517.9+519.8
Кутателадзе С. С.

МАЖОРИРОВАНИЕ, ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И СКАЛЯРИЗАЦИЯ

С. С. Кутателадзе

Статья поступила 23 апреля 2008 г.

Дается краткий анализ некоторых возможностей, предоставляемых теорией моделей для прикладной математики. Особое внимание уделено современному состоянию и границам применимости метода мажорант Коши, приближению операторных уравнений их конечномерными аналогами и принципу множителей Лагранжа в задачах многокритериального принятия решений.

Союзу функционального анализа и прикладной математики в этом году исполняется 60 лет (см. [1, 2]). Эта статья посвящена тенденциям взаимодействия теории моделей и методов мажорирования, дискретизации и скаляризации.

Чистая и прикладная математика

Доказательный счет представляет искусство исчисления, которое принято называть математикой. Математика как наука существует более двух с половиной тысяч лет и её никак нельзя перепутать с историей или химией. В этом смысле представления о том, что такое математика, от времени не зависят.

Предмет математики — количественные формы человеческого мышления. Математика функционирует как наука доказательных исчислений. Однажды установленные математические факты не исчезают. Разумеется, математика постоянно обновляется, растет запас её понятий и конструкций, увеличивается объем накопленных знаний, меняются представления о строгости доказательств и технологии их получения. От времени зависит и граница, которую мы проводим между математикой чистой и прикладной.

В 1605 г. Фрэнсис Бэкон во второй книге своего знаменитого сочинения «Великое восстановление наук. Разделение наук» писал:

> Математика бывает или чистая, или смешанная. К чистой математике принадлежат те дисциплины, которые рассматривают количество, полностью абстрагированное от материи и физических аксиом... Предметом смешанной математики являются некоторые аксиомы и части физики. Она рассматривает количество в той мере, в какой оно помогает разъяснению, доказательству и приведению в действие законов физики. Ибо в природе существует много такого, что не может быть ни достаточно глубоко понято, ни достаточно убедительно доказано, ни достаточно умело и надежно использовано на практике без помощи и вмешательства математики...
>
> По мере того как физика день ото дня будет приумножать свои достижения и выводить новые аксиомы, она будет во многих вопросах нуждаться все в большей помощи математики; и это приведет к созданию еще большего числа областей смешанной математики.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 46 N 10.

Спустя полтора века в 1761 г. Леонард Эйлер использовал термин «чистая математика» в заголовке сочинения “Specimen de usu observationum in mathesi pura.” Примерно в то же время термин «чистая математика» попал в старейшую английскую энциклопедию *Encyclopaedia Britannica.* В XIX веке «смешанную» математику начинают именовать «прикладной». Появляются знаменитые журналы *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (основанный Жозефом Лиувиллем в 1836 г.) и *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* (1857 г.).

Интеллектуальный вызов, красота и внутренняя логика предмета служат побудительными мотивами многих содержательных и глубоких исследований в области математики, которые принято именовать чистыми. Знание разработанных математических методов и понимание их силы лежат в основе приложений математики к другим наукам. Любые приложения математики невозможны без создания метафор — моделей изучаемых процессов и явлений. Моделирование — особая и самостоятельная сфера интеллектуальной деятельности, лежащая за пределами математики.

Приложения математики расположены вне её подобно тому, как болезни существуют в природе, а не внутри медицины. Прикладная математика выступает в роли фармацевта, готовящего лекарства для борьбы с недугами.

Искусство и ремесло математической техники для задач других наук составляют предмет математики прикладной.

Линейные неравенства и пространства Канторовича

Традиционной сферой приложения математики XIX века была классической механика, понимаемая в самом широком смысле. Отражением этой исторической традиции служат механико-математические факультеты ведущих университетов России.

Начало XX века отмечено резким расширением сферы приложений математики. Возникла квантовая механика, потребовавшая развития нового математического аппарата. Теория операторов в гильбертовых пространствах и теория обобщенных функций были ориентированы, прежде всего, на адаптацию эвристических методов новой физики. В те же годы социальные феномены стали предметом невербальных исследований, требовавших создания специальных математических методов. Значительно возросла потребность в статистической обработке данных. Создание новых производств, внедрение передовых технологий, оборудования и материалов вызвали потребность совершенствования техники расчетов. Бурному развитию прикладной математики способствовала автоматизация и механизация процесса вычислений.

В 1930-е годы прикладная математика стремительно сближается с функциональным анализом. Существенную роль в этом процессе сыграли исследования Джона фон Неймана по математическим основам квантовой механики и теории игр как аппарата экономических исследований. В России пионером и генератором новых синтетических идей стал Л. В. Канторович.

Главным своим математическим достижением в области функционального анализа Канторович считал выделение специального класса порядково полных упорядоченных векторных пространств, которые в отечественной литературе именуют K-пространствами или пространствами Канторовича[1].

[1] В рабочих тетрадях Канторович писал о «моих пространствах».

Уже в первой своей работе в этой новой области математики[2], датированной 1935 г., Канторович писал:

> В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы.

Так была впервые сформулирована важнейшая методологическая установка, которую теперь называют эвристическим принципом Канторовича. Следует подчеркнуть, что в определение линейного полуупорядоченного пространства Канторовичем была включена аксиома условной порядковой полноты, обозначенная I_6. Роль K-пространств Канторович продемонстрировал на примере теоремы Хана — Банаха. Оказалось, что в этом центральном принципе функционального анализа можно заменить вещественные числа элементами произвольного K-пространства, а линейные функционалы — операторами со значениями в таком пространстве. Именно эти наблюдения стали основой мощной эвристики, основанной на интуитивной убежденности в том, что элементы абстрактного пространства Канторовича — это своего рода обобщенные числа.

Пространства Канторовича предоставили естественные рамки для построения теории линейных неравенств — области, до того времени практически никак не изученной. Очевидно, что концепция неравенств весьма приспособлена для задач, связанных с приближенными вычислениями, где существенную роль играют разнообразные оценки точности полученных результатов. Важным источником интереса к линейным неравенствам служила экономическая проблематика. Целесообразное и оптимальное поведение в условиях ограниченных ресурсов естественно связывать с языком отношений частичного сравнения. Наконец, концепция линейных неравенств неразрывна с ключевой идеей выпуклого множества. Функциональный анализ по самому своему понятию предполагает наличие нетривиальных непрерывных линейных функционалов в рассматриваемом пространстве. Наличие же такого функционала эквивалентно существованию непустого собственного открытого выпуклого множества в объемлющем пространстве. В случае общего положения выпуклые множества суть в точности решения подходящей системы линейных неравенств.

Линейное программирование — техника максимизации линейного функционала на множестве положительных решений системы линейных неравенств. Неудивительно, что открытие линейного программирования последовало вскоре за созданием основ теории пространств Канторовича.

В конце 1940-х годов Канторович в серии работ формулирует и развивает тезис о взаимосвязи функционального анализа и прикладной математики[3]:

> Установилась традиция считать функциональный анализ дисциплиной чисто теоретической, далекой от непосредственных приложений, которая в практических вопросах не может быть использована. Цель этой статьи — в известной мере разрушить эту традицию, указать на связь функционального анализа с вопросами прикладной математики...

Канторович выделял три технологии: метод мажорант, восходящий к Коши, метод конечномерных приближений и метод Лагранжа для новых задач оптимизации, возникающих в экономике.

Технологию мажорирования в общих упорядоченных векторных пространствах Канторович взял за основу исследования вариантов метода Ньютона в

[2]См. [3].

[3]См. [2, 6].

банаховых пространствах.

Приближение бесконечномерных пространств и операторов их конечномерными аналогами следует воспринимать наряду с удивительным универсальным пониманием вычислительной математики как науки о конечных приближениях общих компактов (не обязательно метрических)[4].

Новизна экстремальных задач, возникающих в социальных науках, связана с наличием многомерных противоречивых целей, ставящих на первое место проблему согласования интересов. Соответствующие технологии можно рассматривать как своего рода *скаляризацию* векторных целей.

Мажорирование

Пусть X и Y — вещественные векторные пространства, нормированные соответственно пространствами Канторовича E и F. Таким образом заданы векторные нормы $\pmb{|}\cdot\pmb{|}_X$ и $\pmb{|}\cdot\pmb{|}_Y$. Пусть, далее, T — линейный оператор из X в Y, а S — положительный оператор из E в F такие, что

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pmb{|}\cdot\pmb{|}_X"'] & Y \arrow[d, "\pmb{|}\cdot\pmb{|}_Y"] \\ E \arrow[r, "S"'] & F \end{tikzcd}$$

Если при этом

$$\pmb{|}Tx\pmb{|}_Y \le S\pmb{|}x\pmb{|}_X \quad (x \in X),$$

то S называют *мажорантой* T. Если в множестве всех мажорант T имеется наименьший элемент, то его называют *точной* или *наименьшей мажорантой* T и обозначают символом $\pmb{|}T\pmb{|}$. Таким образом, точная мажоранта $\pmb{|}T\pmb{|}$ — положительный оператор из E в F, для которого

$$\pmb{|}Tx\pmb{|} \le \pmb{|}T\pmb{|}\big(\pmb{|}x\pmb{|}\big) \quad (x \in X).$$

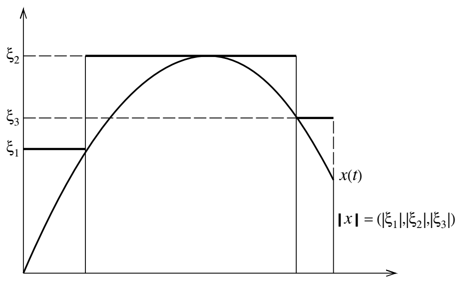
Канторович писал по этому поводу[5]:

> Абстрактная норма позволяет гораздо тоньше оценить элемент и операцию, чем одно число — числовая норма, и благодаря этому получить более точные (и широкие) границы применимости метода последовательных приближений. Так, в качестве нормы непрерывной функции можно взять не границу её во всем интервале, а совокупность её границ в нескольких частичных интервалах... Это позволяет уточнить оценку границы сходимости метода последовательных приближений для интегральных уравнений. В случае бесконечной системы уравнений неизвестным является последовательность, и в качестве её нормы можно принять не одно число, а конечную систему, например, модули первых элементов и оценку остатка:
>
> $$\pmb{|}(\xi_1, \xi_2, \dots)\pmb{|} = (|\xi_1|, |\xi_2|, \dots, |\xi_{N-1}|, \sup_{k \ge N} |\xi_k|) \in \mathbb{R}^N.$$

---

[4]Это положение включено в совместный доклад [5], подготовленный С. Л. Соболевым, Л. А. Люстерником и Л. В Канторовичем для III Всесоюзного математического съезда в 1956 г.

[5]См. [1].



> Это позволяет уточнить условия применимости метода итераций для бесконечных систем. Одновременно этот подход позволяет получить и приближенные решения указанных задач, при этом приближенные решения с избытком или с недостатком, с одновременной оценкой погрешности. Я полагаю, что и в ряде других случаев применение вместо вещественных чисел элементов линейных полуупорядоченных пространств в оценках может привести к существенному уточнению последних.

Можно напомнить, что свои классические исследования по методу Ньютона Канторович осуществил используя самую общую схему мажорирования.

В наши дни развитие методов мажорирования осуществляется в рамках булевозначного анализа[6]. Современная техника математического моделирования позволила показать, что основные свойства решеточно нормированных пространств представляют собой булевозначные интерпретации свойств классических нормированных пространств. Важнейшие взаимосвязи здесь таковы. Произвольное банахово пространство внутри булевозначной модели при внешней расшифровке представляет собой расширенное пространство Банаха — Канторовича. При этом каждое решеточно нормированное пространство может быть реализовано как плотное подпространство некоторого банахова пространства в подходящей булевозначной модели. Наконец, банахово пространство X получается из некоторого банахова пространства в булевозначной модели посредством специальной процедуры ограниченного спуска в том и только в том случае, если X содержит полную булеву алгебру проекторов единичной нормы, обладающей свойством цикличности. Последнее равносильно тому, что X — пространство Банаха — Канторовича и норма в X является смешанной[7].

Дискретизация

Подводя итоги своим исследованиям по общей теории приближенных методов, Канторович писал[8]:

> Имеется весьма большое число различных методов для разных классов задач и уравнений, и их конструирование и исследование в каждом конкретном случае представляло немалые трудности. Поэтому возникла мысль о построении обшей теории, которая позволяла бы их строить и исследовать из некоего единого источника. Эта теория основывалась на идее связи данного пространства, в котором задано исследуемое уравнение, с некоторым более простым, в которое исходное пространство отображается. На основе исследования «приближенного уравнения» в более простом пространстве открывалась возможность строить и изучать конкретные приближенные методы в исходном пространстве...

[6] См. [8].
[7] Современная теория мажорированных операторов обстоятельно представлена в монографии А. Г. Кусраева [7].
[8] См. [7].

> Мне кажется, что основная идея этой теории носит общий характер и отражает общий гносеологический принцип исследования сложных систем. Он, разумеется, применялся и раньше, применяется и в системном анализе, но не имеет строгого математического аппарата. Попросту этот принцип состоит в том, что данная большая сложная система, расположенная в некотором пространстве, сопоставляется с более простой, малоразмерной моделью, расположенной в этом же или более простом пространстве посредством однозначного или одно-многозначного соответствия. Изучение этой упрощенной модели оказывается, естественно, более доступным и осуществимым. Этот метод предъявляет, конечно, определенные требования к качеству аппроксимирующей системы.

Классическая схема дискретизации, предложенная Канторовичем для анализа уравнения

$$Tx = y,$$

где $T : X \to Y$ — ограниченный линейный оператор, действующий между банаховыми пространствами X и Y, состоит в подборе конечномерных аппроксимирующих подпространств X_N, Y_N и соответствующих вложений $\imath_N, \jmath_N$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] & Y \\
X_N \arrow[u, "\imath_N"] \arrow[r, "T_N"'] & Y_N \arrow[u, "\jmath_N"']
\end{tikzcd}$$

При этом уравнение

$$T_N x_N = y_N$$

рассматривается как конечномерное приближение исходной задачи.

Булевозначный анализ позволяет расширить пределы применимости пространств Банаха — Канторовича и более общих модулей для исследования экстенсиональных уравнений.

Многообещающие возможности открывает новый метод гипераппроксимации, связанный с идеями инфинитезимального анализа. Классическая дискретизация использует аппроксимацию бесконечномерного пространства с помощью лежащих внутри его конечномерных подпространств. В рамках нестандартной теории множеств допустимо аппроксимировать бесконечномерные векторные пространства более широкими внешними конечномерными пространствами. Разумеется, размерности таких гипераппроксимаций представляют собой актуальные бесконечно большие натуральные числа.

Примерная схема гипераппроксимации отражена следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi_E"'] & F \arrow[d, "\varphi_F"] \\
E^{\#} \arrow[r, "T^{\#}"'] & F^{\#}
\end{tikzcd}$$

Здесь E и F — нормированные векторные пространства над одним и тем же полем скаляров, T — ограниченный линейный оператор из E в F, а $^{\#}$ — символ перехода к нестандартной оболочке. Напомним соответствующие конструкции.

Пусть E — внутреннее векторное пространство над ${}^*\mathbb{F}$, где $\mathbb{F}$ — *основное поле* скаляров, т. е. одно из числовых полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а * — символ робинсоновской стандартизации. Таким образом, заданы две внутренние операции $+ : E \times E \to E$ и $\cdot : {}^*\mathbb{F} \times E \to E$, удовлетворяющие обычным аксиомам векторного пространства. Поскольку $\mathbb{F} \subset {}^*\mathbb{F}$, то внутреннее векторное пространство E будет также и векторным пространством над $\mathbb{F}$, т. е. внешним векторным пространством, которое, однако, не будет ни нормированным, ни гильбертовым, даже если E является таковым как внутреннее пространство. Тем не менее с каждым внутренним нормированным или предгильбертовым пространством связано некоторое внешнее банахово, соответственно гильбертово, пространство.

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — внутреннее нормированное пространство над ${}^*\mathbb{F}$. Как обычно, элемент $x \in E$ называют *доступным*, если $\|x\|$ — доступное число, допускающее по определению некоторую стандартную мажоранту. Если $\|x\|$ — бесконечно малое число, то вектор x также считают *бесконечно малым*. Обозначим через $\mathrm{ltd}(E)$ и $\mu(E)$ внешние множества доступных и бесконечно малых элементов пространства E. Множество $\mu(E)$ представляет собой *монаду* нуля в E. Нет сомнений, что $\mathrm{ltd}(E)$ — (внешнее) векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а $\mu(E)$ — его подпространство. Обозначим фактор-пространство $\mathrm{ltd}(E)/\mu(E)$ символом $E^{\#}$. На $E^{\#}$ возникает естественная норма по формуле

$$\|\varphi x\| := \|x^{\#}\| := \mathrm{st}(\|x\|) \in \mathbb{F} \quad (x \in \mathrm{ltd}(E)).$$

Здесь $\varphi := \varphi_E := (\cdot)^{\#} : \mathrm{ltd}(E) \to E^{\#}$ — фактор-гомоморфизм, а st — символ перехода к стандартной части доступного числа. При этом $(E^{\#}, \|\cdot\|)$ становится внешним нормированным пространством, именуемым *нестандартной оболочкой* E. Если пространство $(E, \|\cdot\|)$ стандартно, то нестандартной оболочкой E называют пространство $({}^*E)^{\#}$, построенное по робинсоновскому изображению ${}^*E$.

Для каждого $x \in E$ элемент $\phi({}^*x) = ({}^*x)^{\#}$ содержится в $({}^*E)^{\#}$, причем $\|x\| = \|({}^*x)^{\#}\|$. Таким образом, отображение $x \mapsto ({}^*x)^{\#}$ осуществляет изометрическое вложение E в $({}^*E)^{\#}$. Обычно считают, что $E \subset ({}^*E)^{\#}$.

Предположим теперь, что E и F — внутренние нормированные пространства и $T : E \to F$ — внутренний ограниченный линейный оператор. Числовое множество

$$c(T) := \{C \in {}^*\mathbb{R} : (\forall x \in E)\|Tx\| \leq C\|x\|\}$$

является внутренним и ограниченным. Как известно, $\|T\| := \inf c(T)$.

Если $\|T\|$ — доступное число, то из классического нормативного неравенства $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$, справедливого для всех $x \in E$, видно, что $T(\mathrm{ltd}(E)) \subset \mathrm{ltd}(F)$ и $T(\mu(E)) \subset \mu(F)$. Следовательно, корректно определено снижение T на фактор-пространство — внешний оператор $T^{\#} : E^{\#} \to F^{\#}$, действующий по правилу

$$T^{\#}\varphi_E x := \varphi_F T x \quad (x \in E).$$

Оператор $T^{\#}$ линеен (относительно скаляров из $\mathbb{F}$) и ограничен, причем $\|T^{\#}\| = \mathrm{st}(\|T\|)$. Оператор $T^{\#}$ называют *нестандартной оболочкой* T. Важно подчеркнуть, что пространство $E^{\#}$ автоматически оказывается банаховым для каждого внутреннего (не обязательно полного) нормированного пространства E. Если внутренняя размерность внутреннего нормированного пространства E конечна, то пространство E называют *гиперконечномерным*. Для каждого нормированного векторного пространства E существует гиперконечномерное подпространство $F \subset {}^*E$, содержащее все стандартные элементы внутреннего пространства ${}^*E$.

Инфинитезимальные методы позволяют предложить и новые схемы гипераппроксимации общих компактных пространств. В качестве таких приближений к компактному множеству сверху могут выступать произвольные конечные внутренние множества, содержащие все стандартные элементы подлежащего аппроксимации компакта[9].

Скаляризация

Скаляризация в самом общем смысле — это приведение к числу. Поскольку число представляет собой меру количества, видно что идея скаляризации имеет общематематическое значение. Глубокие корни скаляризации вскрыты булевозначным обоснованием эвристического принципа Канторовича. Остановимся на имеющих особое прикладное значение аспектах скаляризации, связанных с задачами многоцелевой оптимизации[10].

Еще в 1948 г. Канторович отмечал[11]:

> Многие математические и практические задачи приводят к необходимости разыскания «особых» экстремумов. Это, с одной стороны, краевые экстремумы, когда экстремум достигается на границе области изменения аргумента. С другой стороны, — это случай, когда функционал не дифференцируем. Большое число такого рода вопросов встречается в самой математике и в её приложениях, и общие методы оказываются здесь неэффективными.

Особенность экстремальных задач экономики состоит в наличии большого числа противоречивых целей и интересов, подлежащих согласованию. Фактически здесь речь идет о многоцелевой оптимизации, характерной присутствием векторнозначной функции цели. При поиске оптимального решения в этих обстоятельствах приходится учитывать различные, противоречащие друг другу предпочтения, составляющие единую комплексную цель. При этом, как правило, невозможно выделить какую-либо отдельную скалярную цель, не игнорируя остальные и не меняя тем самым первоначальной постановки задачи. Указанное обстоятельство приводит к возникновению специфических трудностей, не типичных для скалярного случая: следует уточнить, что нужно понимать под решением векторной программы, надо решить, как следует согласовать разные цели, и возможно ли в принципе согласование противоречивых интересов. В этой связи актуален поиск разумных понятий оптимальности для многоцелевых задач, среди которых можно выделить идеальный и обобщенный оптимумы, оптимум в смысле Парето, а также приближенный и инфинитезимальный оптимумы.

Пусть X — векторное пространство, E — упорядоченное векторное пространство, $f : X \to E^{\bullet} := E \cup +\infty$ — выпуклый оператор и $C \subset X$ — выпуклое множество. *Векторной программой* называют пару (C, f), записываемую символически в виде

$$x \in C, \quad f(x) \to \inf.$$

Векторную программу принято называть также *многоцелевой* или *многокритериальной* задачей. Оператор f называют *целью* программы, а множество C — её *ограничением.* Точки $x \in C$ именуют *допустимыми элементами*, реже *планами.*

Указанная выше запись векторной программы отражает то обстоятельство, что рассмотрению подлежит следующая *экстремальная задача*: найти точную нижнюю границу значений, принимаемых оператором f на множестве C. В случае, когда $C = X$, говорят о безусловной задаче или задаче без ограничений.

[9] См. [14].
[10] Подробности см. в [13].
[11] См. [1].

Ограничения в экстремальной задаче могут быть заданы по-разному и включать, например, уравнения и неравенства. Пусть $g : X \to F^\bullet$ — выпуклый оператор, Λ — линейный оператор из X в Y и $y \in Y$, где Y — векторное пространство, а F — предупорядоченное векторное пространство. Если ограничения C_1 и C_2 имеют вид

$$C_1 := \{x \in C : g(x) \leq 0\},$$
$$C_2 := \{x \in X : g(x) \leq 0,\ \Lambda x = y\},$$

то вместо (C_1, f) и (C_2, f) пишут соответственно (C, g, f) и (Λ, g, f) или же более выразительно

$$x \in C, \quad g(x) \leq 0, \quad f(x) \to \inf;$$
$$\Lambda x = y, \quad g(x) \leq 0, \quad f(x) \to \inf.$$

Элемент $e := \inf_{x \in C} f(x)$ (если он существует) называют *значением программы* (C, f). Ясно, что $e = -f^*(0)$. Допустимый элемент x_0 называется *идеальным оптимумом* или *решением*, если $e = f(x_0)$. Таким образом, x_0 — идеальный оптимум в том и только в том случае, если $f(x_0)$ — наименьший элемент образа $f(C)$, т. е. $x_0 \in C$ и $f(C) \subset f(x_0) + E^+$.

Непосредственно из определений видно, что x_0 есть решение безусловной задачи $f(x) \to \inf$ тогда и только тогда, когда нулевой оператор входит в субдифференциал $\partial f(x_0)$:

$$f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x) \ \leftrightarrow\ 0 \in \partial f(x_0).$$

В теории экстремума различают *локальный* и *глобальный* оптимумы. Это различие несущественно для рассматриваемых ниже задач минимизации выпуклых операторов на выпуклых множествах.

Пусть $x_0 \in C$ — идеальный локальный оптимум в программе (C, f) в следующем очень слабом смысле: существует поглощающее множество $U \subset X$ такое, что

$$f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in C \cap (x_0 + U)\}.$$

Тогда $f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in C\}$. Можно убедиться на простейших примерах, что идеальный оптимум в векторных программах существует крайне редко. Это обстоятельство побуждает вводить различные понятия оптимальности, подходящие для тех или иных классов задач. Среди них — *приближенная оптимальность*, полезная уже в скалярной ситуации, т. е. в задачах с числовой целевой функцией.

Зафиксируем положительный элемент $\varepsilon \in E$. Допустимая точка x_0 называется *ε-решением* или *ε-оптимумом* программы (C, f), если $f(x_0) \leq e + \varepsilon$, где e — значение программы. Таким образом, x_0 есть ε-решение программы (C, f), если и только если $x_0 \in C$ и $f(x_0) - \varepsilon$ — нижняя граница образа $f(C)$ или, что то же самое, $f(C) + \varepsilon \subset f(x_0) + E^+$. Очевидно, что точка x_0 будет ε-решением безусловной задачи $f(x) \to \inf$ в том и лишь в том случае, когда нуль входит в $\partial_\varepsilon f(x_0)$, т. е.

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon \ \leftrightarrow\ 0 \in \partial_\varepsilon f(x_0).$$

Здесь фигурирует ε-субдифференциал $\partial_\varepsilon f(x_0)$. Напомним, что элемент l последнего — это линейный оператор из X в E такой, что $(\forall x \in X) l(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) + \varepsilon$.

Обобщенным ε-решением программы (C, f) называют множество $\mathfrak{A} \subset C$ при условии, что $\inf_{x \in \mathfrak{A}} f(x) \leq e + \varepsilon$, где e — значение программы. Если $\varepsilon = 0$, то говорят просто об *обобщенном решении*. Обобщенное ε-решение всегда существует (например, $\mathfrak{A} = C$), но интересно выбрать по возможности меньшее из таких решений. Минимальное по включению возможное обобщенное ε-решение — идеальный ε-оптимум при $\mathfrak{A} = \{x_0\}$. Любопытно, что любое обобщенное ε-решение является ε-решением некоторой векторной выпуклой программы.

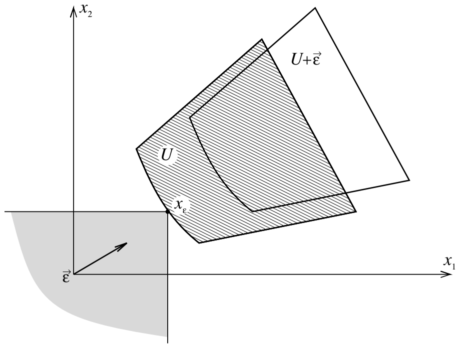
Рассмотренные выше понятия оптимальности связаны с точной нижней границей целевой функции на множестве допустимых элементов, т. е. со *значением* программы. Понятие *минимального элемента* ведет к принципиально иной концепции оптимальности.

Здесь удобно допустить, что E — предупорядоченное векторное пространство, т. е. конус положительных элементов не обязательно острый. Тем самым подпространство $E_0 := E^+ \cap (-E^+)$, вообще говоря, не сводится к одному нулевому элементу. Для $u \in E$ положим

$$[u] := \{v \in E : \ u \leq v, \quad v \leq u\}.$$

Запись $u \sim v$ означает, что $[u] = [v]$.

Допустимая точка x_0 называется *ε-оптимальной по Парето* или *ε-Парето-оптимальной* в программе (C, f), если $f(x_0)$ — минимальный элемент множества $U+\varepsilon$, где $U := f(C)$, т. е. если $(f(x_0)-E^+)\cap(f(C)+\varepsilon) = [f(x_0)]$. Более подробно, ε-Парето-оптимальность точки x_0 означает, что $x_0 \in C$ и для любой точки $x \in C$ неравенство $f(x_0) \geq f(x) + \varepsilon$ влечет $f(x_0) \sim f(x) + \varepsilon$. Если $\varepsilon = 0$, то говорят об оптимальности по Парето, опуская указание на ε.



При изучении Парето-оптимальности часто используют *метод скаляризации*, т. е. сведение рассматриваемой программы к одноцелевой скалярной экстремальной задаче. Скаляризацию можно проводить по-разному. Рассмотрим один из возможных вариантов.

Предположим, что предпорядок $\leq$ в E задается формулой:

$$u \leq v \ \leftrightarrow \ (\forall l \in \partial q) \ lu \leq lv,$$

где $q : E \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал. Другими словами, конус E^+ имеет вид $E^+ := \{u \in E : \ (\forall l \in \partial q) \ lu \geq 0\}$. Тогда допустимая точка x_0 будет ε-Парето-оптимальной в программе (C, f) в том и только в том случае, если для каждого $x \in C$ либо $f(x_0) \sim f(x) + \varepsilon$, либо существует функционал $l \in \partial q$, для которого $lf(x_0) < l(f(x) + \varepsilon)$. В частности, для ε-Парето-оптимальной точки $x_0 \in C$ выполняется

$$\inf_{x \in C} q(f(x) - f(x_0) + \varepsilon) \geq 0.$$

Обратное утверждение неверно, так как последнее неравенство равносильно более слабому понятию оптимальности. Говорят, что точка $x_0 \in C$ *слабо ε-Парето-оптимальна,* если для каждого $x \in C$ найдется такой функционал $l \in \partial q$, что

$l(f(x) - f(x_0) + \varepsilon) \geq 0$, т. е. если ни для какого $x \in C$ несовместна система строгих неравенств $lf(x_0) < l(f(x) + \varepsilon) \quad (l \in \partial q)$. Как видно, слабая ε-Парето-оптимальность равносильна тому, что $q(f(x) - f(x_0) + \varepsilon) \geq 0$ для всех $x \in C$, и это понятие нетривиально лишь в случае $0 \notin \partial q$.

Роль ε-субдифференциалов раскрывается, в частности, тем, что ε-решение при достаточно малом ε можно рассматривать как претендента на «практический оптимум» — на приемлемое на практике решение исходной задачи. Правила вычисления ε-субдифференциалов доставляют формальный аппарат учета границ точности решения экстремальной задачи. Соответствующая техника в настоящее время весьма совершенна и, можно сказать, изящна и изощренна. В то же время возникающие точные формулы трудно обозримы и не вполне соответствуют практическим приемам оптимизации, при которых применяют эвристические правила «отбрасывания малых».

Лишенный этих недостатков адекватный аппарат инфинитезимальных субдифференциалов[12] связан с современными возможностями нестандартной теории множеств.

Пусть X — векторное пространство, E — упорядоченное векторное пространство, причем в E выделено фильтрованное по убыванию множество $\mathcal{E}$ положительных элементов. Считаем, что X, E и $\mathcal{E}$ стандартны. Возьмем стандартный выпуклый оператор $f : X \to E^{\bullet}$ и стандартное выпуклое множество $C \subset X$. Напомним, что запись $e_1 \approx e_2$ означает справедливость неравенства $-\varepsilon \leq e_1 - e_2 \leq \varepsilon$ для каждого стандартного $\varepsilon \in \mathcal{E}$.

Предположим, что значение $e := \inf_{x \in C} f(x)$ программы (C, f) доступно. Допустимую точку x_0 называют *инфинитезимальным решением*, если верно $f(x_0) \approx e$, т. е. если для каждого $x \in C$ и любого стандартного $\varepsilon \in \mathcal{E}$ выполняется $f(x_0) \leq f(x) + \varepsilon$. Точка $x_0 \in X$ является инфинитезимальным решением безусловной задачи $f(x) \to \inf$ в том и только в том случае, если $0 \in Df(x_0)$, где $Df(x_0)$ — внешнее объединение соответствующих ε-субдифференциалов по всем бесконечно малым ε.

Идеи скаляризации и выпуклого ε-программирования, сформулированные еще в конце 1970-х годов[13], оказались весьма востребованными[14].

Перспективы

Адаптация современных идей теории моделей для функционального анализа представляется важнейшим направлением развития синтетических методов чистой и прикладной математики. Здесь возникают новые модели чисел, пространств, видов уравнений. Расширяется содержание всех имеющихся теорем и алгоритмов, обогащается и обновляется вся методология математического моделирования, открывая совершенно фантастические возможности. Теперь мы можем использовать актуальные бесконечно большие и малые величины, превращать матрицы в числа, пространства в прямые, не компакты в компакты и сколько еще остается для нас неизведанного.

Классический функциональный анализ далеко не сразу занял свое теперешнее место языка непрерывной математики. Сейчас настали времена новых мощных технологий математического анализа. Далеко не все теоретики и прикладники уже поняли их значение и ими овладели. Однако пути назад в науке нет — новые

[12] См. [12].
[13] См. [10, 11].
[14] По этому поводу см. [15–24].

методы навсегда вошли в основное тело математики и со временем станут столь же элементарными и общеупотребительными в исчислениях и вычислениях как банаховы пространства и линейные операторы.

Литература

1. Канторович Л. В., *Функциональный анализ и прикладная математика*, Вестник ЛГУ **6** (1948), 3–18.
2. Канторович Л. В., *Функциональный анализ и прикладная математика*, Успехи мат. наук **3** (1948), № 6, 3–50.
3. Канторович Л. В., *О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций*, Докл. АН СССР **4** (1935), № 1–2, 11–14.
4. Канторович Л. В., *Принцип мажорант и метод Ньютона*, Докл. АН СССР **76** (1951), № 1, 17–20.
5. Соболев С. Л., Люстерник Л. А., Канторович Л. В., *Функциональный анализ и вычислительная математика*, Труды III Всесоюзного математического съезда, Москва, июнь –июль 1956 г. Т. 2: Крат. содерж. обзор. и секц. докл., М., 1956, С. 43.
6. Канторович Л. В., *Функциональный анализ (основные идеи)*, Сиб. мат. журн. **28** (1987), № 1, 7–16.
7. Канторович Л. В., *Мой путь в науке*, Успехи мат. наук **42** (1987), № 2, 183–213.
8. Кусраев А. Г., *Мажорируемые операторы*, Наука, М., 2003.
9. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., *Введение в булевозначный анализ.*, Наука, М., 2005.
10. Кутателадзе С. С., *Выпуклые операторы*, Успехи мат. наук **34** (1979), № 1, 167–196.
11. Кутателадзе С. С., *Выпуклое ε-программирование*, Докл. АН СССР **245** (1979), № 5, 1048–1050.
12. Кутателадзе С. С., *Вариант нестандартного выпуклого программирования*, Сиб. мат. журн. **27** (1986), № 4, 84–92.
13. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., *Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения*, Наука, М., 2007.
14. Гордон Е. И., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., *Инфинитезимальный анализ. Избранные темы*, Наука, М., 2008, С. 400 с..
15. Zalinescu C., *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific Publishers, London etc., 2002.
16. Singer I., *Abstract Convex Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1997.
17. Chen G. Y., Huang X., Yang X., *Vector Optimization. Set-Valued and Variational Analysis. (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 541)*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
18. Loridan P., *ε-Solutions in vector minimization problems*, J. Optim. Theory Appl. **43** (1984), № 2, 265–276.
19. Valyi I., *Approximate saddle-point theorems in vector optimization*, J. Optim. Theory Appl. **55** (1987), № 3, 435–448.
20. Liu J. C., *ε-Duality theorem of nondifferentiable nonconvex multiobjective programming*, J. Optim. Theory Appl. **69** (1991), № 1, 153–167.
21. Liu J. C., Yokoyama K., *ε-Optimality and duality for multiobjective fractional programming*, Comput. Math. Appl. **37** (1999), № 8, 119–128..
22. Liu J. C., *ε-Properly efficient solutions to nondifferentiable multiobjective programming problems*, Appl. Math. Lett. **12** (1999), № 6, 109–113.
23. Gutiérrez C., Jiménez B., Novo V., *On approximate solutions in vector optimization problems via scalarization*, Computational Optimization and Applications **35** (2006), № 3, 305–324.
24. Gutiérrez C., Jiménez B., Novo V., *Optimality conditions for metrically consistent approximate solutions in vector optimization*, J. Optim. Theory Appl. **133** (2007), № 1, 49–64.