НОВОСИБИРСКИЙ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра вычислительной математики.

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

С.С.Кутателадзе

" О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ

ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ."

Научный руководитель

профессор

Кафедры вычислительной

математики,

д.ф.м.н. /РУБИНШТЕЙН Г.Ш./

НОВОСИБИРСК

1968

В работе рассматривается вопросы геометрического описания классов выпуклых подмножеств вещественного векторного пространства, наделяемых структурой так называемого обобщенного векторного пространства /о.в.п./ - непрерывной геометрии порядка, в которой прямые могут иметь крайние точки.

Показывается, что в рефлексивном нормированном пространстве в о.в.п. выпуклых слабых компактов W_K множества постоянной ширины и центрально симметричные множества образуют многообразия, аффинная оболочка которых совпадает с классом Σ множеств, обкатка которых шарами достаточно большого радиуса есть усреднение двух выпуклых множеств, одно из которых центрально симметрично, а второе - постоянной ширины.

Показывается, что пространство W_K для неодномерного гильбертова пространства / иначе - конус сублинейных над ним функционалов / не имеет внутренних точек.

Для конечномерного нормированного пространства показано:

1. Строго выпуклые гладкие компакты образуют грань строения W_K;
2. Строго выпуклые компакты и только они предшествуют в смысле Минковского евклидову шару;
3. Класс Σ, построенный по любой округлой гладкой норме содержит строго выпуклые компакты.

Основной используемый в работе аппарат - обычная модификация теории опорных функций Минковского-Фенкеля.

Обозначим множество подмножеств множества E через $\mathcal{P}(E)$. Говорят, что на непустом множестве E задана структура обобщенного векторного пространства /о.в.п./, если указано отображение $\vec{\Pi}: E\times E \to \mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E\times E)$, сопоставляющее каждой паре $(x,y)\in E\times E$ направленную ось $\vec{\Pi}(x,y)=(\Pi(x,y),\sigma(x,y))$, причем выполнены условия:

1. $\vec{\Pi}(x,x)=(\{x\},\{(x,x)\})$ – вырожденная ось ;
2. Каждая невырожденная ось есть совершенно упорядоченное, непрерывное по сечениям множество и $x<y$ в $\vec{\Pi}(x,y)$, т.е. $(x,y)\in\sigma(x,y)$
3. $\Pi(x,y)=\Pi(y,x)$; $\sigma(x,y)=\sigma^{-1}(y,x)$;
4. $(u,v\in\Pi(x,y);\ (u,v)\in\sigma(x,y))\Rightarrow\vec{\Pi}(x,y)=\vec{\Pi}(u,v)$;
5. Аксиома Паша

$$(x,y,z\in E;\ y\in\Pi(x,z);\ u\in\tilde{L}(x,y);\ v\in o(x,z))\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\exists\,\omega\in o(y,z):\ \omega\in\Pi(u,v))\ ;$$

здесь

$o(x,y)=\{z\in\Pi(x,y):\ x<z<y$ в $\vec{\Pi}(x,y)\}$ – открытый отрезок;

$L(x,y)=\{z\in\Pi(x,y):\ x<z$ в $\vec{\Pi}(x,y)\}$ – луч из x в y ;

$\tilde{L}(x,y)=\{z\in\Pi(x,y):\ z<x$ в $\vec{\Pi}(x,y)\}$ – луч, симметричный лучу $L(x,y)$.

Аффинно-геометрические понятия определяются обычным образом. Допуская вольность речи, там, где это не вызывает недоразумений, отождествляют ось $\vec{\Pi}(x,y)$ с прямой $\Pi(x,y)$.

Отнесем к границе пространства точки, являющиеся максимальными элементами на некоторых невырожденных осях, дополнение границы назовем внутренностью.

Обобщенные векторные пространства, совпадающие со своей внутренностью введены в [I] .

Заметим, что прямая, внутренняя точка которой лежит в границе пространства целиком принадлежит границе. Отсюда непосредственно следует, что для о.в.п. содержащего внутреннюю точку наличие граничных точек несущественно. К таким пространствам относятся, например, все конечномерные о.в.п..Однако, ниже появятся пространства без внутренних точек.

Говорят, что о.в.п. E изоморфно о.в.п. F $(E \simeq F)$, если задана биекция $\varphi: E \to F$ такая, что в очевидном смысле $\varphi(\vec{\pi}_E(x,y)) = \vec{\pi}_F(\varphi(x), \varphi(y))$.

Пусть M выпуклое множество в о.в.п. E, $x,y \in M$, говорят,что x предшествует y по M, если $\tilde{L}(y,x) \cap M \neq \Lambda$. Отношение предшествования есть предпорядок, фактор-множество по соответствующему отношению эквивалентности называется строением M, элементы строения называются гранями.

Как обычно, ограниченное выпуклое тело назовем строго выпуклым или округлым, если никакой его открытый отрезок не пересекает границы множества, и гладким, если в каждой точке границы существует единственная опорная к данному множеству гиперплоскость.

Пусть (X, G) - вещественное аффинное пространство. Через $\mathcal{W}(X)$ обозначим класс выпуклых подмножеств из X. Класс $\mathcal{W}(X)$, очевидно, замкнут относительно операции образования линейных комбинаций Минковского, то есть

$$\forall A, B \in \mathcal{W}(X);\ \alpha \in (0,1)\quad \alpha A + (1-\alpha)B \in \mathcal{W}(X);$$

здесь $\alpha A + (1-\alpha)B = \{z \in X : \exists a \in A, b \in B : z = \alpha a + (1-\alpha)b\}$.

Будем говорить, что C между A и B $([A, C, B])$, если $A, B \in \mathcal{W}(X)$; $A \neq B$ и $\exists \alpha \in (0,1): C = \alpha A + (1-\alpha)B$.

Легко проверяется, что для всяких $A, B, C, D \in \mathcal{W}(X)$

1. $[A, C, B]$ и $[A, D, B]$ и $C \neq D \Rightarrow [A, C, D]$ или $[A, D, C]$;
2. $[C, A, B]$ и $[D, A, B]$ и $C \neq D \Rightarrow [C, D, A]$ или $[D, C, A]$;
3. $[A, C, B]$ и $[D, A, B] \Rightarrow [C, A, D]$; $(*)$
4. $[C, A, B]$ и $[A, B, D] \Rightarrow [C, A, D]$.

Для $A, B \in \mathcal{W}(X)$ положим $o(A, B) = \{C \in \mathcal{W}(X) : [A, C, B]\}$.

Такое понятие отрезка немедленно приводит к понятию прямой:

$$\mathcal{T}(A, B) = \{C \in \mathcal{W}(X) : C = A \vee C = B \vee [A, B, C] \vee [A, C, B] \vee [C, A, B]\}.$$

Вводя на прямых направления с помощью $(*)$, приходим к стандартной структуре о.в.п. в $\mathcal{W}(X)$.

Для примера проверим выполнение аксиомы Паша.

<u>ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.</u>

Пусть $A, C, D \in \mathcal{W}(X)$; $[A, B, C]$; $D \bar{\in} \mathcal{T}(B, C)$; причем $[B, E, D]$, тогда $\exists F : [C, F, D]$ и $F \in \mathcal{T}(A, E)$.

Доказательство:

Пусть $B = \alpha A + (1-\alpha)C$; $E = \beta B + (1-\beta)D$, положим

$$\omega = \beta \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta};\ \nu = \alpha\beta;\ (\omega, \nu \in (0,1));\ F = \omega C + (1-\omega)D,$$

тогда, конечно, $[C, F, D]$, кроме того,

$$\nu A + (1-\nu)F = \nu A + (1-\nu)\omega C + (1-\nu)(1-\omega)D = \alpha\beta A +$$
$$+ (\beta - \alpha\beta)C + (1-\beta)D = \beta(\alpha A + (1-\alpha)C) + (1-\beta)D = E;$$

то есть $[A, E, F] \Rightarrow F \in \mathcal{T}(A, E)$, что и требовалось.

Пусть X, Y - вещественные векторные пространства, приведенные в двойственность билинейной формой $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Каждому $V \in \mathcal{W}(X)$ сопоставим опорную функцию $\varphi_V : Y \to R$ определенную формулой $\varphi_V(y) = \sup\limits_{x \in V} \langle x, y \rangle$, и каждой функции $f : Y \to R$ сопоставим ограниченное слабозамкнутое множество - индикатрису $I_f = \bigcap\limits_{y \in Y} \{x \in X : \langle x, y \rangle \leq f(y)\}$.

Заметим, что для всякого $V \in \mathcal{W}(X)$:

I. φ_V - положительно однородная полуаддитивная функция;

2. $\varphi_{\alpha V} = \alpha \varphi_V \quad (\alpha \geq 0)$; $\varphi_{V_1 + V_2} = \varphi_{V_1} + \varphi_{V_2}$;

3. $V_1 \subset V_2 \Rightarrow \varphi_{V_1} \leq \varphi_{V_2}$;

4. $V \subset I_{\varphi_V}$.

В самом деле, проверим, например, 4. Возьмем $x_0 \bar{\in} I_{\varphi_V}$, тогда $\exists y_0 \in Y : \langle x_0, y_0 \rangle > \varphi_V(y_0)$, если $x_0 \in V$, то $\langle x_0, y_0 \rangle > \varphi_V(y_0) \geq \langle x_0, y_0 \rangle$ - противоречие, значит, $V \subset I_{\varphi_V}$.

Принципиален вопрос о достижении равенства в 4. Приведем утверждение типа теоремы Фенкеля в теории сопряженных функций в R^n [2], [3], сходного построения Райкова для L- пространств и двойственного к данному построению Рубинова [5].

<u>ТЕОРЕМА I.</u>

Пусть X, Y - вещественные двойственные пространства, τ- отделимая локально выпуклая топология в Y, согласованная с двойственностью, тогда для всякого сублинейного функционала $f \in Sub(Y)$ / т.е. положительно однородного, полуаддитивного и непрерывного отображения $f : Y \to R$ / с ним совпадает опорная функция его индикатрисы, причем соответствие $f \to I_f$ инъективно.

Доказательство:

I. Пусть $S_f = \{(y, t) \in Y \times R : t \geq f(y)\}$, легко видеть, что S_f -

выпуклое тело в естественной топологии произведения $Y \times R$, / существование внутренней точки следует из ограниченности f /, следовательно, для всякого $y_0 \in Y$ существует опорная к S_f гиперплоскость, проходящая через точку $(y_0, f(y_0))$.

В виду согласованности топологии τ с двойственностью, отсюда непосредственно следует, что

$$\exists x_0 \in X: \forall y \in Y \quad f(y) \geq f(y_0) + \langle x_0, y - y_0 \rangle.$$

В частности, при $y = \alpha y_0$, $\alpha > 0$ получим $(\alpha - 1) f(y_0) \geq (\alpha - 1)\langle x_0, y_0 \rangle$.
Это значит, что $f(y_0) = \langle x_0, y_0 \rangle$, т.е. $f(y) \geq \langle x_0, y \rangle \; (y \in Y) \Rightarrow x_0 \in I_f$.
Имеем $\forall x \in I_f \; \langle x, y_0 \rangle \leq f(y_0)$ и $x_0 \in I_f$, значит,
$\varphi_{I_f}(y_0) = \sup\limits_{x \in I_f} \langle x, y_0 \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle = f(y_0)$ – т.е. f – опорная функция I_f.

2. Пусть $f_1 \neq f_2$ и для определенности $f_1(y_0) < f_2(y_0)$, тогда по I

$$\exists x_1 \in I_{f_1}: \langle x_1, y_0 \rangle = f_1(y_0); \; \exists x_2 \in I_{f_2}: \langle x_2, y_0 \rangle = f_2(y_0).$$

Если $x_2 \in I_{f_1}$, то $f_2(y_0) = \langle x_2, y_0 \rangle \leq f_1(y_0) < f_2(y_0)$ – противоречие, следовательно, отображение $f \to I_f$ инъективно.

<u>Следствие:</u>

Пусть $W_K(X)$ – множество выпуклых слабых компактов из X со структурой обобщенного векторного пространства, индуцированной вложением в $W(X)$ и структура о.в.п. в $Sub(Y)$ порождена обычной структурой конуса, тогда $W_K(X) \simeq Sub(Y)$ причем изоморфизм осуществляется взаимнообратными биекциями $V \to \varphi_V$ и $f \to I_f$.

Доказательство:

Из [4] $f \to I_f$ есть инъекция $Sub(Y) \to W_K(X)$, причем для $W, V \in W_K$ $V \neq W \Rightarrow \varphi_V \neq \varphi_W$. По теореме Макки о строении топологии, согласованной сдвойственностью, для всякого $V \in W_K(X)$ φ_V – ограничен, а по [5] и непрерывен, т.е. $\varphi_V \in Sub(Y)$. По теореме I $\varphi_{I_{\varphi_V}} = \varphi_V$, значит, $V = I_{\varphi_V}$.
Ясно, что указанные свойства обеспечивают требуемое.

Замечание I.

В случае полурефлексивности пространства X сильная топология в сопряженном пространстве X' согласована с двойственностью, т.е. $W_K(X) \simeq Sub(X')$, причем класс $W_K(X)$ обширен, т.к. содержит ограниченные замкнутые выпуклые множества.

В нормированном пространстве естественно выделяють центрально симметричные выпуклые множества и множества постоянной ширины. В предположении рефлексивности аффинную оболочку этих классов в смысле Минковского описывает следующая

ТЕОРЕМА 2.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ - рефлексивное нормированное пространство;

$\mathcal{S} = \{S \in W_K(X) : S$ - постоянной ширины $b_S \geq 0\}$;

$\mathcal{N} = \{N \in W_K(X) : N$ - центрально симметричное $\}$;

$\mathcal{L} = \{V \in W_K(X) : \exists \gamma \geq 0 : g_\gamma \in Sub(X')$, где $g_\gamma(x) = \varphi_V(x) - \varphi_V(-x) + \gamma\|x\| \ (x \in X')\}$;

тогда

1. $\mathcal{S}, \mathcal{N}, \mathcal{L}$ - аффинные многообразия, $\mathcal{S}, \mathcal{N} \subset \mathcal{L}$;
2. $V \in \mathcal{L}$ если и только если найдутся такие $S \in \mathcal{S}$; $N \in \mathcal{N}$; и шар $K \in \mathcal{S} \cap \mathcal{N}$, что пересекаются отрезки $o(V, K)$ и $o(S, N)$.

Доказательство:

I. Заметим, прежде всего, что в силу определений

$$S \in \mathcal{S} \iff \exists b_S \geq 0 : \varphi_S(x) + \varphi_S(-x) = b_S \|x\| \quad (x \in X');$$

$$N \in \mathcal{N} \iff \exists p \in X : \varphi_N(x) = \varphi_N(-x) + \langle p, x \rangle \quad (x \in X').$$

Пусть теперь $A, B \in \mathcal{S}$ и $C \in \mathcal{T}(A, B)$, для определенности, $[C, A, B]$; переходя к опорным функциям, получим для всякого $x \in X'$

$$\varphi_A(x) + \varphi_A(-x) = b_A \|x\|; \ \varphi_B(x) + \varphi_B(-x) = b_B \|x\|; \ \varphi_A(x) = \alpha \varphi_C(x) + (1-\alpha)\varphi_B(x).$$

По определению понятия между $C \in W(X)$, т.е. $\varphi_C(x) + \varphi_C(-x) \geq 0$; следовательно, C - постоянной ширины $b_C = \dfrac{b_A - (1-\alpha) b_B}{\alpha} \geq 0$.

Остальные случаи расположения C на $\Pi(A,B)$ и утверждения для $\mathcal{N}, \mathcal{L}$ рассматриваются аналогично.

Требуемые включения следуют из соотношений:

$$\varphi_N(x) - \varphi_N(-x) + 0\cdot\|x\| = 2\varphi_p(x) \in Sub(X') \quad (N\in\mathcal{N},\ p\in X);$$

$$\varphi_S(x) - \varphi_S(-x) + b_S\|x\| = 2\varphi_S(x)\in Sub(X') \quad (S\in\mathcal{S}).$$

2. Переходом к опорным функциям легко проверить эквивалентность высказываний $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, где

$$\mathfrak{A} = (\exists S\in\mathcal{S},\ N\in\mathcal{N};\ K\in\mathcal{S}\cap\mathcal{N}: o(V,K)\cap o(S,N)\neq\Lambda);$$

$$\mathfrak{B} = (\exists \alpha,\beta\in(0,1);\ r, b_S\geq 0;\ z,p\in X;\ \varphi_N,\varphi_S,\varphi_V\in Sub(X'): \forall x\in X'$$

$$\varphi_S(x) = \frac{1}{2\beta}\{\alpha[\varphi_V(x)-\varphi_V(-x)] + \beta b_S\|x\| + 2\varphi_{(1-\alpha)z-(1-\beta)p}(x)\};$$

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{2(1-\beta)}\{\alpha[\varphi_V(x)+\varphi_V(-x)] + [2(1-\alpha)r - \beta b_S]\|x\| + 2(1-\beta)\varphi_p(x)\}).$$

Ясно, что всегда $\mathfrak{B}\Rightarrow V\in\mathcal{L}$, следовательно, $\mathfrak{A}\Rightarrow V\in\mathcal{L}$,

$$V\in\mathcal{L}\Rightarrow \exists\gamma\geq 0: \varphi_V(x)-\varphi_V(-x)+\gamma\|x\|\in Sub(X')\Rightarrow\mathfrak{B}\Rightarrow\mathfrak{A}$$

для произвольных $z,p\in X;\ \alpha,\beta\in(0,1)$ как только $b_S\geq\frac{\alpha}{\beta}\gamma;\ r\geq\frac{\beta b_S}{2(1-\alpha)}$.

Замечание 2.

При введении в X любой эквивалентной нормы теорема сохраняет силу. Если, кроме того, $I_{\|\cdot\|}, I_{\|\cdot\|_1}$ лежат в одной грани строения $\mathcal{N}_K(X)$, то, очевидно, $\mathcal{L}_{\|\cdot\|} = \mathcal{L}_{\|\cdot\|_1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.

Пусть $V\in\mathcal{N}_K(R^n)\ (n\geq 2)$ таково, что граница ∂V есть строго выпуклая поверхность с непрерывной кривизной, тогда V предшествует евклидову шару.

Доказательство:

В самом деле, достаточно проверить, что при некотором $\gamma>0$ функция $g_\gamma(x) = \|x\| - \gamma\varphi_V(x)$ выпукла /норма евклидова/, т.е. положительную полуопределенность квадратичной формы $(A(x_0)x,x)$, где $[A(x_0)]_{ij} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}(x_0),\ (x_0\neq 0)$.

Пусть $(B(x_0)x,x)$, $(D(x_0)x,x)$ – аналогичные квадратичные формы для функций $\|\cdot\|$ и φ_V соответственно, а

$(B^{\varepsilon}(x_0)x,x) \underset{df}{=} (B(x_0)x,x) + \varepsilon(x,x)$, тогда $(B^{\varepsilon}(x_0)x,x)$ - положительно определена для всякого $\varepsilon > 0$.

Приводя регулярный пучок форм к каноническому виду, получим

$$(B^{\varepsilon}(x_0)x,x) - \gamma(D(x_0)x,x) = \sum_{i=1}^{n-1}(1-R_i\gamma)\xi_i^2 + \xi_n^2;$$

здесь $R_1,\dots,R_{n-1}$ - главные радиусы кривизны ∂V в точке $\left(\frac{\partial\varphi_V}{\partial x_1}(x_0),\dots,\frac{\partial\varphi_V}{\partial x_n}(x_0)\right)$ [6]. Выбирая $\gamma > 0$ так, чтобы $1-R_i\gamma \geqslant 0$ равномерно по i, x_0, что возможно в силу наложенных на границу V условий, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим требуемое.

Следствие:

Округлый выпуклый компакт в R^n входит в Σ, построенное по любой строго выпуклой гладкой норме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.

Пусть $V \in W_K(R^n)$ $(n \geqslant 2)$ не телесно и отлично от точки, тогда V не сравнимо с евклидовым шаром в смысле предшествования.

Доказательство:

Не нарушая общности, можно считать, что V лежит в ортогональном дополнении плоскости $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_s} = 0$ $(s < n)$ и тогда, очевидно, для всякого $x \in R^n$ $\varphi_V(x) = \varphi(x_{i_1},\dots,x_{i_s})$; т.е. φ_V зависит лишь от выделенных s компонент.

Пусть $I = \{i_1,\dots,i_s\}$, фиксируем индекс $j \in J \underset{df}{=} \{1,2,\dots,n\} \setminus I$ и вектор $\bar{x} \in R^n$ такой, что $\varphi_V(\bar{x}) + \varphi_V(-\bar{x}) = 2\varepsilon > 0$.

Для каждого $\gamma > 0$ определим координаты векторов x, y, u, v из условий

1. $x_i = \bar{x}_i$ $(i \in I)$;
2. $y_i = -x_i$ $(i \in I)$; $y_i = x_i$ $(i \in J)$;
3. $x_i = \frac{1}{2\delta}\left[\left(\sum_{i \in I} x_i^2\right)^{1/2} - \delta^2\right]\delta_{ij}$ $(i \in J)$, где $0 < \delta < \min\left(\gamma\varepsilon, \left(\sum_{i \in I}\bar{x}_i^2\right)^{1/4}\right)$;
4. $u_i = \delta_{ij}$; $v_i = -u_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$;

здесь

$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{если } i \neq j \\ 1 & \text{если } i = j \end{cases}$ - символ Кронекера.

Имеем

$$\|x\| + \|y\| - \|x+y\| - \gamma(\varphi_V(x) + \varphi_V(y) - \varphi_V(x+y)) = 2(\delta - \gamma\varepsilon) < 0 ;$$

$$\varphi_V(u) + \varphi_V(v) - \varphi_V(u+v) - \gamma(\|u\| + \|v\| - \|u+v\|) = -2\gamma < 0 ;$$

т.е. $\forall \gamma > 0 \ \ \|x\| - \gamma\varphi_V(x) \,\bar{\in}\, Sub(R^n) \wedge \varphi_V(x) - \gamma\|x\| \,\bar{\in}\, Sub(R^n)$;

т.е. V не предшествует евклидову шару K и K не предшествует V.

<u>Замечание 3.</u>

Пусть $V = \{x \in R^n : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1 ; x_2 \geq 0 ; x_3 = \ldots = x_n = 0\}$, тогда

$$\varphi_V(x) = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & x_2 \geq 0 \\ |x_1| & x_2 \leq 0 \end{cases} ;$$

значит, на векторах вида $x = (x_1, x_2, 0, \ldots, 0)$ $x_2 \geq 0$ $\varphi_V(x) - \varphi_V(-x) = \|x\| - |x_1|$

и аналогично предложению 3

$$\forall \gamma \geq 0 \ \ \varphi_V(x) - \varphi_V(-x) + \gamma\|x\| \,\bar{\in}\, Sub(R^n) ;$$

следовательно, $\mathcal{W}_K(R^n) \neq \mathcal{Z} \ (n \geq 2)$.

По схеме предложений 2,3 проверяется

<u>ТЕОРЕМА 3.</u>

В пространстве $\mathcal{W}_K(R^n) \ (n \geq 2)$

I. Округлые гладкие выпуклые компакты образуют грань $\mathcal{W}_K(R^n)$;

2. Евклидову шару предшествуют лишь строго выпуклые компакты ;

3. Внутренних точек нет.

<u>Замечание 4.</u>

Доказательство предложения 3 в существенном справедливо и в гильбертовом пространстве H / ибо требуются лишь некоторые ограничения на длины векторов/, значит, если H более чем одномерно, то $\mathcal{W}_K(H)$ не имеет внутренних точек.

<u>Замечание 5.</u>

Ввиду теоремы 3 и локальности построения, приведенного в

предложении 3 в качестве следствия , например, получим следующий критерий гладкости:
отличный от точки выпуклый компакт является округлым и гладки тогда и только тогда, когда он эквивалентен своему образу при любой изометрии R^n.

Условиям типа проверки полуаддитивности можно придать геометрическую форму. Приведем соответствующую конструкцию в R^n. Для $z \in R^{2n}$ положим

$$z^1 = (z_1, \dots, z_n, 0, \dots, 0); \quad z^2 = (0, \dots, 0, z_{n+1}, \dots, z_{2n}); \quad \bar{z}^2 = (z_{n+1}, \dots, z_{2n}, 0, \dots, 0).$$

Не оговаривая особо, там, где это не вызывает недоразумений отождествим $z^1 \in R^{2n}$ и $(z_1, \dots, z_n) \in R^n$ и т.п.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.

Пусть $f \in Sub(R^n)$, положим $f_1(z) = f(z^1)$; $f_2(z) = f(z^2)$; $\bar{f}(z) = f(z^1 + \bar{z}^2)$;

$A_1 = \{z \in R^{2n} : z^1 = z = (z_1^\circ, \dots, z_n^\circ, 0, \dots, 0); (z_1^\circ, \dots, z_n^\circ) \in I_f\}$;

$A_2 = \{z \in R^{2n} : z^2 = z = (0, \dots, 0, z_1^\circ, \dots, z_n^\circ); (z_1^\circ, \dots, z_n^\circ) \in I_f\}$;

$\bar{A} = \Delta \cap (A_1 + A_2)$, где $\Delta = \{z \in R^{2n} : z^1 = \bar{z}^2\}$;

тогда $f_1, f_2, \bar{f} \in Sub(R^{2n})$; $A_1, A_2, \bar{A} \in W_K(R^{2n})$;

причем $A_1 = I_{f_1}$; $A_2 = I_{f_2}$; $\bar{A} = I_{\bar{f}}$.

Доказательство:

Докажем, например, последнее равенство.

Пусть $z \in \bar{A}$, тогда $z^1 = \bar{z}^2 = (z_1^\circ, \dots, z_n^\circ, 0, \dots, 0)$, где $(z_1^\circ, \dots, z_n^\circ) \in I_f$

$(z, x) = (z^1, x^1) + (z^2, x^2) = (z^1, x^1 + \bar{x}^2) \le f(x^1 + \bar{x}^2) = \bar{f}(z)$, т.е. $\bar{A} \subset I_{\bar{f}}$

Пусть $z \bar{\in} \bar{A}$, в силу очевидного $\bar{f}(z) \le f_1(z) + f_2(z)$ достаточно рассмотреть случай $z_1 - \bar{z}_2 \neq \mathbb{O}$.

Положим $x^1 = z^1 - \bar{z}^2$; $\bar{x}^2 = -x^1$, тогда

$$(z, x) = (z^1, x^1) + (z^2, x^2) = (z^1, x^1) + (\bar{z}^2, \bar{x}^2) = (z^1, x^1) - (\bar{z}^2, x^1) =$$
$$= (z^1 - \bar{z}^2, x^1) = (z^1 - \bar{z}^2, z^1 - \bar{z}^2) > 0 = \bar{f}(\mathbb{O}) = f(x^1 + \bar{x}^2) \Rightarrow z \bar{\in} I_{\bar{f}};$$

т.е. $I_{\bar{f}} \subset \bar{A} \Rightarrow I_{\bar{f}} = \bar{A}$, что и нужно.

27. 5. 68

Скубаладзе

ЛИТЕРАТУРА

I. Рубинштейн Г.Ш. Теоремы отделимости выпуклых множеств. Сиб.мат.журн.,I964,5,№5,I096-II24

2. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике.М.I964

3. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М. I962

4. Райков Д. Векторные пространства. М. I962

5. Рубинов А.М. О некоторых свойствах сублинейных функционалов. Сб."Оптимальное планирование",I967,9,77-86

6. Буземан Г. Выпуклые поверхности. М. I964