УЧЕБНИК

НГУ

С. С. Кутателадзе

ФОРМАЛИЗМЫ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

С. С. Кутателадзе

ФОРМАЛИЗМЫ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Новосибирск
1999

УДК 517.11+517.98
ББК 22.16

Кутателадзе С. С. Формализмы нестандартного анализа: Учеб. пособие. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1999. 50 с.

Излагаются сведения, связанные с теоретико-множественным обоснованием нестандартного анализа, подобранные с учетом особенностей обязательного специального курса, читаемого в Новосибирском государственном университете для студентов 3–4 курсов механико-математического факультета.

Формализмы нестандартного анализа

Нестандартный анализ получил обоснование в рамках теоретико-множественной установки. Точнее говоря, известные с глубокой древности представления и методы, основанные на использовании актуальных бесконечно больших и бесконечно малых величин поставлены на те же (и значит, столь же прочные) основы, на которых покоится канторовская теория множеств или, что более строго, «приближающие ее снизу» аксиоматические теории множеств.

Для того чтобы яснее осознать связи математического анализа и теории множеств, стоит сопоставить следующие высказывания:

> «...анализ... есть сама наука о бесконечном»
>
> *Г. В. Лейбниц*

> «Лейбниц — основатель математики бесконечного»
>
> *Ф. Энгельс*

> «...математический анализ является просто наукой о бесконечном. Это старое его определение идет через века...»
>
> *Н. Н. Лузин*

> «МНОЖЕСТВ ТЕОРИЯ, раздел математики, в котором изучаются общие свойства множеств, преимущественно бесконечных»
>
> *Большой энциклопедический словарь*

Следовательно, самим понятием «бесконечность» анализ связан с теорией множеств. В то же время никогда не нужно забывать, что классические работы Г. Кантора появились спустя двести лет после открытия математического анализа. Подведение теоретико-множественного обоснования под математику можно сравнить с используемым в современном строительстве методом монтажа зданий, начиная с верхних этажей «от чердака к подвалу». Интересно при этом подметить, что

фундамент здания закладывается заранее. Ровно так же исходный фундамент математического анализа заложен практической деятельностью людей.

Нынешняя математика в своей существеннейшей части опирается на теорию множеств. Более точно, под основные этажи современной математики подведена теоретико-множественная база. Что дальше — это покажет будущее. А сейчас мы можем только констатировать продолжение процесса построения математического здания — процесса, готовящего грядущие перемены. Доказательными свидетельствами ускоренного развития являются обострение ситуации, столкновение мнений, ожесточение борьбы идей. Некоторой иллюстрацией происходящей на наших глазах поляризации установок служит следующая (весьма далекая от полноты) подборка.

PRO

«После начального периода недоверия началось триумфальное шествие созданной теории множеств во всех областях математики. Ее влияние на математику нашего века ясно видно в выборе современных проблем и в тех методах, которыми эти проблемы решаются. Применение теории множеств является повсеместным».

К. Куратовский, А. Мостовский

«Одним из творений Георга Кантора является теория множеств, элементы которой в наше время преподаются в старших классах средней школы и даже ранее. Это еще одна область математики, о которой думали, что она не будет иметь ни малейшего практического применения. Каким это было заблуждением. Элементы теории множеств сейчас в ходу даже у авторов детективных историй. Хорошо известна связь теории множеств с составлением программ для вычислительных машин, а последние обслуживают несметное количество практических проектов».

Л. Янг

CONTRA

«... утверждают, что теория множеств важна для научно-технического прогресса и является новейшим достижением математики. В действительности теория множеств не имеет ничего общего с научно-техническим прогрессом и не является новейшим достижением математики».

Л. С. Понтрягин

«Математика, основанная на канторовской теории множеств, превратилась в математику канторовской теории множеств... Современная математика изучает, таким образом, конструкцию, отношение которой к реальному миру по меньшей мере проблематично... Это ставит под сомнение роль математики как научного и полезного метода. Математика может быть сведена к простой игре, происходящей в некотором специфическом искусственном мире. Это не опасность для математики в будущем, а непосредственный кризис современной математики».

П. Вопенка

Заключая предварительное обсуждение, следует подчеркнуть, что только теперь, развеяв иллюзию возможности окончательного «абсо-

лютного» обоснования нестандартного анализа (как и всей математики) на теоретико-множественной основе, мы можем приступить к реализации этого проекта.

1. Язык теории множеств

Аксиоматические теории множеств точно регламентируют корректные способы формирования множеств. Образно говоря, аксиоматики описывают миры — универсумы — множеств, которые призваны служить адекватными отображениями наших интуитивных представлений о «канторовом рае» — универсуме наивной теории множеств. Интересующие нас аксиоматики строятся и изучаются как формальные теории. Необходимо специально отметить, что, несмотря на свою очевидную ограниченность (математика не сводится к синтаксису своих текстов) и во многом благодаря ей (вычленение семиотических аспектов эксплицирует проблему смысла), формальный подход доказал свою исключительную плодотворность (теоремы Гёделя, независимость континуум-гипотезы и аксиомы выбора, булевозначный анализ и т. п.).

Стержнем формальной теории является ее язык. Точное описание и изучение последнего по необходимости производится средствами некоторого, вообще говоря, другого языка, который принято называть метаязыком. Обычно в качестве метаязыка употребляются определенным образом ограниченные и регламентированные фрагменты естественных языков, обогащенные разными техническими терминами. Средства, допускаемые в метаязык, важны с точки зрения метаматематики. Учитывая, что нас интересуют не метаматематические, а прикладные теоретико-модельные аспекты формальной теории множеств, мы не предъявляем к метаязыку чрезмерно жесткие требования. В частности, в дальнейшем широко используются общепринятые выразительные средства и уровень строгости обычной «содержательной» математики.

1.1. Аксиоматическая теория множеств — это *формальная система.* Составляющими такой системы являются алфавит, формулы, аксиомы и правила вывода. В качестве алфавита рассматривают фиксированный набор A символов произвольной природы — канторовское множество. Конечные последовательности элементов A называют выражениями, иногда — текстами. Если каким-либо способом (предписаниями, алгоритмами и т. п.) выделено некоторое множество «правильно составленных» выражений $\Phi(A)$, то говорят, что задан язык с

алфавитом A. При этом выделенные выражения называют *формулами*. После этого фиксируют некоторые конечные (или бесконечные) совокупности формул, именуемые аксиомами, а также явно описывают допускаемые правила вывода — отношения в $\Phi(A)$. Формулы, получаемые из аксиом за конечное число шагов с помощью указанных правил вывода, называют *теоремами*. Часто используют (и мы будем поступать также) более вольный и удобный способ выражения. Именно, говорят, что теоремы формальной системы составляют наименьшее множество формул, содержащее все аксиомы и замкнутое относительно правил вывода.

1.2. Нас будет интересовать специальный тип формального языка — *язык первого порядка* (с равенством) исчисления предикатов (с равенством). *Сигнатурой* σ называют тройку (F, P, a), где F и P — некоторые множества, называемые множеством символов операций и множеством символов предикатов соответственно, а a — отображение $F \cup P$ в множество натуральных чисел. Говорят, что $u \in F \cup P$ есть *n-арный* или *n-местный символ*, если $a(u) = n$. *Алфавит* языка первого порядка сигнатуры σ состоит из следующих символов:

- **(1)** *множество символов* сигнатуры σ, т. е. множество $F \cup P$;
- **(2)** *множество переменных*: строчные или прописные латинские буквы, возможно с индексами;
- **(3)** *пропозициональные связки*: $\wedge$ — конъюнкция, $\vee$ — дизъюнкция, $\rightarrow$ — импликация, $\urcorner$ — отрицание;
- **(4)** *кванторы*: $\forall$ — квантор общности и $\exists$ — квантор существования;
- **(5)** *символ равенства* $=$;
- **(6)** *вспомогательные символы*: (— открывающая скобка,) — закрывающая скобка, , — запятая.

1.3. В языке теории множеств выделяют формулы и термы.

(1) *Термы* сигнатуры σ составляют наименьшее множество выражений языка (той же сигнатуры), удовлетворяющее условиям:

- **(а)** всякая переменная есть терм;
- **(б)** всякий нульместный символ операции есть терм;
- **(в)** если $f \in F$, $a(f) = n$ и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.

(2) *Атомные* (= *атомарные*) *формулы* сигнатуры σ — это выражения вида

$$t_1 = t_2, \quad p(y_1, \ldots, y_n), \quad q,$$

где $t_1, t_2, y_1, \ldots, y_n$ — термы сигнатуры σ, p — некоторый n-местный предикатный символ и q — нульместный предикатный символ.

(3) *Формулы сигнатуры* σ составляют наименьшее множество выражений, удовлетворяющее условиям:

- **(а)** атомные формулы сигнатуры σ служат формулами сигнатуры σ;
- **(б)** если φ и ψ — формулы сигнатуры σ, то $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$ — также формулы сигнатуры σ;
- **(в)** если φ — формула сигнатуры σ, а x — переменная, то $(\forall x)\varphi$, $(\exists x)\varphi$ — также формулы сигнатуры σ.

Вхождение переменной x в формулу φ *связано* в φ или входит в область действия квантора, если x входит в подформулу φ вида $(\forall x)\psi$ или $(\exists x)\varphi$. В противном случае вхождение x свободно в φ. Говорят, что x *свободно* (связано) в φ, если существует свободное (связанное) вхождение x в φ. При желании подчеркнуть, что в формуле φ свободными являются переменные $x_1, \ldots, x_n$ и только они, мы пишем $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ или просто $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Слова «предложение» и «утверждение» неформально трактуют как синонимы слова «формула». Формулу без свободных переменных называют *высказыванием*. Говоря об истинности или ложности формулы φ, имеют в виду *универсальное замыкание* формулы φ, которое получается навешиванием квантора всеобщности на каждую свободную переменную формулы φ. Обратите внимание, что квантификация допустима лишь по отношению к переменным. Слова «первый порядок» подчеркивают именно эту синтаксическую особенность рассматриваемого языка.

1.4. *Язык теории множеств* — это язык первого порядка, сигнатура которого содержит лишь один бинарный предикатный символ $\in$ и не имеет прочих предикатных или функциональных символов. Обычно пишут $x \in y$ вместо $\in (x, y)$ и говорят, что x — *элемент* или *член* y. В этой связи говорят также о *принадлежности* или *членстве* множеств. Таким образом, формулы теории множеств суть формальные тексты, составленные из атомных формул вида $x \in y$ и $x = y$ посредством пропозициональных связок и кванторов.

Теория множеств строится на основе законов классической логики. Иными словами, в ней действуют обычные логические аксиомы и правила вывода исчисления предикатов, которые можно найти почти в любом руководстве по математической логике. Помимо этого принимается некоторое количество нелогических или специальных аксиом, отражающих принимаемые представления о множествах или классах.

Варьируя в разумных пределах специальные аксиомы, можно получить различные по своим выразительным возможностям аксиоматические системы для теории множеств. Здесь будут описаны три такие системы: теория множеств Цермело — Френкеля, теория внутренних множеств Нельсона, теория внешних множеств Каваи — Хрбачека.

1.5. Одной из важнейших функций метаязыка является введение новых сокращающих символов и установление соответствующих синтаксических правил. Дело в том, что формализация даже несложных фрагментов содержательной математики приводит к громоздким текстам, запись и прочтение которых проблематичны по физическим и психологическим причинам. Это обстоятельство вынуждает вводить большое количество сокращений и, по сути дела, просто строить более удобный сокращенный вариант исходного символического языка. При этом необходимым требованием является принципиальная возможность однозначного перевода сокращенного изложения на формализованный язык. В соответствии с нашими планами мы не будем останавливаться подробно на способах введения сокращений, точных описаний, функциональных выражений и т. п. Например, в дальнейшем, как и ранее, мы будем применять *символ присваивания* $:=$, не вдаваясь в сопутствующие тонкости.

1.6. Приведем примеры сокращения некоторых формальных текстов языка теории множеств. Словесное толкование этих текстов апеллирует к интуитивным наивным представлениям о множествах. Прежде всего отметим следующие общепринятые сокращения:

$$(\exists!\, x)\varphi(x) := (\exists\, x)\varphi(x) \wedge (\forall\, x)(\forall\, y)(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \to x = y);$$
$$(\exists\, x \in y)\varphi := (\exists\, x)(x \in y \wedge \varphi);$$
$$(\forall\, x \in y)\varphi := (\forall\, x)(x \in y \to \varphi),$$

где φ — некоторая формула. Полагают также $x \neq y := \neg(x = y)$ и $x \notin y := \neg(x \in y)$. Для простейших теоретико-множественных операций приняты обычные соглашения:

$$x \subset y := (\forall\, z)(z \in x \to z \in y);$$
$$u = \cup x = \cup(x) := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (\exists\, y \in x)\ z \in y);$$
$$u = \cap x = \cap(x) := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (\forall\, y \in x) z \in y);$$
$$u = y - x = y \setminus x := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (z \in y \wedge z \notin x)).$$

Если φ — формула, то совокупность $\mathscr{P}_\varphi(x)$ всех подмножеств x, удовлетворяющих условию φ, описывается выражением

$$u = \mathscr{P}_\varphi(x) := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (z \subset x) \wedge \varphi(z)).$$

Пустое множество $\varnothing$ не содержит элементов, так что

$$u = \varnothing := (\forall\, x)(x \in u \leftrightarrow x \neq x).$$

В приведенных выше текстах использован весьма употребительный прием сокращения — пропуск части скобок.

1.7. Утверждение о том, что x есть *неупорядоченная пара* элементов y и z, формализуется так:

$$(\forall\, u)(u \in x \leftrightarrow u = y \vee u = z).$$

При этом полагают $\{y, z\} := x$. Отметим, что фигурные скобки отсутствуют в исходном алфавите и, стало быть, суть метасимволы.

Упорядоченная пара и *упорядоченная n-ка* вводятся приемом Куратовского:

$$(x, y) := \langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\};$$
$$(x_1, \dots, x_n) := \langle x_1, \dots, x_n\rangle := \langle\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle,$$

где $\{x\} := \{x, x\}$. Обратим внимание на перегруженность круглых скобок. Это обстоятельство неизбежно и не должно восприниматься как повод для обязательного введения новых символов.

С помощью заключенных соглашений можно придать формальный смысл высказыванию «X — *декартово произведение* $Y \times Z$». Именно, по определению считают: $X := \{(y, z) : y \in Y, z \in Z\}$.

1.8. Рассмотрим утверждения:

(1) $\mathrm{Rel}\,(X)$;
(2) $Y = \mathrm{dom}(X)$;
(3) $Z = \mathrm{im}(X)$.

Соответствующие формальные тексты имеют вид

(1′) $(\forall\, u)(u \in X \to (\exists\, v)\,(\exists\, w) u = (v, w))$;
(2′) $(\forall\, u)(u \in Y \leftrightarrow (\exists\, v)\,(\exists\, w) w = (u, v) \wedge w \in X)$;
(3′) $(\forall\, u)(u \in Z \leftrightarrow (\exists\, v)\,(\exists\, w) w = (v, u) \wedge w \in X)$.

Таким образом, в (1)–(3) речь идет о том, что элементами X служат упорядоченные пары, причем Y — *область определения* X, а Z — это

область значений X. При этом X иногда называют *абстрактным отношением.*

Однозначность X, или сокращенно $\mathrm{Un}\,(X)$, выражается формулой

$$\mathrm{Un}\,(X) := (\forall\, u)(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)((u, v_1) \in X \wedge (u, v_2) \in X \to v_1 = v_2).$$

Однозначное отношение называют *функциональным.* Полагают:

$$\mathrm{Fnc}\,(X) := \mathrm{Fnc}\,(X) := \mathrm{Un}\,(x) \wedge \mathrm{Rel}\,(X)$$

. Если выполнено $\mathrm{Fnc}\,(X)$, то по очевидным причинам X часто именуют *функцией* или даже *класс-функцией.* При этом для выражения $(u, v) \in X$ приняты записи $v = X(u)$, $X : u \to v$ и т. п. Далее, фраза F — *отображение* (= *функция*) из X в Y означает, что F — подкласс $X \times Y$, F функционально и область определения F совпадает с X:

$$F : X \to Y := F \subset X \times Y \wedge \mathrm{Fnc}\,(F) \wedge \mathrm{dom}(F) = X.$$

Термин *класс-функция* также применяют для F при желании подчеркнуть, что F — это класс. *Ограничение* X на U есть по определению $X \cap (U \times Z)$. Его обозначают $X \restriction U$. Если существует и притом единственное Z, для которого $(Y, Z) \in X$, то полагают $X`Y := Z$. В остальных случаях считают $X`Y := \varnothing$. Наконец, по определению $X``Y := \mathrm{im}(X \restriction Y)$. Вместо $X``\{z\}$ пишут $X(x)$ или даже Xx, если это не приводит к недоразумениям.

Стоит подчеркнуть, что здесь и в дальнейшем мы придерживаемся свободной точки зрения на введение и сокращение скобок. Иначе говоря, их появление и ликвидация, как правило, управляются соображениями удобства, а также требованиями к уровню формализации текущего фрагмента текста.

1.9. *Суперпозиция* (или *композиция*) отношений X и Y, обозначаемая символом $Y \circ X$, состоит в точности из упорядоченных пар (x, z) таких, что $(x, y) \in X$ и $(y, z) \in Y$ для некоторого y:

$$(\forall\, u)(u \in Y \circ Xs \leftrightarrow (\exists\, x)(\exists\, y)(\exists\, z)(x, y) \in X \wedge (y, z) \in Y \wedge u = (x, z)).$$

Отношение X^{-1}, *обратное* к X, определяется так:

$$(\forall\, u)(u \in X^{-1} \leftrightarrow (\exists\, x)(\exists\, y)(x, y) \in X \wedge u = (y, x)).$$

Символом I_X обозначается *тождественное отношение* на X, т. е.

$$(\forall\, u)(u \in I_X \leftrightarrow (\exists\, x)(x \in X \wedge u = (x, x))).$$

1.10. В случае $\mathrm{Rel}\,(X) \wedge ((X \cap Y^2) \circ (X \cap Y^2) \subset X)$ говорят, что X — *транзитивное отношение на* Y. Если $\mathrm{Rel}\,(X) \wedge (I_Y \subset X)$, то X называют *рефлексивным* (на Y). Если $X = X^{-1}$, то X называют *симметричным* (на Y). Наконец, при $\mathrm{Rel}\,(X) \wedge ((X \cap X^{-1}) \cap Y^2 \subset I_Y)$ используют термин «X — *антисимметричное* отношение на Y». Здесь, конечно же, использовано стандартное сокращение: $Y^2 := Y \times Y$. Антисимметричное, рефлексивное и транзитивное отношение X на Y называют *порядком* (или отношением порядка). Используют и другую стандартную в данной ситуации терминологию. Напомним, в частности, что порядок X на Y называют *линейным*, а само Y — *цепью* (относительно X), если $Y^2 \subset X \cup X^{-1}$. Если всякое непустое подмножество множества Y имеет наименьший (относительно порядка X) элемент, то говорят, что X *вполне упорядочивает* Y или что Y *вполне упорядочено* (подразумеваемым порядком X).

1.11. Кванторы называют *ограниченными*, если они входят в текст в виде $(\forall\, x \in y)$ или $(\exists\, x \in y)$. Существует классификация формул теории множеств (и вообще любой теории первого порядка), основанная на характере использования ограниченных и неограниченных (т. е. не являющихся ограниченными) кванторов. Говорят, что формула φ *ограничена*, если всякий квантор присутствует в ней в виде $(\forall\, x \in y)$ или $(\exists\, x \in y)$ (см. сокращения 1.6).

2. Теория множеств Цермело — Френкеля

Как уже отмечалось в 1.4, аксиомы теории множеств включают в себя общелогические аксиомы теорий первого порядка, фиксирующие классические правила логического вывода. Ниже перечисляются специальные аксиомы теории множеств ZF_1–ZF_6 и AC. Если принять в качестве специальных аксиом ZF_1–ZF_6, то возникающую аксиоматическую систему называют системой или *теорией множеств Цермело — Френкеля* и обозначают ZF. При добавлении к ZF аксиомы выбора AC возникает более широкая теория, которую принято обозначать символом ZFC. Отметим, что параллельные словесные формулировки аксиом мотивируются канторовскими представлениями о множествах.

2.1. При изучении ZFC часто используют термины *свойство* и *класс*. Уточним их формальный статус. Рассмотрим формулу $\varphi =$

$\varphi(x)$ теории ZFC (символически пишут $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$). Вместо $\varphi(y)$ пишут $y \in \{x : \varphi(x)\}$. Таким образом, действует так называемая *схема Чёрча* для классификации

$$y \in \{x : \varphi(x)\} := \varphi(y).$$

Встречая запись $y \in \{x : \varphi(x)\}$, на языке ZFC говорят, что y обладает свойством φ, или y лежит в классе $\{x : \varphi(x)\}$. В этом смысле свойство, формула и класс в ZFC — одно и то же. Схемой Чёрча мы фактически уже пользовались в 1.6 и 1.7. При работе с ZFC удобны и другие широко распространенные сокращения, в частности,

$$\mathbf{V} := \{x : x = x\} \text{ — \textit{универсум} или \textit{класс всех множеств};}$$
$$\{x : \varphi(x)\} \in \mathbf{V} := (\exists\, z)(\forall\, y)\varphi(y) \leftrightarrow y \in z;$$
$$x \cup y := \cup\{x, y\}, x \cap y \cap z := \cap\{x, y, z\} \dots .$$

Перейдем теперь к формулировкам специальных аксиом ZFC.

2.2. Аксиома экстенсиональности (= объемности) $\mathbf{ZF_1}$: *два множества равны в том (и только в том) случае, если они состоят из одних и тех же элементов:*

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y.$$

Отметим, что вторую эквивалентность без изменения объема аксиомы можно заменить на $\to$, ибо обратная импликация является теоремой исчисления предикатов с равенством.

2.3. Аксиома объединения (= суммы) $\mathbf{ZF_2}$: *объединение множества множеств — также множество:*

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(\exists\, u)(u \in z \wedge z \in x) \leftrightarrow z \in y.$$

Используя сокращения из 1.6 и 2.1, аксиому ZF_2 переписывают в виде $(\forall\, x) \cup x \in \mathbf{V}$.

2.4. Аксиома множества подмножеств (= степени) $\mathbf{ZF_3}$: *все подмножества данного множества составляют некоторое множество,* т. е.

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(z \in y \leftrightarrow (\forall\, u)(u \in z \to u \in x)),$$

или в краткой записи: $(\forall\, x)\mathscr{P}(x) \in \mathbf{V}$.

2.5. Аксиома подстановки $\mathbf{ZF}_4^{\varphi}$: *произвольный взаимно однозначный образ множества — снова множество:*

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)(\varphi(x,y)) \wedge \varphi(x,z) \to y = z) \to \\ \to (\forall\, a)(\exists\, b)((\exists\, s \in x)(\exists\, t)\varphi(s,t) \leftrightarrow t \in y).$$

В несколько сокращенной записи:

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)(\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \to y = z) \to \\ \to (\forall\, a)(\{v : (\exists\, u \in a)\varphi(u,v)\} \in \mathbf{V}).$$

Здесь φ — формула ZFC, не содержащая свободных вхождений a. Отметим, что ZF_4^{φ} является схемой для бесконечного набора аксиом, так как для каждой подходящей $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ формулируется своя аксиома. Тем не менее для краткости и единообразия говорят просто об аксиоме подстановки, имея в виду отмеченную ее особенность.

Сформулируем полезные следствия ZF_4^{φ}.

2.6. Пусть $\psi = \psi(z)$ — формула ZFC. Тогда для любого множества x можно составить его подмножество, отбирая элементы x со свойством ψ, т. е.

$$(\forall\, x)\{z \in x : \psi(x)\} \in \mathbf{V}.$$

Это утверждение — аксиома ZF_4^{φ}, где в качестве φ фигурирует формула $\psi(u) \wedge (u = v)$. Приведенное положение часто называют *аксиомами выделения* или *аксиомами свертывания.*

2.7. Применяя аксиому ZF_4^{φ} для формулы

$$\varphi(u,v) := (u = \varnothing \to v = x) \wedge (u \neq \varnothing \to v = y)$$

множества $z := \mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$, мы убеждаемся в том, что неупорядоченная пара $\{x,y\}$ двух множеств (ср. 1.7) — снова множество. Последнее утверждение часто именуют *аксиомой неупорядоченной пары.*

2.8. Аксиома бесконечности $\mathbf{ZF}_5$: *существует по крайней мере одно бесконечное множество:*

$$(\exists\, x)(\varnothing \in x \wedge (\forall\, y)(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)).$$

Тем самым существует такое множество x, что $\varnothing \in x$, $\{\varnothing\} \in x$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in x$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \in x$ и т. д.

2.9. Аксиома фундирования (= регулярности) $\mathbf{ZF_6}$: *у всякого непустого множества есть непересекающийся со всем множеством элемент*

$$(\forall\, x)(x \neq \varnothing \to (\exists\, y)(y \in x \wedge y \cap x = \varnothing)).$$

Применив аксиому ZF_6 к одноэлементному множеству $x := \{y\}$, получим $y \notin y$. Несколько забегая вперед, отметим, что по аналогичной причине (на этот раз нужно взять $x := \{x_1, \dots, x_n\}$) не существуют бесконечно убывающие $\in$-последовательности $x_1 \ni x_2 \ni \dots \ni x_n \ni \dots$.

2.10. Аксиома выбора (= произведения) AC: *произведение множества непустых множеств не пусто:*

$$(\forall\, x)(\exists\, f)(\mathrm{Fnc}\,(f) \wedge x \subset \mathrm{dom}(f)) \wedge (\forall\, y \in x)\, y \neq \varnothing \to f(y) \in y.$$

Функцию f в описанной ситуации называют *выбирающей* для x.

Известно большое количество утверждений, эквивалентных аксиоме выбора в рамках рассматриваемой нами теории. Приведем формулировки двух наиболее популярных из них.

Теорема Цермело. *Любое множество может быть вполне упорядочено.*

Лемма Куратовского — Цорна. *Пусть M — (частично) упорядоченное множество и любое линейное упорядоченное множество в нем имеет верхнюю границу. Тогда для каждого $x \in M$ существует максимальный элемент $m \in M$, $m \geq x$.*

2.11. На основе приведенной аксиоматики складывается точное представление о классе всех множеств как об «универсуме фон Неймана». Исходным объектом построения мыслится пустое множество. Элементарный шаг введения новых множеств из уже построенных состоит в формировании объединения множеств подмножеств имеющихся множеств. Трансфинитное повторение таких шагов исчерпывает класс всех множеств. Классы (в «платонистском» стиле) можно мыслить как внешние объекты по отношению к элементам универсума фон Неймана. Класс в этом понимании есть совокупность множеств, удовлетворяющих теоретико-множественному свойству, описываемому формулой теории Цермело — Френкеля. Поэтому класс, состоящий из элементов некоторого множества (по аксиоме подстановки) сам является множеством. Формально корректное определение универсума фон Неймана требует предварительного знакомства с понятиями ординала и кумулятивной иерархии. Ниже приведен необходимый для «наивного» определения минимум сведений об этих объектах.

2.12. Множество x называется *транзитивным*, если каждый элемент x является подмножеством x. Множество x называют *ординалом*, если само x транзитивно и линейно упорядочено отношением $\in$. В символической записи эти определения выглядят так:

$$\mathrm{Tr}\,(x) := (\forall\, y \in x)(y \subset x) := \ x \text{ — «транзитивное множество»};$$
$$\mathrm{Ord}\,(x) := \mathrm{Tr}\,(x) \wedge (\forall\, y \in x)(\forall\, z \in x)$$
$$(y \in z \vee z \in y \vee z = y) := \ \text{«}x\text{ — ординал».}$$

Ординалы принято обозначать малыми греческими буквами. Каждый ординал рассматривается с естественным отношением порядка: для β, $\gamma \in \alpha$ полагают

$$\gamma \leq \beta \leftrightarrow \gamma \in \beta \vee \gamma = \beta.$$

Класс всех ординалов обозначается символом On, так что $\mathrm{On} := \{\alpha : \mathrm{Ord}\,(\alpha)\}$.

Ординал является *вполне упорядоченным множеством*, т. е. он линейно упорядочен и любое его подмножество имеет наименьший элемент (последнее обеспечено аксиомой фундирования). Несложно убедиться, что

$$\alpha \in \mathrm{On} \wedge \beta \in \mathrm{On} \to \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha;$$
$$\alpha \in \mathrm{On} \wedge \beta \in \alpha \to \beta \in \mathrm{On};$$
$$\alpha \in \mathrm{On} \to \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{On};$$
$$\mathrm{Ord}\,(\varnothing).$$

Ординал $\alpha+1 := \alpha\cup\{\alpha\}$ называют *последующим*. Ординал, не равный нулю и не являющийся последующим, называют *предельным*. Приняты обозначения:

$$K_{\mathrm{I}} := \{\alpha \in \mathrm{On} : (\exists\, \beta)\, \mathrm{Ord}\,(\beta) \wedge a = \beta + 1 \vee \alpha = \varnothing\};$$
$$K_{\mathrm{II}} := \{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha \text{ — предельный ординал}\};$$
$$0 := \varnothing, \quad 1 := 0 + 1, \quad 2 := 1 + 1, \dots,$$
$$\omega := \{0, 1, 2, \dots\}.$$

2.13. Отметим, что в теории ZFC можно доказать возможность использования общеизвестных (на «наивном» уровне) свойств ординалов, в частности законность трансфинитной индукции и рекурсивных определений. Приведем определение универсума фон Неймана,

сознательно опуская пока формальное обоснование законности подобных определений. Для каждого ординала α положим

$$V_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{P}(V_\beta),$$

т. е. $V_\alpha = \{x : (\exists\,\beta)(\beta \in \alpha \wedge x \subset V_\beta)\}$. Подробнее говоря,

$$V_0 := \varnothing;$$
$$V_{\alpha+1} := \mathscr{P}(V_\alpha);$$
$$V_\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} V_\alpha, \quad \text{если} \quad \beta \in K_{\mathrm{II}}.$$

Принципиальным следствием аксиомы фундирования является теорема

$$(\forall\,x)(\exists\,\alpha)(\mathrm{Ord}\,(\alpha) \wedge x \in V_\alpha),$$

которую записывают в виде

$$\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha$$

и выражают словами: «*класс всех множеств — это универсум фон Неймана*» или «*любое множество вполне фундировано*».

Графически универсум фон Неймана можно представлять себе как перевернутую пирамиду. При этом «нижние» этажи универсума таковы:

$$V_0 = \varnothing,\ V_1 = \{\varnothing\},\ V_2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots,$$
$$V_\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}, \dots .$$

2.14. Реализация универсума $\mathbf{V}$ в виде «*кумулятивной иерархии*» множеств $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$ позволяет с каждым множеством x связать его ранг:

$$\mathrm{rank}(x) := \text{ наименьший ординал } \alpha \text{ такой, что } x \in V_{\alpha+1}.$$

Легко убедиться, что

$$a \in b \to \mathrm{rank}(a) < \mathrm{rank}(b);$$
$$\mathrm{Ord}\,(\alpha) \to \mathrm{rank}(\alpha) = \alpha;$$
$$(\forall\,x)(\forall\,y)\,\mathrm{rank}(y) < \mathrm{rank}(x) \to (\varphi(y) \to \varphi(x)) \to (\forall\,x)\varphi(x),$$

где φ — формула ZFC. Последнюю теорему (точнее, схему теорем) называют *принципом индукции по рангу*.

2.15. В дальнейшем нам понадобится важный технический результат, называемый часто *принципом отражения.* В известном смысле этот результат показывает, что «конкретные» теоретико-множественные события происходят с множествами ограниченного ранга.

Теорема Монтегю — Леви. *Пусть* $\varphi := \varphi(x_1, \dots, x_n)$ — *формула теории* ZFC *и* α — *ординал. Тогда существует ординал* β *такой, что* $\beta > \alpha$ *и*

$$(\forall\, x_1, \dots, x_n \in V^\beta)\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{V^\beta}(x_1, \dots, x_n),$$

где φ^{V^β} — *релятивизация* φ *на* V^β.

$\lhd$ Пусть в пренексной нормальной форме φ имеет вид

$$\varphi = (Q_1 y_1) \dots (Q_m y_m)\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Таким образом, ψ не имеет кванторов и $Q_k \in \{\exists, \forall\}$.

Введем в рассмотрение формулу

$$\psi_k := (Q_{k+1} y_{k+1}) \dots (Q_m y_m)\psi$$

для $k := 0, \dots, m$. При этом с должными оговорками получаем

$$\psi_k = \psi_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{k-1}).$$

Фиксируем набор свободных переменных в ψ_k и найдем наименьший ординал γ такой, что

$$(\exists\, y_k)\psi_k \to (\exists\, y_k \in V^\gamma)\psi_k$$

при условии $Q_k = \exists$ и

$$(\exists\, y_k)\neg\, \psi_k \to (\exists\, y_k \in V^\gamma)\neg\, \psi_k,$$

если $Q_k = \forall$. Введем обозначения:

$$g_k(x_1, \dots, x_n,\ y_1, \dots, y_{k-1}) := \gamma.$$

Для каждого ординала α, используя аксиому подстановки, строим множество $A_k(\alpha)$, заданное следующим образом:

$$\{g_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{k-1}) : x_1, \dots, x_n \in V^\alpha; y_1, \dots, y_{k-1} \in V^\alpha\}.$$

Полагаем

$$f_k(\alpha) := \sup\{\alpha + 1, (\sup A_k(\alpha)) + 1\}.$$

Используя возникающие ординальнозначные функции, последовательно определяем

$$f^{(0)}(\alpha) := \alpha;$$

$$f^{(1)}(\alpha) := \sup\{f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)\};$$

$$f^{(s+1)}(\alpha) := f^{(1)}(f^{(s)}(\alpha)) \quad (s \in \mathbb{N}).$$

И наконец, рассмотрим

$$f(\alpha) := \sup_{s \in \mathbb{N}} f^{(s)}(\alpha).$$

Видно, что для каждого α ординал $f(\alpha)$ предельный и мажорирует α. Более того, для любых $x_1, \dots, x_n,\ y_1, \dots, y_m \in V^{f(\alpha)}$ и $1 \le k \le m$ выполнено

$$g_k(x_1, \dots, x_n,\ y_1, \dots, y_{k-1}) < f(\alpha).$$

Полагая $\beta := f(\alpha)$, учитывая, что $\psi_{k-1} = (Q_k y_k)\psi_k$, и привлекая определение g_k, последовательно выводим:

$$\psi_m = \psi_m^{V^\beta} \to$$

$$\to \big(\psi_{m-1} \leftrightarrow (Q_m y_m \in V^\beta)\psi_m\big) \to$$

$$\to \Big(\psi_{m-1} \leftrightarrow \psi_{m-1}^{V^\beta}\Big) \to \dots$$

$$\dots \to \psi_1 \leftrightarrow \psi_1^{V^\beta} \to$$

$$\to (Q_1 y_1)\psi_1 \leftrightarrow (Q_1 y_1 \in V^\beta)\psi_1 \to$$

$$\to \psi_0 \leftrightarrow \psi_0^{V^\beta} \to$$

$$\to \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{V^\beta}(x_1, \dots, x_n).$$

Последнее и требовалось установить. $\triangleright$

Следствие. *Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ — формулы* ZFC, *у которых свободны лишь переменные из $x_1, \dots, x_n$. Тогда при $\alpha \in \mathrm{On}$ будет*

$$(\exists\, \beta > \alpha)(\forall\, x_1, \dots, x_n \in V^\beta)(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_1^{V^\beta}) \wedge \dots \wedge (\varphi_m \leftrightarrow \varphi_m^{V^\beta}).$$

$\triangleleft$ Положим

$$\varphi(t,\ x_1, \dots, x_n) = (t = 1 \wedge \varphi_1) \vee (t = 1 \wedge \varphi_2) \vee \dots (t = m \wedge \varphi_m)$$

и, применяя теорему, выводим требуемое. $\triangleright$

2.16. При изучении различных моделей теории множеств широко используется конструкция ультрапроизведения. Мы приведем подробности, полезные читателю, желающему восполнить детали, связанные с уточнениями формально-логического статута нестандартных теорий множеств.

Пусть U — некоторое множество и ε — отношение в U. В контексте теории множеств пару $(U,\ \varepsilon)$ называют *универсетом* или *универсоидом*. При этом вместо $(x,\ y) \in \varepsilon$ будем иногда писать $x\varepsilon y$.

Рассмотрим формулу $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ теории ZFC.

Допустим, что $x_1, \dots, x_n \in U$ и при интерпретации ε в качестве отношения принадлежности и ограничении всех кванторов в φ на U имеет место $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. В этой ситуации пишут $(U,\ \varepsilon) \vDash \varphi(x_1, \dots, x_n)$, или $\varphi^{(U,\varepsilon)}(x_1, \dots, x_n)$, или даже φ^U и говорят о *релятивизации* φ. Используют и иные аббревиатуры.

Рассмотрим степень $\mathfrak{X} := X^{\mathscr{E}}$ фиксированного множества X, где $\mathscr{E}$ — некоторое множество индексов (X и $\mathscr{E}$ для удобства считаются непустыми). Для $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{X}$ и $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n) \in \text{(ZFC)}$ положим

$$[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] = \{e \in \mathscr{E} : \varphi^X(x_1(e), \dots, x_n(e))\},$$

где φ^X — релятивизация φ на X.

Пусть, далее, $\mathscr{F}$ — фильтр в $\mathscr{E}$ и

$$f \sim_{\mathscr{F}} g := [\![f = g]\!] \in \mathscr{F} \quad (f,\ g \in \mathfrak{X}).$$

Обозначим символом ${}^{\mathscr{F}}X$ фактор-множество $\mathfrak{X}/\sim_{\mathscr{F}}$ и, соответственно, символом ${}^{\mathscr{F}}f$ — класс эквивалентных f элементов. Ясно, что при $f \sim_{\mathscr{F}} f'$ и $g \sim_{\mathscr{F}} g'$ будет

$$[\![f'\varepsilon g']\!] = [\![f = f']\!] \cap [\![g = g']\!] \cap [\![f'\varepsilon g']\!].$$

Таким образом, $[\![f\varepsilon g]\!] \in \mathscr{F} \leftrightarrow [\![f'\varepsilon g']\!] \in \mathscr{F}$. Иначе говоря, в ${}^{\mathscr{F}}X$ корректно определено отношение

$${}^{\mathscr{F}}\varepsilon := \left\{({}^{\mathscr{F}}f,\ {}^{\mathscr{F}}g) \in ({}^{\mathscr{F}}X)^2 : [\![f\varepsilon g]\!] \in \mathscr{F}\right\}.$$

Легко удостовериться, что

$${}^{\mathscr{F}}\varepsilon = \sim_{\mathscr{F}} \circ \varepsilon_{\mathfrak{X}} \circ \sim_{\mathscr{F}}$$

для подходящей интерпретации $\varepsilon_{\mathfrak{X}}$ отношения принадлежности в $\mathfrak{X}$. Возникающее ${}^{\mathscr{F}}X$ называют *фильтрованной степенью* X. Если $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, то об ${}^{\mathscr{F}}X$ говорят как об *ультрастепени* X.

В силу сделанных определений для $f,\ g \in \mathfrak{X}$ будет

$$ {}^{\mathscr{F}}f\ {}^{\mathscr{F}}\varepsilon\ {}^{\mathscr{F}}g \leftrightarrow [\![f\varepsilon g]\!] \in \mathscr{F}; $$

$$ {}^{\mathscr{F}}f = {}^{\mathscr{F}}g \leftrightarrow [\![f = g]\!] \in \mathscr{F}. $$

Иными словами, для каждой атомарной формулы $\varphi = \varphi(x,\ y)$ теории ZFC выполнено

$$ ({}^{\mathscr{F}}X,\ {}^{\mathscr{F}}\varepsilon) \vDash \varphi^{{}^{\mathscr{F}}X}({}^{\mathscr{F}}f,\ {}^{\mathscr{F}}g) \leftrightarrow [\![\varphi(f,\ g)]\!] \in \mathscr{F}. $$

Для $x \in X$ положим $\overline{x}(e) := x\ (e \in \mathscr{E})$ и обозначим ${}^{*}x := {}^{\mathscr{F}}\overline{x}$. Подчеркнем, что ${}^{*}x = {}^{*}y \leftrightarrow x = y$ и ${}^{*}x \ {}^{\mathscr{F}}\!\!\in {}^{*}y \leftrightarrow x \in y$. Оказывается, что подобного рода эффекты носят общий характер. Для их описания дадим определение.

Пусть теперь $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная формула ZFC. Говорят, что формула φ *фильтрована* (относительно X, $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$), если

$$ ({}^{\mathscr{F}}X,\ {}^{\mathscr{F}}\varepsilon) \vDash \varphi^{{}^{\mathscr{F}}X}({}^{\mathscr{F}}f_1, \dots, {}^{\mathscr{F}}f_n) \leftrightarrow [\![\varphi(f_1, \dots, f_n)]\!] \in \mathscr{F} $$

для всех $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{X}$.

Теорема Лося. *Каждая формула* ZFC *фильтрована относительно любого ультрафильтра.*

$\lhd$ Поскольку атомарные формулы фильтрованы, то следует убедиться в том, что пропозициональные связки и навешивание кванторов сохраняют фильтрованность. Если формула φ фильтрована, то фильтрованность $\neg\,\varphi$ обеспечивается характеристическим свойством ультрафильтра: $F \in \mathscr{F} \leftrightarrow F' := \mathscr{E} \setminus F \notin \mathscr{F}$. Установим поэтому лишь то минимально необходимое свойство, что при $\psi(y) \coloneqq (\forall\, x)\varphi(x,\ y)$ фильтрованность φ обеспечивает фильтрованность ψ.

Итак, пусть $[\![\psi(y)]\!] \in \mathscr{F}$ для $y \in \mathscr{F}$ и $x \subset {}^{\mathscr{F}}X$. Ясно, что $[\![\psi(y)]\!] \subset [\![\varphi(x,\ y)]\!]$. Стало быть, $({}^{\mathscr{F}}X,\ {}^{\mathscr{F}}\varepsilon) \vDash {}^{\mathscr{F}}\varphi(x,\ y)$. В силу произвольности x заключаем: $({}^{\mathscr{F}}X,\ {}^{\mathscr{F}}\!\!\in) \vDash (\forall\, x)\varphi^{\mathscr{F}}(x,\ y)$.

Пусть, наконец, известно, что при $x,\ y \in {}^{\mathscr{F}}X$ будет $\varphi^{{}^{\mathscr{F}}X}(x,\ y)$, т. е. $[\![\varphi(x,\ y)]\!] \in \mathscr{F}$. Проверим, что $B := [\![(\forall\, x)\varphi(x,\ y)]\!]$ также лежит в $\mathscr{F}$. В самом деле, для $e \in \mathscr{E} \setminus B := B'$ имеется $\overline{x}(e)$ такой, что $\neg\,\varphi(x(e),\ y(e))$.

Возьмем какой угодно x_0 из $\mathfrak{X}$ и положим $\overline{\overline{x}}(e) := \overline{x}(e)$ для $e \in B'$ и $\overline{\overline{x}}(e) := x_0(e)$ в противном случае. Ясно, что $[\![\varphi(\overline{x},\ y)]\!] \subset \mathscr{E} \setminus B' = B$. Стало быть, $B \in \mathscr{F}$, ибо $[\![\varphi(\overline{\overline{x}},\ y)]\!] \in \mathscr{F}$. $\rhd$

Следствие 1. *Пусть X — непустое множество и $*X$ — некоторая его ультрастепень. Тогда для $x_1, \dots, x_n \in X$ и $\varphi \in$ (ZFC) выполнено*

$$\varphi^X(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{*X}(*x_1, \dots, *x_n).$$

$\lhd$ По теореме Лося $\varphi^{*X}(*x_1, \dots, *x_n) \leftrightarrow [\![\varphi(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)]\!] \in \mathscr{F}$, где $\mathscr{F}$ — рассматриваемый ультрафильтр, а $\overline{x}_k(e) = (x_k)$ при $e \in \mathscr{E}$. По определению $[\![\,\cdot\,]\!]$ будет $[\![\varphi(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)]\!] \in \mathscr{F} \leftrightarrow \varphi^X(x_1, \dots, x_n)$. $\rhd$

Пусть X — бесконечное множество и $\mathscr{E}$ — направление всех его непустых конечных подмножеств. Пусть, далее, $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, содержащий фильтр хвостов направления $\mathscr{E}'$. Ультрастепень ${}^{\mathscr{F}}X$ назовем *каноническим расширением* X, сохранив за ней обозначение $*X$.

Следствие 2. *Для формулы $\varphi = \varphi(x, y, x_1, \dots, x_n) \in$ ZFC, элементов $x_1, \dots, x_n \in X$ и канонического расширения $*X$ справедлив принцип идеализации (в слабой форме)*

$$(\forall^{\mathrm{fin}} A \subset X)(\exists\, b \in X)(\forall\, a \in A)\varphi^X(a, b, x_1, \dots, x_n) \to$$

$$\to (\exists\, b \in *X)(\forall\, a \in A)\varphi^{*X}(*a, b, *x_1, \dots, *x_n).$$

$\lhd$ Для $e \in \mathscr{E}$ имеется $b(e) \in X$ так, что $(\forall\, a \in e)\varphi^X(a, b(e), x_1, \dots, x_n)$. Иначе говоря, для возникающего $b \in X^{\mathscr{E}}$ имеем

$$[\![\varphi(\overline{x}, b, \overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)]\!] \subset \{e \in \mathscr{E} : a \in e\},$$

где, как обычно, $\overline{y}(e) = y$ для $y \in X$ и $e \in \mathscr{E}$. По теореме Лося заключаем: $\varphi^{*X}(*a,\ {}^{\mathscr{F}}b,\ *x_1, \dots, *x_n)$. Это и требовалось установить. $\rhd$

Непустое множество Z, являющееся подмножеством $\widetilde{Z}$, называем *цермеловским подмножеством* $(\widetilde{Z})$, если

(а) Z транзитивно в $\overline{Z}$ (т. е. $a \in \widetilde{Z} \wedge b \in Z \wedge a \in b \to a \in Z$);

(б) Z выдерживает образование неупорядоченных пар элементов;

(в) $a \in Z \to \cup a \in Z \wedge \mathscr{P}(a) \in Z$.

Пусть $(\widetilde{Z},\ \widetilde{\varepsilon})$ — универсет и $(Z,\ \varepsilon)$ — также универсет, причем Z — непустое подмножество $\widetilde{Z}$ и ε — сужение $\widetilde{\varepsilon}$ на E^2. В этом случае $(Z,\ \varepsilon)$ называют *подуниверсетом* $(\widetilde{Z},\ \varepsilon)$. Если при интерпретации $\widetilde{\varepsilon}$ в качестве отношения принадлежности, Z моделирует цермеловское подмножество $\widetilde{Z}$, то Z называют *цермеловским универсетом* (в $(\widetilde{Z},\ \widetilde{\varepsilon})$). Указание на $\widetilde{Z}$ часто опускают, если это не вызывает недоразумений.

Следствие 3. *Пусть $(\mathfrak{X},\ \varepsilon)$ — цермеловский универсет и $*\mathfrak{X}$ — ультрастепень X. Пусть, далее, $X \in \mathfrak{X}$, $Y \in *\mathfrak{X}$ и $\widetilde{f} : X \to \widetilde{Y}$ (т. е. $\widetilde{f}$ — внешняя функция), где $\widetilde{Y} := \{y : y \overset{*\mathfrak{X}}{\in} Y\}$. Существует элемент $f \in *\mathfrak{X}$ такой, что f — функция из $*X$ в Y внутри $(*\mathfrak{X})$ и при этом $\widetilde{f}(x) = f(*x)$ для $x \in X$.*

$\lhd$ Если $\widetilde{f} = \varnothing$, то полагаем $f := \varnothing$. Если же $\widetilde{f} \neq \varnothing$, то $Y \neq \varnothing$. Пусть $Y = {}^{\mathscr{F}}\mathscr{Y}_0$, где $\mathscr{F}$ — рассматриваемый ультрафильтр в соответствующем направлении $\mathscr{E}$. При этом $[\![\mathscr{Y}_0 \neq \varnothing]\!] = \{e \in \mathscr{E} : \mathscr{Y}_0 \neq \varnothing\} \in \mathscr{F}$. Переопределяя, если нужно, $\mathscr{Y}_0(e)$ при $e \notin [\![\mathscr{Y}_0 \neq \varnothing]\!]$, можно считать, что $Y = {}^{\mathscr{F}}\mathscr{Y}$ и $\mathscr{Y}(e) \neq \varnothing$ при всех $e \in \mathscr{E}$.

Пусть $y \in \widetilde{Y}$ и $y = {}^{\mathscr{F}}\mathfrak{y}$. Ясно, что $[\![\mathfrak{y} \in \mathscr{Y}]\!] \in \mathscr{F}$. Положим $h(y)(e) := \mathfrak{y}(e)$ при $e \in [\![\mathfrak{y} \in \mathscr{Y}]\!]$ и доопределим $h(y)$ при иных e, например, как какой-либо элемент $\mathscr{Y}(e) \in X$. Важно, что ${}^{\mathscr{F}}h(y) = y$ при любом подобном выборе. Для $e \in \mathscr{E}$ определим функцию $g(e) : X \to \mathscr{Y}(e)$ соотношением $g(e)(x) := h(f(x))(e)$ (здесь $x \in X$). Множество $g(e) := \{\langle x,\ g(e)(x)\rangle : x \in X\}$ является элементом $\mathfrak{X}$ (ибо $\mathfrak{X}$ — цермеловский универсет). Тем самым возникает элемент g из $\mathfrak{X}^{\mathscr{E}}$ такой, что $g : e \in \mathscr{E} \to g(e) \in \mathfrak{X}$. При этом, как очевидно, $[\![g : \overline{X} \to \mathscr{Y}]\!] = \mathscr{E}$. Стало быть, по теореме Лося $f := {}^{\mathscr{F}}g$ — функция из $*X$ в Y. Осталось заметить, что при $x \in X$ по цитированным причинам

$$\widetilde{f}(x) = f(*x) \leftrightarrow f(*x) = {}^{\mathscr{F}}h(\widetilde{f}(x)) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow [\![g(\overline{x}) = h(\widetilde{f}(x))]\!] \in \mathscr{F}.$$

Кроме того, по определению

$$g(\overline{x})(e) = g(e)(x) = h(\widetilde{f}(x))(e))$$

при всех $e \in \mathscr{E}$. Последнее наблюдение завершает доказательство. $\rhd$

2.17. Для исследования более глубоких свойств множеств требуется еще одна общая конструкция, называемая *ультрапределом.* Здесь приводится лишь нужный для дальнейшего минимум свойств ультрапредела.

Пусть $(U,\ \varepsilon)$ — универсет и $V := \mathscr{P}(U)$. Положим

$$f_U(u) := f(u) = \{v \in U : (v,\ u) \in \varepsilon\} \quad (u \in U);$$

$$E := \{(A,\ B) \in V \times V : (\exists\, a \in U) A = f(a) \wedge a \in B\}.$$

Отметим, что для $v \subset U$ по определению образа будет

$$A \in f(v) \leftrightarrow (\exists\, u \in v) A = f(a) \leftrightarrow (A,\ v) \in E.$$

Иначе говоря,

$$f(v) = \{A \in V : (A, v) \in E\}.$$

Универсет $(V,\ E)$ называют *предрасширением* $(U,\ \varepsilon)$.

2.18. *Пусть* $(U,\ \varepsilon)$ *— универсет, в котором выполнена аксиома экстенсиональности и* $(V,\ E)$ *— его расширение. Тогда*

(1) $(V,\ E)$ *удовлетворяет аксиоме экстенсиональности;*

(2) отображение $f := f_U : U \to U$ *инъективно и*

$$(f(u),\ f(v)) \in E \leftrightarrow (u,\ v) \in \varepsilon.$$

(3) для $A \in V$ *выполнено*

$$(\forall\, u \in U)(A,\ f(u)) \in E \leftrightarrow (\exists\, a)(a,\ u) \in \varepsilon \wedge A = f(a).$$

$\lhd$ (1) Удостоверимся теперь в экстенсиональности (V, E). Возьмем $x, y \in V$ такие, что $(\forall\, z \in V)(z, x) \in E \to (z, y) \in E$. Достаточно проверить, что $x \subset y$. Возьмем $w \in x, w \in U$. Тогда $(f(w), x) \in E$ и, стало быть, для некоторого $\overline{w} \in U$ будет $f(w) = f(\overline{w})$ и $\overline{w} \in y$. Но $\overline{w} = w$ по уже доказанному. Итак, $(\forall\, w \in U) w \in x \to w \in y$. Осталось вспомнить, что $x,\ y \in \mathscr{P}(U)$.

(2) Отметим, что $(u, v) \in \varepsilon$ означает, что $u \in f(v)$. Отсюда, используя экстенсиональность для ε в U, выводим:

$$f(u) = f(v) \to ((\forall\, z \in U) z \in f(u) \leftrightarrow z \in f(v)) \to$$

$$\to ((\forall\, z \in U)(z, u) \in \varepsilon \leftrightarrow (z, v) \in \varepsilon) \to u = v.$$

Если теперь $(f(u),\ f(v)) \in E$, то по определению для некоторого $a \in \overline{U}$ будет $f(a) = f(a)$ и $a \in f(v)$. По доказанному $a = u$. Значит, $(u,\ v) \in \varepsilon$. В свою очередь, импликация $(u,\ v) \in \varepsilon \to (f(u),\ f(v)) \in E$ ясна (и не требует экстенсиональности в U) — в качестве требуемого в определении E элемента a можно взять U.

(3) Если $(a,\ u) \in \varepsilon$ и $A = f(a)$, то $a \in f(u)$ и, стало быть, $(A,\ f(u)) \in E$ по определению. Наоборот, привлекая (2), выводим

$$(A, f(u)) \in E \to (\exists\, a \in U) A = f(a) \wedge a \in f(u) \to$$

$$\to A = f(a) \wedge (f(a), f(u)) \in E \to (a, u) \in \varepsilon \wedge A = f(a). \ \triangleright$$

Пусть $(U,\ \varepsilon)$ — универсет, удовлетворяющий аксиоме экстенсиональности. Положим $U_0 := U,\ \varepsilon_0 := \varepsilon$. Применяя последовательно предыдущие предложения и имея $(U_k,\ \varepsilon_k)$, полагаем

$$U_{k+1} := \mathscr{P}(U_k);$$

$$f_k(u) = \{\overline{u} \in U_k : (\overline{u},\ U) \in \varepsilon_k\} \quad (u \in U_k);$$

$$\varepsilon_{k+1} := \{(u, v) \in U_{k+1} \times U_{k+1} : (\exists\, a \in U_k) u = f_k(a) \wedge a \in v\}.$$

Тем самым возникает последовательность инъекций

$$U_0 \xrightarrow{f_1} U_1 \xrightarrow{f_2} U_2 \to \ldots \to U_n \xrightarrow{f_{n+1}} U_{n+1} \to \ldots$$

Нетрудно подобрать множество V и последовательность инъекций $(g_n \iota_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ такие, что возникающая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
U_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[drrrrr, "g_0"'] & U_1 \arrow[r, "f_2"] \arrow[drrrr, "g_1"] & U_2 \arrow[r] \arrow[drrr, "g_2"] & \cdots \arrow[r] & U_n \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[dr] & U_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n+1}"] & \cdots \\
 & & & & & V &
\end{tikzcd}$$

коммутативна и $V = \cup_{n\in\mathbb{Z}} U'_n$, где $U'_n := g_n(U_n)$.

В самом деле, можно рассмотреть прямую сумму

$$\widetilde{V} := \{(x,\ n) : x \in U_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

и ввести отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом. Элемент $(x,\ n)$ эквивалентен $(y,\ m)$, если имеется $k \geq n,\ m$ такое, что $f_k \circ f_{k-1} \circ \ldots \circ f_n(x) = f_k \circ f_{k-1} \circ \ldots \circ f_m(y)$. В качестве V берем $\widetilde{V}/\sim$. Отображение g_n возникает как композиция естественного вложения U_n в $\widetilde{V}$ и фактор-отображения $\widetilde{V}$ на V. О наборе из V и $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ обычно говорят как об *индуктивном пределе спектра* $(U_n,\ f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Наделяя U'_n отношением $\varepsilon'_n := g_n^{-1} \circ \varepsilon_n \circ g_n^{-1}$, полагают

$$E := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon'_n.$$

Возникающий универсоид (V, E) называют *внешним расширением* (U, ε). При этом U можно считать вложением в V посредством инъекции $\iota := g_0$. (Часто подразумевают и естественное отождествление (U_n, ε_n) с (U'_n, ε'_n), что сокращает записи.)

2.19. *Для элементов u, v внешнего расширения (V, E) выполнено*

$$(u, v) \in E \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, n \in \mathbb{N}) v \in U'_{n+1}, u \in U'_n \wedge g_n^{-1}(u) \in g_{n+1}^{-1}(v) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall\, n \geq n_0) v \in U'_{n+1}, u \in U'_n \wedge g_n^{-1}(u) \in g_{n+1}^{-1}(v).$$

$\triangleleft$ На основании 2.18 (2) имеем

$$f_{n+1} \circ \varepsilon_n \circ f_{n+1}^{-1} \subset \varepsilon_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Отсюда

$$g_n \circ \varepsilon_n \circ g_n^{-1} = (g_{n+1} \circ f_{n+1}) \circ \varepsilon_n \circ (f_{n+1}^{-1} \circ g_{n+1}^{-1}) =$$

$$= g_{n+1} \circ (f_{n+1} \circ \varepsilon_n \circ f_{n+1}^{-1}) \circ g_{n+1}^{-1} \in g_{n+1} \circ \varepsilon_{n+1} \circ g_{n+1}^{-1}.$$

Поэтому можно считать, что

$$(u, v) \in E \leftrightarrow (\exists\, n \in \mathbb{N})(u, v) \in g_{n+1} \circ \varepsilon_{n+1} \circ g_{n+1}^{-1}.$$

При этом для каждого $n \geq n_0$ также

$$(u,\ v) \in g_{n+1} \circ \varepsilon_{n+1} \circ g_{n+1}^{-1}.$$

Ясно, что $v = g_{n+1}(\overline{v})$, где $\overline{v} = g_{n+1}^{-1}(v) \in U_{n+1}$ и $u = g_{n+1}(\overline{u})$, где $\overline{u} = g_{n+1}^{-1}(v)$. При этом $\overline{u} \varepsilon_{n+1} \overline{v}$ и $\overline{v} \in U_{n+1}$, т. е. для некоторого $a \in v_n$ выполнено $\overline{v} = f_{n+1}(a)$. Итак, $(\overline{u},\ f_{n+1}(a)) \in \varepsilon_{n+1}$. Значит, на основании 2.18 (3) будет $\overline{u} = f_{n+1}(\overline{\overline{u}})$ для некоторого $\overline{\overline{u}} \in U_n$. Стало быть, $u = g_{n+1}(\overline{u}) = g_{n+1}(f_{n+1})(\overline{\overline{u}}) = g_n(\overline{\overline{u}}) \in U'_n$. Поскольку $(f_{n+1}(\overline{\overline{u}}),\ \overline{v}) \in \varepsilon_{n+1}$, то $\overline{\overline{u}} \in \overline{v}$ по определению ε_{n+1}. Осталось заметить, что $g_n^{-1}(u) = \overline{\overline{u}}$ и $g_{n+1}^{-1}(v) = \overline{v}$. $\triangleright$

2.20. *Пусть $(V,\ E)$ — внешнее расширение универсета $(U,\ \varepsilon)$, удовлетворяющее аксиоме экстенсиональности. Тогда*

(1) $(V,\ E) \vDash$ *аксиома экстенсиональности;*

(2) $(V,\ E) \vDash$ *аксиома пары;*

(3) $(V,\ E) \vDash$ *аксиома объединения;*

(4) $(V,\ E) \vDash$ *аксиома степени;*

(5) $(V,\ E) \vDash$ *схема аксиом выделения;*

(6) $(V,\ E) \vDash$ *аксиома выбора;*

(7) $(V,\ E) \vDash$ *аксиома пустого множества;*

(8) $(V,\ E) \vDash$ *аксиома бесконечности;*

(9) $(\forall\, a, b \in U)((a, b) \in \varepsilon) \leftrightarrow (\iota(a), \iota(b)) \in E;$

(10) $(\forall\, x, y \in V)((x, y) \in E \wedge y \in \iota(U) \to x \in \iota(U));$

(11) $(\forall \overline{U} \subset U)(\exists \overline{\overline{U}} \in V)(\forall\, v \in V)(v,\ \overline{\overline{U}} \in E) \leftrightarrow v \in \iota(\overline{U}).$

$\triangleleft$ (1) На основании 1.18 (1) и принципа индукции в $(U_n,\ \varepsilon_n)$ имеет место аксиома экстенсиональности. Осталось заметить, что сужение E на $U'_n \times U'_n$ совпадает с ε'_n (при всех $n \in \mathbb{Z}_+$).

(2) Пусть $u,\ v \in U'_n$, причем $u = g_n(x),\ v = g_n(y)$. Пара $z := \{x,\ y\}$ — элемент U_{n+1}. Стало быть, $w = g_{n+1}(z)$ — элемент U'_{n+1}. Видно, что $(z,\ w) \in E \leftrightarrow z = u \vee z = v$.

(3) Пусть $u \in V$. Можно считать, что $u = g_{n+2}(x)$ и $x \in U_{n+2}$. Положим

$$y := \cup\{f_{n+1}(z) : z \in f_{n+2}(x),\ z \in U_{n+1}\}.$$

Ясно, что $y \in U_{n+1}$. Обозначим $v := g_{n+1}(y)$. Заметим, что для $w \in V$ будет

$$(w,\ v) \in E \leftrightarrow (\exists\, \varkappa)(\varkappa, v) \in E \wedge (w, \varkappa) \in E.$$

В самом деле, для $a \in U_{n+1}$ имеем

$$a \in y \leftrightarrow ((\exists\, z \in U_{n+1}) z \in f_{n+2}(x)) \wedge a \in f_{n+1}(z) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (z,\ x) \in \varepsilon_{n+2} \wedge (a,\ z) \in \varepsilon_{n+1}.$$

Осталось привлечь 2.19.

(4) Возьмем $u \in V$, и пусть $u = g_n(x)$, где $x \in U_n$. Положим $A = \{y \in U_n : f_{n+1}(y) \subset f_{n+1}(x)\}$. Удостоверимся, что множество $v := g_{n+2}(A)$ играет роль множества подмножеств u в $(V,\ E)$. Прежде всего, заметим, что

$$f_{n+1}(y) \subset f_{n+1}(x) \Leftrightarrow (\forall\, z \in V)(z, g_{n+1}(f_{n+1}(y)) \in E \to (z, u) \in E \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (V,\ E) \vDash g_n(y) \text{ — подмножество } x.$$

Таким образом, для любого $a \in V$ получаем

$$(a,\ v) \in E \leftrightarrow (a,\ g_{n+1}(A)) \in E \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow ((\exists\, \overline{a} \in A)(a = g_n(\overline{a})) \leftrightarrow (\exists\, y \in U_n)\ a = g_n(y) \wedge f_{n+1}(y) \subset f_{n+1}(x) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, z \in V) a = Z \wedge (V,\ E) \vDash z \text{ — подмножество } v \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (V, E) \vDash a \text{ — подмножество } v.$$

(5) Пусть $\varphi = \varphi(x, y) \in (\mathrm{ZFC})$ и $u, y \in V$. Считаем, что $u = g_{n+1}(x)$. Положим $A := \{z \in f_{n+1}(x) : \varphi(g_n(z), y\}$. Ясно, что $A \in U_{n+1}$. Обозначим $v := g_{n+1}(A)$. При этом для $a \in U$ выполнено

$$(a, v) \in E \leftrightarrow (\exists\, z \in U_n) a = g_n(z) \wedge z \in A \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, z \in U_n) z \in f_{n+1}(x) \wedge a = g_n(z) \wedge \varphi(g_n(z),\ y) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (a,\ u) \in E \wedge \varphi(a,\ y).$$

(6) Пусть $u = g_{n+1}(x)$. Положим

$$A := \{z \in U_n : z \in f_{n+1}(x) \wedge f_{n+1}(z) \neq \varnothing\}.$$

Имеется функция выбора $\psi : A \to U_{n+1}$ такая, что $\psi(z) \in f_{n+1}(z)$ для всех $z \in A$. Множество ψ — элемент U_{n+3}. Пусть $f := g_{n+3}(\psi)$. Легко убедиться, что f выполняет роль функции в $(V,\ E)$, причем

$$(\forall\, v \in V)(v, y) \in E \wedge v \neq 0) \to (f(v), y) \in E.$$

Такое f и требовалось предъявить.

(7)–(10) сомнений не вызывает.

(11) В качестве $\overline{\overline{U}}$ возьмем $g_1(\overline{\overline{U}})$ (это корректно, ибо $\overline{U} \in U_1$). В силу 4 будет $(v, \overline{\overline{U}}) \in \iota \leftrightarrow (\exists\, u \in U_0) v = \iota(u) \wedge u \in \overline{U}$. Иными словами, $(v,\ \overline{\overline{U}}) \in E \leftrightarrow v \in \iota(\overline{v})$. $\triangleright$

3. Теория внутренних множеств Нельсона

Содержательный анализ свойств стандартных и нестандартных множеств показывает, что в универсуме фон Неймана есть место бесконечно малым числам, но нет места для всей их совокупности. Иначе говоря, нестандартный анализ указывает, что теория Цермело — Френкеля, описывающая классический мир «стандартной» математики, выделяет собственную, внутреннюю часть универсума «наивных» множеств. Подчеркивая это обстоятельство, в нестандартной теории множеств элементы универсума фон Неймана называют *внутренними множествами*. Таким образом, множество в смысле теории Цермело — Френкеля и внутреннее множество — это синонимы. Удобное обоснование нестандартного анализа дает теория внутренних множеств, предложенная Э. Нельсоном — теория IST.

3.1. Алфавит формальной теории IST получается добавлением к алфавиту теории ZFC одного-единственного нового символа — символа одноместного предиката St, выражающего свойство быть *стандартным множеством*. Иначе говоря, в число допустимых фрагментов текстов IST включаются записи вида $\mathrm{St}(x)$ или, более развернуто, «x стандартно», или, наконец, «x — стандартное множество». Итак, содержательной областью изменения переменных IST является мир Цермело — Френкеля — универсум фон Неймана, в котором теперь выделены стандартные и нестандартные множества.

3.2. Формулы IST определяются обычной процедурой. При этом к числу атомарных формул добавляются тексты: $\mathrm{St}(x)$, где x — переменная. Каждая формула ZFC является формулой IST, обратное утверждение очевидно не верно. Для различения формул используют следующую терминологию: формулы ZFC называют *внутренними*, формулы IST, не являющиеся формулами ZFC, называют *внешними*. Так, текст «x стандартно» — это внешняя формула теории IST.

Иногда удобно использовать образные сокращения: писать $\varphi \in$ (IST) вместо φ — формула IST и соответственно $\varphi \in$ (ZFC) вместо φ — формула ZFC, т. е. φ — внутренняя формула теории IST.

3.3. Различие между формулами IST приводит к внешним и внутренним классам. Если φ — внешняя формула IST, то текст $\varphi(y)$ описывают словами: «y — элемент *внешнего класса* $\{x : \varphi(x)\}$». Термин *внутренний класс* используется в том же смысле, что термин *класс* в теории Цермело — Френкеля. В случаях, когда это не может привести к недоразумениям, внешние и внутренние классы называют просто классами.

3.4. Внешние классы, составленные из элементов некоторого внутреннего множества, мы называем *внешними множествами*, или, более полно, внешними подмножествами данного множества. Полезно вновь обратить внимание на то, что внутренний класс, составленный из элементов внутреннего множества, — это снова внутреннее множество. Помимо сокращений, принятых в ZFC, в теории внутренних множеств используются дополнительные соглашения. Вот некоторые из них:

$$\mathbf{V}^{\mathrm{st}} := \{x : \mathrm{St}(x)\} \text{ — внешний класс стандартных множеств;}$$
$$x \in \mathbf{V}^{\mathrm{st}} := x \text{ стандартно} := (\exists\, y)\,\mathrm{St}(y) \wedge y = x;$$
$$(\forall^{\mathrm{st}} x)\varphi := (\forall\, x)(x \text{ стандартно } \to \varphi);$$
$$(\exists^{\mathrm{st}} x)\varphi := (\exists\, x)(x \text{ стандартно } \wedge \varphi);$$
$$(\forall^{\mathrm{st\,fin}} x)\varphi := (\forall^{\mathrm{st}} x)(x \text{ конечно } \to \varphi);$$
$$(\exists^{\mathrm{st\,fin}} x)\varphi := (\exists^{\mathrm{st}} x)(x \text{ конечно } \wedge \varphi);$$
$${}^{\circ}x := \{y \in x : y \text{ стандартно}\}.$$

Внешнее множество ${}^{\circ}x$ часто называют *стандартным ядром* x.

Возникающая в силу сложившейся традиции коллизия обозначений (для $x \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ символ ${}^{\circ}x$ обозначает и стандартную часть $\mathrm{st}(x)$ этого числа) не приводит к сколь-либо значительным недоразумениям.

3.5. Аксиомы IST получаются добавлением к перечню аксиом ZFC следующих трех новых схем, носящих, как указывалось ранее, название принципов нестандартной теории множеств:

(1) принцип переноса —

$$(\forall^{\mathrm{st}} x_1)(\forall^{\mathrm{st}} x_2)\ldots(\forall^{\mathrm{st}} x_n)((\forall^{\mathrm{st}} x)\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \\ \to (\forall\, x)\varphi(x, x_1, \ldots, x_n))$$

для каждой внутренней формулы φ;

(2) принцип идеализации —

$$(\forall\, x_1)(\forall\, x_2)\ldots(\forall\, x_n)((\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)(\exists\, x)(\forall\, y \in z)\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y)\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)),$$

где $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ — произвольная внутренняя формула;

(3) принцип стандартизации —

$$(\forall\, x_1)\ldots(\forall\, x_n)\big((\forall^{\mathrm{st}} x)(\exists^{\mathrm{st}} y)(\forall^{\mathrm{st}} z) z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, x_1, \ldots, x_n)\big)$$

для всякой формулы φ.

3.6. Теорема Поуэлла. *Теория* IST *является консервативным расширением теории* ZFC.

$\lhd$ Пусть φ — формула ZFC, $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и φ установлена в IST. Допустим, что в предъявленном доказательстве φ использованы аксиомы $\psi_1, \ldots, \psi_m$ из ZFC. По теореме Монтегю — Леви имеется такой ординал α, что при $x_1, \ldots, x_n \in V^\alpha$ будет

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{V^\alpha}(x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi_1^{V^\alpha} \wedge \ldots \wedge \psi_m^{V^\alpha}$$

Положим $U_0 := V^\alpha$ и $\varepsilon_0 \ = \in |_{V^\alpha \times V^\alpha}$. В качестве $\mathscr{E}$ возьмем $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(U_0)$, и пусть $\mathscr{F}$ — фиксированный ультрафильтр, содержащий фильтр хвостов $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(U_0)$. Обозначим U_1 ультрастепень (= расширение) U_0 и $\iota_1 : U_0 \to U_1$ — каноническое вложение U_0 в U_1. Повторяя этот процесс, обозначим $U_{n+1} := {U_n}^{\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(U_0)}/\mathscr{F}$ и $\iota_{n+1} : U_n \to U_{n+1}$ — каноническое вложение в ультрастепень и будем считать U_n вложенным в U_{n+1} (отождествлением U_n и $\iota_{n+1}(U_n)$). Пусть, далее, $U = \cup_{n \in \mathbb{Z}} U_n$ и $\varepsilon = \cup_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_n$, где $\varepsilon_{n+1} = \iota_n \circ \varepsilon_n \circ \iota_{n+1}$ — интерпретация отношения принадлежности. Пусть, далее, $* : U_0 \to U$ — каноническое вложение U_0 в U. Предикат $\mathrm{St}(\cdot)$ трактуем как принадлежность

к $\{*u : u \in U_0\}$. Поскольку $x \in V^\alpha \to (\exists\, \beta \in \alpha) x \in V^\beta \to \mathscr{P}(x) \in V^\beta$, можно сделать вывод о том, что в U удовлетворена аксиома стандартизации. Справедливость принципов переноса и идеализации обоснована теоремой Лося (см. следствие 2). Тем самым в $(U,\ \varepsilon)$ удовлетворены $\psi_1^s, \dots, \psi_m^s$ и принципы IST. Это означает, что $\varphi^U(*x_1, \dots, *x_n)$ и $\varphi^{V^\alpha}(x_1, \dots, x_n)$. Стало быть, φ удовлетворена в универсуме фон Неймана. $\triangleright$

3.7. Приведенная теорема означает, что внутренние теоремы теории внутренних множеств являются теоремами теории Цермело — Френкеля. Иначе говоря, при доказательстве «стандартных» теорем о множествах из универсума фон Неймана мы вправе пользоваться формализмом IST с той же степенью надежности, которую мы имеем при работе в рамках теории ZFC. Не следует забывать при этом, что теория ZFC обосновывается, в конечном счете, своей практической «непогрешимостью» и содержательной оправданностью.

3.8. При обдумывании смысла формального выражения аксиом теории внутренних множеств бросается в глаза несколько громоздкая запись принципа идеализации. В то время как приведенные уточнения правил переноса и стандартизации вполне адекватно отражают выдвинутые ранее наивные концепции, место указанной формулировки принципа идеализации вызывает некоторые затруднения. Поэтому, прежде всего, установим, что принцип идеализации 3.5 (2) гарантирует наличие нестандартных элементов.

3.9. *Существует конечное внутреннее множество, среди элементов которого встречается каждое стандартное множество.*

$\triangleleft$ Рассмотрим следующую формулу: $\varphi := (x$ конечно $\wedge (y \in x)$. Отметим, что $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$. Ясно, что для каждого стандартного конечного z найдется такое x, что при всех $y \in z$ будет $\varphi(x, y)$. В качестве такого x можно взять самое z. Остается воспользоваться принципом идеализации. $\triangleright$

3.10. При применении принципа идеализации полезно иметь в виду, что стандартные конечные множества — это в точности те множества, каждый элемент которых стандартен. Поучительно рассмотреть формальный вывод этого факта, основанный на принципе идеализации.

3.11. *Для внутреннего множества A выполнено*

$$A = {}^{\circ}A \leftrightarrow (A \text{ стандартно}) \wedge (A \text{ конечно}).$$

$\lhd$ Составим формулу $\varphi := x \in A \wedge x \neq y$. Бесспорно, $\varphi \in$ (ZFC). Тогда по принципу идеализации

$$(\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)(\exists\, x)(\forall\, y \in z)\varphi(x, y, A) \leftrightarrow (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y) x \in A \wedge x \neq y \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, x \in A)(x \text{ — нестандартное}) \leftrightarrow A \setminus {}^{\circ}A \neq \varnothing.$$

Иными словами, получаем

$$A = {}^{\circ}A \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st\,fin}} z)(\forall\, x)(\exists\, y \in z) x \notin A \vee x = y \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st\,fin}} z)(\forall\, x \in A)(\exists\, y \in z) x = y \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st\,fin}} z) A \subset z. \ \rhd$$

3.12. *Пусть* X, Y *— стандартные множества и* $\varphi = \varphi(x, y, z)$ *— некоторая формула* IST. *Справедливо правило введения стандартных функций* (= принцип конструирования):

$$(\forall^{\mathrm{st}} x)(\exists^{\mathrm{st}} y)(x \in X \to y \in Y \wedge \varphi(x, y, z)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} y(\,\cdot\,))(\forall^{\mathrm{st}} x)(y(\,\cdot\,) \text{ — функция из } X \text{ в } Y \wedge$$
$$\wedge (x \in X \to \varphi(x, y(x), z))).$$

$\lhd$ Рассмотрим стандартизацию $\bar{F}(x) := {}^{*}\{y \in Y : \varphi(x, y, z)\}$. Еще раз применяя 3.5 (2), образуем стандартное множество

$$F := {}^{*}\{(x, A) \in X \times \mathscr{P}(Y) : \bar{F}(x) = A\}$$

(здесь мы используем стандартность $\mathscr{P}(Y)$, обеспеченную предположением о стандартности Y). По условию имеем $(\forall^{\mathrm{st}} x \in X)\bar{F} \neq \varnothing$. При этом $F(x) = \bar{F}(x)$ по определению F. Итак,

$$(\forall^{\mathrm{st}} x \in X) F(x) \neq \varnothing \to (\forall\, x \in X) F(x) \neq \varnothing$$

в силу принципа переноса. Используя аксиому выбора, можно заключить:

$$(\exists\, y(\,\cdot\,))(y(\,\cdot\,) \text{ — функция из } X \text{ в } Y) \wedge (\forall\, x \in X)(y(x) \in F(x)).$$

По принципу переноса выводим, что имеется стандартная функция $y(\,\cdot\,)$, определенная на X со значениями в Y, для которой $y(x) \in F(x)$ при всех $x \in X$. Вновь учитывая определение F, мы видим: $y(\,\cdot\,)$ — искомая функция. $\rhd$

3.13. В дальнейшем (как и прежде) удобно пользоваться некоторыми символическими записями установленных правил, сознательно допуская при этом известные отступления от сделанных соглашений. Так, способы введения стандартных функций из 3.12 удобно переписывать в виде:

(1) $(\forall^{\mathrm{st}} x)(\exists^{\mathrm{st}} y)\varphi(x, y) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} y(\,\cdot\,))(\forall^{\mathrm{st}} x)\varphi(x, y(x))$,

(2) $(\exists^{\mathrm{st}} x)(\forall^{\mathrm{st}} y)\varphi(x, y) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} y(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st}} x)\varphi(x, y(x))$,

где $\varphi \in$ (IST), т. е. произвольная формула IST. Иначе говоря, мы опускаем указания на возможное наличие свободных переменных в φ и на необходимое допущение «ограниченности», состоящее в том, что x и y считаются пробегающими заданные стандартные множества. Точно так же, если $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ и $\psi = \psi(y_1, \dots, y_n)$, то мы будем писать $\varphi \leftrightarrow \psi$ в случае, когда

$$(\forall^{\mathrm{st}} x_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}} x_n)(\forall^{\mathrm{st}} y_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}} y_n)\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(y_1, \dots, y_n),$$

и говорить об эквивалентности формул φ и ψ (хотя если одна из формул φ или ψ внешняя, формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и $\psi(y_1, \dots, y_n)$ могут не быть равносильными при некоторых наборах переменных!). Используя новые возможности, принцип переноса мы будем сокращенно изображать символами:

(3) $(\forall^{\mathrm{st}} x)\varphi(x) \leftrightarrow (\forall\, x)\varphi(x)$,

(4) $(\exists^{\mathrm{st}} x)\varphi(x) \leftrightarrow (\exists\, x)\varphi(x)$,

всегда имея в виду, что формула φ в такой записи должна быть внутренней: $\varphi \in$ (ZFC). Полезно привести здесь же элементарные правила:

(5) $(\forall\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y)\varphi(x, y) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} y)(\forall\, x)\varphi(x, y)$,

(6) $(\exists\, x)(\exists^{\mathrm{st}} y)\varphi(x, y) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} y)(\exists\, x)\varphi(x, y)$,

справедливые для любой формулы φ, и новые записи принципа идеализации:

(7) $(\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)(\exists\, x)(\forall\, y \in z)\varphi(x, y) \leftrightarrow (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y)\varphi(x, y)$,

(8) $(\exists^{\mathrm{st\,fin}} z)(\forall\, x)(\exists\, y \in z)\varphi(x, y) \leftrightarrow (\forall\, x)(\exists^{\mathrm{st}} y)\varphi(x, y)$,

относящиеся, разумеется, только к внутренним формулам $\varphi \in$ (ZFC).

3.14. Приведенные правила дают возможность перевода многих (но, разумеется, не всех) понятий и предложений нестандартного анализа в равносильные математические определения и утверждения, не апеллирующие к стандартности. Иначе говоря, формулы IST, выражающие «нечто необычное» о стандартных объектах, можно преобразовать в эквивалентные формулы ZFC, представляющие обычные ма-

тематические записи рассматриваемых выражений. Процедура, приводящая к описанному результату, называется *алгоритмом Нельсона*. Частями такого процесса являются правила 3.13(1)–3.13(8). Качественно говоря, суть алгоритма «дешифровки» состоит в том, что, вводя стандартные функции, привлекая идеализацию и перестановки кванторов, мы редуцируем утверждение к форме, приспособленной для переноса. В конечном счете перевод состоит в приведении формулы к виду, пригодному для элиминации — исключения — внешнего понятия стандартности. Необходимо подчеркнуть, что во всех случаях фактического использования каких-либо из соотношений 3.13, оговоренные выше требования, обеспечивающие законность их применения, должны быть заранее удовлетворены.

3.15. Алгоритм Нельсона состоит из следующих шагов:

(1) формула нестандартного анализа выписывается как формула IST, т. е. осуществляется дешифровка всех сокращений;

(2) имеющаяся формула IST приводится к пренексной нормальной форме

$$(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)\varphi(x_1,\dots,x_n),$$

где φ — формула ZFC, а $Q_k := \forall \vee \exists \vee \forall^{\mathrm{st}} \vee \exists^{\mathrm{st}}$ для $k := 1,\dots,n$;

(3) если Q_n — *«внутренний» квантор*, т. е. $\forall$ или $\exists$, то полагают $\varphi := (Q_nx_n)\ \varphi(x_1,\dots,x_n)$ и переходят к шагу (2);

(4) если Q_n — *«внешний» квантор*, т. е. $\forall^{\mathrm{st}}$ или $\exists^{\mathrm{st}}$, то отыскивают первый внутренний квантор при просматривании кванторной приставки $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)$ справа налево;

(5) если при шаге (4) внутренних кванторов не встретилось, то на основании 3.13(3) и 3.13(4) заменяют квантор Q_n на соответствующий внутренний квантор и переходят к шагу (2) (т. е. последовательно справа налево «стирают» верхний индекс $^{\mathrm{st}}$ над каждым квантором);

(6) пусть Q_m — первый встретившийся внутренний квантор. Допустим, что Q_{m+1} — внешний квантор того же типа, что и Q_m (т. е. $Q_m = \forall$ и $Q_{m+1} = \forall^{\mathrm{st}}$ или $Q_m = \exists$ и $Q_{m+1} = \exists^{\mathrm{st}}$). Используем правила 3.13(5) и 3.13(6) и возвращаемся к (2);

(7) если все кванторы $Q_{m+1},\dots,Q_n$ имеют один и тот же тип, то применяем принцип идеализации в форме 3.13(7) или 3.13(8) и переходим к (2);

(8) если происходит смена кванторов, т. е. Q_{p+1} имеет тот же тип, что и Q_m, а все кванторы $Q_{m+1}, \dots, Q_p$ — другого — противоположного — типа, то можно применить 3.13(1) или 3.13(2), считая $x := (x_{m+1}, \dots, x_p$, $y := x_{p+1}$. После этого переходим к (2).

3.16. Следует иметь в виду, что одно и то же содержательное утверждение можно выразить по-разному, в том числе и в форме, абсолютно недоступной для восприятия. В этой связи при практическом применении алгоритма Нельсона необходимо учитывать конкретные возможности сокращения процедуры «протаскивания наружу внешних кванторов». В частности, не всегда целесообразно рассматривать формулы, приведенные с самого начала к пренексной нормальной форме (т. е. доводить до конца шаг (2) алгоритма).

3.17. *Примеры.*

(1) *В нестандартном анализе справедлив принцип внешней индукции, т. е. для произвольной формулы* $\varphi \in (\mathrm{IST})$ *выполнено*:

$$(\varphi(1) \wedge ((\forall\, n \in {}^{\circ}\mathbb{N})\varphi(n) \to \varphi(n+1))) \to (\forall\, n \in {}^{\circ}\mathbb{N})\varphi(n).$$

$\lhd$ Применять к формальной записи исследуемого принципа алгоритм Нельсона прямо нельзя, так как формула φ может быть внешней. В этой связи рассмотрим стандартизацию $A := \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}$. Ясно, что $1 \in A$ и для каждого стандартного $n \in A$ будет $n+1 \in A$. Нужно установить, что ${}^{\circ}\mathbb{N} \subset A$. Выпишем требуемую формулу и применим к ней алгоритм Нельсона:

$$(1 \in A \wedge (\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(n \in A \to (n+1) \in A)) \to {}^{\circ}\mathbb{N} \subset A \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} m)\ (\forall^{\mathrm{st}} n)(m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge 1 \in A \wedge n \in A \to (n+1) \in A) \to$$
$$\to m \in A \leftrightarrow (1 \in A \wedge (\forall\, n \in \mathbb{N})(n \in A \to (n+1) \in A)) \to \mathbb{N} \subset A.\ \rhd$$

(2) *Сумма бесконечно малых бесконечно мала.*

$$\lhd\ \ (\forall\, s \in \mathbb{R})\,(\forall\, t \in \mathbb{R})\ (s \approx 0 \wedge t \approx 0 \to s + t \approx 0) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, s \in \mathbb{R})\,(\forall\, t \in \mathbb{R})\,(s \approx 0 \wedge t \approx 0 \to (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\ |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\,(\forall\, s \in \mathbb{R})\,(\forall\, t \in \mathbb{R})\ ((\forall^{\mathrm{st}} \delta_1 > 0) \wedge$$
$$\wedge (\forall^{\mathrm{st}} \delta_2 > 0)\ (|s| < \delta_1 \wedge |t| < \delta_2 \to |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\,(\forall\, s \in \mathbb{R})\,(\forall t \in \mathbb{R})\,(\exists^{\mathrm{st}} \delta_1 > 0)\ (\exists^{\mathrm{st}} \delta_2 > 0)\ (|s| < \delta_1 \wedge$$

$$\wedge|t| < \delta_2 \to |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon)\,(\forall\, s)\,(\forall\, t)\,(\exists^{\mathrm{st}}\delta_1)\,(\exists^{\mathrm{st}}\delta_2)\,(\varepsilon > 0 \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge \delta_2 > 0 \wedge |s| < \delta_1 \wedge |t| < \delta_2 \to |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon)\,(\forall\, s)\,(\forall\, t)\,(\exists^{\mathrm{st}}\delta_1)\,(\exists^{\mathrm{st}}\delta_2)\,(|s| < \delta_1 \wedge |t| < \delta_2 \to |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon)\,(\exists^{\mathrm{st\,fin}}\Delta_1)\,(\exists^{\mathrm{st\,fin}}\Delta_2)\,(\forall\, s)\,(\forall\, t)\,(\exists\,\delta_1 \in \Delta_1)\,(\exists\,\delta_2 \in \Delta_2)$$
$$(|s| < \delta_1 \wedge |t| < \delta_2 \to |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon)\,(\exists^{\mathrm{st}}\delta_1)\,(\exists^{\mathrm{st}}\delta_2)\,(\forall\,|s| < \delta_1)\,(\forall\,|t| < \delta_2)\ |s+t| \leq \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\,\varepsilon > 0)\,(\exists\,\delta > 0)\,(\forall\,|s| < \delta)\,(\forall\,|t| < \delta)\ |s+t| \leq \varepsilon. \ \rhd$$

(3) Лемма Робинсона. *Пусть a_n — внутренняя последовательность чисел и $a_n \approx 0$ для всех $n \in {}^\circ\mathbb{N}$. Тогда найдется $N \approx +\infty$, для которого $a_n \approx 0$ при любом $n \leq N$.*

$\lhd$ Применим алгоритм Нельсона к требуемому заключению

$$(\exists\, N \approx +\infty)\,(\forall\, n \leq N)\ a_n \approx 0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, N \in \mathbb{N})\,((\forall^{\mathrm{st}} m \in \mathbb{N}) N \geq m) \wedge (\forall\, n \in \mathbb{N})\,(n \leq N \to$$
$$\to (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon > 0)\ |a_n| < \varepsilon) \leftrightarrow (\exists\, N)\,(\forall^{\mathrm{st}} m)\,(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon)$$
$$(\forall\, n)\ (N \geq m \wedge (n \leq N \to |a_n| < \varepsilon)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\{m_1, \ldots, m_p\})\,(\forall^{\mathrm{st}}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\})\,(\exists\, N)\,(\forall\, k := 1, \ldots, p)$$
$$N \geq m_k \wedge n \leq N \to |a_n| < \varepsilon_k) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} m)\,(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon)\,(\exists\, N)\ (N \geq m \wedge (n \leq N \to |a_n| < \varepsilon)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} m)\,(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon)\ (m \in \mathbb{N} \wedge \varepsilon > 0 \to |a_m| < \varepsilon).$$

Теперь применим алгоритм Нельсона к условию рассматриваемого утверждения:

$$(\forall\, n \in {}^\circ\mathbb{N})\ a_n \approx 0 \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} n)\,(n \in \mathbb{N} \to (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon > 0)\ |a_n| < \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} n)\,(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon)\ (n \in \mathbb{N} \wedge \varepsilon > 0 \to |a_n| < \varepsilon).$$

Таким образом, посылка и заключение эквивалентны. $\rhd$

(4) Принцип единственности. *Предположим, что выполнена гипотеза «стандартности антуража». Тогда каждый объект, определенный нестандартной теоремой существования и единственности, является стандартным.*

Иными словами, если $y,\ V \in V^S$ и $\varphi = \varphi(x,\ y)$ — внешняя формула IST, *то*

$$((\exists!\ \overline{x} \in V)\ \varphi(\overline{x},\ y)) \to \mathrm{St}(\overline{x}).$$

$\lhd$ Используя алгоритм Нельсона, формулу φ можно преобразовать к виду

$$\varphi(x,\ y) := (\forall^{\mathrm{St}} u)(\exists^{\mathrm{St}} v)\ \psi(x,\ u,\ v,\ y),$$

где $\psi \in (\mathrm{ZFC})$.

В частности, по принципу конструирования

$$(\exists^{\mathrm{St}} \overline{v}\,(\cdot))(\forall^{\mathrm{St}} u)\ \psi(\overline{x},\ u,\ \overline{v}(u),\ y). \tag{1}$$

Помимо этого,

$$(\forall\, z)(\forall^{\mathrm{St}} u\ \exists^{\mathrm{St}} v\ \psi(z,\ u,\ v,\ y) \to z = \overline{x}).$$

Применяя к последней формуле алгоритм Нельсона, выводим

$$\forall^{\mathrm{St}} v\,(\cdot)(\exists^{\mathrm{St\,fin}} U)\ \forall\, z\ (((\forall\, u \in U)\psi(z,\ u,\ v(u),\ y)) \to z = \overline{x}. \qquad (2))$$

Обозначим $\overline{U}$ стандартное конечное множество, отвечающее в силу (2) функции $\overline{v}(\cdot)$, взятой в соответствии с (1).

Видно, что $(\forall\, u \in \overline{U})\psi(x,\ u,\ \overline{v}(u),\ y)$. Отсюда заключаем, что $(\exists\, z)(\forall\, u \in \overline{U})\psi(z,\, u,\, \overline{v}(u),\, y)$. По принципу переноса

$$(\exists^{\mathrm{St}} z)(\forall\, u \in \overline{U})\psi(z,\ u,\ v(u),\ y).$$

На основании (2) заключаем $z = \overline{x}$, т. е. $\mathrm{St}(\overline{x})$. $\rhd$

4. Теории внешних множеств

Основные установки нестандартного анализа имеют адекватное отображение в формальном аппарате теории внутренних множеств Нельсона. Теорема Поуэлла позволяет считать IST техникой исследования универсума фон Неймана. В то же время наличие внешних объектов полностью подрывает широко распространенное представление о том, что формализм Цермело — Френкеля доставляет достаточную оперативную свободу с точки зрения наивной теории множеств. Оставаясь в рамках IST, мы не в состоянии даже спросить, например: «А нельзя ли выделить такие числа, чтобы каждый элемент $\mathbb{R}$ однозначно записывался в виде некоторой их комбинации со стандартными коэффициентами — ведь $\mathbb{R}$ явно можно мыслить себе векторным пространством над ${}^{\circ}\mathbb{R}$?» Количество подобных недопустимых вопросов, имеющих бесспорное математическое содержание, столь велико,

что потребность расширения рамок IST переходит в сферу жизненной необходимости.

Априорные запреты формулировать проблемы — это наложение произвольных ограничений на разум. Введение ad hoc догмата — «ясно выраженное запрещение думать» (по меткому выражению Л. Фейербаха) — путь, заведомо неприемлемый при поисках истины. Практическое решение задачи возвращения в «канторов рай» состоит, в частности, в нахождении формализма, позволяющего работать с внешними по отношению к универсуму фон Неймана множествами привычными математическими средствами. Мы ознакомимся сейчас с аксиоматическими подходами к изучению внешних множеств.

Первый вариант нужного формализма принадлежит К. Хрбачеку , предложившему соответствующую теорию множеств EXT. Близкую разновидность — так называемую теорию NST — построил затем Т. Каваи. Упомянутые нестандартные теории множеств, содержательно говоря, показывают, что мир внешних множеств устроен с точки зрения математического прагматика-филистера столь же хорошо, как и универсум наивных множеств. Иначе говоря, в нем допустимы классические теоретико-множественные операции, включая выделение подмножеств с помощью свойств (аксиомы свертывания) и полное упорядочение произвольных множеств (аксиома выбора). В то же время среди внешних множеств есть весь набор стандартных и нестандартных внутренних множеств, удовлетворяющих вариантам принципов переноса, идеализации и стандартизации, близким к их интуитивным формулировкам. Выражаясь строже, можно сказать, что внутренние множества включают в число внешних по определению.

С позиций реальных потребностей существующего (стандартного и нестандартного) математического анализа теории EXT и NST предоставляют практически одинаковые возможности, которых заведомо и с лихвой хватает для обоснованного использования употребительных аналитических конструкций. Необходимо, однако, внимательно и с должной критичностью проштудировать детали приводимых аксиоматик теории внешних множеств, чтобы избежать иллюзий, сопутствующих эйфории вседозволенности.

Так, стоит подчеркнуть, что мир внешних множеств не является универсумом фон Неймана (аксиома фундирования отсутствует и это обстоятельство существенно). Кроме того, точные формулировки принципов нестандартного анализа в EXT имеют технические отличия от их аналогов в IST. Поэтому EXT не является расширением

теории Нельсона IST, хотя EXT служит консервативным расширением ZFC. Указанный пробел восполнил Т. Каваи. Его теория NST обогащает формальный аппарат IST и вместе с этим служит надежной техникой изучения ZFC, наряду с IST и EXT.

4.1. Алфавит формальной теории EXT получается добавлением к алфавиту IST одного-единственного нового символа — символа одноместного предиката Int, выражающего свойство быть внутренним множеством. Иначе говоря, в рассмотрение допускаются тексты, содержащие записи вида $\mathrm{Int}(x)$, или, более развернуто, «x — внутреннее», или, наконец, «x — внутреннее множество». Интуитивно считают, что содержательной областью изменения переменных EXT является *универсум всех внешних множеств* $\mathbf{V}^{\mathrm{Ext}} := \{x : x = x\}$, в котором лежат как *мир стандартных множеств* $\mathbf{V}^{\mathrm{St}} := \{x \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}} : \mathrm{St}(x)\}$, так и расширяющий его *мир внутренних множеств* $\mathbf{V}^{\mathrm{Int}} := \{x \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}} : \mathrm{Int}(x)\}$.

4.2. Соглашения в EXT аналогичны принятым в ZFC и IST. В частности, конечно же, мы будем и дальше использовать «классификаторы» — фигурные скобки — в EXT (см. 3.3) и привычные знаки для обозначения простейших действий над классами внешних множеств. Следуя прежним образцам, для формулы φ из EXT (символически $\varphi(\mathrm{EXT})$) условимся писать:

$$(\forall^{\mathrm{st}} x)\varphi := (\forall\, x)(\mathrm{St}(x) \to \varphi) := (\forall\, x \in \mathbf{V}^{\mathrm{St}})\varphi,$$
$$(\exists^{\mathrm{Int}}\, x)\varphi := (\exists\, x)(\mathrm{Int}(x) \wedge \varphi) := (\exists\, x \in \mathbf{V}^{\mathrm{Int}})\varphi.$$

Подобные правила, понятные из контекста, в дальнейшем используются без особых разъяснений. Помимо этого, нам потребуется специальное новое понятие и соответствующее обозначение. Мы скажем, что внешнее множество A имеет *стандартный размер* (символически $A \in V^{\mathrm{size}}$), если существуют стандартное множество a и внешняя функция f такие, что $(\forall\, X)\ (X \in A \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} x \in a) X = f(x))$.

4.3. Пусть $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ — некоторая формула EXT, являющаяся формулой ZFC (т. е. не содержащая символов St и Int). Заменим каждый квантор Q в записи φ на Q^{st}. Полученную формулу обозначают φ^{St} и называют *стандартизацией* φ или *релятивизацией* φ на $\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$. Аналогично, заменяя каждый квантор Q на Q^{Int}, получаем формулу φ^{Int}, называемую *интернализацией* φ или *релятивизацией* φ на $\mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$. Подчеркнем, что со свободными переменными в φ при этом ничего

не происходит. Указанное правило распространяют и на сокращения. Например, для внешних множеств A и B пишем:

$$A \subset {}^{\mathrm{St}}B := (\forall^{\mathrm{st}} x)(x \in A \to x \in B) :=$$
$$:= ((\forall\, x)(x \in A \to x \in B))^{\mathrm{St}} := (A \subset B)^{\mathrm{St}};$$
$$A \in {}^{\mathrm{Int}}B := (A \in B)^{\mathrm{Int}} := A \in B := A \in {}^{\mathrm{St}}B := (A \in B)^{\mathrm{St}}.$$

4.4. Специальные аксиомы EXT делятся на три группы. Первую составляют *правила образования внешних множеств*, вторую — *аксиомы связи миров* множеств $\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$, $\mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$ и $\mathbf{V}^{\mathrm{Ext}}$ и, наконец, третью группу образуют *принципы переноса, идеализации и стандартизации.*

4.5. В EXT выполнены законы *теории множеств Цермело* (теории Z), т. е. приняты следующие аксиомы конструирования внешних множеств:

(1) аксиома экстенсиональности —

$$(\forall\, A)(\forall\, B)(A \subset B \wedge B \subset A) \leftrightarrow A = B;$$

(2) аксиома существования пары —

$$(\forall\, A)(\forall\, B)\{A, B\} \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}};$$

(3) аксиома объединения —

$$(\forall\, A) \cup A \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}};$$

(4) аксиома множества подмножеств —

$$(\forall\, A)\mathscr{P}(A) \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}};$$

(5) схема аксиом свертывания —

$$(\forall\, A)(\forall\, X_1)\dots(\forall\, X_n)\{X \in A : \varphi(X, X_1, \dots, X_n)\} \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}}$$

для произвольной формулы $\varphi \in$ (EXT);

(6) аксиома полного упорядочения — *каждое внешнее множество может быть вполне упорядочено.*

Последнее свойство — теорема Цермело — обеспечивает, как известно (ср. 2.10), аксиому выбора в обычной мультипликативной форме или в форме леммы Куратовского — Цорна. Отметим здесь же, что в число аксиом Z обычно включается аксиома бесконечности, которая в EXT появится ниже.

4.6. Вторая группа аксиом EXT содержит такие утверждения:

(1) принцип моделирования — *мир внутренних множеств* $\mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$ — *это универсум фон Неймана*, т. е. для каждой аксиомы φ теории Цермело — Френкеля интернализация φ^{Int} — аксиома EXT;

(2) аксиома транзитивности — $(\forall\, x \in \mathbf{V}^{\mathrm{Int}})\ x \subset \mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$, *т. е. внутренние множества составлены только из внутренних элементов*;

(3) аксиома вложения — $\mathbf{V}^{\mathrm{St}} \subset \mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$, *т. е. стандартные множества являются внутренними.*

4.7. Третья группа аксиом EXT такова:

(1) принцип переноса —

$$(\forall^{\mathrm{st}} x_1)\ldots(\forall^{\mathrm{st}} x_n)\varphi^{\mathrm{St}}(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{Int}}(x_1,\ldots,x_n)$$

для каждой формулы $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$;

(2) принцип идеализации —

$$\begin{gathered}(\forall^{\mathrm{Int}}\, x_1)\ldots(\forall^{\mathrm{Int}} x_n)(\forall\, A \in V^{\mathrm{size}})(((\forall^{\mathrm{fin}} z) z \subset A \to \\ \to (\exists^{\mathrm{Int}}\, x)(\forall\, y \in z)\varphi^{\mathrm{Int}}(x,y,x_1,\ldots,x_n)) \to \\ \to (\exists^{\mathrm{Int}}\, x)(\forall^{\mathrm{Int}}\, y \in A)\varphi^{\mathrm{Int}}(x,y,x_1,\ldots,x_n))\end{gathered}$$

для произвольной $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$;

(3) принцип стандартизации —

$$(\forall\, A)(\exists^{\mathrm{st}} a)(\forall^{\mathrm{st}} x)(x \in A \leftrightarrow x \in a),$$

иначе говоря, для любого внешнего множества A существует его стандартизация $^*A$.

4.8. Простейшим следствием приведенных аксиом является *абсолютность ограниченных формул теории* ZFC. Точнее говоря, для $\varphi \in (\Sigma_0)$ будет

$$\begin{gathered}(\forall^{\mathrm{Int}}\, x_1)\ldots(\forall^{\mathrm{Int}}\, x_n)\varphi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{Int}}(x_1,\ldots,x_n), \\ (\forall^{\mathrm{st}} x_1)\ldots(\forall^{\mathrm{st}} x_n)\ \varphi^{\mathrm{St}}(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{Int}}(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1,\ldots,x_n).\end{gathered}$$

Значит, любое «ограниченное» свойство стандартных множеств можно выражать как в терминах внешних, так и в терминах внутренних или же стандартных элементов. Например, $x \subset y \leftrightarrow x \subset {}^{\mathrm{St}}y \leftrightarrow x \subset {}^{\mathrm{Int}}y$ для стандартных множеств x и y.

4.9. Теорема Хрбачека. *Теория* EXT *служит консервативным расширением* ZFC, *т. е. для каждой* $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ *верно*

$$(\varphi - \textit{ теорема } \mathrm{ZFC}) \leftrightarrow (\varphi^{\mathrm{Int}} - \textit{ теорема } \mathrm{EXT}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\varphi^{\mathrm{St}} - \textit{ теорема } \mathrm{EXT}).$$

Доказательство этой теоремы весьма громоздко и потому выходит за пределы текущего изложения.

4.10. При осмысливании изложенной аксиоматики полезно прежде всего дать себе отчет в том, что теория EXT не служит расширением теории IST. Иными словами, мир внутренних множеств $\mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$ не является моделью теории внутренних множеств Нельсона, поскольку принципы идеализации и стандартизации в этих теориях имеют различные формулировки. В универсуме $\mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$ стандартизация допускается при существенно менее ограничительных предположениях, чем в IST. Так, для любой $\varphi \in (\mathrm{IST})$ и произвольного $A \in \mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$ можно организовать ${}^*\{x \in A : \varphi(x)\}$, ибо $\{x \in A : \varphi(x)\}$ — внешнее подмножество A. В IST при этом, вообще говоря, нужно дополнительно требовать стандартность A — ведь стандартизовать множество, содержащее все стандартные элементы, в IST не удается. В EXT, в свою очередь, совокупность всех стандартных элементов $\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$ не попадает вообще ни в одно внешнее (и тем более внутреннее) множество. Действительно, справедливо следующее утверждение.

4.11. *Не существует внешнего множества — элемента* $\mathbf{V}^{\mathrm{Ext}}$, *в число членов которого попадают все стандартные множества.*

$\lhd$ Предположим противное, т. е. пусть для некоторого $X \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}}$ верно, что $\mathbf{V}^{\mathrm{St}} \subset X$. По аксиоме свертывания 4.5 (5) для формулы $\varphi(x) = \mathrm{St}(x)$ заключаем, что $\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$ — это внешнее множество, т. е. $(\exists\, Y)(\forall\, Z)(Z \in Y \leftrightarrow \mathrm{St}(Z))$. Рассмотрим стандартизацию ${}^*\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$. Тогда ${}^*\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$ оказывается стандартным конечным множеством, содержащим каждое стандартное множество. Последнее, очевидно, невозможно. $\rhd$

4.12. Приведенное предложение показывает, что принцип идеализации в EXT («релятивизированный» на $\mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$) не только по форме, но и по существу отличается от своего аналога в IST. В то же время указанные отличия не следует абсолютизировать. Вложить точный смысл в сделанное заявление помогают следующие факты.

4.13. *Имеют место утверждения*:

(1) *внешние натуральные числа и стандартные натуральные числа совпадают*;

(2) *конечное внешнее множество стандартно в том и только в том случае, если оно состоит исключительно из стандартных элементов*;

(3) *для произвольного внешнего множества* A *его стандартное ядро* $^\circ A := \{a \in A : \mathrm{St}(a)\}$ — *это множество стандартного размера*;

(4) *каждое бесконечное внутреннее множество содержит нестандартный элемент.*

$\lhd$ (1) В силу принципа индукции по стандартным натуральным числам (который, очевидно, верен в EXT) для множества $\mathbb{N}^{\mathrm{Ext}}$ внешних натуральных чисел имеем $\mathbb{N}^{\mathrm{Ext}} \supset {}^\circ\mathbb{N}$. Кроме того, ясно, что ${}^*\varnothing = \varnothing$ и ${}^*1 = {}^*\{\varnothing\} = \{\varnothing\} = 1$. Итак, в силу принципа индукции по внешним натуральным числам (обычная теорема Z) $\mathbb{N}^{\mathrm{Ext}} \subset {}^\circ\mathbb{N}$. Окончательно ${}^\circ\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathrm{Ext}}$.

(2) Стандартное множество — внутреннее. Значит, с учетом 4.6 (2) можно прибегнуть к несложной аргументации, оставленной читателю в качестве упражнения.

(3) Пусть ${}^*A$ — стандартизация A. Положим $f(a) := a$ для $a \in {}^\circ A$. Очевидно, $(\forall\, X)\,(X \in {}^\circ A \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} x \in {}^*A)\ f(x) = X)$.

(4) Обозначим A рассматриваемое внутреннее множество. В силу (3) ${}^\circ A$ имеет стандартный размер. Итак, мы можем применить принцип идеализации при $\varphi(x,y) := y \neq x \wedge x \in A$. Для каждого конечного $z \subset {}^\circ A$ безусловно $(\exists\, x \in A)\,(\forall\, y \in z)\ x \neq y$, ибо множество A бесконечно. Окончательно $(\exists\, x \in A)\,(\forall\, y \in {}^\circ A)\ x \neq y$. $\rhd$

4.14. В связи с 4.13 и 4.9 удобно выделить вариант теории внутренних множеств INT, являющийся консервативным расширением ZFC и такой, что EXT, в свою очередь, — расширение INT. Отличие INT от теории IST в принятии принципов идеализации и стандартизации в следующих формах:

(1) $(\forall\, A)(\forall\, x_1)\ldots(\forall\, x_n)((\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)z \subset A(\exists\, x)(\forall\, y \in z)$

$$\varphi(x,y,x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y \in A)\varphi(x,y,x_1,\ldots,x_n)$$

для всякой $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$;

(2) $(\forall\, A)\,(\exists^{\mathrm{st}}\, {}^*A)\,(\forall^{\mathrm{st}} x)\ (x \in A \leftrightarrow x \in {}^*A \wedge \varphi(x))$
при произвольной $\varphi \in (\mathrm{INT})$.

Полезно отметить, что в INT в своих существенных частях действует алгоритм Нельсона.

4.15. Перейдем теперь к описанию теории NST в варианте, наиболее близком к EXT и IST (фактически Т. Каваи построил несколько

отличную систему, позволяющую рассматривать классы теории фон Неймана — Гёделя — Бернайса в качестве внешних множеств).

4.16. Алфавит и соглашения формальной теории NST совпадают с алфавитом и соглашениями теории EXT. Более того, в NST принимаются все аксиомы конструирования внешних множеств, все аксиомы связи миров множеств и принцип переноса теории EXT. Отличия NST от EXT лежат в способах формулирования принципов стандартизации и идеализации и в следующем дополнительном постулате.

4.17. Аксиома приемлемости — $\mathbf{V}^{\mathrm{st}} \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}}$, *т. е. мир стандартных множеств теории Каваи — это внешнее множество.*

В связи с этой аксиомой внешнее множество A в NST называют *множеством приемлемого размера* и пишут $A \in \mathbf{V}^{\mathrm{a-size}}$, если найдется внешняя функция f, отображающая $\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$ на A. Подчеркнем, что $\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$ имеет приемлемый размер. Отметим здесь же, что в дальнейшем запись a-$\mathrm{fin}(A)$ означает, что имеется взаимно однозначное внешнее отображение A на некоторое стандартное конечное множество.

4.18. Принцип стандартизации *в* NST *гласит:*

$$(\forall\, A)((\exists^{\mathrm{st}} X) A \subset X \to (\exists^{\mathrm{st}}\, {}^*\!A)(\forall^{\mathrm{st}} x)(x \in A \leftrightarrow x \in {}^*\!A)).$$

Иными словами, в NST можно стандартизовать только внешние подмножества стандартных множеств, а не произвольные внешние множества, как в EXT.

4.19. Принцип идеализации *в* NST *состоит в следующем:*

$$\begin{aligned}(\forall^{\mathrm{Int}}\, x_1) \ldots (\forall^{\mathrm{Int}}\, x_n)\, (\forall\, A \in \mathbf{V}^{\mathrm{a-size}})\, (((\forall z)\ z \subset A \wedge a = \mathrm{fin}(z) \to \\ \to (\exists^{\mathrm{Int}}\, x)\, (\forall\, y \in z)\ \varphi^{\mathrm{Int}}(x, y, x_1, \ldots, x_n)) \to \\ \to (\exists^{\mathrm{Int}}\, x)\, (\forall^{\mathrm{Int}}\, y \in A)\ \varphi^{\mathrm{Int}}(x, y, x_1, \ldots, x_n))\end{aligned}$$

для произвольной формулы $\varphi \in$ (ZFC).

4.20. Теорема Каваи. *Теория* NST *является консервативным расширением* ZFC.

$\lhd$ Доказательство повторяет схему рассуждений теоремы Поуэлла с привлечением 2.20. $\rhd$

4.21. Вновь обратим внимание на то, что мир внутренних множеств V^{Int} в универсуме NST с релятивизированными принципами стандартизации, идеализации и переноса служит моделью IST. Иными словами, технические средства, представляемые NST для работы с

внешними множествами, возникающими в IST, можно без опаски использовать для получения утверждений «стандартной» математики. Отметим здесь же, что доказательство теоремы Каваи, так же как и теорем Хрбачека и Поуэлла, в существенном опирается на применение подходящих аналогов локальной теоремы Мальцева или, говоря точнее, на технику ультрапроизведений и ультрапределов. Более детальное изложение названного аппарата выходит за рамки текущего изложения.

4.22. Проявляя известную вольность, обозначим через $\mathbf{V}^E$ универсум внешних множеств (не уточняя, о какой из теорий NST или EXT идет речь). Аналогично будем использовать знак $\mathbf{V}^I$ (соответственно $\mathbf{V}^S$) для указаний на мир внутренних (соответственно стандартных) множеств. Повторяя схему построения универсума фон Неймана, т. е. последовательно итерируя операции объединения и перехода к совокупности всех внешних подмножеств данного множества, из пустого множества можно вырастить мир $\mathbf{V}^C$ — *универсум «классических множеств»*. Подробнее говоря, полагают

$$V_\beta^C := \{x : (\exists^{\mathrm{st}} \alpha \in \beta) x \in \mathscr{P}^{\mathrm{Ext}}(V_\alpha^C)\},$$
$$\mathbf{V}^C := \bigcup_{\beta \in \mathrm{On}^{\mathrm{St}}} V_\beta^C,$$

где $\mathrm{On}^{\mathrm{St}}$ — класс всех стандартных ординалов. Таким образом, пустое множество является «классическим» и каждое «классическое» множество составлено только из «классических» элементов.

4.23. С помощью рекурсии — прогулки по этажам универсума «классических» множеств — определяется робинсоновская стандартизация или $*$-изображение.

Стандартное множество $*A$ называется *робинсоновской стандартизацией* или *$*$-изображением* «классического» множества A в том и только в том случае, если каждый стандартный элемент $*A$ является $*$-изображением некоторого элемента A. Символически, $*\varnothing := \varnothing, \quad *A := {}^*\{*a : a \in A\}$.

Отметим, что в рамках EXT законность применения обычной стандартизации не вызывает сомнений. В теории NST допустимость использования этой операции в определении робинсоновской стандартизации следует из способа построения $\mathbf{V}^C$. Аналогичное рассуждение (ср. 2.12) показывает, что $*$-изображение отождествляет и притом

взаимно однозначным образом миры $\mathbf{V}^C$ и $\mathbf{V}^S$. Робинсоновская стандартизация сверх того обеспечивает справедливость *принципа переноса*:

$$(\forall A_1 \in \mathbf{V}^C) \dots (\forall A_n \in \mathbf{V}^C) \varphi^C(A_1, \dots, A_n) \leftrightarrow \varphi^S(*A_1, \dots, *A_n)$$

для произвольной формулы φ теории Цермело — Френкеля (как обычно, φ^C и φ^S — релятивизации φ на $\mathbf{V}^C$ и $\mathbf{V}^S$ соответственно).

5. Теоретико-множественные установки нестандартного анализа

Проведенные в предыдущих параграфах рассмотрения обогатили и расширили исходные наивные представления о множестве, используемые в нестандартном анализе. От обычного универсума фон Неймана $\mathbf{V}$ мы перешли к миру $\mathbf{V}^I$ теории внутренних множеств с отмеченными в нем реперными точками — стандартными множествами, составляющими класс $\mathbf{V}^S$. Дальнейший анализ показал, что $\mathbf{V}^I$ лежит в новом классе — в универсуме $\mathbf{V}^E$ внешних множеств (составляющих мир Цермело). В $\mathbf{V}^E$ выделен универсум «классических» множеств $\mathbf{V}^C$ — еще одна реализация мира стандартных множеств $\mathbf{V}^S$. Точнее говоря, имеется робинсоновское $*$-изображение, поэлементно отождествляющее $\mathbf{V}^C$ и $\mathbf{V}^S$. При этом в силу принципов переноса $\mathbf{V}^C$, $\mathbf{V}^S$ и $\mathbf{V}^I$ можно рассматривать как «ипостаси» универсума фон Неймана $\mathbf{V}$.

5.1. Изложенная картина расположения и другие известные взаимосвязи миров $\mathbf{V}^E$, $\mathbf{V}^I$, $\mathbf{V}^S$ и $\mathbf{V}^C$ приводят к выделению трех общих теоретико-множественных установок нестандартного анализа. В этих установках — их называют классической, неоклассической и радикальной — фиксируются представления о предмете и средствах исследования. Принятие той или иной концепции определяет, в частности, способ изложения математических результатов, полученных с помощью нестандартных методов. В этой связи знакомство с упомянутыми установками нужно считать совершенно необходимым.

5.2. Классическая установка нестандартного анализа отвечает методике его основоположника А. Робинсона, и в настоящее время соответствующий формализм наиболее распространен.

При этой установке *главным объектом изучения объявляется мир классической математики, отождествляемый с универсумом «классических» множеств* $\mathbf{V}^C$. Последний считают «стандартным универсумом» (на практике чаще всего работают с достаточно большим

фрагментом, частью $\mathbf{V}^C$, содержащей необходимые для исследования объекты — с так называемой «*суперструктурой*»). В качестве техники исследования исходного — стандартного — универсума предъявляется «нестандартный универсум» $\mathbf{V}^I$, составленный из внутренних множеств, или его подходящая часть и $*$-изображение, подклеивающее обычные стандартные объекты к их образам в «нестандартном универсуме».

Полезно подметить своеобразное использование слов «стандартный» и «нестандартный» при излагаемом подходе. Робинсоновские стандартизации — элементы универсума $\mathbf{V}^S$ — воспринимаются как «нестандартные» объекты. «Стандартное» множество — это по понятию произвольный представитель мира «классических» множеств $\mathbf{V}^C$ — член «стандартного универсума».

Указывается, что $*$-изображение, как правило, добавляет новые «идеальные» элементы в множество. Здесь подразумевают, что $*A = \{*a : a \in A\}$ только в том случае, если «классическое» — «стандартное» — множество A конечно. Например, помещая $\mathbb{R}$ в $\mathbf{V}^C$ и в соответствии со сказанным изучая его $*$-изображение $*\mathbb{R}$, мы видим, что $*\mathbb{R}$ играет роль поля вещественных чисел в смысле универсума внутренних множеств — «во внутреннем смысле нестандартного универсума». В то же самое время $*\mathbb{R}$ не сводится к набору своих стандартных элементов $^\circ(*\mathbb{R}) = \{*t : t \in \mathbb{R}\}$. Учитывая, что $*\mathbb{R}$ есть «внутреннее множество вещественных чисел $\mathbb{R}$», а $^\circ(*\mathbb{R})$ — его стандартное ядро, допускают известную вольность, полагая $^\circ\mathbb{R} := \{*t : t \in \mathbb{R}\}$ и даже $\mathbb{R} := \{*t : t \in \mathbb{R}\}$.

Образно наличие «новых» элементов в $*\mathbb{R}$ выражают символом $*\mathbb{R} - \mathbb{R} \neq \varnothing$ и говорят о построении системы «гипердействительных» чисел $*\mathbb{R}$, расширяющей обычное поле вещественных чисел $\mathbb{R}$. Аналогичную политику проводят при рассмотрении произвольного классического множества X. Именно, считают, что $X = \{*x : x \in X\}$ и тем самым $X \subset *X$. Если X бесконечно, то $*X - X \neq \varnothing$. Иными словами, все бесконечные множества при помощи робинсоновской стандартизации насыщаются новыми элементами. Более того, «идеальных» объектов добавляется значительное количество — ведь в $\mathbf{V}^I$ действует принцип идеализации, который в излагаемой установке часто называют *техникой направленности или насыщения.*

5.3. Пусть U — произвольное соответствие, а A и B — множества. Говорят, что U *направлено из* A *в* B или, короче, просто направлено, если для каждого непустого конечного подмножества A_0 в A найдется элемент $b \in B$ такой, что $(a_0, b) \in U$ при всех $a_0 \in A_0$.

5.4. Принцип направленности в слабой форме. *Для любого соответствия U, направленного из A в B, имеется элемент $b \in {*B}$, удовлетворяющий соотношению $(*a, b) \in {*U}$ при каждом $a \in A$.*

5.5. Нетрудно видеть, что, в свою очередь, справедливость принципа направленности обеспечивает естественный эквивалент принципа идеализации в ослабленной форме — «релятивизованный на стандартные множества». В этой связи в приложениях выделяют консервативные расширения классической теории множеств, использующие как уже отмеченную возможность идеализации в слабой форме, так и принятие формулировок, обеспечивающих дополнительные возможности введения нестандартных элементов и более адекватные содержанию принципа идеализации в полных его выражениях.

5.6. Принцип направленности в сильной форме. *Пусть соответствие U таково, что $*U$ направлено из A в $*B$. Тогда имеется элемент $b \in {*B}$, для которого при всех $a \in A$ будет $(*a, b) \in {*U}$.*

5.7. Принцип насыщения. *Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ — произвольная убывающая последовательность непустых внутренних множеств. Тогда $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$.*

5.8. Полезно помнить, что в «расширенном», «нестандартном» мире — в универсуме внутренних множеств $\mathbf{V}^I$ — действует принцип переноса, т. е. с учетом свойств робинсоновской стандартизации

$$(\forall\, x_1 \in \mathbf{V}^C) \dots (\forall\, x_n \in \mathbf{V}^C) \varphi^C(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^I(*x_1, \dots, x_n)$$

для каждой формулы φ теории множеств Цермело — Френкеля. В такой форме принцип переноса часто называют *принципом Лейбница.*

5.9. При работе с «нестандартным универсумом» иногда специально выделяют «*технику внутренних множеств*». Имеется в виду способ доказательства, основанный на том, что внешние множества, заданные «теоретико-множественным способом», — внутренние. Вот одна из возможных форм применения этой техники.

5.10. *Пусть A — бесконечное множество. Для каждого теоретико-множественного свойства φ не верно, что $\{x : \varphi^I(x)\} = {*A} - A$.*

$\triangleleft$ Допустим противное. Тогда класс $\{x : \varphi^I(x)\}$ — это внутреннее множество $*A$. Стало быть, A — внутреннее множество. Но для бесконечного A внешнее множество $*A - A$ не является внутренним. $\triangleright$

5.11. Подводя итоги, можно сказать, что при классической установке работают с двумя универсумами — стандартным и нестандарт-

ным. Имеются формальные возможности связывать свойства стандартных и нестандартных объектов с помощью процедуры «навешивания звездочек» — с помощью $*$-изображения. При этом предоставлено право свободно переносить утверждения об объектах одного мира в другой — действует принцип Лейбница. Нестандартный мир богат идеальными элементами — в нем актуально осуществимы всевозможные трансфинитные конструкции, ибо справедлив принцип направленности. Множества, выпадающие за пределы нестандартного универсума, называют внешними (здесь проявляется особенность принимаемой терминологии: внутренние множества при излагаемом подходе внешними не являются. Полезный прием исследования составляет техника внутренних множеств.

Главное достоинство классической установки — это наличие $*$-изображения, которое позволяет применять аппарат нестандартного анализа к самым произвольным обычным множествам. Например, можно утверждать, что функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна в том и только в том случае, если $*f : [a, b] \to *\mathbb{R}$ микронепрерывна, т. е. если $*f$ не теряет бесконечную близость гипердействительных чисел. Основное затруднение в усвоении описываемых представлений связано с необходимостью вообразить себе колоссальное количество новых идеальных объектов, присоединяемых к обычным множествам. Заметные сложности вызывает естественное желание работать (по крайней мере на первых порах) с двумя наборами переменных, относящимися соответственно к стандартному и нестандартному универсумам. (При построении интернализации φ^I формулы φ мы фактически предполагаем такую процедуру.) Словом, *двуязычность* и *робинсоновская стандартизация — неотъемлемые атрибуты классической установки* — определяют все ее особенности, преимущества и дефекты присущего ей аппарата.

5.12. Неоклассическая установка нестандартного анализа отвечает методике, предложенной Э. Нельсоном. При этой установке *главным объектом изучения объявляется мир математики, рассматриваемый как универсум* $\mathbf{V}^I$, *лежащий в среде внешних множеств — элементов* $\mathbf{V}^E$. «Классические» множества отдельно к анализу не привлекаются. Стандартные и нестандартные элементы указываются в обычных объектах математики, составляющих $\mathbf{V}^I$. Так, в качестве поля вещественных чисел фигурирует $\mathbb{R}$ из мира $\mathbf{V}^I$, совпадающее, разумеется, с полем $*\mathbb{R}$ гипердействительных чисел — «идеальным» объектом классической установки. Позиции, освещенные в

гл. 2, отвечают указанной неоклассической установке. Связанные с ней преимущества определяются возможностью изучать уже хорошо знакомые множества и отыскивать новое в их устройстве с помощью дополнительных языковых средств. Как отмечает Э. Нельсон, «подлинно новыми в нестандартном анализе являются не теоремы или доказательства, а понятия — внешние предикаты...». Недостатки последовательно проводимой неоклассической установки вызваны необходимостью неявного переноса определений и свойств со стандартных объектов на внутренние. С этим обстоятельством мы уже сталкивались.

5.13. Радикальная установка нестандартного анализа состоит в том, что *предметом изучения математики объявляется универсум внешних множеств* во всей полноте и сложности его собственного устройства. Классические и неоклассические представления о нестандартном анализе — как о технике изучения математики (основанной на формализме Цермело — Френкеля) при радикальном подходе объявляются «узкими», «стыдливыми» и отметаются. С первого взгляда описанный подход воспринимается в качестве явно несерьезного и крайнего. Необходимо, по размышлению, отвести возникающие представления об экстремизме радикальной установки нестандартного анализа. Этот «экстремизм» — иллюзорный, кажущийся.

Широко распространенное воззрение на математику как на науку о формах и отношениях, взятых в отвлечении от их содержания, и даже существенно менее обязывающая классическая теоретико-множественная установка, восходящая к Г. Кантору, безусловно охватывает «крайние» мысли о предмете нестандартного анализа.

Оглавление

Семён Самсонович

КУТАТЕЛАДЗЕ

Формализмы нестандартного анализа

Учебное пособие

Подготовлено с использованием макропакета $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX,
the American Mathematical Society's TEX macro system.

Подписано в печать 28.06.99 г. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 3. Усл. печ. л. 3.
Тираж 100 экз. Заказ №299.

Лицензия ЛР №021285 от 6 мая 1998 г.
Издательский центр НГУ
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.