НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин, М.А.Тайцлин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Новосибирск . 1973

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин, М.А.Тайцлин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Лекции для студентов - математиков НГУ

Глубокоуважаемому Игорю Андреевичу Полетаеву от авторов

14.1.74

М.Тайцлин

Новосибирск . 1973

УДК I64.02

Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин, М.А.Тайцлин, Математическая логика, серия "Библиотека кафедры алгебры и математической логики Новосибирского университета", вып. I2, Новосибирск, I973, I-I59.

Книга представляет собою учебник по математической логике для студентов-математиков университетов. В ней содержится весь обязательный материал, а также некоторые дополнительные вопросы, которые студенты могут изучать как самостоятельно, так и на семинарских занятиях. Учебник доступен уже для студентов первого курса. Никаких предварительных знаний, выходящих за рамки школьной программы по математике, не предполагается. При написании учебника широко использован десятилетний опыт преподавания математической логики в Новосибирском университете. Отзывы и замечания направляйте по адресу: 630090, Новосибирск, 90, Институт математики, Евгению Андреевичу Палютину.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга представляет собой учебник по математической логике для студентов-математиков университетов. Она включает весь обязательный материал, а также некоторые дополнительные вопросы, которые студенты могут изучать как самостоятельно, так и на семинарских занятиях.

Курс математической логики читается в Новосибирском университете во втором и третьем семестрах. Поэтому в книге не используются никакие сведения из других математических дисциплин, за исключением определений группы, кольца и поля, а также простейших свойств сложения и умножения чисел.

Хотя в книге встречаются и упражнения, их число явно недостаточно (особенно в главах I и 4). Предполагается, что читатель параллельно решает упражнения из какого-то задачника, например из задачника И.А.Лаврова и Л.Л.Максимовой.

Главы 2 и 3 можно читать сразу после § I. Глава 4 практически не зависит от глав 2 и 3. Нужно лишь знать определения алгебраической системы из § 14 и понятие истинности формулы на алгебраической системе из § 16. Весь материал, помещенный в добавлении, не зависит от глав I и 4.

Авторство многих теорем не приписано никому, но это, разумеется, не означает, что эти теоремы найдены авторами книги. Вообще, вопросы приоритета в книге не обсуждаются, а библиографические ссылки отсутствуют.

Мы с благодарностью вспоминаем нашего учителя Анатолия Ивановича Мальцева, лекции и семинары которого по математической логике и связанным с ней вопросам определили и наши научные интересы.

Мы благодарны Ларисе Львовне Максимовой, затратившей много труда на чтение рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Логика - это наука о законах правильного мышления. Это одна из древнейших наук. Основные ее законы были сформулированы еще древнегреческим мыслителем Аристотелем. Однако вплоть до середины I9 века она, в отличие от других наук, практически не развивалась. Это объясняется тем, что многие считали эту науку хотя и важной, но в высшей степени очевидной. Особого интереса не вызвали и работы англичанина Дж.Буля (середина I9 века), который попробовал формализовать логику.

Значительно усилился интерес к логике в связи с открытием неевклидовых геометрий и возникшими проблемами обоснования анализа. Но основательная потребность в развитии логики возникла в конце I9 - начале 20 вв., когда в основаниях математики появились большие трудности.

В конце I9 века Г.Кантор построил красивый фундамент математики. В основе всего лежало понятие множества. Однако вскоре обнаружилось, что рассуждения Кантора приводят к противоречиям.

I. Парадокс Рассела. Для произвольного множества является вполне осмысленным вопрос: "Является ли оно своим собственным элементом?" Примером множества, который содержит самого себя в качестве элемента, может служить множество всех множеств. Рассмотрим множество $\mathcal{X}$ всех множеств, для которых ответ на этот вопрос отрицательный. Спросим, является ли это множество элементом самого себя? К своему ужасу мы обнаруживаем, что если ответ положительный, то имеем $\mathcal{X} \in \mathcal{X}$, т.е. ответ должен быть отрицательным. Если ответ отрицательный, то в силу определения множества $\mathcal{X}$ ответ должен быть положительным.

Этот парадокс объясняет, что если мы не хотим приходить к противоречиям, то необходимо отказаться от приятной мысли, что любое условие на элементы определяет некоторое множество. К счастью, такого сорта парадоксы можно получить лишь с "большими" множествами, такими, как множество всех множеств и тому подобные, без которых математика вполне может обойтись.

2. Парадокс лжеца. Некто говорит: "Фраза, которую вы сейчас слышите, ложна". Попробуем выяснить, правду сказал этот человек или солгал. Если предположить, что он сказал правду, то из смысла фразы получется, что он солгал. Если он солгал, то из того, что фраза ложна, получаем, что он сказал правду.

Этот парадокс привел к важной теореме математической логики, которая говорит (грубо говоря) о том, что в исчислении нельзя формализовать понятие истинности формул этого исчисления.

3. Парадокс Греллинга. Некоторые русские прилагательные обладают тем свойством, которое они выражают, например, "русское", "многосложное". Такие прилагательные назовем автологическими. Остальные прилагательные назовем гетерологическими. Например, "красный", "круглый" - гетерологические. Если мы теперь попробуем определить гетерологическое или автологическое прилагательное "гетерологическое", то, как и в предыдущих примерах, мы не сможем выпутаться из противоречий.

После обнаружения парадоксов назрела необходимость точного определения понятия доказательства. Эта необходимость привела к созданию нового раздела математики - математической логики.

Возникнув для целей обоснования математики, математическая логика обогатила своими методами и оказала влияние на многие разделы математики, а также на другие науки. Еще в 30-е годы советский математик А.И.Мальцев применил математическую логику в алгебре. Сейчас эта связь алгебры и математической логики развилась в самостоятельный раздел математики - теорию моделей. Математическая логика ввела в математику формальные языки. Эти языки широко используются в программировании для связи между машиной и человеком.

Глава I

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ I. Множества

Мы не будем стремиться к совершенно строгому определению понятия множества, так как иначе изложение стало бы слишком формальным и длинным. А это не соответствовало бы вспомогательной роли теории множеств в этой книге.

Совокупность $\mathcal{A}$ некоторых предметов, которые будут называться элементами $\mathcal{A}$, назовем *множеством*. Если x - элемент множества $\mathcal{A}$, то будем говорить, что x *принадлежит* $\mathcal{A}$, и обозначать $x \in \mathcal{A}$. Два множества с одними и теми же элементами будем считать *равными*. Если $\varphi(x)$ - некоторое свойство объекта x, то через $\{x \mid \varphi(x)\}$ будем обозначать множество, элементы которого суть все объекты x, обладающие свойством $\varphi(x)$.

Будем говорить, что множество $\mathcal{A}$ *содержится* во множестве $\mathcal{B}$, и обозначать $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, если $\mathcal{B}$ принадлежат все элементы множества $\mathcal{A}$. Пишем $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ (множество $\mathcal{A}$ строго содержится в множестве $\mathcal{B}$), если $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$. Таким образом, два множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ тогда и только тогда равны, когда $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - множества. Определим следующие множества:

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x \mid x \in \mathcal{A}$ и $x \in \mathcal{B}\}$ - *пересечение* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$,

$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x \mid x \in \mathcal{A}$ или $x \in \mathcal{B}\}$ - *объединение* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$,

$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{x \mid x \in \mathcal{A}$ и $x \notin \mathcal{B}\}$ - *разность* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Операции пересечения и объединения удовлетворяют следующим равенствам для любых множеств $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ia. } \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A} \\ \text{Iб. } \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A} \end{array}\right\} \text{ - коммутативность,}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{2a. } \mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A} \\ \text{2б. } \mathcal{A} \cup \mathcal{A} = \mathcal{A} \end{array}\right\} \text{ - идемпотентность,}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3а.\ (\mathcal{A}\cap\mathcal{B})\cap C=\mathcal{A}\cap(\mathcal{B}\cap C) \\ 3б.\ (\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\cup C=\mathcal{A}\cup(\mathcal{B}\cup C) \end{array}\right\} \text{ - ассоциативность,}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4а.\ (\mathcal{A}\cap\mathcal{B})\cup(\mathcal{A}\cap C)=\mathcal{A}\cap(\mathcal{B}\cup C) \\ 4б.\ (\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\cap(\mathcal{A}\cup C)=\mathcal{A}\cup(\mathcal{B}\cap C) \end{array}\right\} \text{ - дистрибутивность.}$$

Проверка этих равенотв не представляет труда. Докажем, например, 4а. Пусть x принадлежит левой части равенства. Тогда либо $x\in\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$, либо $x\in\mathcal{A}\cap C$. В обоих случаях $x\in\mathcal{B}\cup C$ и $x\in\mathcal{A}$, т.е. x принадлежит правой части. Если $x\in\mathcal{A}\cap(\mathcal{B}\cup C)$ и $x\notin\mathcal{B}$, то $x\in C$ и $x\in\mathcal{A}\cap C$. Следовательно, x принадлежит левой части равенства 4а.

Если $\mathcal{A}$ - множество, то множество $P(\mathcal{A})=\{x \mid x\subseteq\mathcal{A}\}$ называется множеством всех подмножеств $\mathcal{A}$ или м н о ж е с т в о м - с т е п е н ь ю $\mathcal{A}$. Множество $\mathcal{A}$ назовем п у с т ы м, если оно не содержит ни одного элемента. Очевидно, что если $\mathcal{A}$ пустое, то $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ для любого $\mathcal{B}$. Отсюда следует, что пустое множество единственно. Обозначим его через $\varnothing$.

Если $\mathcal{J}\neq\varnothing$, $\mathcal{A}_i$ $(i\in\mathcal{J})$ - множества, то о б ъ е д и н е н и е м $\bigcup_{i\in\mathcal{J}}\mathcal{A}_i$ будем называть множество $\{x \mid x\in\mathcal{A}_i$ для некоторого $i\in\mathcal{J}\}$, а п е р е с е ч е н и е м $\bigcap_{i\in\mathcal{J}}\mathcal{A}_i$ - множество $\{x \mid x\in\mathcal{A}_i$ для всех $i\in\mathcal{J}\}$.

Если $\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n,\mathcal{B}$ - множества, то запись $\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n\to\mathcal{B}$ будет обозначать, что $\bigcap_{i\le n}\mathcal{A}_i\subseteq\mathcal{B}$, а $\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n\to$ будет обозначать, что $\bigcap_{i\le n}\mathcal{A}_i=\varnothing$. Если $\mathfrak{A}_0,\dots,\mathfrak{A}_n,\mathfrak{B}$ - какие-то утверждения, то запись

$$\frac{\mathfrak{A}_0,\dots,\mathfrak{A}_n}{\mathfrak{B}}$$

будет обозначать, что либо одно из утверждений $\mathfrak{A}_0,\dots,\mathfrak{A}_n$ ложно, либо $\mathfrak{B}$ истинно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ - множества. Тогда

1) $$\frac{\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n\to\mathcal{B}_1;\ \mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n\to\mathcal{B}_2}{\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n\to\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2};$$

2) $$\frac{\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n,\mathcal{A}\to C;\ \mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n,\mathcal{B}\to C;\ \mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n\to\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}{\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n\to C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x\in\bigcap_{i\le n}\mathcal{A}_i$. Из истинности утверждений пункта 1) над чертой имеем $x\in\mathcal{B}_1$ и $x\in\mathcal{B}_2$, т.е. $x\in\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2$. Теперь предположим, что утверждения пункта 2) над чертой истинны и $x\in\bigcap_{i\le n}\mathcal{A}_i$. Из истинности третьего утверждения следует, что $x\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$, т.е. $x\in\mathcal{A}$ или $x\in\mathcal{B}$. В обоих случаях из истинности первых двух утверждений получаем $x\in C$. Предложение доказано.

У п р а ж н е н и е 1. Пусть множества $\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n,\mathcal{B}$ являются подмножествами некоторого множества C. Обозначим через $\overline{\mathcal{B}}$ множество $C\setminus\mathcal{B}$. Доказать:

1) $$\frac{\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n,\overline{\mathcal{B}}\to}{\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n\to\mathcal{B}};\qquad 2)\ \frac{\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n\to\mathcal{B}}{\mathcal{A}_0,\dots,\mathcal{A}_n,\overline{\mathcal{B}}\to}.$$

§ 2. Язык исчисления высказываний

Исчисление высказываний анализирует высказывания с точностью до простых положительных утверждений. Рассмотрим два высказывания: 1. "На улице идет дождь, и на улице не светит солнце", 2. "Если все числа множества $\mathcal{X}$ простые, то наибольший общий делитель чисел множества $\mathcal{X}$ равен 1". Эти высказывания можно записать в виде схем: 1) $\mathcal{P}$ и не Q, 2) если $\mathcal{R}$, то S, где $\mathcal{P}$, Q, $\mathcal{R}$ и S - положительные утверждения, которые уже нельзя расчленить в исчислении высказываний. Союзы "и", "если..., то" играют роль связок, образующих из высказываний $\mathcal{P}$, Q, $\mathcal{R}$ и S более сложные высказывания.

Перейдем теперь к построению формального языка исчисления высказываний. А л ф а в и т о м назовем 3 группы символов.

1. Пропозициональные переменные: $\mathcal{P}_0,\dots,\mathcal{P}_k,\dots$, где k - натуральное число.

2. Логические символы, или связки: импликация - $\to$, конъюнкция - $\wedge$, дизъюнкция - $\vee$, отрицание - $\neg$, символ следования - $\vdash$.

3. Вспомогательные символы: левая скобка - (, правая скобка -), запятая - , .

Ф о р м у л о й назовем последовательность символов алфавита, удовлетворяющую следующему индуктивному определению:

1. Пропозициональная переменная является формулой (будем называть ее элементарной или атомарной),

2. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ - формулы, то $(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})$ и $\neg\mathfrak{A}$ - формулы.

3. Последовательность $\mathfrak{A}$ является формулой только в том случае, если это можно установить с помощью пунктов I и 2.

Из определения следует, что $(\mathcal{P}_0 \wedge \mathcal{P}_1) \vee \mathcal{P}_0$ – не формула (нет внешних скобок). Однако в целях сокращения записи мы часто будем опускать внешние скобки. Таким образом, $(\mathcal{P}_0 \wedge \mathcal{P}_1) \vee \mathcal{P}_0$ будет сокращенной записью формулы $((\mathcal{P}_0 \wedge \mathcal{P}_1) \vee \mathcal{P}_0)$. Кроме этого, мы будем пользоваться также следующим правилом сокращения. Расположим логические символы в ряд $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$. Будем говорить, что логический символ α сильнее символа β, если α стоит левее β в этом ряду. Последовательность $\neg \mathcal{P}_0 \wedge \mathcal{P}_2 \vee \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{P}_1$ будем считать сокращением записи формулы $(((\neg \mathcal{P}_0 \wedge \mathcal{P}_2) \vee \mathcal{P}_0) \rightarrow \mathcal{P}_1)$. Правило, которым мы пользуемся при восстановлении формулы, состоит в следующем: сначала навешиваются скобки на пару букв, между которыми стоит более сильная связка, затем из оставшихся выбирается более сильная и т.д. При этом предполагается, что восстановление формулы будет однозначным. Например, $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \mathcal{P}_3$ не является сокращением никакой формулы, так как восстановление не однозначно. В дальнейшем формулы исчисления высказываний будут обозначаться готическими буквами, а пропозициональные переменные латинскими буквами $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$, причем $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ могут иметь индексы.

П о д ф о р м у л ы формулы $\mathfrak{A}$ определим индукцией по построению формулы :

I. Подформула элементарной формулы одна и совпадает с ней самой.

2. Подформулами формулы $\neg \mathfrak{A}$ будут все подформулы $\mathfrak{A}$ и формула $\neg \mathfrak{A}$.

3. Подформулами формул $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ и $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$ будут все подформулы $\mathfrak{A}$, все подформулы $\mathfrak{B}$, а также сами эти формулы $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ и $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$ соответственно.

Подформула, таким образом, является частью формулы, которая сама является формулой. Одна и та же подформула $\mathfrak{A}$ может входить в формулу $\mathfrak{B}$ несколько раз. Например, в формуле $(\mathcal{P}_0 \wedge \mathcal{P}_1) \vee \mathcal{P}_0$ подформула $\mathcal{P}_0$ входит дважды. В этом случае мы будем говорить о различных вхождениях $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

Если все вхождения подформулы $\mathfrak{A}$ в формуле $\mathfrak{B}$ заменить на формулу $\mathfrak{C}$, то получим новую формулу, которую обозначим через $[\mathfrak{B}]^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{C}}$.

С е к в е н ц и я м и назовем последовательности следующих четырех видов:

$$\mathfrak{A}_0, \dots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}; \quad \mathfrak{A}_0, \dots, \mathfrak{A}_n \vdash; \quad \vdash \mathfrak{B} \quad \text{и} \quad \vdash,$$

где $\mathfrak{A}_0, \dots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}$ – формулы, n – натуральное число.

Часто, для секвенций, будет употребляться такая запись: $\Gamma \vdash \mathfrak{B}$ или $\Gamma \vdash$, где Γ обозначает последовательность $\mathfrak{A}_0, \dots, \mathfrak{A}_n$ или пустую последовательность.

§ 3. Формулировка исчисления высказываний

С х е м о й а к с и о м исчисления высказываний (ИВ) является следующая:

$$\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}.$$

П р а в и л а м и в ы в о д а ИВ являются следующие:

I. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}; \ \Gamma \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}$;

2. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}$;

3. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}$;

4. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$;

5. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$;

6. $\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}; \ \Gamma, \mathfrak{C} \vdash \mathfrak{B}; \ \Gamma \vdash \mathfrak{A} \vee \mathfrak{C}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}$;

7. $\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}}$;

8. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}; \ \Gamma \vdash \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}$;

9. $\dfrac{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \vdash}{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}$;

I0. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}; \ \Gamma \vdash \neg \mathfrak{A}}{\Gamma \vdash}$;

II. $\dfrac{\Gamma_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Gamma_2 \vdash \mathfrak{C}}{\Gamma_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \Gamma_2 \vdash \mathfrak{C}}$;

I2. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}{\Gamma, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A}}$.

Частным случаем схемы аксиом или просто а к с и о м о й называется секвенция $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ уже не переменная для формул, а конкретная формула исчисления высказываний. Аналогично, если в правилах вывода в качестве последовательности Γ и переменных $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ берутся конкретная последовательность формул и конкретные формулы, то получаем частные случаи (или п р и м е н е н и я) п р а в и л в ы в о д а.

Будем говорить, что секвенция, стоящая в правиле под чертой, получается из секвенций, стоящих над чертой, при помощи этого правила.

Линейным доказательством назовем конечную последовательность секвенций $C_0,\dots,C_n$, которая удовлетворяет следующему условию: каждая секвенция C_i, $i \le n$, является либо аксиомой, либо получается из предыдущих при помощи правил вывода I–I2. Секвенция C называется доказуемой, если существует доказательство $C_0,\dots,C_n$, у которого $C_n = C$.

Заметим, что если $C_0,\dots,C_n$ – доказательство и $C'_0,\dots,C'_k$ – доказательство, то $C_0,\dots,C_n,C'_0,\dots,C'_k$ – тоже доказательство.

Определим индуктивно понятие дерева:

I. Всякая секвенция является деревом.

2. Если $\mathfrak{D}_1,\mathfrak{D}_2,\mathfrak{D}_3$ – деревья и C – секвенция, то

$$\frac{\mathfrak{D}_1}{C},\quad \frac{\mathfrak{D}_1;\mathfrak{D}_2}{C},\quad \frac{\mathfrak{D}_1;\mathfrak{D}_2;\mathfrak{D}_3}{C}\qquad \text{– деревья.}$$

Одна и та же секвенция может входить в дерево несколько раз. Секвенцию вместе с ее местом расположения в дереве $\mathfrak{D}$ будем называть вхождением секвенции в дерево $\mathfrak{D}$.

Вхождение секвенции, над которым нет горизонтальной черты, будет называться начальным. Вхождение секвенции, под которым нет горизонтальной черты, будет называться заключительным. Часто мы будем употреблять слово "секвенция" вместо "вхождение секвенции", если из контекста ясно, о каком вхождении идет речь. Ясно, что дерево может иметь много начальных секвенций, но заключительная секвенция только одна. Часть дерева, состоящую из секвенций, расположенных над некоторой чертой, под той же чертой, и самой черты, назовем переходом.

Дерево $\mathfrak{D}$ назовем доказательством в виде дерева, если все его начальные секвенции – аксиомы, а переходы – применения правил вывода.

Пример I:

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{P}\vdash\mathcal{P}}{\mathcal{P},Q\vdash\mathcal{P};}\qquad \dfrac{\dfrac{Q\vdash Q}{Q,\mathcal{P}\vdash Q}\ \text{– применение правила I2,}}{\mathcal{P},Q\vdash Q}\ \text{– применение правила II,}}{\mathcal{P},Q\vdash\mathcal{P}\wedge Q}\ \text{– применение правила I.}$$

Доказательство в виде дерева $\mathfrak{D}$ называется доказательством в виде дерева секвенции C (в этом случае еще говорят, что C имеет

доказательство в виде дерева $\mathfrak{D}$), если C является заключительной секвенцией дерева $\mathfrak{D}$.

Пусть h – функция, определенная на секвенциях дерева $\mathfrak{D}$ и принимающая в качестве значений натуральные числа, со свойствами:

I) $h(C)=0$, если C является заключительной секвенцией дерева $\mathfrak{D}$.

2) Если

$$\frac{C_0,\dots,C_n}{C_{n+1}}\ –$$

переход в дереве $\mathfrak{D}$, то $h(C_0)=\dots=h(C_n)=h(C_{n+1})+1$.

Очевидно, что условия I) и 2) определяют функцию h однозначно. Число $h(C)$ назовем высотой секвенции C в дереве $\mathfrak{D}$. Максимальную высоту секвенций, входящих в $\mathfrak{D}$, назовем высотой дерева $\mathfrak{D}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Секвенция C имеет доказательство в виде дерева тогда и только тогда, когда C доказуема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C_0,\dots,C_n = C$ – линейное доказательство. Если C аксиома, то C будет доказательством в виде дерева секвенции C. Пусть $\mathfrak{D}_0,\dots,\mathfrak{D}_{n-1}$ – доказательства в виде дерева секвенций $C_0,\dots,C_{n-1}$. Если

$$\frac{C_{i_1},\dots,C_{i_k}}{C_n},\qquad \text{где } i_1,\dots,i_k<n,$$

будет применением некоторого правила, то дерево

$$\frac{\mathfrak{D}_{i_1};\dots;\mathfrak{D}_{i_k}}{C_n}$$

будет доказательством в виде дерева секвенции C_n.

Пусть теперь дано доказательство секвенции C в виде дерева $\mathfrak{D}$. Построим линейное доказательство секвенции C. Построение будем вести индукцией по высоте секвенций в дереве $\mathfrak{D}$. Начальные секвенции в дереве $\mathfrak{D}$ будут линейными доказательствами. Если для секвенций $C_0,\dots,C_m$ высоты $k+1$ уже построены линейные доказательства $L_1,\dots,L_m$, то очевидно, что последовательность

$$L_1,\dots,L_m,C$$

будет линейным доказательством секвенции C высоты k. Предложение доказано.

Схема секвенций называется доказуемой в ИВ, если ее добавление к ИВ в качестве схемы аксиом не расширяет множество доказуемых секвенций. Очевидно, это эквивалентно тому, что все частные случаи схемы $\mathfrak{S}$ доказуемы в ИВ.

Упражнение I. Доказать доказуемость следующих схем: а) $\Gamma_1, \mathfrak{A}, \Gamma_2 \vdash \mathfrak{A}$; б) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$; в) $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{A}$; г) $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$.

Правило вывода называется производным в ИВ, если добавление его в исчисление не расширяет множество доказуемых секвенций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Следующие правила являются производными:

а) $\dfrac{\Gamma_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Gamma_2 \vdash}{\Gamma_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \Gamma_2 \vdash}$; г) $\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash}{\Gamma \vdash \neg \mathfrak{A}}$;

б) $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma, \mathfrak{B} \vdash}$; д) $\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B} \; ; \; \Gamma, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}}{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C}}$;

в) $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}$; е) $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}{\Gamma_1 \vdash \mathfrak{A}}$, где $\{\Gamma\} \subseteq \{\Gamma_1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что секвенцию $\Gamma \vdash$ можно получить лишь по правилу I0. Поэтому, если секвенция $\Gamma \vdash$ доказуема, то доказуемы секвенции $\Gamma \vdash \mathfrak{A}_0$ и $\Gamma \vdash \neg \mathfrak{A}_0$ для некоторой формулы $\mathfrak{A}_0$. Для доказательства производности правила вида

$$\frac{\Gamma \vdash}{C}$$

достаточно построить дерево, начальными секвенциями которого будут либо доказуемые схемы, либо $\Gamma \vdash \mathfrak{A}_0$ и $\Gamma \vdash \neg \mathfrak{A}_0$, заключительной C, а переходы – правила I–I2.

а) $$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Gamma_2 \vdash \mathfrak{A}_0}{\Gamma_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \Gamma_2 \vdash \mathfrak{A}_0} \qquad \dfrac{\Gamma_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Gamma_2 \vdash \neg \mathfrak{A}_0}{\Gamma_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \Gamma_2 \vdash \neg \mathfrak{A}_0}}{\Gamma_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \Gamma_2 \vdash}$$

б) $$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}_0}{\Gamma, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A}_0} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \neg \mathfrak{A}_0}{\Gamma, \mathfrak{B} \vdash \neg \mathfrak{A}_0}}{\Gamma, \mathfrak{B} \vdash}$$

в) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}_0}{\Gamma, \neg \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A}_0} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \neg \mathfrak{A}_0}{\Gamma, \neg \mathfrak{B} \vdash \neg \mathfrak{A}_0}}{\Gamma, \neg \mathfrak{B} \vdash}}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}$$

г) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}_0}{\Gamma, \neg\neg \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}_0}}{\Gamma, \neg\neg \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_0}; \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg\neg \mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \vdash \neg \mathfrak{A}; \; \Gamma, \neg\neg \mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \vdash \neg\neg \mathfrak{A}}{\Gamma, \neg\neg \mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \vdash}}{\Gamma, \neg\neg \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}}}{\Gamma, \neg\neg \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}_0}; \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \neg \mathfrak{A}_0}{\Gamma, \neg\neg \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \vdash \neg \mathfrak{A}_0}}{\Gamma, \neg\neg \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A} \to \neg \mathfrak{A}_0}; \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg\neg \mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \vdash \neg \mathfrak{A}; \; \Gamma, \neg\neg \mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \vdash \neg\neg \mathfrak{A}}{\Gamma, \neg\neg \mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \vdash}}{\Gamma, \neg\neg \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}}}{\Gamma, \neg\neg \mathfrak{A} \vdash \neg \mathfrak{A}_0}}{\Gamma, \neg\neg \mathfrak{A} \vdash}}{\Gamma \vdash \neg \mathfrak{A}}$$

Доказательство пунктов д) и е) предоставляется читателю.

Конечная последовательность секвенций $C_0, \ldots, C_n$ называется квазивыводом секвенции C_n, если каждая входящая в нее секвенция является доказуемой или получается из предыдущих по производному правилу вывода.

Дерево секвенций называется квазивыводом в виде дерева секвенции C, если всякая начальная секвенция доказуема, заключительная – C, а переходы являются применениями производных правил вывода.

Упражнение 2. Всякая секвенция, для которой существует квазивывод или квазивывод в виде дерева, является доказуемой.

Пример 2. Докажем секвенцию $\vdash \mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg \mathcal{P} \vdash \neg \mathcal{P}}{\neg \mathcal{P} \vdash \mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P}}; \; \neg(\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P}) \vdash \neg(\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P})}{\neg(\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P}), \neg \mathcal{P} \vdash}}{\neg(\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P}) \vdash \mathcal{P}}}{\neg(\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P}) \vdash \mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P}; \; \neg(\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P}) \vdash \neg(\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P})}$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P}) \vdash \mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P}; \; \neg(\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P}) \vdash \neg(\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P})}{\neg(\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P}) \vdash}}{\vdash \mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P}}$$

Заметим, что приведенное выше дерево не является доказательством, так как второй переход не является применением ни одного из правил. Однако ясно, что, дополнив это дерево применением правила I2, можно получить доказательство. В дальнейшем мы без оговорок будем пользоваться такими очевидными сокращениями доказательств.

§ 4. Эквивалентность формул

Пусть Φ – множество всех формул ИВ. Пусть $\varphi: \Phi \to \Phi$ – отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

I) $\varphi(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) = (\varphi(\mathfrak{A}) \to \varphi(\mathfrak{B}))$,

2) $\varphi(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) = (\varphi(\mathfrak{A}) \wedge \varphi(\mathfrak{B}))$,

3) $\varphi(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) = (\varphi(\mathfrak{A}) \vee \varphi(\mathfrak{B}))$,

4) $\varphi(\neg \mathfrak{A}) = \neg \varphi(\mathfrak{A})$.

Распространим отображение φ на секвенции: 5) $\varphi(\vdash \mathfrak{A}) = (\vdash \varphi(\mathfrak{A}))$, $\varphi(\vdash) = \vdash$, $\varphi(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{A}) = (\varphi(\mathfrak{A}_1), \ldots, \varphi(\mathfrak{A}_n) \vdash \varphi(\mathfrak{A}))$, $\varphi(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash) = (\varphi(\mathfrak{A}_1), \ldots, \varphi(\mathfrak{A}_n) \vdash)$.

По индукции можно определить продолжение φ на деревьях:

6) $$\varphi\left(\frac{\mathfrak{D}_1 \ldots \mathfrak{D}_k}{C}\right)=\frac{\varphi(\mathfrak{D}_1)\ldots\varphi(\mathfrak{D}_k)}{\varphi(C)}.$$

ТЕОРЕМА I. (о подстановке). Пусть отображение φ удовлетворяет условиям I) - 6). Тогда $\varphi(\Gamma\vdash\mathfrak{A})$ доказуема, если доказуема $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по высоте дерева будем доказывать, что если $\mathfrak{D}$ - доказательство секвенции $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$, то $\varphi(\mathfrak{D})$ - доказательство секвенции $\varphi(\Gamma\vdash\mathfrak{A})$. Если C - аксиома, то $\varphi(C)$ также будет аксиомой. Пусть

$$\mathfrak{D}=\cfrac{\cfrac{\mathfrak{D}_0^0\ldots\mathfrak{D}_{i_0}^0}{C_0}\;\ldots\;\cfrac{\mathfrak{D}_0^k\ldots\mathfrak{D}_{i_k}^k}{C_k}}{\Gamma\vdash\mathfrak{A}},$$

тогда

$$\varphi(\mathfrak{D})=\cfrac{\cfrac{\varphi(\mathfrak{D}_0^0)\ldots\varphi(\mathfrak{D}_{i_0}^0)}{\varphi(C_0)}\;\ldots\;\cfrac{\varphi(\mathfrak{D}_0^k)\ldots\varphi(\mathfrak{D}_{i_k}^k)}{\varphi(C_k)}}{\varphi(\Gamma\vdash\mathfrak{A})}.$$

В силу индукционного предположения, достаточно доказать, что в дереве $\varphi(\mathfrak{D})$ последний переход является применением того же правила, что и в последнем переходе дерева $\mathfrak{D}$. Но это очевидно, так как свойства I) - 5) гарантируют сохранение переходов. Например, если

$$\frac{\Gamma,\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}\;;\;\Gamma,\mathfrak{C}\vdash\mathfrak{B}\;;\;\Gamma\vdash\mathfrak{A}\vee\mathfrak{C}}{\Gamma\vdash\mathfrak{B}}\quad(\Gamma=(\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n))\; -$$

последний переход в дереве $\mathfrak{D}$, то при $\varphi(\Gamma)=(\varphi(\mathfrak{A}_1),\ldots,\varphi(\mathfrak{A}_n))$

$$\frac{\varphi(\Gamma),\varphi(\mathfrak{A})\vdash\varphi(\mathfrak{B})\;;\;\varphi(\Gamma),\varphi(\mathfrak{C})\vdash\varphi(\mathfrak{B})\;;\;\varphi(\Gamma)\vdash\varphi(\mathfrak{A})\vee\varphi(\mathfrak{C})}{\varphi(\Gamma)\vdash\varphi(\mathfrak{B})}\; -$$

применение правила 4 и последний переход в дереве $\varphi(\mathfrak{D})$. Теорема I доказана.

Теорема о подстановке, иными словами, утверждает, что если в доказуемой секвенции вместо пропозициональных переменных подставить произвольные формулы, то полученная секвенция будет доказуемой.

Две формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ назовем э к в и в а л е н т н ы м и (обозначаем $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$), если доказуемы две секвенции $\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}$. Отметим, что символ $\equiv$ не является символом языка исчисления секвенций. Он является символом метаязыка, т.е. языка, на котором мы доказываем утверждения об исчислении. Например, понятия дерева, доказательства также являются понятиями метаязыка.

ЛЕММА I. Отношение $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ является отношением эквивалентности, т.е. справедливы следующие утверждения:

I) $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{A}$;

2) если $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{A}$;

3) если $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{C}$, то $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) следует из того, что $\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}$ - аксиома. 2) следует из симметричности $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в определении отношения $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{C}$, то по предложению 3.2д) $\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{C}$. Аналогично, если $\mathfrak{C}\vdash\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{C}\vdash\mathfrak{A}$. Лемма I доказана.

Формулу $\mathfrak{A}$ назовем доказуемой, если доказуема секвенция $\vdash\mathfrak{A}$.

ЛЕММА 2. I) Если $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}$ доказуема тогда и только тогда, когда доказуема $\mathfrak{B}$.

2) Если $\mathfrak{A}_1\equiv\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{A}_2\equiv\mathfrak{B}_2$, то а) $(\mathfrak{A}_1\wedge\mathfrak{A}_2)\equiv(\mathfrak{B}_1\wedge\mathfrak{B}_2)$; б) $(\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2)\equiv(\mathfrak{B}_1\vee\mathfrak{B}_2)$; в) $(\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2)\equiv(\mathfrak{B}_1\to\mathfrak{B}_2)$; г) $\neg\mathfrak{A}_1\equiv\neg\mathfrak{B}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если доказуемы $\vdash\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$, то дерево

$$\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}}{\vdash\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}\;;\;\vdash\mathfrak{A}}{\vdash\mathfrak{B}}$$

будет квазивыводом $\vdash\mathfrak{B}$. Аналогично из доказуемости $\vdash\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}$ получаем доказуемость $\vdash\mathfrak{A}$. Пункт I) доказан.

В силу симметричности $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ в 2) достаточно доказать, что доказуемы а) $\mathfrak{A}_1\wedge\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{B}_1\wedge\mathfrak{B}_2$, б) $\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{B}_1\vee\mathfrak{B}_2$, в) $\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{B}_1\to\mathfrak{B}_2$ и г) $\neg\mathfrak{A}_1\vdash\neg\mathfrak{B}_1$. Следующие 4 квазивывода завершают доказательство леммы 3.

а) $$\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A}_1\wedge\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{A}_1\;;\;\mathfrak{A}_1\vdash\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{A}_1\wedge\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{B}_1}\qquad\cfrac{\mathfrak{A}_1\wedge\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{A}_2\;;\;\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_1\wedge\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{B}_2}}{\mathfrak{A}_1\wedge\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{B}_1\wedge\mathfrak{B}_2}$$

б) $$\cfrac{\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2\;;\;\cfrac{\mathfrak{A}_1\vdash\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{A}_1\vdash\mathfrak{B}_1\vee\mathfrak{B}_2}\;;\;\cfrac{\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{B}_1\vee\mathfrak{B}_2}}{\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{B}_1\vee\mathfrak{B}_2}$$

в) $$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{B}_1\vdash\mathfrak{A}_1\;;\;\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2,\mathfrak{B}_1\vdash\mathfrak{A}_2}\qquad\cfrac{\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{B}_2}{\vdash\mathfrak{A}_2\to\mathfrak{B}_2}}{\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2,\mathfrak{B}_1\vdash\mathfrak{B}_2}}{\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{B}_1\to\mathfrak{B}_2}$$

г)
$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{B}_1\vdash\mathfrak{A}_1\ ;\ \neg\mathfrak{A}_1\vdash\neg\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1,\neg\mathfrak{A}_1\vdash}}{\neg\mathfrak{A}_1\vdash\neg\mathfrak{B}_1}$$

ТЕОРЕМА 2 (о замене). Пусть $\mathfrak{A}$ - формула, $\mathfrak{B}$ - ее подформула. Пусть $\mathfrak{A}'$ получается из $\mathfrak{A}$ путем замены некоторого вхождения $\mathfrak{B}$ на формулу $\mathfrak{B}'$. Тогда если $\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{B}'$, то $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{A}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$, то теорема тривиальна. Индукция по длине формулы $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}=\mathfrak{P}_i$, то $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$.

Индукционный шаг распадается на 4 случая:

а) $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\wedge\mathfrak{A}_2$, б) $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2$,

в) $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2$, г) $\mathfrak{A}=\neg\mathfrak{A}_1$.

Так как любое вхождение $\mathfrak{B}\neq\mathfrak{A}$ содержится либо в $\mathfrak{A}_1$, либо в $\mathfrak{A}_2$, то $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{A}'$ следует из индукционного предположения и леммы 2.2). Теорема 2 доказана.

§ 5. Нормальные формы

ЛЕММА I. I) $(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\equiv(\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$,

2) $\neg\neg\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{A}$,

3) $\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\equiv(\neg\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{B})$,

4) $\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\equiv(\neg\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{B})$,

5) $\mathfrak{A}\equiv(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{A})$,

6) $\mathfrak{A}\equiv(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{A})$.

Приведем квазивыводы для пункта I).

$$\dfrac{\vdash\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}\ ;\quad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}\ ;\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\mathfrak{A}\vdash\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}\ ;\quad \dfrac{\neg\mathfrak{A}\vdash\neg\mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}\vdash\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}\vdash\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\vdash\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\ ;\quad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}\ ;\ \neg\mathfrak{A}\vdash\neg\mathfrak{A}}{\mathfrak{A},\neg\mathfrak{A}\vdash}}{\mathfrak{A},\neg\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}}\ ;\quad \mathfrak{B}\vdash\mathfrak{B}}{\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}}}{\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}$$

Доказательство остальных пунктов леммы I предоставляется читателю.

ЛЕММА 2. Любая формула $\mathfrak{A}$ эквивалентна формуле $\mathfrak{B}$, которая

не содержит символа импликации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию φ_0 индукцией по построению формулы:

I) $\varphi_0(\mathfrak{P}_i)=\mathfrak{P}_i$,

2) $\varphi_0(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})=\varphi_0(\mathfrak{A})\wedge\varphi_0(\mathfrak{B})$,

3) $\varphi_0(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})=\varphi_0(\mathfrak{A})\vee\varphi_0(\mathfrak{B})$,

4) $\varphi_0(\neg\mathfrak{A})=\neg\varphi_0(\mathfrak{A})$,

5) $\varphi_0(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})=\neg\varphi_0(\mathfrak{A})\vee\varphi_0(\mathfrak{B})$.

Тогда $\varphi_0(\mathfrak{A})$ не содержит знака импликации. $\varphi_0(\mathfrak{A})\equiv\mathfrak{A}$ следует по индукции из леммы 4.2.2) и леммы I.I).

ЛЕММА 3. Любая формула $\mathfrak{A}$ эквивалентна формуле $\mathfrak{C}$ без символа импликации, у которой символы отрицания стоят перед элементарными подформулами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi^{\to}$ - множество формул, не содержащих символа импликации. Определим отображение $\varphi_1:\Phi^{\to}\to\Phi^{\to}$ по индукции:

I) $\varphi_1(\mathfrak{P}_i)=\mathfrak{P}_i$,

2) $\varphi_1(\neg\mathfrak{P}_i)=\neg\mathfrak{P}_i$,

3) $\varphi_1(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})=\varphi_1(\mathfrak{A})\wedge\varphi_1(\mathfrak{B})$,

4) $\varphi_1(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})=\varphi_1(\mathfrak{A})\vee\varphi_1(\mathfrak{B})$,

5) $\varphi_1(\neg(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}))=\varphi_1(\neg\mathfrak{A})\vee\varphi_1(\neg\mathfrak{B})$,

6) $\varphi_1(\neg(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}))=\varphi_1(\neg\mathfrak{A})\wedge\varphi_1(\neg\mathfrak{B})$,

7) $\varphi_1(\neg\neg\mathfrak{A})=\varphi_1(\mathfrak{A})$.

Пусть $\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{A}$ - формула из леммы 2. Эквивалентность $\mathfrak{B}\equiv\varphi_1(\mathfrak{B})$ легко получить индукцией по длине $\mathfrak{B}$, используя лемму I и лемму 4.2.2). Очевидно, что $\mathfrak{C}=\varphi_1(\mathfrak{B})$ удовлетворяет требованиям леммы 3.

Пусть $\widetilde{\Phi}$ обозначает множество классов эквивалентности по отношению $\equiv$ множества формул Φ. Если $\mathfrak{A}$ - формула, то $\widetilde{\mathfrak{A}}$ будет обозначать класс эквивалентности, содержащий формулу $\mathfrak{A}$. На множестве $\widetilde{\Phi}$ можно определить операции $\wedge,\vee,\to,\neg$:

$$\widetilde{\mathfrak{A}}\wedge\widetilde{\mathfrak{B}}=\widetilde{(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})},$$
$$\widetilde{\mathfrak{A}}\vee\widetilde{\mathfrak{B}}=\widetilde{(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})},$$
$$\widetilde{\mathfrak{A}}\to\widetilde{\mathfrak{B}}=\widetilde{(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})},$$
$$\neg\widetilde{\mathfrak{A}}=\widetilde{(\neg\mathfrak{A})}.$$

Корректность этого определения, т.е. независимость определения операций от различных выборов элементов $\mathfrak{A}$ из класса $\widetilde{\mathfrak{A}}$, гарантируется леммой 4.2.2). Следующая лемма утверждает, что операции

$\wedge$ и $\vee$ на Φ удовлетворяют законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

ЛЕММА 4. I) $(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\equiv(\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{A})$,

I') $(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\equiv(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{A})$,

2) $((\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\wedge\mathfrak{C})\equiv(\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}))$,

2') $((\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\vee\mathfrak{C})\equiv(\mathfrak{A}\vee(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}))$,

3) $(\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}))\equiv((\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}))$,

3') $(\mathfrak{A}\vee(\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}))\equiv((\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\wedge(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{C}))$.

Чтобы не загромождать изложение, докажем лишь 3). Остальные читатель легко докажет сам, используя навык, приобретенный при разборе ранее приведенных доказательств.

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}),\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}),\mathfrak{B}\vdash(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C})};\quad \dfrac{\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}),\mathfrak{C}\vdash\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}),\mathfrak{C}\vdash(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C})};\quad \mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})\vdash\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})\vdash(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C})}$$

$$\dfrac{(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C})\vdash(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C});\quad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C};\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})};\quad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}\vdash\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}\vdash\mathfrak{A};\ \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}\vdash\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}}}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}\vdash\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})}}{(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\vee(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C})\vdash\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})}$$

Пусть $\mathcal{D}$ - класс формул, обладающий следующими свойствами:

I) $\mathcal{P}\in\mathcal{D}$, $\neg\mathcal{P}\in\mathcal{D}$ для всех атомарных $\mathcal{P}$;

2) если $\mathfrak{A}_1\in\mathcal{D}$ и $\mathfrak{A}_2\in\mathcal{D}$, то $\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2\in\mathcal{D}$;

3) $\mathcal{D}$ - минимальный среди классов, обладающих свойствами I) и 2) (т.е. является пересечением всех классов $\mathcal{D}_1$, обладающих свойствами I) и 2)).

Если $\mathfrak{A}\in\mathcal{D}$, то будем говорить, что $\mathfrak{A}$ имеет э л е м е н т а р н у ю д и з ъ ю н к т и в н у ю ф о р м у.

Пусть $\mathcal{KD}$ - класс формул, обладающих следующими свойствами:

I) $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{KD}$;

2) если $\mathfrak{A}_1\in\mathcal{KD}$, $\mathfrak{A}_2\in\mathcal{KD}$, то $\mathfrak{A}_1\wedge\mathfrak{A}_2\in\mathcal{KD}$;

3) $\mathcal{KD}$ - минимальный класс, обладающий свойствами I) и 2).

Если $\mathfrak{A}\in\mathcal{KD}$, то будем говорить, что $\mathfrak{A}$ находится в к о н ъ ю н к т и в н о й н о р м а л ь н о й ф о р м е (сокращенно к.н.ф.).

Заметим, что классы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{KD}$ замкнуты относительно подформул. Если в определениях классов $\mathcal{D}$ и $\mathcal{KD}$ конъюнкцию и дизъюнкцию поменять местами, то получим определения класса $\mathcal{K}$ формул, имеющих

э л е м е н т а р н у ю к о н ъ ю н к т и в н у ю ф о р м у, и класса $\mathcal{DK}$ формул, имеющих д и з ъ ю н к т и в н у ю н о р м а л ь н у ю ф о р м у (сокращенно д.н.ф.).

Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ - элементарная дизъюнкция вида $\mathfrak{A}_0\vee\ldots\vee\mathfrak{A}_n$, где $\mathfrak{A}_i$, $i\leq n$, — попарно различные формулы, являющиеся атомарными формулами или их отрицаниями, если выполняются следующие условия:

I) $\mathfrak{A}\in\mathcal{D}$;

2) $\mathfrak{A}_i$, $i\leq n$, - подформулы $\mathfrak{A}$, причем если $\mathfrak{A}_i$ - атомарная, то существует вхождение $\mathfrak{A}_i$ в $\mathfrak{A}$, не стоящее под знаком отрицания;

3) если $\mathcal{P}$ - атомарная формула и $\neg\mathcal{P}$ - подформула $\mathfrak{A}$, то $\neg\mathcal{P}=\mathfrak{A}_i$ для некоторого $i\leq n$;

4) если $\mathcal{P}$ - атомарная подформула $\mathfrak{A}$, не стоящая под знаком отрицания, то $\mathcal{P}=\mathfrak{A}_i$ для некоторого $i\leq n$.

Пусть формула $\mathfrak{A}$ находится в к.н.ф. (д.н.ф.). Будем говорить, что $\mathfrak{B}$ - конъюнктивный (дизъюнктивный) член формулы $\mathfrak{A}$, если а) $\mathfrak{B}\in\mathcal{D}$ ($\mathfrak{B}\in\mathcal{K}$), б) $\mathfrak{B}$ - подформула формулы $\mathfrak{A}$, в) существует вхождение $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$, не содержащееся в отличном от него самого вхождении подформулы $\mathfrak{C}\in\mathcal{D}$ ($\mathfrak{C}\in\mathcal{K}$) формулы $\mathfrak{A}$.

Будем говорить, что формула $\mathfrak{A}$ находится в конъюнктивной нормальной форме вида $\bigwedge\limits_{m=0}^{n}(\mathfrak{A}_0^m\vee\ldots\vee\mathfrak{A}_{k_m}^m)$, если

I) $\mathfrak{A}\in\mathcal{KD}$;

2) если $\mathfrak{B}$ - конъюнктивный член формулы $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B}$ - элементарная дизъюнкция вида $\mathfrak{A}_0^i\vee\ldots\vee\mathfrak{A}_{k_i}^i$ для некоторого $i\leq n$;

3) для любого $m\leq n$ существует конъюнктивный член $\mathfrak{B}$ формулы $\mathfrak{A}$, имеющий вид $\mathfrak{A}_0^m\vee\ldots\vee\mathfrak{A}_{k_m}^m$.

ЛЕММА 5. Пусть $\mathfrak{A}$ находится в к.н.ф., Γ - последовательность формул. Тогда $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$ доказуема тогда и только тогда, когда доказуемы секвенции $\Gamma\vdash\mathfrak{B}$ для любого конъюнктивного члена $\mathfrak{B}$ формулы $\mathfrak{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по построению $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ - элементарная дизъюнкция, то все конъюнктивные члены $\mathfrak{A}$ равны $\mathfrak{A}$, и утверждение леммы тривиально. Пусть $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\wedge\mathfrak{A}_2$. Доказуемость $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$ эквивалентна доказуемости $\Gamma\vdash\mathfrak{A}_1$ и $\Gamma\vdash\mathfrak{A}_2$. Утверждение леммы следует тогда из индукционного предположения и того очевидного факта, что множество конъюнктивных членов формулы $\mathfrak{A}$ является объединением множеств конъюнктивных членов формул $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

ЛЕММА 6. Пусть $\mathfrak{A}$ – элементарная дизъюнкция вида $\mathfrak{A}_0 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$. Тогда $\mathfrak{A}_i \vdash \mathfrak{A}$ доказуемы для всех $i \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по построению $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ – атомарная или ее отрицание, то $\mathfrak{A}_i \vdash \mathfrak{A}, i \leq n,$ – аксиомы. Если $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_0 \vee \mathfrak{B}_1$, то существует для $i \leq n$ такое $m_i \leq 1$, что $\mathfrak{B}_{m_i}$ – элементарная дизъюнкция вида $\mathfrak{A}_i \vee \mathfrak{A}_{j_1} \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_{j_k}$. По индукционному предположению $\mathfrak{A}_i \vdash \mathfrak{B}_{m_i}$ доказуема. Следовательно, $\mathfrak{A}_i \vdash \mathfrak{A}$ доказуема (правила 3,4).

ЛЕММА 7. Если $\mathfrak{B}$ – элементарная дизъюнкция вида $\mathfrak{A}_0 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$ и существуют $i, j \leq n$, что $\mathfrak{A}_i = \neg \mathfrak{A}_j$, то $\mathfrak{B}$ доказуема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме I $\mathfrak{A}_j \vdash \mathfrak{B}$ и $\neg \mathfrak{A}_j \vdash \mathfrak{B}$ доказуемы. Секвенция $\vdash \mathfrak{A}_j \vee \neg \mathfrak{A}_j$ также доказуема (пример 2 § 3). По правилу 4 получаем доказуемость $\mathfrak{B}$.

ЛЕММА 8. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – элементарные дизъюнкции одного вида $\mathfrak{A}_0 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$, то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу симметричности $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ достаточно показать, что $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ доказуема. Индукцией по длине $\mathfrak{A}$ будем доказывать более сильное утверждение: если $\{i_0, \ldots, i_k\} \subseteq \{0, \ldots, n\}$ и $\mathfrak{A}$ – элементарная дизъюнкция вида $\mathfrak{A}_{i_0} \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_{i_k}$, то $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ доказуема. Если $\mathfrak{A}$ – атомарная или ее отрицание, то утверждение доказано в лемме 6. Если $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'_0 \vee \mathfrak{A}'_1$, то по индукционному предположению $\mathfrak{A}'_0 \vdash \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}'_1 \vdash \mathfrak{B}$ доказуемы. Следующее дерево

$$\frac{\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}'_0 \vee \mathfrak{A}'_1, \quad \mathfrak{A}, \mathfrak{A}'_0 \vdash \mathfrak{B}; \quad \mathfrak{A}, \mathfrak{A}'_1 \vdash \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}}$$

является квазивыводом $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Если $\mathfrak{A}$ находится в к.н.ф. и $\mathfrak{B}$ – ее конъюнктивный член, то $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ доказуема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по длине $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ – элементарная дизъюнкция, то $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, и утверждение леммы тривиально. Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \wedge \mathfrak{A}_1$. Тогда $\mathfrak{B}$ – конъюнктивный член $\mathfrak{A}_i$ для некоторого $i \leq 1$. По индуктивному предположению $\mathfrak{A}_i \vdash \mathfrak{B}$ доказуема. Ясно, что и $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ доказуема. Лемма 9 доказана.

ТЕОРЕМА 3. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ находятся в к.н.ф. одного вида

$$\bigwedge_{m=0}^{n} (\mathfrak{A}_0^m \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_{k_m}^m), \quad \text{то} \quad \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу симметричности $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ достаточно доказать $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$. В силу леммы 5 достаточно проверить доказуемость $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C}$ для любого конъюнктивного члена $\mathfrak{C}$ формулы $\mathfrak{B}$. Из условия теоремы следует, что существует конъюнктивный член $\mathfrak{C}_1$ формулы $\mathfrak{A}$, имеющий тот же вид, что и $\mathfrak{C}$. В силу лемм 9 и 8 $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C}_1$ доказуема и $\mathfrak{C}_1 \equiv \mathfrak{C}$. Следующее дерево

$$\frac{\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C}_1; \quad \dfrac{\mathfrak{C}_1 \vdash \mathfrak{C}}{\vdash \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}}}{\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C}}$$

является квазивыводом $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Для любой формулы $\mathfrak{A}$ существует эквивалентная ей формула $\mathfrak{B}$, находящаяся в к.н.ф.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{B}_1$ – формула, эквивалентная $\mathfrak{A}$, не содержащая символа импликации и все символы отрицания которой стоят перед атомарными подформулами. Будем доказывать теорему индукцией по построению $\mathfrak{B}_1$. Если $\mathfrak{B}_1$ – атомарная или ее отрицание, то $\mathfrak{B}_1$ уже находится в к.н.ф. Если $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ – формулы, эквивалентные $\mathfrak{A}_1$, соответственно, $\mathfrak{A}_2$, находящиеся в к.н.ф., то очевидно, что $\mathfrak{C}_1 \wedge \mathfrak{C}_2 \equiv \mathfrak{B}_1$ находится в к.н.ф.

Пусть $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$. Пусть $\mathfrak{C}_1 \equiv \mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{C}_2 \equiv \mathfrak{A}_2$ уже находятся в к.н.ф. По теореме о замене $\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{C}_1 \vee \mathfrak{C}_2$. Доказательство того, что $\mathfrak{C}_1 \vee \mathfrak{C}_2$ эквивалентна некоторой $\mathfrak{B}$, находящейся в к.н.ф., будем вести индукцией по $n = m_1 + m_2$, где m_i – число символов $\wedge$ в $\mathfrak{C}_i$, $i = 1,2$. Если $m_1 = m_2 = 0$, то $\mathfrak{C}_1 \vee \mathfrak{C}_2$ будет находиться в к.н.ф. Пусть некоторое, например m_2, не равно нулю. Тогда $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_3 \wedge \mathfrak{C}_4$. По лемме 4.3′) получаем

$$(\mathfrak{C}_1 \vee \mathfrak{C}_2) = (\mathfrak{C}_1 \vee (\mathfrak{C}_3 \wedge \mathfrak{C}_4)) \equiv ((\mathfrak{C}_1 \vee \mathfrak{C}_3) \wedge (\mathfrak{C}_1 \vee \mathfrak{C}_4)).$$

По индукционному предположению $\mathfrak{C}_1 \vee \mathfrak{C}_3$ и $\mathfrak{C}_1 \vee \mathfrak{C}_4$ эквивалентны $\mathfrak{B}_2$ и, соответственно, $\mathfrak{B}_3$, которые находятся в к.н.ф.. Ясно, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_2 \wedge \mathfrak{B}_3$ удовлетворяет требованиям теоремы.

Упражнение I. Доказать, что для любой формулы $\mathfrak{A}$ существует $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, находящаяся в д.н.ф.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть n, k_i $(i \leq n)$ – натуральные числа, $\mathfrak{A}_j^i$ $(i \leq n, j \leq k_i)$ – атомарные формулы или их отрицания. Тогда существует формула $\mathfrak{A}$, находящаяся в к.н.ф. вида

$$\bigwedge_{i=0}^{n} (\mathfrak{A}_0^i \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_{k_i}^i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что для любых атомарных или их отрицаний $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_k$ существует элементарная дизъюнкция $\mathfrak{B}$ вида $\mathfrak{A}_0 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_k$. Если $k = 0$, то $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_0$. Если $k > 0$ и $\mathfrak{B}_1$ – элементарная дизъюнкция вида $\mathfrak{A}_0 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_{k-1}$, то очевидно, что

$\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{A}_k$ будет элементарной дизъюнкцией вида $\mathfrak{A}_0 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_k$.

Предложение I теперь легко получить индукцией по n. Если $n=0$, то существование $\mathfrak{A}$ следует из предыдущего абзаца. Если $n>0$, $\mathfrak{A}_1$ находится в к.н.ф. вида $\bigwedge\limits_{i=0}^{n-1}(\mathfrak{A}_0^i \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_{k_i}^i)$, а $\mathfrak{A}_2$ – элементарная дизъюнкция вида $\mathfrak{A}_0^n \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_{k_n}^n$, то очевидно, что $\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2$ находится в к.н.ф. вида $\bigwedge\limits_{i=0}^{n}(\mathfrak{A}_0^i \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_{k_i}^i)$. Предложение I доказано.

Будем говорить, что формула $\mathfrak{A}$ находится в с о в е р ш е н н о й к.н.ф. (д.н.ф.), если выполнены следующие условия:

I) $\mathfrak{A}$ находится в к.н.ф. (д.н.ф.);

2) любая пропозициональная переменная P, входящая в формулу $\mathfrak{A}$, имеет в любом конъюнктивном (дизъюнктивном) члене $\mathfrak{A}$ ровно одно вхождение;

3) $\mathfrak{A}$ не содержит двух различных вхождений конъюнктивных (дизъюнктивных) членов одного и того же вида.

Будем говорить, что формула $\mathfrak{A}$ получена из формулы $\mathfrak{B}$ простым сокращением на формулу $\mathfrak{C}$, если $\mathfrak{A}$ получается из $\mathfrak{B}$ заменой некоторого вхождения подформулы вида $\mathfrak{C}\tau\mathfrak{C}'$ или вида $\mathfrak{C}'\tau\mathfrak{C}$ на $\mathfrak{C}$, где $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$. Будем говорить, что формула $\mathfrak{A}$ получена из формулы $\mathfrak{B}$ сокращением, если существует последовательность формул $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_n = \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{B}_{i+1}$ для $i<n$ получена из $\mathfrak{B}_i$ простым сокращением.

ТЕОРЕМА 5. Если формула $\mathfrak{A}$ не доказуема, то существует формула $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, находящаяся в совершенной к.н.ф.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{A}$ – формула из теоремы 4, находящаяся в к.н.ф. вида $\bigwedge\limits_{i=0}^{m}(\mathfrak{A}_0^i \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_{k_i}^i)$. Пусть $Q_0, \ldots, Q_n$ – все пропозициональные переменные, входящие в $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{B}^0$ получается из $\mathfrak{B}_1$ заменой всех вхождений конъюнктивных членов $\mathfrak{C}$, не содержащих переменную Q_0, на формулу $(Q_0 \vee \mathfrak{C}) \wedge (\neg Q_0 \vee \mathfrak{C})$. Покажем, что $\mathfrak{C} \equiv (Q_0 \vee \mathfrak{C}) \wedge (\neg Q_0 \vee \mathfrak{C})$.

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{C}\vdash\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}\vdash Q_0\vee\mathfrak{C}};\quad \dfrac{\mathfrak{C}\vdash\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}\vdash\neg Q_0\vee\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}\vdash(Q_0\vee\mathfrak{C})\wedge(\neg Q_0\vee\mathfrak{C})}$$

Из леммы I имеем $(\neg Q_0 \vee \mathfrak{C}) \equiv (Q_0 \rightarrow \mathfrak{C})$ и $Q_0 \equiv \neg\neg Q_0$. По теореме о замене и лемме I $(Q_0 \vee \mathfrak{C}) \equiv (\neg\neg Q_0 \vee \mathfrak{C}) \equiv (\neg Q_0 \rightarrow \mathfrak{C})$. Следующее дерево является квазивыводом.

$$\dfrac{\dfrac{\vdash Q_0\vee\neg Q_0;\quad \dfrac{\neg Q_0\vee\mathfrak{C}\vdash Q_0\rightarrow\mathfrak{C}}{\neg Q_0\vee\mathfrak{C},Q_0\vdash\mathfrak{C}};\quad \dfrac{Q_0\vee\mathfrak{C}\vdash\neg Q_0\rightarrow\mathfrak{C}}{Q_0\vee\mathfrak{C},\neg Q_0\vdash\mathfrak{C}}}{\dfrac{\dfrac{Q_0\vee\mathfrak{C},\neg Q_0\vee\mathfrak{C}\vdash\mathfrak{C}}{Q_0\vee\mathfrak{C}\vdash(\neg Q_0\vee\mathfrak{C})\rightarrow\mathfrak{C}}}{\vdash(Q_0\vee\mathfrak{C})\rightarrow((\neg Q_0\vee\mathfrak{C})\rightarrow\mathfrak{C});}}\quad \dfrac{(Q_0\vee\mathfrak{C})\wedge(\neg Q_0\vee\mathfrak{C})\vdash(Q_0\vee\mathfrak{C})\wedge(\neg Q_0\vee\mathfrak{C})}{(Q_0\vee\mathfrak{C})\wedge(\neg Q_0\vee\mathfrak{C})\vdash Q_0\vee\mathfrak{C}}}{\dfrac{(Q_0\vee\mathfrak{C})\wedge(\neg Q_0\vee\mathfrak{C})\vdash\neg Q_0\vee\mathfrak{C};\quad (Q_0\vee\mathfrak{C})\wedge(\neg Q_0\vee\mathfrak{C})\vdash(\neg Q_0\vee\mathfrak{C})\rightarrow\mathfrak{C}}{(Q_0\vee\mathfrak{C})\wedge(\neg Q_0\vee\mathfrak{C})\vdash\mathfrak{C}}}$$

Таким образом, в силу теоремы о замене, $\mathfrak{B}^0 \equiv \mathfrak{B}_1$. Пусть $\mathfrak{B}^{k+1}$, $k<n$, получается из $\mathfrak{B}^k$ так же, как $\mathfrak{B}^0$ из $\mathfrak{B}_1$ с заменой Q_0 на Q_{k+1}. Очевидно, что $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}^n$ и любой конъюнктивный член формулы $\mathfrak{B}^n$ будет содержать все переменные $Q_0, \ldots, Q_n$.

Из недоказуемости $\mathfrak{A}$ следует недоказуемость $\mathfrak{B}^n$. Из недоказуемости $\mathfrak{B}^n$, лемм 7 и 5, следует, что существует формула $\mathfrak{B}_2$, обладающая следующими свойствами: I) $\mathfrak{B}_2$ получается из $\mathfrak{B}^n$ сокращением; 2) $\mathfrak{B}_2$ не содержит конъюнктивных членов вида $\mathfrak{A}_0 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_k$ с $\mathfrak{A}_i = \neg\mathfrak{A}_j$ для некоторых $i, j \leq k$; 3) множество конъюнктивных членов формулы $\mathfrak{B}_2$, не обладающих свойством пункта 2), совпадает с соответствующим множеством конъюнктивных членов формулы $\mathfrak{B}^n$. В силу лемм 9 и 5 секвенция $\mathfrak{B}^n \vdash \mathfrak{B}_2$ доказуема. Доказуемость секвенции $\mathfrak{B}_2 \vdash \mathfrak{B}^n$ следует из лемм 7, 5 и 9. Таким образом, $\mathfrak{B}_2 \equiv \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}_2$ находится в к.н.ф. Очевидно, что из формулы $\mathfrak{B}_2$ сокращением можно получить формулу $\mathfrak{B}$, удовлетворяющую пунктам 2) и 3) определения совершенной к.н.ф. и находящуюся в к.н.ф. того же вида, что и $\mathfrak{B}_2$. Из теоремы 3 получаем $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}_2$, и теорема 5 доказана.

У п р а ж н е н и е 2. Доказать, что если формула $\neg\mathfrak{A}$ не доказуема, то существует формула $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, находящаяся в совершенной д.н.ф.

§ 6. Семантика исчисления высказываний

Исчисление называется н е п р о т и в о р е ч и в ы м, если в нем не все формулы доказуемы.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторое множество, $f_{\mathfrak{X}}$ – некоторое отображение элементарных формул во множество $P(\mathfrak{X})$ всех подмножеств $\mathfrak{X}$. Такое $f_{\mathfrak{X}}$ назовем и н т е р п р е т а ц и е й ИВ в $\mathfrak{X}$. Продолжим $f_{\mathfrak{X}}$ до отображения формул ИВ в $P(\mathfrak{X})$ (обозначим его также через $f_{\mathfrak{X}}$) по индукции:

1) $f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}) = f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A})\cap f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{B})$,

2) $f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}) = f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A})\cup f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{B})$,

3) $f_{\mathcal{X}}(\neg\mathfrak{A}) = \mathcal{X}\setminus f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A})$,

4) $f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}) = f_{\mathcal{X}}(\neg\mathfrak{A})\cup f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{B})$.

Каждой секвенции C сопоставим утверждение $f_{\mathcal{X}}(C)$ про подмножества $\mathcal{X}$ по правилу:

$$f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}_0,\ldots,\mathfrak{A}_n\vdash\mathfrak{A}) \Leftrightarrow (f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}_0),\ldots,f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}_n)\to f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A})),$$
$$f_{\mathcal{X}}(\vdash\mathfrak{A}) \Leftrightarrow (\mathcal{X} = f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A})),$$
$$f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}_0,\ldots,\mathfrak{A}_n\vdash) \Leftrightarrow (f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}_0),\ldots,f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}_n)\to),$$
$$f_{\mathcal{X}}(\vdash) \quad \Leftrightarrow (\mathcal{X}\to).$$

Напомним (§ I) определение отношения $\to$ на множествах:

$$(\mathcal{X}_0,\ldots,\mathcal{X}_n\to\mathcal{X}_{n+1}) \Leftrightarrow (\bigcap_{i\le n}\mathcal{X}_i\subseteq\mathcal{X}_{n+1});\ (\mathcal{X}_0,\ldots,\mathcal{X}_n\to) \Leftrightarrow (\bigcap_{i\le n}\mathcal{X}_i=\varnothing).$$

ТЕОРЕМА 6. Для любой интерпретации $f_{\mathcal{X}}$ и любой доказуемой секвенции C утверждение $f_{\mathcal{X}}(C)$ справедливо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по высоте доказательства в виде дерева $\mathfrak{D}$. То есть нужно доказать, что если $f_{\mathcal{X}}$ от секвенций над чертой дерева $\mathfrak{D}$ справедливо, то $f_{\mathcal{X}}$ от секвенций под чертой также справедливо. Пусть

$$\frac{\mathfrak{A}_0,\ldots,\mathfrak{A}_n\vdash\mathfrak{B}_0\vee\mathfrak{B}_1;\ \mathfrak{A}_0,\ldots,\mathfrak{A}_n,\mathfrak{B}_0\vdash\mathfrak{C};\ \mathfrak{A}_0,\ldots,\mathfrak{A}_n,\mathfrak{B}_1\vdash\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}_0,\ldots,\mathfrak{A}_n\vdash\mathfrak{C}}$$

переход в дереве $\mathfrak{D}$ и $f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}_0,\ldots,\mathfrak{A}_n\vdash\mathfrak{B}_0\vee\mathfrak{B}_1)$, $f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}_0,\ldots,\mathfrak{A}_n,\mathfrak{B}_0\vdash\mathfrak{C})$, $f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}_0,\ldots,\mathfrak{A}_n,\mathfrak{B}_1\vdash\mathfrak{C})$ имеют место. Пусть $x\in\bigcap_{i\le n}f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}_i)$. Так как $\bigcap_{i\le n}f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}_i)\subseteq f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{B}_0)\cup f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{B}_1)$, то $x\in f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{B}_{i_0})$ для некоторого $i_0\le 1$. Так как $\bigcap_{i\le n}f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}_i)\cap f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{B}_{i_0})\subseteq f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{C})$, то $x\in f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{C})$. Следовательно, $f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{A}_0,\ldots,\mathfrak{A}_n\vdash\mathfrak{C})$ имеет место.

Проверка переходов по остальным правилам также проста и предоставляется читателю.

СЛЕДСТВИЕ. ИВ непротиворечиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{X}$ - непустое множество, $f_{\mathcal{X}}$ - некоторая интерпретация в $\mathcal{X}$. По определению интерпретации $f_{\mathcal{X}}(\mathcal{P}_1\wedge\neg\mathcal{P}_1) = f_{\mathcal{X}}(\mathcal{P}_1)\cap f_{\mathcal{X}}(\neg\mathcal{P}_1) = \varnothing$. Очевидно, что $\mathcal{X}\subseteq\varnothing$ ложно. По теореме 6

секвенция $\vdash\mathcal{P}_1\wedge\neg\mathcal{P}_1$ не доказуема. Следовательно, формула $\mathcal{P}_1\wedge\neg\mathcal{P}_1$ не доказуема в ИВ.

Мы рассмотрели интерпретацию пропозициональных переменных как подмножеств некоторого множества $\mathcal{X}$. Логические связки мы интерпретировали как операции на этих подмножествах. Это позволило доказать непротиворечивость ИВ. Мы рассмотрим другую интерпретацию ИВ, которая очень тесно связана с этим исчислением и которую будем называть главной интерпретацией ИВ.

Понятие интерпретации выходит за рамки самого исчисления. Оно относится к так называемой семантике исчисления в отличие от понятия формулы, правил вывода, доказательства, которые относятся к синтаксису исчисления.

На множестве $\{0,1\}$ определим операции $\wedge,\vee,\to,\neg$ при помощи следующей таблицы:

x	y	$x\wedge y$	$x\vee y$	$x\to y$	$\neg x$
0	0	0	0	I	I
0	I	0	I	I	I
I	0	0	I	0	0
I	I	I	I	I	0

(I)

Если в таблицу вместо "I" подставить "истинно", а вместо "0" - "ложно", то получим определение истинности сложных высказываний, полученных из высказываний x и y при помощи "и", "или", "если..., то...", "не". Поэтому мы часто будем говорить вместо "I" ("0") "истинно" ("ложно") и наоборот.

Если задано отображение f множества элементарных формул $\{\mathcal{P}_0,\ldots,\mathcal{P}_k\}$ в $\{0,1\}$, то по таблице (I) f однозначно продолжается на множество формул ИВ, пропозициональные переменные которых находятся среди $\mathcal{P}_0,\ldots,\mathcal{P}_k$. Если при этом $f(\mathfrak{A}) = 1$ ($f(\mathfrak{A})=0$), то будем говорить, что на наборе $\langle f(\mathcal{P}_0),\ldots,f(\mathcal{P}_k)\rangle$ значение истинности формулы $\mathfrak{A}$ равно I (0) или просто, что $\mathfrak{A}$ истинна (ложна) на этом наборе.

Таким образом, для любой формулы $\mathfrak{A}$ с пропозициональными переменными среди $\mathcal{P}_0,\ldots,\mathcal{P}_{k-1}$ мы имеем k -местную функцию на множестве $\{0,1\}$, которая заданным значениям истинности переменных $\mathcal{P}_0,\ldots,\mathcal{P}_{k-1}$ сопоставляет значение истинности формулы $\mathfrak{A}$. Эту функцию назовем истинностной функцией формулы $\mathfrak{A}$ (обозначим $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{P}_0,\ldots,\mathcal{P}_{k-1})$). Формулу $\mathfrak{A}$ с переменными среди $\mathcal{P}_i, i<k$, на-

зовем т о ж д е с т в е н н о и с т и н н о й (т о ж д е с т в е н н о л о ж н о й), если $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{P}_0,\dots,\mathcal{P}_k)$ принимает значение истины (лжи) на всех наборах значений переменных $\mathcal{P}_0,\dots,\mathcal{P}_k$. Секвенция $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$ называется тождественно истинной, если на любом наборе значений истинности переменных секвенции $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$ либо одна из формул Γ ложна, либо $\mathfrak{A}$ истинна. Секвенция $\Gamma\vdash$ называется тождественно истинной, если для любых значений истинности переменных из Γ одна из формул Γ ложна.

ТЕОРЕМА 7. Если секвенция C доказуема, то C тождественно истинна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по длине линейного доказательства C. Если $C=\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}$, то утверждение теоремы тривиально. Чтобы завершить доказательство теоремы, нужно проверить, что правила I-I2 сохраняют тождественную истинность. Пусть, например,

$$\frac{\Gamma_1\vdash\mathfrak{B};\ \Gamma_1\vdash\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}{\Gamma_1\vdash\mathfrak{C}}\ -$$

применение правила 8. Если на некотором наборе истинности пропозициональных переменных все формулы Γ истинны, то по индукционному предположению $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$ истинны на этом наборе. Тогда, по определению операции $\to$, $\mathfrak{C}$ тоже истинна.

Проверка других правил также проста и предоставляется читателю.

Из теоремы 7 получаем другое доказательство непротиворечивости ИВ.

СЛЕДСТВИЕ I. ИВ непротиворечиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\mathcal{P}_0\wedge\neg\mathcal{P}_0$ – тождественно ложная формула. Поэтому, в силу теоремы I, секвенция $\vdash\mathcal{P}_0\wedge\neg\mathcal{P}_0$ не доказуема.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ и пропозициональные переменные $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ одни и те же, то $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}=\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть на наборе t $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(t)=1$. По условию $\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$ доказуема. По теореме 7 получаем, что $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}(t)=1$. Аналогично из $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}(t)=1$ следует $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(t)=1$.

Введем обозначения $\mathcal{P}^0=\mathcal{P}, \mathcal{P}^1=\neg\mathcal{P}$. Пусть $\bar{t}=\langle t_0,\dots,t_n\rangle$ – набор нулей и единиц.

ЛЕММА I. Элементарная дизъюнкция $\mathfrak{B}$ вида $\mathcal{P}_0^{t_0}\vee\dots\vee\mathcal{P}_n^{t_n}$ принимает значение "ноль" на единственном наборе $\bar{t}=\langle t_0,\dots,t_n\rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула $\mathfrak{B}$ построена из формул $\mathcal{P}_i^{t_i}$ при помощи операции $\vee$. Из таблицы истинности для дизъюнкции следует,

что если бы одна из формул $\mathcal{P}_i^{t_i}$ приняла значение 1, то $\mathfrak{B}$ также приняла бы значение 1. Следовательно, $\mathcal{P}_i$ должна принимать значение t_i.

ТЕОРЕМА 8 (о функциональной полноте ИВ). Пусть $f:\{0,1\}^{n+1}\to\{0,1\}$. Тогда существует формула $\mathfrak{A}$ ИВ, для которой $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}=f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f тождественно равна единице, то любую тождественно истинную формулу, например $(\mathcal{P}_0\vee(\mathcal{P}_1\vee\dots\vee(\mathcal{P}_n\vee\neg\mathcal{P}_n)\dots))$, можно взять в качестве $\mathfrak{A}$.

Будем обозначать через $\bar{t}$ набор $\langle t_0,\dots,t_n\rangle$ элементов множества $\{0,1\}$, а через $f(\bar{t})$ – значение функции $f(t_0,\dots,t_n)$. Пусть множество $\mathcal{X}=\{\bar{t}\mid f(\bar{t})=0\}$ не пусто. Возьмем в качестве $\mathfrak{A}$ формулу, находящуюся в к.н.ф. вида $\bigwedge_{\bar{t}\in\mathcal{X}}(\mathcal{P}_0^{t_0}\vee\dots\vee\mathcal{P}_n^{t_n})$. Существование такой $\mathfrak{A}$ следует из предложения I § 5. Докажем, что $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(\bar{t})=0$ эквивалентно $\bar{t}\in\mathcal{X}$. Пусть $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(\bar{t})=0$. Так как $\mathfrak{A}$ построена из конъюнктивных членов с помощью операции $\wedge$, то существует конъюнктивный член $\mathfrak{B}$, который ложен на наборе $\bar{t}$. $\mathfrak{B}$ имеет вид $\mathcal{P}_0^{t'_0}\vee\dots\vee\mathcal{P}_n^{t'_n}$, где $t'\in\mathcal{X}$. В силу предыдущей леммы $t_i=t'_i$ для $i\leq n$ и, следовательно, $\bar{t}\in\mathcal{X}$. Пусть теперь $\bar{t}\in\mathcal{X}$. По лемме конъюнктивный член $\mathfrak{B}$ вида $\mathcal{P}_0^{t_0}\vee\dots\vee\mathcal{P}_n^{t_n}$ ложен на наборе $\bar{t}$. Используя опять тот факт, что $\mathfrak{A}$ построена из конъюнктивных членов (среди которых находится $\mathfrak{B}$) при помощи операции $\wedge$, заключаем, что $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(\bar{t})=0$. Теорема доказана.

§ 7. Характеризация доказуемых формул

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\mathfrak{A}$ – формула ИВ. Следующие 3 условия эквивалентны:

I) $\mathfrak{A}$ доказуема.

2) Для всякой $\mathfrak{A}'\equiv\mathfrak{A}$, находящейся в к.н.ф., и любого ее конъюнктивного члена $\mathfrak{B}$, если $\mathfrak{B}$ имеет вид $\mathfrak{B}_0\vee\dots\vee\mathfrak{B}_k$, существуют $i,j\leq k$, для которых $\mathfrak{B}_i=\neg\mathfrak{B}_j$.

3) Существует $\mathfrak{A}'\equiv\mathfrak{A}$, находящаяся в к.н.ф. и такая, что для любого ее конъюнктивного члена $\mathfrak{B}$, если $\mathfrak{B}$ имеет вид $\mathfrak{B}_0\vee\dots\vee\mathfrak{B}_k$, существуют $i,j\leq k$, для которых $\mathfrak{B}_i=\neg\mathfrak{B}_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) $\Longrightarrow$ 3) – тривиально. 3) $\Longrightarrow$ I) следует из лемм 5.5, 5.7 и 4.2.I).

Пусть $\mathfrak{A}$ – доказуема. Тогда любой конъюнктивный член $\mathfrak{B}$ формулы $\mathfrak{A}'$, в силу леммы 5.5, доказуем. Пусть $\mathfrak{B}$ имеет вид $\mathfrak{B}_0\vee\dots\vee\mathfrak{B}_k$ и для всех $i,j\leq k$ $\mathfrak{B}_i\neq\neg\mathfrak{B}_j$. Рассмотрим два множества атомарных формул $\mathcal{X} = \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} = \mathcal{B}_i$ для некоторого $i \leq k\}$ и $\mathcal{Y} = \{\mathcal{P} \mid \neg\mathcal{P} = \mathcal{B}_i$ для некоторого $i \leq k\}$. По предположению, $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \emptyset$. Пусть $\mathcal{B}_1$ получается из $\mathcal{B}$ заменой всех подформул $\mathcal{P} \in \mathcal{X}$ на $\mathcal{P}_0$ и всех $\mathcal{P} \in \mathcal{Y}$ на $\neg\mathcal{P}_0$. По теореме о подстановке $\mathcal{B}_1$ доказуема. Пусть $\mathcal{B}_2$ получается из $\mathcal{B}_1$ заменой $\neg\neg\mathcal{P}_0$ на $\mathcal{P}_0$. В силу теоремы о замене $\mathcal{B}_2 \equiv \mathcal{B}_1$. Следовательно, $\mathcal{B}_2$ доказуема. Очевидно, что $\mathcal{B}_2$ - элементарная дизъюнкция вида $\mathcal{P}_0$. По лемме 5.8 $\mathcal{P}_0 \equiv \mathcal{B}_2$. Следовательно, $\mathcal{P}_0$ доказуема. По теореме о подстановке получаем, что любая формула $\mathcal{L}$ доказуема. Противоречие с непротиворечивостью ИВ. Теорема доказана.

Теорема 9 дает нам характеризацию доказуемых формул, основанную на строении эквивалентных им формул, находящихся в к.н.ф. Такую характеризацию назовем дедуктивной. Сейчас мы получим семантическую характеризацию доказуемых секвенций, основанную на понятии истинности.

ЛЕММА I. Секвенция $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathcal{B}$ доказуема тогда и только тогда, когда доказуема секвенция $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathcal{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно по правилам 7 и 8.

ЛЕММА 2. $\Gamma \vdash$ доказуема тогда и только тогда, когда доказуема $\Gamma \vdash \mathcal{P}_0 \wedge \neg\mathcal{P}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\Gamma \vdash$ доказуема, то по правилу б) предл.2§3 $\Gamma, \neg(\mathcal{P}_0 \wedge \neg\mathcal{P}_0) \vdash$ доказуема. По правилу 9 $\Gamma \vdash \mathcal{P}_0 \vee \neg\mathcal{P}_0$ доказуема. Если $\Gamma \vdash \mathcal{P}_0 \wedge \neg\mathcal{P}_0$ доказуема, то по правилам 2 и 3 $\Gamma \vdash \mathcal{P}_0$ и $\Gamma \vdash \neg\mathcal{P}_0$ доказуемы. Применяя правило I0, получаем, что $\Gamma \vdash$ доказуема.

ТЕОРЕМА I0 (о полноте ИВ). I) Следующие два условия эквивалентны для любой секвенции $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{A}$.

А. $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{A}$ доказуема.

В. Для любых значений истинности пропозициональных переменных формул $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}$ из истинности $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ следует истинность $\mathfrak{A}$.

2) Следующие два условия эквивалентны для любой секвенции $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash$.

С. $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash$ доказуема.

Д. Не существует значений истинности пропозициональных переменных, для которых все формулы $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ истинны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что пункт 2) следует из I). По лемме 2 условие С. для секвенции $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash$ эквивалентно условию А. для секвенции $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathcal{P}_0 \wedge \neg\mathcal{P}_0$. Так как $\mathcal{P}_0 \wedge \neg\mathcal{P}_0$ тождественно ложная формула, то условие В. для $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathcal{P}_0 \wedge \neg\mathcal{P}_0$ эквивалентно условию Д. для $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$.

А.⇒В. следует из теоремы 7. Для доказательства В.⇒А. достаточно показать, что тождественно истинная формула доказуема. В самом деле, применяя лемму I $n+1$ раз, получаем, что доказуемость $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{A}$ эквивалентна доказуемости секвенции $\vdash \mathfrak{A}_0 \to (\mathfrak{A}_1 \to \ldots \to (\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}) \ldots)$. Из условия В. для $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}$ следует, что $\mathfrak{A}_0 \to (\mathfrak{A}_1 \to \ldots \to (\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}) \ldots)$ - тождественно истинная формула.

Пусть $\mathfrak{A}$ - тождественно истинная формула и $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$ находится в к.н.ф. вида $\bigwedge_{i=0}^{m} (\mathfrak{A}_0^i \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_{k_i}^i)$. Предположим, что $\mathfrak{A}$ не доказуема. Тогда $\mathfrak{A}'$ тоже не доказуема. В силу лемм 9 и 5 § 5 существует конъюнктивный член $\mathcal{B}$ формулы $\mathfrak{A}'$, имеющий вид $\mathfrak{A}_0 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$, такой, что не существуют $i, j \leq n$, что $\mathfrak{A}_i = \neg\mathfrak{A}_j$. Пусть $\mathcal{X} = \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} = \mathfrak{A}_i$ для некоторого $i \leq n\}$, $\mathcal{Y} = \{\mathcal{P} \mid \neg\mathcal{P} = \mathfrak{A}_i$ для некоторого $i \leq n\}$. Тогда $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \emptyset$. Если переменные из $\mathcal{X}$ принимают значение 0, а элементы из $\mathcal{Y}$ - значение I, то, по лемме § 6, $\mathcal{B}$ принимает значение 0. Так как $\mathfrak{A}'$ построена из конъюнктивных членов (среди которых есть $\mathcal{B}$) с помощью одной операции $\wedge$, то $\mathfrak{A}'$ принимает значение 0, если переменные из $\mathcal{X}$ принимают значение 0, а из $\mathcal{Y}$ - значение I. Следовательно, $\mathfrak{A}'$ не тождественно истинная формула. В силу следствия 6.2 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}'$ - не тождественно истинная формула. Противоречие. Теорема доказана.

Если задано исчисление и определено понятие истинности (семантика) формул этого исчисления, то говорят, что и с ч и с л е н и е н е п р о т и в о р е ч и в о п о о т н о ш е н и ю к э т о й с е м а н т и к е, если в исчислении доказуемы только истинные формулы. Если доказуемы все истинные формулы, то говорят, что исчисление полно по отношению к этой семантике. Кроме проблемы непротиворечивости и полноты, важное значение имеет проблема разрешимости исчисления. Говорят, что исчисление разрешимо, если существует процедура (алгоритм), позволяющая для любой формулы $\mathfrak{A}$ через конечное число шагов определить, доказуема $\mathfrak{A}$ или нет. Если такой процедуры не существует, то говорят, что исчисление неразрешимо.

Если истинность формул ИВ определить как тождественную истинность, то предыдущая теорема показывает, что ИВ полно и непротиворечиво по отношению к этой семантике. Очевидно, что за конечное число шагов можно узнать, является ли данная формула $\mathfrak{A}$ тождественно истинной или нет. Так как тождественная истинность и доказуемость $\mathfrak{A}$ эквивалентны, то ИВ разрешимо.

При задании исчисления с помощью схем аксиом и правил вывода естественно возникает вопрос о независимости этих схем аксиом и правил вывода. Схема аксиом называется н е з а в и с и м о й в исчислении, если хотя бы один ее частный случай не доказуем в исчислении без этой схемы. Правило вывода называют н е з а в и с и м ы м в исчислении, если оно не является производным в исчислении без этого правила. Исчисление называется независимым, если все его схемы аксиом и правила вывода независимы.

Из эстетических соображений стремятся строить независимые исчисления. Вопрос о независимости исчисления может оказаться очень трудным. Так, например, вопрос о независимости аксиомы выбора от остальных аксиом аксиоматической теории множеств не поддавался решению более 50 лет.

В заключение параграфа мы покажем независимость ИВ. Так как в ИВ только одна схема аксиом, то очевидно, что она независима. Для доказательства независимости правил вывода достаточно для каждого правила Π найти характеристическое свойство Δ, которым обладают все секвенции, доказуемые при помощи правил, отличных от Π, и которым некоторые доказуемые в ИВ секвенции не обладают. Мы ограничимся только формулировками характеристических свойств для правил I–I2, оставляя необходимую проверку читателю.

Характеристическим свойством для правил I–8 будет тождественная истинность (§ 6) секвенций при новом определении для каждого правила одной из логических операций $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ на множестве $\{0,1\}$. Остальные операции при этом определяются по таблице § 6. Приведем новые определения логических операций, соответствующих правилам I–8.

П р а в и л о I. Конъюнкция определяется как тождественно ложная функция.

П р а в и л о 2. Значение конъюнкции $x \wedge y$ равно значению второго члена y.

П р а в и л о 3. Значение конъюнкции $x \wedge y$ равно значению первого члена x.

П р а в и л о 4. Значение дизъюнкции $x \vee y$ равно значению второго члена y.

П р а в и л о 5. Значение дизъюнкции $x \vee y$ равно значению первого члена x.

П р а в и л о 6. Дизъюнкция определяется как тождественно истинная функция.

П р а в и л о 7. Импликация определяется как тождественно ложная функция.

П р а в и л о 8. Импликация определяется как тождественно истинная функция.

Рассмотрим множество $\mathfrak{B}=\{0,1,2\}$. Конъюнкцию на множестве $\mathfrak{B}$ определим как минимум двух чисел, а дизъюнкцию – как максимум. Отрицание определяется следующим образом: $\neg(2)=0, \neg(1)=0, \neg(0)=2$. Импликация определяется так: $m \rightarrow n = \begin{cases} 2, & m \leq n; \\ n, & m > n. \end{cases}$

П р а в и л о 9. Характеристическим свойством для секвенций $\Gamma \vdash \mathfrak{A}\,(\Gamma \vdash)$ является следующее: для значений из множества $\mathfrak{B}$ пропозициональных переменных минимум значений формул из Γ меньше или равен значению формулы $\mathfrak{A}$ (равен нулю). При этом минимум пустого множества значений равен двум.

П р а в и л о I0. Характеристическим свойством секвенций для этого правила является наличие формулы в правой части.

П р а в и л о II. Характеристическое свойство секвенции $\Gamma \vdash \mathfrak{A}\,(\Gamma \vdash)$ состоит в следующем: если $\Gamma = \langle \mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n \rangle \neq \varnothing$, то секвенция $\mathfrak{A}_0 \vdash \mathfrak{A}\,(\mathfrak{A}_0 \vdash)$ доказуема в ИВ.

П р а в и л о I2. Характеристическое свойство секвенции $\Gamma \vdash \mathfrak{A}\,(\Gamma \vdash)$ состоит в том, что Γ не более чем одноэлементно.

§ 8. Исчисление высказываний гильбертовского типа

В этом параграфе мы рассмотрим другую аксиоматизацию исчисления высказываний $ИВ_I$.

Язык $ИВ_I$ совпадает с ИВ, понятие формулы то же, секвенций в ИВ нет. А к с и о м ы $ИВ_I$ получаются из следующих I0 схем заменой $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ конкретными формулами:

I. $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A})$,
2. $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow ((\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}))$,
3. $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{A}$,
4. $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{B}$,
5. $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}))$,
6. $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$,
7. $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A})$,
8. $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow ((\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{C}))$,
9. $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow ((\mathfrak{A} \rightarrow \neg \mathfrak{B}) \rightarrow \neg \mathfrak{A})$,
I0. $\neg\neg \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$.

П р а в и л о в ы в о д а в $ИВ_I$ одно:

$$\frac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$$

Доказательством в ИВ$_\mathrm{I}$ формулы $\mathfrak{A}_n$ называется такая последовательность формул $\mathfrak{A}_0,\dots,\mathfrak{A}_n$, что каждая $\mathfrak{A}_i$, $i\le n$, является либо аксиомой, либо получена из $\mathfrak{A}_j,\mathfrak{A}_k$, $j,k<i$, по правилу вывода. Если существует доказательство в ИВ$_\mathrm{I}$ формулы $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ называется доказуемой в ИВ$_\mathrm{I}$ и обозначается $\vdash\mathfrak{A}$.

Выводом в ИВ$_\mathrm{I}$ формулы $\mathfrak{A}_n$ из последовательности формул Γ называется такая последовательность $\mathfrak{A}_0,\dots,\mathfrak{A}_n$ формул ИВ$_\mathrm{I}$, что каждая $\mathfrak{A}_i$, $i\le n$, является либо аксиомой, либо принадлежит Γ, либо получается из $\mathfrak{A}_j,\mathfrak{A}_k$, $j,k<i$, по правилу вывода. Если существует вывод формулы $\mathfrak{A}$ из Γ, то $\mathfrak{A}$ называется выводимой в ИВ$_\mathrm{I}$ из Γ и обозначается $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$.

Отметим, что последовательность Γ из определения вывода не обязана быть конечной. Но если $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$, то в силу конечности вывода $\mathfrak{A}$ из Γ существует конечная подпоследовательность Γ_1, что $\Gamma_1\vdash\mathfrak{A}$. Очевидно также, что если $\{\Gamma\}\subseteq\{\Gamma'\}$ и $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$, то $\Gamma'\vdash\mathfrak{A}$.

Целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы, которая показывает в определенном смысле равносильность ИВ и ИВ$_\mathrm{I}$.

ТЕОРЕМА II. а) Секвенция $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$ тогда и только тогда доказуема в ИВ, когда $\mathfrak{A}$ выводима из Γ в ИВ$_\mathrm{I}$. В частности множества доказуемых формул в ИВ и в ИВ$_\mathrm{I}$ совпадают.

б) Секвенция $\Gamma\vdash$ тогда и только тогда доказуема в ИВ, когда формула $\mathfrak{P}_0\wedge\neg\mathfrak{P}_0$ выводима из Γ в ИВ$_\mathrm{I}$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы II, мы разовьем некоторую теорию выводимости в ИВ$_\mathrm{I}$.

Пример I. Покажем доказуемость формул вида $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$. Доказательство формулы $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ имеет такой вид:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{I)}\ \ \mathfrak{A}\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}),\\
\text{2)}\ \ \mathfrak{A}\to((\mathfrak{A}\to\mathfrak{A})\to\mathfrak{A}),\\
\text{3)}\ \ (\mathfrak{A}\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}))\to((\mathfrak{A}\to((\mathfrak{A}\to\mathfrak{A})\to\mathfrak{A}))\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{A})),
\end{array}\right\}\ \text{– аксиомы,}$$

4) $(\mathfrak{A}\to((\mathfrak{A}\to\mathfrak{A})\to\mathfrak{A}))\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{A})$ – правило вывода к I) и 3),

5) $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ – правило вывода к 2) и 4).

Правило вывода $\dfrac{\mathfrak{A}_0,\dots,\mathfrak{A}_k}{\mathfrak{B}}$ называется производным в ИВ$_\mathrm{I}$, если его добавление к исчислению ИВ$_\mathrm{I}$ не увеличивает число выводимых из Γ формул для любой последовательности формул Γ.

Квазивыводом в ИВ$_\mathrm{I}$ формулы $\mathfrak{A}$ из последовательности формул Γ называется такая последовательность формул $\mathfrak{A}_0,\dots,\mathfrak{A}_n$, что каждая $\mathfrak{A}_i$, $i\le n$, либо выводима в ИВ$_\mathrm{I}$ из Γ, либо получается из предыдущих по производному правилу вывода.

Упражнение. Доказать, что если имеется квазивывод в ИВ$_\mathrm{I}$ формулы $\mathfrak{A}$ из последовательности формул Γ, то $\mathfrak{A}$ выводима в ИВ$_\mathrm{I}$ из Γ.

ТЕОРЕМА I2 (о дедукции). Если $\Gamma,\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$, то $\Gamma\vdash\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по длине n минимального вывода $\mathfrak{B}_1,\dots,\mathfrak{B}_n$ формулы $\mathfrak{B}$ из $\Gamma,\mathfrak{A}$. Если $n=1$, либо I) $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$, либо 2) $\mathfrak{B}$ – аксиома или входит в Γ. В первом случае, в силу примера I, формула $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ выводима из Γ. Во втором случае последовательность $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})$, $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ будет выводом в ИВ$_\mathrm{I}$ из Γ. Пусть $n>1$. Из минимальности вывода $\mathfrak{B}_1,\dots,\mathfrak{B}_n$ имеем, что $\mathfrak{B}_n$ получается из $\mathfrak{B}_i,\mathfrak{B}_j=(\mathfrak{B}_i\to\mathfrak{B}_n)$, $1\le i,j<n$, по правилу вывода. Тогда в силу индукционного предположения последовательность $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}_1,\dots,\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}_{n-1}$, $(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}_i)\to$ $\to((\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}_i\to\mathfrak{B}_n))\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}_n))$, $(\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}_i\to\mathfrak{B}_n))\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}_n)$, $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}_n$ будет квазивыводом $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ из Γ. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. $\mathfrak{A}_0,\dots,\mathfrak{A}_n\vdash\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $\vdash\mathfrak{A}_0\to(\mathfrak{A}_1\to\dots\to(\mathfrak{A}_n\to\mathfrak{A})\dots)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону $n+1$ раз применяем теорему о дедукции. Пусть теперь $\vdash\mathfrak{A}_0\to(\mathfrak{A}_1\to\dots\to(\mathfrak{A}_n\to\mathfrak{A})\dots)$. Тогда $\mathfrak{A}_0,\dots,\mathfrak{A}_n\vdash\mathfrak{A}_0\to(\mathfrak{A}_1\to\dots\to(\mathfrak{A}_n\to\mathfrak{A})\dots)$. Применяя $n+1$ раз правило вывода, получаем $\mathfrak{A}_0,\dots,\mathfrak{A}_n\vdash\mathfrak{A}$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы II. В силу следствия I и лемм 7.I и 7.2 достаточно доказать, что доказуемость формулы $\mathfrak{A}$ в ИВ эквивалентна доказуемости $\mathfrak{A}$ в ИВ$_\mathrm{I}$.

Докажем, что $\vdash\mathfrak{A}$ влечет доказуемость $\mathfrak{A}$ в ИВ для любой формулы $\mathfrak{A}$. Так как в ИВ имеется правило $\dfrac{\vdash\mathfrak{A},\ \vdash\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}{\vdash\mathfrak{B}}$, то достаточно показать, что все аксиомы ИВ$_\mathrm{I}$ доказуемы в ИВ. Приведем соответствующие выводы. При этом, как и раньше, мы будем опускать переходы по правилам II, I2.

I. $\begin{array}{c}\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}\\ \hline \mathfrak{A},\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}\\ \hline \mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}\\ \hline \vdash\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{A})\end{array}$ 3. $\begin{array}{c}\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\\ \hline \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}\\ \hline \vdash(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\to\mathfrak{A}\end{array}$ 4. $\begin{array}{c}\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\\ \hline \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{B}\\ \hline \vdash(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\to\mathfrak{B}\end{array}$

$$2.\ \begin{array}{c}
\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}\to\mathfrak{B};\ \mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B};}\qquad \dfrac{\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})\vdash\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C});\ \mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}),\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}} \\ \hline
\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}),\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{C} \\ \hline
\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})\vdash\mathfrak{A}\to\mathfrak{C} \\ \hline
\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}\vdash(\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}))\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}) \\ \hline
\vdash(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\to((\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}))\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}))
\end{array}$$

$$5.\ \begin{array}{c}
\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A};\ \mathfrak{B}\vdash\mathfrak{B} \\ \hline
\mathfrak{A},\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B} \\ \hline
\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}\to(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}) \\ \hline
\vdash\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\to(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}))
\end{array}
\qquad 6.\ \begin{array}{c}
\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A} \\ \hline
\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B} \\ \hline
\vdash\mathfrak{A}\to(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})
\end{array}
\qquad 7.\ \begin{array}{c}
\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A} \\ \hline
\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}\vee\mathfrak{A} \\ \hline
\vdash\mathfrak{A}\to(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{A})
\end{array}$$

$$8.\ \begin{array}{c}
\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B};\ \dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}\vdash\mathfrak{A}\to\mathfrak{C};\ \mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{C},\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{C};}\quad \dfrac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}\vdash\mathfrak{B}\to\mathfrak{C};\ \mathfrak{B}\vdash\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C},\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{C}} \\ \hline
\mathfrak{A}\to\mathfrak{C},\mathfrak{B}\to\mathfrak{C},\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{C} \\ \hline
\mathfrak{A}\to\mathfrak{C},\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}\vdash(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\to\mathfrak{C} \\ \hline
\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}\vdash(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})\to((\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\to\mathfrak{C}) \\ \hline
\vdash(\mathfrak{A}\to\mathfrak{C})\to((\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})\to((\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\to\mathfrak{C}))
\end{array}$$

$$9.\ \begin{array}{c}
\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}\to\mathfrak{B};\ \mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B};}\qquad \dfrac{\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B};\ \mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B},\mathfrak{A}\vdash\neg\mathfrak{B}} \\ \hline
\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B},\mathfrak{A}\vdash \\ \hline
\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B}\vdash\neg\mathfrak{A} \\ \hline
\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}\vdash(\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B})\to\neg\mathfrak{A} \\ \hline
\vdash(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\to((\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B})\to\neg\mathfrak{A})
\end{array}$$

В 9. мы использовали производное правило из предложения 3.2.г).

$$10.\ \begin{array}{c}
\neg\neg\mathfrak{A}\vdash\neg\neg\mathfrak{A};\ \neg\mathfrak{A}\vdash\neg\mathfrak{A} \\ \hline
\neg\neg\mathfrak{A},\neg\mathfrak{A}\vdash \\ \hline
\neg\neg\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A} \\ \hline
\vdash\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}
\end{array}$$

Будем говорить, что правило вывода ИВ сохраняет выводимость в $ИВ_I$, если, после замены в нем знака $\vdash$ на $\vDash$, а секвенции $\Gamma\vdash$ на $\Gamma\vDash\mathcal{P}_0\wedge\neg\mathcal{P}_0$, из истинности утверждений над чертой будет следовать истинность утверждения под чертой. Ясно, что для доказательства того, что из доказуемости $\mathfrak{A}$ в ИВ следует $\vDash\mathfrak{A}$, достаточно показать, что правила I–I2 сохраняют выводимость в $ИВ_I$. Сохранение выводимости для правил I–5 легко показать, используя аксиомы 3–7. Пусть $\Gamma,\mathfrak{A}\vDash\mathfrak{B}$; $\Gamma,\mathfrak{C}\vDash\mathfrak{B}$; $\Gamma\vDash\mathfrak{A}\vee\mathfrak{C}$.

По теореме о дедукции

$$\Gamma\vDash\mathfrak{A}\to\mathfrak{B} \quad \text{и} \quad \Gamma\vDash\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}.$$

Применяя 3 раза правило вывода $ИВ_I$ к аксиоме 8, получаем $\Gamma\vDash\mathfrak{B}$. Следовательно, правило 6 сохраняет выводимость. Правило 7 соответствует теореме о дедукции, правило 8 – правилу вывода $ИВ_I$. Докажем сохранение выводимости правилом 9. Пусть $\Gamma,\neg\mathfrak{A}\vDash\mathcal{P}_0\wedge\neg\mathcal{P}_0$. Из аксиом 3 и 4 получаем $\Gamma,\neg\mathfrak{A}\vDash\mathcal{P}_0$ и $\Gamma,\neg\mathfrak{A}\vDash\neg\mathcal{P}_0$. По теореме о дедукции получаем

$$\Gamma\vDash\neg\mathfrak{A}\to\mathcal{P}_0 \quad \text{и} \quad \Gamma\vDash\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathcal{P}_0.$$

Из аксиом 9 и I0 получаем $\Gamma\vDash\mathfrak{A}$. Рассмотрим правило I0. Пусть $\Gamma\vDash\mathfrak{A}$ и $\Gamma\vDash\neg\mathfrak{A}$. Из аксиомы I получаем

$$\Gamma\vDash\neg(\mathcal{P}_0\wedge\neg\mathcal{P}_0)\to\mathfrak{A} \quad \text{и} \quad \Gamma\vDash\neg(\mathcal{P}_0\wedge\neg\mathcal{P}_0)\to\neg\mathfrak{A}.$$

Из аксиом 9 и I0 получаем $\Gamma\vDash\mathcal{P}_0\wedge\neg\mathcal{P}_0$. Сохранение выводимости правилами II и I2 следует непосредственно из определения вывода в $ИВ_I$. Теорема II доказана.

§ 9. Консервативные расширения исчислений

Пусть даны два языка $L_0\subseteq L_1$ и два исчисления $\mathcal{U}_0$ в языке L_0 и $\mathcal{U}_1$ в языке L_1. Исчисление $\mathcal{U}_1$ назовем консервативным расширением $\mathcal{U}_0$ и будем обозначать $\mathcal{U}_0\prec\mathcal{U}_1$, если формула языка L_0 доказуема в $\mathcal{U}_0$ тогда и только тогда, когда она доказуема в $\mathcal{U}_1$. Очевидно, что отношение $\prec$ рефлексивно и транзитивно.

ЛЕММА I. Если $\mathcal{U}_1$ консервативное расширение $\mathcal{U}_0$ и $\mathcal{U}_0$ непротиворечиво, то и $\mathcal{U}_1$ непротиворечиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно.

Пусть L – язык исчисления высказываний, описанный в § 2, $\mathfrak{J}$ – исчисление, которое мы изучали в параграфах 2–7 (раньше мы его обозначали ИВ). Через $L^{\to}$ будем обозначать подъязык языка L, не содержащий символа импликации. Соответствующее исчисление $\mathfrak{J}^{\to}$ состоит из аксиом и правил, не содержащих знака $\to$.

ЛЕММА 2. $\mathfrak{J}^{\to}\prec\mathfrak{J}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5.2 любая формула $\mathfrak{A}$ исчисления $\mathfrak{J}$ эквивалентна формуле $\varphi_0(\mathfrak{A})$ исчисления $\mathfrak{J}^{\to}$. Индукцией по высоте доказательства будем доказывать, что доказуемость секвенции $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$ $(\Gamma\vdash)$ в $\mathfrak{J}$ влечет доказуемость $\varphi_0(\Gamma)\vdash\varphi_0(\mathfrak{A})$ $(\varphi_0(\Gamma)\vdash)$ в $\mathfrak{J}^{\to}$. Здесь $\varphi_0(\Gamma)$ есть $\varphi_0(\mathfrak{A}_0),\ldots,\varphi_0(\mathfrak{A}_n)$, если Γ есть $\mathfrak{A}_0,\ldots,\mathfrak{A}_n$; $\varphi_0(\varnothing)=\varnothing$. Утверждение леммы отсюда следует, так как $\varphi_0(\mathfrak{A})=\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A}$ не содержит импликации. Если $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$ – аксиома, то очевидно, что $\varphi_0(\Gamma)\vdash\varphi_0(\mathfrak{A})$ – аксиома.

Если $\mathcal{D}$ – доказательство в виде дерева $\Gamma\vdash\mathfrak{A}\,(\Gamma\vdash)$ в $\mathcal{J}$, то индукцией по высоте $\mathcal{D}$ будем строить квазивывод $\mathcal{D}^*$ секвенции $\varphi_0(\Gamma)\vdash\varphi_0(\mathfrak{A})\,(\varphi_0(\Gamma)\vdash)$ в $\mathcal{J}^{\to}$. Пусть $\mathcal{D}=\dfrac{\mathcal{D}_1\ldots\mathcal{D}_n}{\Gamma\vdash\mathfrak{A}}$ $\left(\mathcal{D}=\dfrac{\mathcal{D}_1\ldots\mathcal{D}_n}{\Gamma\vdash}\right)$.

Если в конце применяется правило, отличное от введения и удаления импликации, то очевидно, что

$$\mathcal{D}^*=\frac{\mathcal{D}_1^*\ldots\mathcal{D}_n^*}{\varphi_0(\Gamma)\vdash\varphi_0(\mathfrak{A})}\quad\left(\mathcal{D}^*=\frac{\mathcal{D}_1^*\ldots\mathcal{D}_n^*}{\varphi_0(\Gamma)\vdash}\right)$$

будет квазивыводом секвенции $\varphi_0(\Gamma)\vdash\varphi_0(\mathfrak{A})\,(\varphi_0(\Gamma)\vdash)$. Здесь $\mathcal{D}_1^*,\ldots,\mathcal{D}_n^*$ – деревья, построенные по индукции. Если

$$\mathcal{D}=\frac{\mathcal{D}^1\,\mathcal{D}^2}{\Gamma\vdash\mathfrak{A}},$$

где $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$ – доказательства $\Gamma\vdash\mathfrak{B}$, $\Gamma\vdash\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$, соответственно, то следующее дерево будет квазивыводом $\varphi_0(\Gamma)\vdash\varphi_0(\mathfrak{A})$:

$$\dfrac{\dfrac{(\mathcal{D}^1)^*\qquad\dfrac{(\mathcal{D}^2)^*\qquad\dfrac{\neg\varphi_0(\mathfrak{A}),\varphi_0(\mathfrak{A}),\neg\varphi_0(\mathfrak{B})\vdash}{\neg\varphi_0(\mathfrak{A}),\varphi_0(\mathfrak{A})\vdash\neg\varphi_0(\mathfrak{B})};\ \neg\varphi_0(\mathfrak{B})\vdash\neg\varphi_0(\mathfrak{B})}{\varphi_0(\Gamma),\neg\varphi_0(\mathfrak{A})\vdash\neg\varphi_0(\mathfrak{B})}}{\varphi_0(\Gamma),\neg\varphi_0(\mathfrak{A})\vdash}}{\varphi_0(\Gamma)\vdash\varphi_0(\mathfrak{A})}$$

Если

$$\mathcal{D}=\frac{\mathcal{D}^1}{\Gamma\vdash\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2},$$

где $\mathcal{D}^1$ является доказательством $\Gamma,\mathfrak{A}_1\vdash\mathfrak{A}_2$ в $\mathcal{J}$, то квазивыводом $\varphi_0(\Gamma)\vdash\varphi_0(\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2)$ будет следующее дерево:

$$\dfrac{\vdash\neg\varphi_0(\mathfrak{A}_1)\vee\varphi_0(\mathfrak{A}_1);\qquad\dfrac{(\mathcal{D}^1)^*}{\varphi_0(\Gamma),\varphi_0(\mathfrak{A}_1)\vdash\neg\varphi_0(\mathfrak{A}_1)\vee\varphi_0(\mathfrak{A}_2)};\ \neg\varphi_0(\mathfrak{A}_1)\vdash\neg\varphi_0(\mathfrak{A}_1)\vee\varphi_0(\mathfrak{A}_2)}{\varphi_0(\Gamma)\vdash\neg\varphi_0(\mathfrak{A}_1)\vee\varphi_0(\mathfrak{A}_2)}$$

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим исчисление $\mathcal{J}^{\to,\vee}$, которое получается из $\mathcal{J}^{\to}$ удалением из языка знака $\vee$ и удалением правил 4,5 и 6.

Упражнение I. Доказать, что $\mathcal{J}^{\to,\vee}\prec\mathcal{J}^{\to}$.

Пусть $\mathcal{J}'=\mathcal{J}^{\to,\vee,\neg}$ получается из $\mathcal{J}^{\to,\vee}$ удалением $\neg$ и правил 9 и I0.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. I) $\Gamma\vdash$ не доказуема в $\mathcal{J}'$ ни при каком Γ из языка $\mathcal{J}'$.

2) Секвенция $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ – элементарная конъюнкция вида $\bigwedge_{i=0}^{n}Q_i$, тогда и только тогда доказуема в $\mathcal{J}'$, когда для каж-

дого $i\leq n$ в Γ есть формула, которая содержит Q_i.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для $\mathcal{J}'$ справедливо утверждение о том, что $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$ тогда и только тогда доказуема, когда доказуемы $\Gamma\vdash\mathcal{P}_i$ для всех $\mathcal{P}_i$, входящих в $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{B}$-из Γ содержит $\mathcal{P}$, то, применяя несколько раз правила 2 и 3, получим доказательство $\Gamma\vdash\mathcal{P}$. Следовательно, если для каждого $\mathcal{P}_i$, входящего в $\mathfrak{A}$, в Γ есть формула, которая содержит $\mathcal{P}_i$, то $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$ доказуема в $\mathcal{J}'$. Пусть $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$ доказуема. Если $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$ – аксиома, то 2) выполняется тривиально. Пусть для секвенций с деревьями доказательств высоты $\leq k$ 2) доказано и пусть дерево $\mathcal{D}$ высоты $k+1$, где

$$\mathcal{D}=\frac{\dfrac{\mathcal{D}_1^1\ldots\mathcal{D}_k^1}{\Gamma\vdash\mathfrak{A}_1};\ \dfrac{\mathcal{D}_1^2\ldots\mathcal{D}_m^2}{\Gamma\vdash\mathfrak{A}_2}}{\Gamma\vdash\mathfrak{A}_1\wedge\mathfrak{A}_2}, -$$

дерево доказательства секвенции $\Gamma\vdash\mathfrak{A}$ в $\mathcal{J}$. Так как любое $\mathcal{P}_i$, входящее в $\mathfrak{A}$, входит или в $\mathfrak{A}_1$, или в $\mathfrak{A}_2$, то по индукционному предположению $\mathcal{P}_i$ входит в Γ. Если же последний переход в $\mathcal{D}$ осуществляется по правилу 2, то совершенно аналогично получаем, что все $\mathcal{P}_i$, входящие в $\mathfrak{A}$, входят в Γ.

Для доказательства I) заметим, что только правило 9 давало в заключение секвенцию $\Gamma\vdash$. Так как в исчислении $\mathcal{J}'$ его нет, то I) доказано.

Упражнение 2. Доказать, что $\mathcal{J}^{\to,\vee,\neg}\prec\mathcal{J}^{\to,\vee}$.

Из леммы 2, упражнений I.2 и транзитивности $\prec$ получаем $\mathcal{J}^{\to,\vee,\neg}\prec\mathcal{J}$. Непротиворечивость $\mathcal{J}^{\to,\vee,\neg}$ непосредственно следует из предложения 3. Используя лемму I, получаем новое доказательство непротиворечивости $\mathcal{J}$, не прибегая к понятию интерпретации исчисления.

Глава II

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

§ 10. Функции и предикаты

Как обычно, конечное множество будем задавать перечислением его элементов, заключенным в фигурные скобки. Например, $\{x,y\}$ – это множество, элементами которого являются x и y. При этом не предполагается, что x и y различны. Множество $\{\{x\},\{x,y\}\}$ называется упорядоченной парой и обозначается через $\langle x,y\rangle$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\langle x_1,x_2\rangle = \langle y_1,y_2\rangle$, то $x_1=y_1$ и $x_2=y_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\{x_1\}\in\langle x_1,x_2\rangle$, значит, $\{x_1\}\in\langle y_1,y_2\rangle$. Поэтому либо $\{x_1\}=\{y_1\}$, либо $\{x_1\}=\{y_1,y_2\}$. Во всех случаях $y_1\in\{x_1\}$ и, значит, $y_1=x_1$. Если $x_1=x_2$, то $\langle x_1,x_2\rangle=\{\{x_1\}\}=$

$=\{\{x_2\}\}$. В этом случае множество $\langle y_1,y_2\rangle$ тоже одноэлементное и $\{y_1,y_2\}=\{y_1\}$. Значит, $y_1=y_2=x_1=x_2$. Если же $x_1\neq x_2$, то $\{x_1,x_2\}\neq\{y_1\}$. Поэтому $\{x_1,x_2\}=\{y_1,y_2\}$ и $x_2=y_2$. Предложение доказано.

Упорядоченной тройкой $\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ назовем упорядоченную пару $\langle\langle x_1,x_2\rangle,x_3\rangle$. Вообще, упорядоченной $(n+1)$-кой $\langle x_1,\dots,x_{n+1}\rangle$ при $n>1$ назовем упорядоченную пару $\langle\langle x_1,\dots,x_n\rangle,x_{n+1}\rangle$. Индукцией по n с использованием предложения 1 легко доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\langle x_1,\dots,x_n\rangle=\langle y_1,\dots,y_n\rangle$, то
$$x_1=y_1,\dots,x_n=y_n.$$

Множество $\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid x_i\in\mathcal{X}_i;\ 1\le i\le n\}$ назовем декартовым произведением множеств $\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_n$ и обозначим через $\mathcal{X}_1\times\dots\times\mathcal{X}_n$. Если $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{X}_1\times\dots\times\mathcal{X}_n$, то для $i=1,\dots,n$ $\text{Пр}_i\mathcal{A}=\{x \mid$ существуют такие $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$, что
$$\langle x_1,\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots,x_n\rangle\in\mathcal{A}\}.$$

Если $\mathcal{X}_1=\dots=\mathcal{X}_n=\mathcal{X}$, то $\mathcal{X}_1\times\dots\times\mathcal{X}_n$ обозначается через $\mathcal{X}^n$. Подмножества $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{X}^n$ называются n-местными предикатами (или n-местными отношениями) на $\mathcal{X}$.

Подмножество $\mathcal{F}$ множества $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ называется функцией, если для любого $x\in\mathcal{X}$ из $\langle x,y\rangle\in\mathcal{F}$ и $\langle x,z\rangle\in\mathcal{F}$ следует, что $y=z$. Если $\mathcal{F}$ – функция, $\text{Пр}_1\mathcal{F}=\mathcal{A}$, $\text{Пр}_2\mathcal{F}\subseteq\mathcal{B}$, то $\mathcal{F}$ называется отображением $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Если при этом $\text{Пр}_2\mathcal{F}=\mathcal{B}$, то $\mathcal{F}$ называется отображением $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$. Отображения $\mathcal{A}^n$ в $\mathcal{A}$ называются также n-местными операциями на $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{F}$ – отображение $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ и $\langle x,y\rangle\in\mathcal{F}$, то y называется образом x при отображении $\mathcal{F}$ и обозначается через $\mathcal{F}(x)$. Запись $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ означает, что $\mathcal{F}$ есть отображение $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Отображение $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ называется разнозначным, если $\mathcal{F}(x)\neq\mathcal{F}(y)$ для любых $x\neq y$ из $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $\mathcal{G}:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$, то можно определить отображение $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ следующим образом: $(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(a)=\mathcal{G}(\mathcal{F}(a))$ для $a\in\mathcal{A}$. Отображение $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$ называется композицией отображений $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$. Отображение $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ называется тождественным и обозначается через $i_{\mathcal{A}}$, если $\mathcal{F}(x)=x$ для всех $x\in\mathcal{A}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Отображение $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ тогда и только тогда является разнозначным отображением $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$, когда существует такое отображение $\mathcal{G}:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$, что $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}=i_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}=i_{\mathcal{B}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $\mathcal{F}$ – разнозначное отображение $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$. Для каждого $b\in\mathcal{B}$ найдем такой $a\in\mathcal{A}$, что $b=\mathcal{F}(a)$, и положим $\mathcal{G}(b)=a$. Ясно, что это $\mathcal{G}:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям: $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}=i_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}=i_{\mathcal{B}}$.

б) Пусть $\mathcal{G}:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$, $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}=i_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}=i_{\mathcal{B}}$. Тогда для каждого $b\in\mathcal{B}$ $\mathcal{F}(\mathcal{G}(b))=b$. Поэтому $\mathcal{F}$ является отображением $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$. Если $\mathcal{F}(a_1)=\mathcal{F}(a_2)$, то $\mathcal{G}(\mathcal{F}(a_1))=\mathcal{G}(\mathcal{F}(a_2))$, значит, $a_1=a_2$. Предложение 3 доказано.

Если $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $\mathcal{G}:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$, $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}=i_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}=i_{\mathcal{A}}$, то $\mathcal{G}$ называется обратным к $\mathcal{F}$ и обозначается через $\mathcal{F}^{-1}$. Ясно, что $(\mathcal{F}^{-1})^{-1}=\mathcal{F}$, если $\mathcal{F}^{-1}$ существует. Поэтому из предложения 3 сразу следует, что обратное к $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ отображение является разнозначным отображением $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$.

Ясно, что $(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})\circ\mathcal{H}=\mathcal{F}\circ(\mathcal{G}\circ\mathcal{H})$. Если отображения $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ являются обратными к $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, то $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}_1=\mathcal{F}\circ\mathcal{G}_2$. Кроме того, $\mathcal{G}_1\circ(\mathcal{F}\circ\mathcal{G}_1)=(\mathcal{G}_1\circ\mathcal{F})\circ\mathcal{G}_1=\mathcal{G}_1=\mathcal{G}_1\circ(\mathcal{F}\circ\mathcal{G}_2)=\mathcal{G}_2$. Значит, $\mathcal{G}_1=\mathcal{G}_2$.

Упражнение 1. Показать, что $(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})^{-1}=\mathcal{G}^{-1}\circ\mathcal{F}^{-1}$ для таких $\mathcal{G}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $\mathcal{F}:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$, которые имеют обратные $\mathcal{G}^{-1}$ и $\mathcal{F}^{-1}$. Показать, что композиция двух разнозначных отображений является разнозначным отображением и что композиция отображений $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}$ на $\mathcal{C}$ является отображением $\mathcal{A}$ на $\mathcal{C}$.

Пусть $\mathcal{P}$ – двухместное отношение на $\mathcal{X}$.

Отношение $\mathcal{P}$ назовем

рефлексивным, если $\langle x,x\rangle\in\mathcal{P}$ для всех $x\in\mathcal{X}$;

симметричным, если из $\langle x,y\rangle\in\mathcal{P}$ следует, что $\langle y,x\rangle\in\mathcal{P}$;

транзитивным, если из $\langle x,y\rangle\in\mathcal{P}$ и $\langle y,z\rangle\in\mathcal{P}$ следует, что $\langle x,z\rangle\in\mathcal{P}$;

антисимметричным, если из $\langle x,y\rangle\in\mathcal{P}$ и $\langle y,x\rangle\in\mathcal{P}$ следует, что $x=y$;

связанным, если для любых $x,y\in\mathcal{X}$ либо $\langle x,y\rangle\in\mathcal{P}$, либо $\langle y,x\rangle\in\mathcal{P}$;

эквивалентностью, если $\mathcal{P}$ симметрично, рефлексивно и транзитивно;

предпорядком, если $\mathcal{P}$ рефлексивно и транзитивно;

частичным порядком, если $\mathcal{P}$ предпорядок и антисимметрично;

линейным порядком, если $\mathcal{P}$ является частичным порядком и связанно.

Примеры. 1. Обычные отношения "меньше или равно" на множествах натуральных, целых или действительных чисел являются линейными порядками.

2. Отношение "x делит y" на множестве натуральных чисел является частичным порядком.

3. Отношение включения на множестве $P(\mathcal{X})$ всех подмножеств $\mathcal{X}$ является частичным порядком.

4. Отношение "существует такое целое число m, что $x=y+m$" на множестве действительных чисел является эквивалентностью.

Пусть $\mathcal{M}\subseteq P(\mathcal{X})$. Говорят, что $\mathcal{M}$ есть *разбиение* $\mathcal{X}$, если выполняются следующие условия:

1) $\varnothing\notin\mathcal{M}$;

2) для каждого $x\in\mathcal{X}$ существует такое $\mathcal{A}\in\mathcal{M}$, что $x\in\mathcal{A}$;

3) для любых $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{M}$ либо пересечение $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ пусто, либо $\mathcal{A}=\mathcal{B}$.

Если $\mathcal{M}$ – разбиение $\mathcal{X}$, свяжем с $\mathcal{M}$ эквивалентность $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ на $\mathcal{X}$ следующим образом: $\langle x,y\rangle\in\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ тогда и только тогда, когда существует такое $\mathcal{A}\in\mathcal{M}$, что $x\in\mathcal{A}$ и $y\in\mathcal{A}$. Наоборот, если $\mathcal{E}$ – эквивалентность на $\mathcal{X}$, свяжем с $\mathcal{E}$ разбиение $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ следующим образом: $\mathcal{A}\in\mathcal{M}(\mathcal{E})$ тогда и только тогда, когда существует такой $a\in\mathcal{X}$, что $\mathcal{A}=\{x\in\mathcal{X}\mid\langle a,x\rangle\in\mathcal{E}\}$.

Упражнение 2. Показать, что $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ – действительно эквивалентность для любого разбиения $\mathcal{M}$, что $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ – действительно разбиение для любой эквивалентности $\mathcal{E}$ и что $\mathcal{M}(\mathcal{E}_{\mathcal{M}})=\mathcal{M}$ для любого разбиения $\mathcal{M}$, а $\mathcal{E}_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}=\mathcal{E}$ для любой эквивалентности $\mathcal{E}$.

Если $\mathcal{E}$ – эквивалентность на $\mathcal{X}$, множество $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ называется *фактор-множеством* множества $\mathcal{X}$ по $\mathcal{E}$ и обозначается также через $\mathcal{X}/\mathcal{E}$.

Если $\mathcal{P}$ – n-местное отношение на $\mathcal{X}$, а $\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{X}$, то $\mathcal{P}\cap\mathcal{Y}^n$ называется ограничением $\mathcal{P}$ на $\mathcal{Y}$ и обозначается $\mathcal{P}\upharpoonright\mathcal{Y}$. Если f – n-местная операция на $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{X}$, то говорят, что $\mathcal{Y}$ замкнуто относительно f, если $f(y)\in\mathcal{Y}$ для любого $y\in\mathcal{Y}^n$. Если f – n-местная операция на $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – замкнутое относительно f подмножество $\mathcal{X}$, то ограничением f на $\mathcal{Y}$ называют такую n-местную операцию g на $\mathcal{Y}$, что $g(y)=f(y)$ для любого $y\in\mathcal{Y}^n$. Через $f\upharpoonright\mathcal{Y}$ обозначают в этом случае g.

Упражнение 3. Заметить, что ограничение рефлексивного, симметричного, транзитивного, антисимметричного или связанного отношения снова будет соответственно рефлексивным, симметричным, транзитивным, антисимметричным или связанным.

Упражнение 4. Скажем, что $\mathcal{P}$ обладает свойством $\langle +,-,-,+\rangle$, если $\mathcal{P}$ рефлексивно и связанно, но не является симметричным и транзитивным. Аналогично понимается, что $\mathcal{P}$ обладает свойтвом α для любого $\alpha\in\{+,-\}^4$. Для каждого $\alpha\in\{+,-\}^4$ построить двухместное отношение $\mathcal{P}$ на множестве $\{0,1,\dots,9\}$, обладающее свойством α.

§ 11. Упорядоченные множества

Если $\mathcal{P}$ – частичный порядок на $\mathcal{X}$, $a\in\mathcal{X}$, то говорят, что a – *наибольший* (*наименьший*) *элемент* $\mathcal{X}$, если $\langle x,a\rangle\in\mathcal{P}$ (соответственно, $\langle a,x\rangle\in\mathcal{P}$) для всех $x\in\mathcal{X}$. Говорят, что a – *максимальный* (*минимальный*) *элемент* $\mathcal{X}$, если $\langle a,x\rangle\in\mathcal{P}$ (соответственно, $\langle x,a\rangle\in\mathcal{P}$)

только при $a=x$. Если на $\mathcal{X}$ задан частичный (линейный) порядок, то $\mathcal{X}$ называется *частично (линейно) упорядоченным*. Подмножество $\mathcal{Y}$ частично упорядоченного множества $\mathcal{X}$ называется *цепью*, если является линейным порядком ограничение $\mathcal{P}\upharpoonright\mathcal{Y}$ заданного на $\mathcal{X}$ частичного порядка $\mathcal{P}$. Элемент $b\in\mathcal{X}$ называется *верхней (нижней) гранью* для $\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{X}$, если $\langle x,b\rangle\in\mathcal{P}$ $(\langle b,x\rangle\in\mathcal{P})$ для всех $x\in\mathcal{Y}$. Частично (линейно) упорядоченное множество называется *частично (линейно) вполне упорядоченным*, если любое его непустое подмножество имеет минимальный элемент.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I (принцип трансфинитной индукции). Пусть $\mathcal{X}$ – частично вполне упорядоченное отношением $\mathcal{P}$ множество и Q – некоторое свойство элементов $\mathcal{X}$. Пусть для каждого $x\in\mathcal{X}$ из того, что свойством Q обладают все элементы, строго меньшие x (т.е. все такие $y\in\mathcal{X}$, что y отлично от x и $\langle y,x\rangle\in\mathcal{P}$), следует, что x обладает тоже свойством Q. Тогда все элементы $\mathcal{X}$ обладают свойством Q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{Y}$ множество тех $x\in\mathcal{X}$, которые обладают свойством Q, и покажем, что $\mathcal{Y}=\mathcal{X}$. Если $\mathcal{Y}\neq\mathcal{X}$, то во множестве $\mathcal{X}\setminus\mathcal{Y}$ существует минимальный элемент b. Так как все элементы, строго меньшие b, обладают свойством Q, то и b обладает свойством Q, а это противоречит выбору b. Предложение доказано.

Пусть $\leq$ – частичный порядок на $\mathcal{X}$. Если $\langle x,y\rangle\in\ \leq$, то будем писать $x\leq y$. Запись $x<y$ будет обозначать, что $x\leq y$ и $x\neq y$. Если $f:\mathcal{A}\to\mathcal{Y}$, а $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{X}$, то для $x\in\mathcal{X}$ через $f^{<x}$ обозначаем $\{\langle y,f(y)\rangle \mid y\in\mathcal{A}, y<x\}$.

ТЕОРЕМА I (о трансфинитной рекурсии). Пусть $\leq$ частично вполне упорядочивает $\mathcal{X}$ и $g: P(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})\to\mathcal{Y}$. Тогда существует и только одно $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, удовлетворяющее функциональному уравнению

$$f(x)=g(f^{<x}) \quad \text{для всех } x\in\mathcal{X}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ всех $f:\mathcal{A}\to\mathcal{Y}$, для которых $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{X}$ и которые также удовлетворяют условиям:

I) если $x\in\mathcal{A}$, $y\in\mathcal{X}$ и $y\leq x$, то $y\in\mathcal{A}$;

2) если $x\in\mathcal{A}$, то $f(x)=g(f^{<x})$.

Множество $\mathcal{F}$ явно непусто, так как $f=\varnothing$ входит в $\mathcal{F}$. Докажем сначала, что если $f_1:\mathcal{A}_1\to\mathcal{Y}$ и $f_2:\mathcal{A}_2\to\mathcal{Y}$ входят в $\mathcal{F}$ и $x\in\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2$, то $f_1(x)=f_2(x)$.

Допустим, что это не так и пусть x_0 – минимальный элемент из $\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2$, для которого $f_1(x_0)\neq f_2(x_0)$. В силу I) и выбора x_0 для каждого $y<x_0$ $f_1(y)$ и $f_2(y)$ определены и равны. Поэтому $f_1^{<x_0}=f_2^{<x_0}$. Из 2) следует, что $f_1(x_0)=f_2(x_0)$, а это противоречит выбору x_0.

В частности, существует самое большее одно $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, удовлетворяющее рассматриваемому функциональному уравнению.

Пусть $f=\{\langle x,y\rangle \mid$ существует такое $f_1\in\mathcal{F}$, что $\langle x,y\rangle\in f_1\}$. Если $\mathcal{A}=\Pi p_1 f$, то из предыдущего следует, что $f:\mathcal{A}\to\mathcal{Y}$, где $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{X}$. Ясно также, что f удовлетворяет условиям I) и 2). Остается показать, что $\mathcal{A}=\mathcal{X}$. Если $\mathcal{A}\neq\mathcal{X}$, то пусть x_0 – минимальный элемент из $\mathcal{X}\setminus\mathcal{A}$. Ясно, что $f\cup\{\langle x_0,g(f^{<x_0})\rangle\}$ входит в $\mathcal{F}$. Но тогда $x_0\in\mathcal{A}$, а это противоречит выбору x_0. Теорема доказана.

В дальнейшем вместо "линейно вполне упорядоченное множество" будем говорить короче: "вполне упорядоченное множество".

Пусть в дальнейшей части параграфа $\leq$ вполне упорядочивает $\mathcal{X}$, а $\preccurlyeq$ вполне упорядочивает $\mathcal{Y}$. Если f – такое отображение $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, что для любых $x,y\in\mathcal{X}$ из $x<y$ следует, что $f(x)\prec f(y)$, то отображение f назовем возрастающим. Возрастающее отображение является разнозначным. Если f – возрастающее отображение $\mathcal{X}$ на $\mathcal{Y}$, то f назовем подобием $\mathcal{X}$ на $\mathcal{Y}$. Два вполне упорядоченных множества назовем подобными, если существует подобие первого из них на второе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если f – возрастающее отображение $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}$, то $x\leq f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}=\{x \mid x\in\mathcal{X}, x\leq f(x)\}$. Надо показать, что $\mathcal{B}=\mathcal{X}$. В силу предложения I достаточно показать для $x\in\mathcal{X}$, что если все $y<x$ входят в $\mathcal{B}$, то $x\in\mathcal{B}$. Итак, пусть $O(x)=\{y \mid y\in\mathcal{X}, y<x\}\subseteq\mathcal{B}$. Если $y\in O(x)$, то $f(y)<f(x)$. Но $y\in\mathcal{B}$ и $y\leq f(y)$. Значит, $y<f(x)$. Итак, $f(x)\neq y$ для любого $y\in O(x)$. Значит, $f(x)\notin O(x)$ и $f(x)\geqslant x$. Предложение доказано.

Назовем $\mathcal{Z}$ начальным отрезком $\mathcal{X}$, если $\mathcal{Z}$ есть $O(x)=\{y \mid y\in\mathcal{X}, y<x\}$ для какого-нибудь $x\in\mathcal{X}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $\mathcal{X}$ не подобно никакому своему начальному отрезку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{X}$ подобно $O(x)$, то $f(x)<x$ для отображения f, осуществляющего подобие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Никакие два различные начальные отрезка $\mathcal{X}$ не подобны между собой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x_1 < x_2$ и $O(x_1)$ подобно $O(x_2)$, то, взяв $O(x_2)$ в качестве $\mathcal{X}$, получим противоречие с предложением 3.

ТЕОРЕМА 2. Либо $\mathcal{X}$ подобно $\mathcal{Y}$, либо $\mathcal{X}$ подобно начальному отрезку $\mathcal{Y}$, либо $\mathcal{Y}$ подобно начальному отрезку $\mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{Z} = \{x \mid x \in \mathcal{X}$ и существует такой $y \in \mathcal{Y}$, что $O(x)$ подобно $O(y)\}$. Для каждого $x \in \mathcal{Z}$ через $f(x)$ обозначим такой элемент из $\mathcal{Y}$, что $O(x)$ подобно $O(f(x))$. Это $f(x)$, по предложению 4, определяется однозначно. Покажем сначала, что либо $\mathcal{Z}$ является начальным отрезком $\mathcal{X}$, либо $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$.

Действительно, если $x \in \mathcal{Z}$, а $y < x$, то $O(y)$ является начальным отрезком $O(x)$. Так как $O(x)$ подобно $O(f(x))$, то $O(y)$ подобно начальному отрезку множества $O(f(x))$. Но начальный отрезок множества $O(f(x))$ является, конечно, и начальным отрезком $\mathcal{Y}$. Значит, $y \in \mathcal{Z}$. Если теперь $\mathcal{Z} \neq \mathcal{X}$, а a – наименьший элемент в $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Z}$, то $\mathcal{Z} = O(a)$.

Совершенно аналогично проверяется, что $f(\mathcal{Z})$ есть либо $\mathcal{Y}$, либо начальный отрезок $\mathcal{Y}$. Ясно также, что f есть подобие $\mathcal{Z}$ на $f(\mathcal{Z})$.

Если $\mathcal{Z}$ есть начальный отрезок $O(a)$ множества $\mathcal{X}$, а $f(\mathcal{Z})$ есть начальный отрезок $O(b)$ множества $\mathcal{Y}$, то $a \in \mathcal{Z}$, что противоречит выбору a. Теорема доказана.

При доказательстве многих теорем приходится использовать следующие утверждения:

А к с и о м а в ы б о р а. Для любого непустого множества $\mathcal{X}$ существует такое $h : (P(\mathcal{X}) \setminus \{\varnothing\}) \to \mathcal{X}$, что $h(\mathcal{Y}) \in \mathcal{Y}$ для каждого $\mathcal{Y} \in P(\mathcal{X}) \setminus \{\varnothing\}$.

П р и н ц и п п о л н о г о у п о р я д о ч е н и я. Каждое множество может быть вполне упорядочено.

П р и н ц и п м а к с и м у м а. Если в частично упорядоченном множестве $\mathcal{X}$ каждая цепь имеет верхнюю грань, то $\mathcal{X}$ имеет максимальный элемент.

Каждые два из этих утверждений могут быть выведены из оставшегося третьего. Соответствующее доказательство помещено в § I Дополнения. В дальнейшем мы принимаем эти утверждения как аксиомы теории множеств.

§ I2. Фильтры и ультрафильтры

Непустое множество $\mathcal{D} \subseteq P(\mathcal{X})$ называется ф и л ь т р о м на $\mathcal{X}$, если $\mathcal{D}$ обладает следующими свойствами:

I) $\varnothing \notin \mathcal{D}$;

2) если $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{D}$, то $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \mathcal{D}$;

3) если $\mathcal{A} \in \mathcal{D}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$, то $\mathcal{B} \in \mathcal{D}$.

П р и м е р ы. I. Множество $\{\mathcal{X}\}$ является фильтром на $\mathcal{X}$.

2. Множество $\{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}, \mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}\}$ является фильтром на $\mathcal{X}$ для любого непустого $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$.

3. Если $\mathcal{X}$ – бесконечное множество, множество $\{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}, \mathcal{X} \setminus \mathcal{B}$ – конечно$\}$ является фильтром на $\mathcal{X}$. Этот фильтр иногда называют фильтром Фреше на $\mathcal{X}$.

Непустое множество $\mathcal{Y} \subseteq P(\mathcal{X})$ называется ц е н т р и р о в а н н ы м, если пересечение любого конечного числа элементов $\mathcal{Y}$ непусто.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Каждое центрированное множество $\mathcal{Y}$ подмножеств $\mathcal{X}$ содержится в некотором фильтре на $\mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{D} = \{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$, существуют натуральное $n > 0$ и такие $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \in \mathcal{Y}$, что $\mathcal{A}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{B}\}$. Ясно, что $\mathcal{D}$ обладает свойствами I) и 3). Если $C_1, C_2 \in \mathcal{D}$, то существуют такие $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n+1}, \ldots, \mathcal{A}_{n+m}$ из $\mathcal{Y}$, что $\mathcal{A}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{A}_n \subseteq C_1$ и $\mathcal{A}_{n+1} \cap \ldots \cap \mathcal{A}_{n+m} \subseteq C_2$. Тогда $\mathcal{A}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{A}_n \cap \mathcal{A}_{n+1} \cap \ldots \cap \mathcal{A}_{n+m} \subseteq C_1 \cap C_2$. Поэтому для $\mathcal{D}$ выполняется и свойство 2). Предложение доказано.

Фильтр $\mathcal{D}$ на $\mathcal{X}$ называется у л ь т р а ф и л ь т р о м, если $\mathcal{D}$ не содержится ни в каком отличном от $\mathcal{D}$ фильтре на $\mathcal{X}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Фильтр $\mathcal{D}$ на $\mathcal{X}$ тогда и только тогда является ультрафильтром, когда для каждого $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ либо $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}$, либо $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y} \in \mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{D}$ – ультрафильтр на $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \notin \mathcal{D}$, $(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}) \notin \mathcal{D}$, то пусть $\mathcal{D}_1 = \{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ и существует такое $\mathcal{Z} \in \mathcal{D}$, что $\mathcal{Z} \cap \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{B}\}$. Если $\varnothing \in \mathcal{D}_1$, то существует такое $\mathcal{Z} \in \mathcal{D}$, что $\mathcal{Z} \cap \mathcal{Y} = \varnothing$. Значит, $(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}) \supseteq \mathcal{Z}$. Поэтому $(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}) \in \mathcal{D}$, а это противоречит выбору $\mathcal{Y}$. Если $\mathcal{B}_1 \in \mathcal{D}_1$, а $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{X}$, $\mathcal{B}_2 \supseteq \mathcal{B}_1$, то $\mathcal{B}_2 \in \mathcal{D}_1$. Если $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{D}_1$, то существуют $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \in \mathcal{D}$ такие, что $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{Z}_1 \cap \mathcal{Y}$, $\mathcal{B}_2 \supseteq \mathcal{Z}_2 \cap \mathcal{Y}$. Поэтому $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \supseteq (\mathcal{Z}_1 \cap \mathcal{Z}_2) \cap \mathcal{Y}$. Так как $\mathcal{Z}_1 \cap \mathcal{Z}_2 \in \mathcal{D}$, то $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \in \mathcal{D}_1$. Итак, мы показали, что $\mathcal{D}_1$ – фильтр на $\mathcal{X}$. Ясно, что $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}_1$ и что $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_1$. Поэтому $\mathcal{D}_1$ – отличный от $\mathcal{D}$ и содержащий $\mathcal{D}$ фильтр на $\mathcal{X}$, а это противоречит выбору $\mathcal{D}$.

Если $\mathcal{D}$ – фильтр на $\mathcal{X}$; для каждого $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ либо $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}$, либо $(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}) \in \mathcal{D}$; $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_1$; $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_1$ – тоже фильтр на $\mathcal{X}$, то пусть $\mathcal{Z} \in (\mathcal{D}_1 \setminus \mathcal{D})$. Тогда $(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Z}) \in \mathcal{D}$, $(\mathcal{X} \setminus \mathcal{Z}) \in \mathcal{D}_1$, $\phi = (\mathcal{X} \setminus \mathcal{Z}) \cap \mathcal{X} \in \mathcal{D}_1$, а это противоречит тому, что $\mathcal{D}_1$ – фильтр. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Каждый фильтр $\mathcal{D}$ на $\mathcal{X}$ содержится в некотором ультрафильтре на $\mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверяется, что объединение возрастающей цепи фильтров на $\mathcal{X}$ снова является фильтром на $\mathcal{X}$. Поэтому в частично упорядоченном по включению множестве фильтров на $\mathcal{X}$, содержащих $\mathcal{D}$, каждая цепь имеет верхнюю грань. По принципу максимума в этом множестве имеется максимальный элемент. Это будет содержащий $\mathcal{D}$ фильтр $\mathcal{D}_1$ на $\mathcal{X}$, который уже не содержится в отличном от $\mathcal{D}_1$ фильтре на $\mathcal{X}$, значит, является ультрафильтром.

§ 13. Сравнение множеств по мощности

Будем говорить, что множество $\mathcal{A}$ имеет мощность, не превосходящую мощности множества $\mathcal{B}$, если существует разнозначное отображение множества $\mathcal{A}$ во множество $\mathcal{B}$. Говорят, что множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют одинаковую мощность (или что они р а в н о м о щ н ы), если существует разнозначное отображение $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$.

ТЕОРЕМА 3 (Кантор–Бернштейн). Если мощность $\mathcal{A}$ не превосходит мощности $\mathcal{B}$, а мощность $\mathcal{B}$ не превосходит мощности $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равномощны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – разнозначное отображение $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{Z}_\infty \subseteq (\mathcal{A} \setminus f(\mathcal{A}))$. Положим $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}_{i+1} = f(\mathcal{Z}_i)$ и пусть $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{Z}_i$. Пусть

$$f^*_{\mathcal{Z}}(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in S, \\ f(x), & \text{если } x \in (\mathcal{A} \setminus S). \end{cases}$$

Ясно, что $S = \mathcal{Z} \cup f(S)$. Из разнозначности f следует, что

$$S \cap f(\mathcal{A} \setminus S) = (\mathcal{Z} \cap f(\mathcal{A} \setminus S)) \cup (f(S) \cap f(\mathcal{A} \setminus S)) = \phi.$$

Поэтому $f^*_{\mathcal{Z}}$ является разнозначным отображением $\mathcal{A}$ на

$$S \cup f(\mathcal{A} \setminus S) = \mathcal{Z} \cup f(S) \cup f(\mathcal{A} \setminus S) = \mathcal{Z} \cup f(\mathcal{A}).$$

Пусть теперь f_1 – разнозначное отображение $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, а f_2 – разнозначное отображение $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$. Тогда $f = f_2 \circ f_1$ является разнозначным отображением $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$. Взяв в качестве $\mathcal{Z}$ множество $f_2(\mathcal{B}) \setminus f(\mathcal{A})$, получим, что $f^*_{\mathcal{Z}}$ является разнозначным отображением $\mathcal{A}$ на $f_2(\mathcal{B})$. Поэтому композиция $f_2^{-1} \circ f^*_{\mathcal{Z}}$ является разнозначным отображением $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$. Теорема доказана.

Мы будем писать $\mathcal{X} \leq \mathcal{Y}$, если мощность $\mathcal{X}$ не превосходит мощности $\mathcal{Y}$; $\mathcal{X} < \mathcal{Y}$, если $\mathcal{X} \leq \mathcal{Y}$, но неверно, что $\mathcal{Y} \leq \mathcal{X}$. Ясно, что если $\mathcal{X} \leq \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y} \leq \mathcal{Z}$, то $\mathcal{X} \leq \mathcal{Z}$. Понятно также, что $\mathcal{X} \leq \mathcal{X}$. Из теоремы Кантора–Бернштейна следует, что $\mathcal{X} \leq \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y} \leq \mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ равномощны.

ТЕОРЕМА 4. $\mathcal{X} < P(\mathcal{X})$ для любого множества $\mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f – такое отображение $\mathcal{X}$ в $P(\mathcal{X})$, что $f(x) = \{x\}$ для $x \in \mathcal{X}$, то f – разнозначно. Значит, $\mathcal{X} \leq P(\mathcal{X})$. Надо показать, что нет разнозначного отображения $P(\mathcal{X})$ в $\mathcal{X}$.

Если g – такое отображение, то пусть

$$S = \{g(\mathcal{Y}) \mid \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \text{ и } g(\mathcal{Y}) \notin \mathcal{Y}\}.$$

Либо $g(S) \in S$, либо $g(S) \notin S$, но в каждом из этих случаев получаем противоречие с выбором S. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Для любых множеств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ либо $\mathcal{X} \leq \mathcal{Y}$, либо $\mathcal{Y} \leq \mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу принципа полного упорядочения можно вполне упорядочить $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Тогда либо $\mathcal{X}$ подобно начальному отрезку $\mathcal{Y}$ и, значит, $\mathcal{X} \leq \mathcal{Y}$, либо $\mathcal{X}$ подобно $\mathcal{Y}$ и опять $\mathcal{X} \leq \mathcal{Y}$, либо $\mathcal{Y}$ подобно начальному отрезку $\mathcal{X}$ и тогда $\mathcal{Y} \leq \mathcal{X}$. Теорема доказана.

Множество $\mathcal{X}$ называется п е р е ч и с л и м ы м, если $\mathcal{X} \leq \mathcal{N}$, где $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots\}$ – множество натуральных чисел. Множество называется с ч е т н ы м, если оно и $\mathcal{N}$ равномощны. Ясно, что каждое конечное множество перечислимо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Каждое перечислимое множество конечно или счетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{X}$ – бесконечное множество. Покажем, что $\mathcal{N} \leq \mathcal{X}$. Для этого построим разнозначное отображение f $\mathcal{N}$ в $\mathcal{X}$. Пусть $f(0), \dots, f(n)$ уже построены. Так как $\mathcal{X}$ бесконечно, то существует $a \in \mathcal{X} \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$. Полагаем $f(n+1) = a$. Ясно, что f – разнозначное отображение $\mathcal{N}$ в $\mathcal{X}$. Предложение доказано.

Если $f: \mathcal{N} \to \mathcal{X}$, то f называется последовательностью элементов $\mathcal{X}$, а $f(\mathcal{N})$ – множеством значений последовательности f.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Множество $\mathcal{X} \neq \phi$ тогда и только тогда перечислимо, когда $\mathcal{X}$ есть множество значений некоторой последовательности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{X}$ есть множество значений последовательности f. Если $\mathcal{X}$ конечно, то $\mathcal{X}$ перечислимо. Если $\mathcal{X}$ бесконечно, то построим разнозначную последовательность g, множество значений которой тоже $\mathcal{X}$. Это и будет доказывать равномощность $\mathcal{N}$ и $\mathcal{X}$ и, значит, перечислимость $\mathcal{X}$. Пусть $g(0)=f(0)$. Если $g(0),\dots,g(n)$ уже построены, то пусть $g(n+1)=f(i)$, где i – наименьшее из таких натуральных чисел, что $f(i)$ отлично от $g(0),\dots,g(n)$. Разнозначность g очевидна. Если $a\in\mathcal{X}$, то $a=f(m)$. Если $m=0$, то $a=g(0)$. Если $m>0$ и $a\notin\{g(0),\dots,g(m-1)\}$, то $g(i)\in\{f(0),\dots,f(m-1)\}$ для $i=0,\dots,m-1$ и, значит, $\{f(0),\dots,f(m-1)\}=\{g(0),\dots,g(m-1)\}$. Из определения g получаем, что $a=g(m)$. Итак, $g(\mathcal{N})=\mathcal{X}$.

Пусть $\mathcal{X}$ перечислимо. Тогда либо $\mathcal{X}$ счетно и, по определению, является множеством значений некоторой последовательности, либо $\mathcal{X}=\{x_0,\dots,x_k\}$. Во втором случае полагаем

$$g(0)=x_0,\ \dots,\ g(k)=x_k,\ g(i)=x_k \text{ для } i=k+1,\dots$$

Ясно, что $\mathcal{X}$ является множеством значений полученной последовательности g.

Упражнение 1. Показать, что любое подмножество перечислимого множества перечислимо. Показать, что объединение конечного числа перечислимых множеств перечислимо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}$ равномощны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x,y\in\mathcal{N}$ положим $c(x,y)=\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+x$. Ясно, что $c:\mathcal{N}\times\mathcal{N}\to\mathcal{N}$. Покажем, что c является разнозначным отображением на $\mathcal{N}$.

Пусть $c(x,y)=c(a,b)$. Если $x>a$, $x=a+r, r>0$, то

$$2a+2r+(a+r+y)(a+r+y+1)=(a+b)(a+b+1)+2a.$$

Значит, $b>r+y$. Пусть $b=r+y+s$, $s>0$. Тогда

$$2r+(a+r+y)(a+r+y+1)=(a+r+y+s)(a+r+y+s+1),$$
$$2r+(a+r+y)(a+r+y+1)=(a+r+y)(a+r+y+1)+(a+r+y)s+s(a+r+y+s+1),$$
$$2r=(a+r+y)s+s(a+r+y+s+1).$$

Но $s\geqslant 1$ и, значит,

$$(a+r+y)s+(a+r+y+s+1)s\geqslant 2a+2r+2y+s+1\geqslant 2r+2>2r.$$

Итак, $x=a$. Получается, что

$$(x+y)(x+y+1)=(x+b)(x+b+1).$$

Из этого равенства следует, что $y=b$.

Покажем, что $c(\mathcal{N}\times\mathcal{N})=\mathcal{N}$. Ясно, что $c(0,0)=0$, а $c(0,1)=1$. Пусть $c(a,b)=n$. Если $b>0$, то

$$n+1=c(a,b)+1=\frac{(a+b)(a+b+1)}{2}+a+1=c(a+1,b-1).$$

Если же $b=0$, то

$$n+1=\frac{a(a+1)}{2}+a+1=\frac{(a+1)(a+2)}{2}=c(0,a+1).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Множества $\mathcal{N}^k$ и $\mathcal{N}$ равномощны для любого натурального $k>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k=1$ доказывать нечего. Пусть $c_2=c$. Если $k\geqslant 2$ и $c_k:\mathcal{N}^k\to\mathcal{N}$ уже построено, то пусть $c_{k+1}(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})=c_2(c_k(x_1,\dots,x_k),x_{k+1})$ для $\langle x_1,\dots,x_k,x_{k+1}\rangle\in\mathcal{N}^{k+1}$. Ясно, что c_k является разнозначным отображением $\mathcal{N}^k$ на $\mathcal{N}$ для любого натурального $k\geqslant 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Декартово произведение конечного числа перечислимых множеств перечислимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{X}_1\leqslant\mathcal{N},\dots,\mathcal{X}_k\leqslant\mathcal{N}$. Тогда $(\mathcal{X}_1\times\dots\times\mathcal{X}_k)\leqslant(\mathcal{N}\times\dots\times\mathcal{N})\leqslant\mathcal{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Множество $\mathcal{N}^*=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{N}^k$ равномощно $\mathcal{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_1(x)=x$ для $x\in\mathcal{N}$. Рассмотрим отображение $f:\mathcal{N}^*\to\mathcal{N}$, задаваемое условиями:

$$f(\langle x_1,\dots,x_k\rangle)=c_2(k-1,c_k(x_1,\dots,x_k)).$$

Ясно, что f является разнозначным отображением $\mathcal{N}^*$ на $\mathcal{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если множество $\mathcal{A}$ перечислимо, то множество $\mathcal{A}^*=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}^k$ тоже перечислимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $\mathcal{A}\leqslant\mathcal{N}$ следует, что $\mathcal{A}^*\leqslant\mathcal{N}^*\leqslant\mathcal{N}$. Предложение доказано.

Упражнение 2. Показать, что множества целых, рациональных, алгебраических чисел и множество многочленов от конечного числа $x_1,\dots,x_n$ переменных с целыми коэффициентами счетны.

Глава Ш

ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ

§ I4. Алгебраические системы

При построении математической дисциплины используют ряд первичных понятий, свойства которых и изучает эта дисциплина. Например, основными понятиями элементарной планиметрии являются: точка, прямая, принадлежность, промежуточность и другие. Основное понятие теории групп - понятие групповой операции. Уже из этих примеров видно, что основные понятия делятся на две большие группы. К первой относятся понятия, которые являются предикатами, а ко второй, которые являются операциями. В свою очередь предикаты и операции различаются числом своих аргументных мест. В наших примерах было так, что либо все основные понятия являлись предикатами, либо все являлись операциями. Но встречаются и такие разделы математики, где среди основных встречаются и предикаты, и операции. Например, основными понятиями теории упорядоченных полей являются понятия порядка, сложения и умножения, первое из которых - предикат, а два других - операции.

В формальном языке математической логики первичным понятиям соответствуют символы постоянных предикатов и постоянных операций. Для каждого такого символа должно быть указано число его аргументных мест. Так возникает с и г н а т у р а я з ы к а.

Подробнее, сигнатура Ω - это отображение множества символов во множество натуральных чисел вместе с разбиением этого множества символов на два подмножества (предикатных символов и символов операций). Через $D\Omega$ мы будем обозначать множество символов сигнатуры Ω, $D\Omega = D_1\Omega \cup D_2\Omega$, $D_1\Omega \cap D_2\Omega = \varnothing$, $D_1\Omega$ - символы предикатов, $D_2\Omega$ - символы операций, $\Omega: D\Omega \to \mathcal{N}$.

Основным объектом изучения в каждой из таких математических

дисциплин, как теория групп, теория решеток, теория полугрупп, теория колец и т.п., является класс объектов, каждый из которых представляет собой множество вместе с заданным на этом множестве семейством предикатов и операций. В упомянутых дисциплинах эти предикаты и операции являются финитарными, т.е. имеющими конечное число аргументных мест. Конечно, изучают и бесконечноместные предикаты и операции (предел числовой последовательности, сумма ряда), но мы в этих лекциях ограничиваем себя изучением только финитарных. Так мы приходим к понятию а л г е б р а и ч е с к о й с и с т е м ы.

В этом параграфе содержатся необходимые в дальнейшем сведения об алгебраических системах.

Пусть Ω - некоторая сигнатура.

Непустое множество $\mathcal{A}$ вместе с отображением, которое каждому предикатному символу $\mathcal{R}$ из $D_1\Omega$ ставит в соответствие $\Omega(\mathcal{R})$-местный предикат $\widetilde{\mathcal{R}}$, заданный на множестве $\mathcal{A}$, а каждому символу операции f из $D_2\Omega$ ставит в соответствие $\Omega(f)$ -местную операцию $\widetilde{f}$ на $\mathcal{A}$, называется а л г е б р а и ч е с к о й с и с т е м о й с и г н а т у р ы Ω. Эта алгебраическая система обозначается через $\langle \mathcal{A}; \widetilde{\mathcal{R}}, \widetilde{f} \rangle_{\mathcal{R}\in D_1\Omega, f\in D_2\Omega}$. Пусть $\mathfrak{A} = \langle \mathcal{A}; \widetilde{\mathcal{R}}, \widetilde{f} \rangle_{\mathcal{R}\in D_1\Omega, f\in D_2\Omega}$ — алгебраическая система сигнатуры Ω. $\mathcal{A}$ называется о с н о в н ы м м н о ж е с т в о м с и с т е м ы $\mathfrak{A}$ и обозначается через $|\mathfrak{A}|$. $\widetilde{\mathcal{R}}$ называется предикатом, соответствующим в $\mathfrak{A}$ предикатному символу $\mathcal{R}$, или значением $\mathcal{R}$ в $\mathfrak{A}$ и обозначается через $\mathcal{R}^{\mathfrak{A}}$, $\widetilde{f}$ называется операцией, соответствующей в $\mathfrak{A}$ символу операции f, или значением f в $\mathfrak{A}$ и обозначается через $f^{\mathfrak{A}}$. Предикаты $\mathcal{R}^{\mathfrak{A}}$, $\mathcal{R}\in D_1\Omega$, называются о с н о в н ы м и п р е д и к а т а м и с и с т е м ы $\mathfrak{A}$, а операции $f^{\mathfrak{A}}$, $f\in D_2\Omega$, называются о с н о в н ы м и о п е р а ц и я м и с и с т е м ы $\mathfrak{A}$. Через $\Omega(\mathfrak{A})$ мы обозначаем сигнатуру алгебраической системы $\mathfrak{A}$.

Так как мы допускаем и такой случай, когда $\Omega(f) = 0$ для $f\in D_2\Omega$, то требует специального разъяснения, что мы понимаем под нульместной операцией на множестве $\mathcal{A}$. Требуется также специально разъяснить, что понимается под нульместным предикатом на множестве $\mathcal{A}$.

Если использовать общие определения, что n -местная операция на $\mathcal{A}$ - это отображение $\mathcal{A}^n$ в $\mathcal{A}$, а n -местный предикат на $\mathcal{A}$ -

это подмножество $\mathcal{A}^n$, то остается объяснить, что такое $\mathcal{A}^0$ для произвольного множества. Обычно под $\mathcal{A}^0$ понимают фиксированное одноэлементное множество, для определенности множество $\{\varnothing\}$. Отображение $\{\varnothing\}$ в $\mathcal{A}$ обычно отождествляют с тем элементом $\mathcal{A}$, который ставится в соответствие элементу $\varnothing$. Если f – основная нульместная операция системы $\mathfrak{A}$, то f отождествляется с $f(\varnothing)$ и называется выделенным элементом системы $\mathfrak{A}$. Символы нульместных операций будем также называть символами выделенных элементов. Нульместные предикаты являются подмножествами множества $\{\varnothing\}$. Всего имеется два таких подмножества: пустое и $\{\varnothing\}$. Первый предикат будем называть ложью и обозначать через Λ, а второй – истиной и обозначать через $\mathcal{U}$.

Прежде чем переходить к примерам, договоримся еще об одном соглашении. Конечные сигнатуры будем задавать перечислением множества $D\Omega$. Заключенный в скобки верхний индекс у символа будет в таком перечислении указывать местность этого символа. Буквы без верхнего индекса будут при этом символами выделенных элементов; буквы $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ – символами предикатов; буквы f, g, h – символами операций; кроме латинских букв, в качестве символов предикатов или операций будем использовать также такие символы, как $+$, $\cdot$, $<$, 0 и др. Местность этих символов известна, и мы не будем ее особо указывать в виде верхнего индекса. Например, запись

$$\Omega = \langle +, 0, \mathcal{P}^{(2)}, f^{(1)}, \mathcal{Q}^{(3)}, a \rangle$$

означает, что $D_1\Omega = \{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}$, $D_2\Omega = \{+, 0, f, a\}$ и что $\Omega(\mathcal{P}) = 2$, $\Omega(\mathcal{Q}) = 3$, $\Omega(+) = 2$, $\Omega(0) = 0$, $\Omega(f) = 1$, $\Omega(a) = 0$.

П р и м е р I. Кольцо является множеством, на котором определены две двухместные операции $+, \cdot$. Таким образом, кольцо является алгебраической системой сигнатуры $\langle +, \cdot \rangle$.

П р и м е р 2. Группа является множеством, на котором определена двухместная операция $\cdot$. Таким образом, группа – это алгебраическая система сигнатуры $\langle \cdot \rangle$.

П р и м е р 3. В школьной алгебре изучается множество действительных чисел вместе с операциями сложения и умножения и предикатом порядка. Эта алгебраическая система имеет сигнатуру

$$\langle +, \cdot, < \rangle.$$

П р и м е р 4. В школьной планиметрии изучается система, основным множеством которой является множество точек и прямых плоскости, а основными предикатами – одноместные предикаты "быть точкой и быть прямой" и двухместный предикат принадлежности.

Рассмотренная в примере 4 алгебраическая система отличается тем, что ее сигнатура не содержит символов операций (т.е. $D_2\Omega$ пусто). Такие сигнатуры называются предикатными, а алгебраические системы, сигнатура которых является предикатной, называются п р е д и к а т н ы м и с и с т е м а м и (еще используют названия реляционная система, система с отношениями).

Рассмотренная в примере I алгебраическая система не имеет основных предикатов. Такие алгебраические системы называются а л г е б р а м и. Система, рассмотренная в примере 2, тоже является алгеброй. Система, рассмотренная в примере 3, не является ни алгеброй, ни предикатной системой.

В теории алгебраических систем важным является понятие подсистемы алгебраической системы.

Алгебраическая система $\mathfrak{B}$ сигнатуры Ω' называется п о д с и с т е м о й алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω, если $\Omega' = \Omega$, $|\mathfrak{B}| \subseteq |\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{B}|$ замкнуто относительно всех основных операций системы $\mathfrak{A}$, $\mathcal{R}^{\mathfrak{B}} = \mathcal{R}^{\mathfrak{A}} \restriction |\mathfrak{B}|$ и $f^{\mathfrak{B}} = f^{\mathfrak{A}} \restriction |\mathfrak{B}|$ для всех $\mathcal{R} \in D_1\Omega$ и $f \in D_2\Omega$. Таким образом, система $\mathfrak{B}$ является подсистемой системы $\mathfrak{A}$, если их сигнатуры совпадают, основное множество $\mathfrak{B}$ есть подмножество основного множества $\mathfrak{A}$, замкнутое относительно всех основных операций системы $\mathfrak{A}$, и основные операции и предикаты системы $\mathfrak{B}$ являются ограничениями на $|\mathfrak{B}|$ соответствующих основных операций и предикатов системы $\mathfrak{A}$. Записи $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \restriction |\mathfrak{B}|$ означают, что $\mathfrak{B}$ есть подсистема $\mathfrak{A}$. Запись $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \restriction X$ для $X \subseteq |\mathfrak{A}|$ означает, что X замкнуто относительно всех основных операций системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ является такой подсистемой системы $\mathfrak{A}$, основное множество которой есть X. Если $\mathfrak{B}$ есть подсистема $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ называется расширением $\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{A}$ – алгебра, а $\mathfrak{B}$ – подсистема $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B}$ называется подалгеброй $\mathfrak{A}$.

П р и м е р 5. Каждая подсистема системы $\langle \mathbb{Z}; +, - \rangle$, где $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, а $+$ и $-$ – обычные операции сложения и вычитания, имеет вид $\langle n\mathbb{Z}; +_n, -_n \rangle$, где n – натуральное число, $n\mathbb{Z}$ – множество, составленное из всех целых кратных n, а $+_n$ и $-_n$ – ограничения $+$ и $-$ на $n\mathbb{Z}$.

П р и м е р 6. Пусть $\mathcal{G} = \langle |\mathcal{G}|; \cdot \rangle$ – группа, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$. Тогда $\mathcal{H} = \langle |\mathcal{H}|; \cdot_{\mathcal{H}} \rangle$, где $\cdot_{\mathcal{H}}$ – ограничение $\cdot$ на $|\mathcal{H}|$. Алгебра $\mathcal{H}$ может не оказаться группой. Если же к основным операциям группы $\mathcal{G}$ причислять также одноместную операцию взятия обратного элемента, т.е.

рассматривать алгебру $\langle|\mathfrak{G}|;\cdot,^{-1}\rangle$, то все подалгебры этой алгебры будут группами. В частности $\langle|\mathfrak{G}|;\cdot\rangle$ может иметь больше подалгебр, чем $\langle|\mathfrak{G}|;\cdot,^{-1}\rangle$.

Пример 7. Алгебра $\langle\mathcal{R};+,-,\cdot,^{-1}\rangle$, где $\mathcal{R}$ – множество рациональных чисел, $+,-,\cdot$ – обычные операции сложения, вычитания и умножения, a^{-1} – обычная операция взятия обратного элемента, дополненная соглашением, что $0^{-1}=0$, имеет только две различные подалгебры.

§ 15. Термы

Мы будем рассматривать разнозначную последовательность символов $x_0, x_1, x_2, \ldots$, и символы из этой последовательности будем называть символами переменных или, короче, переменными. Всегда будет предполагаться, что эти символы не являются ни символами операций, ни символами предикатов.

Определение терма сигнатуры Ω дается индукцией по числу символов операций, встречающихся в записи терма. Это число назовем рангом терма. Ранг терма y обозначим через $\tau(y)$.

Термы сигнатуры Ω ранга 0 – это переменные и только они. Термы сигнатуры Ω ранга $n+1$ – это те и только те выражения, которые имеют вид

$$f(y_1,\ldots,y_m),$$

где f – m-местный символ операции из $D_2\Omega$, а $y_1,\ldots,y_m$ – термы сигнатуры Ω меньшего, чем $n+1$, ранга и $\tau(y_1)+\ldots+\tau(y_m)+1=$ $=n+1$. В частности, если f – нульместный символ операции из $D_2\Omega$, то f является термом сигнатуры Ω ранга I.

Терм, в записи которого нет переменных, называется замкнутым.

Если $f\in D_2\Omega$, $\Omega(f)=2$, y_1, y_2 – термы сигнатуры Ω, вместо $f(y_1,y_2)$ иногда пишут $(y_1 f y_2)$. Например, вместо $+(x_1,x_2)$ пишут (x_1+x_2), вместо $+(+(x_1,x_2),x_3)$ пишут $((x_1+x_2)+x_3)$. Часто при этом еще опускают внешнюю пару скобок и пишут x_1+x_2, $(x_1+x_2)+x_3$.

Примеры. I. Пусть $\Omega=\langle f^{(1)},g^{(2)}\rangle$. Выражение $f(x_1)$ является термом ранга I, $g(f(x_1),x_2)$ – термом ранга 2, $g(f(g(x_1,x_2)),f(x_1))$ – термом ранга 4. Выражение f не является термом. Не является термом и $g(f,x_1)$. Действительно, если бы это был терм, то термами были бы f и x_1, но f – не терм. Не является термом и $f(x_1,x_2)$.

Если $\mathfrak{A}$ – алгебраическая система, а t – терм-оба сигнатуры Ω и каждой переменной, входящей в запись t, приписать в качестве значения некоторый элемент $|\mathfrak{A}|$, то естественным образом при этом можно будет вычислить и значение терма t в $\mathfrak{A}$. Таким образом, t задает на $|\mathfrak{A}|$ операцию, число аргументных мест которой – это число переменных, встречающихся в записи t.

Мы дадим точное определение, но предварительно определим еще два понятия.

Пусть y – переменная, а t – терм. Индукцией по рангу терма t определим, когда y встречается в записи t. Если $\tau(t)=0$, то y встречается в записи t тогда и только тогда, когда $y=t$. Если t есть $f(y_1,\ldots,y_m)$, где $f\in D_2\Omega$ и $\Omega(f)=m$, а $y_1,\ldots,y_m$ – термы меньшего, чем $\tau(t)$, ранга, то y встречается в записи t тогда и только тогда, когда y встречается в записи хотя бы одного из термов $y_1,\ldots,y_m$.

Будем писать $t=t(x_{i_1},\ldots,x_{i_s})$, если в записи терма t не встречаются переменные, отличные от $x_{i_1},\ldots,x_{i_s}$.

Пусть y_1 – переменная, а y_2, t – термы. Индукцией по рангу t определим терм t_1, который получается заменой в t каждого вхождения y_1 на вхождение y_2. Если t есть y_1, то t_1 есть y_2. Если t – переменная, отличная от y_1, то t_1 есть t. Если t есть $f(u_1,\ldots,u_m)$, где $f\in D_2\Omega$; $\Omega(f)=m$; $u_1,\ldots,u_m$ – термы меньшего $\tau(t)$ ранга, а $v_1,\ldots,v_m$ получаются из $u_1,\ldots,u_m$ соответственно заменой каждого вхождения y_1 на вхождение y_2, то t_1 есть $f(v_1,\ldots,v_m)$.

Пусть $t=t(x_{i_1},\ldots,x_{i_s})$. Пусть x_{i_1} приписано значение $a_1,\ldots,x_{i_s}$ – значение a_s. Если t имеет ранг 0, то t есть x_{i_j} для некоторого $j\in\{1,\ldots,s\}$. В этом случае значением t в $\mathfrak{A}$ будем считать a_j. Если же t имеет ранг $n+1$, то t есть

$$f(y_1,\ldots,y_m),$$

где $f\in D_2\Omega$, $\Omega(f)=m$, а значения $y_1,\ldots,y_m$ можно считать уже определенными и равными $b_1,\ldots,b_m$. Тогда значением t в $\mathfrak{A}$ будем считать $f^{\mathfrak{A}}(b_1,\ldots,b_m)$.

Пример 2. Пусть $\Omega=\langle f^{(1)},g^{(2)},a\rangle$ и $\mathfrak{A}$ – такая алгебраическая система сигнатуры Ω, основное множество которой есть множество натуральных чисел, а символам f, g, a соответствуют в $\mathfrak{A}$ операции возведения в квадрат и сложения и выделенный элемент 0. Тогда терм $g(g(f(a),a),f(x_1))$ при $x_1=4$ имеет значение 16, а при $x_1=5$ – значение 25. Вообще, если значение x_1 есть b, то значение этого терма есть b^2.

Пусть $\mathfrak{A}$ – алгебраическая система и $\mathcal{X}$ – непустое подмножество $|\mathfrak{A}|$. Пусть для $\alpha\in\Lambda$ $\mathfrak{B}_\alpha\subseteq\mathfrak{A}$ и $|\mathfrak{B}_\alpha|\supseteq\mathcal{X}$. Покажем, что $Y=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}|\mathfrak{B}_\alpha|$ замкнуто относительно всех основных операций системы $\mathfrak{A}$. Пусть f – основная n-местная операция системы $\mathfrak{A}$ и $a_1,\ldots,a_n\in Y$. Тогда $f^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n)\in|\mathfrak{B}_\alpha|$ для каждого $\alpha\in\Lambda$. Значит, $f^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n)\in Y$. Система $\mathfrak{A}\upharpoonright Y$ называется *пересечением подсистем* $\mathfrak{B}_\alpha$ $(\alpha\in\Lambda)$ и обозначается через $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\mathfrak{B}_\alpha$. Если $\{\mathfrak{B}_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}=\{\mathfrak{B}\mid\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A},\ |\mathfrak{B}|\supseteq\mathcal{X}\}$, то $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\mathfrak{B}_\alpha$ называется *подсистемой системы* $\mathfrak{A}$, *порожденной множеством* $\mathcal{X}$. Если эта подсистема совпадает с $\mathfrak{A}$, то говорят, что $\mathfrak{A}$ порождается $\mathcal{X}$.

Упражнение I. Пусть t – терм, $\mathfrak{A}$ – алгебраическая система – оба сигнатуры Ω. Пусть $t=t(x_{i_1},\ldots,x_{i_s})$ и t принимает в $\mathfrak{A}$ значение b, когда $x_{i_1},\ldots,x_{i_s}$ приписаны значения $a_1,\ldots,a_s$ из $|\mathfrak{A}|$. Заменим в t каждое вхождение x_{i_1} на вхождение x_j, где $j\notin\{i_2,\ldots,i_s\}$. Получим терм t_1. Показать, что значение t_1 в $\mathfrak{A}$ равно b, когда x_j приписано значение a_1, а $x_{i_2},\ldots,x_{i_s}$ – значения $a_2,\ldots,a_s$.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\mathfrak{A}$ – алгебраическая система сигнатуры Ω, $\mathcal{X}$ – непустое подмножество множества $|\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{B}$ – подсистема, порожденная в $\mathfrak{A}$ множеством $\mathcal{X}$. Тогда $|\mathfrak{B}|$ есть множество всевозможных значений в $\mathfrak{A}$ термов сигнатуры Ω, когда переменным приписываются значения из $\mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим упомянутое множество значений термов через $\mathcal{B}$ и покажем, что $\mathcal{B}=|\mathfrak{B}|$.

Сначала покажем, что $\mathcal{B}$ замкнуто относительно всех основных операций системы $\mathfrak{A}$. Пусть $f\in D_2\Omega$, $\Omega(f)=m$ и $b_1,\ldots,b_m\in\mathcal{B}$. Тогда найдутся такие разнозначные конечные последовательности переменных $\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_m$, такие конечные последовательности элементов $\mathcal{X}$ $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m$ и такие термы $t_1,\ldots,t_m$, что b_1 есть значение t_1, когда $\bar{y}_1$ приписано значение $\bar{a}_1$, ..., b_m есть значение t_m, когда $\bar{y}_m$ приписано значение $\bar{a}_m$. Если, например, $\bar{y}_1$ имеет общую переменную с $\bar{y}_2$, то выберем в качестве $\bar{y}_1'$ такую разнозначную последовательность переменных той же длины, что и $\bar{y}_1$, которая уже

не имеет общих переменных с $\bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_m$, и заменим в t_1 каждое вхождение переменной из $\bar{y}_1$ на вхождение соответствующей переменной из $\bar{y}_1'$. Получим терм t_1'. Ясно, что значение терма t_1', когда $\bar{y}_1'$ приписано значение $\bar{a}_1$, есть тоже b_1. Поэтому можно считать, что $\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_m$ попарно не пересекаются. Ясно, что тогда $f^{\mathfrak{A}}(b_1,\ldots,b_m)$ есть значение в $\mathfrak{A}$ терма $f(t_1,\ldots,t_m)$, когда $\bar{y}_1$ приписано значение $\bar{a}_1$, ..., $\bar{y}_m$ – значение $\bar{a}_m$.

Ясно, что $\mathcal{B}\supseteq\mathcal{X}$. Поэтому $\mathfrak{A}\upharpoonright\mathcal{B}\supseteq\mathfrak{B}$ и $\mathcal{B}\supseteq|\mathfrak{B}|$. Для доказательства обратного включения индукцией по рангу терма t будем доказывать, что все значения t в $\mathfrak{A}$, когда переменным приписаны значения из $\mathcal{X}$, содержатся в каждой содержащей $\mathcal{X}$ подсистеме системы $\mathfrak{A}$. Это верно, конечно, если $r(t)=0$. Пусть $t=f(y_1,\ldots,y_m)$ и значения $b_1,\ldots,b_m$ соответственно термов $y_1,\ldots,y_m$ лежат в каждой такой $\mathfrak{B}'$, что $\mathfrak{B}'\subseteq\mathfrak{A}$ и $|\mathfrak{B}'|\supseteq\mathcal{X}$. Значение же t, по определению, есть $f^{\mathfrak{A}}(b_1,\ldots,b_m)$ и, значит, тоже лежит в $\mathfrak{B}'$. Теорема I доказана.

Пример 3. Рассмотрим группу $\langle\mathcal{G};\cdot,{}^{-1}\rangle$ как алгебру сигнатуры $\langle\cdot,{}^{-1}\rangle$ и множество $\{a,b,d\}\subseteq\mathcal{G}$. В примере 6 §14 уже отмечалось, что все подалгебры этой алгебры являются подгруппами. Значит, подалгебра, порожденная в $\langle\mathcal{G};\cdot,{}^{-1}\rangle$ множеством $\{a,b,d\}$, является наименьшей подгруппой группы $\langle\mathcal{G};\cdot,{}^{-1}\rangle$, содержащей $\{a,b,d\}$.

Докажем, что элементами этой подгруппы являются те и только те элементы $\mathcal{G}$, которые можно представить в виде

$$y_1^{\varepsilon_1}\cdot\ldots\cdot y_n^{\varepsilon_n},\tag{I}$$

где n – положительное целое число; $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}$; $y_1,\ldots,y_n\in\{a,b,d\}$.

Из теоремы I следует, что элементами рассматриваемой подгруппы являются значения термов сигнатуры $\langle\cdot,{}^{-1}\rangle$, когда переменным приписывают значения из $\{a,b,d\}$. Ясно, что каждое выражение (I) является таким значением. Обратное утверждение доказываем индукцией по рангу терм. Для термов ранга 0 оно очевидно. Если a и b имеют вид (I), то $a\cdot b$ и a^{-1} тоже имеют вид (I). Поэтому утверждение верно и для термов любого положительного ранга.

Договоримся, что для n-местного предиката P запись $P(x_1,\ldots,x_n)$ означает то же самое, что и $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\in P$.

Отображение h множества $|\mathfrak{A}|$ во множество $|\mathfrak{B}|$ называется гомоморфизмом алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω в алгебраическую систему $\mathfrak{B}$ сигнатуры Ω, если

(а) для каждого ненульместного $R \in D_1\Omega$ и каждых $x_1, \ldots, x_{\Omega(R)} \in |\mathfrak{A}|$, если имеет место $R^{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_{\Omega(R)})$, то имеет место и $R^{\mathfrak{B}}(hx_1, \ldots, hx_{\Omega(R)})$;

(б) для каждого нульместного $R \in D_1\Omega$, если $R^{\mathfrak{A}} = U$, то $R^{\mathfrak{B}} = U$;

(в) для каждого ненульместного $f \in D_2\Omega$ и каждых $x_1, \ldots, x_{\Omega(f)} \in |\mathfrak{A}|$

$$h(f^{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_{\Omega(f)})) = f^{\mathfrak{B}}(hx_1, \ldots, hx_{\Omega(f)});$$

(г) для каждого нульместного $f \in D_2\Omega$

$$h(f^{\mathfrak{A}}) = f^{\mathfrak{B}}.$$

Этот гомоморфизм h $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ называется сильным, если

(д) для каждого ненульместного $R \in D_1\Omega$ и каждых таких $x_1, \ldots, x_{\Omega(R)} \in |\mathfrak{A}|$, что $R^{\mathfrak{B}}(hx_1, \ldots, hx_{\Omega(R)})$, найдутся такие $y_1, \ldots, y_{\Omega(R)} \in |\mathfrak{A}|$, что $hx_1 = hy_1, \ldots, hx_{\Omega(R)} = hy_{\Omega(R)}$ и $R^{\mathfrak{A}}(y_1, \ldots, y_{\Omega(R)})$;

(е) для каждого нульместного $R \in D_1\Omega$, если $R^{\mathfrak{B}} = U$, то $R^{\mathfrak{A}} = U$.

В частности всякий гомоморфизм алгебр является сильным.

Отображение h называется мономорфизмом, если h разнозначно и является сильным гомоморфизмом. Гомоморфизм h $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ является изоморфизмом $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, если h отображает $|\mathfrak{A}|$ на $|\mathfrak{B}|$ и h является мономорфизмом. Если гомоморфизм h $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ отображает $|\mathfrak{A}|$ на $|\mathfrak{B}|$, то будем говорить, что h – гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Пример 4. Рассмотрим отображение h множества ортогональных матриц порядка 4 во множество $\mathbb{Z}$ целых чисел, которое каждой матрице ставит в соответствие ее определитель. Это отображение является гомоморфизмом алгебры $\langle O(4); \cdot \rangle$ в алгебру $\langle \mathbb{Z}; \cdot \rangle$. Гомоморфизм h, как гомоморфизм алгебр, является сильным, но не является мономорфизмом, так как отображение h не является разнозначным. Гомоморфизм h не является и отображением на.

Пример 5. Пусть $\mathcal{D}$ – множество действительных чисел, а $\mathcal{D}_+$ – множество положительных действительных чисел. Рассмотрим отображение h множества $\mathcal{D}_+$ во множество $\mathcal{D}$, которое каждому действительному числу ставит в соответствие его логарифм. Отображение h является изоморфизмом алгебры $\langle \mathcal{D}_+; \cdot \rangle$ на алгебру $\langle \mathcal{D}; + \rangle$. Действительно, h является гомоморфизмом, отображением на и разнозначным отображением.

Пример 6. Рассмотрим отображение h множества $\mathbb{Z}$ целых чисел на множество $\{0,1\}$, которое каждому целому числу ставит в соответствие остаток от его деления на 2. Пусть $<$ – обычное отношение порядка на $\mathbb{Z}$, а Q – такой двухместный предикат на $\{0,1\}$, что $Q = \{0,1\}^2$ (такие предикаты называются тождественно истинными, а их отрицания – тождественно ложными). Тогда h есть гомоморфизм $\langle \mathbb{Z}; < \rangle$ на $\langle \{0,1\}; Q \rangle$. Гомоморфизм h является сильным, но не является разнозначным отображением и, значит, не есть мономорфизм.

Пример 7. Рассмотрим отображение h множества $\mathbb{Z}$ целых чисел на множество $\{0,1,2\}$, которое целому числу ставит в соответствие остаток от его деления на 3. Пусть P – такой двухместный предикат на $\mathbb{Z}$, что для целых чисел a, b тогда и только тогда $P(a,b)$, когда $b = a+1$. Отображение h является гомоморфизмом предикатной системы $\langle \mathbb{Z}; P \rangle$ на предикатную систему $\langle \{0,1,2\}, Q \rangle$, где Q – тождественно истинный предикат на $\{0,1,2\}$, но h не является сильным гомоморфизмом. Действительно, $Q(0,2)$, но если $h(a) = 0$ (a делится на 3), а $h(b) = 2$ (b дает при делении на 3 остаток 2), то $a+1 \neq b$ и, значит, $\langle a, b \rangle \notin P$.

Упражнение 2. Показать, что если h является изоморфизмом $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, то h^{-1} является изоморфизмом $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{A}$.

Это утверждение уже не распространяется на такие отображения h $|\mathfrak{A}|$ на $|\mathfrak{B}|$, которые разнозначны и являются гомоморфизмами $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Пример 8. Пусть h – тождественное отображение множества $\mathbb{Z}$ целых чисел на себя, P – рассмотренный в примере 7 предикат на $\mathbb{Z}$, Q – двухместный тождественно истинный на $\mathbb{Z}$ предикат. Тогда h является гомоморфизмом $\langle \mathbb{Z}; P \rangle$ на $\langle \mathbb{Z}; Q \rangle$, но $h^{-1} = h$ не является гомоморфизмом $\langle \mathbb{Z}; Q \rangle$ на $\langle \mathbb{Z}; P \rangle$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть h – гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, z – терм сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$, $z = z(y_1, \ldots, y_n)$, где $y_1, \ldots, y_n$ – переменные, a – значение терма z в $\mathfrak{A}$, когда y_1 имеет значение a_1, …, y_n – значение a_n. Тогда $h(a)$ равно значению z в $\mathfrak{B}$, когда y_1 имеет значение $h(a_1)$, …, y_n – значение $h(a_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по рангу терма. Для термов ранга 0 оно очевидно. Если z есть $f(z_1, \ldots, z_m)$, где $f \in D_2\Omega(\mathfrak{A})$; $\Omega(\mathfrak{A})(f) = m$; $z_1, \ldots, z_m$ – термы сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$, то пусть при указанных значениях $y_1, \ldots, y_n$ в $\mathfrak{A}$ значение z_1 в $\mathfrak{A}$ равно $b_1, \ldots,$ значение

z_m в $\mathfrak{A}$ равно b_m. Тогда, по индукционному предположению, hb_1 ра но значению z_1 в $\mathfrak{B}$, когда значение y_1 есть $ha_1, \dots,$ знач ние y_n есть $ha_n, \dots, hb_m$ равно значению z_m в $\mathfrak{B}$ пр этих значениях $y_1,\dots,y_n$. Поэтому при этих значениях $y_1,\dots,y_n$ значение z есть $f^{\mathfrak{B}}(hb_1,\dots,hb_m)$. С другой стороны,

$$ha = h(f^{\mathfrak{A}}(b_1,\dots,b_m)) = f^{\mathfrak{B}}(hb_1,\dots,hb_m).$$

§ 16. Язык логики предикатов первого порядка

Правильно построенным предложениям русского языка соответств ют формулы логики предикатов. Сейчас мы точно объясним, что та кое *ф о р м у л а* логики предикатов первого порядка сигнатур Ω. Так как формулы более высоких, чем первого, порядков в наш лекциях не встречаются, то мы говорим "формула" вместо "формула логики предикатов первого порядка".

Формулы сигнатуры Ω строятся из символов, каждый из котор входит в одно из следующих множеств:

а) $D_1\Omega \cup D_2\Omega$ (множество символов сигнатуры Ω);

б) множество переменных;

в) множество $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$ пропозициональных связок, назы ваемых соответственно *к о н ъ ю н к ц и е й*, *д и з ъ ю н к ц и е й*, *и м п л и к а ц и е й* и *о т р и ц а н и е м*;

г) множество $\{\forall, \exists\}$, элементы которого называются соответст венно *к в а н т о р о м о б щ н о с т и* и *к в а н т о р о м с у щ е с т в о в а н и я*;

д) множество вспомогательных символов, включающее в себя ско ки и запятую;

е) символ равенства.

Вначале объясняется, что такое *а т о м н а я ф о р м у л* сигнатуры Ω.

Атомными формулами сигнатуры Ω называются все выражения вида

$$y_1 = y_2, \ \mathcal{P}(y_1,\dots,y_m), \ Q,$$

где $y_1,\dots,y_m,y_2$ — термы сигнатуры Ω, $\mathcal{P}$ — m-местный пре дикатный символ из $D_1\Omega$, Q — нульместный предикатный символ из $D_1\Omega$. Все переменные, которые входят в запись атомной формулы, входят в нее свободно и называются ее свободными переменными. Связанных переменных в атомной формуле нет.

Понятия формулы сигнатуры Ω и связанных и свободных пере

менных в ней определяются следующими четырьмя правилами.

(1) Атомные формулы сигнатуры Ω являются формулами сигнатуры Ω.

(2) Если Φ_1 и Φ_2 — такие формулы сигнатуры Ω, что ни один из символов переменных не входит одновременно свободно в одну из них и связанно в другую, то $(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, $(\Phi_1 \rightarrow \Phi_2)$, $\neg\Phi_1$ — тоже формулы сигнатуры Ω. Свободные переменные в $(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, $(\Phi_1 \rightarrow \Phi_2)$ — это переменные, входящие свободно в Φ_1 или Φ_2. Связанные переменные в каждой из этих трех формул — это переменные, входящие связанно в Φ_1 или в Φ_2. Свободные (связанные) переменные в $\neg\Phi_1$ — те же, что и в Φ_1.

(3) Если Φ — формула сигнатуры Ω, в которую символ x_i не входит связанно, то $(\forall x_i)\Phi$ и $(\exists x_i)\Phi$ — формулы сигнатуры Ω, свободные переменные в которых — это отличные от x_i свободные переменные Φ, а связанные переменные которых — это x_i и связанные переменные Φ.

(4) Других формул сигнатуры Ω, кроме тех, которые можно получить по правилам (1), (2), (3), нет.

П р и м е р 1. Пусть $\Omega = \langle f^{(1)}, g^{(2)}, \mathcal{P}^{(2)} \rangle$. Тогда $\mathcal{P}(x_1,x_2)$, $\mathcal{P}(f(x_1), g(f(x_1),x_2))$, $f(x_1) = g(f(x_1),x_2)$ — атомные формулы сигнатуры Ω, $(\forall x_1)\mathcal{P}(x_2,x_3)$ — формула сигнатуры Ω, в которую x_2, x_3 входят свободно, а x_1 — связанно,

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\,(\neg\mathcal{P}(x_1,x_2) \wedge (\mathcal{P}(f(x_1), g(f(x_1),x_2)) \vee x_1 = x_2))$$

— формула сигнатуры Ω, в которой нет свободных переменных, а переменные x_1 и x_2 входят связанно. Выражения

$$\mathcal{P}(x_1,x_2,x_3), \ \mathcal{P}(x_1,x_2)\neg\mathcal{P}(x_1,x_2), \ \forall\mathcal{P}(x_1,f(x_1))$$

не являются формулами сигнатуры Ω.

Формула сигнатуры Ω, в которой нет свободных переменных, называется *з а м к н у т о й* формулой сигнатуры Ω или *п р е д л о ж е н и е м* сигнатуры Ω.

Если формула Φ не содержит свободных переменных, отличных от $y_1,\dots,y_n$, а переменные $y_1,\dots,y_n$ не входят в Φ связанно и попарно различны, то мы будем писать $\Phi = \Phi(y_1,\dots,y_n)$.

Если $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система, Φ — формула сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$ и $\Phi = \Phi(y_1,\dots,y_n)$, то, приписывая переменным $y_1,\dots,y_n$ в качестве значений элементы $a_1,\dots,a_n$, мы естественным образом определим, какое из двух значений $И$ или $Л$ принимает формула Φ при этих значениях переменных. Это понятие истинности формулы $\Phi=\Phi(y_1,\dots,y_n)$ сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$ в алгебраической системе $\mathfrak{A}$ при заданных значениях $y_1,\dots,y_n$ является центральным в логике предикатов. Точное определение проводится индукцией по р а н г у $\tau(\Phi)$ ф о р м у л ы Φ. При этом, по определению, считается, что ранг атомной формулы - нуль, ранг каждой из формул $(\Phi_1\wedge\Phi_2),(\Phi_1\vee\Phi_2),(\Phi_1\to\Phi_2)$ равен $\tau(\Phi_1)+\tau(\Phi_2)+1$, а ранг каждой из формул $\neg\Phi,(\exists y)\Phi,(\forall y)\Phi$, где y - переменная, равен $\tau(\Phi)+1$.

Итак, пусть $\Phi=\Phi(y_1,\dots,y_n)$ - формула сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A}$ - алгебраическая система, $a_1,\dots,a_n\in|\mathfrak{A}|$. Пусть y_1 приписано значение $a_1,\dots,y_n$ - значение a_n.

Если Φ - атомная формула вида Q, где $Q\in D_1\Omega(\mathfrak{A}),\Omega(\mathfrak{A})(Q)=0$, то в $\mathfrak{A}$ значение Φ есть И тогда и только тогда, когда $Q^{\mathfrak{A}}=$ И. Если Φ атомная формула вида $\mathcal{P}(z_1,\dots,z_m)$, где $\mathcal{P}\in D_1\Omega(\mathfrak{A})$; $\Omega(\mathfrak{A})(\mathcal{P})=m$; $z_1,\dots,z_m$ - термы сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$, а значения $z_1,\dots,z_m$ в $\mathfrak{A}$ при указанных значениях $y_1,\dots,y_n$ есть $b_1,\dots,b_m$, то значение Φ в $\mathfrak{A}$ есть И тогда и только тогда, когда $\langle b_1,\dots,b_m\rangle\in\mathcal{P}^{\mathfrak{A}}$. Если Φ - атомная формула вида $z_1=z_2$, где z_1,z_2 - термы сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$, а значения z_1 и z_2 в $\mathfrak{A}$ при указанных значениях $y_1,\dots,y_n$ есть b_1 и b_2, то значение Φ в $\mathfrak{A}$ есть И тогда и только тогда, когда $b_1=b_2$.

Дальнейшие определения выбираются сообразно со смыслом связок $\wedge,\vee,\to,\neg$ и кванторов $\forall,\exists$.

Если Φ есть $(\Phi_1\wedge\Phi_2)$, то значение Φ есть И тогда и только тогда, когда и значение Φ_1 и значение Φ_2 есть И. Если Φ есть $(\Phi_1\vee\Phi_2)$, то значение Φ есть Л тогда и только тогда, когда и значение Φ_1 и значение Φ_2 есть Л. Если Φ есть $(\Phi_1\to\Phi_2)$, то значение Φ есть Л тогда и только тогда, когда значение Φ_1 есть И, а значение Φ_2 есть Л. Если Φ есть $\neg\Phi_1$, то значение Φ есть И тогда и только тогда, когда значение Φ_1 есть Л.

Если Φ есть $(\exists x)\Phi_1$, то $\Phi_1=\Phi_1(x,y_1,\dots,y_n)$. В этом случае значение Φ есть И тогда и только тогда, когда существует такой $b\in|\mathfrak{A}|$, что значение Φ_1 равно И, когда x приписано значение b, y_1 - значение $a_1,\dots,y_n$ - значение a_n.

Если Φ есть $(\forall x)\Phi_1$, то $\Phi_1=\Phi_1(x,y_1,\dots,y_n)$. В этом случае значение Φ есть И тогда и только тогда, когда для каждого $b\in|\mathfrak{A}|$ значение Φ_1, когда x приписано значение b, y_1 - значение $a_1,\dots,y_n$ - значение a_n, равно И.

Если значение Φ равно И, будем говорить, что Φ при рассматриваемых значениях $y_1,\dots,y_n$ и с т и н н о в $\mathfrak{A}$, и писать: $\Phi(a_1,\dots,a_n)=$ И в $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A}\models\Phi(a_1,\dots,a_n)$. В частности, если Φ - замкнутая формула и значение Φ есть И, то будем говорить, что Φ и с т и н н а в $\mathfrak{A}$, и писать $\Phi=$ И в $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A}\models\Phi$, а $\mathfrak{A}$ называть м о д е л ь ю для Φ. Формула Φ, которая не является в $\mathfrak{A}$ истинной при рассматриваемых значениях $y_1,\dots,y_n$, называется л о ж н о й в $\mathfrak{A}$ при этих значениях $y_1,\dots,y_n$.

П р и м е р 2. Будем рассматривать систему $\mathfrak{L}_1=\langle\mathcal{D};\cdot,+,<,1\rangle$, где $\mathcal{D}$ - множество действительных чисел. Замкнутая формула $(\forall x_0)(x_0\cdot x_0)<1$ ложна в $\mathfrak{L}_1$. Действительно, истинность $(\forall x_0)(x_0\cdot x_0)<1$ означает, что $a^2<1$ для каждого $a\in\mathcal{D}$. Однако при $a=2$ это неравенство уже не выполняется. Формула $(\forall x_0)(((x_0\cdot x_1)\cdot x_2)<1\vee x_2=x_1)$ не может быть ни истинной, ни ложной в $\mathfrak{L}_1$. Эта формула определяет на $\mathcal{D}$ двухместный предикат. Если этот предикат обозначить через $\mathcal{P}$, то $\mathcal{P}(\frac{1}{3},\frac{1}{5})$ ложен. Действительно, $\mathcal{P}(\frac{1}{3},\frac{1}{5})$ означает, что

$$(\forall x_0)(((x_0\cdot\tfrac{1}{3})\cdot\tfrac{1}{5})<1\vee\tfrac{1}{5}=\tfrac{1}{3}).$$

Это было бы истинно, если бы при каждом $a\in\mathcal{D}$

$$((a\cdot\tfrac{1}{3})\cdot\tfrac{1}{5})<1\vee\tfrac{1}{5}=\tfrac{1}{3}.$$

Последнее выражение есть дизъюнкция двух выражений. Второе из них ложно. Первое ложно, например, при $a=30$. Значит, при $a=30$ эта дизъюнкция ложна. Напротив, $\mathcal{P}(0,2)$ истинно. Действительно, $\mathcal{P}(0,2)$ есть

$$(\forall x_0)(((x_0\cdot 0)\cdot 2)<1\vee 2=0)$$

и, как бы ни выбрать $a\in\mathcal{D}$, $((a\cdot 0)\cdot 2)<1$. Поэтому в дизъюнкции

$$((a\cdot 0)\cdot 2)<1\vee 2=0$$

первый член истинен и, значит, истинна вся дизъюнкция. Аналогично проверяется, что $\mathcal{P}(a,a)$ истинно для любого $a\in\mathcal{D}$. Таким образом, истинность $\mathcal{P}(a,b)$ зависит от выбора пары $\langle a,b\rangle$ из $\mathcal{D}^2$.

П р и м е р 3. Будем рассматривать ту же систему $\mathfrak{L}_1$, что и в примере 2. Тогда формула

$$(\exists x_0)((x_0\cdot x_0)+(x_1+x_1))=x_1$$

определяет на $\mathcal{D}$ одноместный предикат. Этот предикат истинен в точке 0, так как

$$(x_0\cdot x_0)=0$$

при $x_0 = 0$, и истинен в точке -4, так как

$$(x_0 \cdot x_0) + ((-4)+(-4)) = (-4)$$

при $x_0 = 2$, но ложен в точке 4, так как

$$(x_0 \cdot x_0) + (4+4) = 4$$

ложно при любых действительных x_0.

Мы будем говорить, что формула Φ сигнатуры Ω является п о л о ж и т е л ь н о й, если Φ является атомной формулой, либо если Φ имеет один из видов $(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, $(\forall x)\Phi_1$, $(\exists x)\Phi_1$, где Φ_1 и Φ_2 – положительные формулы сигнатуры Ω. Мы закончим параграф двумя теоремами.

ТЕОРЕМА 3. Пусть f – гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$; $\Phi = \Phi(y_1, \ldots, y_n)$ – положительная формула сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$; $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$. Тогда если $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathfrak{B} \models \Phi(fa_1, \ldots, fa_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по рангу Φ. Пусть $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_n)$. Если Φ атомная формула вида $z_1 = z_2$, где z_1, z_2 – термы сигнатуры Ω, а значения z_1 и z_2 в $\mathfrak{A}$, когда y_1 принимает значение $a_1, \ldots, y_n$ – значение a_n, есть b_1 и b_2, то $b_1 = b_2$. Значит, $fb_1 = fb_2$. Но по теореме 2, fb_1 и fb_2 – это значения z_1 и z_2 в $\mathfrak{B}$, когда y_1 принимает значение $fa_1, \ldots, y_n$ – значение fa_n. Значит, в этом случае теорема справедлива. Аналогично показывается, что теорема справедлива и в случае, когда Φ есть $\mathcal{P}(z_1, \ldots, z_m)$, где $\mathcal{P} \in D_1\Omega$; $\Omega(\mathcal{P}) = m$; $z_1, \ldots, z_m$ – термы сигнатуры Ω. В случае, когда Φ есть Q, где $Q \in D_1\Omega$, $\Omega(Q) = 0$, известно, что $Q^{\mathfrak{A}} = \mathcal{U}$. Тогда, по определению гомоморфизма, $Q^{\mathfrak{B}} = \mathcal{U}$ и $\mathfrak{B} \models \Phi$.

Если для Φ_1 и Φ_2 теорема уже доказана, а Φ есть $(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$, то $\mathfrak{A} \models (\Phi_1 \wedge \Phi_2)(a_1, \ldots, a_n)$, значит, $\mathfrak{A} \models \Phi_1(a_1, \ldots, a_n)$ и $\mathfrak{A} \models \Phi_2(a_1, \ldots, a_n)$. По индукционному предположению, $\mathfrak{B} \models \Phi_1(fa_1, \ldots, fa_n)$ и $\mathfrak{B} \models \Phi_2(fa_1, \ldots, fa_n)$. Значит, $\mathfrak{B} \models (\Phi_1 \wedge \Phi_2)(fa_1, \ldots, fa_n)$. Случай, когда Φ есть $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, рассматривается аналогично. Если Φ есть $(\exists x)\Phi_1$, то $\Phi_1 = \Phi_1(x, y_1, \ldots, y_n)$. Существует такой $a \in |\mathfrak{A}|$, что $\mathfrak{A} \models \Phi_1(a, a_1, \ldots, a_n)$. По индукционному предположению, $\mathfrak{B} \models \Phi_1(fa, fa_1, \ldots, fa_n)$, значит, $\mathfrak{B} \models \Phi(fa_1, \ldots, fa_n)$. Если, наконец, Φ есть $(\forall x)\Phi_1$, то опять $\Phi_1 = \Phi_1(x, y_1, \ldots, y_n)$. Если $b \in |\mathfrak{B}|$, то существует такой $a \in |\mathfrak{A}|$, что $b = fa$. По определению истинности, $\mathfrak{A} \models \Phi_1(a, a_1, \ldots, a_n)$. Значит, $\mathfrak{B} \models \Phi_1(b, fa_1, \ldots, fa_n)$. Поэтому $\mathfrak{B} \models \Phi(fa_1, \ldots, fa_n)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если f – гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ и Φ – замкнутая положительная формула сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$, то из истинности Φ в $\mathfrak{A}$ следует истинность Φ в $\mathfrak{B}$.

Куда более глубоким является обратное утверждение. Для его формулировки договоримся две формулы Φ_1 и Φ_2 сигнатуры Ω называть э к в и в а л е н т н ы м и, если для любой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω и любого способа приписывания элементов $|\mathfrak{A}|$ в качестве значений переменных, входящих свободно хотя бы в одну из формул Φ_1 или Φ_2, значения Φ_1 и Φ_2 при этих значениях переменных равны в $\mathfrak{A}$. Линдон доказал следующую теорему: если замкнутая формула Φ сигнатуры Ω обладает тем свойством, что из истинности ее в произвольной алгебраической системе следует ее истинность в каждом гомоморфном образе этой системы, то Φ эквивалентна некоторой замкнутой положительной формуле сигнатуры Ω. Доказательству этой теоремы мы посвящаем § 2 Дополнения.

ТЕОРЕМА 4. Пусть f – изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, $\Phi = \Phi(y_1, \ldots, y_n)$ – формула сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$ и $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$. Тогда если $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathfrak{B} \models \Phi(fa_1, \ldots, fa_n)$. В частности, если Φ – замкнутая формула сигнатуры Ω и $\mathfrak{A} \models \Phi$, то $\mathfrak{B} \models \Phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опять индукцией по рангу Φ. При этом принимаем во внимание, что f^{-1} – изоморфизм $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{A}$, и не повторяем рассуждения, которые имеются в доказательстве теоремы 3. Пусть $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_n)$.

Пусть Φ есть $\neg\Phi_1$. Тогда если $\Phi(fa_1, \ldots, fa_n)$ ложно в $\mathfrak{B}$, то $\Phi_1(fa_1, \ldots, fa_n)$ истинно в $\mathfrak{B}$ и, значит, $\Phi_1(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}$, а это противоречит выбору Φ. Наконец, если Φ есть $(\Phi_1 \to \Phi_2)$, то сначала заметим, что $(\Phi_1 \to \Phi_2)$ эквивалентна $(\neg\Phi_1 \vee \Phi_2)$, а затем получаем, что теорема верна для $\neg\Phi_1$ и $(\neg\Phi_1 \vee \Phi_2)$, значит, и для $(\Phi_1 \to \Phi_2)$. Теорема доказана.

Теорема 4 в каком-то смысле говорит о корректности определения истинности формулы. Если бы истинность формулы в системе зависела от выбора представителя из класса изоморфных систем, то это лишало бы понятие истинности всякого интереса.

Свойство алгебраической системы, одновременно присущее и всем изоморфным ей системам, называется абстрактным свойством этой системы. Класс алгебраических систем называется абстрактным, если вместе с каждой системой этот класс содержит и все ей изоморфные. Все свойства систем и все классы систем, которые мы дальше будем рассматривать, будут абстрактными.

§ 17. Эквивалентные формулы

Формула Φ сигнатуры Ω называется **тождественно истинной**, если для каждой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω при любом способе приписывания свободным переменным в качестве значений элементов $|\mathfrak{A}|$ значение Φ в $\mathfrak{A}$ будет $\mathcal{U}$. Формула Φ называется **тождественно ложной**, если $\neg\Phi$ тождественно истинна. Будем через $\mathcal{U}$ обозначать тождественно истинную формулу, а через Λ - тождественно ложную. Будем писать $\Phi_1 \sim \Phi_2$, если формулы Φ_1 и Φ_2 эквивалентны.

Сопоставляя определения § 6 и § 16, легко заключить, что найденные в главе I эквивалентности имеют место и в случае, когда в формулах исчисления высказываний под буквами понимаются произвольные формулы сигнатуры Ω. При этом естественно требовать, чтобы правые и левые части эквивалентностей являлись формулами сигнатуры Ω.

Мы, для удобства, в предложении I вновь приводим список основных эквивалентностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Имеют место следующие 18 эквивалентностей (в предположении, что как их левые, так и их правые части являются формулами сигнатуры Ω и что Φ_1, Φ_2, Φ_3 - формулы сигнатуры Ω):

(1) $(\Phi_1 \vee \Phi_2) \sim (\Phi_2 \vee \Phi_1)$, (2) $(\Phi_1 \wedge \Phi_2) \sim (\Phi_2 \wedge \Phi_1)$ (коммутативность дизъюнкции и конъюнкции);

(3) $((\Phi_1 \vee \Phi_2) \vee \Phi_3) \sim (\Phi_1 \vee (\Phi_2 \vee \Phi_3))$,

(4) $((\Phi_1 \wedge \Phi_2) \wedge \Phi_3) \sim (\Phi_1 \wedge (\Phi_2 \wedge \Phi_3))$ (ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции);

(5) $((\Phi_1 \wedge \Phi_2) \vee \Phi_3) \sim ((\Phi_1 \vee \Phi_3) \wedge (\Phi_2 \vee \Phi_3))$,

(6) $((\Phi_1 \vee \Phi_2) \wedge \Phi_3) \sim ((\Phi_1 \wedge \Phi_3) \vee (\Phi_2 \wedge \Phi_3))$ (законы дистрибутивности);

(7) $(\Phi_1 \vee \Phi_1) \sim \Phi_1$, (8) $(\Phi_1 \wedge \Phi_1) \sim \Phi_1$ (законы идемпотентности);

(9) $\neg(\Phi_1 \vee \Phi_2) \sim (\neg\Phi_1 \wedge \neg\Phi_2)$, (10) $\neg(\Phi_1 \wedge \Phi_2) \sim (\neg\Phi_1 \vee \neg\Phi_2)$ (законы двойственности);

(11) $(\Phi_1 \vee \mathcal{U}) \sim \mathcal{U}$; (12) $(\Phi_1 \wedge \Lambda) \sim \Lambda$;

(13) $(\Phi_1 \wedge \mathcal{U}) \sim \Phi_1$; (14) $(\Phi_1 \vee \Lambda) \sim \Phi_1$;

(15) $(\Phi_1 \vee \neg\Phi_1) \sim \mathcal{U}$; (16) $(\Phi_1 \wedge \neg\Phi_1) \sim \Lambda$;

(17) $\neg\neg\Phi_1 \sim \Phi_1$; (18) $(\Phi_1 \to \Phi_2) \sim (\neg\Phi_1 \vee \Phi_2)$.

Как уже указывалось, доказательство может состоять в ссылке

на главу I. Впрочем, эти эквивалентности непосредственно проверяются исходя из определений § 16.

Законы ассоциативности позволяют опускать скобки в выражениях вида $(((\Phi_1 \vee \Phi_2) \vee (\Phi_3 \vee \Phi_4)) \vee \Phi_5)$ и подобных выражениях с конъюнкцией. Если $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ - формулы сигнатуры Ω с условием, что никакая переменная не входит свободно в одну из них и связанно в другую, то выражение $\Phi_1 \vee \ldots \vee \Phi_n$ мы используем как сокращенную запись формулы, которая получится из этого выражения, если каким-то правильным способом расставить скобки. В дальнейшем безразлично, какую из таких формул обозначает рассматриваемое выражение. Аналогично понимается выражение $\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n$. Еще короче мы вместо этих выражений пишем $\bigvee_{j=1}^{n} \Phi_j$ и $\bigwedge_{j=1}^{n} \Phi_j$.

Кроме этого, мы обычно будем опускать внешнюю пару скобок формул вида $(\Phi_1 \wedge \Phi_2), (\Phi_1 \vee \Phi_2), (\Phi_1 \to \Phi_2)$ и писать соответственно $\Phi_1 \wedge \Phi_2$, $\Phi_1 \vee \Phi_2$, $\Phi_1 \to \Phi_2$. Еще одно сокращение связано с употреблением букв x, y, z, u, v, w в качестве переменных. В таких случаях мы предполагаем, что эти x, y, z, u, v, w есть сокращения для переменных, т.е. что x есть x_{i_1}, y есть x_{i_2}, z есть x_{i_3} и т.д. В примерах еще предполагается, что x, y, z, u, v, w попарно различны, т.е. что i_1, i_2, i_3 и т.д. попарно различны.

Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ - формулы сигнатуры Ω с условием, что никакая переменная не входит свободно в одну из них и связанно в другую.

Булевой комбинацией формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ называются: а) сами эти формулы; б) все выражения видов $(\Psi_1 \to \Psi_2)$, $(\Psi_1 \wedge \Psi_2)$, $(\Psi_1 \vee \Psi_2)$, $\neg\Psi_1$, где Ψ_1 и Ψ_2 - булевы комбинации $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$; в) только те выражения, которые являются булевыми комбинациями $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ в силу а) и б).

Ясно, что каждая булева комбинация $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ является формулой сигнатуры Ω.

Элементарной дизъюнкцией (конъюнкцией) от $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ называется: а) каждая из формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$; б) каждая из формул $\neg\Phi_1, \ldots, \neg\Phi_n$; в) каждое выражение вида $\Psi_1 \vee \ldots \vee \Psi_m$ (соответственно, $\Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_m$), где $\Psi_1, \ldots, \Psi_m \in \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \neg\Phi_1, \ldots, \neg\Phi_m\}$. **Конъюнктивной (дизъюнктивной) нормальной формой** от $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ называется каждая элементарная дизъюнкция (конъюнкция) от $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ и каждое выражение вида $\Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_m$ (соответственно, $\Psi_1 \vee \ldots \vee \Psi_m$), где $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ - элементарные дизъюнкции (конъюнкции) от $\Phi_1,\dots,\Phi_n$.

Например, $\Phi_1 \vee \neg\Phi_2$ является как дизъюнктивной, так и конъюнктивной нормальной формой от $\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Каждая булева комбинация формул $\Phi_1,\dots,\Phi_n$ эквивалентна как некоторой конъюнктивной, так и некоторой дизъюнктивной нормальной форме от $\Phi_1,\dots,\Phi_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО фактически проведено в главе I.

Упражнение I. Доказать предложение 2 (не используя материала главы I, а используя только определения булевой комбинации и эквивалентности и предложение I) индукцией по числу применений правил б) при построении булевой комбинации из $\Phi_1,\dots,\Phi_n$.

СЛЕДСТВИЕ. Каждая бескванторная формула (т.е. булева комбинация атомных формул) сигнатуры Ω эквивалентна как некоторой конъюнктивной, так и некоторой дизъюнктивной нормальной форме от атомных формул сигнатуры Ω.

Пример I. Рассмотрим бескванторную формулу

$$(\mathcal{P}(x,y) \to \neg(Q(x) \to f(g(x,y)) = g(x,x))) \vee \mathcal{P}(x,x) \vee \neg Q(x)$$

сигнатуры $<\mathcal{P}^{(2)}, Q^{(1)}, f^{(1)}, g^{(2)}>$ и найдем для этой формулы Φ эквивалентную ей к.н.ф. от атомных формул. Алгоритм приведения разбивается на шаги. На первом шаге избавляемся от $\to$, пользуясь (I8) из предложения I. Получаем, что Φ эквивалентна

$$(\neg\mathcal{P}(x,y) \vee \neg(\neg Q(x) \vee f(g(x,y)) = g(x,x))) \vee \mathcal{P}(x,x) \vee \neg Q(x).$$

На втором шаге избавляемся от отрицаний, стоящих перед скобками. Получаем, что Φ эквивалентна

$$(\neg\mathcal{P}(x,y) \vee (Q(x) \wedge f(g(x,y)) \neq g(x,x))) \vee \mathcal{P}(x,x) \vee \neg Q(x).$$

При этом мы пользуемся законами двойственности и (I7) предложения I. На третьем шаге мы "перемножаем", используя законы дистрибутивности. При этом мы как бы считаем $\vee$ за умножение, а $\wedge$ – за сложение. Получаем, что Φ эквивалентна

$$(\neg\mathcal{P}(x,y) \vee Q(x) \vee \mathcal{P}(x,x) \vee \neg Q(x)) \wedge (\neg\mathcal{P}(x,y) \vee f(g(x,y)) \neq g(x,x) \vee \mathcal{P}(x,x) \vee \neg Q(x))$$

Последняя формула уже является требуемой к.н.ф. Однако обычно делается еще четвертый шаг, на котором полученная к.н.ф. упрощается за счет использования эквивалентностей (II) – (I6) предложения I. В нашем примере такое упрощение дает формулу

$$\neg\mathcal{P}(x,y) \vee f(g(x,y)) \neq g(x,x) \vee \mathcal{P}(x,x) \vee \neg Q(x).$$

Формулы, отличающиеся только наименованиями связанных переменных, называются конгруэнтными. Точное определение следующее. Формулы Φ_1 и Φ_2 сигнатуры Ω назовем **конгруэнтными**, если а) формулы Φ_1 и Φ_2 – обе атомные и Φ_1 есть Φ_2; б) Φ_1 есть либо $\Phi_{11} \wedge \Phi_{12}$, либо $\Phi_{11} \vee \Phi_{12}$, либо $\Phi_{11} \to \Phi_{12}$, либо $\neg\Phi_{11}$, а Φ_2, соответственно, $\Phi_{21} \wedge \Phi_{22}$, $\Phi_{21} \vee \Phi_{22}$, $\Phi_{21} \to \Phi_{22}$, $\neg\Phi_{21}$ и при этом Φ_{11} конгруэнтна Φ_{21} и Φ_{12} конгруэнтна Φ_{22}; в) Φ_1 есть либо $(\exists x)\Phi_{11}$, либо $(\forall x)\Phi_{11}$, а Φ_2 есть $(\exists y)\Phi_{21}$ либо, соответственно, $(\forall y)\Phi_{21}$, а формула Φ_{12}, полученная из Φ_{11} заменой каждого вхождения x на вхождение w, где переменная w не встречается в Φ_{11} и Φ_{21} ни свободно, ни связанно, конгруэнтна формуле Φ_{22}, полученной из Φ_{21} заменой каждого вхождения y на вхождение w.

Для полноты надо еще объяснить для формулы Ψ сигнатуры Ω, что значит "Φ получается из формулы Ψ заменой каждого вхождения переменной x на вхождение переменной w". Если Ψ – атомная, то либо Ψ есть Q и тогда Φ есть тоже Q, либо Ψ есть $y_1 = y_2$ и тогда Φ есть $z_1 = z_2$, где z_1 и z_2 получаются из y_1 и y_2 заменой каждого вхождения x на вхождение w, либо Ψ есть $\mathcal{P}(y_1,\dots,y_n)$ и тогда Φ есть $\mathcal{P}(z_1,\dots,z_n)$, где $z_1,\dots,z_n$ получаются из $y_1,\dots,y_n$ заменой каждого вхождения x на вхождение w. Если Ψ есть $\Psi_1 \wedge \Psi_2$, $\Psi_1 \vee \Psi_2$, $\Psi_1 \to \Psi_2$, $\neg\Psi_1$, а Φ_1 и Φ_2 получаются из Ψ_1 и Ψ_2 заменой каждого вхождения x на вхождение w, то Φ есть, соответственно, $\Phi_1 \wedge \Phi_2$, $\Phi_1 \vee \Phi_2$, $\Phi_1 \to \Phi_2$, $\neg\Phi_1$. Если же Ψ есть $(\forall u)\Psi_1$ или $(\exists u)\Psi_1$, то, предполагая, что Φ_1 получается из Ψ_1 заменой каждого вхождения x на вхождение w, Φ есть, соответственно, $(\forall u)\Phi_1$ и $(\exists u)\Phi_1$, если u отлично от x, и есть, соответственно, $(\forall w)\Phi_1$ и $(\exists w)\Phi_1$, если u есть x.

Упражнение 2. Пусть w не встречается в Ψ и Φ получается из формулы Ψ сигнатуры Ω заменой каждого вхождения x на вхождение w. Показать, что Φ тоже формула сигнатуры Ω. Показать, что $(\forall x)\Psi$ эквивалентна $(\forall w)\Phi$, предполагая, что x не входит в Ψ связанно.

Пример 2. Формулы

$$(\forall x)((\mathcal{P}(x) \wedge (\exists y)Q(y,z)) \to (\exists y)\mathcal{R}(x,y)) \vee Q(z,v), \qquad (I)$$

$$(\forall u)((\mathcal{P}(u) \wedge (\exists y)Q(y,z)) \to (\exists x)\mathcal{R}(u,x)) \vee Q(z,v) \qquad (2)$$

конгруэнтны. Действительно, формулы $(\exists y)\mathcal{R}(w,y)$ и $(\exists x)\mathcal{R}(w,x)$ конгруэнтны (ибо $\mathcal{R}(w,w_1)$ и $\mathcal{R}(w,w_1)$ конгруэнтны), формулы $(\mathcal{P}(w) \wedge (\exists y)Q(y,z)) \to (\exists y)\mathcal{R}(w,y)$ и $(\mathcal{P}(w) \wedge (\exists y)Q(y,z)) \to$

$\to (\exists x)\mathcal{R}(w,x)$ конгруэнтны, значит, по пункту в) конгруэнтны первые члены дизъюнкций (I) и (2), а по пункту б) конгруэнтны и сами дизъюнкции.

Упражнение 3. Показать, что каждая формула конгруэнтна сама себе. Показать, что ранги конгруэнтных формул равны.

Упражнение 4. Если w_1 и w_2 не встречаются в формулах Φ_1 и Φ_2, а Ψ_{11} и Ψ_{21}, Ψ_{12} и Ψ_{22} получаются из Φ_1 и Φ_2 заменой, соответственно, каждого вхождения x на вхождение w_1 и w_2, то Ψ_{11} и Ψ_{21} тогда и только тогда конгруэнтны, когда конгруэнтны Ψ_{12} и Ψ_{22}. Вывести из этого алгоритм для проверки, являются ли формулы Φ_1 и Φ_2 сигнатуры Ω конгруэнтными.

ТЕОРЕМЫ 5. Конгруэнтные формулы эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по рангу формул Φ_1 и Φ_2, которые конгруэнтны. Если обе формулы атомные, то они совпадают. Случай, когда Φ_1 есть $(\Phi_{11}\wedge\Phi_{12})$, $(\Phi_{11}\vee\Phi_{12})$, $(\Phi_{11}\to\Phi_{12})$, $\neg\Phi_{11}$, рассматривается очевидным образом. Если Φ_1 есть $(\forall x)\Phi_{11}$, то Φ_2 есть $(\forall y)\Phi_{21}$, где Φ_{12} и Φ_{22} конгруэнтны, w не встречается в Φ_1 и Φ_2, а Φ_{12} и Φ_{22} получаются заменой x и, соответственно, y на w в Φ_{11} и Φ_{21}. Ясно из определения истинности, что $(\forall x)\Phi_{11}$ и $(\forall w)\Phi_{12}$, а также $(\forall y)\Phi_{21}$ и $(\forall w)\Phi_{22}$ эквивалентны (см. упражнение 2). Кроме того, по индукционному предположению Φ_{12} и Φ_{22}, а значит, и $(\forall w)\Phi_{12}$ и $(\forall w)\Phi_{22}$ эквивалентны. Окончательно, $(\forall x)\Phi_{11}$ и $(\forall y)\Phi_{21}$ эквивалентны. Случай, когда Φ_1 есть $(\exists x)\Phi_{11}$, рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Мы будем говорить, что терм z свободен для Φ, если в записи z не встречается переменных, которые входят в Φ связанно. Если $\Phi = \Phi(x, y_1, \dots, y_s)$ – формула сигнатуры Ω, а z – терм сигнатуры Ω, свободный для Φ, через $\Phi(z, y_1, \dots, y_s)$ обозначим формулу, которая получится из Φ, если каждое вхождение x заменить на вхождение z. Для полноты надо еще объяснить, что значит "Ψ получается из Φ заменой каждого вхождения переменной x на вхождение терма z" для формулы Φ сигнатуры Ω, не содержащей x связанно, и терма z сигнатуры Ω, свободного для Φ. Если Φ – атомная, то либо Φ есть Q и тогда Ψ есть тоже Q, либо Φ есть $y_1 = y_2$ или $\mathcal{P}(y_1, \dots, y_n)$ и тогда Ψ есть $z_1 = z_2$ или $\mathcal{P}(z_1, \dots, z_n)$, где $z_1, \dots, z_n, z_2$ получаются из $y_1, \dots, y_n, y_2$ заменой каждого вхождения x на вхождение z. Если Φ есть $\Phi_1\wedge\Phi_2$, $\Phi_1\vee\Phi_2$, $\Phi_1\to\Phi_2$, $\neg\Phi_1$, а Ψ_1 и Ψ_2 получаются из Φ_1 и Φ_2 заменой каждого вхождения x на вхождение z, то Ψ есть $\Psi_1\wedge\Psi_2$, $\Psi_1\vee\Psi_2$, $\Psi_1\to\Psi_2$, $\neg\Psi_1$ соответственно. Если же Φ есть $(\forall u)\Phi_1$ или $(\exists u)\Phi_1$, а Ψ_1 получается из Φ_1 заменой каждого вхождения x на вхождение z, то Ψ есть $(\forall u)\Psi_1$ или $(\exists u)\Psi_1$ соответственно.

Пример 3. Пусть Φ есть

$$(\forall x)(\mathcal{P}(x,y)\vee\mathcal{P}(y,u)),$$

а z есть $f(g(u,v))$, Φ и z – формула и терм сигнатуры $\Omega = \langle \mathcal{P}^{(2)}, f^{(1)}, g^{(2)} \rangle$. Тогда $\Phi = \Phi(y,u,v)$, z свободен для Φ и $\Phi(z,u,v)$ есть

$$(\forall x)(\mathcal{P}(x, f(g(u,v)))\vee\mathcal{P}(f(g(u,v)),u)).$$

Формула Φ называется предваренной, если Φ имеет вид Ψ или $(Q_1 y_1)\dots(Q_n y_n)\Psi$, где $y_1, \dots, y_n$ – переменные, $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ – какие-то кванторы, а Ψ кванторов не содержит (т.е. является булевой комбинацией атомных формул).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Имеют место следующие I2 эквивалентностей в предположении, что их левые и правые части являются формулами сигнатуры Ω, Ψ не содержит x, $\Phi_1 = \Phi_1(x, y_1, \dots, y_s)$, $\Phi_2 = \Phi_2(x, u_1, \dots, u_k)$, t – терм сигнатуры Ω, свободный для Φ_1, y – переменная, не входящая в Φ_1 и Φ_2:

(I9) $(\forall x)\Phi_1\wedge\Psi \sim (\forall x)(\Phi_1\wedge\Psi)$,

(20) $(\forall x)\Phi_1\vee\Psi \sim (\forall x)(\Phi_1\vee\Psi)$,

(2I) $(\exists x)\Phi_1\wedge\Psi \sim (\exists x)(\Phi_1\wedge\Psi)$,

(22) $(\exists x)\Phi_1\vee\Psi \sim (\exists x)(\Phi_1\vee\Psi)$,

(23) $(\forall x)\Phi_1\wedge(\forall x)\Phi_2 \sim (\forall x)(\Phi_1\wedge\Phi_2)$,

(24) $(\exists x)\Phi_1\vee(\exists x)\Phi_2 \sim (\exists x)(\Phi_1\vee\Phi_2)$,

(25) $(\forall x)\Phi_1\vee(\forall x)\Phi_2 \sim (\forall x)(\forall y)(\Phi_1\vee\Phi_2(y, u_1, \dots, u_k))$,

(26) $(\exists x)\Phi_1\wedge(\exists x)\Phi_2 \sim (\exists x)(\exists y)(\Phi_1\wedge\Phi_2(y, u_1, \dots, u_k))$,

(27) $\neg(\exists x)\Phi_1 \sim (\forall x)\neg\Phi_1$,

(28) $\neg(\forall x)\Phi_1 \sim (\exists x)\neg\Phi_1$,

(29) $(\forall x)\Phi_1\to\Phi_1(t, y_1, \dots, y_s) \sim \mathcal{U}$,

(30) $\Phi_1(t, y_1, \dots, y_s)\to(\exists x)\Phi_1 \sim \mathcal{U}$.

Доказательство состоит в непосредственной проверке.

ТЕОРЕМА 6. Пусть Φ_1 – формула сигнатуры Ω. Существует такая предваренная формула Φ_2 сигнатуры Ω, которая эквивалентна Φ_1 и имеет те же самые свободные переменные, что Φ_1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО индукцией по рангу формулы. Для атомных формул теорема очевидна (атомные формулы являются предваренными). Если теорема имеет место для Φ_1, она имеет место и для $(\exists x)\Phi_1$, $(\forall x)\Phi_1$ и $\neg\Phi_1$ (используем (27) и (28)).

Пусть теорема имеет место для Φ_1' и Φ_1''. Мы проверим, что тогда теорема имеет место и для $\Phi_1' \wedge \Phi_1''$. Так как $\Phi_1' \vee \Phi_1''$ эквивалентна $\neg(\neg\Phi_1' \wedge \neg\Phi_1'')$, а $\Phi_1' \to \Phi_1''$ эквивалентна $\neg\Phi_1' \vee \Phi_1''$, то доказательство теоремы на этом закончится. Пусть $\Phi_1', \Phi_1'', \Phi_1'''$ – предваренные. Доказательство ведем индукцией по общему числу кванторов в Φ_1' и Φ_1''. Пусть Φ_1' эквивалентна $(Qy)\Phi_1'''$, $Q \in \{\forall, \exists\}$. Используя теорему 5, можно считать, что y не встречается в Φ_1''. Тогда, используя (I9) или (2I), получаем, что $\Phi_1' \wedge \Phi_1''$ эквивалентна

$$(Qy)(\Phi_1''' \wedge \Phi_1'').$$

Теорема доказана.

Пример 4. Пусть Φ_1 есть

$$(\forall x)((\exists u)\mathcal{P}(x,u) \to (\forall u)(Q(u) \wedge (\exists z)\mathcal{P}(z,u))).$$

Тогда Φ_1 последовательно эквивалентна

$$(\forall x)((\exists u)\mathcal{P}(x,u) \to (\forall u)(\exists z)(Q(u) \wedge \mathcal{P}(z,u))),$$
$$(\forall x)((\exists v)\mathcal{P}(x,v) \to (\forall u)(\exists z)(Q(u) \wedge \mathcal{P}(z,u))),$$
$$(\forall x)(\forall v)(\mathcal{P}(x,v) \to (\forall u)(\exists z)(Q(u) \wedge \mathcal{P}(z,u))),$$
$$(\forall x)(\forall v)(\forall u)(\exists z)(\mathcal{P}(x,v) \to (Q(u) \wedge \mathcal{P}(z,u))).$$

Последняя из этих формул и есть предваренная формула, эквивалентная Φ_1.

Пусть формула Φ не содержит импликаций, а отрицания в Φ встречаются только перед атомными формулами. Пусть Φ^* получается из Φ заменой каждого вхождения $\forall$ на вхождение $\exists$, $\exists$ на $\forall$, $\wedge$ на $\vee$, $\vee$ на $\wedge$ и заменой каждого отрицания атомной формулы на эту атомную формулу и каждой атомной формулы, входящей без отрицания, на отрицание этой формулы. Тогда Φ^* называется *двойственной* Φ.

Более точно, пусть существует такая последовательность формул $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$, заканчивающаяся формулой Φ, что каждая формула этой последовательности есть либо атомная, либо отрицание атомной, либо получается из какой-то предыдущей формулы этой же последовательности навешиванием квантора $\forall$ или $\exists$, либо является конъюнкцией или дизъюнкцией двух предыдущих формул этой же последовательности. Тогда двойственная формула определяется такой последовательностью

$$\Psi_1^*, \ldots, \Psi_n^* = \Phi^*,$$

в которой Ψ_i^* есть атомная формула, если Ψ_i есть отрицание этой атомной формулы, Ψ_i^* есть отрицание атомной формулы, если Ψ_i есть эта атомная формула, Ψ_i^* есть $\Psi_j^* \wedge \Psi_k^*$ или $\Psi_j^* \vee \Psi_k^*$, где $k, j < i$, если Ψ_i есть $\Psi_j \vee \Psi_k$ или, соответственно, $\Psi_j \wedge \Psi_k$, Ψ_i^* есть $(\forall x)\Psi_j^*$ или $(\exists x)\Psi_j^*$, где $j < i$, если Ψ_i есть $(\exists x)\Psi_j$ или, соответственно, $(\forall x)\Psi_j$.

Пример 5. Если Φ есть

$$(\forall x)(((\exists u)\neg\mathcal{P}(x,u) \vee Q(y)) \wedge (\exists z)\mathcal{P}(z,z)),$$

то Φ^* есть

$$(\exists x)(((\forall u)\mathcal{P}(x,u) \wedge \neg Q(y)) \vee (\forall z)\neg\mathcal{P}(z,z)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если формула Φ сигнатуры Ω не содержит импликаций, а отрицания в Φ встречаются только перед атомными формулами, то $\neg\Phi$ эквивалентна Φ^*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО индукцией по длине последовательности $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$. Базис индукции очевиден. Индукционный шаг использует эквивалентности (27), (28) из предложения 3 и законы двойственности.

Мы заканчиваем этот параграф предложением, в котором изучаются возможности перестановки кванторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Имеют место следующие эквивалентности, в предположении, что их левые части являются формулами сигнатуры Ω:

(3I) $(\forall x)(\forall y)\Phi \sim (\forall y)(\forall x)\Phi$,

(32) $(\exists x)(\exists y)\Phi \sim (\exists y)(\exists x)\Phi$,

(33) $(\forall x)\Phi \to (\exists x)\Phi \sim \mathcal{U}$,

(34) $(\exists x)(\forall y)\Phi \to (\forall y)(\exists x)\Phi \sim \mathcal{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (3I)-(33) совсем очевидны. Докажем (34). Пусть $\Phi = \Phi(x, y, u_1, \ldots, u_s)$, $\mathfrak{A}$ – алгебраическая система сигнатуры Ω; $a_1, \ldots, a_s \in |\mathfrak{A}|$ и $\mathfrak{A} \models (\exists x)(\forall y)\Phi(x, y, a_1, \ldots, a_s)$. Значит, существует такой $a \in |\mathfrak{A}|$, что для каждого $b \in |\mathfrak{A}|$ в $\mathfrak{A}$ истинно $\Phi(a, b, a_1, \ldots, a_s)$. Тем более, $\mathfrak{A} \models (\exists x)\Phi(x, b, a_1, \ldots, a_s)$ для каждого $b \in |\mathfrak{A}|$. Значит, $\mathfrak{A} \models (\forall y)(\exists x)\Phi(x, y, a_1, \ldots, a_s)$.

Предложение доказано.

В доказательстве нам пришлось воспользоваться обозначениями вида

$$\mathfrak{A} \models (\exists x)(\forall y)\Phi(x, y, a_1, \ldots, a_s). \qquad (3)$$

И в дальнейшем мы будем использовать аналогичные обозначения. Поэтому имеет смысл сказать, что мы под этим понимаем.

Если Ψ есть $(\exists x)(\forall y)\Phi$, $\Psi=\Psi(u_1,\dots,u_s)$, то (3) означает, что

$$\mathfrak{A}\models\Psi(a_1,\dots,a_s).$$

Аналогично такие записи надо расшифровывать и в дальнейшем.

§ 18. Элементарные подсистемы

Подсистема $\mathfrak{B}$ системы $\mathfrak{A}$ называется *элементарной подсистемой* системы $\mathfrak{A}$, если для каждой формулы $\Phi=\Phi(y_1,\dots,y_n)$ сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$ и каждых $a_1,\dots,a_n\in|\mathfrak{B}|$ из истинности $\Phi(a_1,\dots,a_n)$ в $\mathfrak{B}$ следует истинность $\Phi(a_1,\dots,a_n)$ в $\mathfrak{A}$ (и тогда из истинности $\Phi(a_1,\dots,a_n)$ в $\mathfrak{A}$ следует истинность $\Phi(a_1,\dots,a_n)$ в $\mathfrak{B}$; действительно, если $\Phi(a_1,\dots,a_n)$ ложно в $\mathfrak{B}$, то $\neg\Phi(a_1,\dots,a_n)$ истинно в $\mathfrak{B}$, значит, и в $\mathfrak{A}$).

Мы будем писать $\mathfrak{B}\preccurlyeq\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{B}$ есть элементарная подсистема системы $\mathfrak{A}$.

Следующая теорема принадлежит Тарскому.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$. Для того, чтобы $\mathfrak{B}$ была элементарной подсистемой системы $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы

(а) для каждой переменной y, каждой формулы $\Phi=\Phi(y,y_1,\dots,y_n)$ сигнатуры $\Omega=\Omega(\mathfrak{A})$ и любых $a_1,\dots,a_n\in|\mathfrak{B}|$ из истинности $(\exists y)\Phi(y,a_1,\dots,a_n)$ в $\mathfrak{A}$ следует существование такого $a\in|\mathfrak{B}|$, что $\Phi(a,a_1,\dots,a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть условие (а) выполнено. Мы далее будем изучать некоторое условие и доказывать, что оно выполнено для всех формул сигнатуры Ω. Это условие выполнено для всех формул, эквивалентных Φ, если оно выполнено для Φ. Поэтому достаточно заметить, что оно выполнено для атомных формул и их отрицаний и что, если оно выполнено для Φ_1 и Φ_2, то выполнено также для $\Phi_1\wedge\Phi_2$, $\Phi_1\vee\Phi_2$, $(\exists x)\Phi_1$, $(\forall x)\Phi_1$. Действительно, каждая формула эквивалентна такой предваренной формуле той же сигнатуры, у которой бескванторная часть является конъюнктивной нормальной формой от атомных формул. Значит, каждая формула эквивалентна формуле, которая получается из атомных формул той же сигнатуры и их отрицаний с помощью конечного числа конъюнкций, дизъюнкций и навешивания кванторов.

Итак, покажем, что выполнено следующее условие:

(б) для формулы $\Phi=\Phi(y_1,\dots,y_n)$ сигнатуры Ω и каждых $a_1,\dots,a_n\in|\mathfrak{B}|$ истинность $\Phi(a_1,\dots,a_n)$ в $\mathfrak{A}$ влечет истинность $\Phi(a_1,\dots,a_n)$ в $\mathfrak{B}$.

Для атомных формул и отрицаний атомных формул (б) вытекает из того, что $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$. Если (б) верно для Φ_1 и Φ_2, то (б) верно и для $\Phi_1\wedge\Phi_2$, $\Phi_1\vee\Phi_2$.

Пусть (б) верно для $\Phi_1=\Phi_1(x,y_1,\dots,y_n)$ и $a_1,\dots,a_n\in|\mathfrak{B}|$. Если $(\forall x)\Phi_1(x,a_1,\dots,a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}$, то $\Phi_1(a,a_1,\dots,a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}$ для любого $a\in|\mathfrak{A}|$. По (б), $\Phi_1(a,a_1,\dots,a_n)$ истинно в $\mathfrak{B}$ для любого $a\in|\mathfrak{B}|$. Значит, $(\forall x)\Phi_1(x,a_1,\dots,a_n)$ истинно в $\mathfrak{B}$. Если $(\exists x)\Phi_1(x,a_1,\dots,a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}$, то по (а) существует такой $a\in|\mathfrak{B}|$, что $\Phi_1(a,a_1,\dots,a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}$. По (б), $\Phi_1(a,a_1,\dots,a_n)$ истинно в $\mathfrak{B}$. Значит, $(\exists x)\Phi_1(x,a_1,\dots,a_n)$ истинно в $\mathfrak{B}$.

Это показывает, что (б) имеет место для любой формулы Φ сигнатуры Ω. Это означает, что $\mathfrak{B}\preccurlyeq\mathfrak{A}$. Теорема доказана.

Следующая теорема обычно называется теоремой Левенгейма-Сколема. В этой теореме читатель, не знакомый с подробной теорией сравнения по мощности несчетных множеств, может предполагать, что $\mathcal{A}$ счетно, а $\mathcal{B}$ и $D\Omega(\mathfrak{A})$ перечислимы. Впрочем, можно предварительно изучить § 1 Дополнения, где содержится весь необходимый для понимания дальнейшего материал из теории множеств. Мы говорим, что алгебраическая система $\mathfrak{A}$ *счетна*, если счетно множество $|\mathfrak{A}|$.

ТЕОРЕМА 8. Для любой алгебраической системы $\mathfrak{A}$, любого $\mathcal{B}\subseteq|\mathfrak{A}|$ и любого бесконечного множества $\mathcal{A}$, удовлетворяющего условиям: $\mathcal{A}\le|\mathfrak{A}|$, $D\Omega(\mathfrak{A})\le\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\le\mathcal{A}$, существует такая элементарная подсистема $\mathfrak{B}$ системы $\mathfrak{A}$, что $\mathcal{B}\subseteq|\mathfrak{B}|$, а множества $\mathcal{A}$ и $|\mathfrak{B}|$ равномощны.

В частности, для каждой бесконечной алгебраической системы $\mathfrak{A}$ с перечислимым $D\Omega(\mathfrak{A})$ и каждого конечного или счетного $\mathcal{B}\subseteq|\mathfrak{A}|$ существует такая счетная элементарная подсистема $\mathfrak{B}$ системы $\mathfrak{A}$, что $\mathcal{B}\subseteq|\mathfrak{B}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим последовательность множеств $\mathcal{D}_0,\dots,\mathcal{D}_n,\dots$. Пусть $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_0\subseteq|\mathfrak{A}|$ и $\mathcal{D}_0$ равномощно $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{D}_n$ уже построено. Для каждой формулы $\Phi=\Phi(x,y_1,\dots,y_m)$ сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$ и каждого набора $a_1,\dots,a_m$ из $\mathcal{D}_n$ таких, что $(\exists x)\Phi(x,a_1,\dots,a_m)$ истинно в $\mathfrak{A}$, выбираем такой

$a = h(\Phi, a_1, \ldots, a_m) \in |\mathfrak{A}|$, что $\Phi(a, a_1, \ldots, a_m)$ истинно в $\mathfrak{A}$. Полагаем: $\mathfrak{D}_{n+1} = \mathfrak{D}_n \cup \{h(\Phi, a_1, \ldots, a_m) \mid \Phi = \Phi(x, y_1, \ldots, y_m)$ - формула сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$; $a_1, \ldots, a_m \in \mathfrak{D}_n$; $(\exists x)\Phi(x, a_1, \ldots, a_m)$ истинно в $\mathfrak{A}\}$. Ясно, что $\mathfrak{D}_n$ и $\mathcal{A}$ равномощны, $\mathfrak{D}_n \subseteq |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{D}_n \supseteq \mathcal{B}$ для любых натуральных n. Пусть $\mathfrak{D} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathfrak{D}_i$. Рассмотрим множество $\mathfrak{D}$ и покажем, что оно замкнуто относительно всех основных операций системы $\mathfrak{A}$. Пусть $f \in D_2\Omega(\mathfrak{A})$ и $\Omega(\mathfrak{A})(f) = n$. Рассмотрим формулу $(\exists x_0) f(x_1, \ldots, x_n) = x_0$. Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{D}$. Тогда найдется такое i, что $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{D}_i$. Теперь $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = h((\exists x_0) f(x_1, \ldots, x_n) = x_0, a_1, \ldots, a_n)$. Значит, $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{D}_{i+1} \subseteq \mathfrak{D}$. Итак, $\mathfrak{D}$ замкнуто относительно всех основных операций системы $\mathfrak{A}$. Значит, существует такая подсистема $\mathfrak{B}$ системы $\mathfrak{A}$, что $|\mathfrak{B}| = \mathfrak{D}$. Ясно, что $\mathcal{A}$ и $|\mathfrak{B}|$ равномощны. Покажем, что $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{A}$.

Пусть $\Phi = \Phi(x, y_1, \ldots, y_n)$ - произвольная формула сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$. Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{D}$ и $(\exists x)\Phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}$. Тогда найдется такое i, что $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{D}_i$. Значит, $\Phi(h(\Phi, a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}$ и $h(\Phi, a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{D}_{i+1} \subseteq \mathfrak{D}$. Это показывает, что выполнено условие (а) теоремы 7. По теореме 7 $\mathfrak{B}$ является элементарной подсистемой системы $\mathfrak{A}$. Теорема 8 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если перечислимая совокупность замкнутых формул одной сигнатуры имеет бесконечную модель, то она имеет и счетную модель.

Пусть γ - ординал и $W(\gamma)$ - множество ординалов, меньших γ. Читатель, не знакомый с ординалами, может предполагать, что $W(\gamma)$ - множество всех натуральных чисел.

Возрастающей цепочкой подсистем $\{\mathfrak{A}_\alpha \mid \alpha \in W(\gamma)\}$ сигнатуры Ω называется такая совокупность $\{\mathfrak{A}_\alpha \mid \alpha \in W(\gamma)\}$ алгебраических систем сигнатуры Ω, что $\mathfrak{A}_\alpha \subseteq \mathfrak{A}_\beta$ для любых таких α, β, что $\alpha < \beta$ и $\alpha, \beta \in W(\gamma)$. Возрастающая цепочка подсистем $\{\mathfrak{A}_\alpha \mid \alpha \in W(\gamma)\}$ называется *возрастающей цепочкой элементарных подсистем*, если $\mathfrak{A}_\alpha \preceq \mathfrak{A}_\beta$ для любых таких α, β, что $\alpha, \beta \in W(\gamma)$ и $\alpha < \beta$.

Объединением возрастающей цепочки $\{\mathfrak{A}_\alpha \mid \alpha \in W(\gamma)\}$ подсистем сигнатуры Ω называется такая система $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω, что (а) $|\mathfrak{A}| = \bigcup_{\alpha \in W(\gamma)} |\mathfrak{A}_\alpha|$; (б) $R^{\mathfrak{A}} = \bigcup_{\alpha \in W(\gamma)} R^{\mathfrak{A}_\alpha}$ для любого $R \in D_1\Omega$; (в) $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{\Omega(f)}) =$

$= f^{\mathfrak{A}_\alpha}(a_1, \ldots, a_{\Omega(f)})$ для любого $f \in D_2\Omega$, любого $\alpha \in W(\gamma)$ и любых таких $a_1, \ldots, a_{\Omega(f)}$, что $a_1, \ldots, a_{\Omega(f)} \in |\mathfrak{A}_\alpha|$.

Легко понять, что правила (а), (б), (в) всегда определяют (и притом только одну) алгебраическую систему $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω. Через $\bigcup_{\alpha \in W(\gamma)} \mathfrak{A}_\alpha$ обозначают объединение возрастающей цепочки подсистем $\{\mathfrak{A}_\alpha \mid \alpha \in W(\gamma)\}$.

Следующая теорема принадлежит Тарскому и Воору.

ТЕОРЕМА 9. Если $\{\mathfrak{A}_\alpha \mid \alpha \in W(\gamma)\}$ - возрастающая цепочка элементарных подсистем и $\mathfrak{A}$ - объединение этой цепочки, то для каждого $\alpha \in W(\gamma)$ система $\mathfrak{A}_\alpha$ является элементарной подсистемой системы $\mathfrak{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения непосредственно следует, что $\mathfrak{A}_\alpha \subseteq \mathfrak{A}$ для каждого $\alpha \in W(\gamma)$. Пусть Ω - сигнатура систем $\mathfrak{A}_\alpha$ и пусть $\Phi = \Phi(y_1, \ldots, y_n)$ - формула сигнатуры Ω. Докажем, что

(а) для каждого $\alpha \in W(\gamma)$ и любых $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}_\alpha|$ истинность $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ в $\mathfrak{A}$ влечет истинность $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ в $\mathfrak{A}_\alpha$.

Если Φ - атомная формула или отрицание атомной формулы - это следует из того, что $\mathfrak{A}_\alpha \subseteq \mathfrak{A}$. Если (а) верно для Φ_1 и Φ_2, то (а) верно и для $\Phi_1 \wedge \Phi_2$, $\Phi_1 \vee \Phi_2$. Пусть (а) верно для $\Phi = \Phi(x, y_1, \ldots, y_n)$ и $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}_\alpha|$. Если $(\forall x)\Phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}$, то для каждого $a \in |\mathfrak{A}_\alpha|$ $\Phi(a, a_1, \ldots, a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}$ и, значит, истинно в $\mathfrak{A}_\alpha$. Поэтому $(\forall x)\Phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}_\alpha$. Если $(\exists x)\Phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}$, то существует такое $a \in |\mathfrak{A}|$, что $\Phi(a, a_1, \ldots, a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}$. Это a принадлежит $\mathfrak{A}_\beta$ при некотором $\beta \in W(\gamma)$, $\beta \geq \alpha$. Теперь $\Phi(a, a_1, \ldots, a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}_\beta$. Значит, $(\exists x)\Phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}_\beta$. Но $\mathfrak{A}_\alpha \preceq \mathfrak{A}_\beta$. Значит, $(\exists x)\Phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}_\alpha$. Теорема доказана.

§ 19. Фильтрованные произведения

Прямым произведением множеств $\mathcal{A}_\alpha$ $(\alpha \in J)$ называется множество всех таких отображений f множества J во множество $\bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{A}_\alpha$, что $f(\alpha) \in \mathcal{A}_\alpha$ для каждого $\alpha \in J$. В случае, когда множество J конечно и состоит из n элементов $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, каждое отображение J в $\bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{A}_\alpha$ можно записать в виде конечной последовательности $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, где a_i - это элемент, который рассматриваемое отображение ставит в соответствие элементу α_i.

Значит, в этом случае прямое произведение множеств $\mathcal{A}_\alpha\ (\alpha\in\mathcal{J})$ можно представлять себе как множество всех таких конечных последовательностей $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$, что $a_i\in\mathcal{A}_{\alpha_i}$ для $i=1,\dots,n$.

Прямое произведение множеств $\mathcal{A}_\alpha\ (\alpha\in\mathcal{J})$ обозначается через $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{J}}\mathcal{A}_\alpha$. В случае, когда множество $\mathcal{J}$ конечно и есть $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, прямое произведение множеств $\mathcal{A}_\alpha\ (\alpha\in\mathcal{J})$ обозначается через $\mathcal{A}_{\alpha_1}\otimes\dots\otimes\mathcal{A}_{\alpha_n}$. Если s – разнозначное отображение $\{1,\dots,n\}$ на $\{1,\dots,n\}$, то $\mathcal{A}_{\alpha_{s(1)}}\otimes\dots\otimes\mathcal{A}_{\alpha_{s(n)}}=\mathcal{A}_{\alpha_1}\otimes\dots\otimes\mathcal{A}_{\alpha_n}$, ибо наше новое определение не зависит от упорядочения множества $\mathcal{J}$. В случае, когда каждое $\mathcal{A}_\alpha$ для $\alpha\in\mathcal{J}$ равно одному и тому же множеству $\mathcal{A}$, прямое произведение $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{J}}\mathcal{A}_\alpha$ обозначается через $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$. Таким образом, $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$ – это множество всех отображений множества $\mathcal{J}$ во множество $\mathcal{A}$.

Если $f\in\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{J}}\mathcal{A}_\alpha$ и $\beta\in\mathcal{J}$, через $f(\beta)$, как обычно, обозначается тот элемент $\mathcal{A}_\beta$, который отображение f ставит в соответствие элементу β (т.е. $x=f(\beta)$ равносильно $\langle\beta,x\rangle\in f$).

Пусть теперь задана совокупность $\mathfrak{A}_\alpha\ (\alpha\in\mathcal{J})$ алгебраических систем сигнатуры Ω. *Прямым произведением алгебраических систем* $\mathfrak{A}_\alpha\ (\alpha\in\mathcal{J})$ называется такая алгебраическая система $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω, что

(а) основное множество системы $\mathfrak{A}$ есть прямое произведение основных множеств систем $\mathfrak{A}_\alpha\ (\alpha\in\mathcal{J})$, т.е. $|\mathfrak{A}|=\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{J}}|\mathfrak{A}_\alpha|$;

(б) для любых ненульместного $\mathcal{R}\in D_1\Omega$ и $f_1,\dots,f_{\Omega(\mathcal{R})}\in|\mathfrak{A}|$ тогда и только тогда $\mathcal{R}^{\mathfrak{A}}(f_1,\dots,f_{\Omega(\mathcal{R})})$, когда $\mathcal{R}^{\mathfrak{A}_\alpha}(f_1(\alpha),\dots,f_{\Omega(\mathcal{R})}(\alpha))$ для каждого $\alpha\in\mathcal{J}$; для любого же нульместного $\mathcal{R}\in D_1\Omega$ тогда и только тогда $\mathcal{R}^{\mathfrak{A}}=\mathcal{U}$, когда $\mathcal{R}^{\mathfrak{A}_\alpha}=\mathcal{U}$ для каждого $\alpha\in\mathcal{J}$;

(в) для любых ненульместного $g\in D_2\Omega$ и $f_1,\dots,f_{\Omega(g)}\in|\mathfrak{A}|$ в качестве $g^{\mathfrak{A}}(f_1,\dots,f_{\Omega(g)})$ выбирается такой элемент из $|\mathfrak{A}|$, что $(g^{\mathfrak{A}}(f_1,\dots,f_{\Omega(g)}))(\alpha)=g^{\mathfrak{A}_\alpha}(f_1(\alpha),\dots,f_{\Omega(g)}(\alpha))$ для каждого $\alpha\in\mathcal{J}$; для любого же нульместного $g\in D_2\Omega$ в качестве $g^{\mathfrak{A}}$ выбирается такой элемент из $|\mathfrak{A}|$, что $g^{\mathfrak{A}}(\alpha)=g^{\mathfrak{A}_\alpha}$.

Понятно, что правила (а), (б), (в) однозначно определяют систему $\mathfrak{A}$. Через $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{J}}\mathfrak{A}_\alpha$ обозначают прямое произведение систем $\mathfrak{A}_\alpha\ (\alpha\in\mathcal{J})$.

Пример I. Пусть $\Omega=\langle\mathcal{P}^{(1)}\rangle$ и $\mathfrak{A}=\langle\mathcal{N};\mathcal{P}\rangle$ – такая алгебраическая система сигнатуры Ω, что $\mathcal{N}$ – это множество натуральных чисел, а $\mathcal{P}$ – это подмножество $\mathcal{N}$, состоящее из четных чисел. Тогда для счетного $\mathcal{J}$ основное множество системы $\mathfrak{A}^{\mathcal{J}}$ можно

представлять как множество последовательностей натуральных чисел, а основной предикат системы $\mathfrak{A}^{\mathcal{J}}$ в таком случае есть подмножество, состоящее из последовательностей, все элементы которых четны.

Пример 2. Пусть $\Omega=\langle\mathcal{P}^{(2)}\rangle$ и $\mathfrak{A}=\langle\mathcal{A};\mathcal{P}\rangle$, где $\mathcal{P}$ – линейный порядок на $\mathcal{A}$. Тогда прямое произведение $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$ представляет собой систему, основное множество которой есть $\mathcal{A}^2$, а основной предикат есть частичный порядок на $\mathcal{A}^2$ (см. ниже). Но в случае, когда множество $\mathcal{A}$ не является одноэлементным, этот предикат Q не является линейным порядком. Действительно, если $a,b\in\mathcal{A}$, $a\neq b$ и $\mathcal{P}(a,b)$, то $\langle\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\rangle\notin Q$ и $\langle\langle b,a\rangle,\langle a,b\rangle\rangle\notin Q$, ибо для $\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\in\mathcal{A}^2$ условие, что $\langle\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\rangle\in Q$, означает, что $\langle x_1,x_2\rangle\in\mathcal{P}$ и $\langle y_1,y_2\rangle\in\mathcal{P}$, а при $x_1=y_2=a$ и $y_1=x_2=b$ $(x_1=b,x_2=a)$ оба последних условия не выполняются. Тот факт, что Q есть частичный порядок на $\mathcal{A}^2$, проверяется так. Прежде всего ясно, что $\langle\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle\rangle\in Q$ для любых $a,b\in\mathcal{A}$. Значит, Q рефлексивно. Если $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in\mathcal{A}$ и $\langle\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle\rangle\in Q$, $\langle\langle a_2,b_2\rangle,\langle a_3,b_3\rangle\rangle\in Q$, то $\langle a_1,a_2\rangle,\langle a_2,a_3\rangle,\langle b_1,b_2\rangle,\langle b_2,b_3\rangle\in\mathcal{P}$ по определению Q и, значит, $\langle a_1,a_3\rangle,\langle b_1,b_3\rangle\in\mathcal{P}$. Поэтому $\langle\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_3,b_3\rangle\rangle\in Q$. Значит, Q транзитивен. Если $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathcal{A}$ и $\langle\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle\rangle\in Q$, $\langle\langle a_2,b_2\rangle,\langle a_1,b_1\rangle\rangle\in Q$, то $\langle a_1,a_2\rangle$, $\langle a_2,a_1\rangle,\langle b_1,b_2\rangle,\langle b_2,b_1\rangle\in\mathcal{P}$. Значит, $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$. Это доказывает антисимметричность Q. Итак, Q – частичный порядок.

Пример 3. Имеет место более общее утверждение. Пусть $\Omega=\langle\mathcal{P}^{(2)}\rangle$ и $\mathfrak{A}_\alpha=\langle\mathcal{A}_\alpha;\mathcal{P}^{\mathfrak{A}_\alpha}\rangle\ (\alpha\in\mathcal{J})$ – совокупность частичных порядков или отношений эквивалентности. Тогда $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{J}}\mathfrak{A}_\alpha$ есть соответственно частичный порядок или отношение эквивалентности. Приведем доказательство для случая отношений эквивалентности. Пусть $\mathfrak{A}=\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{J}}\mathfrak{A}_\alpha$. Если $f_1,f_2,f_3\in|\mathfrak{A}|$ и $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}}(f_1,f_2)$, $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}}(f_2,f_3)$, то $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}_\alpha}(f_1(\alpha),f_2(\alpha))$, $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}_\alpha}(f_2(\alpha),f_3(\alpha))$ имеют место для каждого $\alpha\in\mathcal{J}$. Значит, $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}_\alpha}(f_1(\alpha),f_3(\alpha))$ для каждого $\alpha\in\mathcal{J}$ и $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}}(f_1,f_3)$. Это означает, что $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}}$ транзитивен. Если $f\in|\mathfrak{A}|$, то $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}_\alpha}(f(\alpha),f(\alpha))$ для каждого $\alpha\in\mathcal{J}$ и, значит, $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}}(f,f)$ и $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}}$ рефлексивен. Если $f_1,f_2\in|\mathfrak{A}|$ и $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}}(f_1,f_2)$, то $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}_\alpha}(f_1(\alpha),f_2(\alpha))$ для каждого $\alpha\in\mathcal{J}$. Значит, $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}_\alpha}(f_2(\alpha),f_1(\alpha))$ для каждого $\alpha\in\mathcal{J}$ и $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}}(f_2,f_1)$. Значит, $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}}$ симметричен. Итак, $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}}$ – отношение эквивалентности.

В действительности, условия симметричности, рефлексивности, антисимметричности и транзитивности записываются в виде так называемых *хорновских* формул, а сохранение хорновских формул при взятии не только прямых, но и более общих так называемых фильтрованных произведений будет установлено позднее. Тот факт, что линейный порядок не сохраняется при взятии прямых произведений, означает, что условия линейного порядка нельзя уже записать в виде хорновских формул.

Пусть каждому $\alpha \in J$ поставлена в соответствие алгебраическая система $\mathfrak{A}_\alpha$ сигнатуры Ω, и пусть $\mathcal{D}$ – фильтр на J (см. § 12). Пусть $\mathcal{A} = \prod_{\alpha \in J} |\mathfrak{A}_\alpha|$. На множестве $\mathcal{A}$ рассмотрим отношение эквивалентности $\sim_{\mathcal{D}}$, полагая для $a, b \in \mathcal{A}$

$$a \sim_{\mathcal{D}} b \Leftrightarrow \{\alpha \in J \mid a(\alpha) = b(\alpha)\} \in \mathcal{D}.$$

Для $a \in \mathcal{A}$ через $a\mathcal{D}$ обозначим класс эквивалентности, содержащий a. Множество всех классов эквивалентности обозначим через $\mathcal{D}\text{-}\mathrm{prod}\,|\mathfrak{A}_\alpha|$.

Наша ближайшая цель определить, что понимается под *фильтрованным произведением систем* $\mathfrak{A}_\alpha$ $(\alpha \in J)$ по фильтру $\mathcal{D}$.

Прежде всего договоримся, что фильтрованным произведением систем $\mathfrak{A}_\alpha$ $(\alpha \in J)$ по фильтру $\mathcal{D}$ является такая алгебраическая система $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω, что $|\mathfrak{A}| = \mathcal{D}\text{-}\mathrm{prod}\,|\mathfrak{A}_\alpha|$.

Нужно еще объяснить, какие предикаты и операции соответствуют в системе $\mathfrak{A}$ символам предикатов и операций из $D\Omega$.

Для такого $R \in D_1\Omega$, что $\Omega(R) > 0$, и любых $a_1, \ldots, a_{\Omega(R)} \in |\mathfrak{A}|$ пусть тогда и только тогда $R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{\Omega(R)})$, когда существуют такие $b_1 \in a_1, \ldots, b_{\Omega(R)} \in a_{\Omega(R)}$, что $\{\beta \in J \mid R^{\mathfrak{A}_\beta}(b_1(\beta), \ldots, b_{\Omega(R)}(\beta))\} \in \mathcal{D}$. Для такого $R \in D_1\Omega$, что $\Omega(R) = 0$, мы полагаем $R^{\mathfrak{A}} = \mathcal{U}$, если $\{\beta \in J \mid R^{\mathfrak{A}_\beta} = \mathcal{U}\} \in \mathcal{D}$, и полагаем $R^{\mathfrak{A}} = \Lambda$, если $\{\beta \in J \mid R^{\mathfrak{A}_\beta} = \mathcal{U}\} \notin \mathcal{D}$.

Для такого $f \in D_2\Omega$, что $\Omega(f) > 0$, и любых $a_1, \ldots, a_{\Omega(f)} \in |\mathfrak{A}|$ пусть

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{\Omega(f)}) = b\mathcal{D},$$

где $b \in \prod_{i \in J} |\mathfrak{A}_i|$ определяется следующим образом. Выбираем произвольным образом $b_1 \in a_1, \ldots, b_{\Omega(f)} \in a_{\Omega(f)}$ и полагаем

$$b(\beta) = f^{\mathfrak{A}_\beta}(b_1(\beta), \ldots, b_{\Omega(f)}(\beta))$$

для любого $\beta \in J$. Для такого $f \in D_2\Omega$, что $\Omega(f) = 0$, пусть $f^{\mathfrak{A}} = b\mathcal{D}$, где $b(\beta) = f^{\mathfrak{A}_\beta}$ для любого $\beta \in J$.

Нужно показать, что определение $f^{\mathfrak{A}}$ корректно. Ограничимся случаем, когда $\Omega(f) > 0$. Пусть $d_1\mathcal{D} = b_1\mathcal{D}, \ldots, d_{\Omega(f)}\mathcal{D} = b_{\Omega(f)}\mathcal{D}$.

Пусть $d(\beta) = f^{\mathfrak{A}_\beta}(d_1(\beta), \ldots, d_{\Omega(f)}(\beta))$ для любого $\beta \in J$. Пусть $B = \bigcap_{j=1}^{\Omega(f)} \{\beta \in J \mid b_j(\beta) = d_j(\beta)\}$. Тогда $B \in \mathcal{D}$. Но $d(\beta) = b(\beta)$ для $\beta \in B$. Значит, $\{\beta \in J \mid b(\beta) = d(\beta)\} \in \mathcal{D}$. Отсюда $b \sim_{\mathcal{D}} d$.

Проверим также, что для такого $R \in D_1\Omega$, что $\Omega(R) > 0$, и любых $a_1, \ldots, a_{\Omega(R)} \in \prod_{\alpha \in J} |\mathfrak{A}_\alpha|$

$$R^{\mathfrak{A}}(a_1\mathcal{D}, \ldots, a_{\Omega(R)}\mathcal{D}) \Leftrightarrow \{\alpha \in J \mid R^{\mathfrak{A}_\alpha}(a_1(\alpha), \ldots, a_{\Omega(R)}(\alpha))\} \in \mathcal{D}.$$

Пусть $R^{\mathfrak{A}}(a_1\mathcal{D}, \ldots, a_{\Omega(R)}\mathcal{D})$. Тогда существуют такие $b_1, \ldots, b_{\Omega(R)}$ из $\prod_{\alpha \in J} |\mathfrak{A}_\alpha|$, что $b_1\mathcal{D} = a_1\mathcal{D}, \ldots, b_{\Omega(R)}\mathcal{D} = a_{\Omega(R)}\mathcal{D}$ и $\{\alpha \in J \mid R^{\mathfrak{A}_\alpha}(b_1(\alpha), \ldots, b_{\Omega(R)}(\alpha))\} \in \mathcal{D}$. Пусть $B = \bigcap_{k=1}^{\Omega(R)} \{\alpha \in J \mid b_k(\alpha) = a_k(\alpha)\}$. Тогда $B \in \mathcal{D}$. Кроме того,

$$B \cap \{\alpha \in J \mid R^{\mathfrak{A}_\alpha}(b_1(\alpha), \ldots, b_{\Omega(R)}(\alpha))\} \subseteq \{\alpha \in J \mid R^{\mathfrak{A}_\alpha}(a_1(\alpha), \ldots, a_{\Omega(R)}(\alpha))\}.$$

Значит, $\{\alpha \in J \mid R^{\mathfrak{A}_\alpha}(a_1(\alpha), \ldots, a_{\Omega(R)}(\alpha))\} \in \mathcal{D}$.

Аналогично проверяется для каждого $f \in D_2\Omega$, $\Omega(f) > 0$, и любых $a_1, \ldots, a_{\Omega(f)}, a \in \prod_{\alpha \in J} |\mathfrak{A}_\alpha|$ соотношение

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1\mathcal{D}, \ldots, a_{\Omega(f)}\mathcal{D}) = a\mathcal{D} \Leftrightarrow \{\alpha \in J \mid f^{\mathfrak{A}_\alpha}(a_1(\alpha), \ldots, a_{\Omega(f)}(\alpha)) = a(\alpha)\} \in \mathcal{D}.$$

Если же $f \in D_2\Omega$ и $\Omega(f) = 0$, то для любого $a \in \prod_{\alpha \in J} |\mathfrak{A}_\alpha|$

$$f^{\mathfrak{A}} = a\mathcal{D} \Leftrightarrow \{\alpha \in J \mid f^{\mathfrak{A}_\alpha} = a(\alpha)\} \in \mathcal{D}.$$

Описанная алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle |\mathfrak{A}|; R^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}} \rangle_{R \in D_1\Omega, f \in D_2\Omega}$ сигнатуры Ω, как уже упоминалось, называется *фильтрованным произведением систем* $\mathfrak{A}_\alpha$ $(\alpha \in J)$ по фильтру $\mathcal{D}$ и обозначается через $\mathcal{D}\text{-}\mathrm{prod}\,\mathfrak{A}_\alpha$. Если $\mathcal{D}$ – ультрафильтр, фильтрованное произведение систем $\mathfrak{A}_\alpha$ $(\alpha \in J)$ по фильтру $\mathcal{D}$ называется ультрапроизведением.

Пример 4. Пусть фильтр $\mathcal{D}$ на множестве J состоит из одного множества J. Тогда отношение $\sim_{\mathcal{D}}$ является отношением равенства. Действительно, для любых алгебраических систем $\mathfrak{A}_\alpha$ $(\alpha \in J)$ и любых $a, b \in \prod_{\alpha \in J} |\mathfrak{A}_\alpha|$

$$a \sim_{\mathcal{D}} b \Leftrightarrow \{\alpha \in J \mid a(\alpha) = b(\alpha)\} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \{\alpha \in J \mid a(\alpha) = b(\alpha)\} = J \Leftrightarrow a = b.$$

Так же просто проверяется, что отображение $\prod_{\alpha \in J} |\mathfrak{A}_\alpha|$ на $\mathcal{D}\text{-}\mathrm{prod}\,|\mathfrak{A}_\alpha|$, переводящее a в $a\mathcal{D}$, является в этом случае изоморфизмом $\mathfrak{A} = \prod_{\alpha \in J} \mathfrak{A}_\alpha$ на $\mathfrak{L} = \mathcal{D}\text{-}\mathrm{prod}\,\mathfrak{A}_\alpha$. Например, пусть R – n-местный предикатный символ из $D_1\Omega$ и $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{\alpha\in J} |\mathfrak{A}_\alpha|$. Тогда

$$R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \{\alpha\in J \mid R^{\mathfrak{A}_\alpha}(a_1(\alpha), \ldots, a_n(\alpha))\} = J \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{\alpha\in J \mid R^{\mathfrak{A}_\alpha}(a_1(\alpha), \ldots, a_n(\alpha))\} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}(a_1\mathcal{D}, \ldots, a_n\mathcal{D}).$$

Обычно отождествляют $\mathcal{D}\text{-}prod\,\mathfrak{A}_\alpha$ с $\prod_{\alpha\in J}\mathfrak{A}_\alpha$ в случае, когда фильтр $\mathcal{D}$ состоит из одного множества J.

П р и м е р 5. Пусть $\alpha\in J$ и $\mathcal{D}=\mathcal{D}_\alpha$ - главный фильтр на J, состоящий из тех и только тех подмножеств множества J, которые содержат α. Тогда система $\mathcal{D}\text{-}prod\,\mathfrak{A}_\beta$ изоморфна системе $\mathfrak{A}_\alpha$. Нужным изоморфизмом является такое отображение h множества $\mathcal{D}\text{-}prod\,|\mathfrak{A}_\beta|$ во множество $|\mathfrak{A}_\alpha|$, что $h(a\mathcal{D}) = a(\alpha)$ для каждого $a \in \prod_{\beta\in J}|\mathfrak{A}_\beta|$. Это отображение h корректно определено, ибо если $a\mathcal{D} = a_1\mathcal{D}$; $a, a_1 \in \prod_{\beta\in J}|\mathfrak{A}_\beta|$, то $\{\beta\in J \mid a(\beta) = a_1(\beta)\} \in \mathcal{D}$. Значит, $\alpha \in \{\beta\in J \mid a(\beta) = a_1(\beta)\}$ и $a(\alpha) = a_1(\alpha)$. Так же просто проверяется, что h - изоморфизм $\mathcal{D}\text{-}prod\,\mathfrak{A}_\beta$ на $\mathfrak{A}_\alpha$.

Главные результаты этого параграфа - теоремы Лося и Хорна - доказываются индукцией по рангу формулы. Базис и индукционный шаг содержатся в леммах I-4 и 6.

В леммах I-4 используются следующие обозначения: $\mathfrak{A}_\alpha (\alpha\in J)$ - алгебраические системы сигнатуры Ω; $\Phi = \Phi(x, y_1, \ldots, y_n)$, $\Phi_1 = \Phi_1(y_1, \ldots, y_n)$, $\Phi_2 = \Phi_2(y_1, \ldots, y_n)$ - формулы сигнатуры Ω; $b_1, \ldots, b_n \in \prod_{i\in J}|\mathfrak{A}_i|$; $\bar b = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle$; $\Phi(x, \bar b\mathcal{D})$ есть $\Phi(x, b_1\mathcal{D}, \ldots, b_n\mathcal{D})$; $\Phi(x, \bar b(\alpha))$ есть $\Phi(x, b_1(\alpha), \ldots, b_n(\alpha))$; $\Phi_j(\bar b\mathcal{D})$ есть $\Phi_j(b_1\mathcal{D}, \ldots, b_n\mathcal{D})$ и $\Phi_j(\bar b(\alpha))$ есть $\Phi_j(b_1(\alpha), \ldots, b_n(\alpha))$ для $j = 1, 2$.

Пусть $\mathcal{D}$ - фильтр на множестве J, $\Phi = \Phi(y_1, \ldots, y_n)$ - формула сигнатуры Ω. Мы скажем, что формула Φ *у с л о в н о ф и л ь т р у е т с я* по $\mathcal{D}$, если для любых алгебраических систем $\mathfrak{A}_\alpha (\alpha\in J)$ сигнатуры Ω и любых $b_1, \ldots, b_n \in \prod_{\alpha\in J}|\mathfrak{A}_\alpha|$, если $\{\alpha\in J \mid \mathfrak{A}_\alpha \models \Phi(b_1(\alpha), \ldots, b_n(\alpha))\} \in \mathcal{D}$, то $(\mathcal{D}\text{-}prod\,\mathfrak{A}_\alpha) \models \Phi(b_1\mathcal{D}, \ldots, b_n\mathcal{D})$. Мы скажем, что Φ *ф и л ь т р у е т с я* по $\mathcal{D}$, если для любых алгебраических систем $\mathfrak{A}_\alpha (\alpha\in J)$ сигнатуры Ω и любых $b_1, \ldots, b_n \in \prod_{\alpha\in J}|\mathfrak{A}_\alpha|$

$$\{\alpha\in J \mid \mathfrak{A}_\alpha \models \Phi(b_1(\alpha), \ldots, b_n(\alpha))\} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow (\mathcal{D}\text{-}prod\,\mathfrak{A}_\alpha) \models \Phi(b_1\mathcal{D}, \ldots, b_n\mathcal{D}).$$

Из этих определений сразу получается, что если Φ фильтруется по $\mathcal{D}$, то Φ и условно фильтруется по $\mathcal{D}$.

Л е м м а I. Если формулы Φ, Φ_1 и Φ_2 условно фильтруются по фильтру $\mathcal{D}$, то формулы $\Phi_1 \wedge \Phi_2$, $(\exists x)\Phi$ и $(\forall x)\Phi$ тоже условно фильтруются по фильтру $\mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\mathcal{B} = \{\alpha\in J \mid \mathfrak{A}_\alpha \models (\Phi_1\wedge\Phi_2)(\bar b(\alpha))\} \in \mathcal{D}.$$

Тогда $\mathcal{B}_j = \{\alpha\in J \mid \mathfrak{A}_\alpha \models \Phi_j(\bar b(\alpha))\} \in \mathcal{D}$ для $j = 1, 2$. Из условий фильтруемости Φ_1 и Φ_2 следует, что

$$(\mathcal{D}\text{-}prod\,\mathfrak{A}_\alpha) \models \Phi_1(\bar b\mathcal{D}),\quad (\mathcal{D}\text{-}prod\,\mathfrak{A}_\alpha) \models \Phi_2(\bar b\mathcal{D}).$$

Значит,

$$(\mathcal{D}\text{-}prod\,\mathfrak{A}_\alpha) \models (\Phi_1\wedge\Phi_2)(\bar b\mathcal{D}).$$

Это доказывает условную фильтруемость $\Phi_1\wedge\Phi_2$. Условная фильтруемость $(\forall x)\Phi$ доказывается аналогично.

Пусть

$$C = \{\alpha\in J \mid \mathfrak{A}_\alpha \models (\exists x)\Phi(x, \bar b(\alpha))\} \in \mathcal{D}.$$

Для каждого $\beta\in C$ в качестве $a(\beta)$ выбираем такой элемент из $|\mathfrak{A}_\beta|$, что $\mathfrak{A}_\beta \models \Phi(a(\beta), \bar b(\beta))$. Пусть $a(\beta)$ - произвольный элемент из $|\mathfrak{A}_\beta|$, если $\beta \in J\setminus C$. Тогда a является отображением J в $\bigcup_{\beta\in J}|\mathfrak{A}_\beta|$ и $a(\beta)\in|\mathfrak{A}_\beta|$ для $\beta\in J$. Значит, $a \in \prod_{\beta\in J}|\mathfrak{A}_\beta|$. Пусть $C_1 = \{\alpha\in J \mid \mathfrak{A}_\alpha \models \Phi(a(\alpha), \bar b(\alpha))\}$. Из выбора a следует, что $C_1 \supseteq C$. Поэтому $C_1 \in \mathcal{D}$. Из условной фильтруемости Φ следует, что

$$(\mathcal{D}\text{-}prod\,\mathfrak{A}_\alpha) \models \Phi(a\mathcal{D}, \bar b\mathcal{D}).$$

Тем более

$$(\mathcal{D}\text{-}prod\,\mathfrak{A}_\alpha) \models (\exists x)\Phi(x, \bar b\mathcal{D}).$$

Значит, $(\exists x)\Phi$ условно фильтруется.

ЛЕММА 2. Если формулы Φ, Φ_1 и Φ_2 фильтруются по фильтру $\mathcal{D}$, то формулы $\Phi_1\wedge\Phi_2$ и $(\exists x)\Phi$ тоже фильтруются по фильтру $\mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условная фильтруемость этих формул уже установлена.

Если $(\mathcal{D}\text{-}prod\,\mathfrak{A}_\alpha) \models (\Phi_1\wedge\Phi_2)(\bar b\mathcal{D})$, то $(\mathcal{D}\text{-}prod\,\mathfrak{A}_\alpha) \models \Phi_j(\bar b\mathcal{D})$ для $j = 1, 2$. Тогда из фильтруемости Φ_1 и Φ_2 следует, что $\mathcal{B}_j \in \mathcal{D}$ для $j = 1, 2$. Значит, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \in \mathcal{D}$. Это доказывает фильтруемость $\Phi_1\wedge\Phi_2$.

Если $(\mathcal{D}\text{-}prod\,\mathfrak{A}_\alpha) \models (\exists x)\Phi(x, \bar b\mathcal{D})$, то существует такой $a \in \prod_{\alpha\in J}|\mathfrak{A}_\alpha|$, что $(\mathcal{D}\text{-}prod\,\mathfrak{A}_\alpha) \models \Phi(a\mathcal{D}, \bar b\mathcal{D})$. Из фильтруемости Φ следует, что $C_1 \in \mathcal{D}$. Ясно, что $C \supseteq C_1$. Поэтому $C \in \mathcal{D}$. Это доказывает фильтруемость $(\exists x)\Phi$.

ЛЕММА 3. Если Φ_1 фильтруется по ультрафильтру $\mathcal{D}$, то $\neg\Phi_1$ тоже фильтруется по ультрафильтру $\mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(\mathcal{D}\text{-}prod\ \mathfrak{A}_\alpha) \models \neg\Phi_1(\bar{e}\mathcal{D}) \Leftrightarrow \{\alpha\in J \mid \mathfrak{A}_\alpha \models \Phi_1(\bar{e}(\alpha))\} \notin \mathcal{D} \Leftrightarrow \{\alpha\in J \mid \mathfrak{A}_\alpha \models \neg\Phi_1(\bar{e}(\alpha))\}\in\mathcal{D}$.

ЛЕММА 4. Если формула Φ_1 фильтруется по $\mathcal{D}$, а формула Φ_2 условно фильтруется по $\mathcal{D}$, то $\neg\Phi_1$ и $\Phi_1\to\Phi_2$ тоже условно фильтруются по $\mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\alpha\in J \mid \mathfrak{A}_\alpha \models \neg\Phi_1(\bar{e}(\alpha))\}\in\mathcal{D}$. Тогда $\{\alpha\in J \mid \mathfrak{A}_\alpha \models \Phi_1(\bar{e}(\alpha))\}\notin\mathcal{D}$. Значит, $\mathfrak{A} \models \neg\Phi_1(\bar{e}\mathcal{D})$. Это доказывает условную фильтруемость $\neg\Phi_1$.

Пусть теперь

$$\mathcal{B} = \{\alpha\in J \mid \mathfrak{A}_\alpha \models (\Phi_1\to\Phi_2)(\bar{e}(\alpha))\}\in\mathcal{D},$$
$$\mathcal{B}_j = \{\alpha\in J \mid \mathfrak{A}_\alpha \models \Phi_j(\bar{e}(\alpha))\} \quad (j=1,2).$$

Пусть $(\mathcal{D}\text{-}prod\ \mathfrak{A}_\alpha)\models\Phi_1(\bar{e}\mathcal{D})$. Тогда из фильтруемости Φ_1 следует, что $\mathcal{B}_1\in\mathcal{D}$.
Если $\alpha\in\mathcal{B}\cap\mathcal{B}_1$, то $\alpha\in\mathcal{B}_2$. Значит, $\mathcal{B}\cap\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{B}_2$ и $\mathcal{B}_2\in\mathcal{D}$. Из условной фильтруемости Φ_2 следует, что $(\mathcal{D}\text{-}prod\ \mathfrak{A}_\alpha)\models\Phi_2(\bar{e}\mathcal{D})$. Итак, $(\mathcal{D}\text{-}prod\ \mathfrak{A}_\alpha)\models(\Phi_1\to\Phi_2)(\bar{e}\mathcal{D})$. Мы проверили, что формула $\Phi_1\to\Phi_2$ условно фильтруется.

ЛЕММА 5. Каждая атомная формула сигнатуры Ω эквивалентна формуле вида

$$(\exists y_1)\ldots(\exists y_s)\Phi', \tag{I}$$

где Φ' есть конъюнкция формул вида

$$\mathcal{P}(z_1,\ldots,z_n),\ z_1=z_0,\ Q,\ f(z_1,\ldots,z_n)=z_0,\ g=z_0, \tag{2}$$

где $z_1,\ldots,z_n,z_0$ – переменные; $\mathcal{P},Q\in D_1\Omega$; $\Omega(\mathcal{P})=n>0$, $\Omega(Q)=0$; $f,g\in D_2\Omega$; $\Omega(f)=n>0$; $\Omega(g)=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Атомная формула вида $\mathcal{P}(t_1,\ldots,t_n)$, где $\mathcal{P}\in D_1\Omega$, $\Omega(\mathcal{P})=n>0$, а $t_1,\ldots,t_n$ – термы, эквивалентна формуле

$$(\exists y_1)\ldots(\exists y_n)(\mathcal{P}(y_1,\ldots,y_n)\wedge y_1=t_1\wedge\ldots\wedge y_n=t_n),$$

а формула $t_1=t_2$, где t_1,t_2 – термы, эквивалентна формуле

$$(\exists y)(y=t_1\wedge y=t_2).$$

Поэтому достаточно преобразовать к виду (I) формулу вида $y=t$, где y – переменная, а t – терм. Это сделается индукцией по рангу терма. Если ранг t равен 0, доказывать нечего. Если $r(t)>0$, то либо t есть $f(u_1,\ldots,u_n)$, где $f\in D_2\Omega$, $\Omega(f)=n$, а $u_1,\ldots,u_n$

термы, либо t есть g, где $g\in D_2\Omega$. Во втором случае доказывать нечего, а в первом случае $y=t$ эквивалентна

$$(\exists y_1)\ldots(\exists y_n)(y=f(y_1,\ldots,y_n)\wedge y_1=u_1\wedge\ldots\wedge y_n=u_n).$$

ЛЕММА 6. Каждая атомная формула фильтруется по любому фильтру.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для формул (2) их фильтруемость по любому фильтру установлена при определении фильтрованного произведения. Из леммы 2 следует, что фильтруются по любому фильтру конъюнкции формул вида (2) и формулы, получающиеся из таких конъюнкций навешиванием кванторов существования. С другой стороны, если одна из эквивалентных формул фильтруется по фильтру $\mathcal{D}$, то другая тоже фильтруется по $\mathcal{D}$. Значит, атомные формулы фильтруются по любому фильтру. Лемма 6 доказана.

Центральной в теории ультрапроизведений является следующая

ТЕОРЕМА 10 (Лось). Всякая формула сигнатуры Ω фильтруется по любому ультрафильтру.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Атомные формулы фильтруются по любому фильтру. Если формулы Φ_1 и Φ_2 фильтруются по ультрафильтру, то формулы $\neg\Phi_1$, $(\exists x)\Phi_1$, $\Phi_1\wedge\Phi_2$ тоже фильтруются по этому ультрафильтру (леммы 2 и 3). Далее замечаем, что $\Phi_1\to\Phi_2$ эквивалентна $\neg\Phi_1\vee\Phi_2$ и $\Phi_1\vee\Phi_2$ эквивалентна $\neg(\neg\Phi_1\wedge\neg\Phi_2)$. Это показывает, что если Φ_1 и Φ_2 фильтруются по ультрафильтру, то $\Phi_1\vee\Phi_2$ и $\Phi_1\to\Phi_2$ тоже фильтруются по этому ультрафильтру. Наконец, $(\forall x)\Phi_1$ эквивалентна $\neg(\exists x)\neg\Phi_1$. Значит, если Φ_1 фильтруется по ультрафильтру, то $(\forall x)\Phi_1$ тоже фильтруется по этому ультрафильтру. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Замкнутая формула Φ сигнатуры Ω тогда и только тогда истинна в ультрапроизведении систем $\mathfrak{A}_\alpha(\alpha\in J)$ сигнатуры Ω по ультрафильтру $\mathcal{D}$, когда множество тех $\alpha\in J$, что Φ истинна в $\mathfrak{A}_\alpha$, принадлежит $\mathcal{D}$. В частности, если Φ истинна во всех системах $\mathfrak{A}_\alpha(\alpha\in J)$, то Φ истинна и в их ультрапроизведении по любому ультрафильтру $\mathcal{D}$ на J.

Скажем, что формула Φ сигнатуры Ω является х о р н о в с к о й, если она получается из формул вида $\Phi_1\to\Phi_2$, $\neg\Phi_1$, где Φ_2 – атомная формула, а Φ_1 – конъюнкция атомных формул, при помощи конъюнкций, кванторов общности и кванторов существования. Точнее, выражения вида $\Phi_1\to\Phi_2$ и $\neg\Phi_1$, где Φ_1 – конъюнкция атомных формул сигнатуры Ω, а Φ_2 – атомная формула сигнатуры Ω, мы называем хорновскими формулами сигнатуры Ω. Если Φ_1,Φ_2 – такие хорновские формулы сигнатуры Ω, что $\Phi_1\wedge\Phi_2$ – формула сигнатуры Ω, то

$\Phi_1 \wedge \Phi_2$ – тоже хорновская формула сигнатуры Ω. Если Φ – хорновская формула сигнатуры Ω, не содержащая переменной x связанно, то $(\exists x)\Phi$ и $(\forall x)\Phi$ – хорновские формулы сигнатуры Ω. Других хорновских формул сигнатуры Ω, кроме тех, которые получаются по указанным выше правилам, нет.

Пример 6. Условия симметричности, рефлексивности, транзитивности, антисимметричности записываются в виде хорновских формул. Формула $(\forall x)(\forall y)\,(P(x,y) \vee P(y,x))$ не является хорновской.

ТЕОРЕМА II (Хорн). Всякая хорновская формула условно фильтруется по любому фильтру.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы I,2,4,6.

Долгое время оставался открытым вопрос о том, какие формулы сохраняются при прямых произведениях. Существовала даже гипотеза, что таковыми являются в точности формулы, эквивалентные хорновским. Однако Морел и Чэн Чен-чунь построили пример формулы, сохраняющейся при прямых произведениях, но не сохраняющейся при некотором фильтрованном произведении и, значит, не эквивалентной никакой хорновской формуле. Аналогичный пример мы приводим в § 5 Дополнения. Важная теорема Кислера, наконец, совсем прояснила здесь дело. Оказалось, что формула Φ тогда и только тогда эквивалентна хорновской, когда она условно фильтруется по любому фильтру.

Если все $\mathfrak{A}_\alpha\,(\alpha \in J)$ равны одной и той же системе $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{D}\text{-prod}\,\mathfrak{A}_\alpha$ называется фильтрованной степенью $\mathfrak{A}$ по $\mathfrak{D}$ и обозначается через $\mathfrak{A}^{\mathfrak{D}}$. Если $\mathfrak{D}$ – ультрафильтр, $\mathfrak{A}^{\mathfrak{D}}$ называется ультрастепенью $\mathfrak{A}$. Аналогично, для множеств $A_\alpha\,(\alpha \in J)$, равных одному и тому же множеству A, вместо $\mathfrak{D}\text{-prod}\,A_\alpha$ пишем $A^{\mathfrak{D}}$.

Диагональным называется такое отображение h A в $A^{\mathfrak{D}}$, что $ha = h'(a)\mathfrak{D}$ для каждого $a \in A$, где $(h'(a))(\alpha) = a$ для каждого $a \in A$ и $\alpha \in J$. Очевидно, что диагональное отображение разнозначно.

ТЕОРЕМА I2. Для любого ультрафильтра $\mathfrak{D}$ на множестве J и любой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω диагональное отображение h $|\mathfrak{A}|$ в $|\mathfrak{A}|^{\mathfrak{D}}$ является изоморфизмом $\mathfrak{A}$ на элементарную подсистему системы $\mathfrak{A}^{\mathfrak{D}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную формулу $\Phi = \Phi(y_1,\dots,y_n)$ сигнатуры Ω и покажем, что для любых $a_1,\dots,a_n \in |\mathfrak{A}|$

$$\mathfrak{A} \models \Phi(a_1,\dots,a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}^{\mathfrak{D}} \models \Phi(ha_1,\dots,ha_n). \qquad (3)$$

Тогда, взяв в качестве Φ атомные формулы, получим, что h – изоморфизм. Из абстрактности логики первого порядка после этого получим, что истинность $\Phi(a_1,\dots,a_n)$ в $\mathfrak{A}$ равносильна истинности $\Phi(ha_1,\dots,ha_n)$ в образе $\mathfrak{A}$ при отображении h. Это вместе с (3) уже и будет означать, что образ $\mathfrak{A}$ при h является элементарной подсистемой $\mathfrak{A}^{\mathfrak{D}}$.

Пусть $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1,\dots,a_n)$. Тогда $\{\alpha \in J \mid \mathfrak{A} \models \Phi((h'(a_1))(\alpha),\dots,(h'(a_n))(\alpha))\} = J \in \mathfrak{D}$ и, по теореме Лося, $\mathfrak{A}^{\mathfrak{D}} \models \Phi(ha_1,\dots,ha_n)$.

Теорема доказана.

§ 20. Теорема компактности

Напомним, что алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется моделью замкнутой формулы Φ сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$, если Φ истинна в $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ называется моделью совокупности замкнутых формул Σ сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$, если $\mathfrak{A}$ является моделью каждой $\Phi \in \Sigma$, т.е. если все формулы из Σ истинны в $\mathfrak{A}$.

В математической логике одной из наиболее фундаментальных является следующая теорема А.И.Мальцева:

если Σ – такая совокупность замкнутых формул сигнатуры Ω, что каждая конечная подсовокупность совокупности Σ имеет модель, то имеет модель и вся совокупность Σ.

Обычно эту теорему называют теоремой компактности или локальной теоремой.

Разнообразные применения она нашла в алгебре при доказательстве так называемых локальных теорем. На ней основываются также многие главные результаты, полученные в теории моделей, как в прошлом, так и в самое последнее время. Мы приводим несколько примеров применения этой теоремы.

Техника ультрапроизведений позволяет сформулировать теорему компактности с некоторым уточнением.

ТЕОРЕМА I3. Пусть Σ – совокупность замкнутых формул сигнатуры Ω. Если каждая конечная подсовокупность Δ совокупности Σ имеет модель $\mathfrak{A}_\Delta$, то Σ имеет модель, которая является ультрапроизведением систем $\mathfrak{A}_\Delta\,(\Delta \subseteq \Sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J – множество всех конечных подмножеств множества Σ. По условию для каждого $\Delta \in J$ имеется модель $\mathfrak{A}_\Delta$. Для каждого $\Delta \in J$ пусть $\widetilde{\Delta} = \{\Delta' \in J \mid \Delta \subseteq \Delta'\}$. Ясно, что $\widetilde{\Delta} \subseteq J$. Пусть $E = \{\widetilde{\Delta} \mid \Delta \in J\}$. Покажем, что пересечение любого конечного числа множеств из E непусто. Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_n \in J$. Тогда пересечение $\tilde{\Delta}_1 \cap \ldots \cap \tilde{\Delta}_n$ содержит множество $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$, принадлежащее J. Теперь используем материал § I2. Существует ультрафильтр $\mathcal{D}$ на J, содержащий E.

Покажем, что $(\mathcal{D}\text{-}prod\,\mathfrak{A}_\Delta) \models \Phi$ для $\Phi \in \Sigma$. Пусть $\Phi \in \Sigma$. Из теоремы Лося следует, что достаточно проверить, что $\{\Delta \in J \mid \mathfrak{A}_\Delta \models \Phi\} \in \mathcal{D}$. Пусть $\Delta_1 = \{\Phi\}$. Тогда $\tilde{\Delta}_1 \in \mathcal{D}$. Пусть $\Delta \in \tilde{\Delta}_1$. Тогда $\Delta_1 \subseteq \Delta$ и, значит, $\mathfrak{A}_\Delta \models \Psi$ для $\Psi \in \Delta_1$. Последнее равносильно тому, что $\mathfrak{A}_\Delta \models \Phi$. Итак, $\tilde{\Delta}_1 \subseteq \{\Delta \in J \mid \mathfrak{A}_\Delta \models \Phi\}$. Значит, $\{\Delta \in J \mid \mathfrak{A}_\Delta \models \Phi\} \in \mathcal{D}$. Теорема доказана.

Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω называется *моделью* совокупности формул Σ сигнатуры Ω, если переменным, входящим свободно хотя бы в одну из формул из Σ, можно приписать такие значения из $|\mathfrak{A}|$, что все формулы из Σ при этих значениях истинны в $\mathfrak{A}$. Справедлива теорема компактности и в следующей форме:

> если Σ - такая совокупность формул сигнатуры Ω, что каждая конечная подсовокупность совокупности Σ имеет модель, то имеет модель и Σ.

Для доказательства надо каждую формулу $\Phi \in \Sigma$ переделать в формулу Φ' следующим образом. Пусть пересечение $\{c_n \mid n \geqslant 0\} \cap D_2\Omega$ пусто. Если переменная x_n входит в Φ свободно, то заменяем каждое вхождение x_n на вхождение символа выделенного элемента c_n. Проделываем эту операцию для каждой свободной переменной формулы Φ и через Φ' обозначаем формулу, которая получится. Пусть $\Sigma' = \{\Phi' \mid \Phi \in \Sigma\}$. Ясно, что Σ' - совокупность замкнутых формул сигнатуры $\langle \Omega, c_n \rangle_{n \geqslant 0}$, каждая конечная подсовокупность которой имеет модель. Значит, имеет модель и Σ'. Если $\mathfrak{A}$ - модель Σ', а x_n приписать значение $c_n^{\mathfrak{A}}$, то все формулы из Σ будут истинны в $\mathfrak{A}$ при этих значениях переменных. Поэтому $\mathfrak{A} \upharpoonright \Omega$ - модель Σ.

Если $\mathcal{K}$ есть класс всех моделей для Σ, то пишут: $\mathcal{K} = \mathcal{M}od(\Sigma)$. Если $\mathcal{K}$ - произвольный класс алгебраических систем одной сигнатуры Ω, через $\mathcal{T}h(\mathcal{K})$ обозначают совокупность всех замкнутых формул сигнатуры Ω, истинных на всех системах из $\mathcal{K}$, и называют $\mathcal{T}h(\mathcal{K})$ *элементарной теорией* $\mathcal{K}$. Вместо $\mathcal{T}h(\{\mathfrak{A}\})$ пишут $\mathcal{T}h(\mathfrak{A})$.

Класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем сигнатуры Ω называется *аксиоматизируемым*, если $\mathcal{K} = \mathcal{M}od(\Sigma)$ для некоторой совокупности Σ замкнутых формул сигнатуры Ω.

Пример I. Класс всех алгебр сигнатуры $\langle \cdot, {}^{-1} \rangle$, в которых истинна формула

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\left(x(yz) = (xy)z \ \wedge\ y(xx^{-1}) = y \wedge xx^{-1} = yy^{-1}\right),$$

совпадает с классом всех групп. Значит, класс групп аксиоматизируем. Другими примерами аксиоматизируемых классов являются классы колец, полей, частичных порядков и др.

Упражнение I. Показать, что классы, упомянутые в примере I, действительно аксиоматизируемые.

Класс $\mathcal{K}$ систем одной сигнатуры Ω назовем ультразамкнутым, если $\mathcal{K}$ содержит все ультрапроизведения систем из $\mathcal{K}$, и компактным, если в $\mathcal{K}$ имеется модель для каждой такой совокупности замкнутых формул Σ сигнатуры Ω, что каждая конечная подсовокупность Δ совокупности Σ имеет модель в $\mathcal{K}$.

Упражнение 2. Показать, используя теорему Лося, что каждый аксиоматизируемый класс является ультразамкнутым. Показать, используя теорему I3, что каждый ультразамкнутый класс является компактным.

Прежде чем привести несколько конкретных примеров применения теоремы компактности, докажем две леммы, которые окажутся нам полезными в дальнейшем.

Пусть Ω - некоторая сигнатура. С каждым элементом a множества X свяжем символ выделенного элемента c_a, предполагая, что эти новые символы не входят в $D\Omega$ и что с различными элементами X связываются различные символы. Если добавить к $D\Omega$ эти новые символы, то получим новую сигнатуру, которая является расширением Ω. Эта сигнатура обозначается через $\langle \Omega, c_a \rangle_{a \in X}$. Подробнее, если $\Omega_1 = \langle \Omega, c_a \rangle_{a \in X}$, то $D_1\Omega_1 = D_1\Omega$, $D_2\Omega_1 = D_2\Omega \cup \{c_a \mid a \in X\}$, $\Omega \subseteq \Omega_1$ и $\Omega_1(c_a) = 0$ для $a \in X$. Если $\mathfrak{A}$ - алгебраическая система сигнатуры Ω и $h: X \to |\mathfrak{A}|$, через $(\mathfrak{A}, ha)_{a \in X}$ мы обозначаем такую систему сигнатуры $\langle \Omega, c_a \rangle_{a \in X}$ с основным множеством $|\mathfrak{A}|$, в которой для $a \in X$ символам c_a соответствуют элементы ha, а символам из $D\Omega$ соответствуют те же предикаты или операции, что и в $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ - алгебраическая система сигнатуры Ω. Следующие формулы и только они включаются во множество $\mathcal{D}iag(\mathfrak{B})$ замкнутых формул сигнатуры $\langle \Omega, c_a \rangle_{a \in |\mathfrak{B}|}$:

а) $\mathcal{P}(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$ для каждого такого $\mathcal{P} \in D_1\Omega$, что $\Omega(\mathcal{P}) = n > 0$, и каждых таких $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{B}|$, что $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in P^{\mathfrak{B}}$;

б) $\neg P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$ для каждого такого $P \in D_1\Omega$, что $\Omega(P) = n > 0$, и каждых таких $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{B}|$, что $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \notin P^{\mathfrak{B}}$;

в) Q для каждого такого $Q \in D_1\Omega$, что $\Omega(Q) = 0$ и $Q^{\mathfrak{B}} = \mathcal{U}$;

г) $\neg Q$ для каждого такого $Q \in D_1\Omega$, что $\Omega(Q) = 0$ и $Q^{\mathfrak{B}} = \Lambda$;

д) $f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) = c_a$ для каждого такого $f \in D_2\Omega$, что $\Omega(f) = n > 0$, и каждых таких $a, a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{B}|$, что

$$f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n) = a;$$

е) $\neg f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) = c_a$ для каждого такого $f \in D_2\Omega$, что $\Omega(f) = n > 0$, и каждых таких $a, a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{B}|$, что

$$f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n) \neq a;$$

ж) $f = c_a$ для каждого такого $f \in D_2\Omega$, что $\Omega(f) = 0$, и такого $a \in |\mathfrak{B}|$, что $f^{\mathfrak{B}} = a$;

з) $\neg f = c_a$ для каждых таких $f \in D_2\Omega$ и $a \in |\mathfrak{B}|$, что $\Omega(f) = 0$ и $f^{\mathfrak{B}} \neq a$;

и) $\neg c_{a_1} = c_{a_2}$ для каждых таких $a_1, a_2 \in |\mathfrak{B}|$, что $a_1 \neq a_2$.

Множество $\mathrm{Diag}(\mathfrak{B})$ называется д и а г р а м м о й системы $\mathfrak{B}$. Из определения следует, что для конечной $\mathfrak{B}$ конечной сигнатуры Ω множество $\mathrm{Diag}(\mathfrak{B})$ тоже конечно.

П р и м е р 2. Диаграммой поля $\langle \{0,1\}; +, \cdot \rangle$ вычетов по модулю 2 является следующая совокупность формул:

$$c_1 + c_0 = c_1,\ c_0 + c_1 = c_1,\ c_0 + c_0 = c_0,\ c_1 + c_1 = c_0,\ c_0 + c_1 \neq c_0,\ c_1 + c_0 \neq c_0,\ c_0 + c_0 \neq c_1,$$

$$c_1 + c_1 \neq c_1,\ c_1 \cdot c_0 = c_0,\ c_0 \cdot c_1 = c_0,\ c_0 \cdot c_0 = c_0,\ c_1 \cdot c_1 = c_1,\ c_1 \cdot c_0 \neq c_1,$$

$$c_0 \cdot c_1 \neq c_1,\ c_0 \cdot c_0 \neq c_1,\ c_1 \cdot c_1 \neq c_0,\ c_0 \neq c_1,\ c_1 \neq c_0.$$

Диаграммой системы $\langle \{0,1\}; \leq \rangle$ является следующая совокупность формул:

$$c_0 \leq c_1,\ c_0 \leq c_0,\ c_1 \leq c_1,\ \neg c_1 \leq c_0,\ c_0 \neq c_1,\ c_1 \neq c_0.$$

Если $\Omega' \supseteq \Omega$, $D_1\Omega \subseteq D_1\Omega'$, $D_2\Omega \subseteq D_2\Omega'$ и $\mathfrak{A}$ – алгебраическая система сигнатуры Ω', то через $\mathfrak{A}\upharpoonright\Omega$ мы обозначаем такую алгебраическую систему сигнатуры Ω, основное множество которой есть $|\mathfrak{A}|$ и в которой символам из $D\Omega$ соответствуют те же предикаты или операции, что и в $\mathfrak{A}$. Грубо говоря, $\mathfrak{A}\upharpoonright\Omega$ получается из $\mathfrak{A}$ отбрасыванием тех предикатов и операций, которые соответствуют символам из $D\Omega' \setminus D\Omega$. В этой ситуации Ω' называется о б о г а щ е н и е м Ω, $\mathfrak{A}$ – обогащением $\mathfrak{A}\upharpoonright\Omega$, $\mathfrak{A}\upharpoonright\Omega$-$\Omega$- о б е д н е н и е м $\mathfrak{A}$.

ЛЕММА I. Пусть Ω' – обогащение сигнатуры Ω, а $\mathfrak{A}$ – алгебраическая система сигнатуры Ω'. Тогда и только тогда существует мономорфизм алгебраической системы $\mathfrak{B}$ сигнатуры Ω в $\mathfrak{A}\upharpoonright\Omega$, когда для каждого $a \in |\mathfrak{B}|$ существует такой $d_a \in |\mathfrak{A}|$, что в $(\mathfrak{A}, d_a)_{a \in |\mathfrak{B}|}$ истинны все формулы из $\mathrm{Diag}(\mathfrak{B})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если такие d_a существуют, то отображение $h: |\mathfrak{B}| \to |\mathfrak{A}|$, задаваемое условием $ha = d_a$ для $a \in |\mathfrak{B}|$, как легко проверить, является нужным мономорфизмом. Наоборот, если h – мономорфизм $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}\upharpoonright\Omega$, то в $(\mathfrak{A}, ha)_{a \in |\mathfrak{B}|}$ истинны все формулы из $\mathrm{Diag}(\mathfrak{B})$.

ЛЕММА 2. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω тогда и только тогда имеет элементарную подсистему, изоморфную системе $\mathfrak{B}$ сигнатуры Ω, когда для каждого $a \in |\mathfrak{B}|$ существует такой $d_a \in |\mathfrak{A}|$, что в $(\mathfrak{A}, d_a)_{a \in |\mathfrak{B}|}$ истинны все формулы из $\mathrm{Th}((\mathfrak{B}, a)_{a \in |\mathfrak{B}|})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если указанные d_a существуют, то отображение $h: |\mathfrak{B}| \to |\mathfrak{A}|$, определяемое так же, как в доказательстве леммы I, является мономорфизмом $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$. Кроме того, для любой формулы $\Phi = \Phi(y_1, \ldots, y_n)$ сигнатуры Ω и любых $b_1, \ldots, b_n \in |\mathfrak{B}|$

$$\mathfrak{B} \models \Phi(b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, a)_{a \in |\mathfrak{B}|} \models \Phi(c_{b_1}, \ldots, c_{b_n}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, d_a)_{a \in |\mathfrak{B}|} \models \Phi(c_{b_1}, \ldots, c_{b_n}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \Phi(d_{b_1}, \ldots, d_{b_n}).$$

Ясно, что истинность $\Phi(b_1, \ldots, b_n)$ в $\mathfrak{B}$ равносильна истинности $\Phi(hb_1, \ldots, hb_n)$ в образе $\mathfrak{B}$. Поэтому выписанная серия эквивалентностей показывает, что образ $\mathfrak{B}$ – элементарная подсистема системы $\mathfrak{A}$.

Обратно, если h – мономорфизм $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$ и образ $\mathfrak{B}$ – элементарная подсистема $\mathfrak{A}$, то все формулы из $\mathrm{Th}((\mathfrak{B}, a)_{a \in |\mathfrak{B}|})$ истинны в $(\mathfrak{A}, ha)_{a \in |\mathfrak{B}|}$. Лемма доказана.

Теперь переходим к примерам применения теоремы компактности.

П р и м е р 3. Пусть $\mathfrak{A}$ – алгебраическая система конечной сигнатуры Ω, а $\mathcal{K}$ – аксиоматизируемый класс алгебраических систем сигнатуры Ω. Если каждая конечно порожденная подсистема системы $\mathfrak{A}$ изоморфна подсистеме некоторой $\mathcal{K}$-системы, то и сама $\mathfrak{A}$ изоморфна подсистеме некоторой $\mathcal{K}$-системы. Для доказательства рассмотрим совокупность формул, состоящую из диаграммы системы $\mathfrak{A}$ и $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$. Если эта совокупность имеет модель, то, в силу леммы I, существует $\mathcal{K}$-система, содержащая подсистему, изоморфную $\mathfrak{A}$. В силу теоремы компактности Мальцева эта совокупность имеет модель, если имеет модель каждая конечная ее подсовокупность. Но конечная подсовокупность содержит только конечную часть диаграммы, в которой символы c_a встречаются только для конечного числа $a \in |\mathfrak{A}|$. Следовательно, достаточно заметить, что каждая конечно порожденная подсистема системы $\mathfrak{A}$ изоморфна подсистеме $\mathcal{K}$ -системы, а это дано.

П р и м е р 4. Если аксиоматизируемый класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем сигнатуры Ω содержит конечные системы как угодно больших мощностей, он содержит и бесконечные системы. Для доказательства рассмотрим такую совокупность Σ замкнутых формул сигнатуры Ω, что $\mathcal{K} = \mathcal{M}od(\Sigma)$, и еще бесконечную совокупность формул

$$(\exists x_0)\ldots(\exists x_n)\bigwedge_{i=1}^{n}\Big(\bigwedge_{j=0}^{i-1} x_j \neq x_i\Big) \quad (n=1,2,\ldots).$$

Каждая конечная часть этой объединенной совокупности формул совместна. По теореме компактности Мальцева совместна и вся совокупность. Значит, в $\mathcal{K}$ имеется бесконечная система. Например, классы конечных абелевых групп и т.п. не являются аксиоматизируемыми.

Важным применением теоремы компактности является

ТЕОРЕМА 14. (Теорема Мальцева о расширении). Для любой бесконечной алгебраической системы $\mathfrak{A}$ и любого $\mathcal{A} \geq |\mathfrak{A}|$ существует такая система $\mathfrak{B}$, что $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ и $|\mathfrak{B}| \geq \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{A}$ имеет сигнатуру Ω. Пусть

$$D_2\Omega \cap \{c_a \mid a \in \mathcal{A}\} = \varnothing,\ \Sigma_1 = \{c_a \neq c_b \mid a, b \in \mathcal{A}, a \neq b\},\ \Sigma = \Sigma_1 \cup Th((\mathfrak{A}, a)_{a \in |\mathfrak{A}|}).$$

На Σ смотрим как на совокупность замкнутых формул сигнатуры $\Omega_1 = \langle \Omega, c_a \rangle_{a \in |\mathfrak{A}| \cup \mathcal{A}}$. Покажем, что каждая конечная подсовокупность Δ совокупности Σ имеет модель. Действительно, пусть $c_{\tau_1}, \ldots, c_{\tau_m}$ – все попарно различные символы вида c_τ $(\tau \in \mathcal{A})$, встречающиеся в записи формул из Δ. Пусть $d_a = a$, если $a \in |\mathfrak{A}|$; $d_\tau = b_1$, если $\tau \notin \{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$ и $d_\tau = b_i$, если $\tau = \tau_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, где $b_1, \ldots, b_m$ – попарно различные элементы из $|\mathfrak{A}|$. Тогда в системе $(\mathfrak{A}, d_a)_{a \in |\mathfrak{A}| \cup \mathcal{A}}$ истинны все формулы из Δ (те формулы из Δ, которые принадлежат $Th((\mathfrak{A}, a)_{a \in |\mathfrak{A}|})$, конечно, истинны в ней, а те формулы из Δ, которые принадлежат Σ_1, истинны во всякой такой системе сигнатуры Ω_1, в которой символам $c_{\tau_1}, \ldots, c_{\tau_m}$ со-

ответствуют попарно различные элементы). Значит, и Σ имеет модель вида $(\mathfrak{B}, d_a)_{a \in |\mathfrak{A}| \cup \mathcal{A}}$, где $\mathfrak{B}$ – алгебраическая система сигнатуры Ω (теорема компактности Мальцева).

Ясно, что в системе $(\mathfrak{B}, d_a)_{a \in |\mathfrak{A}|}$ истинны все формулы из $Th((\mathfrak{A}, a)_{a \in |\mathfrak{A}|})$. Значит (по лемме 2), $\mathfrak{B}$ имеет элементарную подсистему, изоморфную $\mathfrak{A}$. Можно считать, что эта подсистема совпадает с $\mathfrak{A}$, если заменить $\mathfrak{B}$ на изоморфную систему. С другой стороны, из Σ_1 следует, что $d_a \neq d_b$ для $a \neq b$, $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{A}$. Это показывает, что мощность $|\mathfrak{B}|$ не меньше мощности $\mathcal{A}$. Теорема доказана.

Теорема 13 позволяет также получить простой критерий аксиоматизируемости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{K}$ – класс алгебраических систем сигнатуры Ω и $\Sigma = Th(\mathcal{K})$. Система $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω тогда и только тогда является моделью для Σ, когда $\mathfrak{A}$ изоморфна элементарной подсистеме некоторого ультрапроизведения систем из $\mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathfrak{A}$ изоморфна элементарной подсистеме ультрапроизведения систем из $\mathcal{K}$, то $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}od(\Sigma)$. Действительно, если $\Phi \in \Sigma$, то Φ истинна на ультрапроизведении систем из $\mathcal{K}$ (теорема Лося), на элементарной подсистеме этого произведения (из $\mathfrak{B}_1 \preceq \mathfrak{B}_2$ следует, что $Th(\mathfrak{B}_1) = Th(\mathfrak{B}_2)$) и на $\mathfrak{A}$ (свойства, выражаемые формулами исчисления предикатов, абстрактны).

Наоборот, пусть система $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω есть модель для Σ. Рассмотрим сигнатуру $\Omega_{\mathfrak{A}} = \langle \Omega, c_a \rangle_{a \in |\mathfrak{A}|}$, систему $\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}, a)_{a \in |\mathfrak{A}|}$ сигнатуры $\Omega_{\mathfrak{A}}$ и совокупность $Th(\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}})$ замкнутых формул сигнатуры $\Omega_{\mathfrak{A}}$. Пусть Δ – конечная подсовокупность совокупности $Th(\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}})$. Тогда в записях формул из Δ встречается только конечное число символов c_a, пусть $c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}$. Пусть $\Phi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_k})$ – конъюнкция всех формул из Δ, где $\Phi = \Phi(y_1, \ldots, y_k)$ – формула сигнатуры Ω. Формула $(\exists y_1)\ldots(\exists y_k)\Phi$ сигнатуры Ω истинна в $\mathfrak{A}$. Значит, существует такая $\mathfrak{B}_\Delta \in \mathcal{K}$, что $\mathfrak{B}_\Delta \models (\exists y_1)\ldots(\exists y_k)\Phi$ (в противном случае отрицание рассматриваемой формулы входило бы в Σ и, значит, было бы истинно в $\mathfrak{A}$, что противоречило бы истинности в $\mathfrak{A}$ самой этой формулы $(\exists y_1)\ldots(\exists y_k)\Phi$). Пусть $\Phi(d_{a_1}, \ldots, d_{a_k})$ истинно в $\mathfrak{B}_\Delta$. Пусть $d_a^\Delta = d_{a_i}$, если $a = a_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ и d_a^Δ – какой-нибудь элемент из $|\mathfrak{B}_\Delta|$, если $a \notin \{a_1, \ldots, a_k\}$. Тогда

$$(\mathfrak{B}_\Delta, d_a^\Delta)_{a \in |\mathfrak{A}|} \models \Phi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}).$$

Из теоремы 13 следует теперь, что некоторое ультрапроизведение систем $(\mathfrak{B}_\Delta, d_a^\Delta)_{a \in |\mathfrak{A}|}$ $(\Delta \in J)$, где $\mathfrak{B}_\Delta \in \mathcal{K}$ для $\Delta \in J$, является моделью для $Th(\mathfrak{A}_\mathfrak{A})$. Понятно, что это ультрапроизведение имеет вид $(\mathfrak{B}, d_a)_{a \in |\mathfrak{A}|}$, где $\mathfrak{B}$ есть ультрапроизведение систем $\mathfrak{B}_\Delta (\Delta \in J)$. Из леммы 2 следует, что в $\mathfrak{B}$ есть элементарная подсистема, изоморфная системе $\mathfrak{A}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Скажем, что системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ сигнатуры Ω элементарно эквивалентны (пишем: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), если $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$. $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда элементарно эквивалентна $\mathfrak{B}$, когда $\mathfrak{A}$ изоморфна элементарной подсистеме некоторой ультрастепени системы $\mathfrak{B}$.

ТЕОРЕМА 15 (Скотт). Класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем сигнатуры Ω тогда и только тогда является аксиоматизируемым, когда $\mathcal{K}$ замкнут относительно ультрапроизведений (т.е. ультразамкнут), изоморфизмов (т.е. вместе с каждой системой содержит все ей изоморфные; о таких классах говорят, что они абстрактны) и взятия элементарных подсистем (т.е. вместе с каждой системой класс $\mathcal{K}$ содержит и все ее элементарные подсистемы).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{K}$ - аксиоматизируемый, то $\mathcal{K}$ замкнут относительно ультрапроизведений, относительно взятия элементарных подсистем (если $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{A}$, $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$, $\Phi \in \Sigma$ и $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, то $\mathfrak{A} \models \Phi$ и, значит, $\mathfrak{B} \models \Phi$) и относительно изоморфизмов (если $\mathfrak{A} \models \Phi$ и $\mathfrak{A}$ изоморфна $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B} \models \Phi$).

Наоборот, пусть $\mathcal{K}$ замкнут относительно ультрапроизведений, изоморфизмов и взятия элементарных подсистем, $\Sigma = Th(\mathcal{K})$.

Покажем, что $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$. Ясно включение $\mathcal{K} \subseteq Mod(\Sigma)$. Пусть $\mathfrak{A} \in Mod(\Sigma)$. Надо доказать, что $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. По предложению 1 $\mathfrak{A}$ изоморфна элементарной подсистеме $\mathfrak{B}$ некоторого ультрапроизведения $\mathfrak{D}\text{-}prod\, \mathfrak{A}_\alpha$, где $\mathfrak{A}_\alpha \in \mathcal{K}$ для $\alpha \in J$. По условию $(\mathfrak{D}\text{-}prod\, \mathfrak{A}_\alpha) \in \mathcal{K}$. Опять по условию, $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. Из абстрактности $\mathcal{K}$ следует, что $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. Теорема 15 доказана.

§ 21. Универсально аксиоматизируемые классы

Формула Φ сигнатуры Ω называется **у н и в е р с а л ь н о й**, если она является предваренной и не содержит кванторов существования. Класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем сигнатуры Ω называется **у н и в е р с а л ь н о а к с и о м а т и з и р у е м ы м**, ес-

ли существует такая совокупность Σ замкнутых универсальных формул сигнатуры Ω, что $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$.

П р и м е р ы 1. Классы групп, как алгебр сигнатуры $\langle \cdot, ^{-1} \rangle$, частичных порядков, линейных порядков являются универсально аксиоматизируемыми.

Важнейшим свойством замкнутой универсальной формулы является то, что всякая подсистема всякой модели этой формулы снова является моделью этой формулы. Это сразу следует из определения истинности формулы.

Поэтому, если перечислимая совокупность Σ замкнутых универсальных формул имеет модель $\mathfrak{A}$, то эта совокупность имеет и перечислимую модель $\mathfrak{B}$, т.е. такую, что $|\mathfrak{B}|$ перечислимо.

Действительно, в формулах из Σ участвует только перечислимое множество символов предикатов и операций. Можно считать, что рассматриваются формулы такой сигнатуры Ω, что $D_2\Omega$ перечислимо. Берем в $|\mathfrak{A}|$ произвольный элемент a и рассматриваем подсистему $\mathfrak{B}$, порожденную в $\mathfrak{A}$ множеством $\{a\}$. По теореме из § 15 элементы этой подсистемы - это значения термов сигнатуры Ω, когда всем переменным приписано значение a. Из результатов § 13 следует, что $|\mathfrak{B}|$ перечислимо. С другой стороны, как отмечалось, $\mathfrak{B}$ есть тоже модель для Σ. Если $\mathfrak{A}$ бесконечна, то вместо $\{a\}$ можно взять счетное подмножество $A \subseteq |\mathfrak{A}|$ и в качестве $\mathfrak{B}$ - подсистему, порожденную A в $\mathfrak{A}$. Тогда $|\mathfrak{B}|$ счетно и $\mathfrak{B}$ - модель Σ.

Пусть теперь Φ - произвольная предваренная формула сигнатуры Ω. Если формула Φ имеет вид $(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)(\exists y)\Psi(y_1,\ldots,y_n,y)$ и $\mathfrak{A}$ - модель Φ, то для каждых $a_1,\ldots,a_n \in |\mathfrak{A}|$ существует такой $b \in |\mathfrak{A}|$, что $\mathfrak{A} \models \Psi(a_1,\ldots,a_n,b)$. Таким образом, существует такое отображение $f_{1,\Phi}^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$, что для каждых $a_1,\ldots,a_n \in |\mathfrak{A}|$ $\mathfrak{A} \models \Psi(a_1,\ldots,a_n, f_{1,\Phi}^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n))$. Наоборот, если такое отображение $f_{1,\Phi}^{\mathfrak{A}}$ существует, то $\mathfrak{A}$ - модель Φ. Итак, $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда является моделью Φ, когда на $|\mathfrak{A}|$ можно так определить n-местную операцию $f_{1,\Phi}^{\mathfrak{A}}$, что обогащенная система $(\mathfrak{A}; f_{1,\Phi}^{\mathfrak{A}})$ обогащенной сигнатуры $\langle \Omega; f_{1,\Phi} \rangle$ является моделью

$$(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)\Psi(y_1,\ldots,y_n, f_{1,\Phi}(y_1,\ldots,y_n)).$$

Если в новой формуле $\Phi^{(1)}$, которая тоже предваренная, встречаются кванторы существования, можно перейти от $\Phi^{(1)}$ к $\Phi^{(2)} = (\Phi^{(1)})^{(1)}$ и от $(\mathfrak{A}; f_{1,\Phi}^{\mathfrak{A}})$ к $(\mathfrak{A}; f_{1,\Phi}^{\mathfrak{A}}, f_{2,\Phi}^{\mathfrak{A}})$ сигнатуры $\langle \Omega; f_{1,\Phi}, f_{2,\Phi} \rangle$ и т.д. Через конечное число шагов получим замкнутую универсальную формулу $\Phi^{(s)}$, которая называется **с к о л е м о в с к о й у н и-**

в е р с а л ь н о й   ф о р м о й   для Φ .

П р и м е р 2. Если формула Φ сигнатуры $\langle \mathcal{P}^{(2)} \rangle$ есть

$$(\exists y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists y_2)(\forall x_3)(\exists y_3)((\mathcal{P}(x_1,y_1)\wedge \mathcal{P}(x_2,y_2))\to \mathcal{P}(x_3,y_3)),$$

то ее сколемовская универсальная форма есть

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)((\mathcal{P}(x_1,f_{1,\Phi})\wedge \mathcal{P}(x_2,f_{2,\Phi}(x_1,x_2)))\to \mathcal{P}(x_3,f_{3,\Phi}(x_1,x_2,x_3))).$$

Если Σ - совокупность замкнутых предваренных формул сигнатуры Ω, а Σ^* - совокупность сколемовских универсальных форм для формул из Σ, то Σ^* - совокупность замкнутых универсальных формул обогащенной сигнатуры Ω^*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда является моделью Σ, когда $\mathfrak{A}$ имеет такое обогащение $\mathfrak{A}^*$, что $\mathfrak{A}^*$ - модель Σ^*.

СЛЕДСТВИЕ. Σ тогда и только тогда имеет модель с основным множеством $\mathcal{A}$, когда Σ^* имеет модель с основным множеством $\mathcal{A}$.

В частности, если Σ - имеющая модель перечислимая совокупность замкнутых формул одной сигнатуры, то Σ^* - перечислимая совокупность замкнутых универсальных формул одной сигнатуры, тоже имеющая модель. По предыдущему, Σ^* имеет перечислимую модель. Значит, и Σ имеет перечислимую модель. Если Σ имеет бесконечную модель, то Σ^* имеет бесконечную модель, а потому имеет и счетную модель. Значит, счетную модель имеет и Σ. Мы получили новое доказательство следствия из теоремы 8. Это доказательство не использует понятия элементарной подсистемы.

Если мощность сигнатуры Ω' конечна, а система $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω' является Ω'-обеднением системы $\mathfrak{B}$ сигнатуры Ω, то $\mathfrak{A}$ называется к о н е ч н ы м   о б е д н е н и е м $\mathfrak{B}$. Скажем, что система $\mathfrak{A}$ изоморфно вложима в систему $\mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A}$ изоморфна обеднению некоторой подсистемы системы $\mathfrak{B}$.

ТЕОРЕМА I6 (Лось, Тарский). Класс $\mathcal{K}$ предикатных систем сигнатуры Ω тогда и только тогда универсально аксиоматизируем, когда

(а) для каждой системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω из того, что каждое конечное обеднение каждой конечной подсистемы системы $\mathfrak{A}$ изоморфно вложимо в некоторую систему из класса $\mathcal{K}$, следует, что система $\mathfrak{A}$ принадлежит $\mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{K}$ универсально аксиоматизируем. Тогда аксиоматизируем. Имеет место следующее необходимое условие аксиоматизируемости.

ЛЕММА (Хенкин). Если класс $\mathcal{K}$ предикатных систем сигнатуры Ω аксиоматизируем, $\mathfrak{A}$ - система сигнатуры Ω и каждое конечное обеднение каждой конечной подсистемы системы $\mathfrak{A}$ изоморфно вложимо в некоторую систему из класса $\mathcal{K}$, то $\mathfrak{A}$ вложима в некоторую систему из $\mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{K}=\mathrm{Mod}(\Sigma)$. Рассмотрим совокупность замкнутых формул $\Sigma\cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ сигнатуры $\Omega_1=\langle\Omega,c_a\rangle_{a\in|\mathfrak{A}|}$. Если эта совокупность имеет модель $(\mathfrak{B},d_a')_{a\in|\mathfrak{A}|}$, то, по лемме I §20, $\mathfrak{A}$ изоморфна подсистеме системы $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}\in \mathrm{Mod}(\Sigma)=\mathcal{K}$. Для доказательства существования модели для совокупности $\Sigma\cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ достаточно доказать, что имеет модель каждая конечная ее подсовокупность (теорема компактности Мальцева).

Пусть Δ - конечная подсовокупность из $\Sigma\cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$. Пусть $c_{a_1},\dots,c_{a_n}$ - символы из $D\Omega_1\setminus D\Omega$, встречающиеся в Δ. Пусть $|\mathfrak{A}_1|=\{a_1,\dots,a_n\}$ и $\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A}_1'$ - такое конечное обеднение системы $\mathfrak{A}_1$, что $\Delta\subseteq\Sigma\cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{A}_1')$. Из леммы I § 20 и условия следует, что существует такая система $(\mathcal{L},d_a)_{a\in|\mathfrak{A}_1|}$, что $(\mathcal{L},d_a)_{a\in|\mathfrak{A}_1|}\models\Sigma\cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{A}_1')$. Полагая $d_a=d_{a_1}$ для $a\notin|\mathfrak{A}_1|$, получим такую систему $(\mathcal{L},d_a)_{a\in|\mathfrak{A}|}$, что $(\mathcal{L},d_a)_{a\in|\mathfrak{A}|}\models\Delta$.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ I6. Пусть каждое конечное обеднение каждой конечной подсистемы системы $\mathfrak{A}$ изоморфно вложимо в некоторую систему из $\mathcal{K}$. Из леммы следует, что тогда $\mathfrak{A}$ вложима в систему из класса $\mathcal{K}$.

Назовем класс систем н а с л е д с т в е н н ы м, если он вместе с каждой системой содержит все ее подсистемы. Каждый универсально аксиоматизируемый класс, как легко видеть, наследственный. Поэтому $\mathfrak{A}$ изоморфна системе из класса $\mathcal{K}$. Но аксиоматизируемый класс является абстрактным. Значит, $\mathfrak{A}\in\mathcal{K}$. Итак, из универсальной аксиоматизируемости $\mathcal{K}$ следует (а).

Пусть теперь, наоборот, выполнено условие (а). Пусть Σ - это совокупность всех универсальных аксиом сигнатуры Ω, истинных на всех системах из $\mathcal{K}$. Покажем, что $\mathcal{K}=\mathrm{Mod}(\Sigma)$.

Ясно, что $\mathcal{K}\subseteq \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Пусть $\mathfrak{A}\in \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Надо показать, что $\mathfrak{A}\in\mathcal{K}$. Пусть $\mathfrak{A}'$ - конечное обеднение конечной подсистемы системы $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathrm{Diag}(\mathfrak{A}')$ конечна. Пусть $\Phi=\Phi(y_1,\dots,y_m)$ - такая формула сигнатуры Ω, что $\Phi(c_{a_1},\dots,c_{a_m})$ - конъюнкция всех формул из $\mathrm{Diag}(\mathfrak{A}')$, где $|\mathfrak{A}'|=\{a_1,\dots,a_m\}$. Из леммы I § 20 следует, что если $\mathfrak{A}'$ не вкладывается изоморфно ни в какую систему из $\mathcal{K}$, то $(\forall y_1)\ldots(\forall y_m)\neg\Phi$ истинно в $\mathcal{K}$ и, значит, в $\mathfrak{A}$. Однако $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1,\ldots,a_m)$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{A}'$ изоморфно вкладывается в некоторую систему из $\mathcal{K}$. По (а) $\mathfrak{A}\in\mathcal{K}$. Теорема I6 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Класс $\mathcal{K}$ предикатных систем сигнатуры Ω тогда и только тогда универсально аксиоматизируем, когда $\mathcal{K}$ замкнут относительно изоморфизмов (абстрактен), ультразамкнут и замкнут относительно взятия подсистем (наследственен).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Универсально аксиоматизируемые классы абстрактны, ультразамкнуты и наследственны. Пусть $\mathcal{K}$ абстрактен, ультразамкнут и наследственен. Тогда $\mathcal{K}$ аксиоматизируем (теорема Скотт). Пусть $\mathfrak{A}$ – система сигнатуры Ω и каждое конечное обеднение каждой конечной подсистемы системы $\mathfrak{A}$ изоморфно вложимо в некоторую систему из $\mathcal{K}$. По лемме Хенкина $\mathfrak{A}$ вложима в систему из $\mathcal{K}$. Из абстрактности и наследственности $\mathcal{K}$ следует, что $\mathfrak{A}\in\mathcal{K}$. Выполнено условие (а) из теоремы I6. По теореме I6 $\mathcal{K}$ универсально аксиоматизируем.

ТЕОРЕМА I7. Универсально аксиоматизируемый класс $\mathcal{K}$ систем сигнатуры Ω замкнут относительно взятия объединений возрастающих цепочек подсистем. Подробнее, для такого $\mathcal{K}$ из того, что все члены возрастающей цепочки подсистем лежат в $\mathcal{K}$, следует, что объединение этой цепочки лежит в $\mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{K}=\mathcal{M}od(\Sigma)$ и Σ – совокупность универсальных аксиом. Пусть $\{\mathfrak{A}_\alpha \mid \alpha\in W(\gamma)\}$ – возрастающая цепочка подсистем и $\mathfrak{A}_\alpha\in\mathcal{K}$ для $\alpha\in W(\gamma)$. Пусть $(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)\Phi'\in\Sigma$, где $\Phi'=\Phi'(y_1,\ldots,y_n)$ не содержит кванторов. Пусть $\mathfrak{A}=\bigcup_{\alpha\in W(\gamma)}\mathfrak{A}_\alpha$ и $a_1,\ldots,a_n\in|\mathfrak{A}|$. Тогда найдется такое $\alpha\in W(\gamma)$, что $a_1,\ldots,a_n\in|\mathfrak{A}_\alpha|$. Значит, $\Phi'(a_1,\ldots,a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}_\alpha$. Но Φ' не содержит кванторов. Значит, $\Phi'(a_1,\ldots,a_n)$ истинно в $\mathfrak{A}$. Значит, $\mathfrak{A}\models(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)\Phi'$. Значит, $\mathfrak{A}\models\Sigma$ и $\mathfrak{A}\in\mathcal{K}$. Теорема доказана.

Глава IУ

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

§ 22. Формулировка исчисления предикатов

В дальнейшем через Ω будет обозначаться некоторая произвольная, но фиксированная сигнатура, не содержащая символов операций. Ограничение на сигнатуру мы принимаем для того, чтобы не отягощать изложение деталями, не имеющими принципиального значения.

В этом параграфе будет сформулировано исчисление предикатов сигнатуры Ω (сокращенно $ИП^{\Omega}$). Алфавит $ИП^{\Omega}$ состоит из следующих символов:

$\{x_n \mid n\geq 0\}$ – переменные;

$\{P \mid P\in D\Omega\}$ – символы предикатов сигнатуры Ω;

$\{\wedge,\vee,\neg,\to\}$ – логические связки;

$\{\forall,\exists\}$ – кванторы ($\forall$ – квантор всеобщности, $\exists$ – квантор существования);

$\{(,),,\}$ – скобки и запятая; $\{\vdash\}$ – символ следования.

Определим понятие ф о р м у л ы $ИП^{\Omega}$.

I. Если $P\in D\Omega$ – предикатный символ местности n и $v_1,\ldots,v_n$ – переменные, то $P(v_1,\ldots,v_n)$ – формула $ИП^{\Omega}$.

2. Если Φ и Ψ – формулы $ИП^{\Omega}$, то $(\Phi\wedge\Psi)$, $(\Phi\vee\Psi)$, $(\Phi\to\Psi)$ и $\neg\Phi$ – тоже формулы $ИП^{\Omega}$.

3. Если Φ – формула $ИП^{\Omega}$, то $(\exists x_i)\Phi$ и $(\forall x_i)\Phi$, $i\geq 0$, – тоже формулы $ИП^{\Omega}$.

4. Φ является формулой $ИП^{\Omega}$ только тогда, когда это может быть установлено с помощью пунктов I–3.

Ранг формулы определяется так же, как в § I6.

Отметим, что запись $P(v_1,\ldots,v_n)$ из пункта I (также как и Φ из пунктов 2 и 3) не является формулой, так как v_i не является переменной ИП^{Ω}, а только обозначает ее. Формулой будет, например, запись $\mathcal{P}(x_8, x_1, x_{13})$, если $\mathcal{P} \in D\Omega$ и местность $\mathcal{P}$ равна 3.

Атомной формулой ИП^{Ω} называется формула вида $\mathcal{P}(v_1, \ldots, v_n)$, где $\mathcal{P}$ – n-местный символ сигнатуры Ω, а $v_1, \ldots, v_n$ – переменные ИП^{Ω}. *Секвенциями* ИП^{Ω} называются последовательности следующих 4 типов:

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_n \vdash \Psi\ ; \quad \Phi_1, \ldots, \Phi_n \vdash\ ; \quad \vdash \Psi\ ; \quad \vdash,$$

где $n>0$; $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Psi$ – формулы ИП^{Ω}.

Если дана последовательность символов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, то частью этой последовательности назовем последовательность

$$\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+k}\ ;\ 1 \le i \le n\ ,\ k \le n-i.$$

Вхождением подформулы Ψ *в формулу* Φ ИП^{Ω} называется часть формулы Φ, которая является формулой Ψ ИП^{Ω}. Отметим, что одна и та же подформула Ψ может иметь разные вхождения в формулу Φ. Например, формула $\mathcal{P}(x_1, x_2)$ имеет два вхождения в формулу

$$(\forall x_1)\mathcal{P}(x_1, x_2) \vee \neg (\exists x_2)\mathcal{P}(x_1, x_2).$$

Когда ясно из контекста, о чем идет речь, мы будем опускать слово "вхождение" и говорить просто о подформуле Ψ формулы Φ.

Часть формулы Φ, являющаяся переменной v, называется вхождением переменной v в формулу Φ. Вхождение переменной v в формулу Φ называется *связанным*, если оно находится в подформуле формулы Φ вида $(\forall v)\Phi_1$ или $(\exists v)\Phi_1$. В противном случае оно называется *свободным* вхождением переменной v в формуле Φ. Если существуют свободные (связанные) вхождения переменной v в формуле Φ, то будем говорить, что v *входит свободно* (*связанно*) в формулу Φ. Если формула Φ не имеет свободных вхождений ни одной переменной, то она называется *замкнутой формулой* или *предложением*.

Запись $(\Phi)^v_y$ будет обозначать результат подстановки вместо всех свободных вхождений переменной v в формулу Φ переменной y, а также тот факт, что ни одно свободное вхождение переменной v не входит в подформулу Φ вида $(\forall y)\Phi_1$ или $(\exists y)\Phi_1$.

Запись $[\Phi]^v_y$ будет сочетать в себе запись $(\Phi)^v_y$, а также обозначать тот факт, что y не входит свободно в Φ.

Формулу, не содержащую кванторов, будем называть *бескванторной*.

Схемой аксиом ИП^{Ω} является следующая:

$$\Phi \vdash \Phi.$$

Правила вывода:

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\ \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash (\Phi \wedge \Psi)}$,

2. $\dfrac{\Gamma \vdash (\Phi \wedge \Psi)}{\Gamma \vdash \Phi}$,

3. $\dfrac{\Gamma \vdash (\Phi \wedge \Psi)}{\Gamma \vdash \Psi}$,

4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash (\Phi \vee \Psi)}$,

5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash (\Phi \vee \Psi)}$,

6. $\dfrac{\Gamma \vdash (\Phi \vee \Psi);\ \Gamma, \Phi \vdash \Phi';\ \Gamma, \Psi \vdash \Phi'}{\Gamma \vdash \Phi'}$,

7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash (\Phi \to \Psi)}$,

8. $\dfrac{\Gamma \vdash (\Phi \to \Psi);\ \Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Psi}$,

9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$,

10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\ \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$,

11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma' \vdash \Phi'}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma' \vdash \Phi'}$,

12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$,

13. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash (\forall v)\Phi}$, где v не входит в члены Γ свободно,

14. $\dfrac{\Gamma, (\Phi)^v_y \vdash \Psi}{\Gamma, (\forall v)\Phi \vdash \Psi}$,

15. $\dfrac{\Gamma \vdash (\Phi)^v_y}{\Gamma \vdash (\exists v)\Phi}$,

16. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, (\exists v)\Phi \vdash \Psi}$, где v не входит в Ψ и члены Γ свободно.

Как и в ИВ, в схеме аксиом и правилах вывода Φ, Ψ, Φ' – переменные для формул ИП^{Ω}; Γ, Γ' – переменные для последовательностей таких формул.

Определения линейного доказательства, дерева доказательства в ИП^{Ω} те же, что и в главе I, разница состоит лишь в другом определении формулы и в добавлении новых переходов, соответствующих правилам I3–I6. То же самое относится к понятию квазивывода и доказуемой секвенции и формулы. В целях сокращения записи, как и в главе I, мы будем часто в дереве доказательства и в квазивыводе переходы по структурным правилам II–I2 производить одновременно с переходами по другим правилам.

Формула Ψ $ИП^{\Omega}$ называется *тавтологией*, если она получается из формулы Φ, доказуемой в ИВ, путем замены всех ее пропозициональных переменных $Q_0,\ldots,Q_n$ соответственно на формулы $ИП^{\Omega}$ $\Psi_0,\ldots,\Psi_n$. Формулу Φ при этом назовем *скелетом тавтологии*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Любая тавтология Ψ доказуема в $ИП^{\Omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ψ получена из скелета Φ заменой переменных $Q_0,\ldots,Q_n$ на формулы $\Psi_0,\ldots,\Psi_n$. Заменив в дереве доказательства в ИВ секвенции $\vdash\Phi$ переменные $Q_0,\ldots,Q_n$ соответственно на формулы $\Psi_0,\ldots,\Psi_n$, а остальные пропозициональные переменные на произвольную формулу $ИП^{\Omega}$ Ψ_{n+1}, очевидно, получим доказательство секвенции $\vdash\Psi$ в $ИП^{\Omega}$. Предложение I доказано.

Две формулы $ИП^{\Omega}$ Φ и Ψ назовем *скелетно эквивалентными* (обозначаем: $\Phi\doteq\Psi$), если $\Phi\to\Psi$ и $\Psi\to\Phi$ тавтологии. Из предложения I получаем очевидное

СЛЕДСТВИЕ I. Если формулы Φ и Ψ исчисления $ИП^{\Omega}$ скелетно эквивалентны, то Φ доказуема в $ИП^{\Omega}$ тогда и только тогда, когда Ψ доказуема в $ИП^{\Omega}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если секвенция $\Phi_1,\ldots,\Phi_n\vdash\Psi$ доказуема в $ИП^{\Omega}$, то $\Phi_1\to(\Phi_2\to\ldots(\Phi_n\to\Psi)\ldots)$ – тождественно истинная формула.*)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по длине доказательства секвенции $\Phi_1,\ldots,\Phi_n\vdash\Psi$. Очевидно, что аксиомы обладают свойством, сформулированным в предложении. Проверка того, что правила вывода сохраняют это свойство, предоставляется читателю.

СЛЕДСТВИЕ 2. Исчисление $ИП^{\Omega}$ непротиворечиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Φ – замкнутая формула $ИП^{\Omega}$, то ясно, что формула $\Phi\wedge\neg\Phi$ ложна на любой системе сигнатуры Ω. По предложению 2 секвенция $\vdash\Phi\wedge\neg\Phi$ не доказуема.

§ 23. Эквивалентность формул

Две формулы Φ и Ψ из $ИП^{\Omega}$ назовем *эквивалентными* в $ИП^{\Omega}$ (обозначим: $\Phi\equiv\Psi$), если в $ИП^{\Omega}$ доказуемы две секвенции:

$$\Phi\vdash\Psi \quad \text{и} \quad \Psi\vdash\Phi.$$

Очевидно, что из $\Phi\doteq\Psi$ следует $\Phi\equiv\Psi$.

---

*) См. третий абзац § 26 (стр. II5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть Φ,Ψ – формулы $ИП^{\Omega}$. В $ИП^{\Omega}$ имеют место следующие эквивалентности:

I) $\neg(\exists v)\Phi\equiv(\forall v)\neg\Phi$;

2) $\neg(\forall v)\Phi\equiv(\exists v)\neg\Phi$;

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ (\exists v)\Phi\wedge\Psi\equiv(\exists v)(\Phi\wedge\Psi),\\ 4)\ (\forall v)\Phi\wedge\Psi\equiv(\forall v)(\Phi\wedge\Psi),\\ 5)\ (\exists v)\Phi\vee\Psi\equiv(\exists v)(\Phi\vee\Psi),\\ 6)\ (\forall v)\Phi\vee\Psi\equiv(\forall v)(\Phi\vee\Psi), \end{array}\right\} \text{где } v \text{ не входит свободно в } \Psi;$$

7) $(\forall v)\Phi\equiv(\forall y)[\Phi]^v_y$;

8) $(\exists v)\Phi\equiv(\exists y)[\Phi]^v_y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем нечетные эквивалентности, оставляя проверку четных читателю.

I)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\Phi\vdash\neg\Phi}{(\forall v)\neg\Phi\vdash\neg\Phi};\quad \Phi\vdash\Phi}{(\forall v)\neg\Phi,\Phi,\neg(\Phi)^v_y\vdash}}{(\forall v)\neg\Phi,\Phi\vdash(\Phi)^v_y}}{(\forall v)\neg\Phi,(\exists v)\Phi\vdash(\Phi)^v_y}}{(\forall v)\neg\Phi\vdash(\exists v)\Phi\to(\Phi)^v_y};\quad \dfrac{\dfrac{\neg\neg(\exists v)\Phi\vdash\neg\neg(\exists v)\Phi;\quad\neg(\exists v)\Phi\vdash\neg(\exists v)\Phi}{\neg\neg(\exists v)\Phi,\neg(\exists v)\Phi\vdash}}{\neg\neg(\exists v)\Phi\vdash(\exists v)\Phi}}{(\forall v)\neg\Phi,\neg\neg(\exists v)\Phi\vdash(\Phi)^v_y};\quad \dfrac{\neg(\Phi)^v_y\vdash\neg(\Phi)^v_y}{(\forall v)\neg\Phi\vdash\neg(\Phi)^v_y}}{(\forall v)\neg\Phi,\neg\neg(\exists v)\Phi\vdash}}{(\forall v)\neg\Phi\vdash\neg(\exists v)\Phi}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg\Phi\vdash\Phi}{\neg\neg\Phi\vdash(\exists v)\Phi}}{\neg(\exists v)\Phi,\neg\neg\Phi\vdash(\exists v)\Phi};\quad\neg(\exists v)\Phi\vdash\neg(\exists v)\Phi}{\neg(\exists v)\Phi,\neg\neg\Phi\vdash}}{\neg(\exists v)\Phi\vdash\neg\Phi}}{\neg(\exists v)\Phi\vdash(\forall v)\neg\Phi}$$

В первом из двух приведенных доказательств в качестве y выбирается переменная, которая не входит в $(\exists v)\Phi$ ни свободно, ни связанно.

3)

$$\dfrac{\dfrac{(\exists v)\Phi\wedge\Psi\vdash\Psi;\qquad \dfrac{\dfrac{(\exists v)\Phi\wedge\Psi\vdash(\exists v)\Phi\wedge\Psi}{(\exists v)\Phi\wedge\Psi\vdash(\exists v)\Phi};\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi\vdash\Phi}{\Psi,\Phi\vdash\Phi};\quad\dfrac{\Psi\vdash\Psi}{\Psi,\Phi\vdash\Psi}}{\Psi,\Phi\vdash\Phi\wedge\Psi}}{\Psi,\Phi\vdash(\exists v)(\Phi\wedge\Psi)}}{\Psi,(\exists v)\Phi\vdash(\exists v)(\Phi\wedge\Psi)}}{(\exists v)\Phi\vdash\Psi\to(\exists v)(\Phi\wedge\Psi)}}{\vdash(\exists v)\Phi\to(\Psi\to(\exists v)(\Phi\wedge\Psi))}}{(\exists v)\Phi\wedge\Psi\vdash\Psi\to(\exists v)(\Phi\wedge\Psi)}}{(\exists v)\Phi\wedge\Psi\vdash(\exists v)(\Phi\wedge\Psi)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi\wedge\Psi\vdash\Phi}{\Phi\wedge\Psi\vdash(\exists v)\Phi};\quad \Phi\wedge\Psi\vdash\Psi}{\Phi\wedge\Psi\vdash(\exists v)\Phi\wedge\Psi}}{(\exists v)(\Phi\wedge\Psi)\vdash(\exists v)\Phi\wedge\Psi}$$

5)

$$\dfrac{(\exists v)\Phi\vee\Psi\vdash(\exists v)\Phi\vee\Psi;\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi\vdash\Phi}{\Phi\vdash\Phi\vee\Psi}}{\Phi\vdash(\exists v)(\Phi\vee\Psi)}}{(\exists v)\Phi\vdash(\exists v)(\Phi\vee\Psi)};\qquad \dfrac{\dfrac{\Psi\vdash\Psi}{\Psi\vdash\Phi\vee\Psi}}{\Psi\vdash(\exists v)(\Phi\vee\Psi)}}{(\exists v)\Phi\vee\Psi\vdash(\exists v)(\Phi\vee\Psi)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\Phi\vee\Psi\vdash\Phi\vee\Psi;\qquad \dfrac{\dfrac{\Phi\vdash\Phi}{\Phi\vdash(\exists v)\Phi}}{\Phi\vdash(\exists v)\Phi\vee\Psi};\qquad \dfrac{\Psi\vdash\Psi}{\Psi\vdash(\exists v)\Phi\vee\Psi}}{\Phi\vee\Psi\vdash(\exists v)\Phi\vee\Psi}}{(\exists v)(\Phi\vee\Psi)\vdash(\exists v)\Phi\vee\Psi}$$

7)

$$\dfrac{\dfrac{[\Phi]^v_y\vdash[\Phi]^v_y}{(\forall v)\Phi\vdash[\Phi]^v_y}}{(\forall v)\Phi\vdash(\forall y)[\Phi]^v_y}$$

Перед доказательством последней секвенции заметим, что $[[\Phi]^v_y]^y_v=\Phi$. Это равенство следует из условий на формулу Φ в записи $[\Phi]^v_y$.

$$\dfrac{\dfrac{[[\Phi]^v_y]^y_v\vdash\Phi}{(\forall y)[\Phi]^v_y\vdash\Phi}}{(\forall y)[\Phi]^v_y\vdash(\forall v)\Phi}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В $ИП^{\Omega}$ имеют место все эквивалентности из § 4 и 5, если $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ считать формулами $ИП^{\Omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно, так как при такой интерпретации переменных $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}$ для формул доказательства в ИВ перейдут в доказательства в $ИП^{\Omega}$.

ТЕОРЕМА I (о замене). Если формула Φ из $ИП^{\Omega}$ получается из формулы Ψ из $ИП^{\Omega}$ заменой некоторого вхождения подформулы Ψ' на формулу Φ' и $\Phi'\equiv\Psi'$, то $\Phi\equiv\Psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по рангу Ψ. Если $\Psi'=\Psi$, то теорема тривиальна. Если $\Psi=\neg\Psi_1$ или $\Psi=\Psi_1\tau\Psi_2$, где $\tau\in\{\wedge,\vee,\to\}$, то доказательство индукционного шага не отличается от соответствующих случаев теоремы о замене для ИВ (§ 4). Таким образом, для завершения доказательства в силу индукционного предположения осталось рассмотреть случаи, когда Ψ имеет вид $(\forall v)\Psi'$ или $(\exists v)\Psi'$. По условию, секвенции $\Phi'\vdash\Psi'$ и $\Psi'\vdash\Phi'$ доказуемы. В силу симметричности Φ' и Ψ' достаточно доказать 2 секвенции:

$$(\forall v)\Psi'\vdash(\forall v)\Phi' \quad \text{и} \quad (\exists v)\Psi'\vdash(\exists v)\Phi'.$$

Приведем их квазивыводы:

$$\dfrac{\dfrac{\Psi'\vdash\Phi'}{(\forall v)\Psi'\vdash\Phi'}}{(\forall v)\Psi'\vdash(\forall v)\Phi'} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\Psi'\vdash\Phi'}{\Psi'\vdash(\exists v)\Phi'}}{(\exists v)\Psi'\vdash(\exists v)\Phi'}$$

Определение конгруэнтности для формул $ИП^{\Omega}$ получается из определения конгруэнтности для формул сигнатуры Ω (§ 17), если в нем слова "сигнатуры Ω" заменить на "исчисления $ИП^{\Omega}$" и в пункте в) слова "каждое вхождение x", "каждое вхождение y" заменить на "каждое свободное вхождение x", "каждое свободное вхождение y".

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если Φ и Ψ – конгруэнтные формулы $ИП^{\Omega}$, то $\Phi \equiv \Psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по рангу формул. (Заметим, что ранги формул Φ и Ψ равны). Если формулы не начинаются с квантора, то предложение следует из леммы 4.2.2) и предложения 2. Если $\Phi = (\forall v)\Phi_{11}$, то $\Psi = (\forall y)\Phi_{21}$ и существует формула Φ_{12}, получающаяся из Φ_{11} заменой всех свободных вхождений переменной v на переменную z, не входящую в Φ_{11} и Φ_{21}. При этом формула Φ_{12} конгруэнтна формуле Φ_{22}, получающейся из Φ_{21} заменой всех свободных вхождений переменной y на переменную z. В силу индукционного предположения и теоремы о замене $(\forall z)\Phi_{12} \equiv (\forall z)\Phi_{22}$. Очевидно, что $[\Phi_{12}]^{z}_{v} = \Phi_{11}$ и $[\Phi_{22}]^{z}_{y} = \Phi_{21}$. По предложению I.7) $\Phi \equiv \Psi$. Случай $\Phi = (\exists v)\Phi_{11}$ рассматривается совершенно аналогично. Предложение доказано.

§ 24. Предваренная нормальная форма

Скажем (сравнить с § 17), что формула Φ из $ИП^{\Omega}$ находится в предваренной нормальной форме, если она имеет вид:

$$(Q_0 v_0)\dots(Q_n v_n)\Phi',$$

где $Q_i, i \le n,$ – кванторы, а Φ' – бескванторная формула.

ТЕОРЕМА 2. Для любой формулы Φ из $ИП^{\Omega}$ существует формула $\Psi \equiv \Phi$, находящаяся в предваренной нормальной форме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2 § 23 формулы $\Phi_1 \to \Phi_2$ и $\neg\Phi_1 \vee \Phi_2$ эквивалентны для любых Φ_1 и Φ_2 из $ИП^{\Omega}$. Следовательно, применяя несколько раз теорему о замене, § 23, можно получить формулу $\Phi' \equiv \Phi$, не содержащую знака $\to$. Индукцией по рангу Φ' докажем, что существует $\Psi \equiv \Phi$ в предваренной нормальной форме и $\tau(\Psi) = \tau(\Phi')$. Если Φ' – бескванторная, то в качестве Ψ можно взять саму Φ'. Если $\Phi' = (Qv)\Phi_1$, то, по предположению индукции и теореме о замене, $\Phi' \equiv (Qv)\Phi_2$, где Φ_2 находится в предваренной нормальной форме и $\tau(\Phi_2) = \tau(\Phi_1)$. В этом случае в качестве Ψ берем формулу $(Qv)\Phi_2$. Таким образом, осталось рассмотреть случаи: I) $\Phi' = \neg\Phi_1$ и 2) $\Phi' = \Phi_1 \tau \Phi_2, \tau \in \{\vee, \wedge\}$, где Φ_1 имеет кванторы и находится в предваренной нормальной форме. (Здесь мы воспользуемся коммутативностью $\wedge$ и $\vee$).

Пусть $\Phi_1 = (\exists v)\Phi_3$. Случай с другим квантором рассматривается совершенно аналогично. Из предложения I § 23 следует, что в случае I) $\Phi' \equiv (\forall v)\neg\Phi_3$. По предположению индукции существует $\Psi_1 \equiv \neg\Phi_3$, $\tau(\Psi_1) = \tau(\neg\Phi_3)$, находящаяся в предваренной нормальной форме. Полагаем в этом случае $\Psi = (\forall v)\Psi_1$. Рассмотрим случай 2). Пусть y – переменная, не входящая в Φ'. Из предложения I.8), § 23, и теоремы о замене получаем $\Phi' \equiv (\exists y)[\Phi_3]^{v}_{y}\tau\Phi_2$. Из эквивалентностей 3) и 5) того же предложения имеем $\Phi' \equiv (\exists y)([\Phi_3]^{v}_{y}\tau\Phi_2)$. По индукционному предположению существует $\Phi_4 \equiv ([\Phi_3]^{v}_{y}\tau\Phi_2)$, $\tau(\Phi_4) = \tau([\Phi_3]^{v}_{y}\tau\Phi_2)$, находящаяся в предваренной нормальной форме. В качестве Ψ теперь можно взять $(\exists y)\Psi_1$. Теорема доказана.

§ 25. Исчисление предикатов гильбертовского типа

В этом параграфе мы рассмотрим исчисление $ИП^{\Omega}_1$, которое назовем **исчислением предикатов гильбертовского типа** и покажем его эквивалентность в определенном смысле исчислению $ИП^{\Omega}$. Исчисление $ИП^{\Omega}_1$ является расширением $ИВ_1$ (§ 8) подобно тому, как $ИП^{\Omega}$ является расширением ИВ.

Определение формулы $ИП^{\Omega}_1$ то же, что и для $ИП^{\Omega}$. Секвенций в $ИП^{\Omega}_1$ нет.

Аксиомы $ИП^{\Omega}_1$ получаются из следующих I2 схем заменой переменных Φ, Ψ, Θ конкретными формулами $ИП^{\Omega}_1$.

I. $\Phi \to (\Psi \to \Phi)$,
2. $(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to (\Psi \to \Theta)) \to (\Phi \to \Theta))$,
3. $(\Phi \wedge \Psi) \to \Phi$,
4. $(\Phi \wedge \Psi) \to \Psi$,
5. $\Phi \to (\Psi \to (\Phi \wedge \Psi))$,
6. $\Phi \to (\Phi \vee \Psi)$,
7. $\Psi \to (\Phi \vee \Psi)$,
8. $(\Phi \to \Theta) \to ((\Psi \to \Theta) \to ((\Phi \vee \Psi) \to \Theta))$,
9. $(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to \neg\Psi) \to \neg\Phi)$,
I0. $\neg\neg\Phi \to \Phi$,
II. $(\forall v)\Phi \to (\Phi)^{v}_{y}$,
I2. $(\Phi)^{v}_{y} \to (\exists v)\Phi$.

Правила вывода $ИП^{\Omega}_1$:

I. $$\frac{\Phi, \Phi \to \Psi}{\Psi};$$

II. $\dfrac{\Psi \to \Phi}{\Psi \to (\forall v)\Phi}$,
III. $\dfrac{\Phi \to \Psi}{(\exists v)\Phi \to \Psi}$ $\Bigg\}$ где v не входит свободно в Ψ.

Д о к а з а т е л ь с т в о м в ИП_1^{Ω} формулы Φ называется такая последовательность $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$ формул ИП_1^{Ω}, что $\Phi_n = \Phi$ и для каждого $i \leq n$ член Φ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

I) Φ_i – аксиома ИП_1^{Ω},

2) Φ_i получается из некоторых Φ_j, $j < i$, по одному из правил I–III.

Если существует доказательство в ИП_1^{Ω} формулы Φ, то Φ называется д о к а з у е м о й в ИП_1^{Ω} (обозначаем $\vdash \Phi$).

В ы в о д о м в ИП_1^{Ω} формулы Φ из множества формул Γ называется такая последовательность $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$ формул ИП_1^{Ω}, что $\Phi_n = \Phi$ и для каждого $i \leq n$ член Φ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

I) Φ_i доказуема в ИП_1^{Ω},

2) Φ_i принадлежит Γ,

3) Φ_i получается из некоторых Φ_j, $j < i$, по одному из правил I–III, причем при применении правил II и III переменная v не должна входить ни в одну формулу из Γ свободно.

Правило вывода
$$\frac{\Phi_1, \ldots, \Phi_k}{\Psi}$$
называется п р о и з в о д н ы м в ИП_1^{Ω}, если его добавление к исчислению ИП_1^{Ω} не увеличивает множество доказуемых формул.

К в а з и в ы в о д о м в ИП_1^{Ω} формулы Φ из множества формул Γ называется такая последовательность $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$, что $\Phi_n = \Phi$ и Φ_i, $i \leq n$, удовлетворяют одному из условий 1)–3) из определения вывода или условию

4) Φ_i получается из некоторых Φ_j, $j < i$, по одному из производных правил вывода.

Если существует вывод в ИП_1^{Ω} формулы Φ из множества Γ, то Φ называется выводимой в ИП_1^{Ω} из Γ. При этом Γ называется множеством гипотез. Очевидно, что доказуемость формулы эквивалентна ее выводимости из пустого множества гипотез. Поэтому выводимость будем обозначать через $\Gamma \vdash \Phi$.

Пусть Φ, Ψ – формулы ИП_1^{Ω}, $\vdash \Phi \to \Psi$ и $\vdash \Psi \to \Phi$, тогда Φ и Ψ назовем э к в и в а л е н т н ы м и в ИП_1^{Ω} и обозначим через $\Phi \overset{1}{\equiv} \Psi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Любая тавтология Φ доказуема в ИП_1^{Ω}.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ψ – скелет Φ. В силу теоремы I.II Ψ доказуема в ИВ_1. Ясно, что, заменив пропозициональные переменные в доказательстве ИВ_1 формулы Ψ на соответствующие формулы ИП_1^{Ω}, получим доказательство Φ в ИП_1^{Ω}.

СЛЕДСТВИЕ I. Если Φ и Ψ – скелетно эквивалентные формулы ИП_1^{Ω}, то доказуемость Φ в ИП_1^{Ω} равносильна доказуемости Ψ в ИП_1^{Ω}.

ТЕОРЕМА 3 (о дедукции). Если $\Gamma \cup \{\Phi, \Psi\}$ – множество формул ИП_1^{Ω}, то из $\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$ следует $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по длине n минимального вывода $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ формулы Ψ из $\Gamma \cup \{\Phi\}$. Случаи, когда $n=1$ (т.е. Ψ – доказуемая формула или принадлежит $\Gamma \cup \{\Phi\}$) или когда Ψ_n получается по правилу I, ничем не отличаются от соответствующих случаев для ИВ_1 и уже рассмотрены в доказательстве теоремы I.I2. В силу минимальности вывода осталось рассмотреть случаи, когда Ψ получается из Ψ_{n-1} по правилам II или III. По предположению индукции мы уже имеем $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi_{n-1}$.

Пусть $\Psi_{n-1} = (\Theta_1 \to \Theta_2)$ и $\Psi = (\Theta_1 \to (\forall v)\Theta_2)$. При этом в силу определения вывода v не входит свободно в Φ, члены Γ и Θ_1. Так как $\Phi \to (\Theta_1 \to \Theta_2)$ и $(\Phi \wedge \Theta_1) \to \Theta_2$ – скелетно эквивалентны, то в силу следствия I последовательность
$$\Phi \to \Psi_{n-1},\ (\Phi \wedge \Theta_1) \to \Theta_2,\ (\Phi \wedge \Theta_1) \to (\forall v)\Theta_2,\ \Phi \to (\Theta_1 \to (\forall v)\Theta_2)$$
является квазивыводом $\Phi \to \Psi$ из Γ.

Пусть теперь Ψ получается по правилу III. Тогда $\Psi_{n-1} = (\Theta_1 \to \Theta_2)$ и $\Psi = ((\exists v)\Theta_1 \to \Theta_2)$. Здесь v не входит свободно в Φ, Θ_2 и $\Theta \in \Gamma$. В силу скелетных эквивалентностей
$$\Phi \to \Psi_{n-1} \overset{s}{\equiv} \Theta_1 \to (\Phi \to \Theta_2) \quad \text{и} \quad (\exists v)\Theta_1 \to (\Phi \to \Theta_2) \overset{s}{\equiv} \Phi \to ((\exists v)\Theta_1 \to \Theta_2).$$
следующая последовательность
$$\Phi \to \Psi_{n-1},\ \Theta_1 \to (\Phi \to \Theta_2),\ (\exists v)\Theta_1 \to (\Phi \to \Theta_2),\ \Phi \to ((\exists v)\Theta_1 \to \Theta_2)$$
является квазивыводом $\Phi \to \Psi$ из Γ. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Phi$ – формулы ИП_1^{Ω}. Тогда $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\} \vdash \Phi$, если и только если $\vdash \Phi_1 \to (\Phi_2 \to \ldots (\Phi_n \to \Phi) \ldots)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. n раз применяются теорема 3 и правило I.

ТЕОРЕМА 4. Секвенция $\Gamma \vdash \Phi$ тогда и только тогда доказуема в $ИП^{\Omega}$, когда Φ выводима из $\{\Gamma\}$ в $ИП_1^{\Omega}$. В частности, множества доказуемых формул в $ИП^{\Omega}$ и в $ИП_1^{\Omega}$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 2 достаточно показать, что Φ доказуема в $ИП_1^{\Omega}$ тогда и только тогда, когда Φ доказуема в $ИП^{\Omega}$. Для доказательства того, что $\models\Phi$ влечет доказуемость Φ в $ИП^{\Omega}$, достаточно показать, что аксиомы II–I2 доказуемы в $ИП^{\Omega}$, а правила вывода I$'$–III$'$, полученные из I–III приписыванием перед посылками и заключениями знака $\vdash$, будут производными в $ИП^{\Omega}$. Правило I является частным случаем (при $\Gamma=\varnothing$) правила 8. Правила II и III очевидным образом являются производными от правил 7, 8, I3 и I6. Приведем доказательства аксиом II и I2:

$$\dfrac{\dfrac{(\Phi)^{v}_{y} \vdash (\Phi)^{v}_{y}}{(\forall v)\Phi \vdash (\Phi)^{v}_{y}}}{\vdash (\forall v)\Phi \to (\Phi)^{v}_{y}}. \qquad \dfrac{\dfrac{(\Phi)^{v}_{y} \vdash (\Phi)^{v}_{y}}{(\Phi)^{v}_{y} \vdash (\exists v)\Phi}}{\vdash (\Phi)^{v}_{y} \to (\exists v)\Phi}$$

Правило I2 сохраняет выводимость в $ИП^{\Omega}$. Действительно, если $\{\Phi_1,\dots,\Phi_n\}\models\Phi$, то $\models(\Phi_1\to\dots(\Phi_n\to\Phi)\dots)$; $\{\Psi\}\models(\Phi_1\to\dots(\Phi_n\to\Phi)\dots)$ и $\{\Phi_1,\dots,\Phi_n,\Psi\}\models\Phi$.

Для доказательства того, что доказуемость Φ в $ИП^{\Omega}$ влечет доказуемость Φ в $ИП_1^{\Omega}$, в силу теоремы 3 и доказательства теоремы I.II, достаточно показать, что правила I3–I6 сохраняют выводимость в $ИП_1^{\Omega}$.

<u>Правило I3</u>. Пусть $\Gamma\models\Phi$. Очевидно, что $\Gamma\models\Phi$ равносильно $\Gamma\cup\{\Psi\}\models\Phi$, где Ψ – доказуемая формула $ИП_1^{\Omega}$. Поэтому можно считать, что $\Gamma=\{\Phi_1,\dots,\Phi_n\}$. По теореме 3 $\{\Phi_1,\dots,\Phi_{n-1}\}\models\Phi_n\to\Phi$. По правилу II получаем $\{\Phi_1,\dots,\Phi_{n-1}\}\models\Phi_n\to(\forall v)\Phi$, а по правилу I $\{\Phi_1,\dots,\Phi_n\}\models(\forall v)\Phi$.

<u>Правило I4</u>. Пусть $\Gamma\cup\{(\Phi)^{v}_{y}\}\models\Psi$. По теореме 3 $\Gamma\models(\Phi)^{v}_{y}\to\Psi$. В силу аксиомы II $\Gamma\cup\{(\forall v)\Phi\}\models(\Phi)^{v}_{y}$. По правилу I $\Gamma\cup\{(\forall v)\Phi\}\models\Psi$.

<u>Правило I5</u>. Очевидно в силу аксиомы I2.

<u>Правило I6</u>. Очевидно в силу правила III. Теорема 4 доказана.

Упражнение I. Показать, что секвенция $\Gamma\vdash$ тогда и только тогда доказуема в $ИП^{\Omega}$, когда из $\{\Gamma\}$ выводима в $ИП_1^{\Omega}$ любая формула Φ.

§ 26. Теорема о существовании модели

Все формулы в этом параграфе будут считаться формулами $ИП_1^{\Omega}$, выводимость $\models$ – также в $ИП_1^{\Omega}$. Мы без указания будем использовать теорему 4 при перенесении результатов § 22–24 для $ИП^{\Omega}$ на ис-

числение $ИП_1^{\Omega}$.

Множество формул Γ называется противоречивым, если для некоторой формулы Φ $\Gamma\models\Phi$ и $\Gamma\models\neg\Phi$. В противном случае Γ называется непротиворечивым.

Предикатная система $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω называется моделью совокупности формул Γ исчисления $ИП_1^{\Omega}$, если переменным, входящим свободно хотя бы в одну из формул из Γ, можно приписать такие значения из $|\mathfrak{A}|$, что все формулы из Γ при этих значениях истинны в $\mathfrak{A}$. Определение истинности формулы в $\mathfrak{A}$ при заданных значениях переменных, входящих свободно в эту формулу, в § I6 было дано только для формул сигнатуры Ω. Если запись "$\Phi=\Phi(y_1,\dots,y_n)$" понимать как "переменные, входящие свободно в Φ, содержатся среди $y_1,\dots,y_n$", то это же определение применимо и для формул исчисления $ИП_1^{\Omega}$. Мы называем формулу Φ исчисления $ИП_1^{\Omega}$ тождественно истинной, если она истинна в каждой предикатной системе $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω при любом способе приписывания переменным, входящим свободно в Φ, в качестве значений элементов $|\mathfrak{A}|$.

Целью этого параграфа является доказательство следующей центральной в исчислении предикатов теоремы.

ТЕОРЕМА 5 (о существовании модели). Если множество формул Γ непротиворечиво, то Γ имеет модель.

Упражнение I. Доказать:

а) если Γ – противоречиво, то $\Gamma\models\Psi$ для любой формулы Ψ;

б) если $\Gamma\cup\{\Phi\}$ противоречиво, то $\Gamma\models\neg\Phi$;

в) если $\{\Phi\}$ непротиворечиво, то $\{(\exists v)\Phi\}$ непротиворечиво.

ЛЕММА I. Если множество формул Γ непротиворечиво, то для любой формулы Φ либо $\Gamma\cup\{\Phi\}$, либо $\Gamma\cup\{\neg\Phi\}$ непротиворечиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из упражнения I б).

ЛЕММА 2. Если множество формул $\Gamma\cup\{(\exists v)\Phi\}$ непротиворечиво, то $\Gamma\cup\{[\Phi]^{v}_{y}\}$ непротиворечиво при условии, что y не входит свободно в Γ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если лемма не верна, то $\Gamma\models\neg[\Phi]^{v}_{y}$. Используя правило вывода II и аксиому I, получаем $\Gamma\models(\forall y)\neg[\Phi]^{v}_{y}$. В силу $\neg(\exists v)\Phi \overset{1}{\equiv} (\forall v)\neg\Phi \overset{1}{\equiv} (\forall y)\neg[\Phi]^{v}_{y}$ имеем $\Gamma\models\neg(\exists v)\Phi$. Это противоречит непротиворечивости $\Gamma\cup\{(\exists v)\Phi\}$.

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 3. Если $\Gamma\subseteq\Gamma_1\subseteq\dots\subseteq\Gamma_n\subseteq\dots, n\geqslant 0$, и $\Gamma_n, n\geqslant 0$, непротиворечивы, то $\Gamma_\omega=\bigcup\limits_{n\geqslant 0}\Gamma_n$ непротиворечиво.

Формулу Φ назовем допустимой, если все ее связанные переменные x_i имеют нечетный индекс i, а свободные переменные – четный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 5. Докажем сначала теорему при следующих предположениях:

А) Γ состоит из одной допустимой формулы.

В) Сигнатура Ω перечислима.

Пусть

$$\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n, \ldots, n \geqslant 0, -$$

нумерация всех допустимых формул сигнатуры Ω. Будем строить последовательность

$$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \ldots \subseteq \Gamma_n \subseteq \ldots, n \geqslant 0,$$

множеств допустимых формул следующим образом:

I. $\Gamma_0 = \Gamma$.

2. Если $\Gamma_n \cup \{\Phi_n\}$ противоречиво, то $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg \Phi_n\}$.

3. Если $\Gamma_n \cup \{\Phi_n\}$ непротиворечиво и Φ_n не начинается с квантора существования, то $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\Phi_n\}$.

4. Если $\Gamma_n \cup \{\Phi_n\}$ непротиворечиво и $\Phi_n = (\exists v)\Phi'$, то $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{(\Phi')^v_y, \Phi_n\}$, где y – переменная x_{2i} с наименьшим i, не входящая в Γ_n и Φ_n.

Положим $\Gamma_\omega = \bigcup_{n \geqslant 0} \Gamma_n$. Установим некоторые свойства множества Γ_ω. Пусть Φ, Ψ – произвольные допустимые формулы, $v = x_{2j+1}, j \geqslant 0$.

I) Γ_ω непротиворечиво;

2) либо $\Phi \in \Gamma_\omega$, либо $\neg \Phi \in \Gamma_\omega$;

3) $\Gamma_\omega \vdash \Phi$ эквивалентно $\Phi \in \Gamma_\omega$;

4) $\Phi, \Psi \in \Gamma_\omega$ эквивалентно тому, что $\Phi \wedge \Psi \in \Gamma_\omega$;

5) $\Phi \vee \Psi \in \Gamma_\omega$ эквивалентно тому, что либо $\Phi \in \Gamma_\omega$, либо $\Psi \in \Gamma_\omega$;

6) $\neg \Phi \in \Gamma_\omega$ эквивалентно $\Phi \notin \Gamma_\omega$;

7) $\Phi \to \Psi \in \Gamma_\omega$ эквивалентно тому, что либо $\neg \Phi \in \Gamma_\omega$, либо $\Psi \in \Gamma_\omega$;

8) $(\exists v)\Phi \in \Gamma_\omega$ эквивалентно тому, что для некоторой переменной x_{2i} $(\Phi)^v_{x_{2i}} \in \Gamma_\omega$;

9) $(\forall v)\Phi \in \Gamma_\omega$ эквивалентно тому, что для любой переменной x_{2i} $(\Phi)^v_{x_{2i}} \in \Gamma_\omega$.

Для доказательства I), в силу леммы 3, достаточно установить, что Γ_n, $n \geqslant 0$, непротиворечивы. Индукция по n. По условию $\Gamma_0 = \Gamma$ непротиворечиво. Рассмотрим случаи 2–4 при построении Γ_{n+1}. Если имеет место случай 2, то Γ_{n+1} непротиворечиво по лемме I. В случае 3 Γ_{n+1} непротиворечива по условию. Непротиворечивость Γ_{n+1} в случае 4 следует из леммы 2.

Свойство I) доказано. Свойство 2) следует из построения Γ_ω и того, что для любой допустимой формулы Φ существует $n \geqslant 0$, что $\Phi = \Phi_n$. Свойства 3)–6) легко следуют из свойств I) и 2). Докажем свойство 7). Если $\neg \Phi \in \Gamma_\omega$ или $\Psi \in \Gamma_\omega$, то $\Gamma_\omega \vdash \neg \Phi \vee \Psi$. Из эквивалентности $\Phi \to \Psi \stackrel{1}{\equiv} \neg \Phi \vee \Psi$ получаем $\Gamma_\omega \vdash \Phi \to \Psi$. Если $\Phi \to \Psi \notin \Gamma_\omega$, то в силу 2) $\neg(\Phi \to \Psi) \in \Gamma_\omega$. Это противоречит непротиворечивости Γ_ω и $\Gamma_\omega \vdash \Phi \to \Psi$. Пусть теперь $\neg \Phi \notin \Gamma_\omega$ и $\Psi \notin \Gamma_\omega$. Тогда из 2) получаем $\neg\neg \Phi \in \Gamma_\omega$ и $\neg \Psi \in \Gamma_\omega$. Следовательно, $\Gamma_\omega \vdash \Phi \wedge \neg \Psi$ и из эквивалентностей $\Phi \wedge \neg \Psi \stackrel{1}{\equiv} \stackrel{1}{\equiv} \neg(\neg \Phi \vee \Psi) \stackrel{1}{\equiv} \neg(\Phi \to \Psi)$ получаем $\Gamma_\omega \vdash \neg(\Phi \to \Psi)$. Из I) следует, что $\Phi \to \Psi \notin \Gamma_\omega$.

Докажем свойство 8). Пусть $\Phi_n = (\exists v)\Phi$. Если $(\exists v)\Phi \in \Gamma_\omega$, то $\Gamma_n \cup \{\Phi_n\}$ непротиворечиво и для некоторого x_{2i} $(\Phi)^v_{x_{2i}} \in \Gamma_\omega$ по построению Γ_{n+1}. Если $(\Phi)^v_{x_{2i}} \in \Gamma_\omega$, то в силу аксиомы I2 и правила I $\Gamma_\omega \vdash (\exists v)\Phi$. Из 3) следует $(\exists v)\Phi \in \Gamma_\omega$. Докажем теперь 9). Если $(\forall v)\Phi \in \Gamma_\omega$, то из аксиомы II и правила I получаем $\Gamma_\omega \vdash (\Phi)^v_{x_{2i}}$ и в силу 3) $(\Phi)^v_{x_{2i}} \in \Gamma_\omega$ для любой переменной x_{2i}, $i \geqslant 0$. Если $(\forall v)\Phi \notin \Gamma_\omega$, то $\Gamma_\omega \vdash \neg(\forall v)\Phi$. Из эквивалентности $\neg(\forall v)\Phi \stackrel{1}{\equiv} (\exists v)\neg \Phi$ получаем, что $\Gamma_\omega \vdash (\exists v)\neg \Phi$. В силу 3) и 8) $(\neg \Phi)^v_{x_{2i}} \in \Gamma_\omega$ для некоторого x_{2i}. Из I) получаем $(\Phi)^v_{x_{2i}} \notin \Gamma_\omega$. Свойство 9) доказано.

Пусть $|\mathfrak{A}_0| = \{x_{2i} \mid i \geqslant 0\}$. Определим предикатную систему $\mathfrak{A}_0$ с основным множеством $|\mathfrak{A}_0|$ сигнатуры Ω, задавая на $|\mathfrak{A}_0|$ предикаты следующим образом:

$$\mathfrak{A}_0 \models \mathcal{P}(v_1, \ldots, v_n) \Leftrightarrow \mathcal{P}(v_1, \ldots, v_n) \in \Gamma_\omega.$$

Свободным переменным допустимой формулы Φ припишем их самих в качестве значений. Индукцией по рангу формулы Φ покажем, что $\mathfrak{A}_0 \models \Phi$ эквивалентно $\Phi \in \Gamma_\omega$. Для атомных формул – это определение.

Если $\mathfrak{A}_0 \models \Phi_1 \wedge \Phi_2$, то $\mathfrak{A}_0 \models \Phi_1$ и $\mathfrak{A}_0 \models \Phi_2$. По индукционному предположению и свойству 4) для Γ_ω получаем $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \in \Gamma_\omega$. Если $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \in \Gamma_\omega$, то $\Phi_1, \Phi_2 \in \Gamma_\omega$ по свойству 4). По индукционному предположению $\mathfrak{A}_0 \models \Phi_1$ и $\mathfrak{A}_0 \models \Phi_2$, следовательно, $\mathfrak{A}_0 \models \Phi_1 \wedge \Phi_2$. Для $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, $\Phi = \Phi_1 \to \Phi_2$, $\Phi = \neg \Phi_1$, $\Phi = (\exists v)\Phi_1$ и $\Phi = (\forall v)\Phi_1$ аналогично используются соответствующие свойства Γ_ω и определение истинности. Пусть, например, $\Phi = (\exists v)\Phi_1$ и $(\Phi_1)^v_{x_{2i}} \in \Gamma_\omega$. По индукционному предположению $\mathfrak{A}_0 \models (\Phi_1)^v_{x_{2i}}$. По определению истинности для квантора $\exists$ $\mathfrak{A}_0 \models (\exists v)\Phi_1$. С другой стороны, по свойству 8) из $(\Phi_1)^{v}_{x_{2i}} \in \Gamma_\omega$ следует $(\exists v)\Phi_1 \in \Gamma_\omega$.

Итак, все формулы из Γ_ω истинны в $\mathfrak{A}_0$. Так как $\Gamma \subseteq \Gamma_\omega$, то в $\mathfrak{A}_0$ истинна каждая формула из Γ.

Освободимся от ограничений А) и В). Покажем сначала, что теорема справедлива для $\Gamma = \{\Phi\}$, где Φ – произвольная замкнутая формула сигнатуры Ω. Очевидно, что можно построить допустимую формулу Ψ, конгруэнтную формуле Φ. В силу предложений 23.3 и 22.3 для любой системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω $\mathfrak{A} \models \Phi$ эквивалентно $\mathfrak{A} \models \Psi$.

Пусть теперь Γ – произвольное непротиворечивое множество формул произвольной сигнатуры Ω. Пусть $\{\Phi_0, \ldots, \Phi_n\} \subseteq \Gamma$ и $v_1, \ldots v_k$ – все свободные переменные, входящие в формулы Φ_i, $i \le n$. Очевидно, что $\{\bigwedge_{i=0}^{n} \Phi_i\}$ непротиворечиво. По лемме 4 $\{(\exists v_1)\ldots(\exists v_k)\bigwedge_{i=0}^{n} \Phi_i\}$ непротиворечиво и, по уже доказанному, истинно на некоторой системе. Следовательно, каждое конечное подмножество множества имеет модель. По теореме компактности (§ 20) имеет модель и Γ.

Теорема 5 доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. (Теорема Геделя о полноте). Формула Φ тогда и только тогда доказуема, когда Φ тождественно истинна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону теорема уже доказана в § 22 (предложение 2). Пусть Φ не доказуема. Тогда $\{\neg\Phi\}$ непротиворечиво (упражнение Iб и аксиома I0). По теореме 5 $\neg\Phi$ имеет модель. Следовательно, Φ не является тождественно истинной.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\Omega \subseteq \Omega'$ – две сигнатуры, то $ИП_1^{\Omega'}$ является консервативным расширением (§ 9) исчисления $ИП_1^{\Omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Φ не доказуема в $ИП_1^{\Omega}$, то по следствию I существует система сигнатуры Ω, которая является моделью для $\neg\Phi$. Определив произвольным образом предикаты из $D\Omega' - D\Omega$ на основном множестве этой системы, получим систему сигнатуры Ω', которая является моделью для $\neg\Phi$. Следовательно, Φ не доказуема в $ИП_1^{\Omega'}$.

Следствие I показывает полноту (§ 7) исчисления предикатов по отношению к понятию тождественной истинности. Как отмечалось в § 7, ИВ обладает свойством разрешимости, то есть существованием "разрешающей процедуры", позволяющей за конечное число операций определить, доказуема формула Φ в ИВ или нет. Однако, для исчисления предикатов такой процедуры нет. Это доказывается в курсе "Теория алгоритмов".

Упражнение. Доказать независимость (§ 7) $ИП^{\Omega}$ и $ИП_1^{\Omega}$.

§ 27. Исчисление предикатов с равенством

В этом параграфе мы будем рассматривать сигнатуры Ω, имеющие фиксированный двухместный предикатный символ, который мы будем называть равенством и обозначать через = .

Исчисление $ИПР^{\Omega}$ предикатов с равенством получается из $ИП_1^{\Omega}$ добавлением следующих аксиом:

I. $(\forall v)\, v = v$,

2. $(\forall u)(\forall v)(u = v \to v = u)$,

3. $(\forall u)(\forall v)(\forall y)((u = v \wedge v = y) \to u = y)$,

$4_{\mathcal{P}}$. $(\forall u_1)\ldots(\forall u_k)(\forall v_1)\ldots(\forall v_k)((u_1 = v_1 \wedge \ldots \wedge u_k = v_k) \to (\mathcal{P}(u_1, \ldots, u_k) \to \mathcal{P}(v_1, \ldots, v_k)))$,

где $\mathcal{P} \in D\Omega$, $\Omega(\mathcal{P}) = k$.

Упражнение I. Показать, что в $ИПР^{\Omega}$ для любой формулы Φ доказуема формула

$$(\forall v)(\forall y)(v = y \to (\Phi \to (\Phi)^{v}_{y})).$$

(Указание: воспользоваться теоремой о замене для $ИП^{\Omega}$).

Под выводимостью $\vdash$ и связанным с ней понятием непротиворечивости в этом параграфе будем понимать всюду выводимость в $ИПР^{\Omega}$. Легко понять, что леммы 26.I–26.3 в этом случае также справедливы. Для $ИПР^{\Omega}$ также справедлива теорема 5.

ТЕОРЕМА 6. Если Γ – непротиворечивое множество формул $ИПР^{\Omega}$, то Γ имеет модель.

Доказательство мало отличается от доказательства теоремы 5. Мы приведем только необходимые добавления к доказательству предыдущей теоремы.

Предварительные ограничения на Γ и построение Γ_ω не отличаются от предыдущего. Свойства I)–9) и доказательства их те же. Сформулируем дополнительное свойство Γ_ω. Пусть $v_1, \ldots, v_k, y_1, \ldots, y_k, v_1, v_2, v_3$ – произвольные переменные с четными индексами и $\mathcal{P}$ k-местный предикатный символ из $D\Omega$.

I0) а) $v_1 = v_1 \in \Gamma_\omega$;

б) если $v_1 = v_2 \in \Gamma_\omega$, то $v_2 = v_1 \in \Gamma_\omega$;

в) если $v_1 = v_2 \in \Gamma_\omega$ и $v_2 = v_3 \in \Gamma_\omega$, то $v_1 = v_3 \in \Gamma_\omega$;

г) если $v_i = y_i \in \Gamma_\omega$, $1 \le i \le k$, и $\mathcal{P}(v_1, \ldots, v_k) \in \Gamma_\omega$, то $\mathcal{P}(y_1, \ldots, y_k) \in \Gamma_\omega$.

Свойство I0 проверяется непосредственно, используя свойство 3) для Γ_ω и аксиомы I–$4_{\mathcal{P}}$ $ИПР^{\Omega}$.

Система $\mathfrak{A}_0$ строится так же, как в теореме 5. Пусть для $v, y \in |\mathfrak{A}_0|$ $E(v, y) \Leftrightarrow v = y \in \Gamma_\omega$. В силу свойств I0 а) – I0 в) предикат E будет эквивалентностью на $|\mathfrak{A}_0|$ Положим: $|\mathfrak{A}_1| = \{\tilde{x}_{\varkappa_i} \mid i \geq 0\}$, где $\tilde{x}_{\varkappa_i}$ – класс эквивалентности на $|\mathfrak{A}_0|$ по отношению E, содержащий $x_{\varkappa_i}$. Определим систему $\mathfrak{A}_1$ с основным множеством $|\mathfrak{A}_1|$, полагая для $\varphi \in D\Omega$

$$\mathfrak{A}_1 \models \varphi(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_0 \models \varphi(v_1, \ldots, v_n).$$

В силу свойства 3) для Γ_ω и упражнения I это определение корректно. Предоставляем читателю проверить, что в $\mathfrak{A}_1$ истинны все предложения из Γ_ω.

Снятие ограничений на Γ и переход к сигнатуре произвольной мощности не отличается от соответствующих рассуждений в теореме 5. Теорема 6 доказана.

СЛЕДСТВИЕ I (теорема полноты ИПР$^\Omega$). Формула Φ ИПР$^\Omega$ доказуема тогда и только тогда, когда Φ тождественно истинна.

Доказательство следствия такое же, как и доказательство следствия 27.I, и предоставляется читателю.

Упражнение. Доказать, что ИПР$^\Omega$ является консервативным расширением ИП$_1^\Omega$.

ДОПОЛНЕНИЕ

§ I Д. Аксиома выбора

Следующая система аксиом сигнатуры $\langle \in^{(2)} \rangle$ известна как система теории множеств Цермело-Френкеля. Мы пишем "$\Phi \leftrightarrow \Psi$" вместо "$(\Phi \to \Psi) \wedge (\Psi \to \Phi)$".

I. Аксиома экстенсиональности:

$$(\forall x)(\forall y)((\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y).$$

Она утверждает, что множества с одними и теми же элементами равны.

2. Аксиома пустого множества:

$$(\exists x)(\forall y) \neg (y \in x).$$

Она утверждает существование пустого множества $\varnothing$.

3. Аксиома неупорядоченной пары:

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y).$$

Она утверждает существование множества $\{x, y\}$ для любых множеств x и y.

4. Аксиома суммы:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\exists t)(z \in t \wedge t \in x)).$$

Она утверждает существование для любого множества x множества, являющегося объединением всех элементов x.

5. Аксиома бесконечности:

$$(\exists x)(\varnothing \in x \wedge (\forall y)(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)).$$

Она утверждает существование бесконечного множества.

6. Аксиома подстановки:

Для каждой формулы $\Phi(x, y, t_1, \ldots, t_k)$ сигнатуры $\langle \in^{(2)} \rangle$ аксиомой будет

$$(\forall t_1) \ldots (\forall t_k)((\forall x)(\exists ! y)\Phi(x, y, t_1, \ldots, t_k) \to (\forall u)(\exists v)\Psi(u, v)),$$

где квантор $(\exists ! y)$ обозначает "существует единственный y", а $\Psi(u, v)$ обозначает формулу $(\forall r)(r \in v \leftrightarrow (\exists s)(s \in u \wedge \Phi(s, r, t_1,$

$\ldots, t_k)))$.

Эта аксиома позволяет получать новые множества, если они являются образами отображений, определенных на множествах и задаваемых с помощью формулы сигнатуры $\langle \in^{(2)} \rangle$.

7. А к с и о м а с т е п е н и:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

Она утверждает, что для любого множества x существует множество его подмножеств $P(x)$.

8. А к с и о м а р е г у л я р н о с т и:

$$(\forall x)(\exists y)(x = \varnothing \vee (y \in x \wedge (\forall z)(z \in x \rightarrow z \notin y))).$$

Она налагает требования на множества, позволяющие исключить "противоречивые" множества (см., например, парадокс Кантора во введении). Из нее в частности следует, что не существует цепи

$$x_0 \ni x_1 \ni \ldots \ni x_k \ni \ldots, \quad k \geqslant 0.$$

9. А к с и о м а в ы б о р а (для краткости мы дадим ее словесную формулировку):

Если $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ – отображение и $f(x) \neq \varnothing$ для всех $x \in \mathcal{X}$, то существует функция "выбора" g, определенная на множестве $\mathcal{X}$ и $g(x) \in f(x)$ для $x \in \mathcal{X}$.

Систему аксиом I–8 обозначим через ZF, а систему I–9 через ZFC. Все утверждения о множествах из главы 2 можно формально вывести в исчислении предикатов из аксиом ZFC. Более того, основная часть математики допускает формулировку своих понятий в терминах множеств и доказательства теорем об этих понятиях могут быть преобразованы в формальные выводы из аксиом ZFC.

В этом параграфе мы рассмотрим более подробно аксиому выбора и покажем ее эквивалентность в системе ZF некоторым другим утверждениям. Доказательства будут даны в "наивной" теории множеств. Однако, мы предлагаем читателю поверить или проверить, что перевод этих доказательств в формальные доказательства в ZF требует лишь терпения и времени.

Множество x называется транзитивным, если из $y \in x$ следует $y \subseteq x$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Если все элементы множества x являются транзитивными множествами, то x строго частично уполне упорядочено отношением $\in$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для строгого порядка нужно проверить для $u, v, w \in x$ антисимметричность $u \in v \to v \notin u$ и транзитивность $(u \in v \wedge v \in w) \to$

$u \in w$. Транзитивность следует из транзитивности w. Если бы было $u \in v$ и $v \in u$ для некоторых множеств u, v, то $u \ni v \ni u \ni v \ldots$ была бы бесконечной цепью, существование которой отрицается аксиомой регулярности. Если бы $\in$ не являлось полным частичным порядком на x, то также существовала бы цепь $u_1 \ni u_2 \ni \ldots \ni u_k \ni \ldots$, противоречащая аксиоме регулярности. Предложение доказано.

Множество α называется о р д и н а л о м, если оно транзитивно и линейно упорядочено отношением $\in$. Из предложения I следует, что ординал вполне упорядочен отношением $\in$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого строго вполне упорядоченного множества $\langle \mathcal{X}, < \rangle$ существует единственный ординал α, такой что $\langle \alpha, \in \rangle$ подобно $\langle \mathcal{X}, < \rangle$. Назовем этот ординал типом вполне упорядоченного множества $\langle \mathcal{X}, < \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность α следует из предложения II.4. Пусть такого α не существует. Пусть $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ – минимальный начальный отрезок, для которого лемма не верна. Тогда для каждого $y \in \mathcal{Y}$ существует тип α_y множества $\{x \mid x < y\}$. Очевидно, что если $x < y$, то α_x является начальным отрезком α_y. Ясно, что $\bigcup_{y \in \mathcal{Y}} (\alpha_y \cup \{\alpha_y\})$ будет типом множества $\mathcal{Y}$. Полученное противоречие доказывает предложение 2.

Будем говорить, что ординал β меньше ординала α (обозначать $\beta < \alpha$), если $\beta \in \alpha$.

Ординал α называется кардиналом, если любой $\beta < \alpha$ имеет мощность, меньшую чем α.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Любое вполне упорядоченное множество $\mathcal{X}$ равномощно некоторому кардиналу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2 $\mathcal{X}$ равномощно ординалу α. Пусть β наименьший ординал, меньший или равный α той же мощности, что и α. Очевидно, что β – искомый кардинал.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любого множества $\mathcal{X}$ ординалов существует ординал α, больший всех ординалов из $\mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{X}$ содержит максимальный ординал β, то полагаем $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Если $\mathcal{X}$ не содержит максимального ординала, то пусть α будет объединением элементов множества $\mathcal{X}$. Очевидно, что α – ординал, больший всех ординалов из $\mathcal{X}$.

ТЕОРЕМА I. Следующие 4 утверждения эквивалентны в

I) Аксиома выбора.

2) Принцип полного упорядочения: любое множество можно впол-

не упорядочить.

3) Принцип максимума: если в частично упорядоченном множестве $\mathcal{X}$ каждая цепь имеет верхнюю грань, то $\mathcal{X}$ имеет максимальный элемент.

4) Если $\mathcal{X}$ не является конечным множеством, то $\mathcal{X}^2$ и $\mathcal{X}$ равномощны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем по следующей схеме:

$$\begin{tikzcd} & 3 \arrow[dr, Rightarrow] & & \\ 1 \arrow[ur, Rightarrow] & & 2 \arrow[ll, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & 4 \end{tikzcd}$$

$3 \Rightarrow 2$. Рассмотрим множество $\mathcal{Y} = \{x \subseteq \mathcal{X}^2 \mid x$ вполне упорядочивает некоторое подмножество $\mathcal{D}(x) \subseteq \mathcal{X}\}$.

Будем писать $y_1 \leq y_2$ для $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$, если y_1 – начальный отрезок y_2. Если C – цепь элементов $\mathcal{Y}$ по отношению $\leq$, то $\bigcup_{y \in C} y$ будет принадлежать $\mathcal{Y}$. По 3) существует максимальный элемент $y_0 \in \mathcal{Y}$. Покажем, что y_0 вполне упорядочивает $\mathcal{X}$. Если бы это было не так, то существовал бы $x_0 \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{D}(y_0)$. Очевидно, что $y_1 = y_0 \cup (\mathcal{D}(y_0) \times \{x_0\})$ строго больше y_0 и принадлежит $\mathcal{Y}$. Это противоречит максимальности y_0.

$1 \Rightarrow 3$. Предположим, что у частично упорядоченного множества $\mathcal{X}$ нет максимального элемента. Тогда существует функция f, определенная на цепях множества $\mathcal{X}$ и сопоставляющая каждой цепи ее строгую верхнюю грань. Покажем, что любой ординал α является типом соответствующей цепи $\mathcal{X}$. Если это не так, то существует функция g_0, определенная на ординале α_0 со значениями в $\mathcal{X}$, такая, что из $\alpha < \beta < \alpha_0$ следует $g_0(\alpha) < g_0(\beta)$ и которую нельзя продолжить на больший ординал с теми же свойствами. Однако по предположению $g_1 = g_0 \cup \{\langle \alpha_0, f(\{g_0(\beta) \mid \beta < \alpha_0\}) \rangle\}$ будет продолжением g_0 на ординал $\alpha_0 \cup \{\alpha_0\}$ с описанными выше свойствами. Полученное противоречие показывает, что любой ординал является типом соответствующей цепи $\mathcal{X}$. Пусть $\mathcal{Y}$ – множество типов вполне упорядоченных цепей множества $\mathcal{X}$. (Множество $\mathcal{Y}$ существует по аксиоме подстановки. Каким образом?). Пусть β_0 – ординал из предложения 4, больший всех элементов $\mathcal{Y}$. Тогда β_0 не является типом ни одной цепи $\mathcal{X}$. Это противоречит предыдущему. Утверждение $1 \Rightarrow 3$ доказано.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ и $f(x) \neq \varnothing$ для всех $x \in \mathcal{X}$. Пусть $\mathcal{P}$ вполне упорядочивает f. Определим функцию выбора $g(x)$ как $\Pi p_2 a$, где a – первый элемент в f по отношению $\mathcal{P}$ с условием $\Pi p_1 a = x$.

$2 \Rightarrow 4$. Индукция по наименьшему типу полного упорядочения $\mathcal{X}$.

В силу предложения 3 можно считать, что существует отношение $<$, вполне упорядочивающее множество $\mathcal{X}$, и тип этого порядка равен кардиналу. Определим отношение $\prec$ на множестве $\mathcal{X}^2$ следующим образом:

$$\langle x,y\rangle \prec \langle u,v\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} \text{если } \max\{x,y\} = \max\{u,v\} \text{ и } x = u, \text{ то } y < v; \\ \text{если } \max\{x,y\} = \max\{u,v\} \text{ и } x \neq u, \text{ то } x < u; \\ \max\{x,y\} < \max\{u,v\} \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что отношение $\prec$ вполне упорядочивает $\mathcal{X}^2$. Для доказательства $\mathcal{X}^2 \leq \mathcal{X}$ в силу теоремы 2 главы 2 достаточно показать, что $\mathcal{X}$ не подобен начальному отрезку $\mathcal{X}^2$. Пусть это не так и отрезок

$$\mathcal{Z} = \{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y\rangle \in \mathcal{X}^2, \ \langle x,y\rangle \prec \langle x_0,y_0\rangle\}$$

подобен $\mathcal{X}$. Пусть $\max\{x_0,y_0\} = u_0$. Так как тип множества $\mathcal{X}$ является кардиналом, то $\mathcal{X}_0 = \{x \mid x \in \mathcal{X}$ и $x \leq u_0\}$ имеет мощность, меньшую мощности $\mathcal{X}$. Так как $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}_0^2$ и $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{X}$ равномощны, то $\mathcal{X} \leq \mathcal{X}_0^2$. Следовательно, $\mathcal{X}_0$ бесконечно. По индукционному предположению, $\mathcal{X}_0^2$ и $\mathcal{X}_0$ равномощны. Противоречие. Обратное неравенство $\mathcal{X} \leq \mathcal{X}^2$ тривиально.

$4 \Rightarrow 2$. Пусть $\mathcal{R}(\mathcal{X})$ – множество всех отношений, вполне упорядочивающих некоторое подмножество множества $\mathcal{X}$, и α_0 – ординал, больший всех типов подмножеств множества $\mathcal{X}$, вполне упорядоченных элементами из $\mathcal{R}(\mathcal{X})$. Очевидно, что мощность α_0 не меньше мощности $\mathcal{X}$. Можно считать $\alpha_0 \cap \mathcal{X} = \varnothing$. В противном случае можно заменить $\mathcal{X}$ на $\{\langle \alpha_0, x\rangle \mid x \in \mathcal{X}\}$. Покажем, что мощность $\alpha_0 \times \mathcal{X}$ равна $\alpha_0 \cup \mathcal{X}$. Для этого в силу 4) достаточно показать, что мощность $(\alpha_0 \times \mathcal{X})^2$ равна мощности $(\alpha_0 \cup \mathcal{X})^2$. Для краткости равномощность $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Y}$ будем обозначать эквивалентностью $\mathcal{Z} \approx \mathcal{Y}$. Следующая цепь эквивалентностей очевидна:

$$(\alpha_0 \cup \mathcal{X})^2 \approx \alpha_0^2 \cup \mathcal{X}^2 \cup (\alpha_0 \times \mathcal{X}) \cup (\mathcal{X} \times \alpha_0) \approx \alpha_0 \cup \mathcal{X} \cup (\mathcal{X} \times \alpha_0) \cup (\alpha_0 \times \mathcal{X}).$$

Заметим, что если $\mathcal{X} \leq \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}$ бесконечно, то $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \leq \mathcal{Y}^2$, значит, $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \leq \mathcal{Y}$. Очевидно, что $\mathcal{X} \leq (\mathcal{X} \times \alpha_0)$ и $\alpha_0 \leq (\alpha_0 \times \mathcal{X})$. Следовательно, цепь можно продолжить

$$\approx (\mathcal{X} \times \alpha_0) \cup (\alpha_0 \times \mathcal{X}) \approx \alpha_0 \times \mathcal{X} \approx (\alpha_0 \times \mathcal{X})^2.$$

Таким образом, $\alpha_0 \times \mathcal{X} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, где $\mathcal{A} \approx \alpha_0$, а $\mathcal{B} \approx \mathcal{X}$. Покажем, что для любого $x \in \mathcal{X}$ $(\alpha_0 \times \{x\}) \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$. В самом деле, в противном случае $\alpha_0 \times \{x_0\} \subseteq \mathcal{B}$ для некоторого $x_0 \in \mathcal{X}$. Тогда $\alpha_0 \approx \alpha_0 \times \{x_0\} \leq \mathcal{B} \approx \mathcal{X}$, что противоречит ранее замеченному $\alpha_0 \nleq \mathcal{X}$. Так как $\mathcal{A} \approx \alpha_0$, то существует полный порядок $\mathcal{P}$ на $\mathcal{A}$. Определим функцию $f: \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ следующим образом. Значение $f(x)$ равно наименьшему по отношению $\mathcal{P}$ элементу из $(\alpha_0 \times \{x\}) \cap \mathcal{A}$. Так как $(\alpha_0 \times \{x_1\}) \cap (\alpha_0 \times \{x_2\}) = \varnothing$, если $x_1 \neq x_2$, то f – разнозначное отображение. Следовательно, $f^{-1}(\mathcal{P})$ будет вполне упорядочивать $\mathcal{X}$.

Теорема I доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В ZFC доказуемо, что $\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{X}^n$ и $\mathcal{X}$ равномощны, если $\mathcal{X}$ – бесконечное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия 4) теоремы получаем, что $\mathcal{X}^n$ и $\mathcal{X}$ равномощны. Очевидно, что

$$\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{X}^n \leq \{\langle n,y\rangle \mid n\in\mathcal{N}, y\in\mathcal{X}^n\} \approx \{\langle n,x\rangle \mid n\in\mathcal{N}, x\in\mathcal{X}\} \approx \mathcal{N}\times\mathcal{X} \leq \mathcal{X}\times\mathcal{X} \approx \mathcal{X}.$$

Следовательно, $\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{X}^n \leq \mathcal{X}$. Обратное неравенство тривиально. Следствие доказано.

Упражнения. I. В ZFC доказуемо, что $(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{X}_\alpha)\leq\mathcal{Y}$, если $\mathcal{A}\leq\mathcal{Y}$ и $\mathcal{X}_\alpha\leq\mathcal{Y}$ для каждого $\alpha\in\mathcal{A}$; $\mathcal{A}\geq\mathcal{N}$. 2. Пусть $\mathfrak{A}$ – бесконечная алгебраическая система и $\{\langle\Phi_\alpha,\bar{a}_\alpha\rangle \mid \alpha\in W_\gamma\}$ – полное упорядочение множества всех таких пар $\langle\Phi,\bar{a}\rangle$, что $\Phi=\Phi(y_1,\ldots,y_n)$ – формула сигнатуры $\Omega(\mathfrak{A})$, а $\bar{a}=\langle a^1,\ldots,a^n\rangle\in|\mathfrak{A}|^n$. Пусть $|\mathfrak{A}|\leq\mathcal{B}$ и $D\Omega(\mathfrak{A})\leq\mathcal{B}$. В ZFC доказуемо, что $\gamma\leq\mathcal{B}$.

§ 2 Д. Интерполяционная теорема, положительные формулы

Формулы, рассматриваемые в этом параграфе, будут отличаться от формул § I6 лишь тем, что число атомных формул расширится на один символ $\top$, который при определении истинности интерпретируется как тождественно истинный нульместный предикат. Эквивалентность формул будем понимать, как в § I7, т.е. как истинность на одних и тех же алгебраических системах.

Приведенной формулой назовем формулу, не содержащую знака импликации и все знаки отрицания которой стоят перед атомными формулами. Легко показать (§ I7), что каждая формула эквивалентна некоторой приведенной. Всюду в этом параграфе будем рассматривать лишь приведенные формулы, поэтому формулами будем называть только приведенные формулы.

Сигнатурой формулы α (обозначаем $\Omega(\alpha)$) назовем наименьшую такую сигнатуру Ω, что α является формулой сигнатуры Ω. При этом символ $\top$ (так же, как и равенство) не считается сигнатурным и в $D\Omega(\alpha)$ не входит. Через $D\Omega^0(\alpha)$ ($D\Omega^1(\alpha)$) будем обозначать подмножество $D\Omega(\alpha)$, состоящее из предикатных символов, име-

ющих вхождение в α под отрицанием (не под отрицанием). Например, если $\alpha=(\forall x_1)(((\exists x_2)\mathcal{P}(q,x_2)\vee\neg Q(x_2))\wedge(\neg\mathcal{P}(x_1,\tau)\vee x_1=\tau))$, где q,τ – термы, то $D\Omega^0(\alpha)=\{Q,\mathcal{P}\}$, а $D\Omega^1(\alpha)=\{\mathcal{P}\}$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что сигнатуры всех рассматриваемых формул включаются в некоторую фиксированную счетную сигнатуру Ω, не содержащую символов операций местности, отличной от нуля. Алгебраические системы, если не оговорено противное, также будут считаться сигнатуры Ω.

Если α и β – предложения и для любой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ из истинности α на $\mathfrak{A}$ следует истинность β на $\mathfrak{A}$, то будем писать $\alpha\models\beta$.

Следующую теорему часто называют интерполяционной теоремой Крейга-Линдона.

ТЕОРЕМА I. Если α_0 и β_0 – предложения и $\alpha_0\models\beta_0$, то существует такое предложение γ_0, что

а) $\alpha_0\models\gamma_0$ и $\gamma_0\models\beta_0$;

б) $\Omega^i(\gamma_0)\subseteq\Omega^i(\alpha_0)\cap\Omega^i(\beta_0)$, $i\in\{0,1\}$;

в) если α_0 и β_0 не содержат равенства, то γ_0 не содержит равенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим сигнатуру Ω'. Если $D\Omega$ содержит счетное множество предметных констант (т.е. символов нульместных операций) $\{c_0,\ldots,c_n,\ldots\}$, то $\Omega'=\Omega$. В противном случае $D\Omega'=D\Omega\cup\{c_0,\ldots,c_n,\ldots\}$, $\Omega'\supseteq\Omega$, где множество $\{c_0,\ldots,c_n,\ldots\}$ вместе с новыми константами содержит все предметные константы сигнатуры Ω.

Пусть α_0 или β_0 содержит равенство. Рассмотрим множества:

$\Gamma=\{\alpha\mid\alpha$ – предложение сигнатуры Ω' и $D\Omega^i(\alpha)\subseteq D\Omega^i(\alpha_0)$, $i\in\{0,1\}\}$;

$\Delta=\{\alpha\mid\alpha$ – предложение сигнатуры Ω' и $D\Omega^i(\alpha)\subseteq D\Omega^i(\beta_0)$, $i\in\{0,1\}\}$;

$\Sigma=\{\langle\alpha,\beta\rangle\mid\alpha\in\Gamma,\beta\in\Delta\}$.

На множестве Σ определим порядок: $\langle\alpha,\beta\rangle\leq\langle\alpha',\beta'\rangle$, если $\alpha'\models\alpha$ и $\beta\models\beta'$. Пару $\langle\alpha,\beta\rangle$ назовем отделимой, если существует предложение $\gamma\in\Gamma\cap\Delta$, для которого истинно $\alpha\models\gamma$ и $\gamma\models\beta$. В этом случае будем говорить, что γ отделяет пару $\langle\alpha,\beta\rangle$. В противном случае пару $\langle\alpha,\beta\rangle$ назовем неотделимой. Очевидно, что если пара t_1 отделима и $t_1\leq t_2$, то пара t_2 также отделима.

Предположим, что теорема не верна, тогда пара $\langle\alpha_0,\beta_0\rangle$ неотделима. В самом деле, предположим, что $\alpha_0\models\gamma\models\beta_0$ для $\gamma\in\Gamma\cap\Delta$. Пусть $a_0,\ldots,a_k$ – предметные константы, входящие в γ и не входящие в α_0. Тогда, заменив их в γ на новые переменные $x_0,\ldots,x_k$ соответственно, получим формулу $\gamma'(x_0,\ldots,x_k)$. Очевидно, что

$\alpha_0 \models (\forall x_0)\ldots(\forall x_k)\gamma' \models \beta_0$. Пусть $a'_0, \ldots, a'_m$ – предметные константы, входящие в γ' и не входящие в β_0. Заменив их в γ' на новые переменные $y_0, \ldots, y_m$, получим формулу $\gamma'' = \gamma''(x_0, \ldots, x_k, y_0, \ldots, y_m)$. Очевидно, что $\alpha_0 \models \gamma_0 \models \beta_0$, где $\gamma_0 = (\exists y_0)\ldots(\exists y_m)(\forall x_0)\ldots(\forall x_k)\,\gamma''$. Ясно, что γ_0 удовлетворяет заключению теоремы, что противоречит предположению. Занумеруем множества Γ и Δ

$$\Gamma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_n, \ldots\}, \quad \Delta = \{\delta_0, \ldots, \delta_n, \ldots\}$$

так, чтобы выполнялось следующее условие: А) для любой $(\exists x)\alpha(x) \in \Gamma$ $((\forall x)\beta(x) \in \Delta)$ и $k \geqslant 0$ существует такое $n \geqslant 0$, что $\alpha(c_n) = \gamma_m$ $(\beta(c_n) = \delta_m)$, $m > k$ и константа c_n не входит в формулы $\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1}, \delta_0, \ldots, \delta_{m-1}$. Очевидно, что так занумеровать Γ и Δ можно. Построим последовательность S

$$\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \leqslant \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \leqslant \ldots \leqslant \langle \alpha_n, \beta_n \rangle \leqslant \ldots$$

следующим образом. Первый член S состоит из заданных предложений α_0 и β_0. Если пара $\langle \alpha_n, \beta_n \rangle$ уже построена, то в случае, когда $n = 2i$ и пара $\langle \alpha_n \wedge \gamma_i, \beta_n \rangle$ неотделима, в качестве $\langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle$ берем $\langle \alpha_n \wedge \gamma_i, \beta_n \rangle$, а в случае, когда $n = 2i+1$ и пара $\langle \alpha_n, \beta_n \vee \delta_i \rangle$ неотделима, в качестве $\langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle$ берем $\langle \alpha_n, \beta_n \vee \delta_i \rangle$. В остальных случаях $\langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle = \langle \alpha_n, \beta_n \rangle$. Очевидно, что последовательность S удовлетворяет следующим условиям: а) все пары из S неотделимы; б) для любого $\alpha \in \Gamma$ существует такое $n \geqslant 0$, что либо $\alpha_n \models \alpha$, либо пара $\langle \alpha_n \wedge \alpha, \beta_n \rangle$ отделима; в) для любого $\beta \in \Delta$ существует такое $n \geqslant 0$, что либо $\beta \models \beta_n$, либо пара $\langle \alpha_n, \beta_n \vee \beta \rangle$ отделима.

Рассмотрим множества:

$$\mathcal{X} = \{\alpha \mid \alpha \in \Gamma, \alpha_n \models \alpha \text{ для некоторого } n \geqslant 0\},$$

$$\mathcal{Y} = \{\beta \mid \beta \in \Delta, \beta \models \beta_n \text{ для некоторого } n \geqslant 0\}.$$

Для них справедливы следующие свойства.

I. $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \varnothing$. В противном случае $\alpha_n \models \alpha \models \beta_m$ для некоторого $\alpha \in \Gamma \cap \Delta$ и $n, m \geqslant 0$. Тогда α отделяет пару $\langle \alpha_k, \beta_k \rangle$, где $k = \max\{m, n\}$, что противоречит условию а) для S.

2. Пусть α – произвольная атомная формула сигнатуры Ω'. Тогда: а) если $\alpha \in \mathcal{X}$, то $\neg\alpha \notin \mathcal{X}$; б) если $\alpha \in \mathcal{Y}$, то $\neg\alpha \notin \mathcal{Y}$. Если $\alpha, \neg\alpha \in \mathcal{X}$, то в силу монотонности S некоторое α_n будет тождественно ложно. Тогда предложение $\neg T$ будет отделять пару $\langle \alpha_n, \beta_n \rangle$, что невозможно. В случае невыполнимости б) T будет отделять некоторую пару из S.

3. а) Если $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{X}$, то $\alpha \in \mathcal{X}$ и $\beta \in \mathcal{X}$; б) если $\alpha \vee \beta \in \mathcal{Y}$, то $\alpha \in \mathcal{Y}$ и $\beta \in \mathcal{Y}$. Это очевидно.

4. а) Если $\alpha \vee \beta \in \mathcal{X}$, то $\alpha \in \mathcal{X}$ или $\beta \in \mathcal{X}$; б) если $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{Y}$, то $\alpha \in \mathcal{Y}$ или $\beta \in \mathcal{Y}$. Пусть $\alpha \notin \mathcal{Y}$ и $\beta \notin \mathcal{Y}$. В силу монотонности S для некоторого $k \geqslant 0$

$$\alpha_k \models \gamma' \models \beta_k \vee \alpha \quad \text{и} \quad \alpha_k \models \gamma'' \models \beta_k \vee \beta.$$

Тогда

$$\alpha_k \models \gamma' \wedge \gamma'' \models (\beta_k \vee \alpha) \wedge (\beta_k \vee \beta) \sim \beta_k \vee (\alpha \wedge \beta),$$

т.е. пара $\langle \alpha_k, \beta_k \vee (\alpha \wedge \beta) \rangle$ отделима. Если $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{Y}$, то $\alpha \wedge \beta \models \beta_m$ для некоторого $m \geqslant 0$. В силу монотонности S для некоторого $p \geqslant k$ $\beta_p \vee (\alpha \wedge \beta) \models \beta_p$ и $\langle \alpha_p, \beta_p \rangle$ отделима, что невозможно. Пункт а) доказывается аналогично.

5. а) Если $(\forall x)\alpha(x) \in \mathcal{X}$, то $\alpha(c_n) \in \mathcal{X}$ для любого $n \geqslant 0$; б) если $(\exists x)\alpha(x) \in \mathcal{Y}$, то $\alpha(c_n) \in \mathcal{Y}$ для любого $n \geqslant 0$. Свойство очевидное.

6. а) Если $(\exists x)\alpha(x) \in \mathcal{X}$, то $\alpha(c_n) \in \mathcal{X}$ для некоторого $n \geqslant 0$; б) если $(\forall x)\alpha(x) \in \mathcal{Y}$, то $\alpha(c_n) \in \mathcal{Y}$ для некоторого $n \geqslant 0$. Пусть $(\exists x)\alpha(x) \in \mathcal{X}$, то есть $(\exists x)\alpha(x) \in \Gamma$ и $\alpha_k \models (\exists x)\alpha(x)$ для некоторого $k \geqslant 0$. По свойству А) нумераций Γ и Δ и построению последовательности S существует такое $n \geqslant 0$, что $\alpha(c_n) = \gamma_m$, $2m > k$ и c_n не входит в α_{2m-1} и β_{2m-1}. Если пара $\langle \alpha' \wedge \alpha(c_n), \beta \rangle = \langle \alpha_{2m-1} \wedge \alpha(c_n), \beta_{2m-1} \rangle$ неотделима, то $\alpha_{2m} \models \alpha(c_n)$ и свойство а) доказано. Пусть $\langle \alpha' \wedge \alpha(c_n), \beta \rangle$ отделима, т.е.

$$\alpha' \wedge \alpha(c_n) \models \gamma \models \beta, \quad \text{где } \gamma \in \Gamma \cap \Delta. \tag{2}$$

Покажем, что предложение $(\exists x)\gamma'(x)$, где $\gamma'(x)$ получается из γ заменой всех констант c_n на новую переменную x, будет отделять пару $\langle \alpha', \beta \rangle = \langle \alpha_{2m-1}, \beta_{2m-1} \rangle$. В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$ – модель α', а $\mathfrak{B}$ – модель $(\exists x)\gamma'(x)$. Так как $2m > k$, то $\alpha' \models (\exists x)\alpha(x)$ и в $\mathfrak{A}$ истинно $(\exists x)\alpha(x)$. Пусть в $\mathfrak{A}$ истинно $\alpha(a)$, а в $\mathfrak{B}$ истинно $\gamma'(b)$. Переопределив значение c_n в $\mathfrak{A}$ на a, а в $\mathfrak{B}$ на b, получим модель $\mathfrak{A}'$ предложения $\alpha(c_n)$ и модель $\mathfrak{B}'$ предложения γ. Так как α' не содержит c_n, то α' истинна на $\mathfrak{A}'$. Из (2) получаем, что на $\mathfrak{A}'$ истинно $(\exists x)\gamma'(x)$, а на $\mathfrak{B}'$ истинно β. Так как $(\exists x)\gamma'(x)$ и β не содержат c_n, то на $\mathfrak{A}$ истинно $(\exists x)\gamma'(x)$, а на $\mathfrak{B}$ истинно β. Таким образом, мы показали, что $(\exists x)\gamma'(x)$ отделяет пару $\langle \alpha', \beta \rangle \in S$, что невозможно. Доказательство свойства б) проводится параллельно предыдущему (заменой кванторов $\exists$ на $\forall$ и знаков $\wedge$ на $\vee$).

Определим на множестве $\{c_0, \ldots, c_n, \ldots\}$ отношение $\sim$ следующим образом:

а) $c_i \sim c_j \Leftrightarrow (c_i = c_j \in \mathcal{X}$ или $\neg c_i = c_j \in \mathcal{Y})$.

Покажем, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности. Рефлексивность и симметричность этого отношения очевидны. Проверим, что это отношение транзитивно. Пусть $c_i \sim c_j$ и $c_j \sim c_k$. Ограничимся рассмотрением случая, когда $c_i = c_j \in \mathcal{X}$ и $\neg c_j = c_k \in \mathcal{Y}$. Другие случаи либо рассматриваются аналогично, либо очевидны. Покажем, что $c_i \sim c_k$. Если это не так, то $c_i = c_k \notin \mathcal{X}$ и $\neg c_i = c_k \notin \mathcal{Y}$. Существует $m \geqslant 0$, что выполняется условие:

I) $\alpha_m \models c_i = c_j$, $\neg c_j = c_k \models \beta_m$ и $\alpha_m \wedge c_i = c_k \models \gamma' \models \beta_m$ для некоторого $\gamma' \in \Gamma \cap \Delta$.

Тогда $\alpha_m \models c_i = c_j \wedge (\gamma' \vee \neg c_i = c_k) \models \beta_m$, что противоречит неотделимости (α_m, β_m).

Через $\bar{c}$ будем обозначать класс эквивалентности, содержащий c. Определим алгебраическую систему $\mathfrak{A}_0$, определив на основном множестве $|\mathfrak{A}_0| = \{\bar{c}_0, \ldots, \bar{c}_n, \ldots\}$ предикаты $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}_0}$, $\mathcal{P} \in D\Omega$, следующим образом:

б) $\langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \rangle \in \mathcal{P}^{\mathfrak{A}_0} \Leftrightarrow \mathcal{P}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{X}$ или $\neg \mathcal{P}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{Y}$.

Константу $a \in D\Omega$ будем интерпретировать в $\mathfrak{A}$ как $\bar{a}$. Покажем, что определение б) корректно. Предположим, что это не так. Тогда для некоторых $a_0 \sim b_0, \ldots, a_n \sim b_n$ и $\mathcal{P} \in D\Omega$ $\mathcal{P}(a_0, \ldots, a_n) \notin \mathcal{X}$, $\neg \mathcal{P}(a_0, \ldots, a_n) \notin \mathcal{Y}$ и выполняется одно из условий $\mathcal{P}(b_0, \ldots, b_n) \in \mathcal{X}$ или $\neg \mathcal{P}(b_0, \ldots, b_n) \in \mathcal{Y}$. Значит, существует $m \geqslant 0$, что выполняется одно из условий:

2а) $\mathcal{P} \in D\Omega^1(\alpha_0)$ и $\alpha_m \models \mathcal{P}(b_0, \ldots, b_n)$ или

2б) $\mathcal{P} \in D\Omega^0(\beta_0)$ и $\neg \mathcal{P}(b_0, \ldots, b_n) \models \beta_m$,

а также условия:

3) $\alpha_m \models a_i = b_i$, $i \in J_1$, и $\neg a_j = b_j \models \beta_m$, $j \in J_2$; $J_1 \cap J_2 = \varnothing$, $J_1 \cup J_2 = \{1, \ldots, n\}$;

4) если $\mathcal{P} \in D\Omega^1(\alpha_0)$, то $\alpha_m \wedge \mathcal{P}(a_0, \ldots, a_n) \models \gamma' \models \beta_m$ для некоторого $\gamma' \in \Gamma \cap \Delta$;

5) если $\mathcal{P} \in D\Omega^0(\beta_0)$, то $\alpha_m \models \gamma'' \models \beta_m \vee \mathcal{P}(a_0, \ldots, a_n)$ для некоторого $\gamma'' \in \Gamma \cap \Delta$.

Пусть выполняется условие 2а). Тогда $\alpha_m \wedge \mathcal{P}(a_0, \ldots, a_n) \models \gamma' \models \beta_m$ для $\gamma' \in \Gamma \cap \Delta$. Отсюда и из 3), 2а) получаем $\alpha_m \models \gamma' \vee \bigvee_{j \in J_2} a_j \neq b_j \models \beta_m$, что противоречит неотделимости $\langle \alpha_m, \beta_m \rangle$. В случае 2б) также легко получить, что $\gamma'' \wedge \bigwedge_{i \in J_1} a_i = b_i$ отделяет пару $\langle \alpha_m, \beta_m \rangle$. Корректность определения $\mathfrak{A}_0$ доказана.

Индукцией по длине формулы α докажем:

в) если $\alpha \in \mathcal{X}$, то α истинно в $\mathfrak{A}_0$;

г) если $\alpha \in \mathcal{Y}$, то α ложно в $\mathfrak{A}_0$.

Для атомных формул и их отрицаний это следует из а), б) и свойств I,2 множеств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Если $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \in \mathcal{X}$, то по свойству 3а) множества $\mathcal{X}$ имеем $\alpha_1 \in \mathcal{X}$ и $\alpha_2 \in \mathcal{X}$. По индукционному предположению α_1 и α_2 истинны в $\mathfrak{A}_0$. Следовательно, $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ истинно в $\mathfrak{A}_0$. Если $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \in \mathcal{Y}$, то по свойству 4б) множества $\mathcal{Y}$ либо $\alpha_1 \in \mathcal{Y}$, либо $\alpha_2 \in \mathcal{Y}$. По индукционному предположению $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ ложно в $\mathfrak{A}_0$. Аналогично используя свойства 3–6 множеств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, свойства в) и г) доказываются для формул α других видов.

Таким образом, в $\mathfrak{A}_0$ истинна формула $\alpha_0 \in \mathcal{X}$ и ложна $\beta_0 \in \mathcal{Y}$. Это противоречит условию $\alpha_0 \models \beta_0$.

Если α_0 и β_0 не содержат равенства, то предыдущее доказательство нужно повторить, ограничиваясь формулами без равенства. При этом основным множеством системы $\mathfrak{A}_0$ будет $\{c_0, \ldots, c_n, \ldots\}$ и необходимость доказывать корректность ее определения отпадает.

Теорема I доказана.

З а м е ч а н и е. Если в α_0 или в β_0 входит равенство, то требование, чтобы равенство входило в γ_0 только тогда, когда оно входит в α_0 и в β_0, выполнить нельзя, как показывают следующие примеры:

$$c_1 = c_2 \models \mathcal{P}(c_1) \vee \neg \mathcal{P}(c_2); \quad \mathcal{P}(c_1) \wedge \neg \mathcal{P}(c_2) \models c_1 \neq c_2.$$

В оставшейся части параграфа мы применим теорему I для характеризации предложений, сохраняющих свою истинность при переходе к гомоморфным образам. Мы предполагаем, что $D\Omega = D_1\Omega$.

Отношение E на алгебраической системе $\mathfrak{A}$ назовем к о н г р у э н т н о с т ь ю на $\mathfrak{A}$, если оно является эквивалентностью на $|\mathfrak{A}|$ и для всех $\mathcal{P} \in D\Omega$ в $\mathfrak{A}$ истинны предложения

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(\forall y_1) \ldots (\forall y_n)\big((E(x_1, y_1) \wedge \ldots \wedge E(x_n, y_n)) \to (\mathcal{P}(x_1, \ldots, x_n) \to \mathcal{P}(y_1, \ldots, y_n))\big) \ (n = \Omega(\mathcal{P})).$$

Если $\mathfrak{A}$ – алгебраическая система, E – отношение конгруэнтности на $\mathfrak{A}$, то определим фактор-систему $\mathfrak{A}/E$ системы $\mathfrak{A}$ по отношению E. Основное множество $\mathfrak{A}/E$ состоит из классов эквивалентности по отношению E. Через aE или просто $\bar{a}$ будем обозначать класс эквивалентности, содержащий a. Предметные константы c интерпретируются в $\mathfrak{A}/E$ как $\overline{c^{\mathfrak{A}}}$, где $c^{\mathfrak{A}}$ – значение константы c в $\mathfrak{A}$. Предикаты $\mathcal{P}^{\mathfrak{A}/E}$, $\mathcal{P} \in D\Omega$, определяются следующим образом:

$$\langle \bar a_1, \ldots, \bar a_n \rangle \in \mathcal{P}^{\mathfrak{A}/E} \Leftrightarrow \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{P}^{\mathfrak{A}} \quad (n = \Omega(\mathcal{P})).$$

Проверку корректности этого определения, а также доказательство следующей леммы мы оставляем читателю в качестве упражнения.

ЛЕММА. Пусть α - предложение, а α' получается заменой всех вхождений равенства в α на символ E двухместного предиката, не входящий в α. Если $\mathfrak{A}$ - алгебраическая система сигнатуры $\langle \Omega(\alpha), E \rangle$ и $E^{\mathfrak{A}}$ - конгруэнтность на $\mathfrak{A}$, то истинность α' на $\mathfrak{A}$ эквивалентна истинности α на $\mathfrak{A}/E^{\mathfrak{A}}$.

Напомним, что система $\mathfrak{B}$ называется г о м о м о р ф н ы м о б р а з о м системы $\mathfrak{A}$, если существует отображение f основного множества $\mathfrak{A}$ на основное множество $\mathfrak{B}$, для которого выполняется следующее условие:

$$\langle a_1, \ldots, a_{\Omega(\mathcal{P})} \rangle \in \mathcal{P}^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \langle f(a_1), \ldots, f(a_{\Omega(\mathcal{P})}) \rangle \in \mathcal{P}^{\mathfrak{B}} \quad (\mathcal{P} \in D\Omega).$$

Формулу α назовем п о л о ж и т е л ь н о й, если $\Omega^{\circ}(\alpha) = \varnothing$ и α не содержит вхождений равенства под отрицанием. Будем говорить, что предложение α с о х р а н я е т с я п р и г о м о м о р ф и з м а х, если из истинности α на системе $\mathfrak{A}$ следует истинность α на любом ее гомоморфном образе.

ТЕОРЕМА 2. Если предложение α_0 сохраняется при гомоморфизмах, то оно эквивалентно положительному предложению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопоставляем каждому предикатному символу $\mathcal{P} \in D\Omega(\alpha_0)$ предикатный символ $\mathcal{P}' \notin D\Omega(\alpha_0)$ той же местности. Обозначим через β конъюнкцию предложений

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n) (\mathcal{P}(x_1, \ldots, x_n) \to \mathcal{P}'(x_1, \ldots, x_n)) \qquad (\mathcal{P} \in D\Omega(\alpha_0),\ n = \Omega(\mathcal{P}))$$

и предложения

$$(\forall x)(\forall y)(E(x,y) \to E'(x,y)),$$

где E, E' - некоторые предикатные символы, не входящие в $D\Omega(\alpha_0)$. Обозначим через γ конъюнкцию формул:

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(\forall y_1) \ldots (\forall y_n)\big((E(x_1, y_1) \wedge \ldots \wedge E(x_n, y_n)) \to (\mathcal{P}(x_1, \ldots, x_n) \to \mathcal{P}(y_1, \ldots, y_n))\big) \; (\mathcal{P} \in D\Omega(\alpha_0),\ n = \Omega(\mathcal{P}))$$

и формулы δ, выражающей, что E - отношение эквивалентности. Пусть α получается из α_0 заменой равенства на E. Пусть α_0', α' и γ' получаются из α_0, α и γ соответственно заменой всех предикатных символов на штрихованные.

Утверждаем, что

$$\alpha \wedge \gamma \models (\beta \wedge \gamma') \to \alpha'.$$

В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$ - модель предложений $\alpha \wedge \gamma$ и $\beta \wedge \gamma'$, $\mathfrak{B}$ - обеднение $\mathfrak{A}$ до сигнатуры $\Omega(\alpha)$, а $\mathfrak{B}'$ - обеднение $\mathfrak{A}$ до сигнатуры $\Omega(\alpha')$. По лемме $\mathfrak{B}/E^{\mathfrak{A}}$ будет моделью α_0. Пусть $\mathfrak{B}_1$ - система сигнатуры $\Omega(\alpha_0)$, которая получается из $\mathfrak{B}'$ переобозначением предикатов $\mathcal{P}'$ на $\mathcal{P}$, $\mathcal{P} \in D\Omega(\alpha_0)$. Из истинности в $\mathfrak{A}$ предложения $\beta \wedge \gamma'$ следует, что отображение $aE^{\mathfrak{A}} \mapsto aE'^{\mathfrak{A}}$ будет гомоморфизмом $\mathfrak{B}/E^{\mathfrak{A}}$ на $\mathfrak{B}_1/E'^{\mathfrak{A}}$. Следовательно, α_0 истинно на $\mathfrak{B}_1/E'^{\mathfrak{A}}$. Тогда α_0' истинна на $\mathfrak{B}'/E'^{\mathfrak{A}}$ и по лемме α' истинна на $\mathfrak{B}'$. Так как $\mathfrak{B}'$ - обеднение $\mathfrak{A}$ до сигнатуры $\Omega(\alpha')$, то $\mathfrak{A} \models \alpha'$. Отношение $\alpha \wedge \gamma \models (\beta \wedge \gamma') \to \alpha'$ доказано.

Очевидно, что $(\beta \wedge \gamma') \to \alpha'$ эквивалентно приведенному предложению β_0, для которого $\Omega^{\circ}(\beta_0) \cap \Omega(\alpha) = \varnothing$. По теореме I существует предложение γ_1 без равенства, для которого выполняются условия:

а) $\alpha \wedge \gamma \models \gamma_1 \models \beta_0$;

б) γ_1 - положительное предложение,

в) $\Omega(\gamma_1) \subseteq \Omega(\alpha)$.

Пусть γ_0 получается из γ_1 заменой символа E на равенство. Покажем, что γ_0 эквивалентно α_0. Пусть $\mathfrak{A}$ - модель α_0 сигнатуры $\Omega(\alpha_0)$, а $\mathfrak{A}_1$ - обогащение $\mathfrak{A}$ до сигнатуры $\Omega(\alpha)$, в которой $\langle a, b \rangle \in E^{\mathfrak{A}_1} \Leftrightarrow a = b$. Тогда $\alpha \wedge \gamma$ истинна в $\mathfrak{A}_1$ и в силу а) γ_1 истинно в $\mathfrak{A}_1$. Очевидно, что γ_0 будет тогда истинно в $\mathfrak{A}$. Пусть теперь $\mathfrak{B}$ - модель γ_0, а $\mathfrak{B}'$ - обогащение $\mathfrak{B}$ до сигнатуры $\langle \Omega(\alpha), \Omega(\alpha') \rangle$ в котором новые предикаты определяются следующим образом:

I) $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{P}'^{\mathfrak{B}'} \Leftrightarrow \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{P}^{\mathfrak{B}}$,

2) $\langle a_1, a_2 \rangle \in E^{\mathfrak{B}'} \Leftrightarrow \langle a_1, a_2 \rangle \in E'^{\mathfrak{B}'} \Leftrightarrow a_1 = a_2$.

Очевидно, что $\mathfrak{B}'$ - модель γ_1 и $\beta \wedge \gamma'$. В силу а) и эквивалентности β_0 предложению $(\beta \wedge \gamma') \to \alpha'$ в $\mathfrak{B}'$ истинно α'. Из I) и 2) получаем, что α_0 истинно в $\mathfrak{B}$.

Теорема 2 доказана.

§ 3 Д. Форсинг

Пусть $\mathcal{K}$ - аксиоматизируемый класс алгебраических систем сигнатуры Ω, а $S(\mathcal{K})$ - класс, состоящий их всех систем, которые являются подсистемами систем из класса $\mathcal{K}$. Иначе, $S(\mathcal{K}) = \{\mathfrak{A} \mid$ существует $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ такая, что $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}\}$.

ЛЕММА I. Класс $S(\mathcal{K})$ является универсально аксиоматизируемым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{T}$ - совокупность всех замкнутых универсальных формул, истинных на всех системах из $S(\mathcal{K})$. Покажем, что

$S(\mathcal{K}) = Mod(T)$. Если $\mathfrak{A} \in Mod(T)$, рассмотрим совокупность Σ формул, состоящую из $\mathfrak{D}iag(\mathfrak{A})$ и $Th(\mathcal{K})$. Если эта совокупность имеет модель, то $\mathfrak{A}$ изоморфна подсистеме некоторой системы из $\mathcal{K}$ и, значит, $\mathfrak{A} \in S(\mathcal{K})$. Для доказательства того, что Σ имеет модель, в силу теоремы компактности достаточно заметить, что каждая конечная подсовокупность Δ совокупности Σ имеет модель. Пусть $\Phi = \Phi(y_1, \dots, y_n)$ - формула сигнатуры Ω и $\Phi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$ - конъюнкция всех формул из $\mathfrak{D}iag(\mathfrak{A})$, входящих в Δ. Если Δ не имеет моделей, то $(\forall y_1) \dots (\forall y_n) \neg \Phi(y_1, \dots, y_n)$ истинна на всех системах из $\mathcal{K}$ и, значит, из $S(\mathcal{K})$. По выбору $\mathfrak{A}$ эта формула истинна и в $\mathfrak{A}$. Вместе с тем в $\mathfrak{A}$ истинно $\Phi(a_1, \dots, a_n)$. Это противоречие и доказывает лемму.

Далее будем рассматривать формулы, в записи которых не встречаются символы $\to, \forall$.

Определим теперь индукцией по рангу Φ для каждой системы $\mathfrak{A} \in S(\mathcal{K})$, каждой формулы $\Phi = \Phi(y_1, \dots, y_n)$ сигнатуры Ω и каждых $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, что значит "$\mathfrak{A}$ форсирует $\Phi(a_1, \dots, a_n)$" (символически, $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1, \dots, a_n)$).

Если Φ - атомная формула, то $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1, \dots, a_n)$ равносильно $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_n)$. Если Φ есть $\Phi_1 \vee \Phi_2$, то $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1, \dots, a_n)$ равносильно $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi_1(a_1, \dots, a_n)$ или $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi_2(a_1, \dots, a_n)$.

Если Φ есть $\Phi_1 \wedge \Phi_2$, то $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1, \dots, a_n)$ равносильно $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi_1(a_1, \dots, a_n)$ и $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi_2(a_1, \dots, a_n)$.

Если Φ есть $(\exists x)\Phi_1$, то $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1, \dots, a_n)$ равносильно существованию такого $a \in |\mathfrak{A}|$, что $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi_1(a, a_1, \dots, a_n)$ (где $\Phi_1 = \Phi_1(x, y_1, \dots, y_n)$).

Если Φ есть $\neg \Phi_1$, то $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1, \dots, a_n)$ означает, что для каждой такой $\mathfrak{B} \in S(\mathcal{K})$, что $\mathfrak{B} \geq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ не форсирует $\Phi_1(a_1, \dots, a_n)$.

ЛЕММА 2. а). Если $\mathfrak{A}$ форсирует $\Phi(a_1, \dots, a_n)$, то $\mathfrak{A}$ не форсирует $\neg \Phi(a_1, \dots, a_n)$.

б). Если $\mathfrak{A}$ форсирует $\Phi(a_1, \dots, a_n)$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \in S(\mathcal{K})$, то $\mathfrak{B}$ форсирует $\Phi(a_1, \dots, a_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а). Очевидно. б). Доказываем индукцией по рангу Φ. Для атомных формул б) очевидно, если б) верно для Φ_1 и Φ_2, то б) верно и для $\Phi_1 \wedge \Phi_2, \Phi_1 \vee \Phi_2, (\exists x)\Phi_1$.

Допустим, что б) верно для Φ_1 и докажем б) для Φ, равной $\neg \Phi_1$. Если $\mathfrak{C} \geq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \in S(\mathcal{K})$ и $\mathfrak{C} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi_1(a_1, \dots, a_n)$, то $\mathfrak{A}$ не форсирует $\Phi(a_1, \dots, a_n)$. Значит, такой $\mathfrak{C}$ нет и $\mathfrak{B} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1, \dots, a_n)$.

Лемма доказана.

Скажем, что формула Φ экзистенциональная, если Φ имеет вид $(\exists y_1) \dots (\exists y_s) \Psi$, где Ψ не содержит кванторов.

ЛЕММА 3. Если Φ экзистенциональная формула, то $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1, \dots, a_n)$ равносильно $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по рангу Φ. Лемма верна для атомных формул. Если лемма верна для Φ_1 и Φ_2, то она, конечно, верна для $\Phi_1 \wedge \Phi_2, \Phi_1 \vee \Phi_2, (\exists y)\Phi_1$. Значит, надо разобрать только случай, когда лемма верна для Φ, а доказывать надо ее для $\neg \Phi$, где Φ - бескванторная формула. Если $\mathfrak{A} \models \neg \Phi(a_1, \dots, a_n)$, $\mathfrak{B} \geq \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B} \models \neg \Phi(a_1, \dots, a_n)$. (Истинность бескванторных формул сохраняется при расширениях) По предположению, $\mathfrak{B}$ не форсирует $\Phi(a_1, \dots, a_n)$. Значит, $\mathfrak{A}$ форсирует $\neg \Phi(a_1, \dots, a_n)$. Если $\mathfrak{A}$ форсирует $\neg \Phi(a_1, \dots, a_n)$, то $\Phi(a_1, \dots, a_n)$ ложно в $\mathfrak{A}$ (иначе, $\mathfrak{A}$ также форсирует и $\Phi(a_1, \dots, a_n)$, а это противоречит лемме 2а)). Лемма доказана.

Если X, Y, Z - множества, запись $X \leq max\{Y, Z\}$ означает, что либо $X \leq Y$, либо $X \leq Z$. Если $X \leq max\{Y, Z\}$, то будем говорить, что мощность X не превосходит наибольшей из мощностей Y и Z.

ЛЕММА 4. Если бесконечная $\mathfrak{A}$ не форсирует $\neg \Phi(a_1, \dots, a_n)$, то существует такая $\mathfrak{B} \in S(\mathcal{K})$, что $\mathfrak{B} \geq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1, \dots, a_n)$ и мощность $|\mathfrak{B}|$ не превосходит наибольшей из мощностей $|\mathfrak{A}|$ и $D\Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по рангу Φ. Для атомной Φ лемма очевидна (см. лемму 3). Если лемма верна для Φ_1 и Φ_2, то она верна и для $\Phi_1 \wedge \Phi_2, \Phi_1 \vee \Phi_2$. Пусть лемма верна для Φ_1 и Φ есть $(\exists x)\Phi_1$. Если $\mathfrak{A}$ не форсирует $\neg \Phi(a_1, \dots, a_n)$, то существует такая $\mathfrak{C} \in S(\mathcal{K})$, что $\mathfrak{C} \geq \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1, \dots, a_n)$. Значит, существует $b \in |\mathfrak{C}|$, что $\mathfrak{C} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi_1(b, a_1, \dots, a_n)$ (считаем, что $\Phi_1 = \Phi_1(x, y_1, \dots, y_n)$). Существует такая система $\mathfrak{C}_1$, что $\mathfrak{C}_1 \geq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}_1 \subseteq \mathfrak{C}$, $b \in |\mathfrak{C}_1|$ и мощность $|\mathfrak{C}_1|$ не превосходит наибольшей из мощностей $|\mathfrak{A}|$ и $D\Omega$. Применяя лемму к $\mathfrak{C}_1$ и Φ_1, найдем такую систему $\mathfrak{B}$, что $\mathfrak{B} \geq \mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{B} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi_1(b, a_1, \dots, a_n)$ и мощность $|\mathfrak{B}|$ не превосходит наибольшей из мощностей $|\mathfrak{A}|$ и $D\Omega$. Ясно, что $\mathfrak{B} \geq \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1, \dots, a_n)$.

Наконец, надо рассмотреть случай, когда лемма верна для Φ_1 и Φ есть $\neg \Phi_1$. По условию, существует $\mathfrak{C} \in S(\mathcal{K})$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1, \dots, a_n)$. Пусть $\mathfrak{B}$ - такая элементарная подсистема системы $\mathfrak{C}$, которая является расширением $\mathfrak{A}$ и для которой $|\mathfrak{B}| \leq max\{|\mathfrak{A}|, D\Omega\}$. Существование такой $\mathfrak{B}$ утверждается в теореме 8 главы 3. Покажем, что $\mathfrak{B} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1, \dots, a_n)$. Если это не так, то существует $\mathfrak{C}_1 \in S(\mathcal{K})$, $\mathfrak{C}_1 \geq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}_1 \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1, \dots, a_n)$. Из леммы 2б) следует, что можно считать, что $\mathfrak{C}_1 \in \mathcal{K}$. Рассмотрим совокупность Σ формул $\mathrm{Diag}(\mathfrak{C}_1) \cup \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{C}) \cup Th(\mathcal{K})$, считая, что $|\mathfrak{C}_1| \cap |\mathfrak{C}| = |\mathfrak{B}|$. Если эта совокупность совместна, то она имеет модель $\mathfrak{C}_2$, которая, можно считать, является расширением как $\mathfrak{C}$, так и $\mathfrak{C}_1$. Из леммы 2б) следует, что $\mathfrak{C}_2$ форсирует как $\Phi_1(a_1,\ldots,a_n)$, так и $\neg\Phi_1(a_1,\ldots,a_n)$, а это противоречит лемме 2а).

Если Δ – конечная подсовокупность совокупности Σ, пусть $\Phi_1(c_{a_1},\ldots,c_{a_s},c_{b_1},\ldots,c_{b_t})$ – конъюнкция тех формул из Δ, которые входят в $\mathrm{Diag}(\mathfrak{C}_1)$, $\Phi_2(c_{a_1},\ldots,c_{a_s},c_{d_1},\ldots,c_{d_r})$ – конъюнкция тех формул из Δ, которые входят в $\mathrm{Diag}(\mathfrak{C})$, где $\Phi_1=\Phi_1(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t)$, $\Phi_2=\Phi_2(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_r)$ – формулы сигнатуры Ω; $a_1,\ldots,a_s \in |\mathfrak{B}|$; $b_1,\ldots,b_t \in |\mathfrak{C}_1| \setminus |\mathfrak{B}|$; $d_1,\ldots,d_r \in |\mathfrak{C}| \setminus |\mathfrak{B}|$. Формула $(\exists y_1)\ldots(\exists y_r)\Phi_2(a_1,\ldots,a_s,y_1,\ldots,y_r)$ истинна в $\mathfrak{C}$, значит, и в $\mathfrak{B}$. Эта формула истинна и в $\mathfrak{C}_1$. Интерпретируя $c_{d_1},\ldots,c_{d_r}$ такими элементами $d_1',\ldots,d_r'$ из $|\mathfrak{C}_1|$, для которых $\Phi_2(a_1,\ldots,a_s,d_1',\ldots,d_r')$ истинно в $\mathfrak{C}_1$, получим такое обогащение системы $(\mathfrak{C}_1,a)_{a\in|\mathfrak{C}_1|}$, которое является моделью для Δ. Лемма доказана.

Система $\mathfrak{A} \in S(\mathcal{K})$ называется $\mathcal{K}$-*генерической*, если для каждой формулы $\Phi=\Phi(y_1,\ldots,y_n)$ и каждых $a_1,\ldots,a_n \in |\mathfrak{A}|$ либо $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1,\ldots,a_n)$, либо $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \neg\Phi(a_1,\ldots,a_n)$. Ясно, что система, изоморфная $\mathcal{K}$-генерической, снова $\mathcal{K}$-генерическая.

ЛЕММА 5. Если $\mathfrak{A}$ $\mathcal{K}$-генерическая система, то для каждой формулы $\Phi=\Phi(y_1,\ldots,y_n)$ и каждых $a_1,\ldots,a_n \in |\mathfrak{A}|$

$$\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \Phi(a_1,\ldots,a_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда лемма верна для Φ, и доказать ее для $\neg\Phi$.

Если $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \neg\Phi(a_1,\ldots,a_n)$, то $\Phi(a_1,\ldots,a_n)$ ложно в $\mathfrak{A}$. .Если $\mathfrak{A} \models \neg\Phi(a_1,\ldots,a_n)$, то $\mathfrak{A}$ не может форсировать $\Phi(a_1,\ldots,a_n)$ и, значит, форсирует $\neg\Phi(a_1,\ldots,a_n)$.

ЛЕММА 6. Если $\Phi=\Phi(u_1,\ldots,u_r)$ есть $\neg(\exists y_1)\ldots(\exists y_s)\neg(\exists z_1)\ldots(\exists z_t)\Psi$; $\Psi=\Psi(y_1,\ldots,y_s,z_1,\ldots,z_t,u_1,\ldots,u_r)$; Ψ не содержит кванторов; $\mathfrak{A}$ – $\mathcal{K}$-генерическая система; $\mathfrak{B} \in S(\mathcal{K})$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$; $a_1,\ldots,a_r \in |\mathfrak{A}|$ и $\mathfrak{B} \models \Phi(a_1,\ldots,a_r)$, то $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1,\ldots,a_r)$.

Короче, $\mathcal{K}$-генерические системы $\forall\exists$- замкнуты в $S(\mathcal{K})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольные $b_1,\ldots,b_s \in |\mathfrak{A}|$. Если в $\mathfrak{A}$ ложно $(\exists z_1)\ldots(\exists z_t)\Psi(b_1,\ldots,b_s,z_1,\ldots,z_t,a_1,\ldots,a_r)$, то $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \neg(\exists z_1)\ldots(\exists z_t)\Psi(b_1,\ldots,b_s,z_1,\ldots,z_t,a_1,\ldots,a_r)$. По лемме 2б) $\mathfrak{B} \Vdash_{\mathcal{K}} \neg(\exists z_1)\ldots(\exists z_t)\Psi(b_1,\ldots,b_s,z_1,\ldots,z_t,a_1,\ldots,a_r)$. С другой

стороны, $\mathfrak{B} \models (\exists z_1)\ldots(\exists z_t)\Psi(b_1,\ldots,b_s,z_1,\ldots,z_t,a_1,\ldots,a_r)$ и по лемме 3 $\mathfrak{B} \Vdash_{\mathcal{K}} (\exists z_1)\ldots(\exists z_t)\Psi(b_1,\ldots,b_s,z_1,\ldots,z_t,a_1,\ldots,a_r)$. Это противоречит лемме 2а).

ЛЕММА 7. Если $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ – $\mathcal{K}$-генерические системы и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1,\ldots,a_n)$, то $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1,\ldots,a_n)$, значит, $\mathfrak{B} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1,\ldots,a_n)$ и $\mathfrak{B} \models \Phi(a_1,\ldots,a_n)$.

ЛЕММА 8. Если $\mathfrak{B}$ – $\mathcal{K}$-генерическая система и $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}$ – $\mathcal{K}$-генерическая система.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по рангу Φ надо доказать, что $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1,\ldots,a_n)$. Достаточно разобрать только случай, когда это верно для Φ, и доказать для $\neg\Phi$. Доказательство почти дословно повторяло бы конец доказательства леммы 4, и мы его опускаем.

ЛЕММА 9. Каждая бесконечная система $\mathfrak{A} \in S(\mathcal{K})$ является подсистемой некоторой такой $\mathcal{K}$-генерической системы $\mathfrak{B}$, что $|\mathfrak{B}| \le \max\{|\mathfrak{A}|, D\Omega\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\langle\Phi_\alpha,\bar a_\alpha\rangle \mid \alpha \in W_\gamma\}$ – полное упорядочение множества всех таких пар $\langle\Phi,\bar a\rangle$, что $\Phi=\Phi(y_1,\ldots,y_n)$ – формула сигнатуры Ω, а $\bar a=\langle a^1,\ldots,a^n\rangle \in |\mathfrak{A}|^n$. Построим возрастающую цепочку подсистем $\{\mathfrak{A}_\alpha \mid \alpha \in W(\gamma)\}$ так, чтобы $\mathfrak{A}_\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi_\alpha(\bar a_\alpha)$ или $\mathfrak{A}_\alpha \Vdash_{\mathcal{K}} \neg\Phi_\alpha(\bar a_\alpha)$ для каждого $\alpha \in W(\gamma)$ и чтобы $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_0$. Если $\mathfrak{A} \Vdash_{\mathcal{K}} \neg\Phi_0(\bar a_0)$, то пусть $\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A}$. Если же $\mathfrak{A}$ не форсирует $\neg\Phi_0(\bar a_0)$, то, по лемме 4, существует такая $\mathfrak{C} \in S(\mathcal{K})$, что $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi_0(\bar a_0)$ и $|\mathfrak{C}| \le \max\{|\mathfrak{A}|, D\Omega\}$. Пусть тогда $\mathfrak{A}_0=\mathfrak{C}$. Пусть $\beta \in W(\gamma)$ и $\mathfrak{A}_\alpha$ для $\alpha \in W(\beta)$ уже построены так, что $|\mathfrak{A}_\alpha| \le \max\{|\mathfrak{A}|, D\Omega\}$ для $\alpha \in W(\beta)$. Пусть $\mathfrak{A}'_\beta=\bigcup_{\alpha\in W(\beta)}\mathfrak{A}_\alpha$. Если $\mathfrak{A}'_\beta \Vdash_{\mathcal{K}} \neg\Phi_\beta(\bar a_\beta)$, то пусть $\mathfrak{A}_\beta = \mathfrak{A}'_\beta$. Если же $\mathfrak{A}'_\beta$ не форсирует $\neg\Phi_\beta(\bar a_\beta)$ то, по лемме 4, существует такая $\mathfrak{C} \in S(\mathcal{K})$, что $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{A}'_\beta$, $\mathfrak{C} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi_\beta(\bar a_\beta)$ и $|\mathfrak{C}| \le \le \max\{|\mathfrak{A}'_\beta|, D\Omega\} \le \max\{|\mathfrak{A}|, D\Omega\}$ (см. § I Д). Пусть тогда $\mathfrak{A}_\beta=\mathfrak{C}$. Из леммы 2б) следует, что если $\mathfrak{A}^1=\bigcup_{\alpha\in W(\gamma)}\mathfrak{A}_\alpha$, то для каждой формулы $\Phi=\Phi(y_1,\ldots,y_n)$ и каждых $a_1,\ldots,a_n \in |\mathfrak{A}|$ либо $\mathfrak{A}^1 \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1,\ldots,a_n)$, либо $\mathfrak{A}^1 \Vdash_{\mathcal{K}} \neg\Phi(a_1,\ldots,a_n)$. Кроме того, $|\mathfrak{A}^1| \le \max\{|\mathfrak{A}|, D\Omega\}$. Пусть теперь $\mathfrak{A}^0=\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{n+1}=(\mathfrak{A}^n)^1$, а $\mathfrak{B}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathfrak{A}^n$. Тогда для любой формулы $\Phi=\Phi(y_1,\ldots,y_n)$ сигнатуры Ω и любых $a_1,\ldots,a_n \in |\mathfrak{B}|$ найдется такое i, что $a_1,\ldots,a_n \in |\mathfrak{A}^i|$. По определению $\mathfrak{A}^{i+1}$ либо $\mathfrak{A}^{i+1} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1,\ldots,a_n)$, либо $\mathfrak{A}^{i+1} \Vdash_{\mathcal{K}} \neg\Phi(a_1,\ldots,a_n)$. Из леммы 2б) следует, что либо $\mathfrak{B} \Vdash_{\mathcal{K}} \Phi(a_1,\ldots,a_n)$, либо $\mathfrak{B} \Vdash_{\mathcal{K}} \neg\Phi(a_1,\ldots,a_n)$. Значит,

$\mathfrak{B}$ $\mathcal{K}$-генерическая система. Очевидно также, что $|\mathfrak{B}| \leq \max\{|\mathfrak{A}|, D\Omega\}$. Лемма доказана.

Приведем один пример использования форсинга в теории моделей. С помощью форсинга докажем следующую теорему Линдстрома.

Скажем, что аксиоматизируемый класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем сигнатуры Ω *категоричен в мощности множества* $\mathcal{A}$, если любые две такие системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ из $\mathcal{K}$, что $|\mathfrak{A}|$ и $|\mathfrak{B}|$ равномощны $\mathcal{A}$, изоморфны. Скажем, что класс $\mathcal{K}$ *модельно полон*, если для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ из $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ следует, что $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

ТЕОРЕМА I. Пусть Σ – совокупность замкнутых формул сигнатуры Ω вида $(\forall y_1)\ldots(\forall y_s)(\exists z_1)\ldots(\exists z_t)\Psi$, где Ψ не содержит кванторов (короче, Σ – совокупность замкнутых $\forall\exists$ – формул сигнатуры Ω), $\mathcal{K} = \mathcal{M}od(\Sigma)$, $\mathcal{K}$ категоричен в мощности бесконечного множества $\mathcal{A}$, где $\mathcal{A} \geq D\Omega$. Тогда класс $\mathcal{K}_\infty$ бесконечных систем из $\mathcal{K}$ модельно полон.

Прежде чем доказывать теорему I, докажем лемму.

ЛЕММА IO. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}_\infty$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, но $\mathfrak{A}$ не является элементарной подсистемой $\mathfrak{B}$. Тогда существуют такие $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}' \in \mathcal{K}_\infty$, что $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}'$ не является элементарной подсистемой $\mathfrak{B}'$, а $|\mathfrak{A}'|$ и $|\mathfrak{B}'|$ равномощны $\mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы IO. Пусть $\mathcal{P}$ – символ одноместного предиката; $\mathcal{P} \notin D\Omega$; $\Phi = \Phi(y_1, \ldots, y_n)$ – формула сигнатуры Ω; $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$; $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_n)$; $\mathfrak{B} \models \neg\Phi(a_1, \ldots, a_n)$. Пусть Σ_1 есть

$$\Sigma \cup \Sigma^{\mathcal{P}} \cup \{\Phi^{\mathcal{P}}(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})\} \cup \{\neg\Phi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})\} \cup \{\mathcal{P}(c_{a_1}), \ldots, \mathcal{P}(c_{a_n})\} \cup$$
$$\cup \{\mathcal{P}(c_a) \mid a \in \mathcal{A}\} \cup \{c_a \neq c_b \mid a, b \in \mathcal{A}; a \neq b\} \cup$$
$$\cup \{(\forall x_1)\ldots(\forall x_m)((\bigwedge_{i=1}^{m} \mathcal{P}(x_i)) \to \mathcal{P}(f(x_1, \ldots, x_m))) \mid f \in D_2\Omega, \Omega(f) = m\},$$

где $\Sigma^{\mathcal{P}} = \{\Psi^{\mathcal{P}} \mid \Psi \in \Sigma\}$, а $\Psi^{\mathcal{P}}$ для формулы Ψ сигнатуры Ω определяется следующим образом индукцией по рангу Ψ. Для атомных Ψ полагают $\Psi^{\mathcal{P}}$ равным Ψ. $(\Psi_1 \tau \Psi_2)^{\mathcal{P}}$ есть $\Psi_1^{\mathcal{P}} \tau \Psi_2^{\mathcal{P}}$ для $\tau \in \{\wedge, \vee, \to\}$, $(\neg\Psi_1)^{\mathcal{P}}$ есть $\neg(\Psi_1^{\mathcal{P}})$, $(\forall x)\Psi_1)^{\mathcal{P}}$ есть $(\forall x)(\mathcal{P}(x) \to \Psi_1^{\mathcal{P}})$, $((\exists x)\Psi_1)^{\mathcal{P}}$ есть $(\exists x)(\mathcal{P}(x) \wedge \Psi_1^{\mathcal{P}})$.

Если Σ_1 имеет модель $\mathfrak{C}$, то $X = \{x \in |\mathfrak{C}| \mid \mathfrak{C} \models \mathcal{P}(x)\}$ замкнуто относительно всех основных операций $\mathfrak{C} \upharpoonright \Omega$, а $(\mathfrak{C} \upharpoonright \Omega) \upharpoonright X$ и $\mathfrak{C} \upharpoonright \Omega$ являются моделями Σ. Рассмотрим такую элементарную подсистему $\mathfrak{A}'$ системы $(\mathfrak{C} \upharpoonright \Omega) \upharpoonright X$, основное множество которой равномощно $\mathcal{A}$ и содержит $c_{a_1}^{\mathfrak{C}}, \ldots, c_{a_n}^{\mathfrak{C}}$ и $c_a^{\mathfrak{C}}$ $(a \in \mathcal{A})$. Имеем: $\mathfrak{A}' \in \mathcal{K}_\infty$ и $\mathfrak{A}' \models \Phi(c_{a_1}^{\mathfrak{C}},$

$\ldots, c_{a_n}^{\mathfrak{C}})$. Рассмотрим, наконец, элементарную подсистему $\mathfrak{B}'$ системы $\mathfrak{C} \upharpoonright \Omega$, основное множество которой содержит $|\mathfrak{A}'|$ и равномощно $\mathcal{A}$. Имеем: $\mathfrak{B}' \supseteq \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}' \in \mathcal{K}_\infty$ и $\mathfrak{B}' \models \neg\Phi(c_{a_1}^{\mathfrak{C}}, \ldots, c_{a_n}^{\mathfrak{C}})$. В частности, $\mathfrak{A}'$ не является элементарной подсистемой $\mathfrak{B}'$.

Для доказательства того, что Σ_1 имеет модель, достаточно доказать, что имеет модель каждая ее конечная подсовокупность Δ. В качестве модели для Δ выберем обогащение $\mathfrak{B}$. Положим для $x \in |\mathfrak{B}|$ $\mathcal{P}(x) \Leftrightarrow x \in |\mathfrak{A}|$. В Δ входит только конечное число символов c_a $(a \in \mathcal{A})$, и в качестве их интерпретаций мы выберем произвольные элементы из $|\mathfrak{A}|$, лишь бы различные символы интерпретировались различными элементами. В качестве интерпретаций для $c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}$ мы возьмем $a_1, \ldots, a_n$. То, что при этом все формулы из Σ_1 станут истинными, проверяется непосредственно. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. Если $\mathcal{K}_\infty$ не является модельно полным, то найдутся такие $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$ в $\mathcal{K}_\infty$, что $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{B}'$, $|\mathfrak{A}'|$ и $|\mathfrak{B}'|$ равномощны $\mathcal{A}$, а $\mathfrak{A}'$ не является элементарной подсистемой $\mathfrak{B}'$. Если $\mathfrak{A}$ – такая система из $\mathcal{K}_\infty$, что $|\mathfrak{A}|$ и $\mathcal{A}$ равномощны, то $\mathfrak{A}$ является подсистемой такой $\mathcal{K}$-генерической системы $\mathfrak{C}$, что $|\mathfrak{C}|$ и $\mathcal{A}$ равномощны (лемма 9). $\mathfrak{C} \in S(\mathcal{K})$. Значит, имеется такая система $\mathfrak{C}_1$ из $\mathcal{K}$, что $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{C}_1$. Из $\forall\exists$ -замкнутости $\mathfrak{C}$ (лемма 6) следует, что $\mathfrak{C} \in \mathcal{M}od(\Sigma)$ и, значит, $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$. Из категоричности $\mathcal{K}$ в мощности множества $\mathcal{A}$ следует, что $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$ изоморфны $\mathfrak{C}$ и, значит, тоже являются $\mathcal{K}$-генерическими. Из леммы 7 следует, что $\mathfrak{A}' \preceq \mathfrak{B}'$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

§ 4 Д. Счетная категоричность

В этом параграфе рассматриваются только такие сигнатуры Ω, для которых $D\Omega$ перечислимо.

Пусть Σ – некоторая совокупность замкнутых формул сигнатуры Ω. Σ называется *полной теорией*, если Σ имеет модели и $\mathcal{T}h(\mathfrak{A}) = \mathcal{T}h(\mathfrak{B})$ для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ из $\mathcal{M}od(\Sigma)$.

Пусть Σ – полная теория сигнатуры Ω, не имеющая конечных моделей. Это предположение мы сохраним до конца параграфа.

Через $\mathcal{F}_n$ будем обозначать множество всех формул сигнатуры Ω, не содержащих свободных переменных, отличных от $x_1, \ldots, x_n$. Множество $S \subseteq \mathcal{F}_n$ *реализуется в модели* $\mathfrak{A}$ теории Σ, если существуют такие $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, что все формулы из S истинны в $\mathfrak{A}$, когда x_1 приписано значение $a_1, \ldots,$ x_n – значение a_n. Множество $S \subseteq \mathcal{F}_n$ называется совместным, если S реализуется в какой-то модели Σ. Множество $S \subseteq \mathcal{F}_n$ называется n-типом, если S совместно, но S не является собственной частью никакого совместного $S_1 \subseteq \mathcal{F}_n$ (т.е. не существует такого совместного $S_1 \subseteq \mathcal{F}_n$, что $S \subseteq S_1$ и $S \neq S_1$). n-Тип S называется главным, если существует такая формула $\Phi \in \mathcal{F}_n$, что любой n-тип, содержащий Φ, совпадает с S.

Заметим, что если S – n-тип, $\Phi \in \mathcal{F}_n, \Phi \notin S$, то $\neg\Phi \in S$.

Действительно, если $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}od(\Sigma)$, $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ и $\mathfrak{A} \models \Psi(a_1, \ldots, a_n)$ для каждой $\Psi = \Psi(x_1, \ldots, x_n) \in S$, то $\mathfrak{A} \models \neg\Phi(a_1, \ldots, a_n)$. Иначе $S_1 = S \cup \{\Phi\}$ совместно и $S_1 \neq S$. Если $\neg\Phi \notin S$, то $S_2 = S \cup \{\neg\Phi\}$ совместно и $S_2 \neq S$.

ЛЕММА I. Если S – неглавный n-тип, то существует счетная модель $\mathfrak{A}$ теории Σ, в которой S не реализуется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Занумеруем все формулы сигнатуры $\Omega' = \langle \Omega, c_m \rangle_{m \geq 0}$ не содержащие свободных переменных, отличных от x_0, натуральными числами, и пусть $\Phi_j = \Phi_j(x_0)$ – формула, занумерованная числом j.

Строим теперь возрастающую последовательность множеств Σ_i $(i = 0, 1, \ldots)$ замкнутых формул сигнатуры Ω'.

$\Sigma_0 = \Sigma$. Зафиксируем разнозначное отображение f_n $\mathcal{N}^n$ на $\mathcal{N}$. Пусть уже построено имеющее модель Σ_m так, что $\Sigma_m \setminus \Sigma_0$ конечно, и пусть Φ – конъюнкция всех формул из $\Sigma_m \setminus \Sigma_0$. Пусть $m = f_n(m_1, \ldots, m_n)$, а $\Phi = \Psi(c_{m_1}, \ldots, c_{m_n}, c_{t_1}, \ldots, c_{t_s})$, где $\Psi = \Psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s)$ – формула сигнатуры Ω, а $t_1, \ldots, t_s \notin \{m_1, \ldots, m_n\}$.

Формула $(\exists y_1) \ldots (\exists y_s) \Psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s)$ входит в некоторый отличный от S n-тип S_1. Значит, существует такая формула $\Theta_m = \Theta_m(x_1, \ldots, x_n) \in S_1$, что $\neg\Theta_m \in S$. Пусть $\alpha(m)$ – такое натуральное число, что $c_{\alpha(m)}$ не встречается в Φ_m и $\alpha(m)$ отлично от $m_1, \ldots, m_n, t_1, \ldots, t_s$. Пусть

$$\Sigma_{m+1} = \Sigma_m \cup \{\Theta_m(c_{m_1}, \ldots, c_{m_n}), (\exists x_0)\Phi_m \to \Phi_m(c_{\alpha(m)})\}.$$

Покажем, что Σ_{m+1} имеет модель. Пусть $\mathfrak{A}'$ – модель теории Σ, в которой реализуется S_1. Тогда найдутся такие $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_s$, что $\mathfrak{A}' \models \Psi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_s)$ и $\mathfrak{A}' \models \Theta_m(a_1, \ldots, a_n)$. Пусть интерпретациями $c_{m_1}, \ldots, c_{m_n}, c_{t_1}, \ldots, c_{t_s}$ являются $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_s$ соответственно. Если же j отлично от $m_1, \ldots, m_n, t_1, \ldots, t_s$ и c_j встречается в Φ_m, то в качестве интерпретации c_j возьмем произвольный элемент из $|\mathfrak{A}'|$. Если в полученном обогащении $\mathfrak{A}'$ формула $(\exists x_0)\Phi_m$ ложна, то в качестве интерпретации $c_{\alpha(m)}$ возьмем произвольный элемент из $|\mathfrak{A}'|$. Если же $\mathfrak{A}' \models \Phi_m(a)$, где $a \in |\mathfrak{A}'|$, то в качестве интерпретации $c_{\alpha(m)}$ возьмем a. Ясно, что в полученном обогащении $\mathfrak{A}'$ истинны все формулы из Σ_{m+1}.

Пусть $\Sigma_\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma_i$. Из теоремы компактности следует, что Σ_∞ имеет модель $\mathfrak{B}'$. Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \upharpoonright \Omega$, а $\mathfrak{A}$ – подсистема, порожденная в $\mathfrak{B}$ множеством $X = \{c_0^{\mathfrak{B}'}, c_1^{\mathfrak{B}'}, \ldots\}$. Покажем, что $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$. Прежде всего заметим, что X замкнуто относительно всех основных операций системы $\mathfrak{B}$. Действительно, если $f \in D_2\Omega$ и $\Omega(f) = m$, то $f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}) = x_0$ имеет номер, например, k. Значит, $((\exists x_0) f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}) = x_0 \to f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}) = c_{\alpha(k)}) \in \Sigma$. Поэтому $f(c_{i_1}^{\mathfrak{B}'}, \ldots, c_{i_m}^{\mathfrak{B}'}) = c_{\alpha(k)}^{\mathfrak{B}'}$. Таким образом, $|\mathfrak{A}| = X$. Пусть $\Phi = \Phi(y_1, \ldots, y_m, x_0)$ – формула сигнатуры Ω и $\mathfrak{B} \models (\exists x_0)\Phi(c_{i_1}^{\mathfrak{B}'}, \ldots, c_{i_m}^{\mathfrak{B}'}, x_0)$. Формула $\Phi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}, x_0)$ имеет номер, например, k. Тогда $\mathfrak{B} \models \Phi(c_{i_1}^{\mathfrak{B}'}, \ldots, c_{i_m}^{\mathfrak{B}'}, c_{\alpha(k)}^{\mathfrak{B}'})$. По теореме Тарского (теорема 7, глава 3) $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$.

Значит, $\mathfrak{A}$ – счетная модель Σ. Пусть $m = f_n(i_1, \ldots, i_n)$. Тогда $\mathfrak{A} \models \Theta_m(c_{i_1}^{\mathfrak{B}'}, \ldots, c_{i_n}^{\mathfrak{B}'})$, но $\neg\Theta_m \in S$. Это показывает, что в $\mathfrak{A}$ не реализуется S. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если для каждого натурального n каждый n-тип является главным, то любые две счетные модели Σ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ – счетные модели Σ. Пусть $|\mathfrak{A}| = \{a_i \mid i = 0, 1, \ldots\}$, $|\mathfrak{B}| = \{b_i \mid i = 0, 1, \ldots\}$ – перечисления без повторения элементов $|\mathfrak{A}|$ и $|\mathfrak{B}|$. Построим возрастающую последовательность разнозначных отображений $f_m : X_m \xrightarrow{\text{на}} Y_m$ так, что $f_m \subseteq |\mathfrak{A}| \times |\mathfrak{B}|$; $\{a_0, \ldots, a_m\} \subseteq X_{2m}$; $\{b_0, \ldots, b_m\} \subseteq Y_{2m+1}$ и для любых $a_1, \ldots, a_s \in X_m$ и любой формулы $\Phi = \Phi(y_1, \ldots, y_s)$ сигнатуры Ω

$$\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_s) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \Phi(f_m a_1, \ldots, f_m a_s).$$

Рассмотрим 1-тип S_0, состоящий из всех таких формул $\Phi = \Phi(x_1)$, что $\mathfrak{A} \models \Phi(a_0)$. Существует такая формула $\Phi_0 = \Phi_0(x_1) \in S_0$, что любой 1-тип, содержащий Φ_0, совпадает с S_0. Формула $(\exists x_1)\Phi_0$ истинна в $\mathfrak{B}$. Значит, существует b_{i_0} такой, что $\mathfrak{B} \models \Phi_0(b_{i_0})$. Мы полагаем $X_0 = \{a_0\}$, $f_0 a_0 = b_{i_0}$. Ясно, что для любой $\Phi = \Phi(x_1)$ сигнатуры Ω

$$\mathfrak{A} \models \Phi(a_0) \Leftrightarrow \Phi \in S_0 \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \Phi(b_{i_0}).$$

Пусть f_m уже построено. Если $m+1 = 2n$ и $a_n \in X_{2n-1}$, то полагаем $f_{m+1} = f_m$. Если же $a_n \notin X_{2n-1}$, пусть $X_{2n-1} = \{c_1, \ldots, c_r\}$.

Обозначим через S_{m+1} $(r+1)$-тип, состоящий из всех таких формул $\Phi = \Phi(x_1, \ldots, x_{r+1})$, что $\mathfrak{A} \models \Phi(c_1, \ldots, c_r, a_n)$. Существует такая формула $\Phi_{m+1} = \Phi_{m+1}(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}) \in S_{m+1}$, что любой $(r+1)$-тип, содержащий Φ_{m+1}, совпадает с S_{m+1}.

$(\exists x_{r+1})\Phi_{m+1}(c_1,\dots,c_r,x_{r+1})$ истинно в $\mathfrak{A}$. По предположению, $(\exists x_{r+1})\Phi_{m+1}(f_m c_1,\dots,f_m c_r,x_{r+1})$ истинно в $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{B}\models\Phi_{m+1}(f_m c_1,\dots,f_m c_r,b_{i_{m+1}})$. Мы полагаем: $\mathcal{X}_{m+1}=\mathcal{X}_m\cup\{a_n\}$ и $f_{m+1}(a_n)=b_{i_{m+1}}$. Ясно, что для любой $\Phi=\Phi(x_1,\dots,x_r,x_{r+1})$ сигнатуры Ω

$$\mathfrak{A}\models\Phi(c_1,\dots,c_r,a_n)\Leftrightarrow\Phi\in S_{m+1}\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\Phi(f_{m+1}c_1,\dots,f_{m+1}c_r,f_{m+1}a_n).$$

Если $m+1=2n+1$ и $b_n\in\mathcal{Y}_{2n}$, то полагаем $f_{m+1}=f_m$. Если же $b_n\notin\mathcal{Y}_{2n}$, пусть $\mathcal{X}_{2n}=\{c_1,\dots,c_r\}$. Обозначим через S_{m+1} $(r+1)$-тип, состоящий из всех таких $\Phi=\Phi(x_1,\dots,x_{r+1})$, что $\mathfrak{B}\models\Phi(f_m c_1,\dots,f_m c_r,b_n)$. Существует такая формула $\Phi_{m+1}=\Phi_{m+1}(x_1,\dots,x_r,x_{r+1})\in S_{m+1}$, что любой $(r+1)$-тип, содержащий Φ_{m+1}, совпадает с S_{m+1}.

$(\exists x_{r+1})\Phi_{m+1}(c_1,\dots,c_r,x_{r+1})$ истинно в $\mathfrak{A}$ (по предположению). Пусть $\mathfrak{A}\models\Phi_{m+1}(c_1,\dots,c_r,a_{i_{m+1}})$. Мы полагаем: $\mathcal{X}_{m+1}=\mathcal{X}_m\cup\{a_{i_{m+1}}\}$ и $f_{m+1}(a_{i_{m+1}})=b_n$. Ясно, что это f_{m+1} годится.

Пусть $f=\bigcup_{m=0}^{\infty}f_m$. Тогда ясно, что f разнозначно отображает $|\mathfrak{A}|$ на $|\mathfrak{B}|$ Кроме того, для любой формулы $\Phi=\Phi(y_1,\dots,y_s)$ сигнатуры Ω и любых $a_1,\dots,a_s\in|\mathfrak{A}|$

$$\mathfrak{A}\models\Phi(a_1,\dots,a_s)\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\Phi(fa_1,\dots,fa_s).$$

В частности, f – изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. Лемма доказана.

Скажем, что теория Σ с ч е т н о к а т е г о р и ч н а, если любые две счетные модели Σ изоморфны.

ТЕОРЕМА I (Рыль-Нардзевский). Теория Σ тогда и только тогда счетно категорична, когда для каждого натурального n каждый n-тип является главным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если S – неглавный n-тип, то, по лемме I, S не реализуется в некоторой счетной модели $\mathfrak{A}$ теории Σ. С другой стороны, существует $\mathfrak{C}\in\mathcal{M}od(\Sigma)$ и такие $a_1,\dots,a_n\in|\mathfrak{C}|$, что $\mathfrak{C}\models\Phi(a_1,\dots,a_n)$ для любой $\Phi=\Phi(x_1,\dots,x_n)\in S$. Пусть $\mathfrak{B}$ – счетная элементарная подсистема $\mathfrak{C}$, содержащая $a_1,\dots,a_n$. Существование такой $\mathfrak{B}$ утверждается в теореме 8. главы 3. Ясно, что $\mathfrak{B}$ реализует S. Ясно также, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не изоморфны. Теорема доказана.

Две формулы $\Phi=\Phi(x_1,\dots,x_n)$ и $\Psi=\Psi(x_1,\dots,x_n)$ назовем Σ-эквивалентными, если

$$\mathfrak{A}\models(\forall x_1)\dots(\forall x_n)((\Phi\to\Psi)\wedge(\Psi\to\Phi))$$

для каждой $\mathfrak{A}\in\mathcal{M}od(\Sigma)$. Множество $\mathcal{F}_n$ разбивается на классы Σ-эквивалентных формул. Через $\mathcal{F}_n^{(1)}$ обозначим множество полученных классов. Если $\mathcal{F}_n^{(1)}$ конечно, то ясно, что все n-типы являются

главными. Наоборот, если каждый n-тип является главным, то $\mathcal{F}_n^{(1)}$ конечно. Достаточно показать, что в этом случае множество всех n-типов конечно (ведь класс эквивалентности из $\mathcal{F}_n^{(1)}$, содержащий формулу из $\mathcal{F}_n$, полностью определяется теми n-типами, которые содержат эту формулу). Для каждого n-типа S через $\Phi(S)$ обозначим такую формулу из S, что каждый n-тип, содержащий эту формулу, совпадает с S. Если бесконечно множество n-типов, то $\Lambda=\{\neg\Phi(S)\mid S - n\text{-тип}\}$ совместно. Для доказательства достаточно заметить, что каждое конечное подмножество Δ этого множества Λ совместно (теорема компактности Мальцева). Пусть $\Delta=\{\neg\Phi(S_1),\dots,\neg\Phi(S_r)\}$, а S – отличный от $S_1,\dots,S_r$ n-тип. Тогда $\neg\Phi(S_1),\dots,\neg\Phi(S_r)\in S$ (иначе, $\Phi(S_i)\in S$ и $S=S_i$ для какого-то $i\in\{1,\dots,r\}$). Из совместности рассматриваемого множества Λ следует, что оно содержится в некотором n-типе S'. Однако, этот S' должен быть отличен от каждого n-типа, что невозможно.

СЛЕДСТВИЕ I. Σ тогда и только тогда счетно категорична, когда $\mathcal{F}_n^{(1)}$ конечно для каждого натурального n.

§ 5 Д. Полные квазимногообразия

В этом параграфе мы будем называть формулами и термами формулы и термы фиксированной перечислимой сигнатуры Ω. Все остальные понятия в этом параграфе, если не оговорено противное, также рассматриваются в сигнатуре Ω. Через $\bar{x}$ будем обозначать кортеж $\langle x_1,\dots,x_n\rangle$. Если $\bar{x}=\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ и $x_1,\dots,x_n\in\mathcal{X}$, то пишем $\bar{x}\in\mathcal{X}$. Через $\ell(\bar{x})$ будем обозначать длину n кортежа $\bar{x}=\langle x_1,\dots,x_n\rangle$. Отождествляя константные функции с их значениями, будем считать систему $\mathfrak{A}$ вложенной в прямую степень $\mathfrak{A}^J$ *). Если $\mathfrak{A}$ – алгебраическая система и $a_1,\dots,a_n\in|\mathfrak{A}|$ $(\mathcal{X}\subseteq|\mathfrak{A}|)$, то минимальную подсистему $\mathfrak{A}$, содержащую элементы $a_1,\dots,a_n$ (множество $\mathcal{X}$), будем называть подсистемой, порожденной в $\mathfrak{A}$ элементами $a_1,\dots,a_n$ (множеством $\mathcal{X}$) Через $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ и $t(x_1,\dots,x_n)$ будем обозначать формулу и терм, свободные переменные которых находятся среди $x_1,\dots,x_n$. Через $\Phi(\bar{x},y_1,\dots,y_k)$, $(\exists\bar{x})\Phi$, $(\forall\bar{x})\Phi$ будем обозначать формулы $\Phi(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k)$, $(\exists x_1)\dots(\exists x_n)\Phi$, $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)\Phi$, если $\bar{x}=\langle x_1,\dots,x_n\rangle$. При этом длина n кортежа $\bar{x}$ в сокращенных записях либо однозначно определяется из контекста, либо ее значение не

*) Прямая степень $\mathfrak{A}^J$ – это $\prod_{\alpha\in J}\mathfrak{A}_\alpha$, где $\mathfrak{A}_\alpha=\mathfrak{A}$ для каждого $\alpha\in J$.

существенно. Если $\Phi(\bar{x},\bar{y})$ - формула, $\mathfrak{A}$ - алгебраическая система, $\bar{a}\in|\mathfrak{A}|$, $\ell(\bar{a})=\ell(\bar{y})$, то через $\Phi(\mathfrak{A},\bar{a})$ будем обозначать множество $\{\bar{b}\mid \ell(\bar{b})=\ell(\bar{x}),\ \mathfrak{A}\models\Phi(\bar{b},\bar{a})\}$, а через $t(\bar{a},\mathfrak{A})$ - множество $\{b\mid \mathfrak{A}\models(\exists\bar{y})t(\bar{a},\bar{y})=b\}$, где $t(\bar{x},\bar{y})$ - терм.

Формула вида $P(t_0(\bar{x}),\ldots,t_k(\bar{x}))$, где P - предикатный символ, а t_i, $i\leq k$, - термы, называется атомной. Формула вида $(\forall\bar{x})Q(\bar{x})$, где $Q(\bar{x})$ - атомная формула, называется **тождеством**. **Квазитождеством** называется формула вида

$$(\forall\bar{x})((Q_0(\bar{x})\wedge\ldots\wedge Q_n(\bar{x}))\to Q_{n+1}(\bar{x})),$$

где $Q_i(\bar{x})$, $i\leq n+1$, - атомные формулы. Формулы вида

$$(\exists\bar{x})(Q_0(\bar{x},\bar{y})\wedge\ldots\wedge Q_n(\bar{x},\bar{y})),$$

где $Q_i(\bar{x},\bar{y})$, $i\leq n$, - атомные формулы, назовем EF-формулами (экзистенциональными, фильтрующимися).

Квазимногообразием (многообразием) $\mathcal{K}$ называется класс моделей некоторой совокупности Σ квазитождеств (тождеств). Совокупность Σ будем называть системой аксиом для $\mathcal{K}$.

Заметим, что тождество $(\forall\bar{x})Q(\bar{x})$ эквивалентно квазитождеству $(\forall\bar{x})(\forall y)(y=y\to Q(\bar{x}))$. Следовательно, многообразие является квазимногообразием, а в систему аксиом для квазимногообразия можно включать тождества. Так как квазимногообразие универсально аксиоматизируемый класс, а квазитождества условно фильтруются, то оно замкнуто относительно взятия подсистем (§ 2I) и фильтрованных произведений (§ I9).

Алгебраическую систему, принадлежащую классу $\mathcal{M}$, будем называть $\mathcal{M}$-системой. Если $\mathcal{M}$ - класс алгебраических систем, то через $\mathcal{M}_+$ и $\mathcal{M}_\infty$ будем обозначать соответственно класс неодноэлементных $\mathcal{M}$-систем и класс бесконечных $\mathcal{M}$-систем.

Класс $\mathcal{M}$ алгебраических систем называется **категоричным** в мощности множества A, если все $\mathcal{M}$-системы той же мощности, что и A, изоморфны. Мы будем опускать множество A в определении категоричности $\mathcal{M}$ и говорить, что класс $\mathcal{M}$ категоричен во всех бесконечных, во всех неединичных мощностях, в некоторой несчетной мощности и т.д., подразумевая при этом, что в предыдущем определении в качестве A берутся все бесконечные, все неодноэлементные множества, некоторое несчетное бесконечное множество и т.д.

Напомним, что класс $\mathcal{M}$ алгебраических систем называется аксиоматизируемым, если $\mathcal{M}$ является классом моделей некоторой совокупности Σ замкнутых формул. М.Морли (I963 г.) доказал, что если аксиоматизируемый класс категоричен в какой-то бесконечной несчетной мощности, то он категоричен во всех бесконечных несчетных мощностях.

Упражнение I. Рассмотрим предикатную систему $\mathfrak{D}$, основное множество которой состоит из действительных чисел, а единственный предикат - "$\leq$" ("меньше или равно"). Показать, что класс моделей теории $Th(\mathfrak{D})$ является категоричным в счетной мощности и не категоричен в несчетных мощностях.

Упражнение 2. Придумать аксиоматизируемый класс, имеющий системы всех конечных мощностей, категоричный во всех бесконечных мощностях и не категоричный ни в какой конечной мощности.

Упражнение 3. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{Z}$, основное множество которой состоит из целых чисел, а единственная операция - $x+1$. Показать, что класс моделей теории $Th(\mathfrak{Z})$ является категоричным в бесконечных несчетных мощностях и не категоричен в счетной мощности.

Класс алгебраических систем $\mathcal{M}$ назовем локально конечным, если любая подсистема, порожденная в любой $\mathcal{M}$-системе любым конечным множеством, конечна. Класс алгебраических систем $\mathcal{M}$ назовем полным, если элементарная теория класса $\mathcal{M}_\infty$ полна (§ 4 Д).

Упражнение 4. Доказать, что если аксиоматизируемый класс категоричен в какой-то бесконечной мощности, то он полон.

Упражнение 5. Пользуясь теоремой из § 4 Д, доказать, что аксиоматизируемый, категоричный в счетной мощности класс алгебраических систем $\mathcal{M}$ локально конечен.

Упражнение 6. Придумать полный, локально конечный, универсально аксиоматизируемый класс, не являющийся категоричным ни в какой мощности.

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА I. **Полное, локально конечное квазимногообразие категорично во всех неединичных мощностях.**

Пусть в дальнейшем $\mathcal{K}$ - полное, локально конечное квазимногообразие, для которого $\mathcal{K}_+$ не пусто.

Формулу Φ будем называть (условно) фильтрующейся, если она (условно) фильтруется по любому ~~фильтру~~ (§ I9).

ЛЕММА I. а). Если замкнутая формула Φ условно фильтруется вместе со своим отрицанием и истинна на некоторой $\mathcal{K}_+$-системе $\mathfrak{A}$, то она истинна на любой $\mathcal{K}_+$-системе. Фильтрующаяся формула Φ и квазитождество Q условно фильтруются вместе со своими отрицаниями.

б). Для любого $n \in \mathcal{N}$ существует такое конечное множество атомных формул $\{\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_k\}$, что любая атомная формула со свободными переменными из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ эквивалентна в $\mathcal{K}_+$ одной из формул $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а). Если формула Φ истинна в $\mathcal{K}_+$-системе $\mathfrak{A}$ и ложна в $\mathcal{K}_+$-системе $\mathfrak{B}$, то из условной фильтруемости Φ и $\neg\Phi$ следует, что формула Φ истинна в $\mathfrak{A}^{\mathcal{N}}$ и ложна в $\mathfrak{B}^{\mathcal{N}}$. Это противоречит полноте $\mathcal{K}$. Если Φ – фильтрующаяся формула, то условная фильтруемость $\neg\Phi$ очевидна. Квазитождество Q является хорновской формулой, следовательно, по теореме II главы 3 оно условно фильтруется. Отрицание квазитождества Q эквивалентно формуле $(\exists\bar{x})(\Phi_1 \wedge \neg\Phi_2)$, где Φ_1 и Φ_2 – фильтрующиеся формулы. По леммам 19.4 и 19.I $\neg Q$ условно фильтруется. Пункт а) доказан.

б). Пусть $\mathfrak{A}$ – некоторая конечная $\mathcal{K}_+$-система. Так как число n-местных предикатов на $|\mathfrak{A}|$ – конечное число, то существуют атомные формулы $\mathcal{P}_0(x_1,\ldots,x_n), \ldots, \mathcal{P}_k(x_1,\ldots,x_n)$ такие, что для любой атомной формулы $Q(x_1,\ldots,x_n)$ в $\mathfrak{A}$ истинны квазитождества $(\forall\bar{x})(\mathcal{P}_i(\bar{x}) \to Q(\bar{x}))$ и $(\forall\bar{x})(Q(\bar{x}) \to \mathcal{P}_i(\bar{x}))$ для некоторого $i \leqslant k$. Утверждение б) следует теперь из а).

ЛЕММА 2. а). Если $\Phi(\bar{x}, y)$ – фильтрующаяся формула и для некоторой $\mathcal{K}_+$-системы $\mathfrak{A}$ и некоторого $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|$ множество $\Phi(\bar{a}, \mathfrak{A})$ одноэлементно, то для всех $\mathcal{K}_+$-систем $\mathfrak{B}$ и $\bar{b} \in |\mathfrak{B}|$ множество $\Phi(\bar{b}, \mathfrak{B})$ одноэлементно или пусто.

б). Для любой $\mathcal{K}$-системы $\mathfrak{A}$, фильтрующейся формулы $\Phi(\bar{y}, x)$ и $\bar{a}, \bar{b} \in |\mathfrak{A}|$ множества $\Phi(\bar{a}, \mathfrak{A})$ и $\Phi(\bar{b}, \mathfrak{A})$ либо равны, либо не пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а). Можно считать, что $\mathfrak{A}$ – конечная $\mathcal{K}_+$-система. В самом деле, если $\mathfrak{A}$ – бесконечная $\mathcal{K}$-система и для некоторой $\mathcal{K}_+$-системы $\mathfrak{B}$ посылка леммы не выполняется, то в $\mathfrak{B}$ истинна формула

$$(\forall\bar{x})(\forall z)(\exists y_1)(\exists y_2)\big(\Phi(\bar{x}, z) \to (\Phi(\bar{x}, y_1) \wedge \Phi(\bar{x}, y_2) \wedge y_1 \neq y_2)\big).$$

Эта формула условно фильтруется (§ 19), и по теореме II главы 3 она истинна в $\mathfrak{B}^{\mathcal{N}}$. Это противоречит элементарной эквивалентности

$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}^{\mathcal{N}}$.

Если для всех $\bar{b} \in |\mathfrak{A}|$ множество $\Phi(\bar{b}, \mathfrak{A})$ одноэлементно или пусто, то в $\mathfrak{A}$ истинно

$$(\forall\bar{x})(\forall y_1)(\forall y_2)\big((\Phi(\bar{x}, y_1) \wedge \Phi(\bar{x}, y_2)) \to y_1 = y_2\big).$$

По лемме Iа) оно истинно во всех $\mathcal{K}_+$-системах и пункт а) в этом случае доказан. Пусть для некоторого $\bar{b} \in |\mathfrak{A}|$ множество $\Phi(\bar{b}, \mathfrak{A})$ состоит из $n > 1$ элементов. Обозначим через $(\exists^{=n}_y)\Phi(\bar{x}, y)$ формулу, утверждающую, что существует ровно n элементов y, для которых $\Phi(\bar{x}, y)$. Рассмотрим формулу

$$\Psi = (\exists\bar{x})(\exists^{=n}_y)\Phi(\bar{x}, y).$$

Покажем, что Ψ истинна в $\mathfrak{A}^{\mathcal{N}}$. Определим $\bar{f} \in |\mathfrak{A}|^{\mathcal{N}}$ следующим образом: $\bar{f}(0) = \bar{b}$ и $\bar{f}(i) = \bar{a}$ для $i > 0$. Так как Φ – фильтрующаяся формула, то истинность $\Phi(\bar{f}, g)$ в $\mathfrak{A}^{\mathcal{N}}$ эквивалентна истинности в $\mathfrak{A}$ $\Phi(\bar{b}, g(0))$ и $\Phi(\bar{a}, g(i))$, $i > 0$. Так как $\Phi(\bar{a}, \mathfrak{A})$ одноэлементно, а $\Phi(\bar{b}, \mathfrak{A})$ состоит из n элементов, формула Ψ истинна в $\mathfrak{A}^{\mathcal{N}}$.

Пусть $\mathcal{D}$ – фильтр, состоящий из подмножеств $\mathcal{N}$, имеющих конечные дополнения. Пусть $\Phi(\bar{f}\mathcal{D}, g_1\mathcal{D})$ и $\Phi(\bar{f}\mathcal{D}, g_2\mathcal{D})$ истинны для $\bar{f}, g_1, g_2 \in |\mathfrak{A}|^{\mathcal{N}}$ и $g_1\mathcal{D} \neq g_2\mathcal{D}$. Тогда множество $J = \{i \in \mathcal{N} \mid g_1(i) \neq g_2(i)\}$ бесконечно. Разобьем J на счетное число бесконечных непересекающихся множеств: $J = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_k$. Строим $h_k \in |\mathfrak{A}|^{\mathcal{N}}$, полагая $h_k(i) = g_1(i)$ для $i \in J_k$ и $h_k(i) = g_2(i)$ для остальных $i \in \mathcal{N}$. В силу фильтруемости $\Phi(\bar{x}, y)$ множество

$$X = \{i \in \mathcal{N} \mid \mathfrak{A} \models (\Phi(\bar{f}(i), g_1(i)) \wedge \Phi(\bar{f}(i), g_2(i)))\}$$

принадлежит $\mathcal{D}$. Множество $\{i \in \mathcal{N} \mid \mathfrak{A} \models \Phi(\bar{f}(i), h_k(i))\}$ содержит X. Следовательно, $\Phi(\bar{f}\mathcal{D}, h_k\mathcal{D})$ истинна в $\mathfrak{A}^{\mathcal{D}}$. Очевидно, что $h_i\mathcal{D} \neq h_j\mathcal{D}$ при $i \neq j$. Таким образом, Ψ ложна в $\mathfrak{A}^{\mathcal{D}}$. Это противоречит элементарной эквивалентности $\mathfrak{A}^{\mathcal{N}}$ и $\mathfrak{A}^{\mathcal{D}}$. Пункт а) доказан.

б) Так как утверждение б) записывается в виде

$$(\forall\bar{x})(\forall\bar{y})(\forall z_1)(\forall z_2)\big((\Phi(\bar{x}, z_1) \wedge \Phi(\bar{y}, z_1) \wedge \Phi(\bar{y}, z_2)) \to \Phi(\bar{x}, z_2)\big),$$

то в силу леммы I а) достаточно доказать б) для некоторой конечной системы $\mathfrak{A}$. Предположим, что утверждение б) для $\mathfrak{A}$ не верно. Тогда в силу конечности $\mathfrak{A}$ существуют $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \in |\mathfrak{A}|$ такие, что $\Psi(\bar{b}, \mathfrak{A}) = \Phi(\bar{a}_1, \mathfrak{A}) \cap \ldots \cap \Phi(\bar{a}_n, \mathfrak{A}) \neq \emptyset$, где $\bar{b} = \langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \rangle$ и для всех $\bar{c} \in |\mathfrak{A}|$ $\Psi(\bar{b}, \mathfrak{A}) \cap \Phi(\bar{c}, \mathfrak{A})$ не является собственным непустым подмножеством множества $\Psi(\bar{b}, \mathfrak{A})$. Пусть $\bar{d} = \langle \bar{a}, \ldots, \bar{a} \rangle$ и $n(\bar{a})$ – число непустых подмножеств вида $\Psi(\bar{d}, \mathfrak{A}) \wedge \Phi(\bar{c}, \mathfrak{A})$, $\bar{c} \in |\mathfrak{A}|$. По предположению $n(\bar{a})>1$ для некоторого $\bar{a}\in|\mathfrak{A}|$. Рассмотрим формулу $\Psi_1(\bar{x})$, утверждающую, что число различных непустых подмножеств множества $\Psi(\bar{x},\mathfrak{A})$ вида $\Psi(\bar{x},\mathfrak{A})\wedge\Phi(\bar{a}',\mathfrak{A})$, $\bar{a}'\in|\mathfrak{A}|$, равно $n(\bar{a})$. Очевидно, что в $\mathfrak{A}^{\mathcal{N}}$ истинна формула $\Psi_1(\bar{f})$, где $\bar{f}(i)=\bar{b}$ для $i\neq 0$, $\bar{f}(0)=\bar{a}$.

Покажем, что для любой $\bar{h}\in|\mathfrak{A}|^{\mathcal{N}}$ формула $\Psi_1(\bar{h}\mathcal{D})$ ложна в $\mathfrak{A}^{\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D}$ – фильтр, состоящий из подмножеств $\mathcal{N}$, имеющих конечные дополнения. Это, в силу полноты $\mathcal{K}$, дает противоречие, завершающее доказательство леммы.

Пусть J – множество тех $i\in\mathcal{N}$, для которых $\Psi(\bar{h}(i),\mathfrak{A})=\Phi(\bar{h}_1(i),\mathfrak{A})\wedge\ldots\wedge\Phi(\bar{h}_n(i),\mathfrak{A})$ имеет собственное непустое подмножество вида

$$\Psi(\bar{h}(i),\mathfrak{A})\wedge\Phi(\bar{c},\mathfrak{A}),\ \bar{c}\in|\mathfrak{A}|.$$

Если J конечно, то для $i\in(\mathcal{N}\setminus J)\in\mathcal{D}$ в $\mathfrak{A}$ истинна формула $\Theta(\bar{h}(i))$, где $\Theta(\bar{x})$ есть

$$(\forall u)(\forall v)(\forall\bar{y})((\Psi(\bar{x},u)\wedge\Phi(\bar{y},u)\wedge\Psi(\bar{x},v))\rightarrow\Phi(\bar{y},v)).$$

Очевидно, что $\Theta(\bar{x})$ условно фильтруется. Следовательно, $\Theta(\bar{h}\mathcal{D})$ истинна в $\mathfrak{A}^{\mathcal{D}}$. Ясно, что из истинности $\Theta(\bar{h}\mathcal{D})$ следует ложность $\Psi_1(\bar{h}\mathcal{D})$.

Если J бесконечно, то пусть $J=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}J_k$, где J_k, $k\in\mathcal{N}$, непересекающиеся бесконечные множества. Пусть для $i\in J$ $\Psi(\bar{h}(i),\mathfrak{A})\wedge\Phi(\bar{c}_i,\mathfrak{A})$ – собственное непустое подмножество множества $\Psi(\bar{h}(i),\mathfrak{A})$. Полагая $\bar{f}^k(i)=\bar{c}_i$, если $i\in J_k$, и $\bar{f}^k(i)=\bar{h}_1(i)$ в противном случае, получим, что $\Psi(\bar{h}\mathcal{D},\mathfrak{A}^{\mathcal{D}})\wedge\Phi(\bar{f}^k\mathcal{D},\mathfrak{A}^{\mathcal{D}})$ – собственные непустые, различные при различных $k\in\mathcal{N}$ подмножества множества $\Psi(\bar{h}\mathcal{D},\mathfrak{A}^{\mathcal{D}})$. Следовательно, $\Psi_1(\bar{h}\mathcal{D})$ ложна в $\mathfrak{A}^{\mathcal{D}}$. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $\Phi(\bar{x},y)$ – фильтрующаяся формула. Существует такое натуральное число n_0, что для любого терма $t(\bar{x},\bar{y})$ существует терм $t_1(\bar{x},\bar{z})$, что для любых $\mathcal{K}_+$-системы $\mathfrak{A}$ и $\bar{a}\in|\mathfrak{A}|$ $t(\bar{a},\overline{\Phi(\bar{a},\mathfrak{A})})\subseteq t_1(\bar{a},\overline{\Phi(\bar{a},\mathfrak{A})})$ и кортеж $\bar{z}$ имеет длину $\leq n_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{A}_1$ – конечная $\mathcal{K}_+$-система, состоящая из n_1 элементов. В силу леммы 2 б) множества $t(\bar{a},b_1,\ldots,b_m,\overline{\Phi(\bar{a},\mathfrak{A}_1)})$ при различных $b_1,\ldots,b_m\in\Phi(\bar{a},\mathfrak{A}_1)$ либо совпадают, либо не пересекаются, то есть образуют разбиение $Z_m^{\bar{a}}$ множества $t(\bar{a},\overline{\Phi(\bar{a},\mathfrak{A}_1)})$. При увеличении m эти разбиения либо становятся более мелкими, либо остаются теми же самыми (обозначаем $Z_m^{\bar{a}}\leq Z_{m+1}^{\bar{a}}$). Очевидно, что существует такое число n_2, что любая цепь $Z_1<Z_2<\ldots<Z_k$ строго уменьшающихся разбиений множества из $\leq n_1$ элементов имеет длину $\leq n_2$. Индукцией по s легко показать, что существует число

$n_3(s)$, зависящее от s, такое, что если даны s цепей
$$Z_1^1\leq\ldots\leq Z_k^1,\ \ldots,\ Z_1^s\leq\ldots\leq Z_k^s$$
с условием, что при любом $i<k$ одно из неравенств $Z_i^1\leq Z_{i+1}^1,\ldots,Z_i^s\leq Z_{i+1}^s$ является строгим, то $k\leq n_3(s)$.

Возьмем в качестве n_0 число $n_3(n_1^n)$, где n – длина кортежа $\bar{x}$ в $\Phi(\bar{x},y)$. Строим термы $t_1(\bar{x},\bar{z})$ индукцией по $\ell(\bar{y})$. При $\ell(\bar{y})\leq n_0$ пусть $t_1(\bar{x},\bar{z})=t(\bar{x},\bar{y})$. Из предыдущего заключаем. что если $\ell(\bar{y})>n_0$, то существует такое $m\leq n_0$, что при любых $\bar{a}\in|\mathfrak{A}_1|$ и $b_1,\ldots,b_m,c,d\in\Phi(\bar{a},\mathfrak{A}_1)$

$$t(\bar{a},b_1,\ldots,b_m,c,\overline{\Phi(\bar{a},\mathfrak{A}_1)})=t(\bar{a},b_1,\ldots,b_m,d,\overline{\Phi(\bar{a},\mathfrak{A}_1)}).$$

Отождествляя y_m и y_{m+1}, из индукционного предположения получаем $t_1(\bar{x},\bar{z})$, для которого $t(\bar{a},\overline{\Phi(\bar{a},\mathfrak{A}_1)})\subseteq t_1(\bar{a},\overline{\Phi(\bar{a},\mathfrak{A}_1)})$ для любого $\bar{a}\in|\mathfrak{A}_1|$. $t(\bar{a},\overline{\Phi(\bar{a},\mathfrak{A})})\subseteq t_1(\bar{a},\overline{\Phi(\bar{a},\mathfrak{A})})$ для любого $\bar{a}\in|\mathfrak{A}|$ равносильно истинности в $\mathfrak{A}$ формулы, условно фильтрующейся вместе с отрицанием. По лемме 1а) лемма 3 доказана.

Подмножество $X\subseteq|\mathfrak{A}|$ $\mathcal{K}$-системы $\mathfrak{A}$ называется сильно минимальным в $\mathfrak{A}$, если оно содержит более одного элемента и для любой EF-формулы $\Phi(\bar{x},y)$ и любого $\bar{a}\in|\mathfrak{A}|$ множество $X\wedge\Phi(\bar{a},\mathfrak{A})$ либо равно X, либо содержит не более одного элемента.

ЛЕММА 4. Пусть $\Phi(\bar{x},y)$ – EF-формула, $\mathfrak{A}$ – $\mathcal{K}_+$-система, $\bar{a}=\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\in|\mathfrak{A}|$ и $\Phi(\bar{a},\mathfrak{A})$ – сильно минимальное в $\mathfrak{A}$ множество. Пусть $\Phi(\bar{a},\mathfrak{A}_0)$ содержит более одного элемента, где $\mathfrak{A}_0$ – $\mathcal{K}$-система, порожденная в $\mathfrak{A}$ множеством $\{a_1,\ldots,a_n\}$. Тогда существует такой терм $t(\bar{x},\bar{y})$, что $t(\bar{a},\overline{\Phi(\bar{a},\mathfrak{A})})=|\mathfrak{A}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы можно выразить как истинность в $\mathfrak{A}$ формулы
$$(\forall z)(\exists y_1)\ldots(\exists y_m)\Big(\bigwedge_{i=1}^{m}\Phi(\bar{a},y_i)\wedge t(\bar{a},y_1,\ldots,y_m)=z\Big).$$
Так как $(\exists\bar{y})\Big(\bigwedge_{i=1}^{m}\Phi(\bar{x},y_i)\wedge t(\bar{x},\bar{y})=z\Big)$ – фильтрующаяся формула, то по лемме 2б) достаточно доказать истинность в $\mathfrak{A}$ формулы
$$(\exists\bar{x})(\forall z)(\exists y_1)\ldots(\exists y_m)\Big(\bigwedge_{i=1}^{m}\Phi(\bar{x},y_i)\wedge t(\bar{x},y_1,\ldots,y_m)=z\Big).$$
Эта формула условно фильтруется вместе со своим отрицанием. Поэтому из леммы 1а) следует, что достаточно доказать истинность рассматриваемой формулы в некоторой $\mathcal{K}_+$-системе $\mathfrak{B}$.

Заметим, что в любой $\mathcal{K}_\infty$-системе для любой фильтрующейся формулы $\Phi(\bar{x})$, если $\Phi(\bar{\mathfrak{A}})$ содержит более одного элемента, то оно бесконечно. В силу полноты $\mathcal{K}$ это достаточно показать для некоторой $\mathcal{K}_\infty$-системы. Очевидно, что это верно для системы, являющейся объединением следующей последовательности $\mathcal{K}_+$-систем:

$$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}^2 \subseteq \mathfrak{B}^4 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{B}^{2^k} \subseteq \dots \quad , k \in \mathcal{N},$$

где $\mathfrak{B}$ – произвольная $\mathcal{K}_+$-система.

Так как $\Psi(\bar{x}, y)$ – EF-формула, то она равна $(\exists z_1)\dots(\exists z_k)\Psi(z_1,\dots,z_k,\bar{x},y)$, где $\Psi(z_1,\dots,z_k,\bar{x},y)$ – конъюнкция атомных формул. Пусть $\mathfrak{B}$ – подсистема $\mathfrak{A}^{\mathcal{N}}$, порожденная множеством $\Phi(\bar{a},\mathfrak{A}^{\mathcal{N}}) \cup \{a_1,\dots,a_n\}$. Так как $\Phi(\bar{a},\mathfrak{A}_0)$ содержит более одного элемента и $\mathfrak{B}$ бесконечна, то по предыдущему замечанию $\Phi(\bar{a},\mathfrak{B})$ бесконечно. В силу лемм 3 и I б) система $\mathfrak{B}$ порождается в $\mathfrak{A}^{\mathcal{N}}$ множеством $\Phi(\bar{a},\mathfrak{A}^{\mathcal{N}}) \cup \{a_1,\dots,a_n\}$ с помощью конечного числа термов. Следовательно, существуют такие термы $t_1(\bar{x},y_1,\dots,y_m),\dots,t_k(\bar{x},y_1,\dots,y_m)$, что множество

$$\mathcal{X} = (\exists y_1)\dots(\exists y_m)\Big(\bigwedge_{i=1}^{m} \Phi(\bar{a},y_i) \wedge \Psi\big(t_1(\bar{a},\bar{y}),\dots,t_k(\bar{a},\bar{y}),\bar{a},\mathfrak{A}^{\mathcal{N}}\big)\Big)$$

бесконечно. Так как $\Phi(\bar{a},\mathfrak{A})$ сильно минимально в $\mathfrak{A}$, то в силу леммы 2 а) $\Phi(\bar{a},\mathfrak{A}^{\mathcal{N}})$ сильно минимально в $\mathfrak{A}^{\mathcal{N}}$. Следовательно, $\mathcal{X} = \Phi(\bar{a},\mathfrak{A}^{\mathcal{N}})$ и $\Phi(\bar{a},\mathfrak{B}) = \Phi(\bar{a},\mathfrak{A}^{\mathcal{N}})$. Таким образом, существуют такие термы $t_1(\bar{x},z_1,\dots,z_k),\dots,t_s(\bar{x},z_1,\dots,z_k)$ что в $\mathfrak{B}$ истинна формула

$$(\exists \bar{x})(\forall y)(\exists z_1)\dots(\exists z_k)\Big(\bigwedge_{i=1}^{k} \Phi(\bar{x},z_i) \wedge \big(t_1(\bar{x},\bar{z})=y \vee \dots \vee t_s(\bar{x},\bar{z})=y\big)\Big) \quad (I)$$

Предположим, что ни для какого $\bar{a} \in |\mathfrak{B}|$ система $\mathfrak{B}$ не порождается множеством $\Phi(\bar{a},\mathfrak{B})$ с помощью одного терма $t(\bar{a},\bar{y})$ ни для какого $t(\bar{x},\bar{y})$. Пусть $t_0(\bar{x},\bar{y}_0),\dots,t_i(\bar{x},\bar{y}_i),\dots, i \in \mathcal{N},$ – пересчет всех термов, где $l(\bar{x})=n$. Выберем для любого $\bar{a} \in |\mathfrak{B}|$ и $i \in \mathcal{N}$ элемент $b_i^{\bar{a}} \in |\mathfrak{B}|$, для которого $t_i(\bar{a},\bar{c}) \neq b_i^{\bar{a}}$ для любого $\bar{c} \in \Phi(\bar{a},\mathfrak{B})$. Ясно, что в $\mathcal{K}_+$-системе $\mathfrak{B}^{\mathcal{N}}$ для любого $\bar{f} \in \mathfrak{B}^{\mathcal{N}}$ и $i \in \mathcal{N}$ $t_i(\bar{f},\bar{c}) \neq g$ для любого $\bar{c} \in \Phi(\bar{f},\mathfrak{B}^{\mathcal{N}})$, где $g(j) = b_j^{\bar{f}(j)}$ $(j \in \mathcal{N})$. Тогда формула (I) ложна в $\mathfrak{B}^{\mathcal{N}}$, что противоречит полноте $\mathcal{K}$. Лемма доказана.

Рассмотрим максимальное, выполнимое в некоторой $\mathcal{K}_+$-системе множество

$$\mathcal{X}^* = \{x_1 \neq x_2\} \cup \{\Phi_i(x_1,x_2) \mid i \in \mathcal{N}\},$$

где $\Phi_i(x_1,x_2), i \in \mathcal{N},$ – EF-формулы.

Расширяя сигнатуру Ω на две константы c_1 и c_2, получаем сигнатуру Ω^*. Пусть $\mathcal{K}^*$ – квазимногообразие сигнатуры Ω^*, множество аксиом которого содержит аксиомы $\mathcal{K}$, а также для каждой атомной формулы $\mathcal{P}(x_1,x_2)$ сигнатуры Ω содержит тождество $\mathcal{P}(c_1,c_2)$, если $\mathcal{P}(x_1,x_2) \in \mathcal{X}^*$, и квазитождество $(\forall y_1)(\forall y_2)(\mathcal{P}(c_1,c_2) \to y_1=y_2)$ в противном случае.

ЛЕММА 5. а). Любую $\mathcal{K}_+$-систему можно обогатить до $\mathcal{K}_+^*$-системы.

б). Если EF-формула $\Phi(c_1,c_2)$ истинна в некоторой $\mathcal{K}_+^*$-системе, то она истинна в любой $\mathcal{K}_+^*$-системе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что множество $\mathcal{X}^*$ выполняется в любой конечной $\mathcal{K}_+$-системе $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathcal{X}^*$ выполняется в $\mathcal{K}_+$-системе $\mathfrak{B}$. Тогда $\mathcal{X}^*$ выполняется в $\mathcal{K}_\omega$-системе $\mathfrak{B}^{\mathcal{N}}$. Обозначим через $\mathcal{X}_n$ множество $\{x_1 \neq x_2\} \cup \{\Phi_i(x_1,x_2) \mid i < n\}$. В силу полноты $\mathcal{K}$ в $\mathfrak{A}^{\mathcal{N}}$ существуют элементы f_1^n, f_2^n, выполняющие $\mathcal{X}_n$. Тогда для некоторого $i_0 \in \mathcal{N}$ имеем $f_1^n(i_0) \neq f_2^n(i_0)$. Очевидно, что $f_1^n(i_0)$ и $f_2^n(i_0)$ выполняют $\mathcal{X}_n$ в $\mathfrak{A}$. Так как $|\mathfrak{A}|$ конечно, то существуют элементы $a_1,a_2 \in |\mathfrak{A}|$, выполняющие $\mathcal{X}_n$ в $\mathfrak{A}$ для как угодно больших n, т.е. выполняющие $\mathcal{X}^*$.

а). Так как $\mathcal{X}^*$ состоит из экзистенциональных формул, то из предыдущего и локальной конечности $\mathcal{K}$ получаем выполнимость $\mathcal{X}^*$ в любой $\mathcal{K}_+$-системе $\mathfrak{A}$ элементами a_1 и a_2. В частности, $\mathfrak{A} \models \mathcal{P}(a_1,a_2)$ для атомных $\mathcal{P}(x_1,x_2) \in \mathcal{X}^*$. Из максимальности $\mathcal{X}^*$ $\mathfrak{A} \models \neg\mathcal{P}(a_1,a_2)$ для атомных $\mathcal{P}(x_1,x_2) \notin \mathcal{X}^*$.

б). Покажем, что для любой $\mathcal{K}_+^*$-системы $\mathfrak{A}$ и EF-формулы $\Phi(x_1,x_2)$

$$\mathfrak{A} \models \Phi(c_1,c_2) \Leftrightarrow \Phi(x_1,x_2) \in \mathcal{X}^*. \quad (2)$$

Пусть $\mathfrak{C}_0$ – подсистема $\mathfrak{A}$, порожденная $c_1^{\mathfrak{A}}$ и $c_2^{\mathfrak{A}}$. По предыдущему $\mathcal{X}^*$ выполняется в обеднении $\mathfrak{C}_0 \upharpoonright \Omega$ элементами b_1 и b_2. Из аксиом $\mathcal{K}^*$ следует, что отображение $c_1^{\mathfrak{A}}$ в b_1 и $c_2^{\mathfrak{A}}$ в b_2 продолжается до изоморфизма $\mathfrak{C}_0 \upharpoonright \Omega$ в $\mathfrak{C}_0 \upharpoonright \Omega$. Так как $\mathfrak{C}_0$ – конечная система, то этот изоморфизм отображает $|\mathfrak{C}_0|$ на $|\mathfrak{C}_0|$. Значит,

$$\mathfrak{C}_0 \models \Phi(c_1,c_2) \Leftrightarrow \Phi(x_1,x_2) \in \mathcal{X}^*. \quad (3)$$

Ясно, что (2) следует из (3) и максимальности $\mathcal{X}^*$. Лемма доказана.

Пусть n_0 – наименьшее из натуральных чисел $n>1$, для которых существует EF-формула $\Phi^n(x)$, для которой число элементов $\Phi(\mathfrak{C}_0)$ равно n. Пусть $\mathcal{P}_i(x_1,x_2,y), i<k$ такие EF-формулы, что каждая EF-формула эквивалентна в $\mathfrak{C}_0$ одной из них. Здесь и в дальнейшем через $\mathfrak{C}_0$ мы обозначаем такую $\mathcal{K}_+^*$-систему, которая порождается $c_1^{\mathfrak{C}_0}$ и $c_2^{\mathfrak{C}_0}$. Если $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{A}}$ – подсистема, порожденная $c_1^{\mathfrak{A}}$ и $c_2^{\mathfrak{A}}$ в $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_+^*$, то по лемме 5 $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{A}}$ изоморфна $\mathfrak{C}_0$ для любой $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_+^*$. В силу конечности $\mathfrak{C}_0$ существует такая EF-формула $\Phi'(x_1,x_2,y)$, что $\Phi'(c_1,c_2,\mathfrak{C}_0)$ – сильно минимальное в $\mathfrak{C}_0$ множество, $\Phi'(c_1,c_2,\mathfrak{C}_0) \subseteq \Phi^{n_0}(\mathfrak{C}_0)$. Пусть $\Phi_0(x_1,x_2,y)$ есть $\Phi'(x_1,x_2,y) \wedge \Phi^{n_0}(y) \wedge \bigwedge_{i \in J} \mathcal{P}_i(x_1,x_2,y)$, где $J = \{i \leq k \mid \Phi'(c_1,c_2,\mathfrak{C}_0) \subseteq \mathcal{P}_i(c_1,c_2,\mathfrak{C}_0)\}$.

ЛЕММА 6. Множество $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})$ сильно минимально в любой $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_+^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\Phi_0(b_1,b_2,\mathfrak{C}_0)$ сильно минимально в $\mathfrak{C}_0$ или пусто для любых $b_1,b_2 \in$ [illegible]. Пусть $\Phi_0(b_1,b_2,\mathfrak{C}_0) \wedge \mathcal{P}(\bar{a},\mathfrak{C}_0)$ отлично от $\Phi(b_1,b_2,\mathfrak{C}_0)$ и содержит более одного элемента. Пусть $d \in |\mathfrak{C}_0|$. В силу леммы 2а) и сильной минимальности $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{C}_0)$ в $\mathfrak{C}_0$ множество $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{C}_0) \wedge \mathcal{P}(\bar{d},\mathfrak{C}_0)$ либо пусто, либо совпадает с $\Phi_0(e_1,c_2,\mathfrak{A}_0)$. Если оно пусто для всех $\bar{d}\in|\mathfrak{A}_0|$, то $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A}_0)\wedge(\exists\bar{x})\mathcal{P}(\bar{x},\mathfrak{A}_0)$ пусто. Значит, $\Phi^{n}_0(\mathfrak{A}_0)\wedge(\exists\bar{x})\mathcal{P}(\bar{x},\mathfrak{A}_0)$ пусто или одноэлементно. Тем более $\Phi_0(e_1,e_2,\mathfrak{A}_0)\wedge\mathcal{P}(\bar{a},\mathfrak{A}_0)$ пусто или одноэлементно, что невозможно. Если для некоторого $\bar{d}\in|\mathfrak{A}_0|$ оно совпадает с $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A}_0)$, то $\mathcal{P}(t_1(x_1,x_2),\dots,t_s(x_1,x_2),y)$ эквивалентна в $\mathfrak{A}_0$ некоторому конъюнктивному члену $\Phi_0(x_1,x_2,y)$, где $d_i=t_i(c_1,c_2)$ $(i\leq s)$. Поэтому $\Phi_0(e_1,e_2,\mathfrak{A}_0)\wedge\mathcal{P}(t_1(e_1,e_2),\dots,t_s(e_1,e_2),\mathfrak{A}_0)$ совпадает с $\Phi_0(e_1,e_2,\mathfrak{A}_0)$. Это противоречит лемме 2б). Из доказанного и леммы 2а) следует, что в $\mathfrak{A}_0$ истинна для EF-формулы $\mathcal{P}(\bar{x},y)$ одна из формул

$$(\forall\bar{x})(\forall y_1)(\forall y_2)(\forall z_1)(\forall z_2)((\Phi_0(z_1,z_2,y_1)\wedge\mathcal{P}(\bar{x},y_1)\wedge\Phi_0(z_1,z_2,y_2))\to\mathcal{P}(\bar{x},y_2)),$$

$$(\forall\bar{x})(\forall y_1)(\forall y_2)(\forall z_1)(\forall z_2)((\Phi_0(z_1,z_2,y_1)\wedge\mathcal{P}(\bar{x},y_1)\wedge\Phi_0(z_1,z_2,y_2)\wedge\mathcal{P}(\bar{x},y_2))\to y_1=y_2).$$

Они и их отрицания условно фильтруются. По лемме 1а) одна из них истинна в любой $\mathcal{K}_+$-системе. Отсюда следует, что $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})$ сильно минимально в $\mathfrak{A}$ для любой $\mathfrak{A}\in\mathcal{K}^*_+$. Лемма доказана.

Элемент $a\in|\mathfrak{A}|$ назовем з а в и с и м ы м в $\mathcal{K}^*_+$-системе $\mathfrak{A}$ от множества $X\subseteq|\mathfrak{A}|$, если существует EF-формула $\Phi(z_1,z_2,\bar{y},x)$ и такой $\bar{e}\in X$, что $\Phi(c_1,c_2,\bar{e},\mathfrak{A})=\{a\}$. Через $cl^{\mathfrak{A}}(X)$ будем обозначать множество элементов, зависимых от X в $\mathfrak{A}$. Если любой $a\in X$ не является зависимым от $X\setminus\{a\}$ в $\mathfrak{A}$, то множество X называется н е з а в и с и м ы м в $\mathfrak{A}$.

ЛЕММА 7. Если $\mathfrak{A}$ – $\mathcal{K}^*_+$-система, $X\subseteq|\mathfrak{A}|$ – независимое в $\mathfrak{A}$ множество, $a\in\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})$ и $X\cup\{a\}$ не является независимым в $\mathfrak{A}$ множеством, то a зависит от X в $\mathfrak{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a\notin cl^{\mathfrak{A}}(X)$. Тогда $\Phi(c_1,c_2,e_1,\dots,e_k,a,\mathfrak{A})=\{e\}$ для некоторых $e_1,\dots,e_k,e\in X$, $e\notin\{e_1,\dots,e_k\}$ и EF-формулы Φ. Так как $a\notin cl^{\mathfrak{A}}(X)$, то $Y=\Phi(c_1,c_2,e_1,\dots,e_k,\mathfrak{A},e)\wedge\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})$ более чем одноэлементно. Так как $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})$ сильно минимально, то $Y=\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})$. Множество $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A}_0)$ не пусто, следовательно, существует терм $t(c_1,c_2)\in\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})$. Таким образом, e принадлежит множеству $\Phi(c_1,c_2,e_1,\dots,e_k,t(c_1,c_2),\mathfrak{A})$. По лемме 2 а) множество $\Phi(c_1,c_2,e_1,\dots,e_k,t(c_1,c_2),\mathfrak{A})$ одноэлементно, следовательно, $\Phi(c_1,c_2,e_1,\dots,e_k,t(c_1,c_2),\mathfrak{A})=\{e\}$, что противоречит независимости X в $\mathfrak{A}$.

ЛЕММА 8. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – $\mathcal{K}^*_+$-системы.

а). Если $\mathfrak{B}$ – подсистема $\mathfrak{A}$, то $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{B})=\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})\cap|\mathfrak{B}|$.

б). Если $\{a_1,\dots,a_n\}\subseteq\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})$ и $\{e_1,\dots,e_n\}\subseteq\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{B})$ независимые соответственно в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ множества из n элементов, то для любой EF-формулы $\Psi(x_1,\dots,x_n)$ $\mathfrak{A}\models\Psi(a_1,\dots,a_n)$ равносильно $\mathfrak{B}\models\Psi(e_1,\dots,e_n)$.

в). Если $e\in cl^{\mathfrak{A}}(\{a_0,\dots,a_n\})$, где $a_i\in\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A}), i\leq n$, то $t(c_1,c_2,a_0,\dots,a_n)=e$ для некоторого терма t.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5 б) следует, что $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A}_0)=\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})\cap|\mathfrak{A}_0|$. Пусть $a\in\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})\setminus|\mathfrak{A}_0|$ и $a\in|\mathfrak{B}|$. Надо показать, что $a\in\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{B})$. Пусть $\mathfrak{B}_1$ – подсистема, порожденная в $\mathfrak{A}$ множеством $|\mathfrak{A}_0|\cup\{a\}$. По лемме 4 $\mathfrak{B}_1$ порождается множеством $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{B}_1)$, следовательно, существует $e=t(c_1,c_2,a)\in(\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{B}_1)\setminus|\mathfrak{A}_0|)$. Множество $Z=(e=t(c_1,c_2,\mathfrak{A})\wedge\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A}))$ одноэлементно. В противном случае, в силу сильной минимальности $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})$ Z совпадало бы с $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})$ и тогда $t(c_1,c_2,d)=e$ для любого $d\in\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})$, в частности для $d\in|\mathfrak{A}_0|$. Но тогда $e\in|\mathfrak{A}_0|$, что противоречило бы выбору e. Значит, $Z=\{a\}$.

В силу леммы 5 б)

$$\mathfrak{A}_0\models(\exists x)(\exists y)(\Phi_0(c_1,c_2,x)\wedge\Phi_0(c_1,c_2,y)\wedge t(c_1,c_2,x)=y).$$

Так как $e\notin|\mathfrak{A}_0|$, то множество

$$(\exists x)(\Phi_0(c_1,c_2,x)\wedge\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})\wedge t(c_1,c_2,x)=\mathfrak{A})$$

более чем одноэлементно. В силу леммы 2 а) и сильной минимальности $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{B})$

$$\mathfrak{B}\models(\exists x)(\Phi_0(c_1,c_2,x)\wedge t(c_1,c_2,x)=e).$$

Так как $Z=\{a\}$, то $a\in\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{B})$. Пункт а) доказан.

б). Индукция по n. При $n=0$ – это лемма 5 б). Если $\mathfrak{A}\models\Psi(a_1,\dots,a_{n-1},a_n)$, то по индукционному предположению

$$\mathfrak{B}\models(\exists x)(\Phi_0(c_1,c_2,x)\wedge\Psi(e_1,\dots,e_{n-1},x)).$$

Если в $\mathfrak{B}$ ложна $\Psi(e_1,\dots,e_{n-1},e)$, то в силу сильной минимальности $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{B})$ множество $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{B})\wedge\Psi(e_1,\dots,e_{n-1},\mathfrak{B})$ одноэлементно. По лемме 2 а) множество $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})\wedge\Psi(a_1,\dots,a_{n-1},\mathfrak{A})$ не более чем одноэлементно. Следовательно, $(\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})\wedge\Psi(a_1,\dots,a_{n-1},\mathfrak{A}))=\{a_n\}$. Это противоречит независимости $\{a_1,\dots,a_n\}$. Пункт б) доказан.

в) Индукция по n. База индукции следует из леммы 5 б). Если $\{a_0,\dots,a_k\}$ не является независимым в $\mathfrak{A}$, то по индукционному предположению $a_{i_0}=t(a_0,\dots,a_{i_0-1},a_{i_0+1},\dots,a_k)$ для некоторого $i_0\leq k$. Следовательно, $e\in cl^{\mathfrak{A}}(\{a_m\mid m\leq k, m\neq i_0\})$ и по индукционному предположению пункт в) в этом случае доказан. Пусть $\{a_0,\dots,a_k\}$ – независимое множество. Рассмотрим $\mathcal{K}^*_+$-систему $\mathfrak{B}$, порожденную в $\mathfrak{A}$ множеством $\{a_0,\dots,a_k\}$. В силу пункта а) $\{a_0,\dots,a_k\}\subseteq\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{B})$. Очевидно, что $\{a_0,\dots,a_k\}$ останется независимым в $\mathfrak{B}$. Пусть $\{b\} = \Psi(a_0,\dots,a_k,\mathfrak{A})$. По пункту б) в $\mathfrak{B}$ истинна $(\exists x)\Psi(a_0,\dots,a_k,x)$. Следовательно, $t(c_1,c_2,a_0,\dots,a_k) \in \Psi(a_0,\dots,a_k,\mathfrak{B})$ для некоторого терма t. Так как Ψ – EP-формула, то $t(c_1,c_2,a_0,\dots,a_k) \in \Psi(a_0,\dots,a_k,\mathfrak{A})$, т.е. $t(c_1,c_2,a_0,\dots,a_k) = b$. Лемма 8 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – $\mathcal{K}_+^*$-системы одной мощности. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – максимальные независимые подмножества $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})$ и $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{B})$ соответственно. По леммам 7 и 8 в) подсистема $\mathfrak{A}'(\mathfrak{B}')$, порожденная в $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ множеством $\mathfrak{X}(\mathfrak{Y})$, содержит $\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{A})$ $(\Phi_0(c_1,c_2,\mathfrak{B}))$. Тогда по лемме 4 $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}'=\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – бесконечные системы, то в силу локальной конечности $\mathcal{K}^*$ $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ равномощны. В силу леммы 8 б) взаимно однозначное отображение $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{Y}$ расширяется до изоморфизма $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – конечные множества и мощность $\mathfrak{X}$ не превосходит мощности $\mathfrak{Y}$. Тогда разнозначное отображение $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$ распространяется до изоморфизма $\mathfrak{A}$ на подсистему $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}$. Так как $|\mathfrak{B}|$ конечно и мощности $|\mathfrak{B}_1|$ и $|\mathfrak{B}|$ равны, то $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}$. Следовательно, $\mathcal{K}^*$ категорично во всех неодноэлементных мощностях.

Так как любая $\mathcal{K}_+$-система является обеднением подходящей $\mathcal{K}_+^*$-системы, то квазимногообразие $\mathcal{K}$ также категорично во всех неодноэлементных мощностях.

СЛОВАРЬ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Юрий Леонидович Ершов
Евгений Андреевич Палютин
Михаил Абрамович Тайцлин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Ответственный редактор Л.Л.Максимова

Редактор М.Н.Рашевская

Подписано в печать 3.I2. I973. МН 0900I
Бумага 60 x 84, I/I6. Объем IO п.л. Тираж I000 экз.
Заказ № 96I Цена 50 коп.

Ротапринт НГУ 630090, Новосибирск, 90

БИБЛИОТЕКА
кафедры алгебры и математической логики
Новосибирского университета

Вып. I. А.И.Кокорин, Упорядочиваемые группы, Новосибирск, I966, I-I28.

Вып. 2. Ю.И.Мерзляков, Рациональные группы, I (алгебраические группы матриц), Новосибирск, I967, I-2I0.

Вып. 3. М.И.Каргаполов, Ю.И.Мерзляков, В.Н.Ремесленников, Основы теории групп, I, Новосибирск, I968, I-I98.

Вып. 4. М.И.Каргаполов,Ю.И.Мерзляков, Основы теории групп, 2, Новосибирск, I969, I99-366.

Вып. 5. Ю.Л.Ершов, Теория нумераций, I (общая теория нумераций), Новосибирск, I969, I-I76.

Вып. 6. М.А.Тайцлин, Теория моделей, Новосибирск, I970, I-2I4.

Вып. 7. И.А.Лавров, Логика и алгоритмы, Новосибирск, I970, I-I74.

Вып. 8. И.А.Лавров, Л.Л.Максимова, Задачи по логике, Новосибирск, I970, I-II2.

Вып. 9. Ю.И.Мерзляков, Рациональные группы, 2 (абстрактные алгебраические группы), Новосибирск, I970, 2II-442.

Вып.I0. Д.А.Захаров,Рекурсивные функции, Новосибирск,I970, I-206.

Вып.II. Ю.Л.Ершов, Теория нумераций, 2 (вычислимые нумерации морфизмов), Новосибирск, I973, I-I70.

Вып.I2. Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин, М.А.Тайцлин,Математическая логика, Новосибирск, I973, I- I59.