С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ОСНОВЫ функционального АНАЛИЗА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Глубокоуважаемому академику

Самсону Семеновичу

Кутателадзе

на память о посещении 4-й типографии издательства „Наука“ АН СССР

1 июля 1983 г. **г. Новосибирск**

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск · 1983

УДК 517.98

Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа.— Новосибирск: Наука, 1983.

В монографии изложены основные разделы современного функционального анализа. Особое внимание уделено теории мультинормированных и мультиметрических пространств, теории банаховых алгебр и функциональному исчислению, теории нётеровых операторов, теории двойственности локально выпуклых пространств, выпуклому анализу, принципам банаховых пространств и ряду смежных вопросов.
Книга ориентирована на широкий круг читателей, интересующихся методами функционального анализа и его приложениями.
Библиогр. 111.

Ответственный редактор *В. В. Иванов*

$К\frac{1702050000-777}{042(02)-83}139-83-II$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как следует из названия, эта книга посвящена функциональному анализу. Термин «функциональный анализ» был изобретен в начале текущего века Ж. Адамаром, известным всем математикам по формуле для вычисления радиуса сходимости степенного ряда. Функциональным анализом стали называть новую ветвь вариационного исчисления, которую интенсивно разрабатывали в то время В. Вольтерра, Ч. Арцела, П. Леви, С. Пинкерле и ряд других представителей французской и итальянской математических школ. Вклад Ж. Адамара в создание новой дисциплины не сводится, разумеется, к изобретению слова функционал (точнее, к превращению соответствующего прилагательного в имя существительное). Ж. Адамар хорошо понимал роль зарождающегося направления, интенсивно работал, постоянно пропагандировал вновь возникающие проблемы, идеи и методы. В частности, он поставил перед своим учеником М. Фреше задачу построения того, что все теперь называют теорией метрических пространств. В этой же связи уместно отметить, что окрестности, применяемые в функциональном анализе в смысле Адамара — Вольтерра, послужили предтечей известных работ Ф. Хаусдорфа, ознаменовавших оформление общей топологии. Для дальнейшего важно подчеркнуть, что одно из наиболее интересных, трудных и важных направлений классического анализа — вариационное исчисление — стало первым источником функционального анализа.

Вторым источником функционального анализа были исследования, направленные на создание алгебраической теории функциональных уравнений, точнее говоря, на упрощение и формализацию манипулирования с «уравнениями в функциях» и, в частности, с линейными интегральными уравнениями. Теория таких уравнений, восходящая к Н. Абелю и Ж. Лиувиллю, получила существенное развитие в работах И. Фредгольма, К. Неймана, Ф. Нётера, А. Пуанкаре и др. Труды этих математиков подготовили почву знаменитым исследованиям Д. Гильберта по теории квадратичных форм от бесконечного числа переменных. Идеи Д. Гильберта, развитые Ф. Риссом, Э. Шмидтом и др., послужили непосредственными предшественниками аксиоматического построения теории гильбертовых пространств, данного Дж. фон Нейманом и М. Стоуном. Возникший раздел математики оказал и продолжает оказывать сильнейшее воздействие на теоретическую физику и прежде всего на квантовую механику. Небезынтересно и поучительно в этой связи отметить, что термин «квант» возник в том же 1900 г., что и термин «функционал».

Третьим важнейшим источником функционального анализа послужили геометрические идеи Г. Минковского. Развитый им аппарат конечномерной геометрии выпуклых тел подготовил тот круг пространственных представлений, в котором осуществляется современное развитие анализа. Идея выпуклости, разработанная Э. Хелли, Г. Ханом, К. Каратеодори, И. Радоном и др., легла впоследствии в основу теории локально выпуклых пространств. В свою очередь, эта теория способствовала распространению метода обобщенных производных, открытого С. Л. Соболевым и коренным образом изменившего аппарат математической физики. В послевоенные годы геометрическая концепция выпуклости завоевала для математики новую сферу приложений — социальные науки и особенно экономику. Исключительную роль при этом сыграло линейное программирование, открытое Л. В. Канторовичем.

Приведенный перечень линий становления функционального анализа схематичен, неполон и приблизителен (так, остались неотмеченными линия принципа суперпозиции Д. Бернулли, линия функций множеств и теории интеграла, линия операционного исчисления, линия исчисления конечных разностей и дробного дифференцирования, линия «общего анализа» и многое другое). Несмотря на это, перечисленные три источника отражают основную, наиболее существенную закономерность — в функциональном анализе осуществлены синтез и развитие идей, представлений и методов классических разделов математики: геометрии, алгебры и анализа. Таким образом, хотя в буквальном смысле слов функциональный анализ — это анализ функций и функционалов, даже поверхностный взгляд на его историю дает основания сказать, что функциональный анализ — это алгебра, геометрия и анализ функций и функционалов. Более глубокое и развернутое разъяснение понятия «функциональный анализ» дает Советский Энциклопедический Словарь: «Функциональный анализ, один из основных разделов современной математики. Возник в результате взаимного влияния, объединения и обобщения идей и методов многих разделов классического математического анализа. Характеризуется использованием понятий, связанных с различными абстрактными пространствами, такими, как векторное пространство, гильбертово пространство и др. Находит разнообразные применения в современной физике, особенно в квантовой механике» (с. 1449).

Оформление функционального анализа как самостоятельного раздела математики связано с книгой С. Банаха «Теория линейных операций», вышедшей в свет полвека назад. Влияние этой книги на развитие математики огромно — представленные в ней концепции С. Банаха пронизывают всю математику.

Выдающийся вклад в развитие функционального анализа внесли советские ученые И. М. Гельфанд, Л. В. Канторович, М. В. Келдыш, А. Н. Колмогоров, М. Г. Крейн, Л. А. Люстерник, С. Л. Соболев. Для отечественной школы характерно развитие исследований в области функционального анализа в связи с крупными прикладными проблемами. Эти исследования расширили роль функционального анализа — он стал основным языком приложений математики. Показателен следующий факт. Хотя в 1948 г. само название широко известной статьи Л. В. Канторовича «Функциональный анализ и прикладная математика», заложившей основы современной теории приближенных методов, воспринималось как парадоксальное, уже в 1974 г., по словам С. Л. Соболева, теорию вычислений стало «так же невозможно себе представить без банаховых пространств, как и без электронных вычислительных машин».

Наряду с постоянным ростом потребностей в методах и представлениях функционального анализа в последнее время наблюдается экспоненциальное накопление фактического материала в рамках самой этой дисциплины. Таким образом, разрыв между современным уровнем анализа и уровнем, зафиксированным в доступной широкому читателю литературе, постоянно увеличивается. Настоящая книга преследует цель преодоления этой негативной тенденции.

СОДЕРЖАНИЕ

Семен Самсонович Кутателадзе

ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Ответственный редактор
Владимир Вениаминович Иванов

Утверждено к печати
Институтом математики СО АН СССР

Редактор издательства *В. Н. Дятлов*
Художник *Е. Ф. Зайцев*
Технический редактор *Г. Я. Герасимчук*
Корректоры *С. М. Погудина, Г. И. Шведкина*

ИБ № 23212

Сдано в набор 27.05.82. Подписано к печати 29.03.83. МН-12030. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Бумага типографская № 2. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 11,8. Усл. кр-отт. 11,8. Уч.-изд. л. 15,1. Тираж 4000 экз. Заказ 192. Цена 1 р. 80 к.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.

4-я типография издательства «Наука», 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.