Новая форма леммы Фаркаша

С. С. Кутателадзе

Институт математики
им. С. Л. Соболева, Новосибирск

22 января 2010 г.

План

- Лемма Фаркаша, известная также как лемма Фаркаша — Минковского, играет ключевую роль в линейном программировании и родственных разделах оптимизации.
- С помощью булевозначного анализа и субдифференциального исчисления будут установлены некоторые довольно общие свойства систем операторных неравенств.

Пример

- Пусть $A_1, \dots, A_N$ и B — ограниченные линейные операторы из $L_p(\mu)$ в $L_q(\mu)$, где μ — некоторая мера на T.
- *Имеет место одна из следующих взаимоисключающих возможностей:*
  (1) *Существуют* $x \in L_p$ *и измеримые подмножества* $U, V \subset T$, *причем* $\mu(U) \neq 0$, $U \subset V$ *такие, что*

  $$Bx(t) > 0 \ (t \in U), A_1x(t) \leq 0, \dots, A_Nx(t) \leq 0 \ (t \in V).$$

  (2) *Найдутся положительные измеримые функции* $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ *на* T, *для которых*

  $$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k.$$

Постановка

- Пусть X — вещественное векторное пространство, Y — некоторое пространство Канторовича с базой $\mathbb{B}$. Через $L(X, Y)$ обозначим пространство линейных операторов из X в Y. Если X снабжено некоторой Y-полунормой, под $L^{(m)}(X, Y)$ мы будем понимать пространство мажорированных линейных операторов из X в Y.
Для $T : X \to Y$ и $y \in Y$, как обычно, полагаем
$\{T \le y\} := \{T(\cdot) \le y\} := \{x \in X \mid Tx \le y\}$ и
$\ker(T) := \{T = 0\} := T^{-1}(0)$.
- $\mathrm{Orth}(Y)$ — коммутант $\mathbb{B}$ в $L^{(r)}(Y)$.

Неравенства: явное доминирование

- Ищем $\mathfrak{X}$ такой, что

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "B"'] & W \arrow[d, dotted, "\mathfrak{X}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

- $(\exists \mathfrak{X})\ \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \ker(A) \subset \ker(B)$.
- *Если W упорядочено W_+ и $A(X) - W_+ = W_+ - A(X) = W$, то*[1]

$$(\exists \mathfrak{X} \geq 0)\ \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \{A \leq 0\} \subset \{B \leq 0\}.$$

[1] Теорема Канторовича.

Лемма 1. *Пусть X —векторное пространства над подполем R поля вещественных чисел $\mathbb{R}$. Допустим, что f и g — это R-линейные функционалы на X; т. е. $f, g \in X^{\#} := L(X, \mathbb{R})$.*
Включение

$$\{g \leq 0\} \supset \{f \leq 0\}$$

имеет место в том и только том случае, если существует $\alpha \in \mathbb{R}_+$, такое что $g = \alpha f$.

Доказательство.

- **Достаточность** очевидна.
- **Необходимость:** Случай $f = 0$ тривиален. Если $f \neq 0$, то для некоторого $x \in X$ будет $f(x) \in \mathbb{R}$ и $f(x) > 0$. Обозначим через R_0 образ $f(X)$. Пусть теперь $h := g \circ f^{-1}$, т. е. $h \in R_0^{\#}$ — единственное решение уравнения $h \circ f = g$. По условию h — положительный R-линейный функционал на R_0. По теореме Бигарда [4, с. 108] h допускает продолжение до положительного гомоморфизма $\bar{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, поскольку группа R_0 мажорирует $\mathbb{R}$. Положительный автоморфизм $\mathbb{R}$ есть умножение на положительное число. В качестве искомого α можно взять $\bar{h}(1)$.
- Лемма доказана.

- **Лемма 2.** *Пусть X — некоторое $\mathbb{R}$-полунормированное пространство над подполем R поля $\mathbb{R}$. Пусть, далее, $f_1, \dots, f_N$ и g — это ограниченные R-линейные функционалы над X, символически $f_1, \dots, f_N, g \in X^* := L^{(m)}(X, \mathbb{R})$.*
- *Включение*

$$\{g \le 0\} \supset \bigcap_{k=1}^{N} \{f_k \le 0\}$$

имеет место в том и только в том случае, если найдутся

$\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}_+$ такие, что $g = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k$.

Булевозначный универсум

- Пусть $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра. Взяв ординал α, положим

$$V_\alpha^{(\mathbb{B})} := \{x \mid (\exists \beta \in \alpha)\ x : \mathrm{dom}(x) \to \mathbb{B}\ \&\ \mathrm{dom}(x) \subset V_\beta^{(\mathbb{B})}\}.$$

- *Булевозначный универсум*

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha^{(\mathbb{B})},$$

  гдеh On — класс всех ординалов.
- Каждой формуле φ теории ZFC, суженной на $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. отвечает оценка истинности $[\![\varphi]\!] \in \mathbb{B}$

Спуски и подъемы

- Для φ — формулы ZFC и $y \in \mathbb{V}^{\mathbb{B}}$, положим $A_\varphi := A_{\varphi(\cdot,\ y)} := \{x \mid \varphi(x,\ y)\}$.
- *Спуск* $A_\varphi{\downarrow}$ класса A_φ — это

$$A_\varphi{\downarrow} := \{t \mid t \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \ \&\ [\![\varphi(t,\ y)]\!] = \mathbb{1}\}.$$

- Если $t \in A_\varphi{\downarrow}$, то говорят, что t *удовлетворяет* $\varphi(\cdot,\ y)$ *внутри* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.
- *Спуск* $x{\downarrow} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — определяется так:

$$x{\downarrow} := \{t \mid t \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \ \&\ [\![t \in x]\!] = \mathbb{1}\},$$

  т. е. $x{\downarrow} = A_{\cdot \in x}{\downarrow}$. Класс $x{\downarrow}$ — множество.
- Если x непустое множество внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, то

$$(\exists z \in x{\downarrow})[\![(\exists t \in x)\ \varphi(t)]\!] = [\![\varphi(z)]\!].$$

- Функтор *подъема* действует в противоположном направлении.

Булевозначные числа

- Внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ существует объект $\mathscr{R}$, моделирующий $\mathbb{R}$, т. е.

$$[\![\mathscr{R} \ \text{— поле вещественных чисел}]\!] = \mathbb{1}.$$

- Пусть $\mathscr{R}{\downarrow}$ спуск носителя $|\mathscr{R}|$ алгебраической системы $\mathscr{R} := (|\mathscr{R}|, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.
- Осуществим спуск структур из $|\mathscr{R}|$ на $\mathscr{R}{\downarrow}$ по правилам:

$$x + y = z \leftrightarrow [\![x + y = z]\!] = \mathbb{1};$$
$$xy = z \leftrightarrow [\![xy = z]\!] = \mathbb{1};$$
$$x \leq y \leftrightarrow [\![x \leq y]\!] = \mathbb{1};$$
$$\lambda x = y \leftrightarrow [\![\lambda^{\wedge} x = y]\!] = \mathbb{1} \ (x, y, z \in \mathscr{R}{\downarrow}, \ \lambda \in \mathbb{R}).$$

- **Теорема Гордона.** *$\mathscr{R}{\downarrow}$ со спущенными структурами — расширенное пространство Канторовича с базой $\mathbb{B}(\mathscr{R}{\downarrow})$, изоморфной $\mathbb{B}$.*

Доказательство теоремы 1.

(1)$\to$ (2):

- Рассмотрим отделимый булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ над базой $\mathbb{B}$ пространства Y. По теореме Гордона $Y\!\uparrow$ есть поле $\mathscr{R}$ вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.
- Используя каноническое вложение, мы видим, что $X^{\wedge}$ — это $\mathscr{R}$-полунормированное векторное пространство над стандартным именем $\mathbb{R}^{\wedge}$ поля $\mathbb{R}$. При этом $\mathbb{R}^{\wedge}$ — подполе и подрешетка $\mathscr{R} = Y\!\uparrow$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Доказательство теоремы 1.

(1)$\to$ (2):

- Положим $f_k := A_k{\uparrow}$ для $k := 1, \dots, N$ и $g := B{\uparrow}$. Ясно, что все $f_1, \dots, f_N, g$ лежат в $(X^\wedge)^*$ внутри $\mathbb{V}^{\mathbb{B}}$.
- Определим конечную последовательность

$$f : \{1, \dots, N\}^\wedge \to (X^\wedge)^*$$

как подъем $(f_1, \dots, f_N)$. Иными словами, оценки истинности таковы:

$$[\![f_{k^\wedge}(x^\wedge) = A_k x]\!] = \mathbb{1}, \quad [\![g(x^\wedge) = Bx]\!] = \mathbb{1}$$

для всех $x \in X$ и $k := 1, \dots, N$.

Доказательство теоремы 1.

(1)→ (2):

- Положим
$$b := [\![A_1x \le 0^\wedge]\!] \wedge \dots \wedge [\![A_Nx \le 0^\wedge]\!].$$
Тогда $bA_kx \le 0$ для всех $k := 1, \dots, N$ и $bBx \le 0$ by (1).
- Значит,
$$[\![A_1x \le 0^\wedge]\!] \wedge \dots \wedge [\![A_Nx \le 0^\wedge]\!] \le [\![Bx \le 0^\wedge]\!].$$
- Другими словами,
$$[\![(\forall k := 1^\wedge, \dots, N^\wedge) f_k(x^\wedge) \le 0^\wedge]\!]$$
$$= \bigwedge_{k:=1,\dots,N} [\![f_{k^\wedge}(x^\wedge) \le 0^\wedge]\!] \le [\![g(x^\wedge) \le 0^\wedge]\!].$$

Доказательство теоремы 1.

(1)→ (2):

- По лемме 2 внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и принципу максимума булевозначного анализа есть конечная последовательность $\alpha : \{1^\wedge, \dots, N^\wedge\} \to \mathscr{R}_+$ inside $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ такая, что

$$[\![(\forall x \in X^\wedge) g(x) = \sum_{k=1^\wedge}^{N^\wedge} \alpha(k) f_k(x)]\!] = \mathbb{1}.$$

- Полагаем $\alpha_k := \alpha(k^\wedge) \in \mathscr{R}_+{\downarrow}$ для $k := 1, \dots, N$.
- Умножение на элемент $\mathscr{R}{\downarrow}$ — ортоморфизм $m(Y)$. При этом

$$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k,$$

что завершает доказательство.

Контрпример: нет доминирования

- Лемма 1, описывающая следствия одного неравенства, не ограничивает класс рассматриваемых функционалов.
- Аналогичная версия леммы Фаркаша для двух неравенств в общем случае просто не верна.
- Включение $\{f = 0\} \subset \{g \le 0\}$, эквивалентное включению $\{f = 0\} \subset \{g = 0\}$, не влечет того, что f и g пропорциональны в случае произвольного подполя $\mathbb{R}$. Достаточно рассмотреть $\mathbb{R}$ на полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и взять разрывный $\mathbb{Q}$-линейный функционал на $\mathbb{Q}$ и тождественный автоморфизм $\mathbb{Q}$.

Восстановление: нет доминирования!

- **Теорема 2.**
  Пусть A и B из $L(X, Y)$. Эквивалентны утверждения:
  (1) $(\exists\alpha \in \mathrm{Orth}(m(Y)))\ B = \alpha A$;
  (2) *Существует проектор* $\varkappa \in \mathbb{B}$ *такой, что*

  $$\{\varkappa bB \le 0\} \supset \{\varkappa bA \le 0\}; \quad \{\neg\varkappa bB \le 0\} \supset \{\neg\varkappa bA \ge 0\}$$

  для всех $b \in \mathbb{B}$.
- **Доказательство.** Булевозначный анализ сводит дело к скалярному случаю. Дважды применяя лемму 1 и выписывая оценки истинности, завершаем доказательство.

Интервальные операторы

- Пусть X — векторная решетка. *Интервальный операторr* $\mathbf{T}$ из X в Y — это порядковый интервал $[\underline{T}, \overline{T}]$ в $L^{(r)}(X, Y)$, где $\underline{T} \leq \overline{T}$.
- Интервальное уравнение $\mathbf{B} = \mathfrak{X}\mathbf{A}$ по определению имеет *слабое интервальное решение* при условии $(\exists \mathfrak{X})(\exists A \in \mathbf{A})(\exists B \in \mathbf{B})\ B = \mathfrak{X}A$.
- Взяв интервальный оператор $\mathbf{T}$ and $x \in X$, положим

$$P_{\mathbf{T}}(x) = \overline{T}x_{+} - \underline{T}x_{-}.$$

- Оператор $\mathbf{T}$ *адаптирован* при условии, что $\overline{T} - \underline{T}$ — это сумма конечного числа дизъюнктных слагаемых.
- Положим $\sim(x) := -x$ для всех $x \in X$.

Интервальные уравнения

- **Теорема 3.** *Пусть X — векторная решетка, а Y пространство Канторовича. Допустим, что $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N$ — адаптированные интервальные операторы и $\mathbf{B}$ — произвольный интервальный оператор в пространстве порядково ограниченных операторов $L^{(r)}(X, Y)$.*
  Следующие утверждения эквивалентны:
- (1) *Интервальное уравнение*

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{A}_k$$

имеет слабое интервальное решение $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(Y)_+$.
(2) *Для всех $b \in \mathbb{B}$ выполнено*

$$\{b\mathfrak{B} \geq 0\} \supset \{b\mathfrak{A}_1^{\sim} \leq 0\} \cap \dots \cap \{b\mathfrak{A}_N^{\sim} \leq 0\},$$

где $\mathfrak{A}_k^{\sim} := P_{\mathbf{A}_k} \circ \sim$ для $k := 1, \dots, N$ и $\mathfrak{B} := P_{\mathbf{B}}$.

- **Теорема 4.** *Пусть X — это Y-полунормированное пространство, где Y — пространство Канторовича. Возьмем $A_1, \dots, A_N, B \in L^{(m)}(X, Y)$ и $u_1, \dots, u_N, v \in Y$. Допустим, что система $A_1 x \le u_1, \dots, A_N x \le u_N$ совместна. Следующие утверждения эквивалентны:*
- (1) $\{bB \le bv\} \supset \{bA_1 \le bu_1\} \cap \dots \cap \{bA_N \le bu_N\}$ *для всех* $b \in \mathbb{B}$.
  (2) *Существуют* $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \operatorname{Orth}(m(Y))_+$ *такие, что*

$$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k; \quad v \ge \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k.$$

- В приложениях встречаются неоднородные матричные неравенства над различными конечномерными пространствами.
- **Теорема 5.** *Пусть X — это Y-полунормированное вещественное векторное пространство, где Y — пространство Канторовича. Допустим, что $A \in L^{(m)}(X, Y^s)$, $B \in L^{(m)}(X, Y^t)$, $u \in Y^s$ и $v \in Y^t$, где s и t — натуральные числа.*
  Следующие утверждения эквивалентны:
- (1) *Для всех $b \in \mathbb{B}$ неоднородное операторное неравенство $bBx \leq bv$ является следствием совместного неоднородного неравенства $bAx \leq bu$, т. е. $\{bB \leq bv\} \supset \{bA \leq bu\}$.*
- (2) *Существует $s \times t$-матрица из положительных ортоморфизмов $m(Y)$ такая, что $B = \mathfrak{X}A$ и $\mathfrak{X}u \leq v$ для соответствующего линейного оператора $\mathfrak{X} \in L_+(Y^s, Y^t)$.*

Комплексные скаляры

- **Теорема 6.** *Пусть* X *— это* Y*-полунормированное комплексное векторное пространство, где* Y *— пространство Канторовича. Пусть еще заданы* $u_1, \dots, u_N, v \in Y$ *и доминированные операторы* $A_1, \dots, A_N, B \in L^{(m)}(X, Y_{\mathbb{C}})$ *из* X *в комплексификацию* $Y_{\mathbb{C}} := Y \otimes iY$ *of* Y*. Допустим, что система неоднородных неравенств* $|A_1 x| \le u_1, \dots, |A_N x| \le u_N$ *совместна. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*
  (1) $\{b|B(\cdot)| \le bv\} \supset \{b|A_1(\cdot)| \le bu_1\} \cap \dots \cap \{b|A_N(\cdot)| \le bu_N\}$ *для всех* $b \in \mathbb{B}$*.*
  (2) *Существуют комплексные ортоморфизмы* $c_1, \dots, c_N \in \mathrm{Orth}(m(Y)_{\mathbb{C}})$ *такие, что*

$$B = \sum_{k=1}^{N} c_k A_k; \quad v \ge \sum_{k=1}^{N} |c_k| u_k.$$

- **Теорема 7.** *Пусть X — это Y-полунормированное вещественное векторное пространство, где Y — пространство Канторовича. Допустим, что $A_1, \dots, A_N$ и B взяты из $L^{(m)}(X, Y)$. Имеет место одна из следующих взаимоисключающих возможностей:*

  (1) *Существуют $x \in X$ и $b, b' \in \mathbb{B}$ такие, что $b' \leq b$ и*

  $$b'Bx > 0, bA_1x \leq 0, \dots, bA_Nx \leq 0.$$

  (2) *Найдутся $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(m(Y))_+$, для которых*

  $$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k.$$