АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
СИБИРСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

БЮЛЛЕТЕНЬ
СИБИРСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Вып. 1. 1990 г.

НОВОСИБИРСК 1990

Бюллетень Сибирского математического общества содержит оперативную информацию о работе и планах общества, о конференциях, школах, семинарах, представляющих интерес для членов общества. Также публикуются рецензии на книги, статьи, краткая информация о докладах на Сибирском математическом обществе, тезисы выступлений членов СМО.

055(02)5

В Правлении СМО

Правление Сибирского математического общества с прискорбием извещает о кончине I февраля 1990 г. члена Правления СМО известного математика академика АН КазССР А.Д.Тайманова.

На заседании Правления 16 февраля 1990 года обсуждались вопросы о создании Ассоциации математических обществ СССР и о чтениях Сибирского математического общества. Были приняты решения о поддержке идеи создания Ассоциации, и о проведении ежегодных чтений СМО. Чтения СМО в 1990 году предполагается п провести в октябре-ноябре 1990 года и посвятить их выдающемуся советскому ученому М.А.Лаврентьеву.

Очередное заседание СМО состоялось 23 февраля 1990 г. С докладом "Интегральная геометрия и решение задач анализа" выступил профессор С.Г.Гиндикин (Москва).

Ю.А.Дубинский (Москва)

Задача Коши в комплексной области

Изучается комплексная задача Коши

$$\frac{\partial^{s_i} u_i}{\partial t^{s_i}} + \sum_{j,k} A_{ij}^{k}(t,z,D)\frac{\partial^{k} u_i}{\partial t^{k}} = h_i(t,z), \qquad (I)$$

$$\frac{\partial^{k} u_i}{\partial t^{k}}(t_0,z) = \varphi_{ik}(z),\ z\in\mathbb{C}^n,\ 0\leqslant k\leqslant s_i-1, \qquad (2)$$

где $(u_1(t,z),\dots,u_N(t,z))$ – искомая система функций; $t\in G\subset\mathbb{C}^1$, $z\in\mathbb{C}^n$, $D=\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial z_n}\right)$. Операторы

$A_{ij}^{k}(t,z,D)$ суть дифференциальные или псевдодифференциальные операторы с аналитическими символами (см. [I]); $i,j=1,\dots,N$; s_i -натуральные числа.

Исследуются вопросы:

а) аналитическая теория задачи Коши (I), (2);

б) экспоненциальная теория задачи Коши (I), (2);

в) связь между аналитической и экспоненциальной теориями.

Основные результаты:

а) в классах аналитических функций, имеющих степенные особенности на конических поверхностях типа характеристического конуса, задача (I), (2) корректна тогда и только тогда, когда операторы A_{ij}^{k} удовлетворяют условиям Ковалевской -Лере-Волевича (см. [2]).

б) в классах экспоненциальных функций задача Коши (I), (2) корректна тогда и только тогда, когда символы операторов A_{ij}^{k} удовлетворяют условиям формально двойственным по Фурье к условиям Ковалевской-Лере-Волевича (см. [3]).

в) аналитическая и экспоненциальная теории находятся в отношении двойственности

$$*F:\ \boxed{\text{аналитич. теория}} \longrightarrow \boxed{\text{экспоненц. теория}}$$

где F -преобразование Фурье, $*$ – операция перехода к сопряженной задаче.

Библиографический список

I. Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. - 1986. - Т. 29. - С. I09-I50.

2. Докл. АН СССР. - 1989. - Т. 304, № 2.

3. Докл. АН СССР. - I988. - Т. 302, № 6.

С.Г.Гончаров, Ю.Л.Ершов, Д.И.Свириденко

О НЕКОТОРЫХ ТЕНДЕНЦИЯХ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

Математическая логика возникла как раздел математики, созданный из потребностей самой математики, и эта ее направленность сохраняется в настоящее время. Однако, возникнув как теория, пытающаяся разрешить проблемы оснований математики, математическая логика породила ряд важных прикладных разделов: теорию релейно-контактных схем и булевых функций, теорию алгоритмов и программирования, теорию автоматов и математическую лингвистику. В настоящее время важной областью приложений является создание ЭВМ пятого поколения, ориентированных на системы, работающие на языках тех предметных областей, в которых применяются эти машины. Математическим базисом для создания таких систем служат языки программирования высокого уровня, основу которых составляют декларативные конструкции, более естественные и понятные для человека в ряде случаев, чем языки императивов. В свою очередь, базисом таких языков являются языки логик предикатов и их семантики. Важная роль принадлежит в настоящее время математической логике, как математической и методологической основе современного математического моделирования.

В настоящее время в математической логике выделились следующие разделы: теория алгоритмов, теория доказательств и неклассические логики, теория моделей, теория множеств и основания математики.

В СССР существуют сильные коллективы, работающие в большинстве из этих фундаментальных направлений. Так, теория алгоритмов разрабатывается в Новосибирске, Алма-Ате, Казани, Тюмени, Ленинграде. Теория моделей - в Новосибирске, Алма-Ате, Кемерово. Теория доказательств, неклассические логики и другие формальные системы исследуются в Ленинграде, Москве, Новосибирске, Ижевске, Тбилиси, Калинине, Теория множеств и основания математики - в Ленинграде, Новосибирске, Москве.

В этом докладе будут указаны только те группы и направления работ, которые, на наш взгляд, являются перспективными.

Центральной проблемой математической логики является создание формальных систем для базисных конструкций и методов математики и изучение общих свойств этих конструкций, разработка общих методов работы с математическими моделями и исследование средств для описания их взаимодействия.

На решение проблем изучения важнейших конструкций и моделей в математике и направлены сложившиеся основные направления математической логики.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

В разработке математических вопросов теории алгоритмов необходимо выделить следующие ведущие направления, сложившиеся в мире:

I. Разработка обобщенных моделеи вычислимости и понятия алгоритма, а также различных сторон их проявлений.

Здесь сложились крупные исследовательские коллективы под руководством Д.Скотта, Я.Московакиса, Р.Ганди, Д.Барвайса; Ю.Л.Ершова, С.С.Гончарова; Д.Скордева; Д.Кросли; Д.Фенстада; Г.Крайзеля; Х.Расёвой и А.Скеврон.

Центральные вопросы - это формализация понятия алгоритма, исследование взаимодействия императивов и декларативов, последовательных и параллельных процессов в определении понятий алгоритмов.

2. Проблемы разрешимости теорий и вычислимые системы.

Исследования в этом направлении связано с разработкой общих методов исследования проблем разрешимости и неразрешимости элементарных теорий и алгоритмических проблем в формальных системах, а также проблемы существования вычислимых систем с заданными алгоритмическими свойствами.

В исследовании элементарных теорий решающие результаты получены в работах Ю.Л.Ершова, А.Тарского, Р.Воота, В.Ханфа, Р.Робинсона, Д.Бюхи. Созданы теория сильно конструктивных моделей на основе работ Ю.Л.Ершова, С.С.Гончарова, М.Г.Перетятькина, Л.Харрингтона, М.Морли, Т.Миллора. Разрабатывается теория алгоритмических размерностей С.С.Гончаровым, А.Нероудом, К.Эшем и В.А.Успенским.

Важное место занимают в теории алгоритмов исследования ну-

мерованных систем. Построена структурная теория для нумерованных множеств (Ю.Л.Ершов), разработаны вопросы строения для некоторых классов вычислимых нумераций (Ю.Л.Ершов, С.С.Гончаров, А.Н.Колмогоров, В.А.Успенский, С.С.Марченков, А.Лахлан, А.Пур-Эль и др.). Существенно продвинулись исследования в области конечно- и рекурсивно-определенных систем, которые служат, в частности, математической основой алгебраических типов данных в программировании. Здесь велись и ведутся работы под руководством П.С.Новикова, А.А.Маркова, С.И.Адяна, В.Буна, Р.МакКензи, А. Бергстры, С.С.Гончарова, Н.Г.Хисамиева, В.П.Добрицы. В изучении проблем разрешимости конкретных систем и классов получены важные продвижения в работах Ю.Л.Ершова по полям, Ван ден Дриса, Б.Дана по полям и полям с экспонентой, А.Л.Семеновым по обогащениям аддитивной арифметики, В.Ю.Ремесленниковым по n-степенным группам, а также по фрагментам элементарных теорий арифметики Ю.В.Матиясевичем и групп и полугрупп Г.Маканиным, по полям и другим системам группой сотрудников в г.Иркутске.

3. Степени разрешимости и различные типы сводимостей.

Исследования в этом направлении классической теории алгоритмов направляются работами Дж.Сакса, А.Лахлана, Р.Соара, Ю.Л. Ершова, А.И.Дегтева, М.Лермана, К.Джоуша, Э.Херрмана, В.Л.Селиванова.

В СССР существуют группы сотрудников, работающих в этих направлениях: в Казани под руководством М.М.Арсланова, в Тбилиси. Все эти исследования группируются в изучении алгебраических свойств полурешеток сводимостей, полурешеток р.п.множеств.

Исследования по указанным разделам требуют дальнейшей разработки. Исследования в области обобщенной теории вычислимости и вычислимых отношений высших типов являются основой для создания новых языков программирования, а работы в области элементарных теорий и конструктивных моделей уже стали математической основой для разработки абстрактных типов данных в языках программирования высокого типа и систем программирования, а также имеют важные приложения в алгебре. В области конструктивных моделей центральными являются проблемы существования классификации систем по алгоритмическим размерностям и алгоритмическая классификация устойчивых на этих системах отношений и конструкций над ними, классификация вычислимых нумераций.

Внимания заслуживают и исследования по классификации разрешимости на основе ослабления понятия вычислимости, ведущиеся в Новосибирске, США.

4. Оценка сложности алгоритмов привлекает в последнее время особо пристальное внимание. В СССР крупные результаты получены в коллективе О.Б.Лупанова, а также А.О.Слисенко, Оревковым, Григорьевым и Чистовым. Центральным здесь является изучение оценок алгоритмов в зависимости от свойств формальных систем.

5. Важное место в понимании вычислимости принадлежит исследованиям вычислимости на функционалах и отношениях высших типов и построению денотационных семантик для них. Эти результаты имеют самое непосредственное применение при создании и анализе языков программирования. Основные исследования здесь группируются вокруг работ Г.Крайзеля, Ю.Л.Ершова, Д.Скотта, Нумана, Д.Сакса, Л.Харрингтона, Р.Ганди.

ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ

В изучении теории моделей можно выделить два основных раздела: изучение взаимосвязи синтаксических и семантических свойств, которая включает классификационную проблематику и структурную теорию моделей и теоретико-модельную алгебру. Исследования в этой области тесно связаны с теорией алгоритмов в исследованиях алгоритмических свойств алгебраических систем и проблем размерности.

I. Общая теория моделей.

а) В последнее время интенсивно ведутся исследования, связанные с описанием спектральных функций и классификацией моделей элементарных теорий. За рубежом в этом направлении работает большая группа математиков во главе с С.Шелахом. Наиболее законченные результаты в этой области получены С.Шелахом, Ю.Заффе, Е.А.Палютиным и С.С.Старченко.

б) Крупные результаты по конечно-аксиоматизируемым теориям получены Ханфом, М.Г.Перетятькиным и Б.И.Зильбером.

в) Следует отметить прогресс в изучении тотально категоричных теорий (Б.И.Зильбер, Г.Черлин, Л.Харрингтон, А.Лахлан).

г) В последнее время интенсивно занимаются за рубежом проблемами Воота и Лахлана о числе счетных моделей полной теории

(С.Шелах, А.Лахлан, Л.Харрингтон, Маккай, Пилай).

д) Продолжает развиваться область, связанная с изучением однородных моделей (С.Шелах, А.Лахлан, Г.Черлин, К.Ж.Кудайбергенов).

е) Представляются перспективными исследования спектральных функций полных теорий в бесконечных языках. Из имеющихся здесь результатов отметим результаты С.Шелаха и Е.А.Палютина.

ж) В настоящее время имеются крупные результаты на стыке теории моделей и универсальной алгебры (Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин, С.Гивант, Баррис, МакКензи, Балдуин, В.А.Горбунов).

П. Теоретико-модельная алгебра.

Наиболее интересные результаты получены в следующих разделах данного направления. Эти разделы сохраняют также перспективу дальнейшего развития.

а) Элементарные теории полей (Ю.Л.Ершов, Ван-дер-Дрисс, А.Макинтайр).

б) Группы с рангом Морли (Б.И.Зильбер, Г.Черлин, А.Боровик, А.Макинтайр, Ласкар, Б.Пуаза).

в) Элементарные теории модулей (Баур, Гараваглия, Циглер).

г) Теории абелевых групп в бесконечных языках (С.Шелах, Эклеср, Мерлер, Е.А.Палютин).

Важным приложением методов теории моделей являются применение метода нестандартных моделей в различных разделах математики ("Нестандартный и булевозначный анализ", А.Г.Кусраев), нестандартные методы в теории вероятностей, методы ультрапроизведений и насыщенных моделей в алгебре. Исследования теоретико-модельных свойств полей с экспонентой тесно взаимосвязаны с исследованиями в области дифференциальных уравнений.

Важным представляется изучение связей теории конструктивных моделей с неклассическими логиками.

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЛОГИКИ И ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Центральными проблемами в этих исследованиях являются проблемы семантики и алгоритмических свойств различных формальных систем, разработка методов для построения формализаций различных понятий типа "проблема", "решение", "задача", "доказательство", "доказуемо", "истинно" и т.д. Важное место в их решении принадлежит исследованиям по проблемам разработки исчислений

высоких порядков, исчислений с бесконечными формулами и обобщенными кванторами, алгоритмических свойств логик и их связей с теорией многообразий и квазимногообразий, с теорией конструктивных моделей, построению теории моделей для интуиционистского исчисления, проблем классификации. Интенсивные исследования в этой области проводятся в настоящее время в СССР, США, Канаде, ФРГ, Англии, Нидерландах, Финляндии, Италии, Польше, Венгрии, Болгарии, Японии, Австрии, Новозеландии и других странах.

Особую роль среди многочисленных неклассических логик играет интуиционистская логика. На базе этой логики построены интуиционистская математика и конструктивная математика. В последние годы значительно возрос интерес к модальной логике ввиду выявившейся связи этой логики с логическими основами программирования. Эта связь обусловливает широкие перспективы применения методов и результатов модальной логики в развитии теории программирования. Например, широко известная динамическая логика Харела (США) может рассматриваться как обобщение модальной логики, а различные системы модальной логики - как фрагменты динамической логики. Системы алгоритмической логики построены и исследуются польскими логиками (Расевой, Сальвицким). В настоящее время география исследований по динамическим и алгоритмическим логикам очень широка.

В последнее десятилетие активно ведутся исследования по модальным логикам, связанные с доказуемостной интерпретацией модальностей. Перспективность исследований была выявлена Соловеем (Израиль), доказавшим полноту некоторых модальных систем, относительно такой интерпретации. Работы в этом направлении проводятся в Москве, Кишиневе, Италии, США.

Заметен рост интереса к неклассическим логикам также в виду их применений в теории множеств и нестандартном анализе, Имеется в виду метод вынуждения (форсинг) Коэна, примененный в доказательствах независимости в теории множеств. Оказалось, что он основан на той же идее, что и реляционная семантика Крипке для интуиционистской логики. Выявлена связь интуиционистской логики и теории топосов.

Реляционная семантика модальной и интуиционистской логик, построенная Крипке и Хинтиккой дала толчок к развитию теории моделей неклассических логик Фиттинг, Бовен, Плюшкявичюс, Габ-

здесь являются работы В.М.Глушкова, Х.Раеёвой и Сальвицкого, В.Тиле. Работают по этой проблематике отдельные исследователи и в СССР: Москва, Алма-Ата, Переяславль-Залесский, Вильнюс, Новосибирск.

На наш взгляд, основные исследования в математической логике применительно к программированию должны быть сосредоточены на следующих проблемах:

I. Разработка новых моделей вычислимости, могущих составить научную основу как перспективных систем спецификации и программирования, так и вычислительных устройств новых поколений.

2. Разработка языков спецификаций на базе теории формального иерархического языка, включающего в себя как дескриптивные и императивные, так и декларативные конструкции.

3. Изучение алгоритмической сложности в конкретных системах на базе теории алгоритмов. Разработка общих способов выделения из классов систем подклассов с быстро работающими алгоритмами и включающими в себя все системы из практически интересного класса систем.

4. Исследование соответствия между спецификацией конструкции и самой конструкцией (между спецификацией и программой, описанием и моделью). Разработка на базе теории позитивных и конструктивных моделей, методов абстрактных типов данных.

5. Разработка прикладной логики как методологической основы современных методов математического моделирования.

6. Создание формальных систем для базисных конструкций и методов математики и изучение общих свойств этих конструкций. Разработка общих методов работы с математическими моделями и исследование их взаимодействий.

Д.М.Смирнов

МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР И УСЛОВИЯ МАЛЬЦЕВА

Многообразия алгебр могут быть полностью классифицированы по их теориям Мальцева (кратко S -теориям).

S -теория многообразия $\mathfrak{V}$ состоит из строгих условий Мальцева, выполнимых в этом многообразии. Каждое такое условие представляет собой конечную конъюнкцию равенства

$$(M)\quad p_1 = q_1 \,\&\, \ldots \,\&\, p_k = q_k ,$$

в которой $p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k$ - термы, составленные при помощи каких-либо функциональных символов $f_1, \ldots, f_m$ и переменных $x_1, \ldots, x_n$.
Строгое условие (M) считается выполненым в многообразии $\mathfrak{V}$, если найдутся такие термы $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m$ от $x_1, \ldots, x_n$, образованные от основных операций в $\mathfrak{V}$, что для всех алгбр из $\mathfrak{V}$ верны тождественные соотношения

$$\bar{p}_i(x_1, \ldots, x_n) = \bar{q}_i(x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, \ldots, k,$$

где $\bar{p}_i, \bar{q}_i$ получаются соответственно из p_i, q_i заменой каждого символа f_i на $\bar{f}_i$.

Совокупность S -теорий многообразий относительно включения является полной решеткой [I], которую мы обозначим через Λ. Эта классификационная решетка имеет удобное для вычислений представление [2], при помощи которого легко доказывается ее континуальность. Однако, строение решетки Λ пока не выяснено. Представляют интерес следующие вопросы.

Вопрос I. Будет ли решетка Λ модулярной ?

Вопрос 2. Имеет ли решетка Λ атомы ? (Известно [I], что Λ содержит единственный коатом, который является полной S -теорией и состоит из строгих условий Мальцева, выпол-

нимых в многообразиях Поста бесконечного порядка).

Вопрос 3. Как описать конечные подрешетки решетки Λ ?

Два многообразия алгебр произвольных сигнатур называются S -эквивалентными, если они имеют одну и ту же S -теорию.

Вопрос 4. Какова мощность множества классов S -эквивалентных многообразий а) групп, б) колец (ассоциативных, лиевых) ?

Вопрос 5. Всякая ли S -теория $T_0 \in \Lambda$ обладает независимым базисом, т.е. таким независимым множеством $\{M_1, M_2, \dots\}$ строгих условий Мальцева, что

$$T_0 = \cap\{T \in \Lambda / \{M_1, M_2, \dots\} \subseteq T\} ?$$

Пример S -теории, обладающей независимым базисом, указан в [3] .

Конечная или бесконечная (счетная) дизъюнкция $M_1 \vee M_2 \vee \dots$ строгих условий Мальцева M_i , в которой M_i влечет M_{i+1} для всех $i = 1, 2, \dots$ называется просто условием Мальцева.

Слабым условием Мальцева называется счетная конъюнкция $C_1 \,\&\, C_2 \,\&\, \dots$ условий Мальцева C_i , в которой C_i влечет C_{i+1} для всех $i = 1, 2, \dots$.

Пусть $\mathcal{V}$ - многообразие алгебр и $\mathrm{Con}\,\mathcal{V}$ - класс решеток конгруэнций алгебр из $\mathcal{V}$. Вилли и Пиксли доказали, что класс многообразий $\{\mathcal{V} / \mathrm{Con}\,\mathcal{V} \models \varepsilon\}$, решетки конгруэнций алгебр которых удовлетворяют данному решеточному тождеству ε , определим слабым условием Мальцева.

Вопрос 6. (см. [4]). Определим ли класс $\{\mathcal{V} / \mathrm{Con}\,\mathcal{V} \models \varepsilon\}$ условием Мальцева при любом ε ?

Для некоторых ε , например, для тождества дистрибутивности (dist) или тождества модулярности (mod) , ответ удовлетворительный. В [5] доказано, что класс многообразий

$$\{\mathcal{V} / \mathrm{Con}\,\mathcal{V} \models \varepsilon \,\&\, \mathrm{mod}\}$$

определим условием Мальцева для бесконечного множества значений ε . Но в целом вопрос 6 открыт.

Для решеточных квазитождеств обсуждался сходный

Вопрос 7 (см [4]). Для всякого ли решеточного квазитождества ε класс многообразий $\{\mathcal{V} / \mathrm{Con}\,\mathcal{V} \models \varepsilon\}$ определим слабым условием Мальцева ?

Литература

1. Смирнов Д.М. Условия Мальцева и представимость многообразий//Алгебра и логика.- 1983.- Т. 22, № 6.- С. 693-706.

2. Смирнов Д.М. Решетки теорий Мальцева//Алгебра и логика.- 1984.- Т. 23, № 3.- С. 296-304.

3. Смирнов Д.М. Классы Мальцева с заданным свойством// Алгебра и логика.- 1987.- Т. 26, № 2.- С. 204-219.

4. Jonsson B. Congruence varieties // Algebra Univers. 1980.- Vol. 10; No 3.- P. 355-394.

5. Freese R. and McKenzie R. Commutator theory for congruencc modular varieties // London Math. Soc., Lecture Notes. Ser. Vol. 125. Cambridge, New-York and Melburne, 1987.

А.Г.Мясников, В.Н.Ремесленников

ЛОГИКА КОНЕЧНЫХ ТИПОВ В ТЕОРИИ ГРУПП

Изучение алгебраических объектов теоретико-модельными методами выявило недостатки обычной логики первого порядка, обусловленные ее слабой выразительной силой. В связи с этим обоснована попытка привлекать для изучения алгебраических систем более сильные логики. Желательно, чтобы в них были справедливы основные классические теоремы, либо их аналоги. С другой стороны, разумно требовать выполнения условий, обеспечивающих хорошие "прикладные" качества заданной логики применительно к алгебре. Такая "алгебраическая логика", по-видимому, должна: а) содержать обычную логику первого порядка; б) допускать традиционные финитные алгебраические построения; в) выражать на своем языке наиболее употребительные алгебраические понятия; г) допускать только формулы (высказывания), отвечающие разумным требованиям эффективности; д) сохранять элементарную эквивалентность объектов при основных алгебраических конструкциях; е) позволять удобную классификацию систем по их логическим свойствам в естественных алгебраических классах; ж) не выходить за рамки логики

Среди кандидатов на подобные логики в нашем случае наибольший интерес представляет слабая логика конечных типов (см. [1]) и в некоторых случаях, например, при изучении свободных групповых конструкций, ω -логика.

Существуют два подхода к исследованию алгебраической системы $\mathfrak{A}$ в расширенной логике. При первом подходе изучают саму систему $\mathfrak{A}$; но при этом, кроме формул логики первого порядка (УИП) допускают более сложные высказывания. Так в логика в высказывания о системе $\mathfrak{A}$ входят натуральные числа, а в слабой логике конечных типов (HF -логике) допустимы бесконечные формулы специального типа (см. [2] языка $L_{\omega,\omega}$).

При другом подходе, равносильном первому, можно вместо системы $\mathfrak{A}$ изучать ее расширение-надстройку над $\mathfrak{A}$, но зато уже средствами УИП. С этой точки зрения, которая нам более удобна, система $\mathfrak{A}$ в ω -логике существует двухосновная ω -модель $\langle \mathfrak{A}, \mathbb{N} \rangle$, , где $\mathbb{N}$ -множество

натуральных чисел со сложением, а HF -логика соответствует надстройка $HF(\mathfrak{A})$, определяемая следующим образом. Для произвольного множества M обозначим через $F(M)$ множество всех конечных подмножеств M , и пусть A - основное множество системы $\mathfrak{A}$. Положим

$$A_0 = F(A),\ A_{n+1} = F(A \cup A_n) \ \text{ и }\ F(A) = \bigcup_{n \in \omega} A_n$$

Тогда $HF(\mathfrak{A})$ - двухосновная модель вида

$$HF(\mathfrak{A}) = \langle \mathfrak{A}, HF(A); \ni \rangle,$$

где $\ni$ - предикат принадлежности на $A \cup HF(A)$.

Из теории допустимых множеств известно [9] , что модель $HF(\mathfrak{A})$ позволяет формализовать финитные рассуждения, причем каждая формула языка этой модели единым образом переписывается в некоторую "эффективную" формулу языка $L_{\omega,\omega}$ [2] . Выразительные возможности модели $HF(\mathfrak{A})$ также достаточно широки: например, любая конструктивная алгебра с точностью до изоморфизма определяется одной формулой HF -логики; свойства быть конечно порожденной алгеброй, свободной алгеброй конечного ранга, принадлежать хорошо заданному многообразию выразимы в HF -логике. Таким образом, HF -логика вполне удовлетворяет условиям а), б), в), г), ж) на "алгебраическую логику". Будет показано, что HF -логика естественно возникает при изучении свободных конструкций в группах. Решение сформулированных ниже задач поможет выяснить возможности HF -логики в вопросах HF -классификации алгебраических систем.

1. Групповые конструкции. Пусть A и B - группы. Ниже будут рассматриваться следующие конструкции: свободная A -операторная группа $F(X,A)$ с базой X ; свободное произведение групп $A * B$, прямое сплетение групп $A \wr B$, целочисленное групповое кольцо $\mathbb{Z}A$. Обычная логика первого порядка плохо приспособлена для изучения свободных конструкций, поскольку её средствами невыразимо само понятие "сво-

боды". Многие теоретико-модельные вопросы о свободных конструкциях открыты до сих пор.

Решение следующих вопросов поможет уяснить, насколько HF-логика удобна при изучении свободных конструкций. Доказано в [5], что $F(X,A)$ и $\mathbb{Z}A$ абсолютно (т.е. без помощи констант) определены в $HF(A)$ и значит HF-эквивалентность $A \equiv_{HF} A_1$ влечет HF-эквивалентность $F(X,A) \equiv_{HF} F(X,A_1)$ и $\mathbb{Z}A \equiv_{HF} \mathbb{Z}A_1$.

Проблема I. Пусть $A \equiv_{HF} A_1$ и $B \equiv_{HF} B_1$. Верно ли, что тогда

а) $A * B \equiv_{HF} A_1 * B_1$?

б) $A \wr B \equiv_{HF} A_1 \wr B_1$?

в) подобно а), но для HNN-расширений и свободных произведений в подходящих формулировках ?

Обратная импликация для а) не верна, поскольку одна и та же группа может быть различными способами разложена в свободное произведение. Например, $F_1 * F_3 \simeq F_2 * F_2$, но $F_1 \not\equiv_{HF} F_2$. Однозначность разложения появляется, если одновременно с группой рассматривать и функцию длины на ней. Такой подход - привлечение функции длины в сигнатуру - был предложен в [3,4,6]. В [5] показано, что из $P(A,B) \equiv_{HF} P(C,D)$ следует $A * B \equiv_{HF} C * D$ (здесь $P(A,B)$ - подгруппа, определение которой см. в [8]).

Конструкция прямого сплетения групп и целочисленного кольца не сохраняют элементарную эквивалентность в логике первого порядка. Например, нетрудно доказать, что $A \wr A \not\equiv A \wr B$ и $\mathbb{Z}A \not\equiv \mathbb{Z}B$, где A - бесконечная циклическая, B - прямая сумма бесконечной циклической и аддитивной группы рациональных чисел, $A \equiv B$ по теореме В.Шмелевой.

Следующие проблемы - попытка сформулировать на языке HF-логики критерий элементарной эквивалентности сплетений.

Проблема 2. Доказать, что $A \wr B \equiv C \wr D$ (на языке УИП) тогда и только тогда, когда $A \equiv C$ (на языке УИП) и $B \equiv_{HF} D$ (HF-логике).

Проблема 3. Подобна проблема 2, только условие $B \equiv_{HF} D$ заменить на "B ω-изоморфна D" (понятие ω-изоморфизма см. в п. 2).

Для ориентировки при решении этих проблем приведем известные близкие результаты.

Пусть G - либо $F(X,A)$, либо $A * B$. Каждому элементу $g \in G$ однозначно сопоставляется натуральное число $|g|$ - длина g. Из результатов Р.Линдона [7] следует, что как свободные группы, так и свободные произведения групп аксиматически характеризуются в классе всех групп именно наличием функции длины $|\,| : G \to \mathbb{N}$ с определенными свойствами. Следовательно, в этом случае ω - модель $G_\omega = \langle G, \mathbb{N}; |\,| \rangle$ возникает естественно и по существу. Подобным образом для целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}A$ функция длины $|\,| : \mathbb{Z}A \to \mathbb{N}$ определяется по формуле

$$|n_1 a_1 + \ldots + n_s a_s| = s, \text{ где } a_i \neq a_j \in A, 0 \neq n_i \in \mathbb{Z}$$

и

$$\mathbb{Z}A_\omega = \langle \mathbb{Z}A, \mathbb{N}; |\,| \rangle.$$

Будем говорить, что выразительные возможности систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{L}$ совпадают (символически $\mathfrak{A} \approx_{ad} \mathfrak{L}$), если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{L}$ абсолютно (т.е. без помощи констант) определимы одна в другой.

В дальнейшем для простоты формулировок будем считать, что группа A бесконечна, $B \neq 1$; G - групповая конструкция одного из трех отмеченных выше типов. Первая группа результатов показывает, что по выразительной силе добавление функции длины к конструкции G эквивалентно HF-надстройке исходного алгебраического объекта, из которого сама конструкция G канонически строится в алгебре. А именно, в

[5] доказано

$$F(X,A)_\omega \approx_{ad} HF(A),$$

(при условии $|X| \leqslant \omega$)

$$A * B_\omega \approx_{ad} HF(P(A,B)),$$

$$ZA_\omega \approx_{ad} HF(A).$$

В качестве следствия получен критерий эквивалентности в ω - логике данных конструкций с функцией длины в сигнатуре. $HF(G)$ и G_ω - довольно большие надстройки над G. Вторая группа результатов указывает "минимальные" чисто сигнатурные расширения G, по выразительной силе не уступающие G_ω и $HF(G_\omega)$. А именно, для $x, y \in G$ положим $x \sim y \rightleftarrows |x| = |y|$, и пусть, для простоты, $|B| > 2$. Тогда (см. [5]) $G_\omega \approx_{ad} \langle G; \sim \rangle$ и в силу первой группы результатов подобные эквивалентности справедливы и для HF -надстроек. Заметим, что попытки изучения моделей $\langle G; \sim \rangle$ в случае свободных групп и свободных произведений делались раньше [10-12], в частности, была доказана неразрешимость теории $Th(\langle G; \sim \rangle)$. Теперь, в силу полученных результатов, можно от моделей $\langle G; \sim \rangle$ переходить к соответствующим HF - надстройкам, а значит использовать все богатство языка HF -логики. Нахождение минимальных сигнатурных расширений, эквивалентных HF - надстройке, для известных классов алгебраических систем представляется достаточно привлекательной задачей.

2. Аналог игры Эренфойхта.

Напомним, что модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $\forall m \in \mathbb{N}$ существует последовательность $F_{1m}, \dots, F_{mm}$ непустых множеств конечных частичных изоморфизмов из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, удовлетворяющая условию (Ж):
для любого $f \in F_{im}$, $i < m$, и для любых $a \in A$, $b \in B$ существует $g \in F_{i+1,m}$ такой, что g продолжает f и $a \in dom\, g$, $b \in Im\, g$ (здесь $dom\, g$ и $Im\, g$ - область определения и значений g).

Проблема 4. Найти условие ($*_{HF}$) на системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ подобное (Ж), такое что $\mathfrak{A} \equiv_{HF} \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ удовлетворяют ($*_{HF}$). Конкретизируем проблему 4.

Рассмотрим условие ($*$ $*$), более сильное, чем ($*$): $\forall m \in \mathbb{N}$ существует последовательность $F_{1m}, \dots, F_{mm}$ непустых множеств конечных частичных изоморфизмов из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ таких, что для любого $f \in F_{im}$, $i < m$ и любых конечных $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ существует $g \in F_{i+1,m}$ такой, что g продолжает f и $X \subseteq dom\, g$, $Y \subseteq Im\, g$. Системы, удовлетворяющие условию ($*$ $*$), называются ω - изоморфны.

Проблема 5. Верно ли, что $\mathfrak{A} \equiv_{HF} \mathfrak{B} \Longleftrightarrow \mathfrak{A}$ ω - изоморфна $\mathfrak{B}$?

3. Категоричность.

Пусть L - некоторая логика. Будем говорить, что система $\mathfrak{A}$ счетно категорична в логике L, если $\mathfrak{A}$ счетна и для любой счетной системы $\mathfrak{B}$ из L -эквивалентности $\mathfrak{A} \equiv_L \mathfrak{B}$ следует изоморфизм $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$.

Будем говорить, что система $\mathfrak{A}$ определена L -формулой, если $\mathfrak{A}$ счетная и существует формула φ логики L такая, что для любой счетной системы $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{B} \models \varphi$ следует $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$. Известная теорема Д.Скотта [13] утверждает, что любая счетная система определима $L_{\omega_1,\omega}$ -формулой. Конечно-порожденная алгебраическая система $\mathfrak{A}$ определима HF -формулой тогда и только тогда, когда диаграмма $\mathfrak{A}$ неявно определена в арифметике [2].

Проблема 6. Описать счетные группы (алгебраические системы), определимые HF -формулой.

Проблема 7. Описать счетно HF -категоричные группы (алгебраические системы).

В [3] доказано, что конечно-порожденные группы являются категоричными в HF -логике.

4. HF -классификация.

С теоретико-модельной точки зрения наиболее изученными являются абелевы группы и поля. Интересно классифицировать эти объекты в HF -логике.

Проблема 8. HF -классифицировать абелевы группы.

В более узких классах абелевых групп проблему классификации можно сформулировать точнее.

Проблема 9. Пусть A и B - редуцированные абелевы p -группы. Тогда $A \equiv_{HF} B$ тогда и только тогда, когда инварианты Ульма у A и B либо конечны и равны, либо одновременно бесконечны для всех рекурсивных ординалов.

Литература

1. Барвайс Д. Введение в логику первого порядка//Справ. по матем.лог. Теория моделей.- М.: Наука, 1982.- 4.I.

2. Беляев В.Я.,Тайцлин М.А. Об элементарных свойствах экзистенциально замкнутых систем//Успехи матем.наук.- 1979.- Т. 34.- Вып. 2. С. 39-94.

3. Мясников А.Г.,Ремесленников В.Н. Элементарная эквивалентность свободных операторных групп с функцией длины и конечно-порожденной группой операторов//Вычислительные инварианты в теории алгебраических систем.- Новосибирск.- 1987.- С. 3-12.

4. Мясников А.Г.,Ремесленников В.Н. Элементарная эквивалентность свободных произведений.- Новосибирск, 1987.- 20 с.- (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислительный центр, № 718).

5. Мясников А.Г.,Ремесленников В.Н. Теоретико-модельные вопросы теории групп//Вопросы алгебры.- Вып. 4.- Минск: Университетское.- 1989.- С. 16-22.

6. Мясников А.Г.,Ремесленников В.Н. Допустимые множества в теории групп// Новосибирск, 1988.- С. 3-25.-(Препринт/АН СССР. Сиб. отд.-ние. Вычислительный центр, № 803).

7.Линдон Р.,Шупп П. Комбинаторная теория групп.- М.: Мир.- 1980.

8. Столлингс Д. Теория групп и трехмерные многообразия// Алгебр. топология. Введение.- М.: Мир.- 1977.

9. Barwise J. Admissible Sets and Structures. - Berlin: Springer.-1975.

10. Hyber-Dyson V. The undecidability of theory of free groups with a length function// Univ. Calgary, Math.Res., - 1974.-N 221.-P.1-26.

11. Hyber-Dyson V. Talking about free groups in naturally enriched languages// Communs algebra. - 1977. - Vol.5. P. 1163-1191.

12. Libo Lo. The -theory for free groups is undecidable// J.Symb.log. - 1973. - Vol.48,N3.- P.700-703.

13. Scott D. Logic with denumerable long formulas and finite string quantiters// In the theory of Models. - Amsterdam: North-Holland.-1965.-P. 329-341.

С.С.Кутателадзе

I. ПРОБЛЕМА СИНТЕЗА НЕСТАНДАРТНЫХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА

Нестандартные методы анализа в современном понимании состоят в привлечении двух различных - "стандартной" и "нестандартной" - моделей теории множеств для исследования конкретных математических объектов и проблем. Такие методы получили существенное развитие в последние тридцать лет и сформулировались сейчас в несколько направлений. Главным из них дано наименование инфинитезимальный анализ и булевозначный анализ.

Первое из названных направлений вслед за его основоположником А.Робинсоном часто называют выразительным хотя и несколько неудачным термином - нестандартный анализ (теперь чаще говорят классический или робинсоновский нестандартный анализ). Инфинитезимальный анализ характеризуется широким использованием давно известных в практике естествознания, но запрещенных долгое время в математике 20 века, концепций, связанных с представлениями об актуальной бесконечно больших и актуально бесконечно малых величинах. Робинсоновский нестандартный анализ бурно развивается и уже внес капитальные изменения в систему общематематических представлений. Прежде всего, это связано с тем, что в нем предложено новое понимание инфинитезимальных методов неделимых, восходящих к глубокой древности, и осуществлен синтез подходов к дифференциальному и интегральному исчислениям, предложенных его основоположниками. В наши дни инфинитезимальный анализ находит широкое распространение и проникает во все разделы современной математики. Наибольшие изменения сейчас происходят в этой связи в негладком анализе, в теории вероятностей и теории меры, в качественной теории дифференциальных уравнений и в математической экономике.

Булевозначный анализ характеризуется широким использованием терминов спуски и подъемы, циклические оболочки и миксинги, B -множества и изображение объектов в моделях. Развитие этого направления, становление которого связано со знаменитыми работами П.Дж.Коэна по проблеме континуума, привело к принципиально новым идеям и результатам в ряде направлений функционального анализа и, прежде всего, в теории пространств Канторовича, в теории алгебр фон Неймана, в выпуклом анализе и теории векторных мер.

Существует широкий круг проблем, в которых желательно одновременно использование выразительных и технических средств, предоставляемых инфинитезимальными концепциями и булевозначным анализом. Среди них в первую очередь можно назвать теорию циклических топологических пространств и вопросы построения векторных аналогов меры Лееба для случая отображений, действующих в пространства Банаха - Канторовича. В настоящее время видятся некоторые естественные пути к выработке формализмов, позволяющих синтезировать упомянутые нестандартные подходы.

Первая возможность в рамках неоклассической установки состоит в фиксации полной булевой алгебры B и отвечающего ей отделимого булевозначного универсума $V^{(B)}$ внутри некоторого исходного универсума внешних множеств. При этом предикат стандартности определен на внутренних множествах исходного универсума. Тем самым инфинитезимали и другие аналитические идеальные средства возникают в универсуме спусков - циклических множеств. В качестве иллюстрации назовем B -множество x элементом циклической оболочки внешнего подмножества A в $V^{(B)}$ в том случае, если для некоторого внутреннего семейства $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов A и некоторого внутреннего разбиения $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ единицы в алгебре B точка x представляют собой перемешивание $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ т.е. для всех $\xi\in\Xi$ выполнено $b_\xi x = b_\xi x_\xi$. В этих терминах можно сказать, что стандартный фильтр является циклическим в том и только в том случае, если его монада совпадает со своей циклической оболочкой. Двигаясь по возникающему пути, можно продвинуться, скажем, в изучении расположения стандартного ядра расширенного K - пространства X (с базой B), имея в качестве модели поле

гипердействительных чисел. В то же время возникают заметные трудности и неудобства, связанные с тем, что далеко не все конечные элементы X обязаны быть околостандартными (в очевидном смысле). На этом пути в рассмотрении возникают существенные точки – элементы монад проультрафильтров, появление которых значительно усложняет анализ.

Другая возможность состоит в применении классической установки. А.Робинсона внутри булевозначного универсума. Можно осуществить подъем $X\uparrow$, получив поле вещественных чисел $\mathcal{R}$ внутри $V^{(B)}$ в силу теоремы Гордона. Используя расширение ${}^*\mathcal{R}$, строя, скажем, суперструктуру внутри $V^{(B)}$, и осуществляя спуск поля гипердействительных чисел, получаем расширение $\circledast X := ({}^*\mathcal{R})\downarrow$. Ту же процедуру – последовательное применение подъема, робинсоновской стандартизации и спуска – можно осуществлять с любыми объектами исходного универсума теории внутренних множеств Э.Нельсона. При таком подходе возникает возможность прямой интерпритации – переноса – классических инфинитезимальных схем, например, в теорию K – пространств. Однако строение $\circledast X$ и расположение в нем $(\approx \mathcal{R})\downarrow$ обозревается, конечно же, с не большей ясностью, чем набор существенных точек X.

Разумеется, отмеченные трудности и особенности носят принципиальный характер и полностью устранены быть не могут. В то же время представляется необходимым поиск более тонких и более прямых формализмов, объединяющих технику спусков и подъемов с монадологией.

Перспективной, хотя и проблематичной, возможностью видится построение булевозначной модели универсума внутренних множеств. Например, работая в теории Т.Каваи, можно наряду с исходной булевой алгеброй B рассматривать ее внешнее пополнение, в котором верхнюю грань получит класс оценок всех стандартных множеств. Это открывает путь построения модели, в которой при естественной интерпритации оценки предиката стандартности будут сохранены во всяком случае принципы переноса и идеализации. В то же время очевидно, что сколь-либо полное

понимание проблемы синтезов нестандартных методов анализа должно быть предварено новыми исследованиями.

С.С.Кутателадзе

II. ПРОБЛЕМА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ НА ПРИМЕРЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Цель настоящей заметки – привлечь внимание к новым задачам теории оптимизации, возникающим при анализе изопериметрических проблем теории выпуклых поверхностей. Экстремальные задачи геометрии – классический объект вариационного исчисления представляют интерес для математического программирования, во-первых, потому, что их можно рассматривать как модели методов анализа, а, во-вторых, потому, что в них возникают проблемы, представляющие общий интерес для теории задач на экстремум. Среди геометрических задач, на самом деле, содержатся многие задачи теории минимакса. В частности, любая задача минимизации радиуса описанного шара – это в техническом смысле задача чебышевского приближения в пространстве непрерывных функций.

Постановка любой экстремальной задачи, как известно, не требует никакой информации о структуре исходного допустимого множества. Фактически, при постановке задачи математического программирования существенно лишь то, что в пространстве значений целевой функции есть отношение предпорядка. Разумеется, что в такой общности никакой теории экстремальных задач не существует и существовать не может. Имеющиеся методы исследования вариационных задач используют структуру векторного пространства. При этом, очевидно, желательно, чтобы допустимая область и функция цели обеспечивали выпуклость задачи.

Исследование экстремальных геометрических задач, как и исследование любой поставленной в содержательных терминах задачи оптимизации проводится по следующей схеме: (а) выбирается векторное пространство, в которое вкладывается исходная задача, иными словами, фиксируется параметризация, (б) описываются конусы, двойственные к конусам допустимых направлений, в частнос-

ти, вычисляются субдифференциалы или производные по направлениям целевой функции и ограничений, (в) формулируются уравнения Эйлера - Лагранжа - критерии оптимальности допустимого решения. При этом на последнем этапе, разумеется, осуществляется перевод полученных результатов с языка параметризации в исходные содержательные термины. Следует отметить, что с теоретической точки зрения решить экстремальную задачу значит получить уравнения Эйлера - Лагранжа. Очевидно, различным параметризациям при этом отвечают, вообще говоря, различные критерии оптимальности. Более того, в зависимости от параметризации меняется и класс поддающихся эффективному решению задач.

Важность экстремальных геометрических задач заключается, в частности, в том, что в настоящее время это один из немногих примеров классов содержательных задач, допускающих две нетривиально отличающихся параметризации.

Множество $\mathfrak{M}_n$ выпуклых поверхностей в $\mathbb{R}^n$ допускает две естественных параметризации - два вложения в векторные пространства. Первое вложение осуществляется канонической двойственностью Минковского - функцией, отождествляющей выпуклый компакт с его опорной функцией ("решением задачи параметрического программирования"). Двойственность Минковского индуцирует в $\mathfrak{M}_n$ структуру конуса в пространстве $C(S_{n-1})$ непрерывных функций на единичную евклидовой сфере S_{n-1} - граница шара B_n. Вторая параметризация, к сожалению, не имеет пока хороших общих алгоритмов. Она порождается идентификацией класса эквивалентных с точностью до переноса поверхностей с соответствующей метрикой на сфере - с поверхностной функцией этого класса.

Пусть $C(S_{n-1})/\mathbb{R}^n$ - фактор $C(S_{n-1})$ по подпространству следов линейных функций на S_{n-1}, а $\mathfrak{A}_n$ - конус александровских мер, т.е. положительных невырожденных мер, ортогональных указанному подпространству. Ясно, что $C(S_{n-1})/\mathbb{R}^n$ и $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}_n$ находятся в канонической двойственности (пропорциональной так называемому смешанному объему $V_1(\cdot,\cdot)$). При этом конус поверхностей имеет две реализации - в пространстве $C(S_{n-1})/\mathbb{R}^n$ и в пространстве $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}_n$ и, соответственно, две структуры - структуру Минковского и структуру Бляшке.

Важнейшие характеристики указанных параметризаций видны из таблицы.

Объем параметризации	Структура Минковского	Структура Бляшке
конус множества	$\mathfrak{M}_n/\mathbb{R}^n$	$\mathfrak{A}_n$
двойственный конус	$(\mathfrak{M}_n/\mathbb{R}^n)$	$\mathfrak{A}_n$
положительный конус	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}_n$
типичный линейный функционал	$V_1(B_n,\cdot)$ (ширина)	$V_1(\cdot,B_n)$ (площадь)
вогнутый функционал (степень обхема)	$V_1^{1/n}(\cdot,\cdot)$	$V_1^{(n-1)/n}(\cdot,\cdot)$
простейшая выпуклая программа	задача Урысона	изометрическая задача
ограничение операторного типа	включение поверхностей	неравенства на "кривизны"
цена	поверхность	функция
дифференциал объема в точке x пропорционален	$\xi \to V_1(x,\xi)$	$\xi^* \to V_1(\xi^*,x)$

Из этой таблицы видно, что, например, изопериметрическая в структуре Минковского при $n \geqslant 3$ не выпуклая и необходимое условие экстремума для нее приводит к решению лишь при дополнительных предположениях о регулярности. В структуре же Бляшке эта задача выпуклая и решается в одну строчку.

Вопрос о выборе подходящей параметризации для широкого класса задач практически не исследован. Назовем, например, изопериметрическую задачу в классе тел внутри данного. В тоже время приведенные геометрические факты указывают на целесообразность исследований в этом направлении.

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ Ю.Г.РЕШЕТНЯКА

26 сентября 1989 года исполнилось 60 лет со дня рождения и 40 лет научной и педагогической деятельности академика Юрия Григорьевича Решетняка.

Ю.Г.Решетняк родился в г. Ленинграде. В 1947 г. после окончания средней школы он поступил на математико-механический факультет Ленинградского университета. Закончил обучение в четыре года и был оставлен в аспирантуре ЛГУ. Научным руководителем Ю.Г.Решетняка стал академик А.Д.Александров. В годы аспирантуры был заложен фундамент плодотворного научного сотрудничества А.Д.Александрова и Ю.Г.Решетняка, продолжающегося уже почти сорок лет. В 1954 г. Ю.Г.Решетняк защитил кандидатскую диссертацию "О длине и повороте кривой и о площади поверхности".

В 1957 г. по приглашению С.Л.Соболева Ю.Г.Решетняк вместе с семьей переехал в Новосибирск, где стал работать в новом Институте математики СО АН СССР. Здесь Ю.Г.Решетняк создает все свои основные научные труды, проходит путь от молодого ученого до маститого академика. Именно в Сибири окончательно формируется характерный для Юрия Григорьевича оригинальный стиль исследований на границе между анализом и геометрией, создается и оттачивается его виртуозная и очень своеобразная математическая техника. В Новосибирске в 1960 г. Ю.Г.Решетняк защитил докторскую диссертацию на тему "Изотермические координаты в двумерных многообразиях ограниченной кривизны".

Научные интересы Ю.Г.Решетняка охватывают широкий круг математических проблем. Он является основоположником новых направлений в математике, занимающих пограничное место между анализом и геометрией. Одно из них получило название теории нелинейной емкости. В рамках этого направления достигнуты существенные продвижения в теории функций с обобщенными производными. Другое направление, созданное Ю.Г.Решетняком, - теория пространственных отображений с ограниченным искажением. Эти отображения представляют собой глубокое и далеко идущее обобщение пространственных квазиконформных отображений.

Авторитет сибирской школы анализа и геометрии в значительной мере связан с личными достижениями Юрия Григорьевича, многие из которых воспринимаются как классические. Прежде всего следует назвать знаменитую теорему Ю.Г.Решетняка об изотермических координатах на двумерных многообразиях ограниченной кривизны, введенных А.Д.Александровым. Мировую известность приобрело полученное Ю.Г.Решетняком окончательное решение проблемы М.А.Лаврентьева об устойчивости конформных отображений. Теоремы Ю.Г.Решетняка о дифференцируемости почти всюду функций с обобщенными в смысле С.Л.Соболева производными впечатляют изящной законченностью формы.

Большую часть своего времени Ю.Г.Решетняк уделяет подготовке и воспитанию научной смены. Лекции Ю.Г.Решетняка, его многочисленные учебные пособия по современным разделам анализа и по трудным главам основного курса уже более четверти века пользуются заслуженной популярностью у студентов и преподавателей.

Ю.Г.Решетняк вложил много сил в создание, становление и формирование научного облика "Сибирского математического журнала". Велик вклад Ю.Г.Решетняка в работу Сибирского математического общества, в котором он активно работает с момента организации. Член Правления СМО, Ю.Г.Решетняк в течение ряда лет избирался вице-президентом и президентом Сибирского математического общества.

Научная и педагогическая деятельность Ю.Г.Решетняка получила высокую оценку. В 1980 г. ему присвоено почетное звание "Заслуженный деятель науки РСФСР", в 1981 г. его избирают членом-корреспондентом АН СССР по Отделению математики, а в 1987 г. действительным членом по тому же Отделению. Ю.Г.Решетняк награжден орденом Знак Почета и медалями.

Юрия Григорьевича отличают добросовестность и ответственность, скромность, чуткость и внимание к людям, такт и сдержанность в общении, эрудиция и мягкий юмор.

26 сентября 1989 г. на специальном совместном семинаре отдела анализа и геометрии ИМ и кафедры математического анализа НГУ после научного доклада Ю.Г.Решетняка "О развертке кривой" с поздравлениями к нему обратились коллеги по Институту и уни-

верситету, был оглашены многочисленные адреса и телеграммы.

14 ноября 1989 г. в Институте математики на открытии Всесоюзной конференции по геометрии и анализу, приуроченной к 60-летию Ю.Г.Решетняка, его тепло приветствовали академики А.Д.Александров, М.М.Лаврентьев и другие математики из разных регионов страны. 16 ноября 1989 г. Юрия Григорьевича сердечно поздравили члены Правления СМО, пожелавшие ему доброго здоровья и новых творческих успехов.

С.С.Кутателадзе

ВСЕСОЮЗНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ УСЛОВНО-КОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Алма-Ата, 2–6 октября 1989 г.

Организаторы конференции – Институт математики СО АН СССР, ВЦ СО АН СССР (г. Красноярск), Институт математики и механики АН Каз.ССР. Сопредседатели оргкомитета – академик М.М. Лаврентьев, академик АН Каз.ССР У.М.Султангазин; зам.председателя – д.ф.-м.н. В.Я.Арсенин, чл.-к. АН СССР В.Г.Романов, д.ф.-м.н. А.М.Федотов; ученые секретари – к.ф.-м.н. И.Ш.Иркегулов, к.ф.-м.н. С.И.Кабанихин.

Работали 5 секций: общая теория некорректных задач; обратные задачи для уравнений математической физики; прямые и обратные задачи теории переноса излучения; математические проблемы геофизики; дифференциальные уравнения математической физики.

Были заслушаны два пленарных доклада:

У.М.Султангазин "Методы исследования и численного решения уравнения Больцмана".

М.М.Лаврентьев "Задачи интегральной геометрии вольтерровского типа".

Вниманию участников и гостей конференции было представлено 134 секционных доклада. Тематика докладов охватила все наиболее важные направления развития некорректных и обратных задач и большое число смежных с ними проблем. За 3 года, прошедшие со времени предыдущей конференции, получены существенные результаты в исследовании вопросов построения регуляризующих и оптимальных алгоритмов; численных методов решения обратных задач; задач интегральной геометрии, теории переноса; доказаны новые важные теоремы о разрешимости ряда обратных задач для дифференциальных уравнений.

Около трети докладов было посвящено решению прикладных задач, возникающих в геофизике и поиске полезных ископаемых, томографии и спектроскопии, тепломассопереносе, электронной оптике, ядерной физике и на других направлениях. В большинстве докладов основное внимание было уделено практическому при-

менению проведенных исследований.

Конференция отправила приветственные телеграммы основоположникам теории условно-корректных задач академику А.Н.Тихонову и чл.-к. АН СССР В.К.Иванову.

Решено в 1990 г. издать сборник избранных докладов конференции.

ВСЕСОЮЗНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ И АНАЛИЗУ

Всесоюзная конференция по геометрии и анализу, организованная Институтом математики СО АН СССР, проходила в Новосибирском Академгородке с 14 по 16 ноября 1989 г. Конференция была приурочена к юбилею академика Ю.Г.Решетняка (26 сентября Юрию Григорьевичу исполнилось 60 лет) и на ней обсуждались современные направления геометрии и теории функций, примыкающие к проблематике, разрабатываемой Ю.Г.Решетняком, его учениками и сотрудниками. Особое внимание уделялось смежным вопросам анализа и геометрии, мало представленным на союзных математических совещаниях.

В работе конференции приняли участие около 150 человек, в том числе 88 иногородных. Заявок на участие было подано почти вдвое больше (около 170) и оргкомитет, возглавляемый академиком А.Д.Александровым, был вынужден многим математикам посылать вежливые отказы. Причина традиционная - нехватка мест в гостинице.

14 ноября, на открытии конференции, Юрия Григорьевича тепло приветствовали академики А.Д.Александров, М.М.Лаврентьев и другие математики из разных регионов страны.

Научная программа конференции включала 8 пленарных лекций (лекторы: ак. Ю.Г.Решетняк, ак. А.Д.Александров, д.ф.-м.н. Л.А.Айзенберг, д.ф.-м.н. М.З.Соломяк, д.ф.-м.н. В.А.Зорич, д.ф.-м.н. В.И.Кузьминов, д.ф.-м.н. Л.В.Сабинин, д.ф.-м.н. В.И.Буренков) и 95 докладов на следующих секциях:

1. Геометрия дискретных групп преобразований. Квазиконформные отображения и смежные вопросы. (руководитель - д.ф.-м.н. С.Л.Крушкаль).
2. Функциональные пространства и смежные вопросы. (Руководитель д.ф.-м.н. В.И.Буренков и д.ф.-м.н. В.М.Гольдштейн).
3. Дифференциальная геометрия в целом. (Руководитель д.ф.-м.н. В.А.Топоногов).
4. Геометрия погруженных многообразий. Теория выпуклых тел.

Поверхности в E^n и других пространствах. (Руководитель д.ф.-м.н. А.А.Борисенко).

5. Геометрия псевдоримановых пространств. Хроногеометрия. (Руководитель д.ф.-м.н. А.В.Левичев).

К началу работы конференции изданы тезисы докладов [1], в которые включены тезисы сообщений тех, кто не смог принять участие в работе конференции. Незадолго до начала работы конференции (в октябре 1989 г.) из печати вышел 14-й том трудов Института математики СО АН СССР [2], в котором содержатся обзорные статьи по тематике конференции. Этим же проблемам посвящен № 5 Сибирского математического журнала [3].

Конференция вызвала большой интерес советских математиков. В числе её рекомендаций содержится пожелание проводить совещания по смежным вопросам анализа и геометрии не реже, чем раз в два-три года.

Литература

1. Всесоюзная конференция по геометрии и анализу: Тезисы докладов. Новосибирск, ноябрь 1989 г.- Новосибирск, 1989.- 109 с.

2. Современные проблемы геометрии и анализа.- Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.- 262 с.

3. Сиб. матем. журн.- 1989.- Т. 30, № 5.

А.Д.Александров,

С.С.Кутателадзе,

П.С.Филатов

О РАБОТЕ ШКОЛЫ ПО НЕКЛАССИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Школа по неклассическим уравнениям математической физики состоялась 27-30июня 1989 года. Организаторами школы были Институт математики СО АН СССР и Новосибирский госуниверситет. Председателем Оргкомитета конференции являлся доктор физико-математических наук, профессор, первый проректор НГУ В.Н.Врагов.

Конференция проводилась в аудиториях Новосибирского госуниверситета. Для участия в конференции по решению Оргкомитета было допущено 113 докладов, по ряду причин (болезнь, отсутствие авиабилетов и т.п) было сделано 97 докладов. Из числа принятых Оргкомитетом докладов из Новосибирска было 25 докладов, из Куйбышева - 15, из Ташкента - 10, из Ашхабада - 7, из Воронежа - 7, из Ленинграда - 7, из Алма-Аты - 5, из Улан-Удэ - 4, из Москвы, Красноярска, Душанбе, Якутска, Казани - по 3, из Киева, Куляба, Бухары, Нальчика, Владивостока - по 2, из Уфы, Хабаровска Тольятти, Магадана, Донецка, Кемерово, Оша, Целинограда - по 1. В конференции приняли участие 1 академик АН СССР, 1 академик АН УзССР, 2 члена-корреспондента АН Туркм. ССР, 2 члена-корреспондента АН Каз.ССР, 15 докторов физико-математических наук.

Все доклады в соответствии с тематикой конференции и тематикой заявленных докладов были разделены на три секции: секция I - "Неклассические уравнения с частными производными" (руководитель профессор В.Н.Врагов), секция № 2 - "Уравнения смешанного типа" (руководитель профессор В.П.Глушко), секция № 3 - "Неклассические уравнения математической физики и их приложения" (руководитель член-корреспондент АН СССР Ю.И.Шокин).

Все доклады прошли на высоком научном уровне. В результате обсуждения выяснилась необходимость дальнейшей координации деятельности различных научных центров (Новосибирск, Ташкент, Ленинград и т.д.) - т.е. необходимость проведения подобных школ, конференций, издания совместных сборников, монографий, обмена лекторами.

О работе Ш Сибирской школы "Алгебра и Анализ", Иркутск, 30 августа - 4 сентября 1989 г. (озеро Байкал, бухта Песчаная)

На базе Иркутского государственного университета с 30 августа по 4 сентября с.г. прошла Ш Сибирская школа "Алгебра и Анализ". Председателем Оргкомитета школы был академик Ю.Г. Решетняк. В работе Школы приняло участие 130 человек (10 из Иркутска, остальные - иногородние). Были представлены Новосибирск (свыше 30 человек), Москва (15), Ленинград (10), Омск, Барнаул, Кемерово, Томск, Красноярск, Минск, Тбилиси, Тарту, Ярославль, Свердловск, Чита, Хабаровск, Ташкент, Алма-Ата и др. Кроме того, были 8 иностранцев из числа участников Международной конференции по алгебре памяти А.И.Мальцева. Более 100 участников школы - доктора и кандидаты наук.

Работа Школы была организована следующим образом. До обеда читались три 60-минутные лекции, после обеда - 3-4 45-минутных доклада. Вечерами проходили неформальные обсуждения насущных проблем математической жизни. Была составлена и принята Декларация о математической ассоциации Советского Союза (вариант идей Всесоюзного математического общества).

Школа традиционно имеет две основные задачи. Первая - ознакомить участников школы с новейшими достижениями математической науки. Для этого в качестве лекторов приглашаются ведущие математики Москвы, Ленинграда и др. Вторая - дать возможность молодым кандидатам, в особенности, сибирским, сообщить о своих результатах, полученных после защиты канд.диссертаций, и таким образом помочь их дальнейшему научному росту. Считаем, что задачи Школа выполняет.

Программа лекций :

А.Н.Гришков (Омск). Модульная алгебра Ли.

А.Н.Варченко (Москва). Дилогарифмы Аомото и алгебраическая K -теория.

М.А.Шубин (Москва). Теоремы типа Лефшетца (аналитические аспекты).

Хелен Эно (Париж). Эффективные границы для положительных пучков.

Г.А.Маргулис (Москва). Значение неопределенных квадратичных форм унитарные потоки.

И.Л.Кантор (Москва). Связь скобок Пуассона и йордановых и лиевых супералгебр.

А.А.Кириллов (Москва). Введение в программу Неретина.

Э.Б.Винберг (Москва). О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обертывающей алгебры.

А.Г.Хованский (Москва). Разность выпуклых многогранников и интеграл по эйлеровой характеристике.

А.Н.Паршин (Москва). Геометрия арифметических поверхностей.

Ю.А.Неретин (Москва). Классификация представлений категорий A, B, C, D.

Р.И.Григорчук (Москва). О степенях роста групп и приложениях к анализу.

В.Л.Попов (Москва). Автоморфизмы кольца многочленов.

М.Э.Капович (Хабаровск). Униформизация трехмерных многообразий.

Ю.С.Ильяшенко (Москва). Явление Стокса в нелинейном анализе.

А.М.Вершик (Ленинград). Топология пространств конфигураций из выпуклых многогранников и теоремы универсальности.

В. Кауп (Тюбинген). Ограниченные симметрические области и йордановы алгебры.

Г.И.Ольшанский (Москва). Двойственность Брауэра - Вейля и представления бесконечной симметрической группы.

В.В.Блудов (Иркутск). Метод Тодда - Кокстера и его реализация на ЭВМ.

Были, заслушаны также доклады :

М.Хазевинкель (Амстердам). Квантовые группы.

В.К.Ионин (Новосибирск). Преобразование геометрических структур.

В.П.Голубятников (Новосибирск). Обобщение понятия выпуклости и приложения.

А.П.Южаков (Красноярск). Многомерные вычеты и приложения.

Г.А.Сойфер (Кемерово). Аффинные кристалографические группы (о проблеме Л.Ауслендера).

Труды первой школы (1987) депонированы в ВИНИТИ и переведены Американским математикиим обществом. Труды второй Школы (1988) депонированы и будут изданы таким же образом.

В связи с этим было бы целесообразно придать этим школам статус Международных.

Ю.Г.Решетняк

Л.А.Бокуть

В.П.Голубятников

НОРМАЛЬНЫЕ ПУЧКИ В КОЛЬЦЕ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ БОРДИЗМОВ

Пусть $Mn\gamma$ - стабильный спектр пространств Тома n - кратных универсальных векторных пучков $n\gamma_N \to BO_N$, $\Omega^{n\gamma}_*$ - соответствующее кольцо бордизмов. В [1] алгебраическими средствами установлена изоморфность такого кольца при $n=2s-1$ кольцу неориентированных бордизмов $\mathfrak{N}_*$, изоморфному кольцу многочленов (см. [2]). Дадим геометрическую интерпритацию указанного изоморфизма.

Чётномерные образующие $\mathfrak{N}_*$ реализуются проективными пространствами $RP(2k)$, а нечётномерные - двойственными линейными $\lambda(q\cdot 2^{p+1})\otimes\lambda(2^p)$ 3 подмногообразиями произведений $RP(q\cdot 2^{p+1})\times RP(2^p)$ - многообразиями Дольда. Здесь $\lambda(\ )$ - канонический линейный пучок над $RP(\ )$ (см. [3]). Из спектральной последовательности Атьи - Хирцебруха для $\widetilde{KO}_*$ следует, что все элементы $\widetilde{KO}_*(RP(2k))$, $\widetilde{KO}_*(RP(q\cdot 2^{p+1})\times RP(2^p))$ имеют конечные 2-примарные порядки и, значит, делятся на любое нечетное число. Поэтому стабильные нормальные пучки таких образующих в $\mathfrak{N}_*$ и линейные пучки 3 в соответствующих группах $\widetilde{KO}_*$ делятся на любое $2s-1$, а многообразия Дольда и $RP(2k)$ задают полиномиальные образующие и в $\mathfrak{N}_*$ и в $\Omega^{(2s-1)\gamma}_*$. Значит каждое компактное замкнутое гладкое многообразие кобордантно такому, у которого стабильный нормальный пучок делится на $2s-1$

Литература

1. Голубятников В.П. О кольцах бордизмов с расщепленными нормальными пучками. /I//Сиб. матем. журн.- 1989.- Т. 30, №5.- С. 42-48.

2. Стонг Р. Заметки по теории кобордизмов.- М.: Мир, 1973.

Бюллетень Сибирского математического общества

Оперативно-информационный материал

Ответственный за выпуск А.И.Кожанов

Подписано к печати 23.04.90 г. МН 08565
Формат бумаги 60х84 I/I6. Объем 2,75 п.л., 2,5 уч.-изд.л.
Заказ I3I Тираж 500 экз.

Отпечатано в Институте математики СО АН СССР
630090, Новосибирск, 90