$$

с разложимой $E$-значной нормой $p$. Если $Y$ банахово, то $E_s(Y, Z)$ — пространство Банаха — Канторовича.

**(5)** Предположим, что $E$ — фундамент расширенного $K$-пространства $C_\infty(Q)$, где $Q$ — экстремальный компакт. Пусть $C_\infty(Q, Y)$

— множество классов эквивалентности непрерывных вектор-функций $u$, действующих из котощих подмножеств $\mathrm{dom}(u) \subset Q$ в нормированное пространство $Y$. *Котощим* называем множество, имеющее тощее дополнение. Вектор-функции $u$ и $v$ *эквивалентны*, если $u(t) = v(t)$ при $t \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v)$. Для $z \in C_\infty(Q, Y)$ существует единственная функция $x_z \in C_\infty(Q)$ такая, что $\|u(t)\| = x_z(t)$ $(t \in \mathrm{dom}(u))$, каков бы ни был представитель $u$ класса $z$. Положим $p(z) := \lvert z \rvert := x_z$ и

$$E(Y) := \{z \in C_\infty(Q, Y) : p(z) \in E\}.$$

**(6)** Возьмем то же $Z$, что и в (4). Обозначим символом $\mathscr{M}_Q$ множество $\sigma(Y, Z)$-непрерывных вектор-функций $u : \mathrm{dom}(u) \to Y$ таких, что $\mathrm{dom}(u)$ — котощее множество в $Q$ и множество $\{\langle u, y' \rangle : y' \in Z,\ \|y'\| \leq 1\}$ ограничено в $K$-пространстве $C_\infty(Q)$. Здесь $\langle u, y' \rangle$ представляет собой единственное непрерывное продолжение функции $t \mapsto \langle u(t), y' \rangle$ $(t \in \mathrm{dom}(u))$ на все $Q$; так что, по определению, $\langle u, y' \rangle(t) = \langle u(t), y' \rangle$ $(t \in \mathrm{dom}(u))$.

Рассмотрим фактор-множество $\mathscr{M}_Q/{\sim}$, где $u{\sim}v$ означает, что $u(t) = v(t)$ $(t \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v))$. Для $z \in \mathscr{M}_Q/{\sim}$ положим

$$\begin{aligned} p(z) := \lvert z \rvert &:= \sup\{\langle u, y' \rangle\ :\ y' \in Z,\ \|y'\| \leq 1\}, \\ E_s(Y, Z) &:= \{z \in \mathscr{M}_Q/{\sim}\ :\ p(z) \in E\}. \end{aligned}$$

Каждое из множеств $C_\infty(Q, Y)$ и $\mathscr{M}_Q/{\sim}$ наделяется естественной структурой модуля над кольцом $C_\infty(Q)$. При этом $E(Y)$ и $E_s(Y, Z)$ оказываются решеточно нормированными пространствами с разложимой нормой. Если $Y$ банахово, то $E(Y)$ и $E_s(Y, Z)$ — пространства Банаха — Канторовича.

Возьмем нормированное пространство $X$, и пусть $\varkappa$ — каноническое вложение $X$ в $X''$. Положим $Y := X'$ и $Z := \varkappa(X)$. В этой ситуации приняты обозначения

$$E_s(X') := E_s(Y, Z),\ \ \langle x, u \rangle := \langle u, \varkappa(x) \rangle,$$

где $u$ — произвольный элемент из $E_s(X')$.

**5.3.8.** Пусть $(X, p, E)$ и $(Y, q, F)$ — решеточно нормированные пространства под одним и тем же полем скаляров. Линейный оператор $T : X \to Y$ называют *мажорируемым*, если существует положительный оператор $S : E \to F$ (называемый *мажорантой* $T$) такой,

что

$$q(T(x)) \leq S(p(x)) \quad (x \in X).$$

Если $F$ — пространство Канторовича, а норма $p$ разложима, то в множестве всех мажорант существует наименьший элемент $\lvert T \rvert$ в смысле упорядочения пространства регулярных операторов $L_r(E, F)$. Отображение $T \mapsto \lvert T \rvert$ $(T \in M(X, Y))$ является векторной нормой на пространстве $M(X, Y)$ всех мажорируемых операторов из $X$ в $Y$. Если $Y$ — пространство Банаха — Канторовича, а норма в $X$ разложима, то $M(X, Y)$ — пространство Банаха — Канторовича с указанной мажорантной нормой (см. [67, 75]).

**5.3.9.** Выделим два частных случая.

**(1)** Возьмем $E := \mathbb{R}$ и $Y := F$. Тогда $X$ — нормированное пространство, а мажорируемость оператора $T : X \to F$ означает, что множество

$$\{Tx : \ x \in X, \ \|x\| \leq 1\}$$

порядково ограничено в $F$. Точную верхнюю границу этого множества называют *абстрактной нормой оператора* $T$ и обозначают $\lvert T \rvert$. (Это обозначение согласуется с введенным выше, если отождествить пространства $F$ и $L_r(\mathbb{R}, F)$.) В этой ситуации говорят также, что $T$ — *оператор с абстрактной нормой.* Обозначим через $L_a(X, E)$ пространство операторов с абстрактной нормой из $X$ в $E$.

**(2)** Пусть теперь $E$ и $F$ — фундаменты одного и того же $K$-пространства. Оператор $T \in M(X, Y)$ назовем *ограниченным*, если $\lvert T \rvert \in \operatorname{Orth}(E, F)$. Обозначим символом $\mathfrak{D}_b(X, Y)$ пространство всех ограниченных операторов. Понятно, что $T \in \mathfrak{D}_b(X, Y)$ тогда и только тогда, когда существует $c \in mE = mF$ такой, что $c \cdot E \subset F$ и $q(Tx) \leq cp(x)$ $(x \in X)$, где имеется в виду мультипликативная структура в $mE$, однозначно определяемая выбором единицы (см. 5.2.5 (5)).

**5.3.10.** *Пусть $X$ — нормированное пространство, а $E$ — фундамент $K$-пространства $C_\infty(Q)$. Для оператора с абстрактной нормой $T : X \to E$ существует единственный элемент $u_T \in E_s(X')$ такой, что*

$$Tx = \langle x, u_T \rangle \quad (x \in X).$$

*Сопоставление $T \mapsto u_T$ осуществляет линейную изометрию между пространствами Банаха — Канторовича $L_a(X, E)$ и $E_s(X')$.*

$\triangleleft$ Если $e := |T|$, то для любого $x \in X$ функция $Tx \in C_\infty(Q)$ конечна в каждой точке множества $Q_0 := \{t \in Q : e(t) < +\infty\}$ ввиду оценки $|Tx| \le e\|x\|$. Из этой же оценки видно, что при $t \in Q_0$ функционал $v(f) : x \mapsto (Tx)(t)$ $(x \in X)$ ограничен и $\|v(f)\| \le e(t)$. Тем самым возникает отображение $v : Q_0 \to X'$, которое непрерывно относительно слабой топологии $\sigma(X', X)$. Пусть $u_T$ — класс эквивалентности вектор-функции $v$. Тогда $Tx = \langle x, u_T\rangle$ для всех $x \in X$. В частности, существует $\sup\{\langle Kx, u_T\rangle| : \|x\| \le 1\} = e$, поэтому $u_T \in E_s(X')$ и $|u_T| = |T|$. Итак, отображение $T \mapsto u_T$ изометрично действует из $L_a(X, E)$ в $E_s(X')$. Линейность и сюръективность этого отображения очевидны. $\triangleright$

**5.3.11.** Возьмем нормированные пространства $X$ и $Y$. Рассмотрим оператор $T \in L_a(X\widehat{\otimes}Y, E)$, где $X\widehat{\otimes}Y$ — проективное тензорное произведение. Легко видеть, что билинейный оператор $b := T\otimes :$ $X \times Y \to E$ имеет абстрактную норму

$$|b| := \sup\{|b(x, y)| : \|x\| \le 1,\ \|y\| \le 1\},$$

причем $|b| = |T|$. Обозначим символом $\mathscr{B}_a(X \times Y, E)$ множество всех билинейных операторов $b : X \times Y \to E$, имеющих абстрактную норму, а символом $\mathscr{B}(X \times Y)$ — множество всех билинейных форм на $X \times Y$. Ввиду изометрического изоморфизма $(X\widehat{\otimes}Y)' \simeq \mathscr{B}(X \times Y)$, из 5.3.10 выводится следующее утверждение.

*Для оператора $b \in \mathscr{B}_a(X \times Y, E)$ существует единственный элемент $u_b \in E_s(\mathscr{B}(X \times Y))$ такой, что*

$$b(x, y) = \langle x \otimes y, u_b\rangle \quad (x \in X,\ y \in Y).$$

*Сопоставление $b \mapsto u_b$ является линейной изометрией пространств $\mathscr{B}_a(X \times Y, E)$ и $E_s(\mathscr{B}(X \times Y))$.*

**5.3.12.** Пусть $G$ — некоторый фундамент в $C_\infty(Q)$. В соответствии с 5.3.7 (5) положим $G_s(\mathscr{L}(X, Y')) := G_s(\mathscr{L}(X, Y'), X \otimes Y)$. Таким образом, пространство $G_s(\mathscr{L}(X, Y'))$ состоит из (классов эквивалентных) оператор-функций $K : \mathrm{dom}(K) \to \mathscr{L}(X, Y')$ таких, что $\mathrm{dom}(K)$ — котощее множество в $Q$, функция $t \mapsto \langle y, K(t)x\rangle$ $(t \in \mathrm{dom}(K))$ непрерывна для всех $x \in X$, $y \in Y$ и существует

$$|K| := \sup\{|\langle y, Kx\rangle| \ :\ \|x\| \le 1,\ \|y\| \le 1\} \in G.$$

Если $K \in G_s(\mathscr{L}(X, Y'))$ и $u \in E(X)$, то вектор функция $t \mapsto K(t)u(t)$ ($t \in Q_0 := \operatorname{dom}(K) \cap \operatorname{dom}(u)$) непрерывна в слабой топологии $\sigma(Y', Y)$. В самом деле, для произвольных $t, t_0 \in Q_0$ справедлива оценка

$$|\langle y, K(t)\,u(t) - K(t_0)\,u(t_0)\rangle| \leq |\langle y, (K(t) - K(t_0))\,u(t_0)\rangle| +$$
$$+ \lvert K \rvert(t)\|y\|\|u(t) - u(t_0)\|.$$

Можно считать, что $\operatorname{dom}(K) = \{\lvert K\rvert < +\infty\}$, стало быть, $\lvert K\rvert$ ограничена в окрестности точки $t_0$. Учитывая сильную непрерывность $u$ и слабую непрерывность $K$, получаем требуемое. Класс эквивалентности слабо непрерывной вектор-функции $t \mapsto K(t)\,u(t)$ мы будем обозначать символом $Ku$, а непрерывное продолжение функции $t \mapsto \langle y, K(t)\,u(t)\rangle$ на все $Q$ — символом $\langle y, Ku\rangle$.

**5.3.13. *Теорема.*** *Для ограниченного оператора $T \in L_b(E(X), E_s(Y'))$ существует единственный элемент $K_T \in G_s(\mathscr{L}(X, Y'))$, где $G := \operatorname{Orth}(E)$, такой что*

$$Tu = K_T u \quad (u \in E(X)).$$

*Сопоставление $T \mapsto K_T$ осуществляет линейную изометрию между пространствами $L_b(E(X), E_s(Y'))$ и $G_s(\mathscr{L}(X, Y'))$.*

$\triangleleft$ Согласно 5.3.12 нужно лишь доказать первую часть теоремы. Для $x \in X$, $y \in Y$ и $e \in E$ положим $S_{x,y}(e) := \langle y, T(x \otimes e)\rangle$. Нетрудно видеть, что $S_{x,y} \in \operatorname{Orth}(E)$. Если $b(x, y) := S_{x,y}$, то $b : X \times Y \to G$ — билинейный оператор с абстрактной нормой и $\lvert b\rvert = \lvert T\rvert$. В силу 5.3.11 существует единственный элемент $K_T \in G_s(\mathscr{B}(X, Y))$ такой, что $\lvert K_T\rvert = \lvert T\rvert$ и

$$\langle y, T(x \otimes e)\rangle = \langle x \otimes y, K_T\rangle e.$$

Учитывая изометрический изоморфизм $\mathscr{B}(X, Y) \simeq \mathscr{L}(X, Y')$, можно считать, что $K_T \in G_s(\mathscr{L}(X, Y'))$ и тогда

$$\langle y, T(x \otimes e)\rangle = \langle y, K_T x\rangle e = \langle y, K_T x \otimes e\rangle.$$

Остается заметить, что $X \otimes E$ порядково плотно в $E(X)$, а оператор $T$ порядково непрерывен (подробности см. в [64, 67]). $\triangleright$

**5.3.14.** Примечания.

**(1)** Векторные пространства, нормированные элементами векторной решетки, т. е. то, что мы называем решеточно нормированным пространством, ввел Л. В. Канторович в 1935 году [38]. В этой же работе впервые появилась необычная аксиома разложимости 5.3.1 (4). Интересно отметить, что в исследованиях других авторов эта аксиома иногда опускалась как несущественная. А. Г. Кусраев выяснил принципиальное значение аксиомы разложимости в связи с булевозначным представлением решеточно нормированных пространств [61] (см. ниже 5.4.2).

**(2)** Несколько ранее Д. Курепа рассмотрел espaces pseudodistancies, т. е. пространство с метрикой, принимающей значения из упорядоченного векторного пространства. Первые применения векторных норм и метрик относились к методу последовательных приближений и численному анализу, см. [42, 45, 49, 228].

**(3)** В упомянутой работе Л. В. Канторовича [38] были введены также мажорируемые операторы из 5.3.8, см. также [39]. Их появление имело двоякую мотивировку — теоретическую, обусловленную развитием общей теории операторов в полуупорядоченных пространствах (см. [39–41, 45]), и прикладную, связанную с приближенными методами анализа (см. [42, 43, 45]).

**(4)** Продвинутая теория мажорируемых операторов построена лишь в последнее десятилетие, см. [61, 64, 67, 73]. Связь между разложимостью и существованием булевой алгебры проекторов в решеточно нормированном пространстве (теорема 5.3.4) обнаружил А. Г. Кусраев [61, 62]. Утверждение из 5.3.11 установил Г. Н. Шотаев [113]. Теорема 5.3.13 была доказана в [64].

**(5)** Подробности относительно материала об измеримых и непрерывных функциях со значениями в банаховом пространстве и, в частности, в пространстве ограниченных линейных операторов, эскизно изложенного в 5.3.7, см. в [67, 83, 130, 131, 135]. Дальнейшие примеры решеточно нормированных пространств связаны с теорией непрерывных и измеримых банаховых расслоений (см. [30, 67]).

## 5.4. Спуски банаховых пространств

Пространство Банаха — Канторовича при погружении в подходящую булевозначную модель превращается в банахово пространство. Возникающие при этом связи составляют содержание текуще-

го параграфа. Напомним, что $\mathscr{C}$ — поле комплексных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

**5.4.1. *Теорема.*** *Пусть $(\mathscr{X}, \rho)$ — банахово пространство в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Положим $X := \mathscr{X}{\downarrow}$ и $p := \rho{\downarrow}$. Имеют место утверждения:*

**(1)** *$(X, p, \mathscr{R}{\downarrow})$ — расширенное пространство Банаха — Канторовича;*

**(2)** *пространство $X$ допускает структуру точного унитального модуля над кольцом $\Lambda := \mathscr{C}{\downarrow}$ такую, что*

**(a)** $(\lambda\mathbb{1})x = \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{C},\ x \in X)$**,**

**(b)** $p(ax) = |a|p(x) \quad (a \in \mathscr{C}{\downarrow},\ x \in X)$**,**

**(c)** $b \leq [\![\, x = \mathbb{0} \,]\!] \leftrightarrow \chi(b)x = \mathbb{0} \quad (b \in B,\ x \in X)$**,**

*где $\chi$ — канонический изоморфизм из $B$ на $\mathfrak{E}(\mathscr{R}{\downarrow})$.*

$\lhd$ Обозначим одним и тем же символом $\oplus$ операции сложения в $\mathscr{X}$, $\mathscr{C}$ и $\mathscr{R}$. Пусть $\odot$ обозначает как внешний закон композиции, действующий из $\mathscr{C} \times \mathscr{X}$ в $\mathscr{X}$, комплексного векторного пространства $\mathscr{X}$, так и умножения в $\mathscr{R}$ и в $\mathscr{C}$. Положим $+ := \oplus{\downarrow}$ и $\cdot := \odot{\downarrow}$. Это означает, что

$$
\begin{aligned}
x + y = z &\leftrightarrow [\![\, x \oplus y = z \,]\!] = \mathbb{1} \quad (x, y, z \in X);\\
a \cdot x = y &\leftrightarrow [\![\, a \odot x = y \,]\!] = \mathbb{1} \quad (a \in \Lambda;\ x, y \in X).
\end{aligned}
$$

Из простейших свойств спуска следует, что $(X, +)$ — абелева группа (см. 4.2.7). Например, коммутативность операции $+$ выводится так: внутри модели верно $[\![\, \oplus \circ \imath = \oplus \,]\!] = \mathbb{1}$, где $\jmath : \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X} \times \mathscr{X}$ — перестановка координат. Но тогда $\imath := \jmath{\downarrow}$ — перестановка координат в $X \times X$ и

$$
+ \circ \imath = (\oplus{\downarrow}) \circ (\jmath{\downarrow}) = (\oplus \circ \jmath){\downarrow} = \oplus{\downarrow} = +.
$$

Для произвольных $b \in B$ и $x \in X$ положим $\chi(b)x := \operatorname{mix}\{\, bx,\ b^*\mathbb{0} \,\}$, где $\mathbb{0}$ — нейтральный элемент группы $(X, +)$. Иными словами, $\chi(b)x$ — единственный элемент из $X$, для которого $[\![\, \chi(b)x = x \,]\!] \geq b$ и $[\![\, \chi(b)x = \mathbb{0} \,]\!] \geq b^*$. Тем самым определено отображение $\chi(b) : X \to X$, причем $\chi(b)$ аддитивно и идемпотентно. Пусть $\mathfrak{P} := \{\, \chi(b) : b \in B \,\}$. Тогда $\mathfrak{P}$ — полная булева алгебра, а $\chi$ — булев изоморфизм. Учитывая, что внутри модели $\mathbb{V}^{(B)}$ для $\mathscr{X}$ справедливы аксиомы векторного пространства, можно написать

$$
\begin{aligned}
a \cdot (x + y) &= a \odot (x \oplus y) = a \odot x \oplus a \odot y = a \cdot x + a \cdot y,\\
(a + b) \cdot x &= (a \oplus b) \odot x = a \odot x \oplus b \odot x = a \cdot x + b \cdot x,
\end{aligned}
$$

$$(ab)\cdot x = (ab)\odot x = a\odot(b\odot x) = a\cdot(b\cdot x),$$
$$\mathbb{1}\cdot x = \mathbb{1}\odot x = x \ \ (a,b\in\Lambda;\ x,y\in X).$$

Ввиду отделимости $\mathbb{V}^{(B)}$ из этих соотношений вытекает, что операции $+$ и $\cdot$ задают структуру унитального $\Lambda$-модуля на $X$. Полагая $\lambda x = (\lambda\mathbb{1})\cdot x \quad (\lambda\in\mathbb{C},\ x\in X)$, получим структуру комплексного векторного пространства на $X$, причем выполняется равенство (a). Так как в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ верно

$$\chi(b)=\mathbb{1}\to\chi(b)\odot x = x,$$
$$\chi(b)=\mathbb{0}\to\chi(b)\odot x = \mathbb{0},$$

то по определению $\chi$ (ср. 5.2.2) будет

$$b\le [\![\,\chi(b)\odot x = x\,]\!] = [\![\,\chi(b)\cdot x = x\,]\!],$$
$$b^*\le [\![\,\chi(b)\odot x = \mathbb{0}\,]\!] = [\![\,\chi(b)\cdot x = \mathbf{0}\,]\!].$$

Отсюда $\chi(b)\cdot x = \mathrm{mix}\{bx,\ b^*\mathbb{0}\} = h(b)x$, что и дает равенство (c).

Займемся теперь банаховыми свойствами пространства $(\mathscr{X},\rho)$. Субаддитивность и однородность нормы $\rho$ можно записать так:

$$\rho\circ\oplus\le\oplus\circ(\rho\times\rho),\quad \rho\circ\odot=\odot\circ(|\cdot|\times\rho),$$

где $\rho\times\rho:(x,x)\mapsto(\rho(x),\rho(x))$ и $|\cdot|\times\rho:(a,x)\mapsto(|a|,\rho(x))$. Учитывая правила спуска суперпозиции 3.2.12, получим

$$p\circ+\le+\circ(p\times p),\quad p\circ(\cdot)=(\cdot)\circ(|\cdot|\times p).$$

Это означает, что оператор $p: X\to\mathscr{R}{\downarrow}$ удовлетворяет 5.3.1 (3) и условию (b). Но тогда верно и 5.3.1 (2) ввиду (a). Если $p(x)=\mathbb{0}$ для некоторого $x\in X$, то в силу $[\![\,\rho(x)=p(x)\,]\!]=\mathbb{1}$ будет $[\![\,\rho(x)=\mathbb{0}\,]\!]=\mathbb{1}$, значит, $[\![x=\mathbb{0}]\!]=\mathbb{1}$ или $x=\mathbb{0}$. Итак, $p$ — векторная норма. Разложимость $p$ вытекает из свойства (b). Действительно, если $c := p(x) = c_1+c_2 \quad (x\in X;\ c_1,c_2\in\Lambda_+)$, то найдутся $a_1,a_2\in\Lambda_+$ такие, что $a_kc=c_k$ $(k:=1,2)$ и $a_1+a_2=\mathbb{1}$. (Нужно положить $a_k=c_k(c+(\mathbb{1}-e_c))^{-1}$, где $e_c$ — след элемента $c$.) Для $x_k:=a_k\cdot x$ $(k:=1,2)$ будет $x=x_1+x_2$ и $p(x_k)=p(a_k\cdot x)=a_kp(x)=c_k \quad (k:=1,2)$.

Остается обосновать $o$-полноту $X$. Возьмем $o$-фундаментальную сеть $s:\mathrm{A}\to X$. Если $\overline{s}(\alpha,\beta)=s(\alpha)-s(\beta)$ $(\alpha,\beta\in\mathrm{A})$, то $o\text{-}\lim_{\alpha,\beta} p\circ$

$\overline{s}(\alpha,\beta) = \mathbb{0}$. Пусть $\sigma : \mathrm{A}^\wedge \to \mathscr{X}$ — модифицированный подъем $s$, а $\overline{\sigma}(\alpha,\beta) = \sigma(\alpha) - \sigma(\beta) \quad (\alpha,\beta \in \mathrm{A}^\wedge)$. Тогда $\overline{\sigma}$ — модифицированный подъем $\overline{s}$ и $\rho \circ \overline{\sigma}$ — модифицированный подъем $p \circ \overline{s}$. В силу 5.2.3 $[\![ \lim \rho \circ \overline{\sigma} = \mathbb{0} ]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\sigma$ — фундаментальная сеть в $\mathscr{X}$». Так как $\mathscr{X}$ — банахово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, ввиду принципа максимума найдется такой элемент $x \in X$, что $[\![ \lim \rho \circ \sigma_0 = \mathbb{0} ]\!] = \mathbb{1}$, где $\sigma_0 : A^\wedge \to \mathscr{X}$ определен формулой $\sigma_0(\alpha) := \sigma(\alpha) - x \quad (\alpha \in \mathrm{A}^\wedge)$. Модифицированным спуском $\sigma_0$ будет сеть $s_0 : \alpha \mapsto s(\alpha) - x \quad (\alpha \in \mathrm{A})$. Следовательно, согласно 5.2.3 будет $o\text{-}\lim p_0 s_0 = \mathbb{0}$ или $o\text{-}\lim_\alpha p(s(\alpha) - x) = \mathbb{0}$. $\triangleright$

Возникшее таким образом расширенное пространство Банаха — Канторовича $\mathscr{X}{\downarrow} := (\mathscr{X},\rho){\downarrow} := (\mathscr{X}{\downarrow}, \rho{\downarrow}, \mathscr{R}{\downarrow})$ называют *спуском банахова пространства* $(\mathscr{X},\rho)$.

**5.4.2. *Теорема.*** *Для любого решеточно нормированного пространства $(X,p,E)$ существует единственное с точностью до линейной изометрии банахово пространство $\mathscr{X}$ внутри универсума $\mathbb{V}^{(B)}$, где $B \simeq \mathscr{B}(p(X)^{\perp\perp})$, для которого спуск $\mathscr{X}{\downarrow}$ является максимальным расширением $(X,p,E)$.*

$\triangleleft$ Будем считать, не ограничивая общности, что $E = p(X)^{\perp\perp} \subset mE = \mathscr{R}{\downarrow}$ и $B = \mathscr{B}(E)$. Положим

$$d(x,y) := p(x-y)^{\perp\perp} \quad (x,y \in X).$$

Без труда проверяется, что $d$ есть $B$-метрика на множестве $X$. Если снабдить поле $\mathbb{C}$ дискретной $B$-метрикой $d_0$, то операции сложения $+ : X \times X \to X$ и умножения $\cdot : \mathbb{C} \times X \to X$ будут нерастягивающими отображениями. Нерастягивающим будет также векторная норма $p$. Все эти утверждения почти очевидны. Так, например, для умножения верно

$$\begin{gathered} d(\alpha x, \beta y) = p(\alpha x - \beta y)^{\perp\perp} \leq (|\alpha| p(x-y))^{\perp\perp} \vee (|\alpha - \beta| p(y))^{\perp\perp} \leq \\ \leq d(x,y) \vee d_\circ(\alpha,\beta) \end{gathered}$$

при $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ и $x,y \in X$.

Пусть $\mathscr{X}_0$ — булевозначная реализация $B$-множества $(X,d)$. Положим $\rho_0 := \mathscr{F}^\sim(p)$, $\oplus := \mathscr{F}^\sim(+)$ и $\odot := \mathscr{F}^\sim(\cdot)$, где $\mathscr{F}^\sim$ — функтор погружения (см. 3.4). Отображения $\oplus$ и $\odot$ определяют структуру

векторного пространства над полем $\mathbb{C}^\wedge$ в множестве $\mathscr{X}_0$, а функция $\rho_0 : \mathscr{X}_0 \times \mathscr{X}_0 \to \mathscr{R}$ является нормой.

В силу принципа максимума имеются элементы $\mathscr{X}, \rho \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которых $[\![(\mathscr{X}, \rho)$ — комплексное банахово пространство, являющееся пополнением нормированного пространства $(\mathscr{X}_0, \rho_0)]\!] = \mathbb{1}$. При этом можно считать, что $[\![\, \mathscr{X}_0$ — плотное $\mathbb{C}^\wedge$-подпространство $\mathscr{X} \,]\!] = \mathbb{1}$. Пусть $\imath : X \to X_0 := \mathscr{X}_0{\downarrow}$ — каноническая инъекция (см. 3.5.4). Так как $+$ — нерастягивающее отображение из $X \times X$ в $X$, то сумма $+ := \oplus{\downarrow}$ в пространстве $X_0$ единственным образом определяется соотношением $\imath \circ + = + \circ (\imath \times \imath)$, где $\imath \times \imath : (x, y) \mapsto (\imath x, \imath y)$ — каноническая инъекция $B$-множества $X \times X$ (см. 3.5.4). Но это равносильно аддитивности $\imath$. Аналогично, для операции $(\cdot) := \odot{\downarrow}$ имеем $\imath \circ (\cdot) = (\cdot) \circ (\varkappa \times \imath)$, где $\varkappa \times \imath : (\lambda, x) \mapsto (\lambda^\wedge, \imath x) \quad (\lambda \in \mathbb{C},\ x \in X)$. Таким образом, $\imath$ — линейный оператор. Еще раз применив те же соображения для $p_0 := \rho_0{\downarrow}$, получим $\imath_E \circ p = p_0 \circ \imath$, где $\imath_E$ — каноническая инъекция $E$. Это означает, что $\imath$ — изометрия, т. е. $\imath$ сохраняет векторную норму.

Рассмотрим подпространство $\imath X \subset Y \subset \mathscr{X}{\downarrow}$, являющееся расширенным пространством Банаха — Канторовича с нормой $q(y) = \rho{\downarrow}(y) \quad (y \in Y)$.

Из разложимости нормы $q$ и дизъюнктной полноты $Y$ вытекает, что $X_0 \subset Y$. Действительно, $X_0 = \operatorname{mix}(\imath(X))$, а в силу условия (c) из 5.4.1(2) для $x \in \mathscr{X}{\downarrow}$ будет $x = \operatorname{mix}(b_\xi \imath x_\xi)$ в том и только в том случае, если $x = o\text{-}\sum \chi(b_\xi)\imath(x_\xi)$. С другой стороны, $Y$ разложимо и $d$-полно, значит, согласно 5.3.4 и 5.3.5, $Y$ инвариантно относительно каждого проектора $x \mapsto \chi(b)x \quad (x \in \mathscr{X}{\downarrow})$ и содержит все суммы указанного вида. По аналогичным соображениям $Y = \operatorname{mix}(Y)$. Если $\mathscr{Y} := Y{\uparrow}$, то $[\![\, \mathscr{X}_0 \subset \mathscr{Y} \subset \mathscr{X} \,]\!] = \mathbb{1}$, причем $\mathscr{Y}{\downarrow} = Y$. Пусть $\sigma : \omega^\wedge \to \mathscr{Y}$ — фундаментальная последовательность и $s$ — ее модифицированный спуск. Тогда $s$ есть $o$-фундаментальная последовательность в $Y$, следовательно, существует $y := o\text{-}\lim s$. Из 5.2.3 (4) видно, что $[\![\, y = \lim \sigma \,]\!] = \mathbb{1}$. Этим установлена полнота множества $\mathscr{Y}$, а вместе с ней и соотношение $\mathscr{X} = \mathscr{Y}$ или $X = Y$.

Пусть $\mathscr{Z}$ — банахово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, причем $\mathscr{X}{\downarrow}$ — максимальное расширение решеточно нормированного пространства $X$. Если $\imath'$ — соответствующее изометрическое вложение $X$ в $\mathscr{Z}{\downarrow}$, то $\imath' \circ \imath$ распространяется единственным образом до линейной изометрии $X_0$ на дизъюнктно полное подпространство $Z_0 \subset Z$. Про-

странства $\mathscr{X}_0$ и $\mathscr{Z}_0 := Z\uparrow$ изометричны. Но тогда изометричны и их пополнения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y} \subset \mathscr{Z}$ соответственно. Так как $\mathscr{Y}\downarrow$ — пространство Банаха — Канторовича и $\imath' X \subset \mathscr{Y}\downarrow \subset \mathscr{Z}\downarrow$, то $\mathscr{Y}\downarrow = \mathscr{Z}\downarrow$. Поэтому $\mathscr{Y} = \mathscr{Z}$ и, стало быть, $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Z}$ линейно изометричны. $\triangleright$

**5.4.3. *Следствие.*** *Справедливы утверждения:*

**(1)** *Всякое решеточно нормированное пространство $(x, p, E)$ допускает единственное с точностью до линейной изометрии максимальное расширение $(mX, p_m, mE, \imath)$. При этом для любых $x \in mX$ и $\varepsilon > \mathbb{0}$ найдутся семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $X$ и разбиение единицы $(\pi_\xi x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{Pr}(mX)$ такие, что*

$$p_m\left(x - \sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi \imath(x_\xi)\right) \leq \varepsilon p_m(x).$$

**(2)** *Решеточно нормированное пространство является линейно изометричным фундаменту своего максимального расширения тогда и только тогда, когда оно разложимо и o-полно, т. е. является пространством Банаха — Канторовича.*

$\triangleleft$ Сформулированные два утверждения удобно доказывать вместе. Пользуясь обозначениями из 5.3.7, положим $mX := \mathscr{X}\downarrow$, $p_m := \rho\downarrow$. Тогда $(mX, p_m, mE, \imath)$ — максимальное расширение пространства $X$. Зафиксируем единицу $e \in E^+$ и возьмем $x \in mX$. Ясно, что $[\![ e \in \mathscr{R} ]\!] = [\![ e > \mathbb{0} ]\!] = [\![ x \in \mathscr{X} ]\!] = \mathbb{1}$. Так как $[\![ \mathscr{X}_0$ плотно в $\mathscr{X} ]\!] = \mathbb{1}$, то для любого $\varepsilon > \mathbb{0}$ в силу принципа максимума найдется такой элемент $x_\varepsilon \in \mathbb{V}^{(B)}$, что

$$[\![ x_\varepsilon \in \mathscr{X}_\circ ]\!] = [\![ \rho(x - x_\varepsilon) \leq \varepsilon^\wedge \cdot e ]\!] = \mathbb{1}.$$

Отсюда выводим $x_\varepsilon \in X_0$ и $p_m(x - x_\varepsilon) \leq \varepsilon e$. Остается заметить, что $X_0 = \operatorname{mix}(\imath(X))$, поэтому $x_\varepsilon$ имеет вид $\sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi \imath(x_\xi)$, где $(x_\xi) \subset X$, а $(\pi_\xi)$ — разбиение единицы в $\mathfrak{Pr}(mX)$.

Очевидно, что фундамент пространства Банаха — Канторовича разложим и $o$-полон. Наоборот, пусть $X$ — разложимое и $o$-полное решеточно нормированное пространство. Можно показать, что $E_0 := p(X)^{\perp\perp}$ есть $K$-пространство. Поэтому, считая $E_0$ фундаментом в $\mathscr{R}\downarrow$, мы не умаляем общности. Пусть $x \in mX$ и $p_m(x) \in E_0$. В силу (1) найдется последовательность $(x_n) \subset X_0$, для которой

$$p_m(x_n) \leq \left(\mathbb{1} + \frac{1}{n}\right) p(x), \quad p_m(x - x_n) \leq \frac{1}{n} p(x) \quad (n \in \omega).$$

Так как $o$-полное разложимое пространство $d$-полно и $r$-полно, то отсюда вытекает, что $x_n \in X$ и $x \in X$. Тем самым $X = \{x \in mX : p_m(x) \in E_0\}$, т. е. $X$ — фундамент $mX$.

Остается установить утверждение о единственности в (1).

Пусть $(Y, q, mE, \imath_0)$ — это максимальное расширение пространства $X$. Ввиду 5.4.1 и (2) будем считать, что $Y = \mathscr{Y}{\downarrow}$, где $\mathscr{Y}$ — банахово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. По теореме 5.4.1 $[\![$ существует линейная изометрия $\lambda$ пространства $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}\,]\!] = \mathbb{1}$. Но тогда $\lambda{\downarrow}$ — линейная изометрия $\mathscr{X}{\downarrow}$ на $Y$. $\triangleright$

**5.4.4.** *Дизъюнктным пополнением* ($d$-*пополнением*) решеточно нормированного пространства $(X, p, E)$ называют дизъюнктно полное пространство $(Y, q, dE)$, где $dE$ — дизъюнктное пополнение $E$ ($dE$ вычисляется в $oE$, см. 5.2.5 (7)), если существует линейная изометрия $\imath : X \to Y$, для которой $Y = \operatorname{mix}(\imath(X))$.

*Порядковым пополнением* ($o$-*пополнением*) решеточно нормированного пространства $(X, p, E)$ называют пространство Банаха — Канторовича $(Y, q, oE)$ вместе с линейной изометрией $\imath : X \to Y$, если любое $o$-полное разложимое подпространство $Z \subset Y$, содержащее $\imath(X)$, совпадает с $Y$. Если $E = mE$, то $o$-пополнение пространства $X$ есть его максимальное расширение (см. 5.3.3). Для подмножества $U \subset Y$ введем обозначения:

$$rU := \{y := r\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n : \ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U\},$$

$$oU := \{y := o\text{-}\lim_{\alpha} y_\alpha : (y_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \subset U\},$$

$$dU := \Big\{y := o\text{-}\sum \pi_\xi y_\xi : (y_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset U\Big\},$$

где $\mathrm{A}$ — произвольное направленное множество, $(\pi_\xi)$ — произвольное разбиение единицы в $\mathfrak{Pr}(Y)$, а пределы и сумма существуют в $Y$.

**5.4.5.** *Для любого решеточно нормированного пространства существует единственное с точностью до линейной изометрии $o$-пополнение ($d$-пополнение).*

$\triangleleft$ Напомним, что $dE \subset oE \subset mE$. Положим

$$Y := \{x \in mX : sp_m(x) \in oE\}.$$

Тогда $Y$ — $o$-пополнение, а $d$-пополнением $X$ будет $d(\imath(X))$. $\triangleright$

В дальнейшем мы всегда считаем, что решеточно нормированное пространство $X$ содержится в своем $o$-пополнении $\overline{X}$.

**5.4.6.** *Для $o$-пополнения $\overline{X}$ пространства $X$ верно $\overline{X} = rdX$. Если $X$ разложимо, а $E_0 := p(x)^{\perp\perp}$ — векторная решетка с главными проекциями, то $\overline{X} = oX$.*

$\lhd$ Первая часть этого утверждения вытекает из 5.4.3 (1). Возьмем $x \in \overline{X}$ и подберем сеть $(x_\alpha) \subset X$, $o$-сходящуюся к $x$. Введем на $X$ отношение эквивалентности и предпорядок формулами

$$z{\sim}y \leftrightarrow p(x-y) = p(x-z),$$
$$z \prec y \leftrightarrow p(x-y) \le p(x-z) \quad (y, z \in X).$$

Если $E_0$ — решетка с главными проекциями, то можно подобрать такой проектор $\pi \in \mathfrak{Pr}(X)$, что $\pi p(x-y) + \pi^\perp p(x-z) = p(x-y) \wedge p(y-z)$. Для элемента $u := \pi y + \pi^\perp z$ будет

$$p(x-u) = p(x-y) \wedge p(x-z),$$

поэтому $y \prec u$ и $z \prec u$. Итак, предупорядоченное множество $(X, \prec)$ направлено вверх. Отсюда видно, что фактор-множество $\mathrm{A} := X/{\sim}$ с фактор-порядком является направленным вверх упорядоченным множеством. Рассмотрим теперь сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$, где $x_\alpha \in \alpha$ и $\alpha \in \mathrm{A}$. Из построения видно, что сеть $(p(x - x_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ убывает. Пусть $e := \inf p(x - x_\alpha)$, где инфимум вычисляется в $oE$. В силу равенства $\overline{X} = rdX$ для произвольного числа $\varepsilon > \mathbb{0}$ можно подыскать семейство $(x_\xi) \subset X$ и разбиение единицы $(\pi_\xi) \subset \mathfrak{Pr}(X)$ так, чтобы $p_m(x - \sum \pi_\xi x_\xi) \le \varepsilon p_m(x)$. Учитывая 5.3.4, можно написать

$$e = \sum \pi_\xi e \le \sum \pi_\xi p(x - x_\xi) = p\left(x - \sum \pi_\xi x_\xi\right) \le \varepsilon p(x).$$

Отсюда вытекает $e = \mathbb{0}$ и $o\text{-}\lim_\alpha x_\alpha = x$. $\rhd$

**5.4.7.** *Разложимое решеточно нормированное пространство $o$-полно тогда и только тогда, когда оно $d$-полно и $r$-полно.*

$\lhd$ Необходимость этих условий отмечалась в 5.3.5. Достаточность вытекает из 5.4.6. $\rhd$

**5.4.8.** *Пусть $(X, p, E)$ — пространство Банаха — Канторовича, $E = p(X)^{\perp\perp}$ и $A := \mathrm{Orth}(E)$. Тогда можно, и притом единственным способом, определить на $X$ структуру точного унитального $A$-модуля так, что естественное представление $A$ в $X$ задает изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{Pr}(E) \subset A$ и $\mathfrak{Pr}(X)$. При этом*

$$p(ax) = |a| p(x) \quad (x \in X,\ a \in A).$$

$\triangleleft$ Нужно применить 5.4.1 (2). В частности, в силу условия (c) из этого пункта булева алгебра $\mathfrak{P}(X)$ совпадает с множеством операторов умножения $x \mapsto \chi(b)x$ $(x \in X)$, где $b \in B$ . $\triangleright$

Банахово пространство $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ назовем *булевозначной реализацией решеточно нормированного пространства* $X$ при том условии, что $\mathscr{X}{\downarrow}$ представляет собой максимальное расширение $X$.

**5.4.9. *Теорема.*** *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — булевозначные реализации пространств Банаха — Канторовича $X$ и $Y$, каждое из которых нормированно посредством одного и того же расширенного $K$-пространства $E$. Пусть $\mathscr{L}^{(B)}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ — пространство линейных ограниченных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, где $B \simeq \mathscr{B}(E)$. Погружение операторов $T \mapsto T^{\sim}$ осуществляет линейную изометрию решеточно нормированных пространств $\mathscr{L}^{(B)}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}){\downarrow}$ и $\mathscr{L}_b(X, Y)$.*

$\triangleleft$ В силу 5.4.3 (2) без ограничения общности можно считать, что $E = \mathscr{R}{\downarrow}$, $X = \mathscr{X}{\downarrow}$ и $Y = \mathscr{Y}{\downarrow}$. Возьмем отображение $\mathscr{T} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и положим $T = \mathscr{T}{\downarrow}$. Пусть $\rho$ и $\theta$ — нормы банаховых пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно, $p := \rho{\downarrow}$, $q = \theta{\downarrow}$ и $+$ обозначает операцию суммы в $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, $X$ и $Y$. Линейность и ограниченность $\mathscr{T}$ означают справедливость соотношений

$$\mathscr{T} \circ + = + \circ (\mathscr{T} \times \mathscr{T}), \quad \theta \circ \mathscr{T} \le k\rho,$$

где $k \in \mathscr{R}{\downarrow}_{+}$. Правила спуска и подъема суперпозиции позволяют записать эти соотношения в следующей эквивалентной форме:

$$T \circ + = + \circ (T \times T), \quad q \circ T \le kp.$$

Таким образом, оператор $T$ линеен и ограничен. Пусть $K$ — множество тех $k \in \mathscr{R}{\downarrow}_{+}$, что $q(Tx) \le kp(x)$ $(x \in X)$. Тогда внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ будет

$$K{\uparrow} = \{k \in \mathscr{R}_{+} : \theta \circ \mathscr{T} \le k\rho\}.$$

Учитывая 5.3.2 (2), выводим

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \lvert T \rvert = \inf K = \inf(K{\uparrow}) = \|\mathscr{T}\|.$$

Отсюда вытекает, что отображение $\mathscr{T} \mapsto \mathscr{T}{\downarrow}$ сохраняет векторную норму. Для обоснования линейности этого отображения достаточно

проверить его аддитивность. Если $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2 \in \mathscr{L}^{(B)}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\!\downarrow$, то для каждого $x \in X$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ выполняется

$$(\mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2)\!\downarrow\!(x) = (\mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2)(x) = \mathscr{T}_1 x + \mathscr{T}_2 x =$$
$$= \mathscr{T}_1\!\downarrow (x) + \mathscr{T}_2\!\downarrow (x) = (\mathscr{T}_1\!\downarrow + \mathscr{T}_2\!\downarrow)(x).$$

Следовательно, $(\mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2)\!\downarrow = \mathscr{T}_1\!\downarrow + \mathscr{T}_2\!\downarrow$. Итак, спуск осуществляет линейную изометрию $\mathscr{L}^{(B)}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\!\downarrow$ на пространство всех ограниченных линейных экстенсиональных операторов из $X$ в $Y$. Остается заметить, что всякий ограниченный линейный оператор из $X$ в $Y$ является экстенсиональным или, что эквивалентно, удовлетворяет неравенству $[\![ x = \mathbb{0} ]\!] \leq [\![ Tx = \mathbb{0} ]\!]$. В самом деле, если $b := [\![ x = \mathbb{0} ]\!]$, то ввиду 5.4.1 (2) $\chi(b)x = \mathbb{0}$, поэтому

$$\chi(b)q(Tx) \leq \chi(b)p(x) = p(\chi(b)x) = \mathbb{0}.$$

Отсюда $q(\chi(b)Tx) = \mathbb{0}$ или $\chi(b)Tx = \mathbb{0}$ и вновь по 5.4.1 (2) заключаем $b \leq [\![ Tx = \mathbb{0} ]\!]$. $\rhd$

**5.4.10. *Теорема.*** *Пусть $X$ — нормированное пространство, а $\widetilde{X}$ — его пополнение. Если $\mathscr{X}$ — пополнение $\mathbb{R}^\wedge$-нормированного пространства $X^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то расширенное пространство Банаха — Канторовича $\mathscr{X}\!\downarrow$ линейно изометрично пространству $C_\infty(Q, \widetilde{X})$, где $Q$ — стоуновский компакт $\mathscr{R}\!\downarrow$.*

$\lhd$ Отождествим $K$-пространства $\mathscr{R}\!\downarrow$ и $C_\infty(Q)$ и применим теорему 5.4.2 к решеточно нормированному пространству $(X, p, \mathscr{R}\!\downarrow)$, где $p(x) = \|x\| \cdot \mathbb{1}$. Сохранив те же обозначения, что и в доказательстве 5.4.2, заметим, что $\mathscr{X}_0 = X^\wedge$. Следовательно, $\mathscr{X}\!\downarrow := (\mathscr{X}\!\downarrow, q, \mathscr{R}\!\downarrow)$ есть максимальное расширение пространства $(X, p, \mathscr{R}\!\downarrow)$. Для удобства будем считать $X \subset \mathscr{X}\!\downarrow$. Из 5.4.3 вытекает, что для любых $u \in C_\infty(Q, \widetilde{X})$ и $\varepsilon > \mathbb{0}$ найдутся семейство $(x_\xi) \subset X$ и разбиение единицы $(Q_\xi) \subset \mathrm{Clop}(Q)$, для которых ступенчатая вектор-функция $u_\varepsilon$, принимающая значение $x_\xi$ на множестве $Q_\xi$, удовлетворяет оценке $|u - u_\varepsilon| \leq \varepsilon\mathbb{1}$. Пусть $\mathscr{T}(u_\varepsilon) = \mathrm{mix}(b_\xi x_\xi)$, где $b_\xi$ — элемент $B$, соответствующий открыто-замкнутому множеству $Q_\xi$. Тогда $|\mathscr{T}(u_\varepsilon)| = |u_\varepsilon|$, стало быть, $\mathscr{T}$ — линейное изометрическое вложение подпространства всех вектор-функций вида $u_\varepsilon$. Если $\varepsilon \to \mathbb{0}$, то $|u_\varepsilon - u| \xrightarrow{(r)} \mathbb{0}$, поэтому последовательность $\big(\mathscr{T}(u_{1/n})\big)$ является

$r$-фундаментальной. В силу полноты $\mathscr{X}{\downarrow}$ существует $v := r$ :=-$\lim \mathscr{T}(u_{1/n})$. Полагая $\mathscr{T}(U) := v$, получим линейное изометрическое вложение $\mathscr{T} : C_\infty(Q, \widetilde{X}) \to \mathscr{X}{\downarrow}$. Если $Z := \mathrm{im}(\mathscr{T})$, то $Z$ — разложимое $o$-полное подпространство $\mathscr{X}{\downarrow}$, причем $X \subset Z$. По теореме 5.4.2 и в соответствии с определением 5.3.6 будет $Z = \mathscr{X}{\downarrow}$. $\triangleright$

**5.4.11.** Пусть $X$ и $\mathscr{X}$ те же, что и в 5.3.10, а $\mathscr{X}'$ сопряжено к $X$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда пространства $\mathscr{X}'{\downarrow}$ и $E_s(X')$, где $E = C_\infty(Q)$, линейно изометричны.

$\triangleleft$ Применим теорему 5.4.9 к $Y := E$ и $X := (X, p, E)$, где $p(x) = \|x\|\mathbb{1}$. Получим, что пространства $\mathscr{X}'{\downarrow} := \mathscr{L}^{(B)}(\mathscr{X}, \mathscr{R}){\downarrow}$ и $L_a(X, E)$ линейно изометричны. Остается применить 5.3.10. $\triangleright$

**5.4.12.** Примечания.

**(1)** Основные результаты этого параграфа — теоремы 5.4.1, 5.4.2 и 5.4.9 — установлены А. Г. Кусраевым, см. [61, 67].

**(2)** Критерий полноты 5.4.7 был сформулирован А. Г. Кусраевым в [62] при условии, что нормирующая решетка $E$ порядково полна. В [61] приводится доказательство в более общей ситуации пространств с разложимой векторной мультинормой. Предположение о порядковой полноте $E$ удалось снять в [49]. Для архимедовой векторной решетки (случай $X = E$) указанный факт установили А. И. Векслер и В. А. Гейлер [16].

**(3)** Максимальное расширение произвольного $K$-пространства изучил А. Г. Пинскер (см. [45]). Им установлено, в частности, что $K$-пространство обладает единственным с точностью до изоморфизма максимальным расширением. Утверждение 5.4.3 (1), представляющее собой обобщение теоремы Пинскера для решеточно нормированных пространств, получено, по существу, в [61]. Относительно теоремы 5.4.5 о порядковом пополнении решеточно нормированного пространства см. [61, 67]. Утверждение $X = oX$ из 5.4.6 принадлежит А. Е. Гутману. Для архимедовой векторной решетки утверждение 5.4.6 установил А. И. Векслер (см. [14]).

**(4)** Теорема 5.4.10 — один частный случай конструкции булева расширения равномерных структур, разработанной Е. И. Гордоном и В. А. Любецким, см. [86]. Теорема 5.4.11 является простым следствием 5.3.10 и одного результата Е. И. Гордона о представлении операторов с абстрактной нормой [23].

## 5.5. Пространства со смешанной нормой

В этом параграфе мы выделяем важный класс банаховых пространств, связанный с концепцией векторной нормы.

**5.5.1.** *Нормированной* (*банаховой*) *решеткой* называют векторную решетку $E$, которая одновременно является нормированным (банаховым) пространством, причем норма монотонна в следующем смысле: если $|x| \leq |y|$, то $\|x\| \leq \|y\| \quad (x, y \in E)$.

Пусть $(X, p, E)$ — решеточно нормированное пространство, где $E$ — нормированная решетка. Тогда на $X$ можно ввести смешанную норму

$$|||x||| := \|p(x)\| \quad (x \in X).$$

Нормированное пространство $X := (X, ||| \cdot |||)$ в этой ситуации называют также *пространством со смешанной нормой.* В силу неравенства $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ и монотонности нормы в $E$ векторная норма $p$ будет непрерывным оператором из $(X, ||| \cdot |||)$ в $E$.

**5.5.2.** *Пусть $E$ — банахова решетка. Тогда пространство $(X, ||| \cdot |||)$ банахово в том и только в том случае, когда $(X, p, E)$ полно относительно сходимости с регулятором.*

$\lhd$ Возьмем фундаментальную последовательность $(x_n) \subset X$. Без ограничения общности можно считать, что $|||x_{n+1} - x_n||| \leq 1/n^3$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$e_n := p(x_1) + \sum_{k=1}^{n} kp(x_{k+1} - x_k) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Тогда можно оценить

$$\|e_{n+l} - e_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{n+l} kp(x_{n+1} - x_k)\| \leq$$
$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+l} k|||x_{k+1} - x_k||| \leq \sum_{k=n+1}^{n+l} \frac{1}{k^2} \underset{n,l \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Итак, последовательность $(e_n)$ фундаментальна, а потому имеет предел $e := \lim_{n\to\infty} e_n$. Так как $e_{n+k} \geq e_n \quad (n, k \in \mathbb{N})$, то $e = \sup(e_n)$.

Если $n \geq m$, то

$$mp(x_{n+l} - x_n) \leq \sum_{k=n+1}^{n+l} kp(x_{n+1} - x_k) \leq e_{n+l} - e_n \leq e,$$

следовательно, $p(x_{n+l} - x_n) \leq (1/m)e$.

Значит, $(x_n)$ служит $r$-фундаментальной последовательностью. Ввиду условия $r$-полноты существует $x := r\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$. Ясно, что $\lim_{n\to\infty} |||x - x_n||| = 0$. Предположим, что последовательность $(x_n) \subset X$ является $r$-фундаментальной, т. е. $p(x_n - x_m) \leq \lambda_k e$ $(m, n, k \in \mathbb{N};\ m, n \geq k)$, где $\mathbb{0} \leq e \in E$ и $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. Тогда $|||x_n - x_m||| \leq \lambda_k \|e\| \to 0$ при $k \to \infty$, следовательно, существует $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Векторная норма $p$ является непрерывным оператором из $(X, |||\cdot|||)$ в $(E, ||\cdot||)$. Следовательно, переход к пределу по норме в неравенстве $p(x_m - x_n) \leq \lambda_k e$ при $m \to \infty$ приводит к неравенству $p(x - x_n) \leq \lambda_k e$ $(k \leq n)$. Стало быть, $x = r\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$. $\triangleright$

**5.5.3.** Пусть $F$ — идеал в $E$. Напомним, что для $Y := \{x \in X : p(x) \in F\}$ и $q := p \restriction Y$ тройку $(Y, q, F)$ называем $F$-*ограничением* пространства $X$. Если $X$ — пространство Банаха — Канторовича, то таким же будет и $Y$. Если $X$ является $r$-полным, а $F$ — банахова решетка, то $Y$ — банахово пространство со смешанной нормой.

Возьмем банахово пространство $(\mathscr{X}, \rho)$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и фундамент $F$ в $\mathscr{R}{\downarrow}$. Ограничение пространства $\mathscr{X}{\downarrow}$ относительно $F$ называют $F$-*спуском* $\mathscr{X}$ или *спуском* $\mathscr{X}$ *относительно* $F$ и обозначают символом $F^{\downarrow}(\mathscr{X})$. Точнее, $F$-спуск есть тройка $(F^{\downarrow}(\mathscr{X}), p, F)$, где $F^{\downarrow}(\mathscr{X}) := \{x \in \mathscr{X}{\downarrow} :\ \rho{\downarrow}(x) \in F\}$, $\quad p := (\rho{\downarrow}) \restriction E^{\downarrow}(\mathscr{X})$.

*Если банахова решетка $E$ является идеалом в $\mathscr{R}{\downarrow}$, то $E^{\downarrow}(\mathscr{X})$ — банахово пространство со смешанной нормой.*

В том случае, когда $E$ — это $K$-пространство ограниченных элементов (т. е. порядковый идеал в $\mathscr{R}{\downarrow}$, порожденный единицей $\mathbb{1} \in \mathscr{R}{\downarrow}$), вместо $E$-спуска мы будем говорить об *ограниченном спуске* и называть $E^{\downarrow}$ *функтором ограниченного спуска*. При этом пишут: $\mathscr{X}{\downarrow}^{\infty} := E^{\downarrow}(\mathscr{X})$.

**5.5.4.** В связи с данными определениями возникает естественный вопрос: какие банаховы пространства линейно изометричны $E$-спускам и, в частности, ограниченным спускам банаховых пространств из булевозначной модели? Понятно, что ответ существенно

зависит от геометрии банахова пространства. Не углубляясь в эту тему, коротко рассмотрим нужный для дальнейшего случай ограниченного спуска.

Пусть $X$ — нормированное пространство. Допустим, что в алгебре ограниченных эндоморфизмов $\mathscr{L}(X)$ пространства $X$ имеется полная булева алгебра $\mathscr{B}$ проекторов единичной нормы, изоморфная $B$. В этой ситуации мы будем отождествлять булевы алгебры $\mathscr{B}$ и $B$ и писать $B \subset \mathscr{L}(X)$. Назовем $X$ *нормированным $B$-пространством*, если $B \subset \mathscr{L}(X)$ и для любого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $B$ выполнены два условия:

**(1)** если для некоторого $x \in X$ верно $b_\xi x = 0$ $(\xi \in \Xi)$, то $x = 0$;

**(2)** если для $x \in X$ и семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $X$ верно $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ $(\xi \in \Xi)$, то $\|x\| \le \sup\{\|b_\xi x_\xi\| : \xi \in \Xi\}$.

Условия (1) и (2) равносильны следующим условиям $(1')$ и $(2')$ соответственно:

**(1′)** для каждого $x \in X$ существует наибольший проектор $b \in B$ такой, что $bx = 0$;

**(2′)** если $x$, $(x_\xi)$ и $(b_\xi)$ те же, что и в (2), то

$$\|x\| = \sup\{\|b_\xi x_\xi\| : \xi \in \Xi\}.$$

Из $(2')$ следует, в частности, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} b_k x \right\| = \max_{k=1,\dots,n} \|b_k x\|$$

для $x \in X$ и попарно дизъюнктных проекторов $b_1, \dots, b_n \in B$.

Элемент $x \in X$, удовлетворяющий условию $(\forall\,\xi)\, b_\xi x = b_\xi x_\xi$, где $(b_\xi)$ — разбиение единицы, называют *перемешиванием* семейства $(x_\xi)$ (относительно $(b_\xi)$). При соблюдении условия (1) перемешивание единственно. Условие (2) допускает такую эквивалентную формулировку: единичный шар $U_X$ замкнут относительно перемешиваний.

**5.5.5. *Теорема.*** *Для банахова пространства $X$ равносильны следующие утверждения:*

**(1)** *$X$ — разложимое пространство со смешанной нормой, причем нормирующая решетка является $K$-пространством ограниченных элементов;*

**(2)** *$X$ — банахово $B$-пространство.*

◁ (1) → (2) Это следует из определений и 5.3.4.

(2) → (1) Предположим, что $X$ — банахово $B$-пространство, а $J : B \to \mathscr{B}$ — соответствующий изоморфизм $B$ на булеву алгебру проекторов $\mathscr{B}$. Пусть $E$ — идеал, порожденный единицей в расширенном $K$-пространстве всех $B$-значных спектральных функций (см. 5.2.8). Возьмем конечнозначный элемент $d := \sum_{\imath=1}^{n} \lambda_\imath b_\imath \in E$, где $\{b_1, \dots, b_n\}$ — разбиение единицы в $B$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, а под $\lambda b$ понимается спектральная функция $e : \mu \mapsto e(\mu) \in B$, равная нулю при $\mu \le \lambda$ и единице при $\mu > \lambda$. Положим $J(\alpha) := \sum_{\imath=1}^{n} \lambda_\imath J(b_\imath)$ и заметим, что $J(\alpha)$ — ограниченный линейный оператор в $X$. Вычислим норму этого оператора:

$$\|J(\alpha)\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|J(\alpha)x\| = \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{l=1,\dots,n} \{\|\pi_l x\| \cdot |\lambda_l|\} =$$
$$= \sup_{l=1,\dots,n} \sup\{\|\pi_l x\| \, |\lambda_l| : \|x\| \le 1\} = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}.$$

С другой стороны, норма $\|\alpha\|_\infty$ элемента $\alpha$ в $K$-пространстве ограниченных элементов $E$ также совпадает с $\max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$. Следовательно, $J$ — линейная изометрия подпространства $E_0$ конечнозначных элементов из $E$ в алгебру ограниченных операторов $\mathscr{L}(X)$. Ясно также, что $J(\alpha\beta) = J(\alpha) \circ J(\beta)$ для всех $\alpha, \beta \in E_0$. Так как $E_0$ плотно по норме в $E$, а $\mathscr{L}(X)$ — банахова алгебра, то $J$ может быть продолжен по непрерывности до изометрического изоморфизма алгебры $E$ на замкнутую подалгебру алгебры $\mathscr{L}(X)$. Полагая $x\alpha := \alpha x := J(\alpha)x$ для $x \in X$ и $\alpha \in E$, вводим на $X$ структуру унитального $E$-модуля, причем

$$\|\alpha x\| \le \|x\| \, \|\alpha\|_\infty \quad (\alpha \in E, \ x \in X).$$

Кроме того, $\alpha U_X + \beta U_X \subset U_X$ при $|\alpha| + |\beta| \le \mathbb{1}$. Введем теперь отображение $p : X \to E_+$ по формуле

$$p(x) := \inf\{\alpha \in E_+ : x \in \alpha U_X\} \quad (x \in X),$$

где инфимум берется в $K$-пространстве $E$. Если $p(x) = \mathbb{0}$, то для $\varepsilon > \mathbb{0}$ найдутся разбиение единицы $(\pi_\xi) \subset B$ и семейство $(\alpha_\xi) \subset E_+$ такие, что $\pi_\xi \alpha_\xi \le \varepsilon \mathbb{1}$ и $x \in \alpha_\xi U_X$ для всех $\xi$. Но тогда $\pi_\xi x \in$

$\pi_\xi \alpha_\xi U_X \subset \varepsilon U_X$ и в силу замкнутости шара $U_X$ относительно перемешиваний будет $x = \text{mix}(\pi_\xi x) \in \varepsilon U_X$. Ввиду произвольного выбора $\varepsilon > \mathbb{0}$ должно быть $x = \mathbb{0}$. Если $x \in \alpha U_X$ и $y \in \beta U_X$ для некоторых $\alpha$, $\beta \in E_+$, то, обозначив $\gamma := \alpha + \beta + \varepsilon \mathbb{1}$, можно написать

$$x + y = \gamma\,(\gamma^{-1}x + \gamma^{-1}y) \in \gamma(\gamma^{-1}\alpha U_X + \gamma^{-1}\beta U_X) \subset \gamma U_X.$$

Следовательно, $p(x + y) \leq \alpha + \beta + \varepsilon\mathbb{1}$, и переход к инфимуму по указанным $\alpha$, $\beta$ и $\varepsilon$ дает $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$. Далее для $\pi \in B$ и $x \in X$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}\pi p(x) = \inf\{\pi\alpha : \mathbb{0} \leq \alpha \in E,\ x \in \alpha U_X\} = \\ = \inf\{\alpha \in E_+ : \pi x \in \alpha U_X\} = p(\pi x).\end{aligned}$$

Но тогда для $\alpha = \sum \lambda_\imath \pi_\imath$, где $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ — разбиение единицы в $B$, будет

$$p(\alpha x) = \sum \pi_\imath p(\lambda_\imath x) = \sum_{i=1}^{n} \pi_\imath |\lambda_\imath| p(x) = |\alpha| p(x).$$

Отсюда видно, что $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ для всех $\alpha \in E$. Тем самым $(X, p, E)$ — разложимое решеточно нормированное пространство с разложимой нормой.

Докажем теперь, что норма пространства $X$ является смешанной, т. е. $\|x\| = \|p(x)\|_\infty \quad (x \in X)$. Возьмем $0 \neq x \in X$ и положим $y = x/\|x\|$. Тогда $y \in U_X$ и $p(y) \leq \mathbb{1}$. Следовательно, $p(x) \leq \|x\| \cdot \mathbb{1}$ или $\|p(x)\|_\infty \leq \|x\| \cdot \|\mathbb{1}\|_\infty = \|x\|$. Наоборот, для $\varepsilon > 0$ можно подобрать разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{Pr}(E)$ и семейство $(\alpha_\xi)_\xi \subset E_+$ такие, что $\pi_\xi\alpha_\xi \leq p(x) + \varepsilon\mathbb{1} \leq (\|p(x)\|_\infty + \varepsilon) \cdot \mathbb{1}$ и $x \in \alpha_\xi U_X \quad (\xi \in \Xi)$. Отсюда $\pi_\xi x_\xi \in \pi_\xi \alpha_\xi U_X \subset (\|p(x)\|_\infty + \varepsilon) \cdot \pi_\xi \mathbb{1} U_X \subset (\|p(x)\|_\infty + \varepsilon) U_X$, следовательно, $\|\pi_\xi x\| \leq \|p(x)\|_\infty + \varepsilon$. Учитывая произвол в выборе $\varepsilon > 0$ и 5.5.4 (2), получаем $\|x\| \leq \|p(x)\|_\infty$. $\triangleright$

**5.5.6.** Нормированное $B$-пространство назовем $B$-*циклическим*, если в нем существует перемешивание любого ограниченного по норме семейства относительно любого разбиения единицы в $B$.

С учетом сказанного в 5.5.4, можно утверждать, что нормированное пространство $X$ является $B$-цикличным тогда и только тогда, когда для любого разбиения единицы $(b_\xi) \subset B$ и произвольного семейства $(x_\xi)$ в $U_X$ существует единственный элемент $x \in U_X$ такой, что $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ для всех $\xi$.

**(1)** *Банахово $B$-пространство $X$ будет $B$-циклическим в том и только в том случае, если $X$ дизъюнктно полно как решеточно нормированное пространство.*

$\triangleleft$ Очевидно из определений. $\triangleright$

Изометрию между нормированными $B$-пространствами назовем $B$-изометрией, если она линейна и перестановочна с каждым проектором из $B$. Будем говорить, что $Y$ — это $B$-циклическое расширение $B$-пространства $X$, если $Y$ является $B$-цикличным пространством и существует $B$-изометрия $\imath : X \to Y$ такая, что всякое $B$-циклическое подпространство в $Y$, содержащее $\imath(X)$, совпадает с $Y$.

**(2)** *Нормированное $B$-пространство будет $B$-циклическим банаховым пространством в том и только в том случае, когда соответствующее решеточно нормированное пространство о-полно.*

$\triangleleft$ Это следует из 5.4.7 и (1), если учесть, что полнота по норме равносильна полноте относительно сходимости с регулятором, см. 5.5.2. $\triangleright$

**(3)** *Для каждого банахова $B$-пространства существует единственное с точностью до $B$-изометрии $B$-циклическое расширение.*

$\triangleleft$ Это следует из 5.4.5 и (2). $\triangleright$

Дадим, наконец, ответ на вопрос, сформулированный в 5.5.4.

**5.5.7.** ***Теорема.*** *Банахово пространство линейно изометрично ограниченному спуску некоторого банахова пространства из модели $\mathbb{V}^{(B)}$ в том и только в том случае, если оно $B$-циклическое.*

$\triangleleft$ См. 5.4.1, 5.4.2, 5.5.5, 5.5.6 (2). $\triangleright$

Возьмем нормированное $B$-пространство $X$. Пусть $\widetilde{X}$ — его пополнение по норме. Тогда $\widetilde{X}$ будет банаховым $B$-пространством, ибо каждый проектор $b \in B$ имеет единственное продолжение с сохранением нормы на все $\widetilde{X}$. Согласно 5.5.6 (3) $\widetilde{X}$ допускает циклическое $B$-расширение, которое мы обозначим через $\overline{X}$. Теперь в соответствии с теоремой 5.5.7 возьмем банахово пространство $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, ограниченный спуск которого $B$-изометричен $\overline{X}$. Элемент $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$ называют *булевозначной реализацией* $X$.

**5.5.8.** Пусть $X$ и $Y$ — нормированные пространства, причем $B \subset \mathscr{L}(X)$ и $B \subset \mathscr{L}(Y)$. Оператор $T : X \to Y$ называют *$B$-линейным*, если он линеен и перестановочен с проекторами из $B$, т. е. $b \circ T = T \circ b$ для всех $b \in B$. Обозначим через $\mathscr{L}_B(X, Y)$ множество всех ограниченных $B$-линейных операторов из $X$ в $Y$. При этом $W :=$

$\mathscr{L}_B(X,Y)$ — банахово и $B \subset W$. Если $Y$ является $B$-цикличным, то таким же будет и $W$. Проектор $b \in B$ действует в $W$ по правилу $T \mapsto b \circ T$ $(T \in W)$.

Пространство $X^{\#} := \mathscr{L}_B(X, B(\mathbb{R}))$ называют *$B$-сопряженным* к $X$. Если $X^{\#}$ и $Y$ — это $B$-изометричные пространства, то говорят, что $Y$ является *$B$-двойственным* пространством и $X$ — это *$B$-преддвойственное* пространство к $Y$. При этом пишут $X = Y_{\#}$.

**5.5.9. *Теорема.*** *Пусть $X$ — нормированное $B$-пространство, $Y$ — некоторое $B$-циклическое банахово пространство, а $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — соответствующие булевозначные реализации пространств $X$ и $Y$.*

*Пространство $\mathscr{L}_B(X,Y)$ $B$-изометрично ограниченному спуску пространства $\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ всех линейных ограниченных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. При этом оператору $T \in \mathscr{L}_B(X,Y)$ соответствует элемент $\mathscr{T} := T\!\uparrow\, \in \mathbb{V}^{(B)}$, определяемый соотношениями:*

$$
[\![\, \mathscr{T} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y} \,]\!] = \mathbb{1},\ [\![\, \mathscr{T}\imath x = \imath T x \,]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X),
$$

*где $\imath$ — вложение $X$ в $\mathscr{X}\!\downarrow$ и $Y$ в $\mathscr{Y}\!\downarrow$.*

$\lhd$ Без ограничения общности можно предположить, что $X$ и $Y$ — ограниченные спуски банаховых пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно (см. 5.5.6 (3), 5.5.7).

Положим $X_0 := \mathscr{X}\!\downarrow$ и $Y_0 := \mathscr{Y}\!\downarrow$. Ввиду 5.4.9 $\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\!\downarrow$ и $\mathscr{L}_b(X_0, Y_0)$ линейно изометричны. Но ограничение $\mathscr{L}_b(X_0,Y_0)$ относительно $B(\mathbb{R})$ совпадает с ограниченным спуском пространства $\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. Остается заметить, что каждый оператор $T$ из $\mathscr{L}_b(X,Y)$ имеет единственное распространение с сохранением нормы. $\rhd$

**5.5.10.** *Пусть пространство $\mathscr{X}^*$ — банахово сопряженное к $\mathscr{X}$. Пусть символы $\simeq$ и $\simeq_B$ обозначают изометрический изоморфизм и изометрический $B$-изоморфизм соответственно. Предположим, что $X$, $Y$, $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ те же, что и в 5.5.9.*

**(1)** $X^{\#} \simeq_B Y \leftrightarrow [\![\, \mathscr{X}^* \simeq \mathscr{Y} \,]\!] = \mathbb{1}$.

**(2)** *Если $\overline{X}$ — это $B$-циклическое расширение $X$, то будет $X^{\#} = \overline{X}^{\#}$.*

**5.5.11.** Примечания.

**(1)** Пространства со смешанной нормой в смысле этого параграфа изучались в [64]. Там же даны различные приложения концепции

смешанной нормы к геометрии банаховых пространств и теории линейных операторов.

Ограниченный спуск из 5.5.3 ранее изучали Г. Такеути в связи с алгебрами фон Неймана и $C^*$-алгебрами в булевозначных моделях [243, 244] и М. Озава в связи с булевозначной интерпретацией теории гильбертовых и банаховых пространств [209, 215].

**(2)** Основные результаты комментируемого параграфа установлены А. Г. Кусраевым в [64]. Позднее аналогичные утверждения получил М. Озава [215] в несколько иной постановке. Различие состоит в том, что в [215] рассматриваются банаховы пространства с дополнительной структурой модуля, которая может быть восстановлена в произвольном банаховом $B$-пространстве, см. 5.4.8 и 5.5.5.

**(3)** В связи с теоремой 5.5.7 лишь затронуто богатое и красивое направление — геометрия нормированных пространств, см. [33, 178, 182, 183]. Банаховы пространства с полными булевыми алгебрами проекторов безотносительно к булевозначному анализу изучались в [15, 137, 227].

# Глава 6

# Булевозначный анализ банаховых алгебр

Одним из наиболее привлекательных традиционных разделов функционального анализа является теория банаховых алгебр. В этой главе проводится булевозначный анализ инволютивных банаховых алгебр.

Булевозначный подход к изучению операторных алгебр основан на следующем соображении. Если центр алгебры достаточно квалифицирован и хорошо в ней расположен, то при погружении в соответствующую булевозначную модель центр становится одномерной подалгеброй, что может привести к более простой алгебре. В то же время, в силу принципа переноса, объемы формальных теорий исходной алгебры и ее булевозначной реализации совпадают. Детализация этого утверждения для банаховых алгебр и $C^*$-алгебр приведена в теоремах 6.1.5 и 6.1.6.

Изложение строится вокруг анализа $AW^*$-алгебр и $AW^*$-модулей, которые реализуются в булевозначной модели как $AW^*$-факторы и гильбертовы пространства соответственно, см. теоремы 6.2.4 и 6.2.8.

Размерность гильбертова пространства в модели — это булевозначный кардинал, который естественно назвать булевой размерностью $AW^*$-модуля. Здесь проявляется весьма тонкий эффект смещения кардинальных чисел: при погружении в булевозначную модель стандартные кардиналы могут «склеиваться». Это означает, что изоморфные $AW^*$-модули могут иметь базисы разной мощно-

сти. Отсюда вытекает также, что $AW^*$-алгебра типа I разлагается в прямую сумму однородных подалгебр, вообще говоря, многими способами. Последнее утверждение в качестве гипотезы высказал И. Капланский в 1953 году. Указанные результаты изложены в 6.3 и 6.4.

Опираясь на результаты о булевозначном погружении $AW^*$-модулей и $AW^*$-алгебр, мы выводим функциональные реализации этих объектов. Точнее говоря, устанавливается, что $AW^*$-модуль унитарно эквивалентен прямой сумме однородных $AW^*$-модулей, состоящих из непрерывных вектор-функций со значениями в гильбертовом пространстве. Аналогичное представление имеет и $AW^*$-алгебра типа I, только вместо непрерывных вектор-функций используются оператор-функции, непрерывные в сильной операторной топологии. Соответствующие факты представлены в 6.5.

$AW^*$-алгебру называют *вложимой*, если она $*$-изоморфна бикоммутанту в некоторой $AW^*$-алгебре типа I. Каждая вложимая $AW^*$-алгебра допускает булевозначную реализацию, являющуюся алгеброй или фактором фон Неймана. Даны различные характеризации вложимых $AW^*$-алгебр. В частности, в 6.6 установлено, что $AW^*$-алгебра будет вложимой в том и только в том случае, если она имеет разделяющее множество центрозначных нормальных состояний.

## 6.1. Спуски банаховых алгебр

В предыдущей главе была намечена принципиальная схема булевозначной реализации для банаховых пространств. Здесь эта тема развивается для инволютивных банаховых алгебр.

**6.1.1.** Начнем с нужных определений, ограничиваясь рассмотрением комплексных алгебр. Подчеркнем, что говоря об алгебре, мы всегда имеем в виду ассоциативную алгебру с единицей.

*Инволютивной алгеброй* или *$*$-алгеброй* называют алгебру $A$ с *инволюцией*, т. е. с отображением $x \mapsto x^*$ $(x \in A)$, удовлетворяющим условиям:

**(1)** $x^{**} = x \quad (x \in A)$;
**(2)** $(x + y)^* = x^* + y^* \quad (x, y \in A)$;
**(3)** $(\lambda x)^* = \lambda^* x^* \quad (\lambda \in \mathbb{C},\ x \in A)$;
**(4)** $(xy)^* = y^* x^* \quad (x, y \in A)$.

Элемент $x$ инволютивной алгебры именуют *эрмитовым*, если $x^* = x$. Эрмитов элемент $e$ называют *проектором*, если он идемпотентен, т. е. если $e^2 = e$. Множество всех проекторов инволютивной алгебры $A$ мы будем обозначать символом $\mathfrak{P}(A)$. Легко понять, что формула

$$c \leq e \leftrightarrow c = ce = ec \quad (c, e \in \mathfrak{P}(X))$$

определяет отношение порядка $\leq$ в множестве проекторов. Проекторы $e$ и $c$ называют *эквивалентными* и пишут $e \sim c$, если существует такой элемент $x \in A$, что $x^*x = e$ и $xx^* = c$. В этой ситуации говорят также, что $x$ — *частичная изометрия* с начальным проектором $e$ и с конечным проектором $c$. Отношение $\sim$ в действительности является эквивалентностью на $\mathfrak{P}(A)$.

Проектор $e$ называют *центральным*, если $ex = xe$ для каждого $x \in A$. Множество всех центральных проекторов обозначается через $\mathfrak{P}_c(A)$.

**6.1.2.** Для непустого множества $M \subset A$ положим

$$M^{\perp} := \{y \in A : (\forall x \in M) xy = \mathbb{0}\};$$
$${}^{\perp}M := \{x \in A : (\forall y \in M) xy = \mathbb{0}\}.$$

Приняты следующие названия: $M^{\perp}$ — *правый аннулятор*, ${}^{\perp}M$ — *левый аннулятор*.

Из общих свойств аннуляторов выводится, что множество всех правых (левых) аннуляторов, упорядоченное по включению, является полной решеткой. Отображение $K \mapsto K^* := \{x^* : x \in K\}$ является изотонной биекцией этих решеток, ибо $(M^{\perp})^* = {}^{\perp}(M^*)$ и $({}^{\perp}M)^* = (M^*)^{\perp}$.

*Бэровской $*$-алгеброй* называют инволютивную алгебру $A$, в которой для каждого непустого $M \subset A$ выполняется $M^{\perp} = eA$ при некотором $e \in \mathfrak{P}(A)$. Иначе говоря, любой левый аннулятор имеет вид ${}^{\perp}M = Ac$ для подходящего проектора $c$. В бэровской $*$-алгебре для каждого левого аннулятора $L$ существует единственный проектор $c_L \in A$ такой, что $x = xc_L$ для всех $x \in L$ и $c_L y = \mathbb{0}$ в том и только в том случае, когда $y \in L^{\perp}$. Сопоставление $L \mapsto c_L$ является изоморфизмом между упорядоченными множествами всех левых аннуляторов и всех проекторов. Обратный изоморфизм имеет вид $c \mapsto {}^{\perp}(\mathbb{1} - c) \quad (c \in \mathfrak{P}(A))$. Аналогичное утверждение верно и для

правых аннуляторов. Отсюда вытекает, в частности, что упорядоченное множество $\mathfrak{P}(A)$ является полной решеткой. Отображение $e \mapsto e^{\perp} := \mathbb{1} - e \quad (e \in \mathfrak{P}(A))$ удовлетворяет условиям:

$$e^{\perp\perp} = e,\ e \wedge e^{\perp} = \mathbb{0},\ e \vee e^{\perp} = \mathbb{1},$$
$$(e \wedge c)^{\perp} = e^{\perp} \vee c^{\perp},\ (e \vee c)^{\perp} = e^{\perp} \wedge c^{\perp},$$
$$e \leq c \to e \vee (e^{\perp} \wedge c) = c.$$

Иными словами, $(\mathfrak{P}(A), \wedge, \vee, \perp)$ представляет собой *ортомодулярную решетку* (см. [5]).

**6.1.3.** Норму $\|\cdot\|$ на алгебре $A$ назовем *субмультипликативной*, если

$$\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\| \quad (x, y \in A).$$

*Банахова алгебра* — это алгебра, являющаяся банаховым пространством по отношению к фиксированной на ней субмультипликативной норме. Если банахова алгебра $A$ инволютивна и при этом

$$\|xx^*\| = \|x\|^2 \quad (x \in A),$$

то $A$ называют $C^*$*-алгеброй*.

Элемент $x$ некоторой $C^*$-алгебры $A$ считают *положительным*, если $x = y^*y$ для некоторого $y \in A$. При этом множество всех положительных элементов $A_+$ является упорядочивающим конусом, так что $(A, A_+)$ — упорядоченное векторное пространство. Рассматривая $C^*$-алгебру как упорядоченное векторное пространство, всегда имеют в виду порядок, определяемый конусом $A_+$.

**6.1.4.** Банахову алгебру $A$ назовем *$B$-циклической* (относительно полной булевой алгебры проекторов $B$), если она представляет собой $B$-циклическое банахово пространство (в смысле 5.5.6) и каждый проектор из $B$ *мультипликативен*. Последнее означает, что

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y) = x\pi y = \pi(x)y \quad (x, y \in A,\ \pi \in B).$$

Понятие *$B$-циклической инволютивной банаховой алгебры* возникает, если потребовать дополнительно, что проекторы из $B$ сохраняют инволюцию:

$$\pi(x^*) = (\pi x)^* \quad (x \in A, \pi \in B).$$

Наконец, определение *$B$-циклической $C^*$-алгебры* очевидно.

Напомним, что мы рассматриваем только алгебры с единицей. Если $\mathbb{1}$ — единица алгебры $A$, то проектор $b \in B$ можно отождествить с элементом $b\mathbb{1}$, получая в случае инволютивности $A$ центральный проектор в смысле 6.1.1. При этом мы будем писать $B \subset \mathfrak{P}_c(A)$. Запись $B \sqsubset A$ означает, что $A$ — это $B$-циклическая банахова алгебра. Для $C^*$-алгебры $A$ условие ее $B$-цикличности подразумевает, что для любого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и любого ограниченного семейства $(x_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset A$ существует единственный элемент $x \in A$ такой, что $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ $(\xi \in \Xi)$.

Примером $B$-циклической $C^*$-алгебры служит комплексное $K$-пространство ограниченных элементов с базой $B$ при фиксированной единице (см. 5.1.3, 5.2.5 (5)). Такая алгебра единственна с точностью до $*$-изоморфизма и обозначается через $B(\mathbb{C})$. Часто мы будем отождествлять $B(\mathbb{C})$ с ограниченной частью спуска $\mathscr{C}{\downarrow}$, где $\mathscr{C}$ — поле комплексных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Алгебру $B(\mathbb{C})$ часто называют *стоуновой* и обозначают символом $\mathscr{S}(B)$.

Возьмем $B$-циклические банаховы алгебры $A_1$ и $A_2$. Ограниченный оператор $\Phi : A_1 \to A_2$ называют *$B$-гомоморфизмом*, если он $B$-линеен в смысле 5.5.8 и мультипликативен: $\Phi(xy) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$. Если $A_1$ и $A_2$ инволютивны и $B$-гомоморфизм $\Phi$ сохраняет инволюцию: $\Phi(x^*) = \Phi(x)^*$ $(x \in A_1)$, то $\Phi$ называют *$*$-$B$-гомоморфизмом.* Таким образом, алгебры $A_1$ и $A_2$ являются $B$-изоморфными, если существует изоморфизм $A_1$ на $A_2$, перестановочный с проекторами из $B$. Если $B$-изоморфизм сохраняет инволюцию, то мы называем его *$*$-$B$-изоморфизмом.*

**6.1.5. *Теорема.*** *Ограниченный спуск банаховой алгебры из модели $\mathbb{V}^{(B)}$ есть $B$-циклическая банахова алгебра. Наоборот, для любой $B$-циклической банаховой алгебры $A$ существует единственная с точностью до изоморфизма банахова алгебра $\mathscr{A}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ такая, что $A$ изометрически $B$-изоморфна ограниченному спуску $\mathscr{A}$.*

$\triangleleft$ Пусть $A$ — это $B$-циклическая банахова алгебра. По теореме 5.5.7 в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует банахово пространство $\mathscr{A}$ такое, что его ограниченный спуск $A_0$ есть $B$-циклическое банахово пространство, изометрически $B$-изоморфное $A$. Поэтому можно без ограничения общности считать, что $A_0 = A$. Умножение в $A$ экстенсионально. Действительно, если $b \leq [\![ x = u ]\!] \wedge [\![ y = v ]\!]$, где $x$, $y$, $u$,

$v \in A$, то в силу (b) из 5.4.1 (2) будет

$$\mathbb{0} = x\chi(b)\,(y - v) + \chi(b)\,(x - u)v \to \chi(b)\,(xy - uv) = \\ = \mathbb{0} \to \chi(b)\,(xy) = \chi(b)\,uv \to b \leq [\![\, xy = uv \,]\!].$$

Пусть $\odot$ — подъем операции умножения $\cdot$ в $A$. Легко понять, что $\odot$ есть бинарная операция в $\mathscr{A}$ и пространство $\mathscr{A}$ с операцией $\odot$ будет алгеброй. Если $p$ — векторная норма в пространстве $A$, то $\|a\| = \|p(a)\|_\infty$ и $[\![\, p(a) = \rho(a) \,]\!] = \mathbb{1}$ $(a \in \mathscr{A})$, где $\rho$ — норма в $\mathscr{A}$ (см. 5.5.5). Покажем, что норма $p$ субмультипликативна, т. е. $p(xy) \leq p(x)p(y)$. Вспомним (см. 5.4.1 (2) и 5.5.5), что $A$ является банаховым модулем над кольцом $B(\mathbb{R})$, где $B(\mathbb{R})$ — ограниченная часть $\mathscr{R}{\downarrow}$, а для $p$ верна формула

$$p(x) = \inf\{\alpha \in E^+ : x \in \alpha U_A\} \quad (x \in A).$$

Следовательно, субмультипликативность $p$ вытекает из того, что единичный шар $U_A$ устойчив относительно умножения, т. е. из $x$, $y \in U_A$ вытекает $xy \in U_A$. Таким образом, $p \circ (\cdot) \leq (\cdot) \circ (p \times p)$. Привлекая правила подъема отображений (см. 3.3.11), получаем $[\![\, \rho \circ \odot \leq \odot \circ (\rho \times \rho) \,]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $[\![$ норма $\rho$ субмультипликативна $]\!] = \mathbb{1}$. Окончательно заключаем, что $\mathscr{A}$ — банахова алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Единственность $A$ обоснована в следующих рассуждениях. Пусть $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — банаховы алгебры внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а $g$ — это изометрический $B$-изоморфизм их ограниченных спусков. Тогда $g$ — экстенсиональное отображение и $\psi := g{\uparrow}$ — линейная изометрия банаховых пространств $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$. Мультипликативность $\psi$ следует из соотношений

$$\psi \circ \odot = g{\uparrow} \circ (\cdot){\uparrow} = (g \circ (\cdot)){\uparrow} = ((\cdot) \circ (g \times g)){\uparrow} = (\cdot){\uparrow} \circ (g{\uparrow} \times g{\uparrow}) = \odot \circ (\psi \times \psi),$$

где $\odot$ — умножение в каждой из алгебр $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$, а $(\cdot)$ — умножение в каждом из ограниченных спусков.

Предположим теперь, что $\mathscr{A}$ — банахова алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $A$ — ее ограниченный спуск. Мы уже знаем, что $A$ представляет собой $B$-циклическое банахово пространство (см. 5.5.11). Если $\chi$ — канонический изоморфизм $B$ на базу $\mathfrak{E}(E)$, то $b \leq [\![\, x = \mathbb{0} \,]\!] \leftrightarrow \chi(b)x = \mathbb{0}$ для каждого $x \in A$ (см. 5.4.1 (2)). Учитывая определение $\chi$ и очевидное соотношение

$$\chi(b) = \mathbb{0} \vee \chi(b) = \mathbb{1} \to \chi(b)xy = (\chi(b)x)y = x\,(\chi(b)y) \quad (x, y \in A),$$

для любых $x$, $y \in A$ можно написать:

$$[\![ \chi(b)xy = x\chi(b)y = (\chi(b)x)y ]\!] \geq [\![ \chi(b) = \mathbb{1} ]\!] \vee [\![ \chi(b) = \mathbb{0} ]\!] = b \vee b^* = \mathbb{1}.$$

Отсюда видно, что проектор $\pi_b : x \mapsto \chi(b)x \quad (x \in A)$ удовлетворяет требуемому соотношению $\pi_b xy = (\pi_b x)y = x\,(\pi_b y) \quad (x, y \in A)$. Значит, $A$ есть $B$-циклическая банахова алгебра. $\triangleright$

**6.1.6. *Теорема.*** *Ограниченный спуск $C^*$-алгебры из модели $\mathbb{V}^{(B)}$ есть $B$-циклическая $C^*$-алгебра.*

*Наоборот, для любой $B$-циклической $C^*$-алгебры $A$ существует единственная с точностью до $*$-изоморфизма $C^*$-алгебра $\mathscr{A}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ такая, что ограниченный спуск $\mathscr{A}$ является алгеброй, $*$-$B$-изоморфной $A$.*

$\triangleleft$ Если $A$ — это $B$-циклическая $C^*$-алгебра, то структура банахова $\mathscr{S}(B)$-модуля обладает на $A$ тем дополнительным свойством, что $(\alpha x)^* = \alpha x^* \quad (\alpha \in B(\mathbb{R}),\ x \in A)$ (как и выше, $B(\mathbb{R})$ — вещественная часть комплексной банаховой алгебры $\mathscr{S}(B)$). В самом деле, если $\alpha := \sum_{k=1}^n \lambda_k \pi_k$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и $\pi_1, \ldots, \pi_n \in \mathfrak{E}(\mathscr{S}(B))$, то

$$(\alpha x)^* = \sum_{k=1}^n \lambda_k\,(\pi_k x)^* = \sum_{k=1}^n \lambda_k \pi_k x^* = \alpha x^*.$$

Инволюция в $C^*$-алгебре является изометрией. Поэтому $U_A^* = U_A$. Из всего сказанного следует, что

$$x \in \alpha U_A \leftrightarrow xx^* \in \alpha^2 U_A \quad (x \in A,\ \alpha \in \mathscr{S}(B)).$$

Отсюда видно, что $p(xx^*) = p(x)^2$ и, в частности инволюция, будет изометрией и по отношению к векторной норме $p$, т. е. $p(x^*) = p(x) \quad (x \in A)$. Заметим также, что если $(\mathscr{A}, \rho)$ — банахова алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, $A$ — ее ограниченный спуск и $p$ — ограничение $\rho\!\downarrow$ на $A$, то подъем инволюции из $A$ удовлетворяет условию $[\![ (\forall x \in \mathscr{A})\rho(xx^*) = \rho(x)^2 ]\!] = \mathbb{1}$ в том и только в том случае, если $p(xx^*) = p(x)^2 \quad (x \in A)$. Остается привлечь теорему 6.1.5 и осуществить некоторые элементарные проверки. $\triangleright$

**6.1.7. *Теорема.*** *Пусть $A$ — это $B$-циклическая банахова алгебра, в которой обратим всякий элемент $x \in A$, удовлетворяющий условию $(\forall b \in B)(bx = \mathbb{0} \to b = \mathbb{0})$. Тогда $A$ изометрически $B$-изоморфна стоуновой алгебре с базой $B$.*

$\lhd$ Согласно теореме 6.1.5, можно считать, что $A$ есть ограниченный спуск банаховой алгебры $\mathscr{A} \in \mathbb{V}^{(B)}$. Указанное в формулировке условие влечет, что в алгебре $\mathscr{A}$ обратим любой ненулевой элемент. В самом деле,

$$c := [\![ (\forall x)\,(x \in \mathscr{A} \wedge x \neq \mathbb{0} \to (\exists z)(z = x^{-1})) ]\!] =$$
$$= \bigwedge \{ [\![ (\exists z)(z = x^{-1}) ]\!] : x \in A \wedge [\![ x \neq \mathbb{0} ]\!] = \mathbb{1} \}.$$

В силу соотношения (c) из 5.4.1 (2) $[\![ x \neq \mathbb{0} ]\!] = \mathbb{1}$ равносильно условию $\chi(b)x = \mathbb{0} \leftrightarrow b = \mathbb{0}$. Значит, если $[\![ x \neq \mathbb{0} ]\!] = \mathbb{1}$, то существует $x^{-1}$ в алгебре $A$ и $[\![ (\exists z)(z = x^{-1}) ]\!] = \mathbb{1}$. Тем самым $c = \mathbb{1}$. По теореме Гельфанда — Мазура алгебра $\mathscr{A}$ изометрически изоморфна полю комплексных чисел $\mathscr{C}$. Но тогда $A$ изометрически $B$-изоморфна ограниченному спуску $\mathscr{C}$, т. е. стоуновой алгебре с базой $B$ (см. 6.1.4). $\rhd$

**6.1.8. *Теорема.*** *Пусть $A$ — это $B$-циклическая банахова алгебра, $\mathscr{S}(B)$ — стоунова алгебра с базой $B$ и $\Phi : A \to \mathscr{S}(B)$ — некоторый $B$-линейный оператор. Предположим, $\Phi(1) = \mathbb{1}$ и $e_{\Phi(x)} = \mathbb{1}$ для каждого обратимого элемента $x \in A$. Тогда $\Phi$ мультипликативен, т. е. $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y) \quad (x, y \in A)$.*

$\lhd$ Рассуждая так же, как и в 6.1.7, положим $\varphi := \Phi\!\uparrow$. Тогда $[\![ \varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ — линейный функционал $]\!] = \mathbb{1}$, причем $[\![ \varphi(x) \neq \mathbb{0}$ для любого обратимого $x \in A ]\!] = \mathbb{1}$. По теореме Глисона — Желязко — Кахана $[\![ \varphi$ — мультипликативный функционал $]\!] = \mathbb{1}$. Отсюда выводится мультипликативность $\Phi$ так же, как в 6.1.5 субмультипликативность $p$. $\rhd$

**6.1.9. *Теорема.*** *Пусть $A, \mathscr{S}(B)$ и $\Phi$ те же, что и в 6.1.8, причем $A$ инволютивна и коммутативна. Обозначим буквой $K$ множество всех положительных $B$-линейных операторов $\Psi : A \to \mathscr{S}(B)$ таких, что $\Psi(1) \leq \mathbb{1}$. Если $\Phi \in K$, то равносильны утверждения:*

**(1)** $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y) \quad (x, y \in A)$;

**(2)** $\Phi(xx^*) = \Phi(x)\Phi(x^*) \quad (x \in A)$;

**(3)** $\Phi \in \mathrm{ext}(K)$,

*где $\mathrm{ext}(K)$ — множество крайних точек выпуклого множества $K$.*

$\lhd$ Сохранив прежние обозначения, можно утверждать: $[\![ \mathscr{A}$ — коммутативная банахова алгебра с инволюцией, а $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ — положительный функционал, причем $\varphi(1) \leq \mathbb{1} ]\!] = \mathbb{1}$. Пусть $\mathscr{K}$ —

множество всех положительных функционалов $\psi$ на $\mathscr{A}$, для которых $\psi(1) \leq \mathbb{1}$. Можно показать, что отображение $\psi \mapsto (\psi{\downarrow}) \upharpoonright A$ осуществляет аффинную биекцию $\lambda$ между выпуклыми множествами $\mathscr{K}{\downarrow}$ и $\overline{K} := \{\Psi{\uparrow} : \Psi \in K\}$. При этом $[\![\, \psi \in \operatorname{ext}(\mathscr{K}) \,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \lambda\psi \in \operatorname{ext}(K)$. Остается применить скалярный вариант (т. е. при $\mathscr{S}(B) = \mathscr{C}$) требуемого факта внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. $\rhd$

**6.1.10.** Обозначим $B$-$\operatorname{Hom}(A_1, A_2)$ множество всех $B$-гомоморфизмов из $A_1$ в $A_2$. Пусть далее $\operatorname{Hom}^B(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ — элемент $\mathbb{V}^{(B)}$, изображающий множество всех гомоморфизмов из $\mathscr{A}_1$ в $\mathscr{A}_2$.

**(1)** ***Теорема.*** *Пусть $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — банаховы алгебры внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а $A_1$ и $A_2$ — соответствующие ограниченные спуски. Если $\Phi \in B$-$\operatorname{Hom}(A_1, A_2)$ и $\varphi := \Phi{\uparrow}$, то $[\![\, \varphi \in \operatorname{Hom}^B(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2) \,]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\, \|\varphi\| \leq C \,]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого $C \in \mathbb{R}$. Сопоставление $\Phi \mapsto \varphi$ — изометрическая биекция между $B$-$\operatorname{Hom}(A_1, A_2)$ и $\operatorname{Hom}^B(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2){\downarrow}^{\infty}$.*

$\lhd$ Всё требуемое, за исключением мультипликативности, содержится в 5.4.9. Мультипликативность операторов $\varphi$ и $\Phi$ можно обосновать так же, как единственность в 6.1.5. $\rhd$

**(2)** *Пусть $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — инволютивные банаховы алгебры внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а $\Phi \in B$-$\operatorname{Hom}(A_1, A_2)$ и $\varphi \in \operatorname{Hom}^B(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ соответствуют друг другу в силу биекции из (1). Тогда равенство $[\![\, \varphi$ сохраняет инволюцию $]\!] = \mathbb{1}$ выполнено в том и только в том случае, когда $\Phi$ сохраняет инволюцию.*

$\lhd$ См. 5.5.4 и 6.1.6. $\rhd$

**6.1.11.** *Пусть $\mathscr{A}$ — инволютивная банахова алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $A$ — ее ограниченный спуск. Тогда элемент $x \in A$ будет эрмитовым (положительным, проектором, центральным проектором) в том и только в том случае, если $[\![\, x$ — эрмитов (положителен, является проектором, центральным проектором) $]\!] = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ Очевидно. $\rhd$

**6.1.12.** Примечания.

**(1)** Дж. фон Нейман начал изучать инволютивные операторные алгебры в связи с математическими проблемами, возникающими в квантовой механике, см. [95, 193, 194]. Эта традиционная связь с теоретической физикой жива и поныне (см., например, [6]), хотя современная теория инволютивных топологических алгебр включает несколько абстрактных направлений и большое количество тонких

математических проблем [32, 94, 103, 118, 133, 167, 179, 222, 225, 236, 237, 257].

Изучение $C^*$-алгебр начато И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком в 1943 году. Важнейшие структурные свойства $C^*$-алгебр связаны с положительностью. Основные понятия теории инволютивных алгебр см. в [121]. Необходимые сведения из теории $C^*$-алгебр имеются в [32, 81, 92, 118]; алгебры фон Неймана освещены в [133, 225, 237].

**(2)** Изучение $C^*$-алгебр и алгебр фон Неймана методом булевозначных моделей начал Г. Такеути в [243, 244]. Он же установил теорему 6.1.6.

Теоремы 6.1.7 и 6.1.8 — интерпретация в булевозначной модели классических фактов теории банаховых алгебр: теоремы Гельфанда — Мазура и теоремы Глисона — Желязко — Кахана (см., например, [81, 224]).

Отметим также монографию [128], освещающую приложения булевозначных моделей к проблемам независимости в соответствующих разделах функционального анализа.

## 6.2. $AW^*$-алгебры и $AW^*$-модули

Здесь будут установлены результаты о булевозначной реализации объектов, указанных в названии параграфа.

**6.2.1.** *$AW^*$-алгеброй* называют $C^*$-алгебру, являющуюся в то же время бэровской $*$-алгеброй. Более подробно $AW^*$-алгебра — такая $C^*$-алгебра, в которой всякий правый аннулятор имеет вид $eA$, где $e$ — проектор. Заметим попутно, что $AW^*$-алгеброй принято называть то, что следовало бы именовать бэровской $C^*$-алгеброй.

*$C^*$-алгебра $A$ будет $AW^*$-алгеброй в том и только в том случае, если выполняются условия:*

**(1)** *в упорядоченном множестве проекторов $\mathfrak{P}(A)$ каждое семейство попарно ортогональных элементов имеет супремум;*

**(2)** *каждая максимальная коммутативная $*$-подалгебра $A_0$ в $A$ есть комплексное $K$-пространство ограниченных элементов.*

Примером $AW^*$-алгебры служит пространство всех ограниченных линейных операторов $\mathscr{L}(H)$ в комплексном гильбертовом пространстве $H$. Структуру банаховой алгебры в $\mathscr{L}(H)$ определяют

обычные операции сложения и умножения операторов и классическая операторная норма. Инволюция в $\mathscr{L}(H)$ — взятие сопряженного оператора.

Отметим также, что коммутативная $AW^*$-алгебра, называемая также *стоуновой алгеброй*, есть комплексное $K$-пространство ограниченных элементов, причем единица умножения является сильной порядковой единицей.

**6.2.2. Спектральная теорема.** *В $AW^*$-алгебре $A$ для любого эрмитова элемента $a \in A$ существует единственное разложение единицы $\lambda \mapsto e_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ в $\mathfrak{P}(A)$ такое, что*

$$a = \int\limits_{-\|a\|}^{\|a\|} \lambda \, de_\lambda.$$

*При этом для элемента $x \in A$ будет $ax = xa$ в том и только в том случае, если $xe_\lambda = e_\lambda x$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$.*

$\lhd$ Под разложением единицы в $\mathfrak{P}(A)$ понимают, как и в случае булевой алгебры, функцию $\lambda \mapsto e_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ со свойствами 5.2.6 (1–3), см. 5.2.8. Максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $A$, содержащая элемент $a$, будет комплексным $K$-пространством согласно 6.2.1 (2). Поэтому требуемое представление выводится из теоремы Фрейденталя 5.2.14. Утверждение о коммутировании следует из того, что элемент $a$ и множество $\{e_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ порождают одну и ту же максимальную $*$-подалгебру. $\rhd$

**6.2.3. Теорема.** *$AW^*$-алгебра $A$ является $B$-циклической $C^*$-алгеброй, какова бы ни была правильная подалгебра $B$ полной булевой алгебры $\mathfrak{P}_c(A)$.*

$\lhd$ Пусть $U$ — единичный шар алгебры $A$. Нужно лишь установить, что для любых разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset B$ и семейства $(a_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset U$ найдется единственный элемент $a \in U$ такой, что $b_\xi a_\xi = b_\xi a$ для всех $\xi \in \Xi$. Допустим сначала, что $a_\xi$ — эрмитов элемент для каждого $\xi \in \Xi$. Тогда семейство $(b_\xi a_\xi)$ состоит из попарно коммутирующих эрмитовых элементов, так как $(b_\xi a_\xi) \cdot (b_\eta a_\eta) = (b_\xi b_\eta) \cdot (a_\xi a_\eta)$ при $\xi \neq \eta$. Пусть $A_0$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $A$, содержащая семейство $(b_\xi a_\xi)$. Согласно 6.2.1 (2) $A_0$ — комплексное $K$-пространство ограниченных элементов, поэтому существует

элемент $a = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi a_\xi$, где $o$-сумма вычисляется в $A_0$. Ясно, что $b_\xi a_\xi = b_\xi a$ при всех $\xi \in \Xi$. В то же время из $-\mathbb{1} \le a_\xi \le \mathbb{1}$ вытекает $-\mathbb{1} \le a \le \mathbb{1}$, следовательно, $\|a\| \le 1$.

Докажем единственность. Допустим, что для некоторого эрмитова элемента $d \in A$ выполняется $b_\xi d = 0$ при всех $\xi \in \Xi$. Согласно 5.2.6 (10) имеем

$$e_\lambda^{b_\xi d} = b_\xi^\perp \vee e_\lambda^d = \mathbb{1} = e_\lambda^{\mathbb{1}} \quad (\lambda \in \mathbb{R},\, \lambda > 0),$$

$$e_\lambda^{b_\xi d} = b_\xi \wedge e_\lambda^d = \mathbb{0} = e_\lambda^{\mathbb{0}} \quad (\lambda \in \mathbb{R},\, \lambda \le 0).$$

Равенства $b_\xi^\perp \vee e_\lambda^d = \mathbb{1}$ и $b_\xi \wedge e_\lambda^d = \mathbb{0}$ равносильны неравенствам $e_\lambda^d \ge b_\xi$ и $e_\lambda^d \le b_\xi^\perp$ соответственно. Отсюда выводим $e_\lambda^d = \mathbb{1}$ при $\lambda > 0$ и $e_\lambda^d = \mathbb{0}$ при $\lambda \le 0$, т. е. спектральная функция элемента $d$ совпадает со спектральной функцией нуля. Тем самым $d = 0$.

В общем случае произвольных $a_\xi \in U$ воспользуемся представлением $a_\xi = u_\xi + iv_\xi$, где $i$ — мнимая единица, а $u_\xi$ и $v_\xi$ — однозначно определенные эрмитовы элементы из $U$. В соответствии с уже доказанным, существуют эрмитовы элементы $u, v \in U$ такие, что $b_\xi u = b_\xi u_\xi$ и $b_\xi v = b_\xi v_\xi$ при всех $\xi \in \Xi$. Элемент $a = u + iv$ будет искомым. В самом деле, $b_\xi a = b_\xi a_\xi$ $\xi \in \Xi$. Кроме того, эрмитовы элементы $a_\xi^* a_\xi$ входят в $U$ и $b_\xi a^* a = b_\xi a_\xi^* a_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Так как элемент $a^*a$, удовлетворяющий этим условиям, единствен, то $a^*a \in U$. Но тогда $a \in U$, ибо $\|a\|^2 = \|a^*a\| \le 1$. $\rhd$

**6.2.4. *Теорема.*** *Пусть $\mathscr{A}$ — это $AW^*$-алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $A$ — ее ограниченный спуск. Тогда $A$ — также $AW^*$-алгебра, причем в $\mathfrak{P}_c(A)$ имеется правильная подалгебра, изоморфная $B$. Наоборот, пусть $A$ — такая $AW^*$-алгебра, что $B$ — правильная подалгебра булевой алгебры $\mathfrak{P}_c(A)$. Тогда в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует единственная с точностью до $*$-изоморфизма $AW^*$-алгебра $\mathscr{A}$, ограниченный спуск которой $*$-$B$-изоморфен $A$.*

$\lhd$ В силу теорем 6.1.6 и 6.2.3 в доказательстве нуждается лишь утверждение о бэровости $C^*$-алгебр $A$ и $\mathscr{A}$. Последнее же элементарно выводится с помощью правил спуска и подъема поляр (в данном случае аннуляторов) (см. 3.2.13 (2), 3.3.12 (6)) с учетом 6.1.11. $\rhd$

**6.2.5.** *Центром* $AW^*$-алгебры $A$ называют множество элементов $z \in A$, коммутирующих со всеми элементами $A$, т. е. $\mathscr{Z}(A) :=$

$\{z \in A : (\forall x \in A)\, xz = zx\}$. Понятно, что $\mathscr{Z}(A)$ — коммутативная $AW^*$-подалгебра $A$, причем $\lambda\mathbb{1} \in \mathscr{Z}(A)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Если $\mathscr{Z}(A) = \{\lambda\mathbb{1} : \lambda \in \mathbb{C}\}$, то $AW^*$-алгебру $A$ называют $AW^*$-*фактором.*

***Теорема.*** *Если алгебра $\mathscr{A}$ — это $AW^*$-фактор внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то ее ограниченный спуск $A$ будет $AW^*$-алгеброй и булева алгебра всех ее центральных проекторов изоморфна $B$. Наоборот, если $A$ — это $AW^*$-алгебра и $B := \mathfrak{P}_c(A)$, то в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует единственный с точностью до $*$-изоморфизма $AW^*$-фактор $\mathscr{A}$, ограниченный спуск которого $*$-$B$-изоморфен $A$.*

$\lhd$ Следует применить 6.2.4 и тот факт, что спуск двухэлементной булевой алгебры изоморфен $B$ (см. 4.2.2). $\rhd$

**6.2.6.** Пусть $\Lambda$ — коммутативная $AW^*$-алгебра и $B$ — полная булева алгебра проекторов $\Lambda$. Рассмотрим унитальный $\Lambda$-модуль $X$. Отображение $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle : \ X \times X \to \Lambda$ называют $\Lambda$-*значным скалярным произведением*, если для любых $x,\ y,\ z \in X$ и $a \in \Lambda$ выполнены условия:

**(1)** $\langle x\,|\,x\rangle \geq \mathbb{0}$; $\langle x\,|\,x\rangle = \mathbb{0} \leftrightarrow x = \mathbb{0}$;
**(2)** $\langle x\,|\,y\rangle = \langle y,\ x\rangle^*$;
**(3)** $\langle ax\,|\,y\rangle = a\langle x\,|\,y\rangle$;
**(4)** $\langle x + y\,|\,z\rangle = \langle x\,|\,z\rangle + \langle y\,|\,z\rangle$.

Располагая $\Lambda$-значным скалярным произведением, можно ввести в $X$ норму по формуле

**(5)** $|||x||| := \sqrt{\|\langle x|x\rangle\|} \quad (x \in X)$,

а также векторную норму

**(6)** $|x| := \sqrt{\langle x|x\rangle} \quad (x \in X)$.

При этом $|||x||| = \||x|\| \quad (x \in X)$, так как $\|a\| = \|(\sqrt{a})^2\| = \|\sqrt{a}\|^2$ для положительного элемента $a \in \Lambda$. Таким образом, (5) определяет смешанную норму на $X$ (см. 5.5.1).

**6.2.7. *Теорема.*** *Пара $(X, |||\cdot|||)$ представляет собой $B$-циклическое банахово пространство в том и только в том случае, если $(X, |\cdot|)$ — пространство Банаха — Канторовича.*

$\lhd$ Заметим, что норма 6.2.6 (6) разложима, ибо $|bx| = b|x|$ для всех $x \in X$ и $b \in B$ согласно 6.2.6 (3). По теореме 5.5.2 пространство $(X, |||\cdot|||)$ банахово тогда и только тогда, когда $(X, |\cdot|)$ $r$-полно.

Кроме того ясно, что $B$-цикличность $(X, |||\cdot|||)$ равносильна дизъюнктной полноте $(X, \lvert\!\cdot\!\rvert)$. В силу этих замечаний требуемое вытекает из 5.4.7. $\rhd$

*$AW^*$-модулем* (*над* $\Lambda$) называют унитальный $\Lambda$-модуль, наделенный $\Lambda$-значным скалярным произведением и удовлетворяющий любому (а потому и каждому) из двух эквивалентных условий теоремы 6.2.7.

**6.2.8. *Теорема.*** *Ограниченный спуск произвольного гильбертова пространства из модели $\mathbb{V}^{(B)}$ есть $AW^*$-модуль над стоуновой алгеброй $\mathscr{S}(B)$. Наоборот, если $X$ — это $AW^*$-модуль над $\mathscr{S}(B)$, то внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существует единственное с точностью до унитарной эквивалентности гильбертово пространство $\mathscr{X}$, ограниченный спуск которого унитарно эквивалентен $X$.*

$\lhd$ Не нарушая общности, можно считать $\mathscr{S}(B) \subset \mathscr{C}{\downarrow}$. Пусть $\mathscr{X}$ — гильбертово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $X$ — его ограниченный спуск. Тогда пара $(X, \lvert\!\cdot\!\rvert)$, где $\lvert\!\cdot\!\rvert$ — спуск нормы пространства $\mathscr{X}$, будет пространством Банаха — Канторовича, а пара $(X, |||\cdot|||)$, где $|||x||| = \|\lvert x\rvert\|$ $(x \in X)$, станет $B$-циклическим банаховым пространством (см. 5.5.7). В частности, $X$ — унитальный модуль над $\mathscr{S}(B)$. Пусть $(\cdot\,|\,\cdot) \in \mathbb{V}^{(B)}$ — скалярные произведения пространства $\mathscr{X}$, а $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ — его спуск. Без труда проверяется, что $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ удовлетворяет 6.2.6 (1–4) для всех $x,\ y,\ z \in \mathscr{X}{\downarrow}$ и $a \in \mathscr{C}{\downarrow}$. Если $x,\ y \in X$, то $[\![\, |(x\,|\,y)| \le \|x\| \cdot \|y\| \,]\!] = \mathbb{1}$, значит, $|\langle x\,|\,y\rangle| \le \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$. Так как $\lvert x\rvert, \lvert y\rvert \in \mathscr{S}(B)$, то $\langle x\,|\,y\rangle \in \mathscr{S}(B)$. Итак, ограничение $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ на $X \times X$, обозначаемое тем же символом, будет $\mathscr{S}(B)$-значным скалярным произведением на $X$. Остается заметить, что $\lvert x\rvert = \sqrt{\langle x\,|\,x\rangle}$, ибо $[\![\, \|x\| = \sqrt{(x\,|\,x)}\,]\!] = \mathbb{1}$ и спуск функции $\sqrt{\ }: \mathscr{R}^+ \to \mathscr{R}^+$ будет отображением квадратного корня в алгебре $\mathscr{S}(B)$.

Рассмотрим теперь $AW^*$-модуль $X$ над $\mathscr{S}(B)$. По теореме 5.4.2 булевозначная реализация $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$ пространства Банаха — Канторовича $(X, \lvert\!\cdot\!\rvert, \mathscr{S}(B))$ — это банахово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Можно считать поэтому $X \subset \mathscr{X}{\downarrow}$. Пусть $(\cdot\,|\,\cdot)$ — подъем $\mathscr{S}(B)$-значного скалярного произведения $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ пространства $X$. Тогда $(\cdot\,|\,\cdot)$ — скалярное произведение на $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Из тех же соображений, что и выше, видно, что при этом $[\![\|x\| = \sqrt{(x\,|\,x)}\quad (x \in \mathscr{X})]\!] = \mathbb{1}$, ибо $\lvert x\rvert = \sqrt{\langle x\,|\,x\rangle}\quad (x \in X)$.

Пусть $\mathscr{Y}$ — еще одно гильбертово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$,

причем ограниченный спуск $Y$ унитарно эквивалентен $X$. Если $U : X \to Y$ — унитарный изоморфизм, то $u := U{\uparrow}$ — линейная биекция из $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$. Для $U$ имеет место равенство $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle \circ (U \times U) = \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$, следовательно, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ будет

$$(\cdot\,|\,\cdot) \circ (u \times u) = \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle \uparrow \circ (U{\uparrow} \times U{\uparrow}) = (\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle \circ (U \times U)){\uparrow} = \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle{\uparrow} = (\cdot\,|\,\cdot).$$

Тем самым $u$ — унитарная эквивалентность $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$. $\rhd$

Гильбертово пространство $\mathscr{X}$ называют *булевозначной реализацией $AW^*$-модуля $X$.*

Пусть $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ — это пространство линейных ограниченных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. 5.4.9), а $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — пространство всех ограниченных $\Lambda$-линейных операторов из $X$ в $Y$, где $X$ и $Y$ — некоторые $AW^*$-модули над коммутативной $AW^*$-алгеброй $\Lambda := \mathscr{S}(B)$. Напомним, что тем самым $\Lambda$ — ограниченный спуск поля $\mathscr{C}$. Можно показать, что $\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathscr{L}_B(X, Y)$ (см. 5.5.9).

**6.2.9. *Теорема.*** *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — гильбертовы пространства внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а $X$ и $Y$ — их ограниченные спуски. Для любого ограниченного $\Lambda$-линейного оператора $\Phi : X \to Y$ элемент $\varphi := \Phi{\uparrow}$ будет ограниченным линейным оператором из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ в модели $\mathbb{V}^{(B)}$, причем $[\![\, \|\varphi\| \le c^{\wedge} \,]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. Сопоставление $\Phi \mapsto \varphi$ есть $B$-линейная изометрия $B$-циклических банаховых пространств $\mathrm{Hom}(X, Y)$ и $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}){\downarrow}^{\infty}$.*

$\lhd$ См. 5.4.9, 5.5.9. $\rhd$

**6.2.10.** Займемся некоторыми следствиями доказанного.

**(1)** Обозначим символом $AW^*$-mod-$\mathscr{S}(B)$ категорию, составленную из $AW^*$-модулей над стоуновой алгеброй $\mathscr{S}(B)$ и ограниченных $\mathscr{S}(B)$-линейных операторов. Рассмотрим еще категорию $\mathrm{Hilbert}_{\infty}^{(B)}$, объекты которой — гильбертовы пространства внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а морфизмы — такие линейные ограниченные операторы $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ в модели $\mathbb{V}^{(B)}$, что $[\![\, \|f\| \le c^{\wedge} \,]\!]$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. Теоремы 6.2.8 и 6.2.9 можно высказать в следующей форме.

***Теорема.*** *Функторы ограниченного спуска и погружения задают эквивалентность категорий $\mathrm{Hilbert}_{\infty}^{(B)}$ и $AW^*$-mod-$\mathscr{S}(B)$.*

**(2)** Пусть $\mathrm{End}(X) := \mathrm{Hom}(X, X)$ и $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}) := \mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{X})$. Из 6.2.9 видно, что $\mathrm{End}(X)$ и $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}){\downarrow}^{\infty}$ изометрически $B$-изоморфны.

Так как пространство всех ограниченных операторов $\mathscr{L}^B(\mathscr{X})$ является $AW^*$-фактором внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то $\mathscr{L}^B(X){\downarrow}^\infty$ есть $AW^*$-алгебра (см. 6.2.5). Изометрический $B$-изоморфизм $\mathrm{End}(X)$ и $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}){\downarrow}^\infty$ будет изоморфизмом алгебр, если в $\mathrm{End}(X)$ ввести умножение как композицию операторов и сопряженный оператор к $T \in \mathrm{End}(X)$ определить формулой: $\langle Tx \mid y\rangle = \langle x \mid T^*y\rangle$ для всех $x, y \in X$.

***Теорема.*** *Пространство $\mathrm{End}(X)$ при наделении его указанными операциями становится $AW^*$-алгеброй.*

**6.2.11.** Покажем теперь, что при погружении в булевозначную модель тип $AW^*$-алгебры сохраняется. Тип алгебры определяется строением ее решетки проекторов. Следовательно, необходимо проследить за тем, что происходит с классификацией проекторов при переходе к булевозначной реализации.

Напомним нужные определения. Возьмем $AW^*$-алгебру $A$. Проектор $\pi \in A$ называют: (a) *абелевым*, если алгебра $\pi A\pi$ коммутативна; (b) *конечным*, если для любого проектора $\rho \in A$ из $\pi \sim \rho \leq \pi$ вытекает $\rho = \pi$; (c) *бесконечным*, если он не является конечным; (d) *чисто бесконечным*, если он не содержит ненулевых конечных проекторов. Как обычно, фраза «проектор $\pi$ содержит $\rho$» означает неравенство $\rho \leq \pi$.

Говорят, что $A$ — алгебра *типа* I, если каждый ненулевой проектор в ней содержит ненулевой абелев проектор; *типа* II, если $A$ не содержит ненулевых абелевых проекторов и всякий ненулевой проектор в $A$ содержит ненулевой конечный проектор; *типа* III, если единица алгебры — чисто бесконечный проектор. Алгебра $A$ конечна, если единица $A$ является конечным проектором.

**6.2.12. *Теорема.*** *Пусть $\mathscr{A}$ — это $AW^*$-алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $A$ — ее ограниченный спуск. Для любого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(A)$ имеют место эквивалентности:*

**(1)** *$\pi$ абелев $\leftrightarrow [\![\, \pi$ абелев$\,]\!] = \mathbb{1}$;*

**(2)** *$\pi$ конечен $\leftrightarrow [\![\, \pi$ конечен$\,]\!] = \mathbb{1}$;*

**(3)** *$\pi$ чисто бесконечен $\leftrightarrow [\![\, \pi$ чисто бесконечен$\,]\!] = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ Утверждение (1) очевидно. Далее, для $\pi, \rho \in \mathfrak{P}(A)$ формулы $\pi \sim \rho$, $\pi \leq \rho$ и $\pi \lesssim \rho$ равносильны алгебраическим соотношениям (см. 6.1.1):

$$\pi \sim \rho \leftrightarrow xx^* = \pi \wedge x^*x = \rho,$$

$$\pi \le \rho \leftrightarrow \pi\rho = \rho\pi = \pi,$$
$$\pi \lesssim \rho \leftrightarrow \pi \sim \pi_0 \wedge \pi_0 \le \rho.$$

Умножение, инволюция и равенство в $A$ возникают как спуски соответствующих объектов из $\mathscr{A}$, поэтому

$$\pi \sim \rho \leftrightarrow [\![\, \pi \sim \rho \,]\!] = \mathbb{1},$$
$$\pi \le \rho \leftrightarrow [\![\pi \le \rho]\!] = \mathbb{1}, \pi \lesssim \rho \leftrightarrow [\![\, \pi \lesssim \rho \,]\!] = \mathbb{1}.$$

Докажем (2). Учитывая формулу

$$[\![\, (\forall x \in \mathscr{A})\varphi(x) \to \psi(x) \,]\!] = \bigwedge\{[\![\, \psi(x) \,]\!] : x \in \mathscr{A}{\downarrow},\ [\![\, \varphi(x) \,]\!] = \mathbb{1}\},$$

а также равенство $\mathfrak{P}(\mathscr{A}){\downarrow} = \mathfrak{P}(A)$, можно написать цепочку эквивалентностей:

$$[\![\, \pi \text{ конечен} \,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow\leftrightarrow [\![\, (\forall \rho \in \mathfrak{P}(\mathscr{A}))\pi \sim \rho \le \pi \to \pi = \rho \,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall \rho \in \mathfrak{P}(A))[\![\, \pi \sim \rho \le \pi \,]\!] = \mathbb{1} \to [\![\, \pi = \rho \,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall \rho \in \mathfrak{P}(A))\pi \sim \rho \le \pi \to \pi = \rho.$$

Аналогично доказывается (3). $\rhd$

**6.2.13. *Теорема.*** *Пусть алгебры $A$ и $\mathscr{A}$ те же, что и в 6.2.12. Тогда имеют место эквивалентности:*

**(1)** *$A$ конечна $\leftrightarrow [\![\, \mathscr{A}$ конечна $]\!] = \mathbb{1}$,*
**(2)** *$A$ имеет тип I $\leftrightarrow [\![\, \mathscr{A}$ имеет тип I$]\!] = \mathbb{1}$,*
**(3)** *$A$ имеет тип II $\leftrightarrow [\![\, \mathscr{A}$ имеет тип II$]\!] = \mathbb{1}$,*
**(4)** *$A$ имеет тип III $\leftrightarrow [\![\, \mathscr{A}$ имеет тип III$]\!] = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ Все утверждения вытекают непосредственно из 6.2.12 и из определений. $\rhd$

**6.2.14.** Примечания.

**(1)** Современная структурная теория $AW^*$-алгебр и $AW^*$-модулей начинается с работ И. Капланского [168–170]. Такие объекты естественно возникают на пути алгебраизации теории операторных алгебр фон Неймана.

**(2)** Основные результаты этого параграфа, теоремы 6.2.4, 6.2.8, 6.2.9, получил М. Озава [208, 210–212]. Наше изложение использует

реализационные теоремы из главы 5. Теоремы 6.2.12 и 6.2.13 фактически получены Г. Такеути [244].

**(3)** Вещественными неассоциативными аналогами $C^*$-алгебр и операторных алгебр фон Неймана являются $JB$-алгебры. Теория таких алгебр восходит к работе Йордана — фон Неймана — Вигнера [166] и как раздел функционального анализа существует с середины 60-х годов, см. [114, 250]. Теория $JB$-алгебр интенсивно разрабатывается, причем круг ее приложений расширяется. Среди основных объектов исследования — структура и классификация $JB$-алгебр, неассоциативное интегрирование и квантовая теория вероятностей, геометрия состояний $JB$-алгебр и др. (см. [2, 3, 100, 152], а также имеющуюся там библиографию).

**(4)** Приведем один результат о булевозначной реализации $JB$-алгебр, аналогичный теореме 6.2.4. Предположим, что $\mathbb{B}$ является подалгеброй булевой алгебры центральных идемпотентов $JB$-алгебры $A$. Алгебру $A$ называют *$B$-$JB$-алгеброй*, если для любых разбиения единицы $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $B$ и семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $A$ существует и притом единственное $B$-перемешивание $x := \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(e_\xi x_\xi)$. Имеет место следующий результат о булевозначной реализации $JB$-алгебр (см. [66]).

***Теорема.*** *Ограниченный спуск любой $JB$-алгебры из модели $\mathbb{V}^{(B)}$ представляет собой $B$-$JB$-алгебру. Наоборот, для любой $B$-$JB$-алгебры $A$ существует единственная с точностью до изоморфизма $JB$-алгебра $\mathscr{A}$, ограниченный спуск которой изометрически $B$-изоморфен $A$. При этом $[\![\mathscr{A}$ является $JB$-фактором$]\!] = \mathbb{1}$ в том и только в том случае, если $B(\mathbb{R}) = \mathscr{Z}(A)$.*

## 6.3. Булева размерность $AW^*$-модуля

С каждым $AW^*$-модулем можно однозначно связать некоторый нестандартный кардинал, служащий *гильбертовой размерностью* его булевозначной реализации. Внешняя расшифровка последнего понятия приводит к определению булевой размерности.

**6.3.1.** Пусть $X$ — унитальный $AW^*$-модуль над коммутативной $AW^*$-алгеброй $\Lambda$. Множество $\mathscr{E} \subset X$ называют *базисом* в $X$, если справедливо следующее:

**(1)** $\langle x|y\rangle = \mathbb{0}$ при всех различных $x, y \in \mathscr{E}$;

**(2)** $\langle x|x\rangle = \mathbb{1}$ для каждого $x \in \mathscr{E}$;

**(3)** из условия $(\forall e \in \mathscr{E})\langle x|e\rangle = \mathbb{0}$ вытекает $x = \mathbb{0}$.

Говорят, что $AW^*$-модуль $X$ является $\lambda$-*однородным,* если $\lambda$ — кардинал и в $X$ существует базис мощности $\lambda$.

Для каждого $\mathbb{0} \neq b \in B$ обозначим через $\varkappa(b)$ наименьший кардинал $\gamma$, для которого $AW^*$-модуль $bX$ будет $\gamma$-однородным. Если $X$ однороден, то $\varkappa(b)$ определен для всех $\mathbb{0} \neq b \in B$, значит, $\varkappa$ — отображение из $B^+ := \{b \in B : b \neq \mathbb{0}\}$ в некоторое множество кардинальных чисел. Можно показать, что $\varkappa$ — *функция кратности,* т. е. $\varkappa(\sup(b_\xi)) = \sup(\varkappa(b_\xi))$ для каждого семейства $(b_\xi) \subset B$. Будем говорить, что $AW^*$-модуль $X$ *строго $\gamma$-однороден,* если $X$ однороден и $\gamma = \varkappa(b)$ при каждом ненулевом $b \in B$. Для конечного кардинала $\gamma$ свойства $\gamma$-однородности и строгой $\gamma$-однородности $AW^*$-модуля равносильны. Удобно считать $\varkappa(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$.

Мощность множества $M$ (т. е. кардинал, биективный с $M$) мы будем обозначать символом $|M|$. Запись $[\![\dim(\mathscr{X}) = \lambda]\!] = \mathbb{1}$ означает, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «мощность ортонормированного базиса пространства $\mathscr{X}$ равна $\lambda$». Дадим теперь булевозначную интерпретацию однородности и строгой однородности.

**6.3.2. *Теорема.*** *Для $\lambda$-однородности $AW^*$-модуля $X$ необходимо и достаточно, чтобы $[\![\dim(\mathscr{X}) = |\lambda^\wedge|]\!] = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ По теореме 5.4.2 можно считать, что $X \subset \mathscr{X}{\downarrow}$. Для элементов $x, y \in X$ и $a \in \Lambda$ равносильны соотношения $\langle x|y\rangle = a$ и $[\![(x|y) = a]\!] = \mathbb{1}$, ибо отображение $\langle\cdot\ \cdot\rangle$ и спуск формы $(\cdot\,|\,\cdot)$ совпадают на $X \times X$. Отсюда, в частности, видно, что отношение ортогональности в $X$ есть ограничение на $X$ спуска отношения ортогональности в $\mathscr{X}$. Из этих замечаний следует, что множество $\mathscr{E} \subset X$ ортонормированно тогда и только тогда, когда $[\![\mathscr{E}{\uparrow}$ — ортонормированное множество в $\mathscr{X}]\!] = \mathbb{1}$. Далее, пользуясь правилом спуска поляр, для ортогональных дополнений в $X$ и в $\mathscr{X}$ получим $(\mathscr{E}{\uparrow})^\perp{\downarrow} = (\mathscr{E}{\uparrow\downarrow})^\perp$. Заметим также, что $\mathscr{E}^\perp = (\mathscr{E}{\uparrow\downarrow})^\perp$. Значит, $\mathscr{E}^\perp{\uparrow} = (\mathscr{E}{\uparrow})^\perp$. В частности, $\mathscr{E}^\perp = \mathbb{0}$ в том и только в том случае, если $[\![(\mathscr{E}{\uparrow})^\perp = \{\mathbb{0}\}]\!] = \mathbb{1}$. Итак, $\mathscr{E}$ — базис в $X$ лишь в том случае, когда $[\![\mathscr{E}$ — базис в $\mathscr{X}]\!] = \mathbb{1}$. Если $|\mathscr{E}| = \lambda$ и $\varphi : \lambda \to \mathscr{E}$ — биекции, то модифицированный подъем $\varphi{\uparrow}$ будет биекцией $\lambda^\wedge$ на $\mathscr{E}{\uparrow}$. Наоборот, пусть $\mathscr{D}$ — базис в $\mathscr{X}$ и $[\![\psi : \lambda^\wedge \to \mathscr{D}$ — биекция$]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого кардинала $\lambda$. Тогда модифицированный спуск $\varphi := \psi{\downarrow} : \lambda \to \mathscr{D}{\downarrow}$ будет инъекцией. Следовательно, множество $\mathscr{E} := \mathrm{im}(\varphi)$ имеет мощность $\lambda$, а в си-

лу сказанного выше оно ортонормированно. Остается заметить, что $\mathscr{D}{\downarrow} = \operatorname{mix}(\mathscr{E}) = \mathscr{E}{\uparrow}{\downarrow}$, т. е. $[\![\, \mathscr{E}{\uparrow} = \mathscr{D} \,]\!] = \mathbb{1}$, а потому $\mathscr{E}$ — базис в $X$. $\triangleright$

**6.3.3. *Теорема.*** *Для строгой $\lambda$-однородности $AW^*$-модуля $X$ необходимо и достаточно, чтобы $[\![\, \dim(\mathscr{X}) = \lambda^{\wedge} \,]\!] = \mathbb{1}$.*

$\triangleleft$ Если $X$ строго $\lambda$-однороден, то по теореме 6.3.2 $[\![\, \dim(\mathscr{X}) = |\lambda^{\wedge}| \,]\!] = \mathbb{1}$. С другой стороны, существует разбиение единицы $(b_\alpha)_{\alpha<\beta}$ в булевой алгебре $B$, для которого $|\lambda^{\wedge}| = \operatorname{mix}_{\alpha<\beta}(b_\alpha \alpha^{\wedge})$. Так как $b_\alpha \leq [\![\, \mathscr{X} = b_\alpha \mathscr{X} \,]\!]$, то верно также соотношение $b_\alpha \leq [\![\, \dim(b_\alpha \mathscr{X}) = \alpha^{\wedge} \,]\!]$. Рассмотрим множество $B_\alpha := [\mathbb{0}, b_\alpha] := \{b' \in B : \ b' \leq b_\alpha\}$. Если $b_\alpha \neq \mathbb{0}$, то $B_\alpha$ — полная булева алгебра и $\mathbb{V}^{(B_\alpha)} \models$ «$b_\alpha \mathscr{X}$ — гильбертово пространство и $\alpha^{\wedge} = \dim(b_\alpha \mathscr{X})$». Ограниченный спуск $b_\alpha \mathscr{X}$ из модели $\mathbb{V}^{(B_\alpha)}$ есть $b_\alpha X$, следовательно, $b_\alpha X$ — это $\alpha$-однородный $AW^*$-модуль. Кроме того, $\mathbb{V}^{(B_\alpha)} \models$ «$\alpha^{\wedge}$ — кардинал», а значит, и $\alpha$ будет кардиналом. По определению строгой однородности имеем $\lambda \leq \alpha$. Итак, $b_\alpha = \mathbb{0}$ при $\alpha < \lambda$, поэтому $[\![\, \lambda^{\wedge} \leq |\lambda^{\wedge}| \,]\!] = \mathbb{1}$. Тем самым $[\![\, \lambda^{\wedge} = |\lambda^{\wedge}| \,]\!] = \mathbb{1}$, ибо соотношение $[\![\, |\lambda^{\wedge}| \leq \lambda^{\wedge} \,]\!] = \mathbb{1}$ выполнено по определению мощности. Теперь мы вправе заключить, что $[\![\, \dim(\mathscr{X}) = \lambda^{\wedge} \,]\!] = \mathbb{1}$.

Допустим, что верно последнее равенство. Тогда $\lambda$ — кардинал, ибо $\lambda^{\wedge}$ — кардинал внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а по 6.3.2 $X$ будет $\lambda$-однородным. Если $X$ является $\gamma$-однородным для некоторого кардинала $\gamma$, то вновь по 6.3.2 получаем $[\![\, \dim(\mathscr{X}) = |\gamma^{\wedge}| \,]\!] = \mathbb{1}$. Отсюда выводим $[\![\, \lambda^{\wedge} = |\gamma^{\wedge}| \leq \gamma^{\wedge} \,]\!] = \mathbb{1}$ и далее $\lambda \leq \gamma$. Эти же рассуждения годятся и для $AW^*$-алгебры $bX$, где $\mathbb{0} \neq b \in B$, если вместо модели $\mathbb{V}^{(B)}$ использовать $\mathbb{V}^{([\mathbb{0},b])}$. Таким образом, $AW^*$-модуль $X$ строго $\lambda$-однороден. $\triangleright$

**6.3.4.** Введем основное понятие данного параграфа. Разбиение единицы $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в $B$ назовем *$B$-размерностью* $AW^*$-модуля $X$, если $\Gamma$ — непустое множество кардиналов, $b_\gamma \neq 0$ при всех $\gamma \in \Gamma$ и $b_\gamma X$ — строго $\gamma$-однородный $AW^*$-модуль для каждого $\gamma \in \Gamma$. При этом мы будем писать $B\text{-}\dim(X) = (b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Заметим, что элементы $B$-размерности попарно различны в силу определения строгой однородности. Скажем, что $B$-размерность $X$ равна $\gamma$ (символически $B\text{-}\dim(X) = \gamma$), если $\Gamma = \{\gamma\}$ и $b_\gamma = \mathbb{1}$. Равенство $B\text{-}\dim(X) = \gamma$ означает, что $X$ строго $\gamma$-однороден. Функцию кратности $\varkappa$ из 6.3.1 можно определить и в случае произвольного $AW^*$-модуля по формуле $\varkappa(b) = \sup\bigl\{\varkappa(b') : b' \leq b,\, b' \in hb\bigr\}$, где $hb$ — множество таких

$b' \leq b$, что $b'X$ однороден. Как видно, если $B\text{-}\dim(X) = (b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, то $\varkappa(b) = \sup\{\gamma \in \Gamma : b \wedge b_\gamma \neq \mathbb{0}\}$.

**6.3.5. *Теорема.*** *Пусть $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — разбиение единицы в $B$, где $\Gamma$ — множество кардиналов и $b_\gamma \neq \mathbb{0}$ $(\gamma \in \Gamma)$. Тогда $B\text{-}\dim(X) = (b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в том и только в том случае, если $[\![\dim(\mathscr{X}) = \operatorname{mix}_{\gamma\in\Gamma}(b_\gamma\gamma^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$.*

$\triangleleft$ Как уже отмечалось, $b_\gamma X$ можно отождествить с ограниченным спуском гильбертова пространства $b_\gamma\mathscr{X}$ из модели $\mathbb{V}^{(B_\gamma)}$, где $B_\gamma := [\mathbb{0}, b_\gamma]$. В силу 6.3.4 $\gamma$-однородность $b_\gamma X$ равносильна соотношению $b_\gamma = [\![\dim(b_\gamma\mathscr{X}) = \gamma^\wedge]\!]^{B_\gamma} \leq [\![\dim(\mathscr{X}) = \gamma^\wedge]\!]^B$. Но тогда равенство $B\text{-}\dim(X) = (b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ верно в том и только в том случае, если $b_\gamma \leq [\![\dim(\mathscr{X}) = \gamma^\wedge]\!]$ $(\gamma \in \Gamma)$, ибо $b_\gamma \leq [\![\mathscr{X} = b_\gamma\mathscr{X}]\!] = [\![\dim(\mathscr{X}) = \dim(b_\gamma\mathscr{X})]\!]$. Тем самым $[\![\dim(\mathscr{X}) = \operatorname{mix}_{\gamma\in\Gamma}(b_\gamma\gamma^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$. $\triangleright$

**6.3.6.** Сейчас мы выясним, какие разбиения единицы могут служить $B$-размерностями $AW^*$-модулей. Возьмем кардинал $\lambda$. Для $b \in B$ и $\beta \in \mathrm{On}$ пусть $b(\beta)$ обозначает множество всех разбиений элемента $b$, имеющих вид $(b_\alpha)_{\alpha\in\beta}$. Определим $[\mathbb{0}, b]$-значную метрику $d$ на $b(\beta)$ формулой:

$$d(u, v) := \left(\bigvee_{\alpha\in\beta} u_\alpha \wedge v_\alpha\right)^* \quad \big(u = (u_\alpha),\ \ v = (v_\alpha) \in b(\beta)\big).$$

Тем самым $\big(b(\beta), d\big)$ — булево множество. Запись $b(\beta) \simeq b(\gamma)$ при $\gamma \in \mathrm{On}$ означает, что между $b(\beta)$ и $b(\gamma)$ существует биекция, сохраняющая булеву метрику, т. е. $B$-изометрия.

Булеву алгебру $B$ назовем *$\lambda$-стабильной*, если для любого ненулевого $b \in B$ и произвольного ординала $\alpha$ из $b(\lambda) \simeq b(\alpha)$ следует $\lambda \leq \alpha$. О стоуновском компакте такой алгебры говорят, что он *$\lambda$-стабилен*. Ненулевой элемент $b \in B$ по определению считаем *$\lambda$-стабильным*, если такова булева алгебра $[\mathbb{0}, b]$.

**6.3.7. *Теорема.*** *Разбиение единицы $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в полной булевой алгебре $B$, состоящее из попарно различных элементов, будет $B$-размерностью некоторого $AW^*$-модуля в том и только в том случае, если $\Gamma$ — множество кардиналов и $b_\gamma$ — это $\gamma$-стабильный элемент для каждого $\gamma \in \Gamma$.*

$\triangleleft$ Положим $\lambda := \operatorname{mix}_{\gamma\in\Gamma}(b_\gamma\gamma^\wedge)$. В модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует гильбертово пространство $\mathscr{X}$, для которого $[\![\dim(\mathscr{X}) = |\lambda|]\!] = \mathbb{1}$. Из 6.3.5

видно, что $B\text{-}\dim(X) = (b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ тогда и только тогда, когда $[\![\, |\lambda| = \lambda \,]\!] = \mathbb{1}$. Последнее же соотношение равносильно системе неравенств

$$b_\gamma \le [\![\, |\gamma^\wedge| = \gamma^\wedge \,]\!] \quad (\gamma \in \Gamma).$$

Неравенство $b_\gamma \le [\![\, |\gamma^\wedge| = \gamma^\wedge \,]\!]$ для ненулевого $b_\gamma$ означает справедливость того, что $\mathbb{V}^{([\mathbb{0}, b_\gamma])} \models \gamma^\wedge = |\gamma^\wedge|$. Следовательно, остается показать, что $\gamma$-стабильность булевой алгебры $B_0 := [\mathbb{0}, b]$ и соотношения $\mathbb{V}^{(B_0)} \models \gamma^\wedge = |\gamma^\wedge|$ имеют место или нет одновременно.

Заметим, что

$$[\![\, \gamma^\wedge = |\gamma^\wedge| \,]\!] = [\![\, (\forall \alpha \in \mathrm{On})\, (\gamma^\wedge \sim \alpha \to \gamma^\wedge \le \alpha) \,]\!] =$$
$$= \bigwedge \big\{ [\![\, \gamma^\wedge \sim \alpha^\wedge \,]\!] \Rightarrow [\![\, \gamma^\wedge \le \alpha \,]\!] \,:\, \alpha \in \mathrm{On} \big\}.$$

Как видно, $[\![\, \gamma^\wedge = |\gamma^\wedge| \,]\!] = \mathbb{1}$ лишь только в том случае, когда $c := [\![\, \gamma^\wedge \sim \alpha^\wedge \,]\!] \le [\![\, \gamma^\wedge \le \alpha^\wedge \,]\!]$ для любого ординала $\alpha$. Если $c \ne \mathbb{0}$, то $\gamma \le \alpha$. В то же время неравенство $c \le [\![\, \gamma^\wedge \sim \alpha^\wedge \,]\!]$ означает, что $c(\gamma) \simeq c(\alpha)$. Таким образом, равенство $[\![\, \gamma^\wedge = |\gamma^\wedge| \,]\!] = \mathbb{1}$ равносильно $\gamma$-стабильности булевой алгебры $B_0$. $\triangleright$

**6.3.8.** Примечания. Булеву размерность $AW^*$-алгебры в смысле определения 6.3.4 рассмотрел А. Г. Кусраев [65].

Ранее М. Озава ввел булеву размерность $AW^*$-модуля как размерность гильбертова пространства, служащего булевозначной реализацией этого модуля, т. е. как внутренний объект булевозначной модели [210]. Определение 6.3.4 является внешней расшифровкой определения М. Озавы.

Теоремы 6.3.2 и 6.3.3 установлены в [65] и [210] соответственно. Относительно теоремы 6.3.7 см. [65, 210].

## 6.4. Реализация $AW^*$-модулей

В этом параграфе устанавливается, что любой $AW^*$-модуль мы можем представить в виде прямой суммы семейства модулей непрерывных вектор-функций, причем такое представление в определенном смысле единственно.

Обозначим символом $C_\#(Q, H)$ часть пространства $C_\infty(Q, H)$, состоящую из таких вектор-функций $z$, что $|z| \in C(Q)$ (см. 5.3.7 (5)).

**6.4.1.** *Пусть $Q$ — экстремальный компакт, а $H$ — гильбертово пространство размерности $\lambda$. Пространство $C_\#(Q,H)$ является $\lambda$-однородным $AW^*$-модулем над алгеброй $\Lambda := C(Q,\mathbb{C})$.*

$\lhd$ Пусть $(\cdot\,|\,\cdot)$ — скалярное произведение пространства $H$. Введем $\Lambda$-значное скалярное произведение в $C_\#(Q,H)$ следующим образом. Возьмем непрерывные вектор-функции $u : \mathrm{dom}(u) \to H$ и $v : \mathrm{dom}(v) \to H$. Функция $q \mapsto \langle\, u(q)|v(q)\,\rangle$ $(q \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v))$ непрерывна и допускает единственное непрерывное продолжение $z \in C(Q)$ на все $Q$. Если $x$ и $y$ — классы эквивалентности вектор-функций $u$ и $v$, то полагаем $(x\,|\,y) := z$. Как видно, $(\cdot\,|\,\cdot)$ — это $\Lambda$-значное скалярное произведение, причем $|x| = \sqrt{(x\,|\,x)}$ для всякого $x \in C_\#(Q,H)$. Так как $C_\#(Q,H)$ — пространство Банаха — Канторовича, то оно дизъюнктно полно. Более того, $C_\#(Q,H)$ — банахово пространство, в котором норма удовлетворяет соотношениям

$$\|x\| = \||x|\|_\infty = \sqrt{\|(x\,|\,x)\|_\infty} \quad \big(x \in C_\#(Q,H)\big).$$

Пусть $\mathscr{E}$ — базис в $H$. Для каждого $e \in \mathscr{E}$ введем вектор-функцию $\bar{e} : q \mapsto e$ $(q \in Q)$ и положим $\overline{\mathscr{E}} := \{\bar{e} : e \in \mathscr{E}\}$. Нетрудно заметить, что $\overline{\mathscr{E}}$ — базис в $C_\#(Q,H)$. Из всего сказанного следует, что $C_\#(Q,H)$ — это $\lambda$-однородный $AW^*$-модуль, где $\lambda = \dim(H)$. $\rhd$

**6.4.2.** Нам потребуется еще один вспомогательный факт. Обозначим символом $\mathbb{P}$-$\mathrm{lin}(A)$ множество всех линейных комбинаций элементов $A$ с коэффициентами из поля $\mathbb{P}$.

*Пусть $X$ — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$ и $\mathbb{P}$ — подполе $\mathbb{F}$. Тогда $X^\wedge$ — векторное пространство над полем $\mathbb{F}^\wedge$ и для любого множества $A \subset X$ верно $(\mathbb{P}\text{-}\mathrm{lin}(A))^\wedge = \mathbb{P}^\wedge\text{-}\mathrm{lin}(A^\wedge)$.*

$\lhd$ Первая часть утверждения очевидна, ибо предложение «$X$ — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$» записывается ограниченной формулой. По той же причине $(\mathbb{P}\text{-}\mathrm{lin}(A))^\wedge$ — это $\mathbb{P}^\wedge$-линейное подпространство в $X^\wedge$, содержащее $A^\wedge$. Поэтому $\mathbb{P}^\wedge\text{-}\mathrm{lin}(A^\wedge) \subset (\mathbb{P}\text{-}\mathrm{lin}(A))^\wedge$. Наоборот, пусть элемент $x \in X$ имеет вид $\sum_{k\in n} \alpha(k)\,u(k)$, где $n \in \mathbb{N}$, $\alpha : n \to \mathbb{P}$ и $u : n \to A$. Тогда $\alpha^\wedge : n^\wedge \to \mathbb{P}^\wedge$, $u^\wedge : n^\wedge \to A^\wedge$ и $x^\wedge = \sum_{k\in n^\wedge} \alpha^\wedge(k) u^\wedge(k)$. Следовательно, $x^\wedge \in \mathbb{P}^\wedge\text{-}\mathrm{lin}(A^\wedge)$, что показывает справедливость включения $\mathbb{P}\text{-}\mathrm{lin}(A))^\wedge \subset \mathbb{P}^\wedge\text{-}\mathrm{lin}(A^\wedge)$. $\rhd$

**6.4.3.** ***Теорема.*** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $\lambda = \dim(H)$. Пусть, далее, $\mathscr{H}$ — пополнение метрического пространства $H^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.*

*Тогда* $[\![\, \mathscr{H}$ *— гильбертово пространство и* $\dim(\mathscr{H}) = |\lambda^{\wedge}| \,]\!] = \mathbb{1}$.

$\lhd$ По определению, $\mathscr{H}$ — банахово пространство. Если $b(\cdot\,,\,\cdot)$ — скалярное произведение в $H$, то $b^{\wedge} : H^{\wedge} \times H^{\wedge} \to \mathbb{C}^{\wedge}$ — равномерно непрерывная функция, имеющая единственное непрерывное продолжение на все $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$, которое мы обозначим $(\cdot\,|\,\cdot)$. Тогда $(\cdot\,|\,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathscr{H}$ и, как легко заметить,

$$\mathbb{V}^{(B)} \models \|x\| = \sqrt{(x\,|\,x)} \quad (x \in \mathscr{H}).$$

Тем самым $[\![\, \mathscr{H}$ — гильбертово пространство $]\!] = \mathbb{1}$. Пусть $\mathscr{E}$ — гильбертов базис $H$. Покажем, что $[\![\, \mathscr{E}^{\wedge}$ — базис $\mathscr{H} \,]\!] = \mathbb{1}$. Ортонормальность $\mathscr{E}^{\wedge}$ вытекает из определения скалярного произведения в $\mathscr{H}$, как видно из следующих вычислений:

$$[\![\, (\forall x \in \mathscr{E}^{\wedge})\ (x\,|\,x) = 1 \,]\!] = \bigwedge_{x \in \mathscr{E}} [\![\, (x^{\wedge}|x^{\wedge}) = 1 \,]\!] = \bigwedge_{x \in \mathscr{E}} [\![\, b(x,x)^{\wedge} = \mathbb{1}^{\wedge} \,]\!] = \mathbb{1};$$

$$[\![\, (\forall x, y \in \mathscr{E}^{\wedge})\ (x \neq y \to (x\,|\,y) = 0) \,]\!] =$$
$$= \bigwedge_{x,y \in \mathscr{E}} [\![\, x^{\wedge} \neq y^{\wedge} \,]\!] \Rightarrow [\![\, (x^{\wedge}|y^{\wedge}) = 0 \,]\!] =$$
$$= \bigwedge_{\substack{x,y \in \mathscr{E} \\ x \neq y}} [\![\, b^{\wedge}(x^{\wedge}, y^{\wedge}) = 0 \,]\!] = \bigwedge_{\substack{x,y \in \mathscr{E} \\ x \neq y}} [\![\, b(x,y)^{\wedge} = 0^{\wedge} \,]\!] = \mathbb{1}.$$

Так как $H^{\wedge}$ плотно в $\mathscr{H}$ и $\mathbb{C}^{\wedge}\text{-}\mathrm{lin}(\mathscr{E}^{\wedge}) \subset \mathscr{C}\text{-}\mathrm{lin}(\mathscr{E}^{\wedge})$, то нужно лишь установить, что $\mathbb{C}^{\wedge}\text{-}\mathrm{lin}(\mathscr{E}^{\wedge})$ плотно в $H^{\wedge}$. Возьмем $x \in H$ и $\varepsilon > 0$. Поскольку $\mathscr{E}$ — базис $H$, найдется $x_{\varepsilon} \in \mathbb{C}\text{-}\mathrm{lin}(\mathscr{E})$, для которого $\|x - x_{\varepsilon}\| < \varepsilon$. Отсюда вытекает, что $[\![\, \|x^{\wedge} - x_{\varepsilon}{}^{\wedge}\| < \varepsilon^{\wedge} \,]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\, x_{\varepsilon}^{\wedge} \in (\mathscr{C}\text{-}\mathrm{lin}(\mathscr{E}))^{\wedge} \,]\!] = \mathbb{1}$. Привлекая 6.4.2, видим, что внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ верна формула

$$(\forall x \in H)\ (\forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{R}^{\wedge})\ (\exists x_{\varepsilon} \in \mathbb{C}^{\wedge}\text{-}\mathrm{lin}(\mathscr{E}^{\wedge})\ (\|x - x_{\varepsilon}\| < \varepsilon),$$

т. е. $[\![\, \mathbb{C}^{\wedge}\text{-}\mathrm{lin}(\mathscr{E}^{\wedge})$ плотно в $H^{\wedge} \,]\!] = \mathbb{1}$. Остается заметить, что если $\varphi$ — биекция между множеством $\mathscr{E}$ и кардиналом $\lambda$, то $\varphi^{\wedge}$ — биекция между множествами $\mathscr{E}^{\wedge}$ и $\lambda^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. $\rhd$

Отметим несколько следствий.

**6.4.4.** *В условиях теоремы 6.4.3 ограниченный спуск гильбертова пространства* $\mathscr{H}$ *из модели* $\mathbb{V}^{(B)}$ *унитарно эквивалентен* $AW^*$*-модулю* $C_{\#}(\mathrm{St}(B), H)$, *где* $\mathrm{St}(B)$ *— стоуновский компакт алгебры* $B$.

$\lhd$ Вытекает из 5.4.10 и 6.4.1. $\rhd$

**6.4.5.** *Для непустого множества $M$ ограниченный спуск гильбертова пространства $l_2(M^\wedge)$ из модели $\mathbb{V}^{(B)}$ унитарно эквивалентен $AW^*$-модулю $C_\#(\mathrm{St}(B), l_2(M))$, где $\mathrm{St}(B)$ — стоуновский компакт алгебры $B$.*

$\lhd$ В теореме 6.4.3 нужно взять $H = l_2(M)$ и заметить, что ввиду соотношения $[\![ \dim(\mathscr{H}) = |M^\wedge| ]\!] = \mathbb{1}$ выполняется $[\![ \mathscr{H}$ и $l_2(M^\wedge)$ унитарно изоморфны $]\!] = \mathbb{1}$. $\rhd$

**6.4.6.** *Пусть $\lambda = \dim(H)$ — бесконечный кардинал. Тогда $AW^*$-модуль $C_\#(Q, H)$ строго $\lambda$-однороден тогда и только тогда, когда компакт $Q$ является $\lambda$-стабильным.*

$\lhd$ Достаточно применить 6.3.3, 6.3.7 и 6.4.3. $\rhd$

**6.4.7.** *Для произвольных бесконечномерных гильбертовых пространств $H_1$ и $H_2$ можно подобрать экстремально несвязный компакт $Q$ так, что $AW^*$-модули $C_\#(Q, H_1)$ и $C_\#(Q, H_2)$ будут унитарно эквивалентны.*

$\lhd$ Пусть $\lambda_k := \dim(H_k)$ $(k := 1, 2)$. Существует полная булева алгебра $B$, для которой ординалы $\lambda_1^\wedge$ и $\lambda_2^\wedge$ равномощны внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. [36, 119]). Поэтому требуемое вытекает из 6.4.3 и 6.4.4. $\rhd$

**6.4.8.** *Пусть $H_k$ — гильбертово пространство, $\lambda_k := \dim(H_k) \geq \omega$. Пусть, далее, $AW^*$-модуль $C_\#(Q, H_k)$ строго $\lambda_k$-однороден при $k := 1, 2$. Если $C_\#(Q, H_1)$ и $C_\#(Q, H_2)$ унитарно эквивалентны, то гильбертовы пространства $H_1$ и $H_2$ унитарно эквивалентны.*

$\lhd$ Из 6.3.3, 6.4.3 и 6.4.4 видно, что $[\![ \lambda_1^\wedge = |\lambda_1^\wedge| = |\lambda_2^\wedge| = \lambda_2^\wedge ]\!] = \mathbb{1}$. Поэтому $\lambda_1 = \lambda_2$. $\rhd$

**6.4.9.** Некоторый $AW^*$-модуль $X$ называют *$B$-сепарабельным*, если существует последовательность $(x_n) \subset X$ такая, что $AW^*$-подмодуль, порожденный множеством $\{bx_n : n \in \mathbb{N},\ b \in B\}$, совпадает с $X$. Очевидно, что если $H$ — это $B$-сепарабельное гильбертово пространство, то $AW^*$-модуль $C_\#(Q, H)$ будет $B$-сепарабельным.

**6.4.10.** *Для любого бесконечномерного гильбертова пространства $H$ существует экстремально несвязный компакт $Q$ такой, что $AW^*$-модуль $C_\#(Q, H)$ будет $B$-сепарабельным, где $B$ — это булева алгебра характеристических функций открыто-замкнутых множеств в $Q$.*

$\lhd$ В 6.4.7 нужно положить $H_1 := l_2(\omega)$, $H_2 := H$ и использовать сепарабельность $l_2(\omega)$. $\rhd$

**6.4.11. Теорема.** *Для каждого $AW^*$-модуля $X$ существует семейство непустых экстремально несвязных компактов $(Q_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, где $\Gamma$ — множество кардиналов такое, что $Q_\gamma$ является $\gamma$-стабильным при всех $\gamma\in\Gamma$ и имеет место унитарная эквивалентность*

$$X \simeq \sum_{\gamma\in\Gamma}^{\oplus} C_{\#}\big(Q_\gamma, l_2(\gamma)\big).$$

*Если какое-то семейство $(P_\delta)_{\delta\in\Delta}$ экстремально несвязных компактов удовлетворяет указанным условиям, то $\Gamma=\Delta$ и $P_\gamma$ гомеоморфен $Q_\gamma$ для всех $\gamma\in\Gamma$.*

$\lhd$ В силу 6.2.8 можно считать, что $X$ — ограниченный спуск гильбертова пространства $\mathscr{X}$ из модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Пусть, кроме того, $B$-$\dim(X)=(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, а $Q_\gamma$ — открыто-замкнутое подмножество стоуновского компакта алгебры $B$, соответствующее элементу $b_\gamma\in B$. Воспользуемся тем, что $X$ есть прямая сумма компонент вида $b_\gamma X$, а $b_\gamma X$ унитарно эквивалентен ограниченному спуску $b_\gamma\mathscr{X}$ из модели $\mathbb{V}^{(B_\gamma)}$, где $B_\gamma=[\mathbb{0},b_\gamma]$. Из 6.3.5 видно, что $b_\gamma\leq[\![\dim(b_\gamma\mathscr{X})=\gamma^\wedge]\!]$. Следовательно, для ненулевого $b_\gamma$ будет $\mathbb{V}^{(B_\gamma)}\models$ «$b_\gamma\mathscr{X}$ — гильбертово пространство размерности $\gamma^\wedge$». Привлекая принцип переноса, заключаем, что $\mathbb{V}^{(B_\gamma)}\models$ «$b_\gamma\mathscr{X}$ унитарно эквивалентно $l_2(\gamma^\wedge)$». В силу 6.4.5 ограниченный спуск $l_2(\gamma^\wedge)$ из модели $\mathbb{V}^{(B_\gamma)}$ унитарно эквивалентен $AW^*$-модулю $C_{\#}(Q_\gamma,l_2(\gamma))$. Пусть $u_\gamma\in\mathbb{V}^{(B_\gamma)}$ — унитарный изоморфизм $b_\gamma\mathscr{X}$ на $l_2(\gamma^\wedge)$ внутри $\mathbb{V}^{(B_\gamma)}$, а $U$ — его ограниченный спуск. Тогда $U$ устанавливает унитарную эквивалентность между $AW^*$-модулями $b_\gamma X$ и $C_{\#}(Q_\gamma,l_2(\gamma))$. По определению, элемент $b_\gamma\in B$, а заодно с ним и компакт $Q_\gamma$ являются $\gamma$-стабильными. Допустим, что для семейства экстремально несвязных компактов $(P_\delta)_{\delta\in\Delta}$ выполнены те же условия, что и для $(Q_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Тогда $P_\delta$ гомеоморфен открыто-замкнутому подмножеству $P'_\delta$ стоуновского компакта алгебры $B$, причем $P'_\delta$ будет $\delta$-стабильным. Если $P_{\delta\gamma}:=P'_\delta\cap Q_\gamma$ и $b_{\gamma\delta}$ — соответствующий элемент $B$, то $AW^*$-модули $C_{\#}(P_{\delta\gamma},\,l_2(\delta))$ и $C_{\#}(P_{\delta\gamma},\,l_2(\gamma))$ унитарно эквивалентны одной и той же компоненте $b_{\delta\gamma}X$. Кроме того, компакт $P_{\delta\gamma}$ должен быть $\delta$- и $\gamma$-стабильным одновременно. В соответствии с 6.4.6 и 6.4.8 будет либо $P_{\delta\gamma}=\varnothing$, либо $l_2(\delta)\sim l_2(\gamma)$, т. е. $\delta=\gamma$. Тем самым $P'_\gamma=Q_\gamma$ $(\gamma\in\Gamma)$. $\rhd$

**6.4.12.** Примечания. Все результаты данного параграфа взяты из [65]. Из утверждений 6.4.7 и 6.4.11 следует, что для любых

бесконечных кардиналов $\alpha < \beta$ существует $AW^*$-модуль, который $\gamma$-однороден для всех $\alpha \leq \gamma \leq \beta$. Этот факт установил М. Озава [210, 212].

### 6.5. Реализация $AW^*$-алгебр типа I

С помощью результатов предыдущего параграфа, здесь мы получим функциональную реализацию $AW^*$-алгебр типа I.

Всюду в этом параграфе $A$ — произвольная $AW^*$-алгебра типа I, $\Lambda$ — ее центр, а $B$ — полная булева алгебра центральных проекторов в $A$, так что $B \subset \Lambda \subset A$.

**6.5.1.** Пусть $B_h$ — множество таких $b \in B$, что $bA$ — однородная алгебра. Взяв $b \in B_h$, обозначим символом $\varkappa(b)$ наименьший кардинал $\lambda$, для которого $bA$ — это $\lambda$-однородная $AW^*$-алгебра. Для произвольного $b \in B$ положим $\varkappa(b) := \sup\{\varkappa(b') : b' \leq b,\ b' \in B_h\}$. Тем самым определена функция $\varkappa$ на $B$, принимающая свои значения из некоторого множества кардиналов. Назовем $\varkappa$ *функцией кратности* алгебры $A$. Элемент $b \in B$, а также алгебру $bA$ называют *строго $\lambda$-однородными,* если $\varkappa(b') = \lambda$ при $0 \neq b' \leq b$. Говорят также, что $b$ и $bA$ имеют *строгую кратность* $\lambda$. Существует единственное отображение $\overline{\varkappa} : \Gamma \to B$ такое, что $\Gamma$ — некоторое множество кардинальных чисел, не превосходящих $\varkappa(\mathbb{1})$, семейство $(\overline{\varkappa}(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ — разбиение единицы в $B$ и элемент $\overline{\varkappa}(\gamma)$ имеет строгую кратность $\gamma$ при всех $\gamma \in \Gamma$. Разбиение единицы $(\overline{\varkappa}(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ называют *строгим декомпозиционным рядом* $AW^*$-алгебры $A$. Нетрудно заметить, что если $A = \mathrm{End}(X)$ для $AW^*$-модуля $X$, то строгий декомпозиционный ряд алгебры $A$ совпадает с $B$-$\dim(X)$, а $\varkappa$ совпадает с функцией кратности, введенной в 6.4.1. Функции кратности $\varkappa$ и $\varkappa'$ на булевых алгебрах $B$ и $B'$ соответственно, а также соответствующие им разбиения единицы $\overline{\varkappa}$ и $\overline{\varkappa'}$ именуют *конгруэнтными*, если существует изоморфизм $\pi$ из $B$ на $B'$ такой, что $\varkappa' \circ \pi = \varkappa$. Как видно, конгруэнтность $\overline{\varkappa}$ и $\overline{\varkappa'}$ означает, что эти функции определены на одном и том же множестве, причем $\pi \circ \overline{\varkappa} = \overline{\varkappa'}$.

**6.5.2.** Пусть $Q$ — некоторый экстремальный компакт, $H$ — гильбертово пространство, а $\mathscr{L}(H)$ — пространство линейных ограниченных операторов в $H$. Обозначим через $\mathfrak{C}(Q, \mathscr{L}(H))$ множество всех оператор-функций $u : \mathrm{dom}(u) \to \mathscr{L}(H)$, определенных на котощих

множествах $\mathrm{dom}(u) \subset Q$ и непрерывных в сильной операторной топологии. Если $u \in \mathfrak{C}(Q, \mathscr{L}(H))$ и $h \in H$, то вектор-функция $uh : q \mapsto u(q)h$ $(q \in \mathrm{dom}(u))$ непрерывна и, стало быть, определяет единственный элемент $\widetilde{uh} \in C_\infty(Q, H)$ условием $uh \in \widetilde{uh}$ (см. 5.3.7 (5)). Введем отношение эквивалентности в $\mathfrak{C}(Q, \mathscr{L}(H))$, полагая $u \sim v$ в том и только в том случае, если $u$ и $v$ совпадают на $\mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v)$. Если $\tilde{u}$ — класс эквивалентности оператор-функции $u : \mathrm{dom}(u) \to \mathscr{L}(H)$, то по определению $\tilde{u}h := \widetilde{uh}$ $(h \in H)$. Пусть $SC_\infty(Q, \mathscr{L}(H))$ — множество всех классов эквивалентности $\tilde{u}$ таких, что $u \in \mathfrak{C}(Q, \mathscr{L}(H))$ и множество $\{|\tilde{u}h| : \|h\| \leq 1\}$ ограничено в $C_\infty(Q)$. Так как $|\tilde{u}h|$ на некотором котощем множестве совпадает с функцией $q \mapsto \|u(q)h\|$ $(q \in \mathrm{dom}(u))$, то включение $\tilde{u} \in SC_\infty(Q, \mathscr{L}(H))$ означает, что функция $q \mapsto \|u(q)\|$ $(q \in \mathrm{dom}(u))$ непрерывна на котощем множестве. Тем самым существуют элемент $|\tilde{u}| \in C_\infty(Q)$ и котощее множество $Q_0 \subset Q$, для которых $|\tilde{u}|(q) = \|u(q)\|$ $(q \in Q_0)$. При этом $|\tilde{u}| = \sup\{|\tilde{u}h| : \|h\| \leq 1\}$, где супремум берется в $C_\infty(Q)$. В множестве $SC_\infty(Q, \mathscr{L}(H))$ естественным образом вводится структура $*$-алгебры и унитального $C_\infty(Q)$-модуля с помощью операций

$$
\begin{gathered}
(u+v)(q) := u(q) + v(q) \quad (q \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v)), \\
(uv)(q) := u(q) \circ v(q) \quad (q \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v)), \\
(av)(q) := a(q)v(q) \quad (q \in \mathrm{dom}(a) \cap \mathrm{dom}(v)), \\
u^*(q) := u(q)^* \quad (q \in \mathrm{dom}(u)),
\end{gathered}
$$

где $u, v \in \mathfrak{C}(Q, \mathscr{L}(H))$ и $a \in C_\infty(Q)$. При этом имеют место соотношения

$$
\begin{gathered}
|\tilde{u} + \tilde{v}| \leq |\tilde{u}| + |\tilde{v}|, |\tilde{u}\tilde{v}| \leq |\tilde{u}| \cdot |\tilde{v}|, \\
|a\tilde{v}| = |a||\tilde{v}|, \ |\tilde{u} \cdot \tilde{u}^*| = |\tilde{u}|^2.
\end{gathered}
$$

Если $\tilde{u} \in SC_\infty(Q, \mathscr{L}(H))$, а элемент $\tilde{x} \in C_\infty(Q, H)$ задан непрерывной вектор-функцией $x : \mathrm{dom}(x) \to H$, то можно определить $\tilde{u}\tilde{x} := \widetilde{ux} \in C_\infty(Q, H)$, где $ux : q \mapsto u(q)x(q)$ $(q \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(x))$, ибо последняя функция непрерывна. При этом

$$
|\tilde{u}x| \leq |\tilde{u}| \cdot |x| \quad (x \in C_\infty(Q, H)).
$$

Отсюда вытекает, в частности, что

$$|\tilde{u}| = \sup \{|\tilde{u}x| : x \in C_\infty(Q,H), |x| \leq \mathbb{1}\}.$$

Обозначим через $S_{\tilde{u}}$ оператор $x \mapsto \tilde{u}x$.

Введем теперь нормированную $*$-алгебру формулой

$$SC_\#(Q,\mathscr{L}(H)) := \{v \in SC_\infty(Q,\mathscr{L}(H)) : |v| \in C(Q)\},$$
$$\|v\| = \||v|\|_\infty \quad (v \in SC_\#(Q,\mathscr{L}(H))).$$

**6.5.3. *Теорема.*** *Для любого оператора $U \in \mathrm{End}(C_\#(Q,H))$ существует единственный элемент $u \in SC_\#(Q,\mathscr{L}(H))$, для которого $U = S_u$. Сопоставление $U \mapsto u$ осуществляет $*$-$B$-изоморфизм $\mathrm{End}(C_\#(Q,H))$ на $A := SC_\#(Q,\mathscr{L}(H))$. В частности, $A$ — это $\lambda$-однородная алгебра. При этом если $Q$ — это $\lambda$-стабильный компакт, то $A$ — строго $\lambda$-однородная $AW^*$-алгебра, где $\lambda = \dim(H)$.*

$\lhd$ Прежде всего заметим, что оператор $S_u$ удовлетворяет неравенству $|S_u x| \leq |u| \cdot |x|$ для всех $x \in C_\#(Q,H)$. Следовательно, при каждом $u \in SC_\#(Q,\mathscr{L}(H))$ оператор $S_u$ действует в $C_\#(Q,H)$, $C(Q)$ линеен и ограничен. Более того,

$$\|S_u\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \||S_u x|\|_\infty = \sup_{|x|\leq \mathbb{1}} \sup_{q\in Q} |ux|(q) = \sup_{q\in Q} |u|(q) = \|u\|.$$

Ясно также, что $S_{u^*} = {S_u}^*$ для каждого $u \in SC_\#(Q,\mathscr{L}(H))$. Итак, отображение $u \mapsto S_u$ представляет собой $*$-$B$-изоморфное вложение $SC_\#(Q,\mathscr{L}(H))$ в $\mathrm{End}(C_\#(Q,H))$. Докажем, что оно сюръективно. Оператор $U \in \mathrm{End}(C_\#(Q,H))$ является *мажорируемым*, т. е. удовлетворяет неравенству $|Ux| \leq f \cdot |x|$ для каждого $x \in C_\#(Q,H)$, где $f := \sup\{|Ux| : |x| \leq \mathbb{1}\} \in C(Q)$. По теореме 5.3.13 существует оператор-функция $u : \mathrm{dom}(u) \to \mathscr{L}(H)$, удовлетворяющая условиям: (1) функция $q \mapsto \langle u(q)h|g\rangle$ $(q \in \mathrm{dom}(u))$ непрерывна для всех $g, h \in H$; (2) существует функция $\varphi \in C_\infty(Q)$ такая, что $\|u(q)\| \leq \varphi(q)$ $(q \in \mathrm{dom}(u))$; (3) $Ux = \tilde{u}x$ для всех $x \in C_\#(Q,H)$ и $|u| = f$. Таким образом, $U = S_{\tilde{u}}$, и нужно лишь обосновать, что $u$ непрерывна в сильной операторной топологии. Учитывая смысл точных границ в $K$-пространстве $C_\infty(Q)$, можно заметить, что $\|u(q)\| = |u|(q)$ $\quad (q \in Q_0)$, где $Q_0$ — котощее множество в $Q$.

Поэтому, заменив, если нужно, $\mathrm{dom}(u)$ на $Q_\circ \cap \mathrm{dom}(u)$, можно считать, что функция $q \mapsto \|u(q)\| \quad (q \in \mathrm{dom}(u))$ непрерывна. Вместе с уже отмеченным выше условием (1) это влечет непрерывность $u$ в сильной операторной топологии, т. е. $u \in SC_\#(Q, \mathscr{L}(H))$. Заключительная часть теоремы вытекает из 5.3.4 (3). $\triangleright$

Семейства непустых компактов $(Q_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ и $(P_\delta)_{\delta\in\Delta}$ назовем *конгруэнтными,* если $\Gamma = \Delta$, а $Q_\gamma$ и $P_\gamma$ гомеоморфны при всех $\gamma \in \Gamma$.

**6.5.4.** ***Теорема.*** *Для произвольной $AW^*$-алгебры $A$ типа I существует единственное с точностью до конгруэнции семейство непустых экстремально несвязных компактов $(Q_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ такое, что выполняются условия:*

**(1)** *$\Gamma$ — множество кардиналов и компакт $Q_\gamma$ является $\gamma$-стабильным при каждом $\gamma \in \Gamma$;*

**(2)** *имеет место $*$-изоморфизм алгебр*
$$A \simeq \sum_{\gamma\in\Gamma}^{\oplus} SC_\#(Q_\gamma, \mathscr{L}(l_2(\gamma))).$$

$\triangleleft$ По теореме 6.2.5 можно считать, что $A$ есть ограниченный спуск $AW^*$-фактора $\mathcal{A}$ из $\mathbb{V}^{(B)}$. При этом $\mathcal{A}$ имеет тип I, а значит, $\mathcal{A} \simeq \mathscr{L}(\mathscr{X})$, где $\mathscr{X}$ — гильбертово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Отсюда видно, что $A$ и $\mathrm{End}(X)$, где $X$ — ограниченный спуск $\mathscr{X}$, являются $*$-изоморфными алгебрами.

Пусть $B\text{-}\dim(X) = (b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, а $Q_\gamma$ — открыто-замкнутое множество стоуновского компакта алгебры $B$, соответствующее элементу $b_\gamma \in B$. В силу 6.3.7 компакт $Q_\gamma$ будет $\gamma$-стабильным. Тем самым выполнено (1).

В силу теоремы 6.4.11 существует унитарная эквивалентность $X \simeq \sum_{\gamma\in\Gamma}^{\oplus} C_\#(Q_\gamma, l_2(\gamma))$. Но тогда имеет место $*$-изоморфизм $AW^*$-алгебр
$$\mathrm{End}(X) \simeq \sum_{\gamma\in\Gamma}^{\oplus} \mathrm{End}(C_\#(Q_\gamma, l_2(\gamma))).$$
Привлекая теорему 6.5.3, приходим к (2). Требуемая единственность вытекает из 6.4.11. $\triangleright$

**6.5.5.** ***Следствия.*** *Справедливы утверждения:*

**(1)** *Всякая $AW^*$-алгебра типа I разлагается в прямую сумму строго однородных компонент. Такое разложение является единственным с точностью до $*$-изоморфизма.*

**(2)** *Две $AW^*$-алгебры типа I $*$-изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют конгруэнтные функции кратности или, что то же, конгруэнтные строгие декомпозиционные ряды.*

$\lhd$ Это утверждение вытекает из (1). Достаточно заметить, что в представлении 6.5.4 размерность $A$ конгруэнтна разбиению единицы $(\chi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, где $\chi_\gamma$ — характеристическая функция множества $Q_\gamma$ в дизъюнктной сумме семейства $(Q_\gamma)$. $\rhd$

**(3)** *Пусть $\Gamma$ — множество кардиналов и $(b_\gamma)$ — разбиение единицы в $B$, состоящее из ненулевых попарно различных элементов. Тогда $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ будет строго декомпозиционным рядом некоторой $AW^*$-алгебры в том и только в том случае, когда $b_\gamma$ будет $\gamma$-стабильным при всех $\gamma \in \Gamma$.*

$\lhd$ Требуемое вытекает из 6.3.7 и 6.5.3. $\rhd$

**6.5.6.** Примечания.

**(1)** Основные результаты, относящиеся к функциональной реализации, теоремы 6.4.11 и 6.5.4, получены А. Г. Кусраевым в [65]. Результат о классификации $AW^*$-алгебр типа I (см. 6.5.5 (2)) получил ранее М. Озава в несколько ином виде [210]. Разница состоит в том, что инвариант, характеризующий $AW^*$-алгебру типа I с точностью до $*$-изоморфизма, является у М. Озавы булевозначным кардиналом, т. е. внутренним объектом булевозначного универсума. Определение, данное в 6.5.1, не использует конструкцию булевозначного универсума.

**(2)** Отметим также, что из 6.4.8 и 6.5.5 (2) вытекает отрицательное решение проблемы И. Капланского о единственности разложения $AW^*$-алгебры типа I в прямую сумму однородных компонент, полученное М. Озавой в [211, 212]. Как видно из 6.4.8, это связано с эффектом смещения кардинальных чисел при погружении в булевозначную модель 3.1.13 (1). В случае, когда булева алгебра центральных идемпотентов $B$ имеет счетный тип, смещение кардинальных чисел не происходит (см. 3.1.13 (2)), поэтому упомянутое разложение единственно. И. Капланский установил единственность разложения в предположении счетности типа алгебры $B$ и предположил, что в общем случае единственности разложения нет (см. [170]).

## 6.6. Вложимые $C^*$-алгебры

Алгебры типа I имеют наиболее простое строение в классе $AW^*$-алгебр. Естественный интерес вызывают алгебры, которые могут

быть реализованы как бикоммутанты в $AW^*$-алгебре типа I. Такие алгебры называют *вложимыми*. Как можно усмотреть из результатов 6.2, они превращаются в алгебры фон Неймана при погружении в подходящую булевозначную модель. Тем самым возникает возможность переносить результаты об алгебрах фон Неймана в соответствующие результаты о вложимых алгебрах. В текущем параграфе этот подход демонстрируется на нескольких примерах.

**6.6.1.** Приведем необходимые определения и факты.

**(1)** Пусть, как и раньше, $H$ — гильбертово пространство, а $\mathscr{L}(H)$ — пространство линейных ограниченных эндоморфизмов $H$. Для множества $M \subset \mathscr{L}(H)$ *коммутант* $M'$ определяется как множество операторов из $\mathscr{L}(H)$, коммутирующих с каждым оператором из $M$ (см. 6.2.5). Ясно, что $M'$ — банахова алгебра операторов, содержащая единицу $\mathbb{1} := I_H$.

*Бикоммутантом* $M$ называют множество $M'' := (M')'$.

*Алгеброй фон Неймана* в $H$ называют $*$-подалгебру $A'$ алгебры $\mathscr{L}(H)$, совпадающую со своим бикоммутантом, т. е. $A = A''$.

*Центр* алгебры фон Неймана $A$ определяется формулой $\mathscr{Z}(A) = A \cap A'$. Алгебру фон Неймана $A$ именуют *фактором*, если ее центр тривиален, т. е. если $\mathscr{Z}(A) = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1} := \{x \cdot I_H : \lambda \in \mathbb{C}\}$.

**(2)** ***Теорема о бикоммутанте.*** *Пусть $A$ — инволютивная алгебра операторов в гильбертовом пространстве $H$, причем $I_H \in A$. Тогда $A$ совпадает со своим бикоммутантом $A''$ в том и только в том случае, если $A$ замкнута в сильной (или, что равносильно, в слабой) операторной топологии пространства $\mathscr{L}(H)$.*

**(3)** ***Теорема Сакаи.*** *$C^*$-алгебра $A$ является алгеброй фон Неймана (с точностью до $*$-изоморфизма) в том и только в том случае, если $A$ представляет собой сопряженное банахово пространство.*

**(4)** $C^*$-алгебру $A$ принято называть $B$-*вложимой*, если существуют $AW^*$-алгебра $N$ типа I и $*$-мономорфизм $\imath : A \to N$ такие, что $B = \mathfrak{P}_c(N)$ и $\imath(A) = \imath(A)''$, где $\imath(A)''$ — бикоммутант $\imath(A)$ в $N$. Заметим, что в этом случае $A$ будет $AW^*$-алгеброй и $B$ содержится в $\mathfrak{P}_c(A)$ в качестве правильной подалгебры. В частности, $A$ это $B$-циклическая алгебра (см. 6.2.3).

Говорят, что $C^*$-алгебра $A$ *вложима*, если она $B$-вложима для некоторой правильной подалгебры $B \subset \mathfrak{P}_c(A)$.

Если $B = \mathfrak{P}_c(A)$ и $A$ является $B$-вложимой, то $A$ называют *центрально вложимой алгеброй*.

Напомним, что мы всегда предполагаем наличие единицы в $C^*$-алгебре. Кроме того, запись $B \sqsubset A$ по-прежнему означает $B$-цикличность алгебры $A$.

**6.6.2. *Теорема.*** *Пусть $\mathscr{A}$ — это $C^*$-алгебра в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ и $A$ — ее ограниченный спуск. Тогда $A$ будет $B$-вложимой $AW^*$-алгеброй в том и только в том случае, если $\mathscr{A}$ — алгебра фон Неймана внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Алгебра $A$ центрально вложима в том и только в том случае, если $\mathscr{A}$ — фактор фон Неймана внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.*

$\lhd$ Допустим, что $A$ — бикоммутант в $AW^*$-алгебре $N$ типа I, причем $\mathfrak{P}_c(N) = B$. Учитывая 6.2.5 и 6.2.13, можно считать, что $N$ — ограниченный спуск некоторого $AW^*$-фактора $\mathscr{N}$ типа I из модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Из соотношений $A'' \subset N$ и $A'' = A$ непосредственно видно, что $[\![ \mathscr{A} = A{\uparrow} \subset N ]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![ \mathscr{A}'' = (A{\uparrow})'' = A''{\uparrow} = \mathscr{A} ]\!] = \mathbb{1}$. Тем самым $\mathscr{A}$ — бикоммутант в $\mathscr{N}$ и остается заметить, что $AW^*$-фактор $\mathscr{N}$ типа I изоморфен алгебре $B(\mathscr{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathscr{H}$.

Наоборот, пусть $[\![ \mathscr{A}$ — алгебра фон Неймана$]\!] = \mathbb{1}$. Это означает, что $[\![ \mathscr{A}$ — бикоммутант в $\mathscr{L}(\mathscr{H}) ]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого гильбертова пространства $\mathscr{H}$ в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Пусть $N$ — ограниченный спуск $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Тогда $N$ есть $AW^*$-алгебра типа I в силу 6.2.13 (2), $A$ — бикоммутант в $N$ и $\mathfrak{P}_c(N) = B$ (см. 6.2.5). Вторая часть требуемого утверждения следует из теоремы 6.2.5, согласно которой $\mathscr{A}$ будет фактором фон Неймана внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{P}_c(A) = B$. $\rhd$

**6.6.3.** Охарактеризуем вложимые $C^*$-алгебры. Напомним, что для нормированного $B$-пространства $X$ символом $X^{\#}$ обозначается $B$-двойственное пространство (см. 5.5.8). Будем говорить, что $C^*$-алгебра $A$ является $B$-двойственной, если $A$ содержит булеву алгебру $B$ центральных проекторов и $B$-изометрична $B$-двойственному пространству $X^{\#}$ некоторого нормированного $B$-пространства $X$. Пространство $X$ при этом называют $B$-*преддвойственным* для $A$ и пишут $A_{\#} = X$.

**6.6.4. *Теорема.*** *$C^*$-алгебра $B$-вложима в том и только в том случае, если она $B$-двойственна. В классе $B$-циклических банаховых пространств $B$-преддвойственное пространство единственно с точностью до $B$-изометрии.*

$\lhd$ Пусть $A$ — это $C^*$-алгебра и $B \sqsubset \mathfrak{P}_c(A)$. В силу 6.1.6 можно предположить, что $A$ совпадает с ограниченным спуском $C^*$-алгебры $\mathscr{A}$ из модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ применим теорему Сакаи, по которой в силу принципа переноса будет $[\![\mathscr{A}$ — алгебра фон Неймана$]\!]=$ $[\![$алгебра $\mathscr{A}$ линейно изометрична сопряженному банахову пространству $\mathscr{X}'\,]\!]$. Если $X$ — ограниченный спуск банахова пространства $\mathscr{X}$, то пространство $X^{\#}$ является $B$-линейно изометричным ограниченному спуску пространства $\mathscr{X}'$ (см. 5.5.10). Теперь из теоремы 6.6.2 видно, что если $A$ является $B$-вложимой, то $A$ также и $B$-двойственна, причем $A_{\#} = X$ — это $B$-циклическое пространство.

Наоборот, пусть $A$ является $B$-двойственной и $A_{\#} = X_0$ — нормированное $B$-пространство. Если $X$ — $B$-циклическое расширение $X_0$, то $X_0^{\#} = X^{\#}$, т. е. $A_{\#} = X$. Обозначим через $\mathscr{X}$ булевозначную реализацию пространства $X$. Тогда $\mathscr{A} \simeq \mathscr{X}^{\#}$. По теореме 6.6.2 алгебра $A$ будет $B$-вложимой.

Предположим теперь, что $B$-циклические пространства $X$ и $Y$ $B$-преддвойственны к $A$. Обозначим через $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ реализации в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ пространств $X$ и $Y$ соответственно. Тогда $[\![\,\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ преддвойственны к $\mathscr{A}\,]\!] = \mathbb{1}$. Так как алгебра фон Неймана имеет единственное с точностью до линейной изометрии преддвойственное пространство, то $[\![\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ линейно изометричны$]\!] = \mathbb{1}$. Так как $X$ и $Y$ совпадают с ограниченными спусками $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно, то $X$ и $Y$ являются $B$-изометричными. $\rhd$

**6.6.5.** ***Теорема.*** *Пусть $N$ — некоторая $AW^*$-алгебра типа I и $A$ является $AW^*$-подалгеброй в $N$, содержащей центр $\mathscr{Z}(N)$. Тогда алгебра $A$ и ее коммутант $A'$ в $N$ имеют один и тот же тип I, II или III.*

$\lhd$ Согласно 6.2.5 и 6.2.13 можно считать, что $N$ и $A$ — ограниченные спуски $\mathscr{N}$ и $\mathscr{A}$ соответственно из модели $\mathbb{V}^{(B)}$, где $B = \mathfrak{P}_c(N)$, $[\![\,\mathscr{N} = \mathscr{L}(\mathscr{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathscr{H}\,]\!] = \mathbb{1}$, $[\![\,\mathscr{A}$ — это $AW^*$-подалгебра в $\mathscr{N}\,]\!] = \mathbb{1}$.

Таким образом, $\mathscr{A}$ — алгебра фон Неймана внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Но для алгебр фон Неймана требуемое утверждение справедливо (см. [225]), т. е. $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}'$ имеют один и тот же тип I, II или III. В то же время $A'$ совпадает с ограниченным спуском $\mathscr{A}'$, ибо $\mathscr{A}'{\downarrow} = (\mathscr{A}{\downarrow})^{\circ}$, где $(\cdot)^{\circ}$ — коммутант в алгебре $\mathscr{N}{\downarrow}$. Остается привлечь еще раз теорему 6.2.13. $\rhd$

**6.6.6. *Теорема.*** *Пусть $C^*$-алгебра $A$ будет $B_0$-вложимой для некоторой правильной подалгебры $B_0 \subset \mathfrak{P}_c(A)$. Тогда $A$ будет $B$-вложимой для любой правильной подалгебры $B_0 \subset B \subset \mathfrak{P}_c(A)$.*

$\triangleleft$ Предположим, что $A$ является бикоммутантом в $AW^*$-алгебре $N$ типа I и $\mathfrak{P}_c(N) = B_0$. Пусть $B$ — правильная подалгебра булевой алгебры $\mathfrak{P}_c(A)$, причем $B_0 \subset B$. Через $\mathscr{C}(B)$ обозначим $C^*$-алгебру, порожденную множеством $B$. Так как $B$ — правильная подалгебра, то $\mathscr{C}(B)$ будет $AW^*$-подалгеброй в $N$ (см. 6.2.1 (1, 2)). Кроме того, $\mathscr{C}(B)$ содержит центр $N$, так как $B_0 = \mathfrak{P}_c(N)$. По теореме 6.6.4 коммутант $\mathscr{C}(B)' = B'$ алгебры $\mathscr{C}(B)$ в $N$ имеет тот же тип, что и алгебра $\mathscr{C}(B)$. Но $\mathscr{C}(B)$ — коммутативная $AW^*$-алгебра, значит, $\mathscr{C}(B)'$ — алгебра типа I. Из-за коммутативности $\mathscr{C}(B)$ верно также, что центр $\mathscr{C}(B)'$ совпадает с $\mathscr{C}(B)$. Поскольку $\mathscr{C}(B)$ содержится в центре алгебры $A$, то коммутант $A'$, вычисленный в $N$, содержится в $\mathscr{C}(B)'$. Следовательно, бикоммутант алгебры $A$ в $\mathscr{C}(B)'$ совпадает с бикоммутантом той же алгебры в $N$, т. е. $A$ есть бикоммутант в $\mathscr{C}(B)$. Тем самым $A$ — это $B$-вложимая алгебра. $\triangleright$

**6.6.7. *Следствия.*** *Справедливы утверждения:*

**(1)** *$C^*$-алгебра вложима в том и только в том случае, если она центрально вложима.*

**(2)** *Алгебра фон Неймана $A$ является $B$-вложимой для любой правильной подалгебры $B \subset \mathfrak{P}_c(A)$.*

**6.6.8.** Пусть $A$ — это $C^*$-алгебра и $B \sqsubset A$. Линейный оператор $T : A \to B(\mathbb{C})$ называют *положительным*, если $T(x^*x) \geq 0$ для всех $x \in A$. Положительный $B$-линейный оператор $T$ называют *состоянием*, если $\|T\| = 1$. Состояние $T$ называют *нормальным*, если $T(\sup(x_\alpha)) = \sup(T(x_\alpha))$ для любой возрастающей сети $(x_\alpha)$ эрмитовых элементов, имеющей супремум. Говорят, что $A$ имеет *разделяющее множество $B(\mathbb{C})$-значных нормальных состояний*, если положительность элемента $x \in A$ равносильна тому, что $Tx \geq 0$ для каждого нормального $B(\mathbb{C})$-значного состояния $T$.

*Монотонная полнота* $C^*$-алгебры $A$ означает, что любая ограниченная сверху монотонно возрастающая сеть эрмитовых элементов в $A$ имеет точную верхнюю границу. Легко проверить, что монотонная полнота $A$ равносильна монотонной полноте ее булевозначной реализации.

**6.6.9. Теорема.** *Пусть $\mathscr{A}$ — некоторая $C^*$-алгебра внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $A$ — ее ограниченный спуск. Для любого $B(\mathbb{C})$-значного состояния $\Phi$ на $A$ верно $[\![\varphi := \Phi{\uparrow}$ — состояние на $\mathscr{A}\,]\!] = \mathbb{1}$. Всякое состояние на $\mathscr{A}$ имеет вид $\Phi{\uparrow}$, где $\Phi$ — некоторое $B(\mathbb{C})$-значное состояние на $A$. Состояние $\Phi$ нормально в том и только в том случае, когда $[\![\varphi := \Phi{\uparrow}$ — нормальное состояние$]\!] = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ Первая часть теоремы следует из 5.5.9. Нужно только учесть, что соответствие $\Phi \mapsto \varphi := \Phi{\uparrow}$ сохраняет положительность, ибо $\Phi(A_+){\uparrow} = \varphi(A_+{\uparrow}) = \varphi(A_+)$. Утверждение о нормальности легко выводится с помощью правил спуска и подъема поляр (см. 5.2.13, 5.3.12). $\rhd$

**6.6.10. Теорема.** *Для $B$-циклической $C^*$-алгебры $A$ равносильны утверждения:*

**(1)** *$A$ является $B$-вложимой алгеброй;*

**(2)** *$A$ монотонно полна и имеет разделяющее множество $B(\mathbb{C})$-значных состояний.*

$\lhd$ В соответствии с теоремой 6.1.6 можно считать $A$ ограниченным спуском $C^*$-алгебры $\mathscr{A}$ из модели $\mathbb{V}^{(B)}$. По теореме 6.6.2 $A$ будет $B$-вложимой тогда и только тогда, когда $[\![\,\mathscr{A}$ — алгебра фон Неймана$]\!] = \mathbb{1}$. Теперь воспользуемся следующим фактом: $C^*$-алгебра будет алгеброй фон Неймана в том и только в том случае, если она монотонно полна и имеет разделяющее множество нормальных состояний. Опустив некоторые детали, разберемся с существованием нормальных состояний. Пусть $\mathscr{S}_n(\mathscr{A})$ — множество всех нормальных состояний алгебры $\mathscr{A}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а $\mathscr{S}_n(\mathscr{A}, B)$ — множество всех нормальных $B(\mathbb{C})$-значных состояний на $A$. Соответствие $\Phi \mapsto \varphi := \Phi{\uparrow}$ есть биекция между $\mathscr{S}_n(\mathscr{A}){\downarrow}$ и $\mathscr{S}_n(A, B)$ (см. 6.6.9).

Допустим, что $\mathscr{S}_n(A, B)$ — разделяющее множество. Для ненулевого элемента $x \in A$ подберем такое $\Phi_0 \in \mathscr{S}_n(A, B)$, что $\Phi_0 x \neq 0$. Ввиду $B$-линейности $\Phi$ имеем $[\![\,0 \neq x\,]\!] \leq [\![\,\Phi_0(x) \neq 0\,]\!]$. Привлекая правила вычисления булевых оценок истинности, напишем:

$$
\begin{gathered}
[\![\,\mathscr{S}_n(\mathscr{A}) \ \text{— разделяющее множество}\,]\!] = \\
= [\![\,(\forall x \in \mathscr{A})\ (x \neq 0 \to (\exists \varphi \in \mathscr{S}_n(\mathscr{A}))\ \varphi(x) \neq 0)\,]\!] = \\
= \bigwedge_{x \in A} [\![\,x \neq 0\,]\!] \Rightarrow \bigvee_{\Phi \in \mathscr{S}_n(A,B)} [\![\,\Phi{\uparrow}(x) \neq 0\,]\!] \geq
\end{gathered}
$$

$$
\geq \bigwedge_{x \in A} [\![ x \neq 0 ]\!] \Rightarrow [\![ \Phi_0 \!\uparrow\!(x) \neq 0 ]\!] = \mathbb{1}.
$$

Тем самым $\mathscr{S}_n(\mathscr{A})$ — разделяющее множество внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Наоборот, пусть выполнено последнее утверждение. Для ненулевого $x \in A$ имеем $b := [\![ x \neq 0 ]\!] > \mathbb{0}$. По принципу максимума существует $\varphi \in \mathscr{S}_n(\mathscr{A})\!\downarrow$ такое, что $b \leq [\![ \varphi(x) \neq 0 ]\!]$. Пусть $\Phi$ — ограничение на $A \subset \mathscr{A}\!\downarrow$ оператора $\varphi\!\downarrow$. Тогда $\Phi \in \mathscr{S}_n(A, B)$ и $b \leq [\![ \Phi(x) \neq 0 ]\!]$. Следовательно, след $e_{\Phi(x)}$ элемента $\Phi(x)$ больше или равен $b$ (см. 5.2.3 (5)), а значит, $\Phi(x) \neq 0$. $\triangleright$

**6.6.11. *Теорема.*** *Для $AW^*$-алгебры $A$ равносильны утверждения:*

- **(1)** *$A$ вложима;*
- **(2)** *$A$ центрально вложима;*
- **(3)** *$A$ обладает разделяющим множеством центрозначных нормальных состояний;*
- **(4)** *$A$ является $\mathfrak{P}_c(A)$-двойственным пространством.*

$\triangleleft$ См. 6.6.4, 6.6.7 (1), 6.6.10. $\triangleright$

**6.6.12.** Примечания.

**(1)** Результаты этого параграфа принадлежат М. Озаве [211, 214, 215].

**(2)** Существуют различные классы упорядоченных и инволютивных алгебр (см. [100, 110]), к которым применимы методы, изложенные в 6.2–6.6. К числу важнейших относится класс $JB$-алгебр.

**(3)** В качестве простой иллюстрации укажем йорданов аналог теоремы 6.6.10, установленный в [66].

***Теорема.*** *Для $B$-$JB$-алгебры $A$ равносильны утверждения:*

- **(a)** *$A$ является $B$-сопряженным пространством;*
- **(b)** *$A$ монотонно полна и имеет разделяющее множество центрозначных нормальных состояний.*

*Если выполнено одно из этих условий, то $B$-предсопряженным к $A$ будет часть $B$-сопряженного пространства $A^{\#}$, состоящая из порядково непрерывных операторов.*

**(4)** О других приложениях булевозначных моделей, примыкающих к теме настоящей главы, см. [51, 175, 176, 195–197, 200–207, 209–215, 243, 244]. О несколько иных приложениях булевозначного анализа см. также [27, 28, 63–65, 69, 70, 72–75, 78–80, 172–177].

# Приложение

Здесь приведены начальные сведения из теории множеств и теории категорий.

## П.1. Язык теории множеств

Аксиоматические теории множеств точно регламентируют корректные способы формирования множеств. Образно говоря, аксиоматики описывают миры — универсумы — множеств, которые призваны служить адекватными отображениями наших интуитивных представлений о «канторовом рае» — универсуме наивной теории множеств. Интересующие нас аксиоматики строятся и изучаются как формальные теории. Необходимо специально отметить, что, несмотря на свою очевидную ограниченность (математика не сводится к синтаксису своих текстов) и во многом благодаря ей (вычленение семиотических аспектов эксплицирует проблему смысла), формальный подход доказал свою исключительную плодотворность (теоремы Гёделя, независимость континуум-гипотезы и аксиомы выбора, булевозначный анализ и т. п.).

Стержнем формальной теории является ее язык. Точное описание и изучение последнего по необходимости производится средствами некоторого, вообще говоря, другого языка, который принято называть метаязыком. Обычно в качестве метаязыка употребляются определенным образом ограниченные и регламентированные фрагменты естественных языков, обогащенные разными техническими терминами. Средства, допускаемые в метаязык, важны с точки зрения метаматематики. Учитывая, что нас интересуют не метаматематические, а прикладные теоретико-модельные аспекты формальной

теории множеств, мы не предъявляем к метаязыку чрезмерно жесткие требования. В частности, в дальнейшем широко используются общепринятые выразительные средства и уровень строгости обычной — содержательной — математики.

**П.1.1.** Аксиоматическая теория множеств — это *формальная система*. Составляющими такой системы являются алфавит, формулы, аксиомы и правила вывода. В качестве алфавита рассматривают фиксированный набор $A$ символов произвольной природы — канторовское множество. Конечные последовательности элементов $A$ называют выражениями, иногда — текстами. Если каким-либо способом (предписаниями, алгоритмами и т. п.) выделено некоторое множество «правильно составленных» выражений $\Phi(A)$, то говорят, что задан *язык с алфавитом* $A$. При этом выделенные выражения называют формулами. После этого фиксируют некоторые конечные или бесконечные совокупности формул, именуемые *аксиомами*, а также явно описывают допускаемые *правила вывода* — отношения в $\Phi(A)$. Формулы, получаемые из аксиом за конечное число шагов с помощью указанных правил вывода, называют *теоремами*. Часто используют (и мы будем поступать также) более вольный и удобный способ выражения. Именно, говорят, что теоремы формальной системы составляют наименьшее множество формул, содержащее все аксиомы и замкнутое относительно правил вывода.

**П.1.2.** Нас будет интересовать специальный тип формального языка — *язык* первого порядка (с равенством) исчисления предикатов (с равенством). *Сигнатурой* $\sigma$ называют тройку $(F, P, a)$, где $F$ и $P$ — некоторые множества, называемые множеством символов операций и множеством символов предикатов соответственно, а $a$ — отображение $F \cup P$ в множество натуральных чисел. Говорят, что $u \in F \cup P$ есть *$n$-арный* или *$n$-местный символ*, если $a(u) = n$. *Алфавит* языка первого порядка сигнатуры $\sigma$ состоит из следующих символов:

**(1)** *множество символов* сигнатуры $\sigma$, т. е. множество $F \cup P$;

**(2)** *множество переменных*: строчные или прописные латинские буквы, возможно с индексами;

**(3)** *пропозициональные связки*: $\wedge$ — конъюнкция, $\vee$ — дизъюнкция, $\rightarrow$ — импликация, $\urcorner$ — отрицание;

**(4)** *кванторы*: $\forall$ — квантор общности и $\exists$ — квантор существования;
**(5)** *символ равенства* $=$;
**(6)** *вспомогательные символы*: ( — открывающая скобка, ) — закрывающая скобка, , — запятая.

**П.1.3.** В языке теории множеств выделяют формулы и термы.

**(1)** *Термы* сигнатуры $\sigma$ составляют наименьшее множество выражений языка (той же сигнатуры), удовлетворяющее условиям:
**(a)** всякая переменная есть терм;
**(b)** всякий нульместный символ операции есть терм;
**(c)** если $f \in F$, $a(f) = n$ и $t_1, \dots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ — терм.

**(2)** *Атомные* или *атомарные формулы* сигнатуры $\sigma$ — это выражения вида

$$t_1 = t_2, \quad p(y_1, \dots, y_n), \quad q,$$

где $t_1, t_2, y_1, \dots, y_n$ — термы сигнатуры $\sigma$, $p$ — некоторый $n$-местный предикатный символ и $q$ — нульместный предикатный символ.

**(3)** *Формулы сигнатуры* $\sigma$ составляют наименьшее множество выражений, удовлетворяющее условиям:
**(a)** атомные формулы сигнатуры $\sigma$ являются формулами сигнатуры $\sigma$;
**(b)** если $\varphi$ и $\psi$ — формулы сигнатуры $\sigma$, то $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$ — также формулы сигнатуры $\sigma$;
**(c)** если $\varphi$ — формула сигнатуры $\sigma$, а $x$ — переменная, то $(\forall x)\varphi$, $(\exists x)\varphi$ — также формулы сигнатуры $\sigma$.

Вхождение переменной $x$ в формулу $\varphi$ *связано* в $\varphi$ или входит в область действия квантора, если $x$ входит в подформулу $\varphi$ вида $(\forall x)\psi$ или $(\exists x)\varphi$. В противном случае вхождение $x$ свободно в $\varphi$. Говорят, что $x$ *свободно* (связано) в $\varphi$, если существует свободное (связанное) вхождение $x$ в $\varphi$. При желании подчеркнуть, что в формуле $\varphi$ свободными являются переменные $x_1, \dots, x_n$ и только они, мы пишем $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ или просто $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Слова «предложение» и «утверждение» неформально трактуют как синонимы слова «формула». Формулу без свободных переменных называют *высказыванием*. Говоря об истинности или ложности формулы $\varphi$, имеют в виду *универсальное замыкание* формулы $\varphi$, которое получается навешиванием квантора всеобщности на каждую свободную

переменную формулы $\varphi$. Обратите внимание, что квантификация допустима лишь по отношению к переменным. Слова «первый порядок» подчеркивают именно эту синтаксическую особенность рассматриваемого языка.

**П.1.4.** *Язык теории множеств* — язык первого порядка, сигнатура которого содержит лишь один бинарный предикатный символ $\in$ и не имеет прочих предикатных или функциональных символов. Таким образом, теория множеств — это простой пример *теории первого порядка.* Обычно пишут $x \in y$ вместо $\in (x, y)$ и говорят, что $x$ — *элемент* или *член* $y$. В этой связи говорят также о *принадлежности* или *членстве* множеств. Таким образом, формулы теории множеств суть формальные тексты, составленные из атомных формул вида $x \in y$ и $x = y$ посредством пропозициональных связок и кванторов.

Теория множеств, точнее говоря, та теория множеств, которую мы излагаем в настоящей книге, строится на основе законов классической логики. Иными словами, в ней действуют обычные логические аксиомы и правила вывода исчисления предикатов, которые можно найти почти в любом руководстве по математической логике (см., например, [34, 47, 111]). Отметим здесь же, что используемое в книге исчисление предикатов часто именуется *классическим*, *узким* или *исчислением первого порядка.*

Помимо этого принимается некоторое количество нелогических или специальных аксиом, отражающих содержательные представления о множествах или классах. Варьируя в разумных пределах специальные аксиомы, получают различные по своим выразительным возможностям аксиоматические системы для теории множеств. В этом приложении описана теория множеств Цермело — Френкеля.

**П.1.5.** Одной из важнейших функций метаязыка является введение новых сокращающих символов и установление соответствующих синтаксических правил. Дело в том, что формализация даже несложных фрагментов содержательной математики приводит к громоздким текстам, запись и прочтение которых проблематичны по физическим и психологическим причинам. Это обстоятельство вынуждает вводить большое количество сокращений и, по сути дела, просто строить более удобный сокращенный вариант исходного символического языка. При этом необходимым требованием является

принципиальная возможность однозначного перевода сокращенного изложения на формализованный язык. В соответствии с нашими планами мы не будем останавливаться подробно на способах введения сокращений, точных описаний, функциональных выражений и т. п. Например, в дальнейшем, как и ранее, мы применяем *символ присваивания* $:=$, не вдаваясь в сопутствующие тонкости.

**П.1.6.** Приведем примеры сокращения некоторых формальных текстов языка теории множеств. Словесные толкования этих текстов апеллируют к интуитивным наивным представлениям о множествах. Прежде всего отметим следующие общепринятые сокращения:

$$(\exists!\, x)\ \varphi(x) := (\exists\, x)\varphi(x) \wedge (\forall\, x)(\forall\, y)(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \to x = y);$$
$$(\exists\, x \in y)\varphi := (\exists\, x)\ (x \in y \wedge \varphi);$$
$$(\forall\, x \in y)\varphi := (\forall\, x)\ (x \in y \to \varphi),$$

где $\varphi$ — некоторая формула. Полагают также $x \neq y := \neg(x = y)$ и $x \notin y := \neg(x \in y)$. Для простейших теоретико-множественных операций приняты обычные соглашения:

$$x \subset y := (\forall\, z)(z \in x \to z \in y);$$
$$u = \cup x = \cup(x) := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (\exists\, y \in x) z \in y);$$
$$u = \cap x = \cap(x) := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (\forall\, y \in x) z \in y);$$
$$u = y - x = y \setminus x := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (z \in y \wedge z \notin x)).$$

Если $\varphi$ — формула, то совокупность $\mathscr{P}_\varphi(x)$ всех подмножеств $x$, удовлетворяющих условию $\varphi$, описывается выражением

$$u = \mathscr{P}_\varphi(x) := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (z \subset x) \wedge \varphi(z)).$$

*Пустое множество* $\varnothing$ не содержит элементов, так что

$$u = \varnothing := (\forall\, x)(x \in u \leftrightarrow x \neq x).$$

В приведенных выше текстах использован весьма употребительный прием сокращения — пропуск части скобок.

**П.1.7.** Утверждение о том, что $x$ есть *неупорядоченная пара* элементов $y$ и $z$, формализуется так:

$$(\forall\, u)(u \in x \leftrightarrow u = y \vee u = z).$$

При этом полагают $\{y, z\} := x$. Отметим, что фигурные скобки отсутствуют в исходном алфавите и, стало быть, суть метасимволы.

*Упорядоченная пара* и *упорядоченная $n$-ка* вводятся приемом Куратовского:

$$(x, y) := \langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\};$$
$$(x_1, \dots, x_n) := \langle x_1, \dots, x_n\rangle := \langle\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle,$$

где $\{x\} := \{x, x\}$. Обратим внимание на перегруженность круглых скобок. Это обстоятельство неизбежно и не должно восприниматься как повод для обязательного введения новых символов.

С помощью заключенных соглашений можно придать формальный смысл предложению «$X$ — *декартово произведение* $Y \times Z$». Именно, по определению считают: $X := \{(y, z) : y \in Y, z \in Z\}$.

**П.1.8.** Рассмотрим утверждения:

**(1)** $\mathrm{Rel}\,(X)$;
**(2)** $Y = \mathrm{dom}(X)$;
**(3)** $Z = \mathrm{im}(X)$.

Соответствующие формальные тексты имеют вид

**(1′)** $(\forall\, u)\ (u \in X \to (\exists\, v)(\exists\, w)\ u = (v, w))$;
**(2′)** $(\forall\, u)\ (u \in Y \leftrightarrow (\exists\, v)(\exists\, w)\ w = (u, v) \wedge w \in X)$;
**(3′)** $(\forall\, u)\ (u \in Z \leftrightarrow (\exists\, v)(\exists\, w)\ w = (v, u) \wedge w \in X)$.

Таким образом, в (1)–(3) речь идет о том, что элементами $X$ служат упорядоченные пары, причем $Y$ — *область определения* $X$, а $Z$ — *это область значений* $X$. При этом $X$ иногда называют *абстрактным отношением.*

*Однозначность* $X$, или сокращенно $\mathrm{Un}\,(X)$, выражается формулой

$$\mathrm{Un}\,(X) := (\forall\, u)(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)((u, v_1) \in X \wedge (u, v_2) \in X \to v_1 = v_2).$$

Полагают $\mathrm{Fnc}\,(X) := \mathrm{Func}\,(X) := \mathrm{Un}\,(x) \wedge \mathrm{Rel}\,(X)$. Если выполнено $\mathrm{Fnc}\,(X)$, то по очевидным причинам $X$ часто именуют *функцией* или

даже *класс-функцией.* При этом для выражения $(u, v) \in X$ приняты записи $v = X(u)$, $X : u \mapsto v$ и т. п. Далее, фраза $F$ — *отображение* или *функция* из $X$ в $Y$ означает, что $F \subset X \times Y$, при этом $\mathrm{Fnc}\,(F)$ и область определения $F$ совпадает с $X$:

$$F : X \to Y := F \subset X \times Y \wedge \mathrm{Fnc}\,(F) \wedge \mathrm{dom}(F) = X.$$

Термин *класс-функция* также применяют для $F$ при желании подчеркнуть, что $F$ — это класс. *Ограничение* $X$ на $U$ есть по определению $X \cap (U \times \mathrm{im}(X))$. Его обозначают $X \restriction U$.

Если существует и притом единственное $z$, для которого $(y, z) \in X$, то полагают $X`y := z$. В остальных случаях считают $X`y := \varnothing$. Наконец, по определению $X``y := \mathrm{im}(X \restriction y)$. Вместо $X``\{z\}$ пишут $X(x)$ или даже $Xx$, если это не приводит к недоразумениям.

Стоит подчеркнуть, что здесь и в дальнейшем мы придерживаемся свободной точки зрения на введение и сокращение скобок. Иначе говоря, их появление и ликвидация, как правило, управляются соображениями удобства, а также требованиями к уровню формализации текущего фрагмента текста.

Абстрактные отношения достойны особого внимания. Приведем уместные подробности.

*Соответствием* из множества $X$ в множество $Y$ называют упорядоченную тройку $\Phi := (F, X, Y)$, где $F$ — некоторое подмножество произведения $X \times Y$. Отметим, что для $F$ выполнено $\mathrm{Rel}\,(F)$. Часто говорят, что $F$ — *график* $X$ — область отправления и $Y$ — область прибытия соответствия $\Phi$. При этом пишут $\mathrm{Gr}(\Phi) = F$. Напомним, что *отношением* или *бинарным отношением* на $X$ называют соответствие, у которого область отправления и область прибытия есть $X$.

*Образом множества* $A \subset X$ *относительно соответствия* $\Phi$ называется проекция на $Y$ множества $(A \times Y) \cap F$, обозначаемая символом $\Phi(A)$ или даже $F(A)$. Итак,

$$\Phi(A) := F(A) := \{y \in Y : (\exists\, x \in A)((x, y) \in F)\}.$$

Задание соответствия $\Phi$ равносильно указанию отображения

$$\widetilde{\Phi} : x \to \Phi(\{x\}) \in \mathscr{P}(Y) \quad (x \in X),$$

где $\mathscr{P}(Y)$ — совокупность всех подмножеств множества $Y$. На этом основании соответствие $\Phi$ иногда отождествляется с отображением $\widetilde{\Phi}$. Более того, часто не различают отображение $\widetilde{\Phi}$, соответствие $\Phi$ и график $\Phi$, используя одну и ту же букву для их обозначения. Пишут также $\Phi(x)$ вместо $\Phi(\{x\})$.

*Область определения* соответствия $\Phi$ — это область определения его графика $F$. Иначе говоря,

$$\operatorname{dom}(\Phi) := \{x \in X : \Phi(x) \neq \varnothing\}.$$

Аналогично, область значений или образ соответствия — это образ его графика.

**П.1.9.** Предположим, что $X$ и $Y$ — абстрактные отношения, т. е. $\operatorname{Rel}(X)$ и $\operatorname{Rel}(Y)$. Можно организовать *суперпозицию* (или *композицию*) $X$ и $Y$, обозначаемую символом $Y \circ X$, собирая в единое целое в точности те упорядоченные пары $(x, z)$, для которых $(x, y) \in X$ и $(y, z) \in Y$ при подходящем $y$:

$$(\forall\, u)(u \in Y \circ X \leftrightarrow (\exists\, x)(\exists\, y)(\exists\, z)(x, y) \in X \wedge (y, z) \in Y \wedge u = (x, z)).$$

Имея абстрактное отношение $X$, определяют обратное абстрактное отношение $X^{-1}$ по правилу:

$$(\forall\, u)(u \in X^{-1} \leftrightarrow (\exists\, x)(\exists\, y)(x, y) \in X \wedge u = (y, x)).$$

Символом $I_X$ обозначается *тождественное отношение* на $X$, т. е.

$$(\forall\, u)(u \in I_X \leftrightarrow (\exists\, x)(x \in X \wedge u = (x, x))).$$

Детализируем сказанное для соответствий.

Итак, пусть $\Phi := (F, X, Y)$ — это соответствие из $X$ в $Y$. Положим $F^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in F\}$. Соответствие $\Phi^{-1} := (F^{-1}, Y, X)$ называют *обратным* для $\Phi$. Рассмотрим еще одно соответствие $\Psi := (G, Y, Z)$, и пусть $H$ — образ множества $(F \times Z) \cap (X \times G)$ при отображении $(x, y, z) \mapsto (x, z)$. Ясно, что

$$H = \{(x, z) \in X \times Z : (\exists\, y \in Y)((x, y) \in F \wedge (y, z) \in G)\},$$

т. е. $H$ совпадает с суперпозицией $G \circ F$ графиков $G$ и $F$. Соответствие $\Psi \circ \Phi := (G \circ F, X, Z)$ называют *композицией соответствий* $\Phi$ и $\Psi$. Справедливы следующие очевидные равенства:

$$(\Psi \circ \Phi)^{-1} = \Phi^{-1} \circ \Psi^{-1}, \quad \Theta \circ (\Psi \circ \Phi) = (\Theta \circ \Psi) \circ \Phi.$$

Остановимся еще на одном понятии, связанном с соответствиями. Рассмотрим соответствие $\Phi := (F, X, Y)$. *Полярой* $\pi_\Phi(A)$ *множества* $A \subset X$ *относительно соответствия* $\Phi$ называется совокупность таких $y \in Y$, что $A \times \{y\} \subset F$. Таким образом,

$$\pi_\Phi(A) := \pi_F(A) := \{y \in Y : (\forall\, x \in A)\, ((x, y) \in F)\}.$$

Если соответствие $\Phi$ фиксировано, то для простоты пишут $\pi(A)$ вместо $\pi_\Phi(A)$ и $\pi^{-1}(A)$ вместо $\pi_{\Phi^{-1}}(A)$.

Простейшие свойства поляр таковы:

**(1)** если $A \subset B \subset X$, то $\pi(A) \supset \pi(B)$;

**(2)** для любого $A \subset X$ выполнены включения

$$A \subset \pi^{-1}(\pi(A)); \quad A \times \pi(A) \subset F;$$

**(3)** если $A \times B \subset F$, то $B \subset \pi(A)$ и $A \subset \pi^{-1}(B)$;

**(4)** если $(A_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — это непустое семейство подмножеств множества $X$, то $\pi(\bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi) = \bigcap_{\xi \in \Xi} \pi(A_\xi)$;

**(5)** если $A \subset X$ и $B \subset Y$, то $\pi(A) = \pi(\pi^{-1}(\pi(A)))$ и $\pi^{-1}(B) = \pi^{-1}(\pi(\pi^{-1}(B)))$.

**П.1.10.** В случае $\mathrm{Rel}\,(X) \wedge ((X \cap Y^2) \circ (X \cap Y^2) \subset X)$ говорят, что $X$ — *транзитивное* отношение на $Y$. Если $\mathrm{Rel}\,(X) \wedge (I_Y \subset X)$, то $X$ называют *рефлексивным* (на $Y$). Если $X = X^{-1}$, то $X$ называют *симметричным* (на $Y$). Наконец, при $\mathrm{Rel}\,(X) \wedge ((X \cap X^{-1}) \cap Y^2 \subset I_Y)$ используют термин «$X$ — *антисимметричное* отношение на $Y$». Здесь, конечно же, использовано стандартное сокращение: $Y^2 := Y \times Y$.

Рефлексивное и транзитивное отношение называют *предпорядком* (или отношением предпорядка). Антисимметричный предпорядок — это *порядок.* Симметричный предпорядок — это *эквивалентность.* Используют и другую стандартную в данной ситуации терминологию. Напомним, в частности, что порядок $X$ на $Y$ называют

*линейным*, а само $Y$ — *цепью* (относительно $X$), если $Y^2 \subset X \cup X^{-1}$. Если всякое непустое подмножество множества $Y$ имеет наименьший (относительно порядка $X$) элемент, то говорят, что $X$ *вполне упорядочивает* $Y$ или что $Y$ *вполне упорядочено* (подразумеваемым порядком $X$).

**П.1.11.** Кванторы называют *ограниченными*, если они входят в текст в виде $(\forall\, x \in y)$ или $(\exists\, x \in y)$. Существует классификация формул теории множеств (и вообще любой теории первого порядка), основанная на характере использования ограниченных и неограниченных (т. е. не являющихся ограниченными) кванторов. В дальнейшем особую роль будут играть два класса формул — ограниченные формулы, называемые иначе $\Sigma_0$-*формулами,* а также $\Sigma_1$-формулы. Говорят, что формула $\varphi$ *ограничена*, если всякий квантор присутствует в $\varphi$ в виде $(\forall\, x \in y)$ или $(\exists\, x \in y)$ (см. сокращения в П.1.6). Формулу $\varphi$ относят к классу $\Sigma_1$ или называют $\Sigma_1$-*формулой*, если $\varphi$ строится из атомных формул и их отрицаний с помощью только логических операций $\wedge$, $\vee$, $(\forall\, x \in y)$ и $(\exists\, x)$. Ясно, что всякая ограниченная формула попадает в класс $\Sigma_1$. Однако не всякая $\Sigma_1$-формула ограничена и существуют формулы, не содержащиеся в классе $\Sigma_1$. Рассмотрим соответствующие примеры. Начнем с ограниченных формул.

**П.1.12.** Запись $z = \{x, y\}$ эквивалентна ограниченной формуле

$$x \in z \wedge y \in z \wedge (\forall\, u \in z)(u = x \vee u = y).$$

Отсюда видно, что упорядоченная пара вводится ограниченной формулой. То же самое можно сказать и о декартовом произведении, так как $Z = X \times Y$ можно записать в виде

$$(\forall\, z \in Z)(\exists\, x \in X)(\exists\, y \in Y)(z = (x, y)) \wedge$$
$$\wedge (\forall\, x \in X)(\forall\, y \in Y))\ (\exists\, z \in Z)\ (z = (x, y)).$$

Еще одну ограниченную формулу доставляет понятие «отображение $F$ из $X$ в $Y$» (см. П.1.8). Действительно, из сказанного выше следует, что $F \subset X \times Y$ — ограниченная формула, а кроме того выражения $\mathrm{dom}(F) = X$ и $\mathrm{Un}\,(F)$, эквивалентные соответственно формулам

$$(\forall\, x \in X)(\exists\, y \in Y)(\exists\, z \in F) z = (x, y),$$
$$(\forall\, z_1 \in F)(\forall\, z_2 \in F)(\forall\, x \in X)(\forall\, y_1 \in Y)(\forall\, y_2 \in Y)$$
$$z_1 = (x, y_1) \wedge z_2 = (x, y_2) \to y_1 = y_2,$$

также являются ограниченными формулами.

**П.1.13.** Утверждение «множества $x$ и $y$ *равномощны*», означающее, что «существует биекция между $x$ и $y$» или, символически, $x \simeq y$, записывается $\Sigma_1$-формулой:

$$(\exists\, f)(f : x \to y \wedge \mathrm{im}(f) = y \wedge \mathrm{Un}\,(f^{-1})).$$

Однако это обстоятельство не выражается ограниченной формулой. Еще одну $\Sigma_1$-формулу дает понятие абстрактного отношения:

$$\mathrm{Rel}\,(X) := (\forall\, u \in X)(\exists\, v)(\exists\, w) u = (v, w).$$

Следующая формула, утверждающая, что множество $y$ не равномощно никакому своему элементу, в класс $\Sigma_1$ не входит:

$$(\forall\, x \in y)\ \neg(x \simeq y).$$

**П.1.14.** Примечания.

**(1)** Разумеется, варьировать можно не только специальные аксиомы теории первого порядка (см. П.1.4), но и ее логическую часть, т. е. логические аксиомы и правила вывода. Получающиеся при этом множества теорем могут существенно отличаться друг от друга. Так, например, удаляя из аксиом исчисления высказываний закон исключенного третьего, получают интуиционистское исчисление высказываний. Аналогично строится интуиционистское исчисление предикатов (см. [21, 31]).

**(2)** Современная формальная логика сформировалась в ходе трудного развития философской и математической мысли. Классическое исчисление предикатов восходит к аристотелевой силлогистике. Происхождение интуиционистской логики связано с другими философскими идеями. В разные эпохи для разных целей изобретались логические системы, существенно отличные от обеих названных систем. Так, древняя индийская логика имела три типа отрицаний:

чего-то никогда не было и не может быть; что-то было, но сейчас отсутствует; что-то сейчас есть, но скоро исчезнет.

**(3)** Как видно из 3.1.6 и 3.1.7, сокращения могут участвовать в формулах, в сокращениях, в сокращениях в сокращениях и т. п. Изобретение и введение символов во многом является искусством и, как всякое искусство, не может быть формализовано полностью. Тем не менее систематизация и кодификация правил определения сокращений необходима как с теоретической, так и с практической точек зрения. Некоторые такие системы правил (точные описания, введение функциональных букв и т. п.) можно найти в [20, 47, 109].

## П.2. Аксиоматика Цермело — Френкеля

Как уже отмечалось в 3.1.4, аксиомы теории множеств включают в себя общелогические аксиомы теорий первого порядка, фиксирующие классические правила логического вывода. Ниже перечисляются специальные аксиомы теории множеств $\mathrm{ZF}_1$–$\mathrm{ZF}_6$ и AC. Если принять в качестве специальных аксиом $\mathrm{ZF}_1$–$\mathrm{ZF}_6$, то возникающую аксиоматическую систему называют системой или *теорией множеств Цермело — Френкеля* и обозначают ZF. При добавлении к ZF аксиомы выбора AC возникает более широкая теория, которую по-прежнему именуют теорией Цермело — Френкеля, но обозначают символом ZFC. Отметим, что параллельные словесные формулировки аксиом мотивируются канторовскими представлениями о множествах.

**П.2.1.** При изучении ZFC часто используют термины *свойство* и *класс*. Уточним их формальный статус. Рассмотрим формулу $\varphi = \varphi(x)$, построенную в рамках ZFC (символически: $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$). Вместо текста $\varphi(y)$ пишут $y \in \{x : \varphi(x)\}$. Таким образом, действует так называемая *схема Чёрча* для классификации

$$y \in \{x : \varphi(x)\} := \varphi(y).$$

Встречая запись $y \in \{x : \varphi(x)\}$, на языке ZFC говорят, что $y$ обладает свойством $\varphi$, или $y$ лежит в классе $\{x : \varphi(x)\}$. В этом смысле свойство, формула и класс в ZFC — одно и то же. Схемой Чёрча мы фактически уже пользовались в 3.1.6 и 3.1.7. При работе с ZFC

удобны и другие широко распространенные сокращения:

$$\mathbb{U} := \{x : x = x\} \text{— \textit{универсум} или \textit{класс всех множеств}};$$
$$\{x : \varphi(x)\} \in \mathbb{U} := (\exists\, z)(\forall\, y)\varphi(y) \leftrightarrow y \in z;$$
$$\{x : \varphi(x), \psi(x)\} := \{x : \varphi(x)\} \cap \{x : \psi(x)\};$$
$$x \cup y := \cup\{x, y\}, \quad x \cap y \cap z := \cap\{x, y, z\} \ldots .$$

Перейдем теперь к формулировкам специальных аксиом ZFC.

**П.2.2. *Аксиома экстенсиональности* $\mathbf{ZF_1}$:** *два множества совпадут в том (и только в том) случае, если они состоят из одних и тех же элементов:*

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y.$$

Отметим, что вторую эквивалентность без изменения объема аксиомы можно заменить на $\rightarrow$, ибо обратная импликация является теоремой исчисления предикатов.

**П.2.3. *Аксиома объединения* $\mathbf{ZF_2}$:**
*объединение множества множеств — также множество:*

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(\exists\, u)(u \in z \wedge z \in x) \leftrightarrow z \in y.$$

Используя сокращения из П.1.6 и П.2.1, аксиому $\mathrm{ZF}_2$ переписывают в виде

$$(\forall\, x)\ \cup x \in \mathbb{U}.$$

**П.2.4. *Аксиома степени* $\mathbf{ZF_3}$:**
*все подмножества данного множества составляют некоторое множество*, т. е.

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(z \in y \leftrightarrow (\forall\, u)(u \in z \rightarrow u \in x)),$$

или в краткой записи

$$(\forall\, x)\mathscr{P}(x) \in \mathbb{U}.$$

**П.2.5. *Аксиома подстановки* $\mathbf{ZF_{4\varphi}}$:**
*произвольный взаимнооднозначный образ множества — снова множество:*

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)(\varphi(x, y)) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\forall\, a)(\exists\, b)((\exists\, s \in x)(\exists\, t)\varphi(s, t) \leftrightarrow t \in y).$$

В несколько сокращенной записи:

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)(\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \to y = z) \to \\ \to (\forall\, a)(\{v : (\exists\, u \in a)\varphi(u,v)\} \in \mathbb{U}).$$

Здесь $\varphi$ — формула ZFC, не содержащая свободных вхождений $a$. Отметим, что $\mathrm{ZF}_{4\varphi}$ является схемой для бесконечного набора аксиом, так как для каждой подходящей $\varphi \in$ (ZFC) формулируется своя аксиома. Тем не менее для краткости и единообразия говорят просто об аксиоме подстановки, имея в виду отмеченную ее особенность.

Сформулируем полезные следствия $\mathrm{ZF}_{4\varphi}$.

**П.2.6.** Пусть $\psi = \psi(z)$ — формула ZFC. Тогда для любого множества $x$ можно составить его подмножество, отбирая элементы $x$ со свойством $\psi$, т. е.

$$(\forall\, x)\{z \in x : \psi(x)\} \in \mathbb{U}.$$

Это утверждение — аксиома $\mathrm{ZF}_{4\varphi}$, где в качестве $\varphi$ фигурирует формула $\psi(u) \wedge (u = v)$. Приведенное положение часто именуют *аксиомами выделения* или *аксиомами свертывания*.

**П.2.7.** Применяя аксиому $\mathrm{ZF}_{4\varphi}$ для формулы

$$\varphi(u,v) := (u = \varnothing \to v = x) \wedge (u \neq \varnothing \to v = y)$$

множества $z := \mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$, мы убеждаемся в том, что неупорядоченная пара $\{x,y\}$ двух множеств (ср. 3.1.7) — снова множество. Последнее утверждение часто именуют *аксиомой неупорядоченной пары*.

**П.2.8. *Аксиома бесконечности* $\mathbf{ZF_5}$:**
*существует по крайней мере одно бесконечное множество:*

$$(\exists\, x)(\varnothing \in x \wedge (\forall\, y)(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)).$$

Тем самым существует такое множество $x$, что $\varnothing \in x$, $\{\varnothing\} \in x$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in x$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \in x$ и т. д. Внимательный читатель заметит некоторую щель между формальной и неформальной формулировками аксиомы бесконечности. Бдительный читатель может заподозрить злоупотребление термином «бесконечность». На самом деле, аксиома бесконечности относится к основополагающим доктринам канторианства. В этой связи некоторое таинство здесь неизбежно и должно приветствоваться.

**П.2.9. *Аксиома фундирования* $\mathbf{ZF_6}$:**
*всякое непустое множество имеет непересекающийся со всем множеством элемент*

$$(\forall\, x)(x \neq \varnothing \to (\exists\, y)(y \in x \wedge y \cap x = \varnothing)).$$

Применив аксиому $\mathrm{ZF}_6$ к одноэлементному множеству $x := \{y\}$, получим $y \notin y$. Несколько забегая вперед, отметим, что по аналогичной причине (на этот раз нужно взять $x := \{x_1, \dots, x_n\}$) не существуют бесконечно убывающие $\in$-последовательности $x_1 \ni x_2 \ni \dots \ni x_n \ni \dots$.

**П.2.10. *Аксиома выбора* AC:**
*произведение непустого множества непустых множеств не пусто:*

$$(\forall\, x)(\exists\, f)(\mathrm{Fnc}\,(f) \wedge x \subset \mathrm{dom}(f)) \wedge (\forall\, y \in x) y \neq \varnothing \to f(y) \in y.$$

Функцию $f$ в описанной ситуации называют *выбирающей* для $x$.

Известно большое количество утверждений, эквивалентных аксиоме выбора в рамках рассматриваемой нами теории, см. [159]. Приведем формулировки двух наиболее популярных из них.

***Теорема Цермело*** (принцип полного упорядочения). *Всякое множество может быть вполне упорядочено.*

***Лемма Куратовского — Цорна*** (принцип максимальности). *Пусть $M$ — (частично) упорядоченное множество, в котором любое линейное упорядоченное множество имеет верхнюю границу. Тогда любой элемент $M$ мажорируется некоторым максимальным элементом.*

**П.2.11.** На основе приведенной аксиоматики складывается точное представление о классе всех множеств как об «универсуме фон Неймана». Исходным объектом построения мыслится пустое множество. Элементарный шаг введения новых множеств из уже построенных состоит в формировании объединения множеств подмножеств имеющихся множеств. Трансфинитное повторение таких шагов исчерпывает класс всех множеств. Классы (в «платонистском» стиле) можно мыслить как внешние объекты по отношению к элементам универсума фон Неймана. Класс в этом понимании есть совокупность множеств, удовлетворяющих теоретико-множественному свойству, описываемому формулой теории Цермело — Френкеля. По-

этому класс, состоящий из элементов некоторого множества (по аксиоме подстановки) сам является множеством. Формально корректное определение универсума фон Неймана требует предварительного знакомства с понятиями ординала и кумулятивной иерархии. Ниже приводим необходимый минимум сведений об этих объектах. Более подробное изложение дано в параграфе 1.5.

**П.2.12.** Множество $x$ называется *транзитивным*, если каждый элемент $x$ является подмножеством $x$. Множество $x$ называют *ординалом*, если само $x$ транзитивно и линейно упорядочено отношением $\in$. В символической записи эти определения выглядят так:

$$\mathrm{Tr}\,(x) := (\forall\, y \in x)(y \subset x) := \ x \text{ — «транзитивное множество»};$$
$$\mathrm{Ord}\,(x) := \mathrm{Tr}\,(x) \wedge (\forall\, y \in x)(\forall\, z \in x)$$
$$(y \in z \vee z \in y \vee z = y) := \ \text{«}x\text{ — ординал»}.$$

Ординалы принято обозначать малыми греческими буквами. Каждый ординал рассматривается с естественным отношением порядка: для $\beta$, $\gamma \in \alpha$ полагают $\gamma \leq \beta \leftrightarrow \gamma \in \beta \vee \gamma = \beta$. Класс всех ординалов обозначается символом On, так что $\mathrm{On} := \{\alpha : \mathrm{Ord}\,(\alpha)\}$.

Ординал является *вполне упорядоченным множеством*, т. е. он линейно упорядочен и любое его подмножество имеет наименьший элемент (последнее обеспечено аксиомой фундирования). Несложно убедиться, что

$$\alpha \in \mathrm{On} \wedge \beta \in \mathrm{On} \to \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha;$$
$$\alpha \in \mathrm{On} \wedge \beta \in \alpha \to \beta \in \mathrm{On};$$
$$\alpha \in \mathrm{On} \to \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{On};$$
$$\mathrm{Ord}\,(\varnothing).$$

Ординал $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ называют *сыном* $\alpha$. Ординал, являющийся сыном другого ординала, называют *последующим*. Ординал, не равный нулю и не являющийся последующим, называют *предельным*. Приняты обозначения:

$$K_{\mathrm{I}} := \{\alpha \in \mathrm{On} : (\exists\, \beta)\ \ \mathrm{Ord}\,(\beta) \wedge \alpha = \beta + 1 \vee \alpha = \varnothing\};$$
$$K_{\mathrm{II}} := \{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha \text{ — предельный ординал}\};$$
$$0 := \varnothing, \quad 1 := 0 + 1, \quad 2 := 1 + 1, \ldots,$$
$$\omega := \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Сейчас самый подходящий момент напомнить, что *континуум*, о котором мы так часто говорим в этой книге, это просто множество подмножеств $\omega$.

**П.2.13.** Отметим, что в ZFC можно доказать возможность использования общеизвестных (на «наивном» уровне) свойств ординалов, в частности законность трансфинитной индукции и рекурсивных определений. Приведем определение универсума фон Неймана, сознательно опуская пока формальное обоснование законности подобных определений. Для каждого ординала $\alpha$ положим

$$V_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{P}(V_\beta),$$

т. е. $V_\alpha = \{x : (\exists\, \beta)\ (\beta \in \alpha \wedge x \subset V_\beta)\}$. Подробнее говоря,

$$V_0 := \varnothing;$$
$$V_{\alpha+1} := \mathscr{P}(V_\alpha);$$
$$V_\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} V_\alpha, \quad \text{если} \quad \beta \in K_{\mathrm{II}}.$$

Полагают

$$\mathbb{V} := \bigcup_{\alpha\in \mathrm{On}} V_\alpha.$$

Принципиальным фактом, обеспеченным аксиомой фундирования, является теорема

$$(\forall\, x)(\exists\, \alpha)(\mathrm{Ord}\,(\alpha) \wedge x \in V_\alpha),$$

которую записывают в виде $\mathbb{U} = \mathbb{V}$ и выражают словами: «*класс всех множеств — это универсум фон Неймана*» или «*любое множество вполне фундировано*».

Графически универсум фон Неймана $\mathbb{V}$ можно представлять себе как перевернутую пирамиду, вершиной которой служит пустое множество. Другие «нижние» этажи пирамиды таковы:

$$V_0 = \varnothing,\ V_1 = \{\varnothing\},\ V_2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots,$$
$$V_\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}, \dots .$$

**П.2.14.** Реализация универсума $\mathbb{V}$ в виде «*кумулятивной иерархии*» множеств $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$ позволяет с каждым множеством $x$ связать его ранг:

$$\mathrm{rank}(x) := \text{ наименьший ординал } \alpha \text{ такой, что } x \in V_{\alpha+1}.$$

Легко убедиться, что

$$a \in b \to \mathrm{rank}(a) < \mathrm{rank}(b);$$
$$\mathrm{Ord}\,(\alpha) \to \mathrm{rank}(\alpha) = \alpha;$$
$$(\forall\, x)(\forall\, y)\,\mathrm{rank}(y) < \mathrm{rank}(x) \to (\varphi(y) \to \varphi(x)) \to (\forall\, x)\varphi(x),$$

где $\varphi$ — формула ZFC. Последнюю теорему (точнее, схему теорем) называют *принципом индукции по рангу.*

**П.2.15.** Примечания.

**(1)** Первая (наряду с теорией типов Б. Рассела) система аксиом для теории множеств, предложенная Е. Цермело в 1908 г., совпадает, по существу, с $\mathrm{ZF}_1$–$\mathrm{ZF}_3$, $\mathrm{ZF}_5$, П.2.5, П.2.6. Аксиомы экстенсиональности $\mathrm{ZF}_1$ и объединения $\mathrm{ZF}_2$ предложены ранее Г. Фреге (1883 г.) и Г. Кантором (1899 г.) соответственно. Идея аксиомы бесконечности $\mathrm{ZF}_5$ восходит к Р. Дедекинду.

**(2)** Аксиома выбора AC неявно использовалась, по-видимому, давно, но замечена она Дж. Пеано в 1890 г. и Б. Леви в 1902 г. Эта аксиома введена Е. Цермело в 1904 г. и была наиболее оспариваемой в течение многих лет. Аксиома выбора лежит в основе многих важных фрагментов современной математики. Неудивительно, что в настоящее время она принята большинством ученых. Обсуждение места и роли аксиомы выбора в различных разделах математики можно найти в [19, 52, 105, 159, 180].

**(3)** Теория множеств Цермело оформилась в начале 20-х годов XX века. В тот период завершилась формализация языка теории множеств, позволившая уточнить расплывчатое описание свойств, допускаемых в аксиоме выделения. В то же время аксиомы Цермело не дают в качестве следствия утверждение Кантора о том, что взаимнооднозначный образ множества есть множество. Указанный пробел устранили А. Френкель в 1922 г. и Т. Сколем в 1923 г., предложив варианты аксиомы подстановки. Этот момент можно считать рождением теории ZFC.

**(4)** Аксиому фундирования $ZF_6$, по существу, предложил Дж. фон Нейман в 1925 г. Эта аксиома не зависит от остальных аксиом ZFC.

**(5)** Система аксиом ZFC является бесконечной, как это отмечалось в П.2.4. Отсутствие конечной аксиоматизируемости ZFC установил Р. Монтэгю в 1960 г., см. [13, 105, 150, 180].

### П.3. Категории и функторы

Наряду с теорией множеств, теория категорий является универсальным языком современной математики. В рамках данной книги категории и функторы используются как удобное средство, позволяющее однообразно смотреть на важные математические конструкции и рассуждения, формулировать общие свойства различных структур. Ниже эскизно излагаются основные понятия теории категорий. Подробности можно найти в [7, 108, 187].

**П.3.1.** Категория $\mathscr{K}$ состоит из классов $\operatorname{Ob}\mathscr{K}$, $\operatorname{Mor}\mathscr{K}$ и $\mathrm{Com}$, называемых соответственно *классом объектов*, *классом морфизмов* и *законом композиции категории* $\mathscr{K}$. При этом должны быть выполнены условия:

**(1)** существуют отображения $\mathscr{D}$ и $\mathscr{R}$ из $\operatorname{Mor}\mathscr{K}$ в $\operatorname{Ob}\mathscr{K}$, для которых класс

$$H_{\mathscr{K}}(a,b) := \{\alpha \in \operatorname{Mor}\mathscr{K} : \mathscr{D}(\alpha) = a \wedge \mathscr{R}(\alpha) = b\},$$

называемый *классом морфизмов из* $a$ *в* $b$, является множеством для любых $a, b \in \operatorname{Ob}\mathscr{K}$;

**(2)** $\mathrm{Com}$ — ассоциативная частичная бинарная операция на $\operatorname{Mor}\mathscr{K}$, причем

$$\operatorname{dom}(\mathrm{Com}) = \\ = \big\{(\alpha,\beta) \in (\operatorname{Mor}\mathscr{K}) \times (\operatorname{Mor}\mathscr{K}) : \mathscr{D}(\beta) = \mathscr{R}(\alpha)\big\};$$

**(3)** для каждого объекта $a \in \operatorname{Ob}\mathscr{K}$ существует морфизм $1_a$, называемый *тождественным морфизмом объекта* $a$, такой, что $\mathscr{D}(1_a) = a = \mathscr{R}(1_a)$, а кроме того, $\mathrm{Com}(1_a, \alpha) = \alpha$ при $\mathscr{R}(\alpha) = a$ и $\mathrm{Com}(\beta, 1_a) = \beta$ при $\mathscr{D}(\beta) = a$.

Ясно, что класс $\operatorname{Mor}\mathscr{K}$ есть объединение множеств $H_{\mathscr{K}}(a,b)$, где $a$ и $b$ пробегают $\operatorname{Ob}\mathscr{K}$, причем множества $H_{\mathscr{K}}(a,b)$ и $H_{\mathscr{K}}(c,d)$ не пересекаются при $(a,b)\neq(c,d)$. Для любых $\alpha,\beta\in\operatorname{Mor}\mathscr{K}$ пишут обычно $\beta\circ\alpha$ или $\beta\alpha$ вместо $\operatorname{Com}(\alpha,\beta)$. Соотношение $\alpha\in H_{\mathscr{K}}(a,b)$ часто записывают в виде $\alpha : a\to b$ и выражают словами «$\alpha$ — морфизм из объекта $a$ в объект $b$».

**П.3.2.** Категория $\mathscr{H}$ называется *подкатегорией категории* $\mathscr{K}$, если выполнены условия:

**(1)** $\operatorname{Ob}\mathscr{H}\subset\operatorname{Ob}\mathscr{K}$ и $H_{\mathscr{H}}(a,b)\subset H_{\mathscr{K}}(a,b)$ для любой пары объектов $a,b\in\operatorname{Ob}\mathscr{H}$;

**(2)** композиция категории $\mathscr{H}$ есть ограничение композиции категории $\mathscr{K}$ на класс $(\operatorname{Mor}\mathscr{H})\times(\operatorname{Mor}\mathscr{H})$.

Понятно, что при этом тождественный морфизм любого объекта $a\in\operatorname{Ob}\mathscr{H}$ совпадает с тождественным морфизмом этого же объекта в категории $\mathscr{K}$.

Подкатегория $\mathscr{H}$ категории $\mathscr{K}$ называют *полной,* в случае выполнения равенства $H_{\mathscr{K}}(a,b)=H_{\mathscr{H}}(a,b)$ для любых $a,b\in\operatorname{Ob}\mathscr{H}$.

*Произведение* $\mathscr{H}\times\mathscr{K}$ категорий $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ определяется следующими соотношениями:

$$\operatorname{Ob}\mathscr{H}\times\mathscr{K}:=(\operatorname{Ob}\mathscr{H})\times(\operatorname{Ob}\mathscr{K});$$
$$H_{\mathscr{H}\times\mathscr{K}}((a,b),(a',b')):=H_{\mathscr{H}}(a,a')\times H_{\mathscr{K}}(b,b'),$$
$$(\alpha',\beta')\circ(\alpha,\beta):=(\alpha'\alpha,\beta'\beta),$$

где $a,a'\in\operatorname{Ob}\mathscr{H}$; $b,b'\in\operatorname{Ob}\mathscr{K}$; $\alpha,\alpha'\in\operatorname{Mor}\mathscr{H}$ и $\beta,\beta'\in\operatorname{Mor}\mathscr{K}$.

Категория $\mathscr{K}^{\circ}$, *дуальная* к произвольной категории $\mathscr{K}$, имеет те же объекты и морфизмы, что и $\mathscr{K}$. Закон композиции $\operatorname{Com}^{\circ}$ категории $\mathscr{K}^{\circ}$ вводится соотношением $(\alpha,\beta,\gamma)\in\operatorname{Com}^{\circ}\leftrightarrow(\beta,\alpha,\gamma)\in\operatorname{Com}$. На практике классы объектов и морфизмов могут пересекаться (так зачастую и происходит). Однако, не теряя общности, можно считать эти классы дизъюнктными, добавляя в случае необходимости метку каждому объекту категории. Мы придерживаемся этого соглашения во всей книге.

**П.3.3.** Рассмотрим категории $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$. *Ковариантный функтор* $\mathscr{F}:\mathscr{H}\to\mathscr{K}$ из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{K}$ — это отображение, область определения которого составлена из всех объектов и морфизмов категории $\mathscr{H}$ и которое удовлетворяет следующим условиям:

**(1)** если $\alpha : a \to b$ — морфизм категории $\mathscr{H}$, то $\mathscr{F}(\alpha) : \mathscr{F}(a) \to \mathscr{F}(b)$;
**(2)** если $\alpha : a \to b$ и $\beta : b \to c$ — морфизмы категории $\mathscr{H}$, то $\mathscr{F}(\beta\alpha) = \mathscr{F}(\beta)\mathscr{F}(\alpha)$;
**(3)** если $a \in \operatorname{Ob}\mathscr{H}$, то $\mathscr{F}(1_a) = 1_{\mathscr{F}(a)}$.

Итак, для каждой пары объектов $a, b \in \operatorname{Ob}\mathscr{H}$ функтор $\mathscr{F}$ определяет отображение $\mathscr{F}_{a,b} : H_{\mathscr{H}}(a,b) \to H_{\mathscr{K}}(a,b)$. Если $\mathscr{F}_{a,b}$ инъективно (сюръективно) при любых $a$ и $b$, то функтор $\mathscr{F}$ называют унивалентным (полным). Ковариантный функтор из $\mathscr{H}^\circ$ в $\mathscr{K}$ (или из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{K}^\circ$) называют контравариантным функтором из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{K}$.

**П.3.4.** Пусть $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ — категории. Рассмотрим ковариантные функторы $\mathscr{F} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ и $\mathscr{G} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$. *Естественным преобразованием* $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ функтора $\mathscr{F}$ в функтор $\mathscr{G}$ называют отображение $\varphi : \operatorname{Ob}\mathscr{H} \to \operatorname{Mor}\mathscr{K}$ такое, что

**(1)** $\varphi_a := \varphi(a) \in H_{\mathscr{K}}(\mathscr{F}(a), \mathscr{F}(b))$ для любого $a \in \operatorname{Ob}\mathscr{H}$;
**(2)** для любого морфизма $\alpha : a \to b$ категории $\mathscr{H}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(a) \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[d, "\mathscr{F}(\alpha)"'] & \mathscr{G}(a) \arrow[d, "\mathscr{G}(\alpha)"] \\
\mathscr{F}(b) \arrow[r, "\varphi_b"'] & \mathscr{G}(b)
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $\mathscr{G}(\alpha)\varphi_a = \varphi_b\mathscr{F}(\alpha)$. В этой ситуации говорят также, что $\varphi$ — *функторный морфизм.*

Естественное преобразование $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ называют *естественной эквивалентностью функторов* $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ или *функторным изоморфизмом* между $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$, если $\varphi_a$ есть изоморфизм в категории $\mathscr{K}$ для каждого $a \in \operatorname{Ob}\mathscr{H}$. В этом случае отображения $\varphi_a^{-1}$ образуют естественное преобразование $\mathscr{G}$ в $\mathscr{F}$, которое обозначим через $\varphi^{-1}$. Напомним, что морфизм $\alpha : a \to b$ называется *изоморфизмом,* если существует такой морфизм $\beta : b \to a$, что $\alpha\beta = 1_b$ и $\beta\alpha = 1_a$.

**П.3.5.** Категории $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ называют *эквивалентными*, если существуют функторы $\mathscr{F} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ и $\mathscr{G} : \mathscr{K} \to \mathscr{H}$ такие, что функтор $\mathscr{F}\mathscr{G}$ естественно изоморфен тождественному функтору $I_{\mathscr{H}}$, а функтор $\mathscr{G}\mathscr{F}$ естественно изоморфен тождественному функтору $I_{\mathscr{K}}$. При этом говорят, что функторы $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ *устанавливают эквивалентность категорий* $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$.

Отношение эквивалентности между категориями рефлексивно, симметрично и транзитивно.

**П.3.6.** *Категории $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ эквивалентны в том и только в том случае, если существует полный унивалентный функтор $\mathscr{F}$ из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{K}$ такой, что для каждого объекта $b \in \operatorname{Ob}\mathscr{K}$ существует изоморфный ему объект вида $\mathscr{F}(a)$, где $a \in \operatorname{Ob}\mathscr{H}$.*

**П.3.7.** Возьмем функторы $\mathscr{F} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ и $\mathscr{G} : \mathscr{K} \to \mathscr{H}$. Сопоставим этим функторам два новых функтора $H^{\mathscr{F}}$ и $H_{\mathscr{G}}$ из категории $\mathscr{H}^\circ \times \mathscr{K}$ в категорию множеств и отображений. Именно, для любых $a \in \operatorname{Ob}\mathscr{H}$, $b \in \operatorname{Ob}\mathscr{K}$, $\alpha \in H_{\mathscr{H}}(a, a')$, $\beta \in H_{\mathscr{K}}(b, b')$ положим

$$
H^{\mathscr{F}}(a,b) := H_{\mathscr{K}}(\mathscr{F}(a), b),\ H_{\mathscr{G}}(a,b) := H_{\mathscr{H}}(a, \mathscr{G}(b)),
$$
$$
H^{\mathscr{F}}(\alpha,\beta) : f \to \beta f \mathscr{F}(\alpha),\ H_{\mathscr{G}}(\alpha,\beta) : g \to \mathscr{G}(\beta) g \alpha,
$$

где $f \in H_{\mathscr{K}}(\mathscr{F}(\alpha), b)$ и $g \in H_{\mathscr{H}}(a, \mathscr{G}(b))$.

Говорят, что *функторы $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ составляют сопряженную пару,* если функторы $H^{\mathscr{F}}$ и $H_{\mathscr{G}}$ изоморфны. При этом $\mathscr{F}$ называют *левым сопряженным* к $\mathscr{G}$, а $\mathscr{G}$ — *правым сопряженным* к $\mathscr{F}$. Изоморфизм $\varphi : H^{\mathscr{F}} \to H_{\mathscr{G}}$ называют *сопряжением,* а обратный изоморфизм $\varphi^{-1}$ — *косопряжением.*

**П.3.8.** Пусть $\mathscr{K}$ — подкатегория категории $\mathscr{H}$. Объект в $b \in \operatorname{Ob}\mathscr{K}$ называется *$\mathscr{K}$-рефлектором* объекта $a \in \operatorname{Ob}\mathscr{H}$, если существует такой морфизм $\varphi : a \to b$, что всякий морфизм $\alpha : a \to c$, $c \in \operatorname{Ob}\mathscr{K}$, представим в виде $\alpha = \varphi\beta$ для однозначно определенного морфизма $\beta : b \to c$. Подкатегорию $\mathscr{K}$ называют *рефлективной,* если для каждого объекта категории $\mathscr{H}$ существует $\mathscr{K}$-рефлектор.

**П.3.9.** Подкатегория $\mathscr{K}$ категории $\mathscr{H}$ является рефлективной в том и только в том случае, если функтор тождественного вложения $\mathscr{K} \to \mathscr{H}$ обладает правым сопряженным функтором $\mathscr{R} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$.

Функтор $\mathscr{R}$ называют *$\mathscr{K}$-рефлектором категории $\mathscr{H}$.*

**П.3.10.** В качестве примера рассмотрим *категорию множеств* Sets. Объектами категории Sets служат всевозможные множества, а морфизмами — произвольные отображения множеств. Композиция морфизмов — обычная композиция отображений. Для $f \in \operatorname{Mor}\mathrm{Sets}$ множества $\mathscr{D}(f)$ и $\mathscr{R}(f)$ — соответственно область определения и

область значений отображения $f$. Морфизм $1_a$ — тождественное отображение множества $a$.

Разнообразные примеры категорий возникают как *подкатегории структуризованных множеств*.

Объектами такой подкатегории являются множества, наделенные некоторой структурой $\sigma$ (включающей алгебраические операции, отношения, норму, топологию и т. п.), а морфизмами — отображения, в определенном смысле сохраняющие структуру $\sigma$. Разумеется, Sets — категория структуризованных множеств с пустой структурой. Полезно рассмотреть и более широкую *категорию множеств* и *соответствий* $\mathrm{Sets}_*$. Классы объектов категорий Sets и $\mathrm{Sets}_*$ совпадают, морфизмами же в категории $\mathrm{Sets}_*$ служат всевозможные соответствия. Для соответствия $\Phi := (F, X, Y)$ положим $\mathscr{D}(\Phi) := X$ и $\mathscr{R}(\Phi) := Y$. Композиция соответствий ассоциативна, причем $\Psi \circ \Phi$ существует в том и только в том случае, когда $\mathscr{R}(\Phi) = \mathscr{D}(\Psi)$. Тождественный морфизм на множестве $A$ — тождественное отображение множества $A$. Итак, $\mathrm{Sets}_*$ — категория, а Sets — ее подкатегория.

**П.3.11.** Примечания.

Категории и функторы были введены в 1945 году С. Маклейном и С. Эйленбергом в связи с исследованиями по гомологической алгебре. В последующие два-три десятилетия теория категорий вышла далеко за пределы алгебраической топологии и стала играть существенную роль в различных разделах математики. Мы приведем лишь начальные понятия, необходимые для описания категорий и функторов булевозначного анализа. Более подробные сведения о категориях и функторах можно найти, в частности, в [7, 21, 108].

# Литература


**1.** Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.

**2.** Аюпов Ш. А. Йордановы операторные алгебры // Итоги науки и техники. Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1985.—Т. 27.—С. 67–97.

**3.** Аюпов Ш. А. Классификация и представления упорядоченных йордановых алгебр.—Ташкент: Фан, 1986.

**4.** Бейдар К. И., Михалев А. В. Ортогональная полнота и алгебраические системы // Успехи мат. наук.—1985.—Т. 40, вып. 6. —С. 79–115.

**5.** Биркгоф Г. Теория решеток.—М.: Наука, 1984.—566 с.

**6.** Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.— М.: Мир, 1982.—511 с.

**7.** Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. —М.: Мир, 1972.—260 с.

**8.** Бурбаки Н. Теория множеств.—М.: Мир, 1965.—455 с.

**9.** Бухвалов А. В. Порядково ограниченные операторы в векторных решетках и пространствах измеримых функций // Итоги науки и техники. Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1988.—Т. 26.—С. 3–63.

**10.** Бухвалов А. В., Векслер А. И., Гейлер В. А. Нормированные решетки // Итоги науки и техники. Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1980.—Т. 18.—С. 125–184.

**11.** Бухвалов А. В., Векслер А. И., Лозановский Г. Я. Банаховы решетки — некоторые банаховы аспекты теории // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, вып. 2.—С. 137–183.

**12.** Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М. Векторные решетки и интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1991.—214 с.

**13.** Ван Хао, Мак-Нотон Р. Аксиоматические системы теории множеств.—М.: Изд-во иностр. лит., 1963.—54 с.

**14.** Векслер А. И. О новой конструкции дедекиндова пополнения векторных структур и $l$-групп с делением // Сиб. мат. журн.—1969.—Т. 10, № 6.—С. 70–73.

**15.** Векслер А. И. Банаховы циклические пространства и банаховы структуры // Докл. АН СССР.—1973.—Т. 213, № 4.—С. 770–773.

**16.** Векслер А. И., Гейлер В. А. О порядковой и дизъюнктной полноте линейных полуупорядоченных пространств // Сиб. мат. журн.—1972.—Т. 13, № 1.—С. 43–51.

**17.** Владимиров Д. А. Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.—318 с.

**18.** Вулих Б. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. — М.: Физматгиз, 1961.—407 с.

**19.** Гёдель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 8, вып. 1.—С. 96–149.

**20.** Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики.—М.: Наука, 1979.—558 с.

**21.** Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики.—М.: Мир, 1983.—488 с.

**22.** Гордон Е. И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и $K$-пространства // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 237, № 4.—С. 773–775.

**23.** Гордон Е. И. $K$-пространства в булевозначных моделях теории множеств // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 258, № 4.—С. 777–780.

**24.** Гордон Е. И. К теоремам о сохранении соотношений в $K$-пространствах // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 5.—С. 55–65.

**25.** Гордон Е. И. Рационально полные полупервичные коммутативные кольца в булевозначных моделях теории множеств.—Горький: ВИНИТИ, № 3286-83Деп, 1983.—35 с.

**26.** Гордон Е. И. Элементы булевозначного анализа. Учебное пособие. —Горький: Горьковск. ун-т, 1991.

**27.** Гордон Е. И., Любецкий В. А. Некоторые применения нестандартного анализа в теории булевозначных мер // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 256, № 5.—С. 1037–1041.

**28.** Гордон Е. И., Морозов С. Ф., Булевозначные модели теории множеств.—Горький: Горьковск. ун-т, 1982.—72 с.

**29.** Гретцер Г. Общая теория решеток.—М.: Мир, 1982.—454 с.

**30.** Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.—С. 63–211.

**31.** Джонстон П. Т. Теория топосов.—М.: Наука, 1986.—438 с.

**32.** Диксмье Ж. $C^*$-алгебры и их представления. —М.: Наука, 1974.—399 с.

**33.** Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств.— Киев: Вища школа, 1980.—215 с.

**34.** Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика.—М.: Наука, 1987.—320 с.

**35.** Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений.—М.: Мир, 1976.—165 с.

**36.** Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.—М.: Мир, 1973.—150 с.

**37.** Кантор Г. Труды по теории множеств.—М.: Наука, 1985.—430 с.

**38.** Канторович Л. В. О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР.—1935.—Т. 4, № 1–2.—С. 11–14.

**39.** Канторович Л. В. К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 1, № 7.—С. 271–274.

**40.** Канторович Л. В. О некоторых классах линейных операций // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 3, № 1.—С. 9–13.

**41.** Канторович Л. В. Общие формы некоторых классов линейных операций // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 3, № 9.—С. 101–106.

**42.** Канторович Л. В. Об одном классе функциональных уравнений // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 4, № 5.—С. 211–216.

**43.** Канторович Л. В. О функциональных уравнениях // Труды ЛГУ.—1937.—Т. 3, № 7.—С. 17–33.

**44.** Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.

**45.** Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.

**46.** Кейслер Г., Чен Ч. Теория моделей.—М.: Мир, 1977.—614 с.

**47.** Клини С. Математическая логика.—М.: Мир, 1973.—480 с.

**48.** Колесников Е. В., Кусраев А. Г., Малюгин С. А. О мажорируемых операторах.—Новосибирск, 1988.—32 с. (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 26).

**49.** Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика.—М.: Мир, 1969.—417 с.

**50.** Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы.—М.: Наука, 1984.—320 с.

**51.** Король А. М., Чилин В. И. Измеримые операторы в булевозначной модели теории множеств // Докл. АН УзССР.—1989.— № 3.—С. 7–9.

**52.** Коэн П. Дж. Теория моделей и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1973.—347 с.

**53.** Коэн П. Дж. Об основании теории множеств // Успехи мат. наук.—1974.—Т. 29, вып. 5.—С. 169–176.

**54.** Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений.—М.: Физматгиз, 1962.

**55.** Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств.—М.: Мир, 1970.—416 с.

**56.** Кусраев А. Г. Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 267, № 5.—С. 1049–1052.

**57.** Кусраев А. Г. Некоторые применения теории булевозначных моделей в функциональном анализе.—Новосибирск, 1982.—42 с. — (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 5).

**58.** Кусраев А. Г. Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1312–1316.

**59.** Кусраев А. Г. О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа// Докл. АН СССР.—1983.—Т. 271, № 2.—С. 283–286.

**60.** Кусраев А. Г. Порядково непрерывные функционалы в булевозначных моделях теории множеств // Сиб. мат. журн.— 1984.—Т. 25, № 1.—С. 69–79.

**61.** Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.— Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.

**62.** Кусраев А. Г. О пространствах Банаха — Канторовича // Сиб. мат. журн.—1985.—Т. 26, № 2.—С. 119–126.

**63.** Кусраев А. Г. Числовые системы в булевозначных моделях теории множеств // VIII Всесоюз. конф. по мат. логике.—М.: 1986.—С. 99.

**64.** Кусраев А. Г. Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии в «целом» и математическому анализу. — Новосибирск: Наука, 1987.— С. 84–123.

**65.** Кусраев А. Г. О функциональной реализации $AW^*$-алгебр типа I // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32. № 3.—С. 78–88.

**66.** Кусраев А. Г. Булевозначный анализ и $JB$-алгебры // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 1.—С. 124–134.

**67.** Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.—С. 212–292.

**68.** Кусраев А. Г. Булевозначный анализ инволютивных банаховых алгебр.—Владикавказ: Изд-во Северо-Осетинского ун-та, 1996.—96 с.

**69.** Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Анализ субдифференциалов с помощью булевозначных моделей // Докл. АН СССР.— 1982.—Т. 265, № 5.—С. 1061–1064.

**70.** Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Записки по булевозначному анализу.—Новосибирск: Новосибирск. ун-т, 1984.—80 с.

**71.** Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.—344 с.; Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1994.—435 pp.

**72.** Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992.—270 с.; Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1995.—398 pp.

**73.** Кусраев А. Г., Малюгин С. А. Некоторые вопросы теории векторных мер.—Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.—190 с.

**74.** Кусраев А. Г., Малюгин С. А. Об атомическом разложении векторных мер // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 5.—С. 101–110.

**75.** Кусраев А. Г., Стрижевский В. З. Решеточно нормированные пространства и мажорируемые операторы // Исследования по геометрии и функциональному анализу.—Новосибирск: Наука, 1987.—С. 132–157.

**76.** Кутателадзе С. С. О технике спусков и подъемов // Оптимизация.—1983.—Вып. 33.—С. 17–43.

**77.** Кутателадзе С. С. Спуски и подъемы // Докл. АН СССР.—1983.—Т. 272, № 2.—С. 521–524.

**78.** Кутателадзе С. С. Циклические монады и их применения // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 1.—С. 100–110.

**79.** Кутателадзе С. С. Монады ультрафильтров и экстенсиональных фильтров // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 1.—С. 129–133.

**80.** Кутателадзе С. С. Об осколках положительных операторов // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 5.—С. 111–119.

**81.** Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа.—Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.—225 с.; Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1996. —276 pp.

**82.** Ламбек И. Кольца и модули.—М.: Мир, 1971.—279 с.

**83.** Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применения в математической экономике.—М.: Наука, 1985.—352 с.

**84.** Лузин Н. Н. Современное состояние теории функций действительного переменного // Труды Всероссийского съезда математиков в Москве 27 апреля–4 мая 1927 г.—М.-Л.: Главнаука, 1928.—С. 11–32.

**85.** Любецкий В. А. О некоторых алгебраических вопросах нестандартного анализа // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 280, № 1.—С. 38–41.

**86.** Любецкий В. А., Гордон Е. И. Булевы расширения равномерных структур // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам.—М.: Наука, 1983.—С. 82–153.

**87.** Любецкий В. А., Гордон Е. И. Вложение пучков в гейтинговозначный универсум и теоремы переноса // Докл. АН СССР.

—1983.—Т. 268, № 4.—С. 794–798.

**88.** Мальцев А. И. Алгебраические системы.—М.: Наука, 1970.—392 с.

**89.** Малыхин В. И. Новые моменты в общей топологии, связанные с форсингом // Успехи мат. наук.—1988.—Т. 43, вып. 4.—С. 83–94.

**90.** Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое.—М.: Сов. радио, 1979.—168 с.

**91.** Мендельсон Э. Введение в математическую логику.—М.: Наука, 1971.—320 с.

**92.** Мерфи Дж. $C^*$-алгебры и теория операторов.—М.: Факториал, 1997.—332 с.

**93.** Мостовский А. Конструктивные множества и их приложения. —М.: Мир, 1973.—256 с.

**94.** Наймарк М. А. Нормированные кольца.—М.: Наука, 1968. — 664 с.

**95.** фон Нейман Дж. Избранные труды по функциональному анализу. Т. 1, 2.—М.: Наука, 1987.

**96.** Новиков П. С. Избранные труды.—М.: Наука, 1973.—396 с.

**97.** Проблемы Гильберта.—М.: Наука, 1969.—240 с.

**98.** Расева Е., Сикорский Р. Метаматематика математики.—М.: Наука, 1972.—592 с.

**99.** Рисс Ф., Сёкефальви–Надь Б. Лекции по функциональному анализу.—М.: Мир, 1979.—587 с.

**100.** Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И. Упорядоченные алгебры.—Ташкент: Фан, 1983.

**101.** Сикорский Р. Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—376 с.

**102.** Соболев В. И. О полуупорядоченной мере множеств, измеримых функциях и некоторых абстрактных интегралах // Докл. АН СССР.—1953.—Т. 91, № 1.—С. 23–26.

**103.** Соловьёв Ю. П., Троицкий Е. В. $C^*$-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии.—М.: Факториал, 1996.—352 с.

**104.** Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1.— М.: Мир, 1977.— 688 с.

**105.** Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств.—М.: Мир, 1966.—555 с.

**106.** Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы.—М.: Мир, 1965.—342 с.

**107.** Фурман М. П. Логика топосов // Справочная книга по математической логике.—М.: Наука, 1983.—Ч. 4.—С. 241–277.

**108.** Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Ф. Основы теории категорий. —М.: Наука, 1974.—256 с.

**109.** Чёрч А. Введение в математическую логику. — М.: Изд-во иностр. лит., 1965.—488 с.

**110.** Чилин В. И. Частично упорядоченные бэровские инволютивные алгебры // Современные проблемы математики. Новейшие достижения.—М.: ВИНИТИ, 1985.—Т. 27.—С. 99–128.

**111.** Шенфильд Дж. Р. Математическая логика.—М.: Наука, 1975. —520 с.

**112.** Шенфильд Дж. Р. Аксиомы теории множеств // Справочная книга по математической логике.—М.: Наука, 1982.—Ч. 2.—С. 9–34.

**113.** Шотаев Г. Н. О билинейных операторах в решеточно нормированных пространствах // Оптимизация.—1986.—Вып. 37.—С. 38–50.

**114.** Alfsen E. M., Shultz F. W., and Störmer E. A Gel′fand — Neumark theorem for Jordan algebras // Adv. in Math.—1978.—V. 28, No. 1.—P. 11–56.

**115.** Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Locally Solid Riesz Spaces.—New York etc.: Academic Press, 1978.

**116.** Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Positive Operators.—New York: Academic Press, 1985.—367 pp.

**117.** Arens R. F. and Kaplansky I. Topological representation of algebras // Trans. Amer. Math. Soc.—1948.—V. 63, No. 3.— P. 457–481.

**118.** Arveson W. An Invitation to $C^*$-Algebras.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1976.—106 pp.

**119.** Bell J. L. Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—New York etc.: Clarendon Press, 1985.—xx+165 pp.

**120.** Bell J. L. and Slomson A. B. Models and Ultraproducts: an Introduction.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1969.—ix+322 pp.

**121.** Berberian S. K. Baer $*$-Rings.—Berlin: Springer-Verlag, 1972.—xii+296 pp.

**122.** Bigard A., Keimel K., and Wolfenstein S. Groupes et Anneaux Réticulés, —Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977.—xi+334 p. (Lecture Notes in Math., **608**.)

**123.** Blumenthal L. M. Theory and Applications of Distance Geometry. —Oxford: Clarendon Press, 1953.—xi+347 pp.

**124.** Boole G. An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.—New York: Dover, 1957.—xi+424 pp.

**125.** Boole G. Selected Manuscripts on Logic and Its Philosophy.—Basel: Birkhauser-Verlag, 1997.—xiv+236 pp. (Science Networks. Historical Studies, **20**.)

**126.** Burden C. W. and Mulvey C. J. Banach spaces in categories of sheaves // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 169–196. (Lecture Notes in Math., **753**.)

**127.** Ciesielski K., Set Theory for the Working Mathematician.—Cambridge, Cambridge University Press, 1997.—xi+236 p.

**128.** Dales H. and Woodin W. An Introduction to Independence for Analysts.—Cambridge: Cambridge University Press, 1987.—viii +242 pp.

**129.** Day M. Normed Linear Spaces.—New York and Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.—viii+211 pp.

**130.** Diestel J. and Uhl J. J. Vector Measures.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1977.—322 pp. (Mathematical Surveys; **15**).

**131.** Dinculeanu N. Vector Measures.—Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.—432 pp.

**132.** Dixmier J. $C^*$-Algebras.—Amsterdam, New York, and Oxford: North-Holland, 1977.—xiii+492 pp.

**133.** Dixmier J. Les Algebres d'Operateurs dans l'Espace Hilbertien (Algebres de von Neumann).—Paris: Gauthier–Villars, 1996.—x+ 367 pp.

**134.** Dragalin A. G. An explicit Boolean-valued model for nonstandard arithmetic // Publ. Math. Debrecen.—1993.—V. 42, No. 3–4.—P. 369–389.

**135.** Dunford N. and Schwartz J. T. Linear Operators. Vol. 1: General Theory.—New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.—xiv+858 pp.

**136.** Dunford N. and Schwartz J. T. Linear Operators. Vol. 2: Spectral Theory. Selfadjoint Operators in Hilbert Space.—New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.—P. i–x, 859–1923 and 1–7.

**137.** Dunford N. and Schwartz J. T. Linear Operators. Vol. 3: Spectral Operators.—New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.—P. i–xx and 1925–2592.

**138.** Eda K. A Boolean power and a direct product of abelian groups // Tsukuba J. Math.—1982.—V. 6, No. 2.—P. 187–194.

**139.** Eda K. On a Boolean power of a torsion free abelian group // J. Algebra.—1983.—V. 82, No. 1.—P. 84–93.

**140.** Ellis D. Geometry in abstract distance spaces // Publ. Math. Debrecen.— 1951.—V. 2.—P. 1–25.

**141.** Espanol L. Dimension of Boolean valued lattices and rings // J. Pure Appl. Algebra.—1986.—No. 42.—P. 223–236.

**142.** Foster A. L. Generalized 'Boolean' theory of universal algebras. I. Subdirect sums and normal representation theorems // Math. Z. —1953.—V. 58, No. 3.—P. 306–336.

**143.** Foster A. L. Generalized 'Boolean' theory of universal algebras. II. Identities and subdirect sums of functionally complete algebras // Math. Z.—1953.—V. 59, No. 2.—P. 191–199.

**144.** Fourman M. P. and Scott D. S. Sheaves and logic // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 302–401.

**145.** Georgescu G. and Voiculescu I. Eastern model theory for Boolean-valued theories // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1985.— No. 31.—P. 79–88.

**146.** Gödel K. What is Cantor's continuum problem // Amer. Math. Monthly.—1947.—V. 54, No. 9.—P. 515–525.

**147.** Goodearl K. R. Von Neumann Regular Rings.— London: Pitman, 1979.

**148.** Grayson R. J. Heyting-valued models for intuitionistic set theory // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 40.

**149.** Gutman A. E. Locally one-dimensional $K$-spaces and $\sigma$-distributive Boolean algebras // Siberian Adv. Math.—1995.—V. 5, No. 2. —P. 99–121.

**150.** Hallet M. Cantorian Set Theory and Limitation of Size.—Oxford: Clarendon Press, 1984.—xix+343 pp.

**151.** Halmos P. R. Lectures on Boolean Algebras.—Toronto, New York, and London: Van Nostrand, 1963.—147 pp.

**152.** Hanshe-Olsen H. and Störmer E. Jordan Operator Algebras.—Boston etc.: Pitman Publ. Inc., 1984.

**153.** Hernandez E. G. Boolean-valued models of set theory with automorphisms // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1986.—V. 32, No. 2.—P. 117–130.

**154.** Hoehle U. Almost everywhere convergence and Boolean-valued topologies / Topology, Proc. 5th Int. Meet., Lecce/Italy 1990, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. 29.—1992.—P. 215–227.

**155.** Hofstedter D. R. Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.—New York: Vintage Books, 1980.—778 pp.

**156.** Horiguchi H. A definition of the category of Boolean-valued models // Comment. Math. Univ. St. Paul.—1981.—V. 30, No. 2.—P. 135–147.

**157.** Horiguchi H. The category of Boolean-valued models and its applications // Comment. Math. Univ. St. Paul.—1985.—V. 34, No. 1.—P. 71–89.

**158.** Ionescu Tulcea A. and Ionescu Tulcea C. Topics in the Theory of Lifting.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1969.—190 pp.

**159.** Jech T. J. The Axiom of Choice.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1973.—xi+202 pp.

**160.** Jech T. J. Abstract theory of abelian operator algebras: an application of forcing // Trans. Amer. Math. Soc.—1985.—V. 289, No. 1.—P. 133–162.

**161.** Jech T. J. First order theory of complete Stonean algebras (Boolean-valued real and complex numbers) // Canad. Math. Bull.—1987.—T. 30, No. 4.—P. 385–392.

**162.** Jech T. J. Boolean-linear spaces // Adv. in Math.—1990.—V. 81, No. 2.—P. 117–197.

**163.** Jech T. J. Set Theory.—Berlin: Springer-Verlag, 1997.—634 pp.

**164.** Johnstone P. T. Stone Spaces.—Cambridge and New York: Cambridge University Press, 1982.—xxii+370 pp.

**165.** de Jonge E. and van Rooij A. C. M. Introduction to Riesz Spaces.—Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977.

**166.** Jordan P., von Neumann J., and Wigner E. On an algebraic generalization of the quantum mechanic formalism // Ann. Math.—1944.—V. 35.—P. 29–64.

**167.** Kadison R. V. and Ringrose J. R. Fundamentals of the Theory of Operator Algebras.—Vol. 1, 2.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. Vol. 3, 4.—Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 1991–1992.

**168.** Kaplansky I. Projections in Banach algebras // Ann. of Math. (2).—1951.—V. 53.—P. 235–249.

**169.** Kaplansky I. Algebras of type I // Ann. of Math. (2).—1952.—V. 56.—P. 460–472.

**170.** Kaplansky I. Modules over operator algebras // Amer. J. Math.—1953.—V. 75, No. 4.—P. 839–858.

**171.** Kramosil I. Comparing alternative definitions of Boolean-valued fuzzy sets // Kybernetika.—1992.—V. 28, No. 6.—P. 425–443.

**172.** Kusraev A. G. On Boolean valued convex analysis // Mathematische Optimiering. Theorie und Anwendungen. Wartburg/Eisenach, 1983, P. 106–109.

**173.** Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods for Kantorovich spaces // Siberian Adv. Math.—1992.—V. 2, No. 2.—P. 114–152.

**174.** Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods in geometric functional analysis // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.—1992.—V. 151.—P. 91–105.

**175.** Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Boolean-valued introduction to the theory of vector lattices // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.—1995.—V. 163.—P. 103–126.

**176.** Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods in functional analysis // Interaction Between Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability Theory.—New York: Marcel Deccer Inc., 1995.—P. 301–306.

**177.** Kutateladze S. S. Nonstandard tools for convex analysis//Math. Japon.—1996.—V. 43, No. 2.—P. 391–410.

**178.** Lacey H. E. The Isometric Theory of Classical Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—x+270 pp.

**179.** Larsen R. Banach Algebras, an Introduction.—New York: Dekker, 1973.—xi+345 pp.

**180.** Levy A. Basic Set Theory.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—xiv+391 pp.

**181.** Li N. The Boolean-valued model of the axiom system of GB // Chinese Sci. Bull.—1991.—V. 36, No. 2.—P. 99–102.

**182.** Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 1: Sequence Spaces. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977. — xiii+188 pp.

**183.** Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 2: Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—x+243 pp.

**184.** Locher J. L. (ed.), The World of M. C. Escher.—New York: Abradale Press, 1988.

**185.** Lowen R. Mathematics and fuzziness // Fuzzy Sets Theory and Applications (Louvain-la-Neuve, 1985), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., 177.—Reidel, Dordrecht, and Boston, 1986.—P. 3–38.

**186.** Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 1.—Amsterdam and London: North-Holland, 1971.—514 pp.

**187.** MacLane S. Categories for the Working Mathematician.—New York: Springer-Verlag, 1971.—ix+262 pp.

**188.** Melter R. Boolean valued rings and Boolean metric spaces // Arch. Math.—1964.—No. 15.—P. 354–363.

**189.** Milvay C. J. Banach sheaves // J. Pure Appl. Algebra.—1980.—V. 17, No. 1.—P. 69–84.

**190.** Molchanov I. S. Set-valued estimators for mean bodies related to Boolean models // Statistics 28.—1996.—No. 1.—P. 43–56.

**191.** Monk J. D. and Bonnet R. (eds.), Handbook of Boolean Algebras. Vol. 1–3.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1989.

**192.** Namba K. Formal systems and Boolean valued combinatorics // Southeast Asian Conference on Logic (Singapore, 1981), P. 115–132. Stud. Logic Found. Math., 111, Amsterdam and New York: North-Holland, 1983.

**193.** von Neumann J. Collected Works. Vol. 3: Rings of Operators.—New York, Oxford, London, and Paris: Pergamon Press, 1961.—ix+574 pp.

**194.** von Neumann J. Collected Works. Vol. 4: Continuous Geometry and Other Topics.—Oxford, London, New York, and Paris: Pergamon Press, 1962.—x+516 pp.

**195.** Nishimura H. An approach to the dimension theory of continuous geometry from the standpoint of Boolean valued analysis // Publ. Res. Inst. Math. Sci.—1984.—V. 20, No. 5.—P. 1091–1101.

**196.** Nishimura H. Boolean valued decomposition theory of states // Publ. Res. Inst. Math. Sci.—1985.—V. 21, No. 5.—P. 1051–1058.

**197.** Nishimura H. Some applications of Boolean-valued set theory to abstract harmonic analysis on locally compact groups // Publ. Res. Inst. Math. Sci.—1985.—V. 21, No. 1.—P. 181–190.

**198.** Nishimura H. Heyting valued set theory and fibre bundles // Publ. Res. Inst. Math. Sci.—1988.—V. 24, No. 2.—P. 225–247.

**199.** Nishimura H. On the absoluteness of types in Boolean valued lattices // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1990.—V. 36, No. 3.—P. 241–246.

**200.** Nishimura H. Some connections between Boolean valued analysis and topological reduction theory for $C^*$-algebras // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1990.—V. 36, No. 5.—P. 471–479.

**201.** Nishimura H. Boolean valued Dedekind domains // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1991.—V. 37, No. 1.—P. 65–76.

**202.** Nishimura H. Boolean valued Lie algebras // J. Symbolic Logic.—1991.—V. 56, No. 2.—P. 731–741.

**203.** Nishimura H. Foundations of Boolean-valued algebraic geometry // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1991.—V. 37, No. 5.—P. 421–438.

**204.** Nishimura H. Some Boolean valued commutative algebra // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1991.—V. 37, No. 4.—P. 367–384.

**205.** Nishimura H. On a duality between Boolean valued analysis and topological reduction theory //Math. Logic Quart.—1993.—V. 39, No. 1.—P. 23–32.

**206.** Nishimura H. On the duality between Boolean-valued analysis and reduction theory under the assumption of separability // Internat. J. Theoret. Phys.—1993.—V. 32, No. 3.—P. 443–488.

**207.** Nishimura H. A Boolean-valued approach to Gleason's theorem // Rep. Math. Phys.—1994.—V. 34, No. 2.—P. 125–132.

**208.** Ozawa M. Boolean valued analysis and type I $AW^*$-algebras // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.—1983.—V. 59A, No. 8.—P. 368–371.

**209.** Ozawa M. Boolean valued interpretation of Hilbert space theory // J. Math. Soc. Japan.—1983.—V. 35, No. 4.—P. 609–627.

**210.** Ozawa M. A classification of type I $AW^*$-algebras and Boolean valued analysis // J. Math. Soc. Japan.—1984.—V. 36, No. 4.—P. 589–608.

**211.** Ozawa M. A transfer principle from von Neumann algebras to $AW^*$-algebras // J. London Math. Soc. (2).—1985.—V. 32, No. 1.—P. 141–148.

**212.** Ozawa M. Nonuniqueness of the cardinality attached to homogeneous $AW^*$-algebras // Proc. Amer. Math. Soc.—1985.—V. 93.—P. 681–684.

**213.** Ozawa M. Boolean valued analysis approach to the trace problem of $AW^*$-algebras // J. London Math. Soc. (2).—1986.—V. 33, No. 2.—P. 347–354.

**214.** Ozawa M. Embeddable $AW^*$-algebras and regular completions // J. London Math. Soc.—1986.—V. 34, No. 3.—P. 511–523.

**215.** Ozawa M. Boolean-valued interpretation of Banach space theory and module structures of von Neumann algebras // Nagoya Math. J.—1990.—V. 117.—P. 1–36.

**216.** Nishimura H. Boolean valued and Stone algebra valued measure theories // Math. Logic Quart.—1994.—V. 40, No. 1.—P. 69–75.

**217.** Pedersen G. K. Analysis Now. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1995.—277 pp.

**218.** Pinus A. G. Boolean Constructions in Universal Algebras.—Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1993.—vii+350 pp.

**219.** Pirce R. S. Modules over commutative regular rings // Mem. Amer. Math. Soc.—1967.—No. 70.

**220.** Rema P. S. Boolean metrization and topological spaces // Math. Japon.—1964.—V. 9, No. 9.—P. 19–30.

**221.** Repicky M. Cardinal characteristics of the real line and Boolean-valued models // Comment. Math. Univ. Carolin.—1992.—V. 33, No. 1.—P. 184.

**222.** Rickart Ch. General Theory of Banach Algebras.—Princeton: Van Nostrand, 1960.—xi+394 pp.

**223.** Rosser J. B. Simplified Independence Proofs. Boolean Valued Models of Set Theory.—New York and London: Academic Press, 1969.—xv+217 pp.

**224.** Rudin W. Functional Analysis.—New York: McGraw-Hill, Inc., 1991.—xviii+424 pp.

**225.** Sakai S. $C^*$-algebras and $W^*$-algebras.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.—256 pp.

**226.** Saracino D. and Weispfenning V. On algebraic curves over commutative regular rings // Model Theory and Algebra (a Memorial Tribute to Abraham Robinson).—New York etc.: Springer-Verlag, 1969. (Lecture Notes in Math., **498**.)

**227.** Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—376 pp.

**228.** Schröder J. Das Iterationsverfahren bei allgemeinierem Abshtandsbegriff // Math. Z.—1956.—Bd. 66.—S. 111–116.

**229.** Schwarz H.-V. Banach Lattices and Operators.—Leipzig: Teubner, 1984.—208 pp.

**230.** Sikorskiĭ M. R. Some applications of Boolean-valued models to study operators on polynormed spaces // Sov. Math.—1989.—V. 33, No. 2.—P. 106–110.

**231.** Smith K. Commutative regular rings and Boolean-valued fields // J. Symbolic Logic.—1984.—V. 49, No. 1.—P. 281–297.

**232.** Solovay R. M. A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. of Math. (2).—1970.—V. 92, No. 2.—P. 1–56.

**233.** Solovay R. M. Real-valued measurable cardinals // Axiomatic Set Theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 13, Part 1, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967).—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1971.—P. 397–428.

**234.** Solovay R. and Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math.—1972.—V. 94, No. 2.—P. 201–245.

**235.** Spivak M. D. The Joy of TEX.— Providence: Amer. Math. Soc., 1990.—xv+309 pp.

**236.** Sunder V. S. An Invitation to Von Neumann Algebras.—New York etc.: Springer-Verlag, 1987.—171 pp.

**237.** Takesaki M. Theory of Operator Algebras. Vol. 1.—New York: Springer-Verlag, 1979.—vii+415 pp.

**238.** Takeuti G. Two Applications of Logic to Mathematics.—Tokyo, Princeton: Iwanami and Princeton Univ. Press, 1978.—137 pp.

**239.** Takeuti G. A transfer principle in harmonic analysis // J. Symbolic Logic.—1979.—V. 44, No. 3.—P. 417–440.

**240.** Takeuti G. Boolean valued analysis // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—P. 714–731. (Lecture Notes in Math., **753**.)

**241.** Takeuti G. Quantum set theory // Current Issues in Quantum Logic (Erice, 1979).—New York and London: Plenum Press, 1981. —P. 303–322.

**242.** Takeuti G. Boolean completion and $m$-convergence // Categorical Aspects of Topology and Analysis (Ottawa, Ont., 1980).—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1982.—P. 333–350. (Lecture Notes in Math., **915**.)

**243.** Takeuti G. $C^*$-algebras and Boolean valued analysis // Japan. J. Math. (N.S.).—1983.—V. 9, No. 2.—P. 207–246.

**244.** Takeuti G. Von Neumann algebras and Boolean valued analysis // J. Math. Soc. Japan.—1983.—V. 35, No. 1.—P. 1–21.

**245.** Takeuti G. and Titani S. Heyting-valued universes of intuitionistic set theory // Logic Symposia, Hakone 1979, 1980 (Hakone, 1979/1980).—Berlin and New York: Springer-Verlag, 1981.—P. 189–306. (Lecture Notes in Math., **891**.)

**246.** Takeuti G. and Titani S. Globalization of intuitionistic set theory // Ann. Pure Appl. Logic.—1987.—V. 33, No. 2.—P. 195–211.

**247.** Takeuti G. and Zaring W. M. Introduction to Axiomatic Set Theory.—New York etc.: Springer-Verlag, 1971.—348 pp.

**248.** Takeuti G. and Zaring W. M. Axiomatic Set Theory.—New York: Springer-Verlag, 1973.—238 pp.

**249.** Tkadlec J. Boolean orthoposets and two-valued Jauch-Piron states // Tatra Mt. Math. Publ.—1993.—No. 3.—P. 155–160.

**250.** Topping D. M. Jordan algebras of self-adjoint operators // Mem. Amer. Math. Soc.—1965.—Vol. 53.

**251.** Venkataraman K. Boolean valued almost periodic functions: existence of the mean // J. Indian Math. Soc. (N.S.).—1979.—V. 43, No. 1–4.—P. 275–283.

**252.** Venkataraman K. Boolean valued almost periodic functions on topological groups // J. Indian Math. Soc. (N.S.).—1984.—V. 48, No. 1–4.—P. 153–164.

**253.** Vopěnka P. General theory of $\bigtriangledown$-models // Comment. Math. Univ. Carolin.—1967.—V. 7, No. 1.—P. 147–170.

**254.** Vopěnka P. The limits of sheaves over extremally disconnected compact Hausdorff spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.—1967.—V. 15, No. 1.—P. 1–4.

**255.** Wright J. D. M. Vector lattice measures on locally compact spaces // Math. Z.—1971.—V. 120, No. 3.—P. 193–203.

**256.** Yamaguchi J. Boolean $[0, 1]$-valued continuous operators // Internat. J. Comput. Math.—1998.—V. 68, No. 1–2.—P. 71–79.

**257.** Yood B. Banach Algebras—an Introduction.—Ottawa: Carleton Univ., 1988.—174 pp.

**258.** Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 2.— Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—xi+720 pp.

**259.** Zaanen A. C. Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1997.—312 pp.

**260.** Zhang Jin-wen. A unified treatment of fuzzy set theory and Boolean valued set theory fuzzy set structures and normal fuzzy set structures // J. Math. Anal. Appl.—1980.—V. 76, No. 1.—P. 297–301.

**261.** Zhang Jin-wen. Between fuzzy set theory and Boolean valued set theory // Fuzzy Information and Decision Processes.—Amsterdam and New York: North-Holland, 1982.—P. 143–147.

# Предметный указатель

**Кусраев Анатолий Георгиевич**
**Кутателадзе Семён Самсонович**

Булевозначный анализ
Серия «Нестандартные методы анализа»

Ответственный редактор
академик *Ю. Г. Решетняк*

Редактор серии
*С. С. Кутателадзе*

Редактор издательства *И. И. Кожанова*

Издание подготовлено с использованием макро-пакета $\mathcal{AMS}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{AMS}$-TEX,
the American Mathematical Society'sTEX macro system.

Подписано в печать 15.12.03. Формат $60 \times 84\,{}^{1}/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 23,2. Уч.-изд. л. 23,3. Тираж 100 экз. Заказ № 77.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск.

Отпечатано на полиграфическом участке ИМ СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск.