Вокруг задачи Дидоны

С. С. Кутателадзе

Институт математики им. С.Л. Соболева

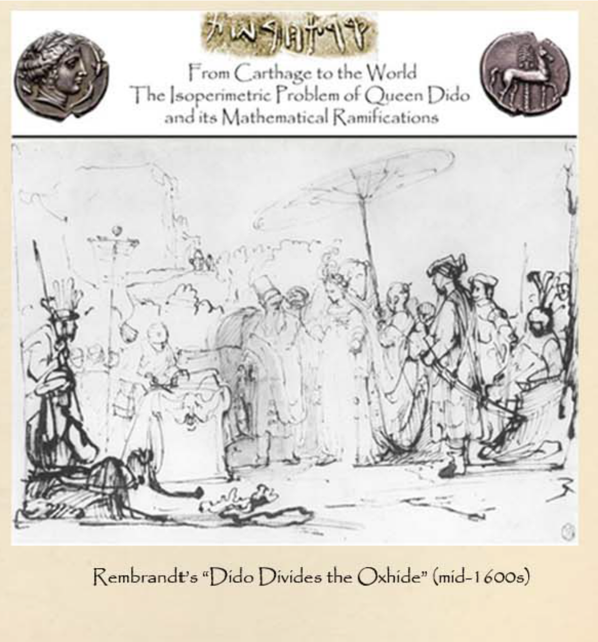
26 сентября 2024 г.

Пролог

- Давид Мамфорд, один из наиболее привлекательных математических умов нашего времени, заметил как-то, что он провёл ужасные, но очень понятные проверочные вычисления чего-то: «У меня ушло несколько часов на то, чтобы всё проверить, но поскольку я не стал от этого умнее, я опущу здесь все детали». Рассказав об этом эпизоде, другой выдающийся математик Юрий Манин отметил: «Мораль: хорошее доказательство то, которое делает нас умнее».
- Очевидно следующее обобщение этого тезиса: «В науке мы ценим то, что делает нас умнее». Понятия хорошей теории открывают новые возможности для решения конкретных задач. Ценна та задача, чьё решение ведёт к новым плодотворным понятиям и методам.

Задача Дидоны

- Задачу Дидоны принято считать началом теории экстремальных задач. Дидона была мифической финикийской принцессой. Вергилий рассказал о её побеге от своего вероломного брата в первой главе «Энеиды». Дидоне надо было принять решение о выборе участка земли рядом с будущим Карфагеном —
- *К месту приплыли они, где высокие ныне увидишь*
  Стены и юные где уж растут Карфагена твердыни;
  Столько купили земли, от сего прозываемой Бирсой,
  Сколько воловьею шкурой могли окружить на прибрежьи.
- По легенде финикийцы разрезали шкуру на тонкие полоски и окружили им большой надел. Принято считать, что Дидона решала изопериметрическую задачу поиска фигуры наибольшей площади, окружённой кривой заданной длины. Не исключено, что Дидона и её подданные решали практическую версию задачи, когда крепость надо было разместить на побережье и часть береговой границы была уже задана.


From Carthage to the World
The Isoperimetric Problem of Queen Dido
and its Mathematical Ramifications
Rembrandt's "Dido Divides the Oxhide" (mid-1600s)

Двойственность Минковского

- Пусть $\overline{E} := E \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Предположим, что $H \subset E$ — выпуклый конус в E, а $-\infty$ вне H. Подмножество $U \subset H$ *выпукло относительно* H или H*-выпукло*, если U — H*-опорное множество* $U_p^H := \{h \in H : h \le p\}$ для некоторого $p \in \overline{E}$.
- Наряду с H-выпуклыми множествами рассмотрим H-выпуклые элементы: $p \in \overline{E}$ — H*-выпуклый*, если $p = \sup U_p^H$. Все H-выпуклые элементы составляют конус $\mathscr{C}(H, \overline{E})$. Можно опускать указание на H, если H определяется контекстом.
- Выпуклые элементы и множества «склеены» *двойственностью Минковского* $\varphi : p \mapsto U_p^H$, которая позволяет изучать выпуклые элементы и множества одновременно.

Пространство выпуклых множеств

- Двойственность Минковского превращает $\mathscr{V}_N$ в конус в пространстве $C(S_{N-1})$ непрерывных функций на евклидовой сфере S_{N-1} — границы единичного шара $\mathfrak{z}_N$. Так возникает *структура Минковского* в $\mathscr{V}_N$. Сложение опорных функций выпуклых фигур совпадает с их алгебраической суммой, называемой также сложением Минковского. Стоит заметить, что *линейная оболочка* $[\mathscr{V}_N]$ пространства $\mathscr{V}_N$ плотна в $C(S_{N-1})$, наделена естественной структурой векторной решетки и называется *пространством выпуклых множеств*.
- Изучение этого пространства началось с пионерских работ А.Д. Александрова в 1937 г. Дальнейшие продвижения связаны с Радстрёмом, Хёрмандером и Пинскером.

Линейные неравенства над выпуклыми поверхностями

Решетняк (1954):

- Мера μ *линейно мажорирует* или *доминирует* меру ν на S_{N-1} при условии, что для каждого разбиения S_{N-1} на конечное множество непересекаюшихся борелевских множеств $U_1, \dots, U_m$ найдутся меры $\mu_1, \dots, \mu_m$ с суммой μ такие, что каждая разность $\mu_k - \nu|_{U_k}$ аннигилирует следы всех линейных функционалов на $\mathbb{R}^N$. Иначе говоря, $\mu \gg_{\mathbb{R}^N} \nu$.
- Для всех сублинейных функционалов p на $\mathbb{R}^N$ будет

$$\int_{S_{N-1}} p d\mu \geq \int_{S_{N-1}} p d\nu$$

если $\mu \gg_{\mathbb{R}^N} \nu$.

Упорядоченность Шоке

Люмис (1962):

- Мера μ *аффинно мажорирует* или *доминирует* меру ν, обе меры заданы на компактном выпуклом подмножестве Q локально выпуклого пространства X при условии, что для каждого разбиения ν на конечное множества слагаемых $\nu_1, \dots, \nu_m$ найдутся меры $\mu_1, \dots, \mu_m$ с суммой μ такие, что каждая разность $\mu_k - \nu_k$ аннигилирует следы на Q всех аффинных функционалов на X. Иначе говоря, $\mu \gg_{\mathrm{Aff}(Q)} \nu$.
- Картье, Фелл и Мейер доказали в 1964 г. что

$$\int_Q f d\mu \geq \int_Q f d\nu$$

для любой непрерывной выпуклой функции f на Q в том и только в том случае, если $\mu \gg_{\mathrm{Aff}(Q)} \nu$. Аналогичное суждение в сторону необходимости было опубликовано в 1970.

Теорема декомпозиции

Кутателадзе (1974):
Пусть $H_1, \dots, H_N$ — конусы в пространстве Рисса X, а f и g — положительные линейные функционалы на X.

- *Неравенство*

$$f(h_1 \vee \dots \vee h_N) \geq g(h_1 \vee \dots \vee h_N)$$

справедливо для всех $h_k \in H_k$ $(k := 1, \dots, N)$ *в том и только в том случае, если для любого разбиения of* g *в сумму положительных слагаемых* $g = g_1 + \dots + g_N$ *найдётся разбиение* f *в сумму* N *положительных слагаемых* $f = f_1 + \dots + f_N$ *такое, что*

$$f_k(h_k) \geq g_k(h_k) \quad (h_k \in H_k;\ k := 1, \dots, N).$$

Александровские меры

- Знаменитая *теорема Александрова* гарантирует существование и единственность с точностью до переноса выпуклого тела с заданной поверхностной функцией. Каждая поверхностная функция — *александровская мера*. Так называют положительную борелевскую меру на единичной сфере, которая не сосредоточена ни на одной большой окружности, но аннигилирует опорные функции точек.
- Каждая александровская мера — инвариантный относительно сдвигов аддитивный функционала на конусе $\mathscr{V}_N$. Конус положительных инвариантных относительно сдвигов мер из двойственного пространства $C'(S_{N-1})$ для пространства $C(S_{N-1})$ обозначается $\mathscr{A}_N$.

Сумма Бляшке

- Пусть $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathscr{V}_N$. Равенство $\mathfrak{x} =_{\mathbb{R}^N} \mathfrak{y}$ означает, что $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ совпадают с точностью до переноса. Итак, $=_{\mathbb{R}^N}$ — эквивалентность, порождённая предпорядком $\geq_{\mathbb{R}^N}$ на $\mathscr{V}_N$, подразумевающим возможность размещения одной фигуры в другой с помощью параллельного переноса.
- Сумма поверхностных функций $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ порождает единственный класс $\mathfrak{x}\#\mathfrak{y}$ транслятов, называемый *суммой Бляшке* $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$.

Естественная двойственность

- Пусть $C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N$ — фактор-пространство $C(S_{N-1})$ по подпространству всех следов на S_{N-1} линейных функционалов на $\mathbb{R}^N$. Пусть далее $[\mathscr{A}_N]$ — пространство $\mathscr{A}_N - \mathscr{A}_N$ инвариантных относительно сдвигов мер, т. е. линейная оболочка множества александровских мер.
- $C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N$ и $[\mathscr{A}_N]$ приведены в двойственность канонической билинейной формой

$$\langle f, \mu \rangle = \frac{1}{N} \int_{S_{N-1}} f d\mu$$

$$(f \in C(S_{N-1})/\mathbb{R}^N,\ \mu \in [\mathscr{A}_N]).$$

- Если $\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ и $\mathfrak{y} \in \mathscr{A}_N$, то $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle$ совпадает со *смешанным объёмом* $V_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$.

Конусы допустимых направлений

- Если K — конус в векторном пространстве X, приведённым в двойственность с другим векторным пространством Y, то *двойственный конус* к K определяется так:

$$K^* := \{y \in Y \mid (\forall x \in K)\ \langle x, y \rangle \geq 0\}.$$

- Выпуклому подмножеству $U \subset X$ и точке $\bar{x} \in U$ соответствует

$$U_{\bar{x}} := \mathrm{Fd}(U, \bar{x}) := \{h \in X \mid (\exists \alpha \geq 0)\ \bar{x} + \alpha h \in U\},$$

конус допустимых направлений U в $\bar{x}$.

- Если $\bar{\mathfrak{x}} \in \mathscr{A}_N$, то двойственный конус $\mathscr{A}^*_{N,\bar{\mathfrak{x}}}$ к конусу допустимых направлений $\mathscr{A}_N$ в точке at $\bar{\mathfrak{x}}$ допускает представление

$$\mathscr{A}^*_{N,\bar{\mathfrak{x}}} = \{f \in \mathscr{A}^*_N \mid \langle \bar{\mathfrak{x}}, f \rangle = 0\}.$$

Двойственные конусы в пространствах поверхностей

- Пусть $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ — выпуклые фигуры. Тогда
  (1) $\mu(\mathfrak{x}) - \mu(\mathfrak{y}) \in \mathscr{V}_N^* \leftrightarrow \mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^N} \mu(\mathfrak{y})$;
  (2) если $\mathfrak{x} \geq_{\mathbb{R}^N} \mathfrak{y}$, то $\mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^N} \mu(\mathfrak{y})$;
  (3) $\mathfrak{x} \geq_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{y} \leftrightarrow \mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^2} \mu(\mathfrak{y})$;
  (4) если $\mathfrak{y} - \bar{\mathfrak{x}} \in \mathscr{A}_{N,\bar{\mathfrak{x}}}^*$, то $\mathfrak{y} =_{\mathbb{R}^N} \bar{\mathfrak{x}}$;
  (5) если $\mu(\mathfrak{y}) - \mu(\bar{\mathfrak{x}}) \in \mathscr{V}_{N,\bar{\mathfrak{x}}}^*$, то $\mathfrak{y} =_{\mathbb{R}^N} \bar{\mathfrak{x}}$.
- Разумно не различать выпуклую фигуру, соответствующий класс эквивалентности транслятов в $\mathscr{V}_N/\mathbb{R}^N$ и отвечающую ему александровскую меру из $\mathscr{A}_N$.

Сравнение структур

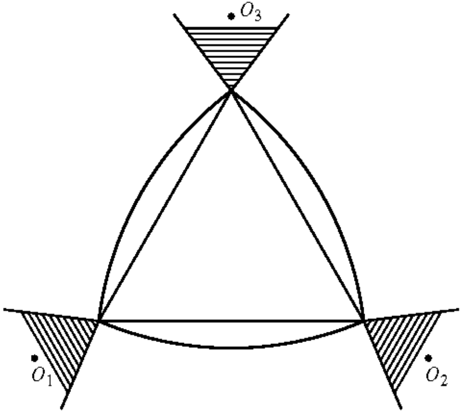
Объект параметризации	Структура Минковского	Структура Бляшке
конус множества	$\mathcal{V}_N/\mathbb{R}^N$	$\mathcal{A}_N$
двойственный конус	$\mathcal{V}_N^*$	$\mathcal{A}_N^*$
положительный конус	$\mathcal{A}_N^*$	$\mathcal{A}_N$
типичный линейный функционал	$V_1(\mathfrak{z}_N, \cdot)$ (ширина)	$V_1(\cdot, \mathfrak{z}_N)$ (площадь)
вогнутый функционал (степень объема)	$V^{1/N}(\cdot)$	$V^{(N-1)/N}(\cdot)$
простейшая выпуклая программа	задача Урысона	изопериметрическая задача
ограничение операторного типа	включение фигур	неравенства на «кривизны»
множитель Лагранжа	поверхность	функция
дифференциал объема в точке $\bar{\mathfrak{x}}$ пропорционален	$V_1(\bar{\mathfrak{x}}, \cdot)$	$V_1(\cdot, \bar{\mathfrak{x}})$

Внешняя задача Урысона

- Среди выпуклых фигур, содержащих $\mathfrak{x}_0$ и имеющих заданную интегральную ширину, найти элемент наибольшего объёма.
- *Допустимое выпуклое тело* $\bar{\mathfrak{x}}$ *— решение внешней задачи Урысона в том и только в том случае, если найдутся мера* μ *и положительное число* $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}_+$ *такие, что*
  (1) $\bar{\alpha}\mu(\mathfrak{z}_N) \gg_{\mathbb{R}^N} \mu(\bar{\mathfrak{x}}) + \mu$;
  (2) $V(\bar{\mathfrak{x}}) + \frac{1}{N}\int_{S_{N-1}} \bar{\mathfrak{x}} d\mu = \bar{\alpha} V_1(\mathfrak{z}_N, \bar{\mathfrak{x}})$;
  (3) $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ *для всех* z *из носителя* μ.

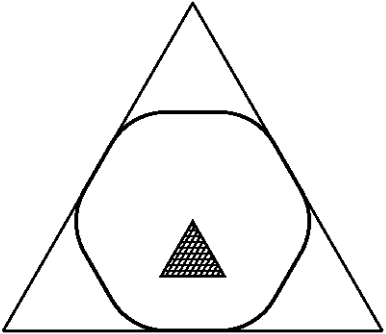
Решения

- Если $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{z}_{N-1}$, то $\bar{\mathfrak{x}}$ — *сферическая линза*, а μ — сужение поверхностной функции шара радиуса $\bar{\alpha}^{1/(N-1)}$ на дополнение носителя линзы до S_{N-1}.
- Если $\mathfrak{x}_0$ — равносторонний треугольник, то решение $\bar{\mathfrak{x}}$ имеет вид



Симметричные решения

- Общее решение внутренней задачи Урысона внутри треугольника в классе центрально симметричных выпуклых фигур таково:



Текущие гиперплоскости

- Найти две выпуклые фигуры $\bar{\mathfrak{x}}$ и $\bar{\mathfrak{y}}$ внутри заданного выпуклого тела$\mathfrak{x}_0$, разделенных гиперплоскостью с единичной внешней нормалью z_0 и обладающую наибольшим суммарным объёмом $\bar{\mathfrak{x}}$ и $\bar{\mathfrak{y}}$ и заданной суммой интегральных ширин.
- *Допустимая пара выпуклых тел $\bar{\mathfrak{x}}$ и $\bar{\mathfrak{y}}$ служит решением внутренней задачи Урысона с текущей гиперплоскостью в том и только в том случае, если найдутся выпуклые фигуры $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ и положительные числа $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ такие, что*
  (1) $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} \# \bar{\alpha}\mathfrak{z}_N$;
  (2) $\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y} \# \bar{\alpha}\mathfrak{z}_N$;
  (3) $\mu(\mathfrak{x}) \geq \bar{\beta}\varepsilon_{z_0}$, $\mu(\mathfrak{y}) \geq \bar{\beta}\varepsilon_{-z_0}$;
  (4) $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ *for all* $z \in \operatorname{supp}(\mathfrak{x}) \setminus \{z_0\}$;
  (5) $\bar{\mathfrak{y}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ *for all* $z \in \operatorname{supp}(\mathfrak{x}) \setminus \{-z_0\}$, *где* $\operatorname{supp}(\mathfrak{x})$ — *носитель* $\mathfrak{x}$, *т. е. носитель поверхностной функции* $\mu(\mathfrak{x})$ *фигуры* $\mathfrak{x}$.

Оптимальность по Парето

- Рассмотрим компанию экономических агентов, каждый из которых стремится максимизировать свой доход. *Принцип эффективности Парето* гласит, что в качестве эффективного согласования противоречивых целей разумно выбрать состояние, в котором никто не может увеличить свой доход, не уменьшая дохода ни одного из других участников компании.
- Формально это подразумевает нахождение максимальных элементов множества всевозможных наборов доходов агентов во всех мыслимых ситуациях, т. е. набора векторов в конечномерном арифметическом пространстве с покоординатным порядком. Ясно, что понятие оптимальности по Парето легко переносится в произвольные упорядоченные векторные пространства.

Векторная изопериметрическая задача

- Даны выпуклые тела $\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_M$. Нужно найти выпуклое тело $\mathfrak{x}$ не менее заданного объёма, которое минимизирует каждый из смешанных объёмов $V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_1), \dots, V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_M)$. Иначе говоря,

$$\mathfrak{x} \in \mathscr{A}_N;\ \ \widehat{p}(\mathfrak{x}) \geq \widehat{p}(\bar{\mathfrak{x}});\ \ (\langle \mathfrak{y}_1, \mathfrak{x} \rangle, \dots, \langle \mathfrak{y}_M, \mathfrak{x} \rangle) \to \inf.$$

  Ясно, что это удовлетворяющая условию Слейтера задача выпуклого программирования в структуре Бляшке.

- *Каждое оптимальное по Парето решение $\bar{\mathfrak{x}}$ векторной изопериметрической задачи имеет вид*

$$\bar{\mathfrak{x}} = \alpha_1 \mathfrak{y}_1 + \dots + \alpha_m \mathfrak{y}_m,$$

  где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — положительные числа.

Задача Лейденфроста

- При данном объёме трехмерной выпуклой фигуры минимизировать площадь её поверхности и вертикальную ширину.
- В силу симметрии, всё сводится к аналогичной плоской задаче с двумя целями, каждое оптимальное по Парето решение которой — *стадион*, т. е. взвешенная сумма Минковского диска и горизонтального отрезка прямой.
- *Плоский сфероид, оптимальное по Парето решение задачи Лейденфроста — результат вращение стадиона вокруг вертикальной оси в центре стадиона.*

Внутренняя задача Урысона с уплощением

- Заданы выпуклое тело $\mathfrak{x}_0 \in \mathscr{V}_N$ и некоторое направление уплощения $\bar{z} \in S_{N-1}$. Рассматривая тело $\mathfrak{x} \subset \mathfrak{x}_0$ фиксированной интегральной ширины, нужно максимизировать объём $\mathfrak{x}$ и минимизировать ширину $\mathfrak{x}$ в направлении уплощения:
$\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_N;\ \mathfrak{x} \subset \mathfrak{x}_0;\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_N \rangle \geq \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_N \rangle;\ (-p(\mathfrak{x}), b_{\bar{z}}(\mathfrak{x})) \to \inf.$
- *Допустимое выпуклое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ оптимально по Парето для внутренней задачи Урысона с уплощением в направлении $\bar{z}$ ы том и только том случае если найдутся положительные числа α, β и выпуклая фигура $\mathfrak{x}$ такие, что*

$$\mu(\bar{\mathfrak{x}}) = \mu(\mathfrak{x}) + \alpha\mu(\mathfrak{z}_N) + \beta(\varepsilon_{\bar{z}} + \varepsilon_{-\bar{z}});$$
$$\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z) \quad (z \in \operatorname{supp}(\mu(\mathfrak{x})).$$

Вращательная симметрия

- Допустим, что плоская выпуклая фигура $\mathfrak{x}_0 \in \mathscr{V}_2$ имеет ось симметрии axis $A_{\bar{z}}$ с образующей $\bar{z}$. Допустим далее, что $\mathfrak{x}_{00}$ — результат вращения $\mathfrak{x}_0$ вокруг оси симметрии $A_{\bar{z}}$ in $\mathbb{R}^3$.

$$\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_3;$$
$$\mathfrak{x} \text{ — выпуклое тело вращении вокруг } A_{\bar{z}};$$
$$\mathfrak{x} \supset \mathfrak{x}_{00};\ \langle \mathfrak{z}_N, \mathfrak{x} \rangle \geq \langle \mathfrak{z}_N, \bar{\mathfrak{x}} \rangle;$$
$$(-p(\mathfrak{x}), b_{\bar{z}}(\mathfrak{x})) \to \inf.$$

- *Каждое оптимальное по Парето решение представляет результат вращения вокруг оси симметрии некоторого оптимального по Парето решения плоской внутренней задачи Урысона с уплощением в направлении оси.*

Мыльные пузыри

- Немного известно об аналогичных задачах в произвольных размерностях. Особое место занимает результат Погорелова, который доказал, что «мыльный пузырь» в тетраэдре представляет собой результат обкатывания шаром решения внутренней задачи Урысона, т. е. взвешенную сумму Бляшке тетраэдра и шара.

Внешняя задача Урысона с уплощением

- Заданы некоторое выпуклое тело $\mathfrak{x}_0 \in \mathscr{V}_N$ и направление уплощения $\bar{z} \in S_{N-1}$. В множестве выпуклых тел $x \supset \mathfrak{x}_0$ заданной интегральной ширины максимизировать объём и минимизировать ширину в направлении уплощения:
$\mathfrak{x} \in \mathscr{V}_N;\ \mathfrak{x} \supset \mathfrak{x}_0;\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_N \rangle \geq \langle \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_N \rangle;\ (-p(\mathfrak{x}), b_{\bar{z}}(\mathfrak{x})) \to \inf.$
- *Допустимое выпуклое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ — оптимальное по Парето решение внешней задачи Урысона с уплощением в том и только в том случае, если найдутся положительные числа α, β и выпуклая фигура $\mathfrak{x}$ такие, что*

$$\mu(\bar{\mathfrak{x}}) + \mu(\mathfrak{x}) \gg_{\mathbb{R}^N} \alpha\mu(\mathfrak{z}_N) + \beta(\varepsilon_{\bar{z}} + \varepsilon_{-\bar{z}});$$
$$V(\bar{\mathfrak{x}}) + V_1(\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}) = \alpha V_1(\mathfrak{z}_N, \bar{\mathfrak{x}}) + 2N\beta b_{\bar{z}}(\bar{\mathfrak{x}});$$
$$\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z) \quad (z \in \operatorname{supp}(\mu(\mathfrak{x})).$$

Оптимальные выпуклые оболочки

- При заданных $\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_m$ in $\mathbb{R}^N$ расположить $\mathfrak{x}_k$ внутри $\mathfrak{y}_k$ при $k := 1, \dots, m$ так, чтобы максимизировать объём каждого из $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m$ и минимизировать интегральную ширину выпуклой оболочки всех этих тел:

$$\mathfrak{x}_k \subset \mathfrak{y}_k; \ \left(-p(\mathfrak{x}_1), \dots, -p(\mathfrak{x}_m), \langle \operatorname{co}\{\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m\}, \mathfrak{z}_N \rangle\right) \to \inf .$$

- *Допустимые $\bar{\mathfrak{x}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{x}}_m$ обладают оптимальной по Парето общей выпуклой оболочкой в том и только в том случае, если найдутся числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}_+$, не обращающиеся в нуль одновременно и борелевские меры $\mu_1, \dots, \mu_m$ и $\nu_1, \dots, \nu_m$ on S_{N-1} такие, что*

$$\nu_1 + \dots + \nu_m = \mu(\mathfrak{z}_N);$$
$$\bar{\mathfrak{x}}_k(z) = \mathfrak{y}_k(z) \quad (z \in \operatorname{supp}(\mu_k));$$
$$\alpha_k \mu(\bar{\mathfrak{x}}_k) = \mu_k + \nu_k \ (k := 1, \dots, m).$$

Решена ли задача Дидоны?

- С утилитарной точки зрения ответ, конечно, утвердительный. Нет свидетельств того, что Дидона столкнулась со сложностями, проявляла нерешительность и затягивала выбор участка земли. С практической точки зрения ситуация, в которой Дидона принимала решение, была не столь примитивной, как представляется на первый взгляд. Нужная общность была недоступна в математической модели, известной нам как классическая изопериметрическая задача.
- Задача Дидоны, вдохновлявшая наших предков, остаётся таким же интеллектуальным вызовом, как кантовские звёздное небо над нами и моральный закон внутри нас.