РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК • СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л.СОБОЛЕВА

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

Е.И. ГОРДОН, А.Г. КУСРАЕВ
С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

Нестандартные методы анализа

**Е. И. Гордон, А. Г. Кусраев
С. С. Кутателадзе**

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Новосибирск
Издательство Института математики
2006

УДК 517.11+517.98
ББК 22.16
К94

Гордон Е. И., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Инфинитезимальный анализ. — 2-е изд., дополн. и испр. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2006. — x+526 с. — (Нестандартные методы анализа).

ISBN 5–86134–132–X.

Инфинитезимальный анализ — один из наиболее разработанных разделов, составляющих нестандартные методы анализа. В его рамках получили строгое обоснование метод неделимых и монадология, восходящие к глубокой древности. В монографии подробно излагаются теоретико-множественные формализмы, позволяющие использовать актуальные бесконечно большие и бесконечно малые величины. Детально изучаются приложения инфинитезимальных методов в топологии, теории меры, оптимизации и гармоническом анализе. Книга ориентирована на широкий круг читателей, интересующихся современным состоянием и приложениями классического нестандартного анализа.

Библиогр.: 531.

Ответственный редактор
академик *Ю. Г. Решетняк*

Редактор серии
С. С. Кутателадзе

К $\dfrac{1602080000\text{–}02}{\text{Я}82(03)\text{–}2006}$ Без объявл.

ISBN 5–86134–132–X

Содержание

От редактора серии

Нестандартные методы анализа в современном понимании состоят в привлечении двух различных — «стандартной» и «нестандартной» — моделей теории множеств для исследования конкретных математических объектов и проблем. Такие методы получили существенное развитие во второй половине XX века и сформировались в несколько направлений.

Первое из названных направлений вслед за его основоположником А. Робинсоном часто называют запоминающимся, хотя и отчасти эпатажным, термином — *нестандартный анализ* (теперь чаще говорят о классическом или робинсоновском нестандартном анализе). Робинсоновский нестандартный анализ характеризуется широким использованием давно известных в практике естествознания, но долгое время запрещенных в математике XX века концепций, связанных с представлениями об актуальных бесконечно больших и актуальных бесконечно малых величинах. В этой связи сейчас за ним закрепилось наименование *инфинитезимальный анализ*, выразительно напоминающее о классическом анализе бесконечно малых.

Инфинитезимальный анализ бурно развивается и уже внес капитальные изменения в систему общематематических представлений. Прежде всего это связано с тем, что в нем предложено новое понимание метода неделимых, восходящего к глубокой древности, и осуществлен синтез подходов к дифференциальному и интегральному исчислению, предложенных его основоположниками. В наши дни инфинитезимальный анализ находит широкое распространение и проникает во все разделы современной математики. Наибольшие изменения происходят в этой связи в негладком анализе, в теории вероятностей и теории меры, в качественной теории дифференциальных уравнений и в математической экономике.

Второе направление — *булевозначный анализ* — характеризуется широким использованием таких терминов, как спуски и подъемы, циклические оболочки и миксинги, B-множества и изображения объектов в моделях. Развитие этого направления, становление которого связано со знаменитыми работами П. Дж. Коэна по гипотезе континуума, привело к принципиально новым идеям и результатам в ряде направлений функционального анализа, прежде всего в теории пространств Канторовича, в теории алгебр фон Неймана, в выпуклом анализе и теории векторных мер.

В монографии А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе «Нестандартные методы анализа», изданной в 1990 году Сибирским отделением издательства «Наука» и переизданной в 1994 году издательством Kluwer Academic Publishers на английском языке, впервые с единых методологических позиций были рассмотрены оба указанных выше направления, составляющих ядро современных нестандартных методов анализа.

Читательский интерес и стремительное развитие самой дисциплины поставили задачу отразить современное состояние дел, изложив новые темы и результаты. При работе над реализацией проекта выяснилось, что остаться в прежних рамках одной книги уже невозможно. В этой связи в 1999 году было принято решение о подготовке серии монографий под общим названием «Нестандартные методы анализа», каждая из которых трактует различные аспекты этого математического направления.

Настоящая книга посвящена инфинитезимальному анализу и впервые вышла в свет в двух частях в 2001 г. В 2002 г. издательство Kluwer Academic Publishers опубликовало английский перевод книги. По предложению издательства Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН во втором издании обе части объединены в единую монографию. Наряду с систематическим изложением соответствующего формального аппарата, большое место в книге уделено приложениям к топологии, оптимизации и гармоническому анализу.

Введение

Идея инфинитезимали — актуальной бесконечно малой величины — восходит к эпохе античности. В наше время после примерно полувекового перерыва инфинитезимальным понятиям уделяется все большее внимание внутри современной математики. Бесконечно большие и бесконечно малые числа, математические атомы — «неделимые» монады — все чаще фигурируют в различных публикациях, входят в математическую практику. Поворотный пункт в развитии инфинитезимальных концепций связан с выдающимся достижением А. Робинсона — созданием нестандартного анализа.

Около полувека нестандартный анализ рассматривали как довольно тонкую и даже экзотическую логическую технику, предназначенную для обоснования метода актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел. Считалось также, что эта техника имеет ограниченную сферу применимости и в любом случае принципиально не может привести к серьезному пересмотру общематематических представлений. В конце 70-х годов после опубликования теории внутренних множеств Э. Нельсона (и несколько позже теорий внешних множеств К. Хрбачека и Т. Каваи) взгляды на место и роль нестандартного анализа коренным образом обогатились и видоизменились.

В свете новых открытий нестандартные элементы стало возможно рассматривать не как «мнимые, глухие, идеальные сущности», добавляемые к обычным множествам из соображений формального удобства, а как неотъемлемые части любых привычных математических объектов. Возникла установка, состоящая в том, что каждое множество образовано стандартными и нестандартными элементами. В свою очередь, стандартные множества формируют своеобразную реперную сетку, плотно расположенную в совокупности всех предметов изучения математики.

При этом обнаружилось, что фигурирующие в нестандартном математическом анализе объекты — монады фильтров, стандартные части чисел и векторов, тени операторов и т. п. — составляют «канторовские» множества, не попадающие ни на одну из канонизированных картин, рисуемых известными формальными теориями множеств.

Универсум фон Неймана не исчерпывает мир классической математики — вот одно из очевидных следствий новых воззрений. Таким образом, традиционные взгляды на нестандартный анализ стали нуждаться, по меньшей мере, в ревизии, потребовали переосмысления инфинитезимальных концепций.

Важным достоинством возникших путей стал аксиоматический подход, дающий возможность овладеть аппаратом нестандартного математического анализа без предварительного изучения техники ультрапроизведений, булевозначных моделей или их аналогов. Выдвинутые аксиомы просты в обращении и отчетливо мотивируются на содержательном уровне в рамках привычной для анализа «наивной» теоретико-множественной установки. В то же время они существенно расширяют круг математических объектов, создают возможности развития нового формального аппарата, позволяют значительно уменьшить опасные разрывы между представлениями, методическими установками и уровнями строгости, принятыми в математике и ее приложениях к естественным и социальным наукам.

Иначе говоря, аксиоматическое теоретико-множественное обоснование нестандартного математического анализа имеет общенаучное значение.

В 1947 г. К. Гёдель отметил: «Могут существовать аксиомы, столь богатые проверяемыми следствиями, проливающие такой яркий свет на всю дисциплину и доставляющие настолько сильные методы решения задач (даже, насколько это возможно, решающие их в каком-либо конструктивистском смысле), что совершенно безотносительно к их внутренней необходимости эти аксиомы придется принять хотя бы в том же смысле, в каком принимают любую основательную физическую теорию» [323, с. 521]. Предсказание К. Гёделя сбывается на наших глазах.

Цель настоящего сочинения — сделать более доступными появившиеся пути в нестандартный анализ.

Для достижения этой цели мы начинаем с изложения содержательных качественных представлений о стандартных и нестандартных объектах, об аппарате нестандартного анализа на «наивном» уровне строгости, абсолютно достаточном для эффективных применений без апелляции к логическим формализмам.

Затем приводится краткий и в то же время достаточно полный справочный материал, относящийся к современным аксиоматическим построениям нестандартного анализа в рамках канторовской установки. При этом мы сочли возможным значительное место уделить идейной и исторической стороне дела, что определило специфику изложения.

Собранные в первой и второй главах исторические сведения, качественные мотивировки принципов нестандартного анализа и обсуждение их простейших следствий для дифференциального и интегрального исчисления составляют «наивное» обоснование инфинитезимального анализа. Формальные детали соответствующего аппарата нестандартной теории множеств собраны в третьей главе.

Веским доводом в пользу известной концентричности изложения служат замечательные слова Н. Н. Лузина: «Математический анализ вовсе не есть совершенно законченная наука, как иногда склонны себе его представлять, с раз навсегда найденными принципами, из которых только остается извлекать дальнейшие следствия... Математический анализ ничем не отличается от всякой другой науки и имеет свой ход идей, движущийся не только поступательно, но и кругообразно, с возвращением к группе прежних идей, правда всегда в новом освещении» [156, с. 389].

В четвертой и пятой главах представлены инфинитезимальные методы в общей топологии и субдифференциальном исчислении.

Шестая глава посвящена проблемам приближения бесконечномерных банаховых пространств и операторов в них конечномерными пространствами и матрицами. Разумеется, размерность аппроксимирующего пространства является здесь бесконечно большим числом.

Близким по проблематике является и материал седьмой главы, относящейся к гармоническому анализу на группах. Здесь подробно излагается нестандартная техника приближения локально компактных групп и соответствующих преобразований Фурье.

Выбор именно этих тем из многообразия современных приложений нестандартного анализа определен во многом личными предпочтениями авторов.

В заключительной восьмой главе собраны упражнения, полезные для закрепления материала, а также сформулированы и открытые вопросы, трудность которых варьируется от нулевой до бесконечно большой.

Мы не захотели ограничивать себя двухэлементной булевой алгеброй и кое-где привлекаем общие булевозначные модели. Для удобства читателя необходимый минимум сведений о последних собран в приложении.

Предлагаемое читателю сочинение отчасти служит отчетом о работе над проблемами, занимавшими авторов в течение последних тридцати лет. Мы с удовлетворением вспоминаем трудности и радости нашей многолетней совместной работы и теплого дружеского общения. Возможно, они также были проявлениями приятных следствий нестандартного анализа...

Глава 1

Экскурс в историю математического анализа

Идеи дифференциального и интегрального исчисления восходят к глубокой древности и связаны с наиболее фундаментальными математическими концепциями. Сколь-либо детальное изложение истории становления представлений о математических объектах, о процессах вычисления и измерения, определяющих нынешние взгляды на инфинитезимали, требует специальных сочинений, выходящих за рамки наших возможностей и намерений. Ситуация существенно осложнена тем, что математическая история подвержена широко известным негативным процессам, возникающим при постоянных попытках апологии тех или иных современных воззрений. Формирование аппарата математического анализа, в частности, далеко не всегда излагается достаточно полно и бесстрастно. Односторонние взгляды на сущность дифференциала и интеграла, гипертрофирование роли понятия предела, предание анафеме актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел получили в течение пятидесяти лет двадцатого века столь широкое распространение, что не позволяют игнорировать их существование.

Стало трюизмом воззрение, что «сами основания анализа были долго окружены таинственностью вследствие нежелания признать за понятием предела исключительного права быть источником новых методов» [106, с. 562]. Между тем, как справедливо отметил Л. С. Понтрягин: «Исторически интегральное и дифференциальное исчисление были уже хорошо развитыми областями математики до того, как появилась теория пределов. Последняя возникла как некоторая надстройка над существовавшей уже теорией. Многие физики считают, что так называемое строгое определение производных и интегралов вовсе не нужно для хорошего понимания дифференциального и интегрального исчисления. Я разделяю их точку зрения» [193, с. 64–65].

В связи с изложенным мы сочли необходимым в доступной нам краткой форме ознакомить читателя с некоторыми поворотными моментами в истории анализа и с положениями, высказанными классиками в процессе формирования современных взглядов. Отбор соответствующих фрагментов с неизбежностью субъективен. Надеемся, что тем не менее он достаточен для формирования критического отношения к односторонним искаженным картинам становления инфинитезимальных методов.

1.1. Г. В. Лейбниц и И. Ньютон

Дифференциальное и интегральное исчисление имеет давнее название «анализ бесконечно малых». †

Именно так был озаглавлен первый учебник математического анализа, вышедший в свет в 1696 г. Этот учебник был составлен Г. Лопиталем в результате контактов с И. Бернулли (старшим), одним из выдающихся последователей Г. В. Лейбница.

Научное наследие, творчество и взаимоотношения основоположников математического анализа Г. В. Лейбница и И. Ньютона подвергнуты детальному, можно сказать, скрупулезному изучению.

Стремление восстановить ход мысли гениальных людей, выявить пути, приведшие к открытию новых истин, оправдано и закономерно. Однако никогда не следует забывать имеющихся принципиальных различий между черновиками и набросками, частными письмами к коллегам и сочинениями, специально предназначенными для более широкого распространения. В этой связи необходимо прежде всего обратиться к «официальным» изложениям интересующих нас представлений Г. В. Лейбница и И. Ньютона о бесконечно малых.

Первой опубликованной работой по дифференциальному исчислению является статья Г. В. Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для

† Этот термин использовал Л. Эйлер в 1748 г. в книге *Introductio in Analysin Infinitorum* [236] (cf. [**, p. 324]).

этого род исчисления» (см. [150]). Эта работа вышла в свет в лейпцигском журнале «Acta Eruditorum» триста с лишним лет назад в 1684 г. Лейбниц дает следующее определение дифференциала.

Рассматривая кривую YY и отрезок касательной, проведенной в фиксированной точке кривой Y, отвечающей выбранной координате X на оси AX, и обозначая D точку пересечения касательной с указанной осью, он пишет: «Назовем произвольно взятую прямую dx, а другой отрезок, относящийся к dx так, как... y ...относится к XD, назовем... dy или же разностью (differentia) ...y...». К этому прилагается рисунок, существенные детали которого (с учетом письменных разъяснений Лейбница) воспроизводятся здесь (рис. 1).

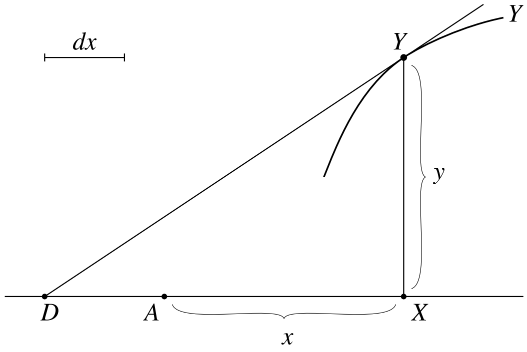


Рис. 1

Итак, по Лейбницу для функции $x \mapsto y(x)$ в точке x при произвольном dx мы имеем $dy := \frac{YX}{XD}dx$. Иначе говоря, дифференциал определен как соответствующее линейное отображение, т. е. тем способом, под которым подпишется большинство теперешних специалистов.

Г. В. Лейбниц — серьезный мыслитель, считавший, что «изобретение силлогистической формы есть одно из прекраснейших и даже важнейших открытий человеческого духа. Это своего рода *универсальная математика*, все значение которой еще недостаточно понято. Можно сказать, что в ней содержится искусство непогрешимости...» [152, с. 492–493]. Безусловно понимая, что описание и обоснование изложенного им алгоритма дифференциального исчисления (так Г. В. Лейбниц называл правила дифференцирования) требует уточнения понятия касательной, он разъясняет: «...найти касательную — значит провести прямую, соединяющую две точки кривой, расстояние между которыми бесконечно мало, или же провести продолженную сторону бесконечноугольного многоугольника, который для нас равнозначен кривой». Иначе говоря, Г. В. Лейбниц базирует свое исчисление на апелляции к устройству кривых «в малом».

На статут бесконечно малых в те времена имелись практически две точки зрения. В силу первой, по-видимому, более близкой Г. В. Лейбницу, бесконечно малое число мыслилось как меньшее любого «могущего быть заданным количества». Актуально существующие «неделимые» элементы, составляющие величины и фигуры — вот образы, сопутствующие приведенной концепции бесконечной малости. Для Г. В. Лейбница неоспоримо суждение о существовании «простых субстанций, входящих в состав сложных» — *монад*. «Этито монады и суть истинные атомы природы, одним словом, элементы вещей» [151, с. 413].

Для другого родоначальника анализа И. Ньютона бесконечно малые были связаны с представлениями об исчезающих количествах [188, 223]. Неопределенные величины он рассматривал «не как состоящие из крайне малых частей, но как описываемые непрерывным движением», «...как возрастающие или убывающие в непрерывном движении, т. е. как притекающие или утекающие». Знаменитый «метод первых и последних отношений» в классическом трактате «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) имеет следующую формулировку:

«Количества, а также отношения количеств, которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приблизятся друг к другу ближе, нежели на любую заданную разность, будут напоследок равны» [223, с. 101].

Проводя идеи, которые сейчас прочно ассоциируются с теорией пределов, И. Ньютон проявлял свойственную настоящим ученым проницательность, предусмотрительность и мудрость, оценивая конкурирующие воззрения. Он писал: «...построение анализа посредством конечных величин и исследование первых или последних отношений нарождающихся или исчезающих конечных величин согласно с геометрией древних, и я желал обнаружить, что в методе флюксий нет необходимости вводить в геометрию бесконечно малые фигуры.

Можно, правда, провести анализ на каких угодно фигурах, и конечных и бесконечно малых, которые представляют себе подобными исчезающим, так же как и на фигурах, которые в методах *неделимых* обычно считаются бесконечно малыми, но только при этом следует действовать с должной осторожностью» [188, с. 169].

Столь же гибких, глубоко диалектических взглядов придерживался Г. В. Лейбниц. В своем известном письме к П. Вариньону от 2 февраля 1702 г. [223], подчеркивая, что «...нет нужды ставить математический анализ в зависимость от метафизических споров», он указывает на единство противоположных представлений об объектах нового аппарата: «...если какой-либо противник желает возражать против наших утверждений, то из нашего исчисления следует, что ошибка будет меньше, чем любая ошибка, какую он сможет указать, ибо в нашей власти взять несравнимо малое достаточно малым для этой цели, поскольку такую величину всегда можно взять сколь угодно малой. Быть может, Вы, сударь, это и имеете в виду, говоря о неисчерпаемом, и в этом, без сомнения, состоит строгое доказательство применяемого нами исчисления бесконечно малых... Также можно сказать, что бесконечные и бесконечно малые обоснованы так, что в геометрии и даже в природе все происходит, как если бы они представляли собой совершенные реальности. Об этом свидетельствует не только наш геометрический анализ трансцендентных, но еще мой закон непрерывности, в силу которого допустимо рассматривать покой как бесконечно малое движение (т. е. как равносильный роду своей противоположности), и совпадение — как бесконечно малое расстояние, и равенство — как последнее из неравенств и т. д.».

Близкие положения высказывал Г. В. Лейбниц в следующем отрывке, выделенный конец которого часто цитируют в сочинениях по нестандартному анализу, следуя примеру А. Робинсона [464, с. 260–261]: «...нет необходимости понимать здесь бесконечное в строгом смысле слова, но лишь в том смысле, в каком в оптике говорят, что солнечные лучи исходят из бесконечно удаленной точки и потому считаются параллельными.

И когда имеются различные порядки бесконечного или бесконечно малых, то понимаются они в том же смысле, в каком земной шар считают точкой по сравнению с расстоянием до неподвижных звезд, а шарик в наших руках — точкой по сравнению с полудиаметром земного шара, так что расстояние от неподвижных звезд является бесконечно бесконечным или бесконечностью бесконечности по отношению к диаметру шарика.

Дело в том, что вместо бесконечного или бесконечно малого берут настолько большие и настолько малые величины, насколько это нужно, чтобы ошибка оказалась менее данной ошибки и, таким образом, *отличие от стиля Архимеда состоит лишь в выражениях, которые в нашем методе являются более прямыми и более пригодны для искусства изобретения*» [150, с. 190].

1.2. Л. Эйлер

Восемнадцатое столетие в истории математического анализа по праву называют веком Л. Эйлера. Каждый, кто ознакомится с его сочинениями, будет потрясен виртуозной техникой, глубоким проникновением в суть дела. Можно вспомнить, что замечательный ученый-инженер А. Н. Крылов с восторгом видел в знаменитой *формуле Эйлера* — $e^{i\pi} = -1$ — символ единства всей математики, отмечая, что «в ней -1 — представляет арифметику, i — алгебру, π — геометрию и e — анализ».

Для Л. Эйлера характерен многосторонний, как сейчас говорят «системный», подход к исследованию математических задач — он широко использует весь разработанный к тому времени аппарат. Существенно подчеркнуть постоянное, эффективное и эффектное применение инфинитезимальных концепций и, прежде всего, актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел.

Л. Эйлер достаточно подробно разъяснил методические основы своих представлений, названных «исчислением нулей». Имеется склонность искать (отличные от имеющихся) пятна на солнце и (аналогичные) слабости гениев.

Долгие годы Л. Эйлеру инкриминировали «неверное» обращение с расходящимися рядами, пока не были поняты его взгляды. Сейчас кое-кто употребляет оборот «Эйлер в вопросе о расходящихся рядах стоял на вполне современной точке зрения...» Правильнее обернуть эту фразу и сказать, что некоторые современные математики наконец доросли до понимания идей Эйлера.

Как станет видно из дальнейшего (см. 2.2, 2.3), мнение, что «...мы не сможем восторгаться тем способом, которым Эйлер обосновывает анализ, вводя нули различных порядков» столь же самонадеянно, как и суждение о том, что «гиганты науки, главным образом, Эйлер и Лагранж, дали неверное обоснование анализа». Эйлер, и это сто́ит признать безоговорочно и навсегда, владел анализом и ведал, что творил.

1.3. Дж. Беркли

Идеи анализа в их общей форме оказали заметное воздействие на характер мировоззренческих представлений XVIII века.

Отражением глубины проникновения понятий бесконечно больших и бесконечно малых количеств в культурную среду того времени служат, в частности, вышедшие в 1726 г. из-под пера Дж. Свифта «Путешествия Лемюэля Гулливера...» (Лилипутия и Бробдингнег) и знаменитый «Микромегас 1752», написанный ярким, язвительным мыслителем Ф.-М. Аруэ — Вольтером. Интересно, что А. Робинсон к своему классическому сочинению [464] в качестве эпиграфа избрал начало следующей речи Микромегаса:

«Теперь я вижу яснее, чем когда-либо, что ни о чем нельзя судить по его видимой величине. О боже, даровавший разум существам, столь ничтожных размеров! Бесконечно малое равно перед лицом твоим бесконечно большому; если только возможны существа, еще меньшие чем эти, то и они могут обладать разумом, превосходящим ум тех великолепных творений твоих, виденных мною на небе, одна ступня которых покрыла бы эту планету» [30, с. 154].

Представляется серьезным то воздействие на развитие математического анализа, которое оказало выступление в 1734 г. крупного деятеля церкви и теолога, епископа Дж. Беркли с памфлетом «Аналитик, или Рассуждение, адресованное неверующему математику, где исследуется, являются ли предмет, принципы и заключения современного анализа более отчетливо познаваемыми и с очевидностью выводимыми, чем религиозные таинства и положения веры» [10, с. 361–408]. Клерикальная направленность сочинений Дж. Беркли сочетается с афористичностью, тонкостью наблюдений и убийственной точностью выражений. «...Ошибка может породить истину, хотя не может породить науку» [10, с. 377] — вот лейтмотив его критики анализа. Вызов Беркли [10, с. 377]: «У меня нет разногласий с вами относительно ваших выводов, они у меня есть только относительно вашей логики и метода. Как вы проводите доказательство? С какими предметами вы хорошо знакомы и ясно ли вы их себе представляете? На основе каких принципов вы действуете, насколько они правильны и как вы их применяете?» — был адресован всему естествознанию. Сочинение Дж. Беркли, завершенное 67 острыми вопросами, оспаривающими научность методов анализа того времени, не могло быть оставлено без ответа наиболее передовыми представителями научной мысли XVIII века — энциклопедистами.

1.4. Ж. Д'Аламбер и Л. Карно

Поворотный пункт в истории формирования основных понятий анализа связан с идеями и деятельностью Ж. Д'Аламбера. Один из организаторов и ведущих авторов бессмертного шедевра просветительской мысли «Энциклопедии или толкового словаря наук, искусств и ремесел» в статье «Дифференциал» заявил: «Ньютон никогда не считал дифференциальное исчисление исчислением бесконечно малых, а видел в нем метод первых и последних отношений» [223, с. 157]. Д'Аламбер стал первым математиком, объявившим себя обладателем доказательства, что бесконечно малые «на самом деле не существуют ни в природе, ни в допущениях геометров» (из статьи «Бесконечно малое» 1759 г.). Позиция Ж. Д'Аламбера, отраженная «Энциклопедией...», в немалой степени способствовала оформлению в конце XVIII века представления о бесконечно малой как о величине, стремящейся к нулю. По-видимому, в этой связи следует упомянуть работу Л. Карно «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых», в которой отмечено «...понятие бесконечно малого количества не менее ясно, чем понятие предела, потому что оно есть не что иное, как разность этого предела и количества, последним значением которого он является» [89].

1.5. Б. Больцано, О. Коши и К. Вейерштрасс

XIX век стал веком обоснования анализа с помощью теории пределов. Выдающийся вклад в этот процесс внесли Б. Больцано, О. Коши и К. Вейерштрасс. Достижения названных ученых отражены в любом традиционном курсе дифференциального и интегрального исчисления. Новый канон строгости, выдвинутый Б. Больцано, данное О. Коши определение бесконечно малого количества как переменной с нулевым пределом, наконец, ε-δ-техника К. Вейерштрасса составляют неотъемлемую часть математических воззрений, став частью современной культуры. Стоит особо отметить (см. [223]), что, давая словесную характеристику непрерывности, О. Коши и К. Вейерштрасс прибегают к практически тождественным выражениям:

> «бесконечно малое приращение переменной порождает всегда бесконечно малое приращение самой функции»
>
> О. Коши;

> «бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции»
>
> К. Вейерштрасс.

Указанное совпадение подчеркивает достойную уважения потребность связать новые представления с позициями великих предшественников.

Размышляя о значении пересмотра аналитических воззрений, происходившего в XIX веке, следует иметь в виду сделанное в этой связи важное наблюдение Ф. Севери [206, с. 113]: «Этот пересмотр, который приобрел в наши дни относительную завершенность, не имеет, однако, той определенной ценности, в которую верят многие ученые. В самом деле, строгость сама по себе есть функция совокупности знаний в каждый исторический период, соответствующий способу научной обработки истины».

1.6. Н. Н. Лузин

Начало XX века в математике отмечено дальнейшим ростом недоверия к концепции актуальных бесконечных величин. Эта тенденция особенно усилилась в связи с переустройством математики на основе теоретико-множественной установки, завоевавшей себе в 30-е годы прочные ключевые позиции.

Н. Н. Лузин в первом издании Большой Советской Энциклопедии в 1934 г. писал: «Что же касается постоянного бесконечно малого количества, отличного от нуля, то современный математический анализ, не отрицая формальной возможности определить идею постоянного бесконечно малого (например, как соответствующего отрезка „неархимедовой“ геометрии), рассматривает эту идею как совершенно бесплодную, так как ввести такое бесконечно малое в исчисление оказывается невозможным» [156, с. 293–294].

В те годы в России известным событием стал выход в свет учебника М. Я. Выгодского «Основы исчисления бесконечно малых», вызвавший серьезную и острую критику. М. Я. Выгодский старался сохранить концепцию инфинитезималей, апеллируя к исторической практике. Он, в частности, отмечал: «Если бы дело шло только о создании логического аппарата, который работал бы сам по себе, то, устранив из рассмотрения бесконечно малые величины и изгнав дифференциалы из математики, можно было бы праздновать победу над теми затруднениями, которые доставляли столько хлопот математикам и философам в течение двух веков. Но исчисление бесконечно малых возникло из потребностей практики, и с течением времени его связь с естествознанием и техникой (а в позднейшее время и с социальными науками) все более и более укреплялась и становилась все более и более плодотворной. Между тем полное изгнание бесконечно малых величин сделало бы эту связь если не невозможной, то чрезвычайно затруднительной» [33, с. 160].

Характеризуя учебник М. Я. Выгодского, Н. Н. Лузин в 1940-е годы писал: «Этот курс внутренне цельный и освещенный большой идеей, которой он остается верным, не укладывается в рамки современного этапа математического анализа, длящегося 150 лет, и в настоящее время приходящего к своему завершению» [156, с. 398].

На отношении Н. Н. Лузина к бесконечно малым сто́ит остановиться особо, как на важном свидетельстве того, обычно скрытого, драматизма, которым наполнена история каждой глубокой идеи, волнующей людей. Н. Н. Лузин отличался редкой способностью проникать в ядро самых изощренных математических проблем и, можно сказать, владел замечательным даром предвидения [144, 145, 158]. Идея актуальных бесконечно малых при этом была чрезвычайно близка ему психологически. Он подчеркивал: «...мысль о них никогда не могла быть успешно изгнана из сознания. Имеются, очевидно, какие-то глубоко скрытые причины, еще до сих пор не выясненные полностью, которые заставляют наш ум быть расположенным всерьез считаться с ними» [156, с. 396].

В одном из писем к М. Я. Выгодскому, Н. Н. Лузин предсказывал: «Я всегда готов в свою очередь защищать то в Ваших теориях, что я считаю „от истины“. Ваша критика Анализа правдива и *верна*. Но напрасно Вы только оправдываете актуально-малые только педагогическими соображениями. Наука, конечно, если не вернется вполне и совершенно к ним, то во всяком случае, актуально малые будут совершенно реабилитированы с полной научной точки зрения, как своего рода „математические кванты“» [68].

В другом месте с подлинной скорбью Н. Н. Лузин отмечал: «Когда ум начинает свое знакомство с анализом, словом, когда для него весна, он начинает именно с актуально малых, которые можно назвать „элементами“ количества.

Но постепенно, шаг за шагом, по мере накопления у него знаний, теорий, пресыщения к абстракции, усталости, ум начинает забывать свои первоначальные стремления, улыбаться их „ребячеству“. Короче говоря, когда приходит осень ума, он дает себя убедить в единственности правильного обоснования при помощи пределов» [27].

Последнюю точку зрения Н. Н. Лузин энергично развивал в учебнике «Дифференциальное исчисление», указывая, что «для правильного понимания самой *сути дела* учащийся должен хорошо усвоить, что бесконечно малое *по самому своему определению* есть всегда *переменная* величина и что поэтому никакое постоянное число, как бы мало оно ни было, *никогда* не есть бесконечно малое. Учащийся должен остерегаться пользоваться сравнениями или уподоблениями вроде, например, следующего: „Один сантиметр есть величина бесконечно малая по сравнению с диаметром солнца". Эта фраза совершенно неправильна. Обе величины — и сантиметр и диаметр солнца — суть величины постоянные и, значит, *конечные*, только, разумеется, одна значительно меньше другой. Притом и сантиметр вовсе не представится маленькой величиной, если мы, например, сравним его с „толщиной волоса", а для движущегося микроба сантиметр явится пространством колоссальной величины. Чтобы избавиться от всяких рискованных сравнений и субъективных случайных уподоблений, учащийся твердо *должен помнить, что никакая постоянная величина не является бесконечно малой, так же как никакое число, как бы мало оно ни было.*

Поэтому, в сущности говоря, было бы гораздо правильнее употреблять не термин „бесконечно малое", но термин „бесконечно умаляющееся" как более ярко выражающий *идею переменности*» [157, с. 61].

1.7. А. Робинсон

Седьмое (посмертное) издание названного учебника Н. Н. Лузина увидело свет в том же 1961 г., в котором А. Робинсон опубликовал свой «Нестандартный анализ», содержащий современное обоснование метода актуальных бесконечно малых. А. Робинсон опирался на локальную теорему А. И. Мальцева, выделяя ее как результат «основополагающего значения для нашей теории» [464, с. 13] и прямо ссылаясь на работу А. И. Мальцева, относящуюся к 1936 г. Открытие А. Робинсона разъясняет идеи родоначальников дифференциального и интегрального исчисления, дает новое подтверждение диалектического характера развития математики.

Глава 2

Наивные основы инфинитезимальных методов

Долгие годы несправедливой борьбы с актуальными бесконечно большими и бесконечно малыми величинами не прошли бесследно, породив обычные в таких случаях негативные последствия, в частности, массу предрассудков по отношению к понятиям и конструкциям, связанным с инфинитезималями.

Один из них весьма широко распространен и состоит во мнении о сложности овладения аппаратом нестандартного анализа. При этом подчеркивается, что последний опирается на продвинутые разделы современной формализованной теории множеств и математической логики.

На самом же деле наличие упомянутой связи, являясь безусловным и неоспоримым фактом, ни в коей мере не затрудняет ни понимания, ни методов работы с инфинитезималями.

Цель текущей главы — обосновать высказанное положение с помощью изложения методологии нестандартного анализа на уровне строгости, принятом в нынешней системе математического образования, базирующемся на представлениях наивной теоретико-множественной установки, восходящей к Г. Кантору.

Помимо разъяснения смысла концепций нестандартной теории множеств и принимаемых в ней принципов переноса, идеализации и стандартизации, определенное место мы уделяем проведению параллелей излагаемых достаточно свежих представлений о простейших объектах математического анализа с подходами классиков. Тем самым нам хотелось подтвердить преемственность в развитии идей дифференциального и интегрального исчисления, по-новому освещаемую нестандартным анализом.

2.1. Понятие множества в нестандартном анализе

В этом параграфе мы приведем фрагмент обоснования нестандартных методов, близкий по уровню строгости к принятому при знакомстве с началами математического анализа.

2.1.1. Нынешние курсы математического анализа часто строятся на понятии множества.

2.1.2. Примеры.

(1) *Л. Шварц «Анализ»*: «Множеством называется совокупность некоторых объектов.

Примеры: Множество учащихся одного выпуска,
множество точек плоскости,
множество невырожденных поверхностей
2-го порядка в трехмерном пространстве,
множество $\mathbb{N}$ неотрицательных целых чисел,
множество $\mathbb{Z}$ произвольных целых чисел,
множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел,
множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел,
множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел» [232, с. 9].

(2) *В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов «Математический анализ»*:

«...при изучении вещественных чисел важным понятием являлось понятие множества. Подчеркнем, что множество мы рассматривали как начальное понятие, неопределенное через другие.

В этом параграфе мы будем изучать множества произвольной природы или, как говорят, абстрактные множества. Это означает, что объекты, составляющие данное множество, или, как говорят, элементы данного множества уже не обязаны быть обязательно вещественными числами. Элементами абстрактного множества могут быть, например, функции, буквы алфавита, фигуры на плоскости и т. д.» [75, с. 69].

(3) *Ю. Г. Решетняк «Курс математического анализа»*.

«Для нас множество будет одним из первичных математических понятий, не выражаемым через другие математические понятия.

Обычно, говоря слово „множество“, мы будем под этим понимать совокупность объектов произвольного рода, рассматриваемую как единое целое. Вместе с термином множество будут употребляться и его синонимы типа набор, система, совокупность и т. п. Например, можно говорить о множестве решений некоторого уравнения, о коллекции картин, хранящихся в музее, совокупности точек круга и т. д.

Объекты, составляющие то или иное множество, называются его *элементами*.

Множество считается заданным, если для любого объекта можно установить, является он элементом данного множества или нет». [199, с. 12].

(4) *В. А. Зорич «Математический анализ»*:

«Основные предпосылки канторовской (или, как условно говорят, „наивной“) теории множеств сводятся к следующему:

1° множество может состоять из любых различных объектов;

2° множество однозначно определено набором составляющих его объектов;

3° любое свойство определяет множество тех объектов, которые этим свойством обладают.

Если x — объект, P — свойство, $P(x)$ — обозначение того, что x обладает свойством P, то через $\{x : P(x)\}$ обозначают весь класс объектов, обладающих свойством P.

Объекты, составляющие класс или множество, называют *элементами* класса или множества.

Слова „класс“, „семейство“, „совокупность“, „набор“ в наивной теории множеств употребляют как синонимы термина „множество“.

Следующие примеры демонстрируют применение этой терминологии:

множество букв „а“ в слове „я“;
множество жен Адама;
набор из десяти цифр;
семейство бобовых;
множество песчинок на Земле;
совокупность точек плоскости, равноудаленных от двух данных ее точек;
семейство множеств;
множество всех множеств.

Различие в степени определенности задания множеств наводит на мысль, что множество — не такое уж простое и безобидное понятие.

И в самом деле, например, понятие множества всех множеств просто противоречиво [72, с. 17–18].

2.1.3. Нестандартный анализ, или, более полно, нестандартный математический анализ, является разделом математического анализа. В этой связи становится очевидным, что в нем принимаются изложенные взгляды на множества. Иными словами, в *нестандартном анализе предполагаются множествами те и только те совокупности, которыми оперирует классическая — «стандартная» — теория.* Стоит подчеркнуть, что справедлива и переформулировка приведенного утверждения: нестандартный анализ не считает множествами те и только те совокупности, которые не признает в качестве множеств обычная математика. В то же время *нестандартный анализ связан с уточненными воззрениями на множества*, т. е., как иногда говорят, строится в рамках нестандартной теории множеств.

2.1.4. В основе наивной теории множеств лежат классические представления Г. Кантора: «*Множество есть многое, мыслимое нами как единое*» и множество — это «*соединение в некое целое определенных хорошо различимых объектов нашего созерцания или нашего мышления*» [80, с. 173]. Общеизвестно, что подобные концепции чересчур широки. Это обстоятельство обходится известной детализацией различий множеств и немножеств. Например, для обозначения неприемлемых — «слишком больших» — совокупностей множеств применяется термин «класс». При этом подразумевается, что класс не обязан быть множеством. Иными словами, при формализации понятий наивной теории множеств более полно и тщательно регламентируются процедуры, позволяющие вводить то или иное «канторовское» множество в математический обиход. Все допущенные в математику множества совершенно равноправны. Само собой, отсюда никак не следует, что все множества равны или не имеют отличий. Просто множества однотипны, обладают общим статусом — они элементы «класса всех множеств».

2.1.5. Решающий новый момент, главная посылка, формирующая нестандартную теорию множеств, чрезвычайно проста. Она заключена в том, что *множества бывают разные*: *стандартные и* *нестандартные.* Поэтому правильнее говорить не о нестандартной теории множеств, а о теории множеств, стандартных и нестандартных. Интуитивное представление, выделяемое фразой: «*множество A стандартно*», состоит в том, что A ясно и отчетливо описано, стало «артефактом» познавательной деятельности людей. Понятием стандартности проводится разграничительная линия между объектами, определяемыми явными математическими конструкциями, например, с помощью теорем существования и единственности, — их называют стандартными множествами, и объектами, возникающими в процессе исследования неявным, косвенным образом — нестандартными множествами.

Прямыми недвусмысленными способами заданы такие числа, как π, e, $\sin 81$, четко описаны множества натуральных и вещественных чисел. Названные объекты являются стандартными. В свою очередь, произвольное «абстрактное» вещественное число в рамках теоретико-множественной установки возникает косвенным образом, вводится как элемент ранее указанного множества всех вещественных чисел.

Подобный способ введения объектов в рассмотрение чрезвычайно распространен: вектор — это элемент векторного пространства, фильтр — множество подмножеств данного множества, обладающее к тому же известными свойствами и т. п. Значит, среди вещественных чисел есть стандартные и нестандартные, существуют стандартные и нестандартные векторы и фильтры и, вообще, имеются стандартные и нестандартные множества.

Разберем пример множества песчинок на Земле. Как указал Архимед в своем классическом сочинении «Псаммит»: «...среди чисел, которые получили от нас название и опубликованы в написанной к Зевксиппу книге, некоторые превосходят не только число песчинок в объеме, равном заполненной, как мы сказали, Земле, но даже в объеме, равном миру» [8, с. 358]. Значит, число песчинок на Земле — конкретное натуральное число. Однако дать непосредственное определение этого числа, назвать именно это число практически невозможно. Последовательный перебор песчинок, очевидно, неосуществим. Следовательно, количество песчинок на Земле выражается «*недоступным*», «*неосуществимым*», — нестандартным — натуральным числом и соответственно множество песчинок нестандартно.

Разумеется, приведенные *взгляды на различия стандартных и* *нестандартных множеств имеют вспомогательное значение* для овладения правилами оперирования с ними. Стоит провести аналогию с положением в геометрии, где интуитивные наглядные представления о пространственных формах помогают выработать навыки использования аксиом, составляющих, в конечном счете, строгие определения точек, прямых, плоскостей и т. п. Следуя А. Д. Александрову, необходимо отметить, что «аксиомы сами по себе нуждаются в содержательном обосновании, они лишь суммируют другой материал и дают начало логическому построению теории» [3, с. 51]. В связи с этим формальному введению аксиом нестандартной теории множеств необходимо предпослать их качественное обсуждение.

Как мы уже знаем, нестандартная теория множеств начинается с фиксации первичного наблюдения: множества бывают разные — стандартные и нестандартные. Помимо этого принимаются следующие постулаты (или, более точно, варианты следующих постулатов).

2.1.6. *Принцип переноса:* *обычное математическое утверждение, доказывающее существование некоторого множества, задает одновременно и стандартное множество.*

Иными словами, теоремы существования и единственности, принятые в классической математике, считаются вполне явными определениями математических объектов. Эквивалентная переформулировка приведенного принципа, разъясняющая смысл его названия, гласит: *для того чтобы доказать какое-либо утверждение обо всех множествах, достаточно доказать его только для стандартных множеств.* Интуитивным обоснованием принципа переноса служит тот бесспорный факт, что суждения, относящиеся к произвольным множествам, мы выносим, оперируя только с уже реально описанными — со стандартными — множествами.

Размышления над смыслом принципа переноса показывают, что в нем речь идет о двух аспектах представлений о стандартных объектах. Первый заключен в том, что *новые стандартные объекты возникают из уже имеющихся с помощью описаний типа теорем существования и единственности*, т. е. постулируется допустимость *рекурсии.* Это обстоятельство можно выразить заключением, что в стандартном непустом множестве имеется стандартный элемент и что объект, конструируемый или определяемый единственным образом из уже имеющихся стандартных элементов, сам стандартен.

Второй аспект представлений о стандартности, выраженный принципом переноса, неразрывно связан с первым и означает *представительность мира стандартных объектов в универсуме всех изучаемых множеств.* Можно сказать, что постулируется возможность *индукции* — познаваемость идеальных конструкций с помощью изучения реально доступных стандартных объектов.

2.1.7. *Принцип идеализации:* *в каждом бесконечном множестве имеется нестандартный элемент.*

Адекватность приведенного положения общим представлениям о бесконечности несомненна. Принцип идеализации в дальнейшем часто дается в более сильных формах, отражающих концепцию неисчерпаемого разнообразия идеальных объектов. Например, иногда принимают, что *все стандартные множества являются элементами некоторого конечного множества.* Число элементов такого «универсального» множества колоссально и, что важнее всего, «недоступно» — нестандартно. Поэтому не может вызывать удивление нестандартность самого универсального множества.

Полезно подчеркнуть, что при работе с изложенными первыми двумя постулатами (как, впрочем, и везде) необходимо проявлять осторожность. Так, в силу принципа переноса стандартное множество определено своими стандартными элементами однозначно в среде сородичей — стандартных множеств. Однако рассматриваемое множество не сводится, вообще говоря, к принадлежащим ему стандартным элементам. Могут существовать другие, нестандартные множества, содержащие в себе весь запас стандартных элементов исходного множества и не имеющие никаких иных стандартных элементов. Еще одно достойное упоминания обстоятельство заключается в том, что, как и в обычной теории множеств, *понятие «утверждение» следует применять осмотрительно.* В принципе переноса речь должна идти об обычных математических предложениях, не апеллирующих к новому, описанному на содержательном уровне свойству множеств — быть или не быть стандартными. В противном случае, исходя из того, что все стандартные множества стандартны, мы сделали бы вывод о стандартности произвольного множества. Последнее заключение противоречит принципу идеализации. Итак, констатация того, что некоторое множество стандартно, — это не обычное утверждение.

2.1.8. *Принцип стандартизации:* *каждое стандартное множество и любое свойство определяют новое стандартное множество — подмножество исходного множества, стандартные элементы которого обладают названным свойством.*

Подробнее говоря, пусть A — это рассматриваемое стандартное множество и P — какое-либо свойство. Принцип стандартизации утверждает, что имеется стандартное множество, обозначаемое обычно ${}^*\{x \in A : P(x)\}$ и удовлетворяющее соотношению $y \in {}^*\{x \in A : P(x)\} \leftrightarrow y \in \{x \in A : P(x)\}$ для всякого стандартного y.

Множество ${}^*\{x \in A : P(x)\}$ часто называют *стандартизацией*, опуская указания на параметры, участвующие в его определении. Интуитивное обоснование принципа стандартизации состоит в том, что, имея в наличии явные описания математических объектов, мы можем оперировать составленными из них по тем или иным законам новыми вполне конкретными множествами.

Стандартизация дополняет общепринятый метод выделения подмножеств с помощью отбора элементов с наперед заданным свойством. При обдумывании принципа стандартизации полезно обратить внимание на то, что в нем ничего не говорится о нестандартных элементах возникающего множества. Это неслучайно, такие элементы могут обладать, а могут и не обладать рассматриваемым свойством. Стоит здесь же подчеркнуть, что принцип стандартизации нужно применять с должной осмотрительностью. Попытка самовольно стандартизовать «универсальное» множество, содержащее все стандартные множества, приводит к немедленному противоречию.

2.1.9. Приведенные постулаты кладутся в основу аксиоматических изложений нестандартной теории множеств. Мы обсудим их детально несколько позже, а пока можно, не отклоняясь от В. А. Зорича, заявить: «В целом любая из существующих аксиоматик такова, что она, с одной стороны, избавляет от известных противоречий наивной теории, а с другой — обеспечивает свободу оперирования с конкретными множествами, возникающими в различных отделах математики и в первую очередь именно в математическом анализе, понимаемом в широком смысле слова» [72, с. 18–19].

2.2. Простейшие свойства стандартных и нестандартных вещественных чисел

Перейдем к знакомству с новыми свойствами классической числовой прямой, изучать которые позволяют принципы нестандартного анализа.

2.2.1. Для множества A условимся писать $a \in {}^\circ A$ вместо выражения: «a — стандартный элемент A».

2.2.2. *Имеют место утверждения:*

(1) *справедлив принцип индукции по стандартным натуральным числам, т. е. если A — множество, для которого $1 \in A$ и при $n \in {}^\circ\mathbb{N}$ верно $n \in A \to n+1 \in A$, то A содержит все стандартные натуральные числа: ${}^\circ\mathbb{N} \subset A$;*

(2) *конечное, т. е. не допускающее взаимнооднозначного отображения на собственное подмножество, множество, составленное только из стандартных элементов, стандартно;*

(3) *стандартное конечное множество имеет только стандартные элементы;*

(4) *если множество имеет только стандартные элементы, то оно конечно;*

(5) *для бесконечного (= не являющегося конечным, ср. (2)) стандартного множества A совокупность ${}^\circ A$ — не множество.*

$\lhd$ (1): Используя принцип стандартизации, образуем следующее (стандартное) подмножество натурального ряда: $B := {}^*\{n \in \mathbb{N} : n \notin A\}$. Допустим, что $B \neq \varnothing$. Тогда у B имеется наименьший стандартный (в силу принципа переноса) элемент m. По условию $m \neq 1$ (ибо $1 \in A$). Кроме того, $m \notin A$ и, стало быть, $m-1 \notin A$. По принципу переноса $m-1 \in {}^\circ\mathbb{N}$, т. е. $m-1 \in B$. Получим противоречивое неравенство $m-1 \geq m$. Итак, $B = \varnothing$, т. е. $(\forall\, n \in {}^\circ\mathbb{N})$ $(n \in A)$. Это и означает включение ${}^\circ\mathbb{N} \subset A$.

(2): Очевидное следствие принципа переноса.

(3): Одноэлементное стандартное множество имеет единственный (а потому стандартный) элемент. Число элементов конечного стандартного множества A стандартно. Кроме того, $A = (A - \{a\}) \cup$

$\{a\}$ для каждого $a \in A$. Учитывая, что число элементов $A - \{a\}$ также стандартно, мы можем применить принцип индукции (1).

(4): Непосредственное следствие принципа идеализации.

(5): Допустим, что ${}^{\circ}A$ — множество. На основании (4) заключаем: ${}^{\circ}A$ конечно. В силу (2) ${}^{\circ}A$ — стандартное множество. По принципу переноса $A = A^{\circ}$ и, стало быть, A конечно. Это противоречие. $\triangleright$

2.2.3. *Натуральное число N нестандартно (= неосуществимо) в том и только в том случае, если N больше любого стандартного натурального числа. Символически:*

$$N \in \mathbb{N} - {}^{\circ}\mathbb{N} \leftrightarrow (\forall\, n \in {}^{\circ}\mathbb{N})(N > n).$$

$\triangleleft$ Достаточно заметить, что, например, в силу 2.2.2 для стандартного числа n из условия $n > N$ вытекает, что N доступно: $N \in {}^{\circ}\mathbb{N}$. $\triangleright$

2.2.4. В связи с 2.2.3 нестандартные натуральные числа называют *актуальными бесконечно большими* или *недоступными*. Используя традиционную вольность речи, говорят о *бесконечных* числах.

Вопреки следующему распространенному суждению: «Эйлер довольно легкомысленно утверждал, что $1/0$ — бесконечность, хотя и не счел нужным определить, что такое бесконечность, а лишь ввел для нее обозначение ∞», на самом деле Л. Эйлер прямо указывал [237, с. 89]: «...бесконечное число и число, большее всякого могущего быть заданным, — это синонимы».

Недоступность натурального числа N выражают символом $N \approx \infty$ или, более полно, $N \approx +\infty$. Иногда пишут также $N \sim +\infty$.

Стоит подчеркнуть, что использование атрибута «бесконечное» для недоступного числа N может вызвать некоторое недоумение. В самом деле, проводя последовательно теоретико-множественную точку зрения, мы видим, что соответствующее множество N конечно в теоретико-множественном смысле (ср. 2.2.2 (2)). Недоступность N не должна ассоциироваться с бесконечностью N как множества. В действительности N — конечное множество, число элементов которого нестандартно. Именно этот смысл вкладывается (в рамках теоретико-множественной установки) в понятие актуального бесконечно большого натурального числа N.

2.2.5. *Имеют место утверждения:*

(1) $N \approx +\infty,\ M \approx +\infty \to N + M \approx +\infty,\ NM \approx +\infty$;

(2) $N \approx +\infty,\ n \in {}^{\circ}\mathbb{N} \to N + n \approx +\infty,\ N - n \approx +\infty,$ $nN \approx +\infty$;

(3) *для каждого* $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ *верно*

$$N \approx +\infty \leftrightarrow N^n \approx +\infty;$$

(4) *у любого недоступного составного натурального числа имеются недоступные делители;*

(5) $N \approx +\infty,\ M \geq N \to M \approx +\infty$;

(6) *«... если* $\frac{1}{0}$ *обозначает бесконечно большое число, то так как* $\frac{2}{0}$ *есть, несомненно, удвоенное* $\frac{1}{0}$*, ясно, что число, хотя бы и бесконечно большое, может стать еще в два или несколько раз больше»* (Л. Эйлер [236, с. 620])*;*

(7) *пусть t — вещественное положительное число. Целая часть t недоступна в том и только в том случае, если недоступно t, т. е. t больше любого стандартного вещественного числа;*

(8) *пусть* $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *— строго возрастающая стандартная функция. Тогда для* $N \in \mathbb{N}$ *верно*

$$N \approx +\infty \leftrightarrow \psi(N) \approx +\infty.$$

$\triangleleft$ Докажем только (7) и (8), так как прочие утверждения проверяются более просто.

(7): Если целая часть s числа t недоступна и $(\exists\, r \in {}^{\circ}\mathbb{R})\ t \leq r$, то $t \leq n$ для некоторого $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$. Значит, будет $n + 2 \leq s \leq t \leq n$, что нелепо. Итак, $t \approx +\infty$. Если же $t \approx +\infty$, то $s + 1 \geq t$, где s — целая часть t. Значит, $s + 1 \approx +\infty$. В силу 2.2.5(2) отсюда вытекает, что $s \approx +\infty$.

(8): Пусть сначала $\psi(N) \approx +\infty$ и $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$. Тогда число $\psi(n)$ доступно, т. е. $\psi(n) \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ и, стало быть, $\psi(N) > \psi(n)$. В силу строгой монотонности ψ выводим: $N > n$, т. е. $N \approx +\infty$.

Допустим теперь, что $N \approx +\infty$. Тогда для $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ будет $N > n$ и, следовательно, $\psi(N) > \psi(n) \geq n$. Окончательно $\psi(N) \approx +\infty$. $\triangleright$

2.2.6. Пусть $\overline{\mathbb{R}}$ — *расширенная числовая прямая*, т. е. $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, где $+\infty$, $-\infty$ — присоединенные к $\mathbb{R}$ наибольший и наименьший элементы. Множество $\infty := \{+\infty, -\infty\}$ удобно называть (символической) *потенциальной бесконечностью* и соответственно говорить об элементе $+\infty$ (или $-\infty$) как о положительной или отрицательной (символической) бесконечности.

Число $t \in \mathbb{R}$ называют *доступным*, если найдется стандартное число $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$, для которого $|t| \leq n$. Условие доступности t из $\mathbb{R}$ символически записывают как $t \in \mathrm{ltd}(\mathbb{R})$ или $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$. Элементы из $\mathbb{R}$, не являющиеся доступными, называют *недоступными* или *актуальными бесконечными числами*. Пишут $t \approx +\infty$ для $t \notin {}^{\approx}\mathbb{R}$ и $t > 0$. По аналогии понимают записи $t \approx -\infty$ и $t \approx \infty$. Часто используют условное соглашение $t \approx +\infty \leftrightarrow t \in \mu(+\infty)$ и словесные обороты типа «число лежит в *монаде* бесконечно удаленной точки (в монаде плюс-бесконечности)».

Число $t \in \mathbb{R}$ называют *бесконечно малым* или, более полно, *актуальным бесконечно малым*, если для всякого $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ верно $|t| \leq 1/n$. При этом пишут $t \approx 0$ или $t \in \mu(\mathbb{R})$ и говорят, что t лежит в *монаде* нуля. (Символ $\mu(\mathbb{R})$ используют наряду с обозначением $\mu(0)$, подчеркивая очевидную связь с единственной отделимой векторной топологией на $\mathbb{R}$.) Бесконечно малые называют также *инфинитезималями*, реже используют неудачный термин *дифференциалы*.

Если $x \leq y$ и разность между x и y не бесконечно мала, то пишут $x \ll y$. Поскольку $t \in {}^{\approx}\mathbb{R} \leftrightarrow (\forall N \approx +\infty)(|t| \ll N)$, доступность $t \in \mathbb{R}$ записывают также и формулой $|t| \ll +\infty$.

2.2.7. Термин *монада* ($M\acute{o}\nu\alpha\zeta$) восходит к глубокой древности и традиционно без достаточных оснований переводится как единица. По первому определению книги седьмой «Начал» Евклида монада — «есть ⟨то⟩, через что каждое из существующих считается единым» [183, с. 9].

Приведем здесь некоторые качественные разъяснения представлений об устройстве монад, высказанные Секстом Эмпириком:

«...Пифагор говорил, что началом сущего является монада, по причастности к которой каждое из сущего называется одним» [208, с. 361];

«...точка устроена по типу монады, ведь, как монада есть нечто неделимое, так и точка, и, как монада есть некое начало в числах, так и точка есть некое начало в линиях» [208, с. 364];

«...единое, поскольку оно есть единое, неделимо, и монада, поскольку она есть монада, не делится. Или если она делится на много частей, она становится совокупностью многих монад, а уже не [просто] монадою» [208, с. 367].

Изучением монад, их статуса и строения в полном объеме мы займемся несколько позже. Начнем же с рассмотрения элементарных свойств инфинитезималей или, что эквивалентно, монады бесконечно малых.

2.2.8. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) $s \approx 0,\ t \approx 0 \to s + t \approx 0$;

(2) $t \approx 0,\ s \in {}^{\approx}\mathbb{R} \to st \approx 0$;

(3) $z \approx 0 \leftrightarrow 1/z \approx \infty$ *(при* $z \neq 0$*):*

«... если z становится количеством, меньшим любого могущего быть заданным количества, т. е. бесконечно малым, то значение дроби $\frac{1}{z}$ должно быть бо́льшим, чем любое могущее быть заданным количество, т. е. бесконечно большим количеством» (Л. Эйлер [237, с. 93])*;*

(4) $(t \approx 0$ *и* t *стандартно*$) \to t = 0$.

$\lhd$ (1) Пусть $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$. Ясно, что $|s| \leq (2n)^{-1}$ и $|t| \leq (2n)^{-1}$. Отсюда $|s + t| \leq |s| + |t| \leq (2n)^{-1} + (2n)^{-1} = n^{-1}$, т. е. число $s + t$ бесконечно мало.

(2) Пусть $s \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ и $s \neq 0$ (иначе нечего доказывать). Возьмем $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$. Привлекая условие, видим, что $|s| \leq m$ для некоторого $m \in {}^{\circ}\mathbb{N}$. Итак, $|t| \leq (nm)^{-1}$. Отсюда $|st| \leq |s|\,|t| \leq m(nm)^{-1} = n^{-1}$, т. е. $st \approx 0$.

(3) Пусть z — конечное ненулевое число, т. е. $0 < |z| \leq |n|$, где $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$. Ясно, что $|1/z| \geq 1/n$, т. е. $1/z$ не является бесконечно малым числом. Наоборот, если $z \approx \infty$, то для всякого конечного n будет $|z| \geq n$, откуда и вытекает: $z^{-1} \approx 0$.

(4) Имеем $|t| \leq 2^{-1}|t|$, как только t стандартно. Последнее невозможно при $|t| > 0$. Значит, $t = 0$. $\rhd$

2.2.9. *Монада* $\mu(\mathbb{R})$ *— это не множество.*

$\lhd$ Допустим противное. Тогда $\mu(\mathbb{R})$ — подмножество $\mathbb{R}$. Для каждого $t > 0$, $t \in {}^{\circ}\mathbb{R}$ будет $t \geq \mu(\mathbb{R})$. Значит, $t \geq s := \sup \mu(\mathbb{R})$. Ясно, что число s бесконечно малое. Кроме того, $2s \geq s \to s = 0$. Но это противоречит наличию нестандартных (актуальных) бесконечно малых чисел. $\triangleright$

2.2.10. При работе с вещественными числами удобно выделять различные случаи их взаимного расположения.

Для $s, t, r \in \mathbb{R}$ пишут $s =_r t$ или $s \approx t(\mathrm{mod}\ r)$, если $(s-t)/r \approx 0$ (здесь $r \neq 0$). Числа s и t при этом называют *r-близкими*, или *бесконечно близкими по модулю r*. В случае $r = 1$ пишут просто $s \approx t$ и говорят о *бесконечной близости s и t*.

Родоначальники анализа бесконечно малых часто не отличали числа, бесконечно близкие к определенному числу, от самого этого числа. Такое положение Л. Эйлер выражал словами: «...бесконечно малое количество есть точно нуль» [237, с. 92]. В этой связи вместо символа $x \approx y$ для $x \in \mathbb{R}$, $y \in {}^{\circ}\mathbb{R}$ раньше применяли запись $x = y$. Г. В. Лейбниц отмечал: «я считаю равными не только те величины, разность которых есть совершенное ничто, но и те, разность которых несравненно мала» [150, с. 188], подчеркивал в другом месте, что «...ошибка неуказуема и не может быть дана посредством какого бы то ни было построения» [242, с. 195].

Для $s, t \in \mathbb{R}$ пишут $s = O(t)$ при $s/t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$; если $s = O(t)$ и $t = O(s)$, то говорят, что s и t имеют *один и тот же порядок*; если $s/t \approx 0$, то пишут $s = o(t)$ и говорят, что s имеет *больший порядок малости,* чем t; наконец, если $s - t = o(t)$ и $s - t = o(s)$, то s и t называют *эквивалентными* и пишут $s \cong t$.

Излагая свои взгляды о природе малых высших порядков, Г. В. Лейбниц писал: «Я бы хотел прибавить еще одно замечание, чтобы прекратить все споры о реальности разностей любого порядка, а именно, что их всегда можно изобразить обыкновенными пропорциональными им прямыми отрезками... Я уже объяснил, как изображать обыкновенными прямыми отрезками разности первого порядка, когда впервые изложил начала этого исчисления в Acta за октябрь 1684 г.» (см. [242, с. 188–190], ср. 1.1).

2.2.11. *Для $s, t \in \mathbb{R}$ введем естественные сокращения:*

$$s \in O := O(t) \leftrightarrow s = O(t); \quad s \in o := o(t) \leftrightarrow s = o(t).$$

Выполняются правила Э. Ландау:

$$O + O \subset O; \quad O + o \subset O; \quad o + o \subset o;$$
$$Oo \subset o; \quad OO \subset O; \quad oo \subset o.$$

$\lhd$ Проверим для определенности соотношение $O + o \subset O$. Итак, пусть $s = O(t)$ и $r = o(t)$. Тогда $s/t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ и $r/t \approx 0$. Таким образом, $(s + r)/t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$, т. е. $s + r = O(t)$. $\rhd$

2.2.12. *Для чисел $s, t \in \mathbb{R}$ равносильны утверждения:*

(1) *s и t эквивалентны;*

(2) *$s - t = o(t)$ или $t - s = o(s)$;*

(3) *$s/t \approx 1$ или $t/s \approx 1$;*

(4) *$s/t \approx 1$ и $t/s \approx 1$.*

$\lhd$ Ясно, что (1) $\to$ (2). Если, к примеру, $t - s = o(s)$, то выполняется $(t - s)/s \approx 0$, т. е. $t/s - 1 \approx 0$. Отсюда для $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \in {}^{\circ}\mathbb{R}$ имеем $1 - \varepsilon \le t/s \le 1 + \varepsilon$. Значит, $(1 - \varepsilon)^{-1} \ge s/t \ge (1 + \varepsilon)^{-1}$ и $\varepsilon/(1 - \varepsilon) \ge s/t - 1 \ge \varepsilon/(1 + \varepsilon)$, т. е. $s/t \approx 1$. Итак, (2) $\to$ (3) $\to$ (4). Импликация (4) $\to$ (1) бесспорна. $\rhd$

2.2.13. *Пусть $N \in \mathbb{N}$, а α_k, $\beta_k \in o(1)$ — бесконечно малые и $\alpha_k \cong \beta_k$ для $k := 1, \dots, N$. Справедливы утверждения:*

(1) *$\sum_{k=1}^N \alpha_k \cong \sum_{k=1}^N \beta_k$ при α_k, $\beta_k \ge 0$;*

(2) *если $\sum_{k=1}^N |\alpha_k| = O(1)$ т. е. если названная сумма доступна, то*

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \approx \sum_{k=1}^N \beta_k.$$

$\lhd$ Для доказательства заметим, что в силу 2.2.12 $-\varepsilon\alpha_k + \alpha_k \le \beta_k \le \alpha_k + \varepsilon\alpha_k$ при каждом стандартном $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает (1). Кроме того, если $t := \sum_{k=1}^N |\alpha_k| \in {}^{\approx}\mathbb{R}$, то

$$\left|\sum_{k=1}^N (\alpha_k - \beta_k)\right| \le \sum_{k=1}^N |\alpha_k - \beta_k| \le \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k=1}^N |\alpha_k| \le \varepsilon,$$

как только стандартное $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ таково, что $|t| \le n$. $\rhd$

2.2.14. *Существует такое натуральное число N, что для каждого стандартного числа t из $\mathbb{R}$ произведение Nt бесконечно близко к какому-то натуральному числу.*

$\lhd$ Возьмем конечное подмножество $\{x_1, \dots, x_n\}$ в $\mathbb{R}$, содержащее все стандартные вещественные числа, и какое-нибудь бесконечно малое положительное число $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \approx 0$. В теории чисел устанавливается следующая теорема — «принцип Дирихле для наборов»: при любом $\varepsilon > 0$ и произвольных $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ имеется такое целое число $N \in \mathbb{N}$, что числа $Nx_1, \dots, Nx_n$ отличаются от целых не более чем на ε. Остается применить эту теорему к указанным параметрам. $\triangleright$

2.2.15. Полезно специально подчеркнуть, что бесконечную близость (как и эквивалентность) чисел нельзя назвать подмножеством произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. В самом деле, в противном случае множеством оказался бы образ элемента нуль при этом отношении, т. е. монада $\mu(\mathbb{R})$. Однако, как мы установили, монада $\mu(\mathbb{R})$ множеством не является. Здесь же стоит подчеркнуть, что монада $\mu(\mathbb{R})$ *неделима* в следующем точном смысле: для каждого стандартного n верно: $n^{-1}\mu(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R})$.

При продумывании роли монады $\mu(\mathbb{R})$ в построении системы целых чисел поучительно обратиться к определению 2 цитированной книги седьмой «Начал» Евклида: «Число же — множество, составленное из монад» [183, с. 9]. Аналогично, вся «нестандартная» расширенная числовая прямая $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ и, что наиболее нетривиально, ее доступная часть ${}^{\approx}\mathbb{R}$ представляют собой наборы монад, размещенных в стандартных точках. Более строгая формулировка этого утверждения основывается на следующем фундаментальном факте, доказательство которого существенно опирается на принцип стандартизации.

2.2.16. *Для произвольного доступного числа существует и притом единственное бесконечно близкое к нему стандартное число.*

$\triangleleft$ По принципу стандартизации при данном $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ можно организовать стандартное множество $A := {}^{*}\{a \in \mathbb{R} : a \leq t\}$. Ясно, что $A \neq \varnothing$ и $A \leq n$, где стандартное число $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ таково, что $-n \leq t \leq n$. В самом деле, для каждого стандартного $a \in A$ будет $a \leq t \leq n$. По принципу переноса заключаем: $A \leq n$. В силу полноты $\mathbb{R}$ имеется $s := \sup A \in \mathbb{R}$. Очевидно, s — стандартное число. Покажем, что $s \approx t$. В противном случае при некотором стандартном $\varepsilon > 0$ будет $|s - t| > \varepsilon$. Если $s \geq t$, то получится $s \geq t + \varepsilon$, т. е. $s \geq a + \varepsilon$ для каждого стандартного $a \in A$. Но тогда было бы $s \geq s + \varepsilon$, что неверно. Оставшаяся возможность $s < t$ приводит к противоречию столь же скоро. В самом деле, было бы $t > s + \varepsilon$ и вновь $s \geq s + \varepsilon$. $\triangleright$

2.2.17. Стандартное число, являющееся бесконечно близким к доступному числу $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$, называют *стандартной частью* или *тенью* числа t и обозначают $\mathrm{st}(t)$ или ${}^{\circ}t$. Для удобства полагают также

$^\circ t = \mathrm{st}(t) = +\infty$, если $t \approx +\infty$, и соответственно $^\circ t = \mathrm{st}(t) = -\infty$ при $t \approx -\infty$ (при этом, конечно же, считают, что $+\infty \approx +\infty$ и $-\infty \approx -\infty$). Таким образом, каждому (стандартному) $t \in \overline{\mathbb{R}}$ отнесена его монада $\mu(t)$, т. е. элементы s из $\mathbb{R}$, для которых $s \approx t$.

Значит, расширенную прямую в нестандартном анализе нужно представлять себе в связи со схемой, указанной на рис. 2. Выделяя стандартное число $^\circ t$ на оси $\mathbb{R}$, мы рисуем жирную точку — монаду $\mu(^\circ t)$ — «неделимое, точное изображение $^\circ t$». Если направить сильный микроскоп в район точки t, то в окуляре мы усидим расплывшееся облачко с неясными краями, представляющее образ $\mu(t)$. При выборе объектива с еще большей степенью увеличения наблюдаемый нами кусочек «точки-монады» детализируется, станет крупнее и частично выйдет из поля зрения. При этом всякий раз мы имеем дело с одним и тем же стандартным вещественным числом, которое, если угодно, описано приведенным процессом «изучения микроструктуры физической прямой».

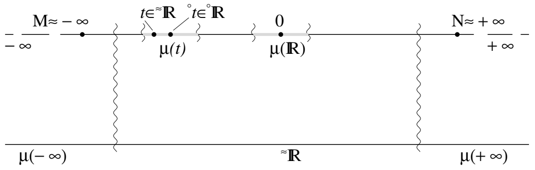


Рис. 2

2.2.18. *Справедливы утверждения:*

(1) *для* $s \in \mathbb{R}$, $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ *выполняется*

$$\mathrm{st}(s+t) = \mathrm{st}(s) + \mathrm{st}(t); \quad \mathrm{st}(st) = \mathrm{st}(s)\,\mathrm{st}(t);$$

(2) *если* $s, t \in \mathbb{R}$ *и* $s \le t$, *то* $^\circ s \le {}^\circ t$;

(3) *для произвольных элементов* $s, t \in \overline{\mathbb{R}}$ *выполнены соотношения:*

$$(\exists\, t' \approx t)(t' \ge s) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow {}^\circ s \le {}^\circ t \leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0, \varepsilon \in {}^\circ\mathbb{R})(s \le {}^\circ t + \varepsilon);$$

$$(\forall\, t' \approx t)(t' \ge s) \leftrightarrow {}^\circ s < t \quad ({}^\circ t \in {}^\circ\mathbb{R});$$

(4) *переход от вещественного числа к его стандартной части не является множеством* (*и, в частности, функцией*).

$\lhd$ (1): Установим, например, мультипликативность перехода к стандартной части. Имеем: $s \approx \mathrm{st}(s) \to ts \approx t\,\mathrm{st}(s)$. Помимо того, $t \approx \mathrm{st}(t) \to \mathrm{st}(s)t \approx \mathrm{st}(t)\,\mathrm{st}(s)$. Окончательно $st \approx \mathrm{st}(s)\,\mathrm{st}(t)$. Осталось понять, что произведение стандартных чисел стандартно.

(2): Пусть $s < t$ (иначе все и так ясно). Если $s \approx t$, то $\mathrm{st}(s) = \mathrm{st}(t)$. В противном случае монады $\mu(s)$ и $\mu(t)$ не пересекаются. Отсюда следует: ${}^{\circ}s < {}^{\circ}t$.

(3): В начальной эквивалентности правая импликация очевидна, а противоположная обеспечена тем, что при $s \leq {}^{\circ}t$ будет $s \leq {}^{\circ}t + s - {}^{\circ}s$. Кроме того, $s < t + \varepsilon \to \mathrm{st}(s) \leq \mathrm{st}(t) + \mathrm{st}(\varepsilon) = {}^{\circ}t + \varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in {}^{\circ}\mathbb{R}$. По принципу переноса это означает, что и при произвольном положительном ε будет ${}^{\circ}s \leq {}^{\circ}t + \varepsilon$ и, стало быть, ${}^{\circ}s \leq {}^{\circ}t$. В свою очередь, если ${}^{\circ}s < {}^{\circ}t$, то, учитывая, что монады $\mu^{\circ}(s)$ и $\mu({}^{\circ}t)$ не пересекаются, выводим: $s < {}^{\circ}t + \varepsilon$ для всякого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in {}^{\circ}\mathbb{R}$.

Для проверки стрелки вправо в нижней эквивалентности заметим, что s не лежит в монаде $\mu(t)$ числа t. Значит, вся монада s лежит левее монады t, т. е. $\mu(s) < \mu(t)$. Следовательно, ${}^{\circ}s < {}^{\circ}t$. Наконец, для установления оставшейся импликации заметим, что при ${}^{\circ}s = -\infty$ будет $\mu(t) > {}^{\circ}s$, ибо $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$. Если же ${}^{\circ}s \in {}^{\circ}\mathbb{R}$, то $\mu({}^{\circ}s) < {}^{\circ}t$. Поэтому для $t' \approx t$ выполнено: $t' \geq s$.

(4): Если бы закон $t \mapsto \mathrm{st}(t)$ был множеством, то множеством была бы монада $\mu(\mathbb{R})$, ибо $t \in \mu(\mathbb{R}) \leftrightarrow {}^{\circ}t = 0$. Осталось учесть 2.2.9. $\rhd$

2.3. Начальные понятия математического анализа на прямой

Обсудим теперь фундаментальные понятия, связанные с дифференциальным и интегральным исчислением функций одной вещественной переменной.

2.3.1. *Нестандартные критерии пределов.* *Для произвольной стандартной последовательности* (a_n) *и любого стандартного числа* $a \in \mathbb{R}$ *имеют место утверждения:*

(1) *число* a *— частичный предел* (a_n) *в том и только в том случае, если для некоторого бесконечно большого* N

выполнено $a = {}^\circ a_N$;

(2) *число a — предел (a_n) в том и только в том случае, если для всех бесконечно больших номеров N член a_N бесконечно близок к a, т. е.*

$$a = \lim a_n \leftrightarrow (\forall\, N \approx +\infty)(a_N \approx a).$$

$\lhd$ Приведенные утверждения проверяются вполне аналогично. Поэтому установим лишь одно из них, например (2). Итак, пусть $a_n \to a$ и для определенности будем считать, что $a \in \mathbb{R}$ (случаи $a = +\infty$ или $a = -\infty$ разбираются по той же схеме). По условию для произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ и некоторого $n \in \mathbb{N}$ будет $|a_N - a| \leq \varepsilon$, как только $N \in \mathbb{N}$ и $n \leq N$. Значит, для стандартного $\varepsilon > 0$ найдется стандартное n с тем же свойством в силу принципа переноса. Каждое бесконечно большое N мажорирует найденное n, т. е. $|a_N - a| \leq \varepsilon$. В силу произвольности ε это означает, что $a_N \approx a$.

Пусть, в свою очередь, известно, что для всех $N \approx +\infty$ верно ${}^\circ a_N = a$. Будем для определенности и разнообразия считать, что $a := -\infty$. Возьмем произвольное стандартное число $n \in {}^\circ\mathbb{N}$. Ясно, что для всех $N \geq M$, где M — какое-либо бесконечно большое число, будет $a_N \leq -n$. Итак, для каждого стандартного n мы доказали «нечто» (именно, «нечто»: $= (\exists\, M)(\forall\, N \geq M)(a_N \leq -n)$). По принципу переноса это «нечто» верно для всякого $n \in \mathbb{N}$. Последнее, как всем известно, и означает, что $a_n \to -\infty$. $\rhd$

2.3.2. Подчеркнем достоинства найденных критериев. Мы увидели, что частичные пределы стандартной последовательности — это в точности те доступные числа, которые отвечают бесконечно большим номерам. Иначе говоря, частичный предел представляет собой «наблюдаемое» значение некоторого бесконечно далекого члена последовательности. Приведенные утверждения имеют ясное интуитивное обоснование и чрезвычайно резко отличаются от обычных определений частичного предела как числа, к которому стремится некоторая подпоследовательность исходной последовательности, или как такого элемента прямой, что всякий интервал, его содержащий, пересекается с любым остатком — «хвостом» — рассматриваемой последовательности.

Поучительно ознакомиться с разъяснением понятия частичного предела [обобщенной] последовательности, которым Н. Н. Лузин сопроводил формулировку общепринятого определения (см. [155, с. 98–99]): «Читателю эта формулировка, без сомнения, в начале покажется громоздкой и отвлеченной. Но чувство неясности исчезнет, если читатель призовет на память привычное ему понятие „переменного“ и „времени“. В самом деле, чего хочет добиться данная формулировка, если ее перевести на язык „переменного“ и „времени“? Для того, чтобы понять это, рассмотрим переменное x, которое „пробегает“ данную числовую последовательность M, переходя от предшествующих чисел к последующим ... данная формулировка на языке переменного и времени означает, что ([частичным]) *пределом* числовой последовательности M называется такое число a, от которого переменное x окончательно отделиться не может, так как „по временам“ величина переменного x делается сколь угодно „близкой“ к a».

В нестандартном анализе, прибегая к тем же образам, мы можем сказать еще нагляднее и яснее: «если переменная x в какой-нибудь бесконечно далекий момент времени бесконечно мало отличается от a, то a есть [частичный] предел M».

Переходя к обсуждению нестандартного критерия предела последовательности, обратимся к следующим указаниям Р. Куранта:

«**Мотивировка точного определения предела.** Не следует удивляться, что тот, кто в первый раз слышит отвлеченное определение предела последовательности, не сразу его вполне поймет. Определение предела как бы заводит игру между двумя лицами A и B: A требует, чтобы постоянная величина a могла быть приближенно представлена величиной a_n таким образом, чтобы отклонение было меньше заданной им, A, произвольной грани $\varepsilon = \varepsilon_1$. B выполняет это требование тем, что доказывает существование такого целого числа $N = N_1$, что все a_n, начиная с элемента a_N, удовлетворяют требованию ε_1. Тогда A хочет задать новую, меньшую грань $\varepsilon = \varepsilon_2$, B со своей стороны выполняет это требование тем, что находит новое целое число $N = N_2$ (быть может, много большее), и т. д. Если B в состоянии всегда удовлетворить требования A, какую бы малую грань A ни задавал, тогда мы имеем ту ситуацию, которая выражается символом $a_n \to a$.

Существует, без сомнения, психологическая трудность в овладении этим точным определением предельного перехода. Наше наглядное представление внушает „динамическую“ идею предельного перехода как результата движения: мы „пробегаем“ последовательность чисел 1, 2, 3, $\ldots, n \ldots$ и наблюдаем при этом поведение последовательности a_n. У нас такое ощущение, что при этом „пробегании“ приближение должно быть доступно наблюдению. Но эта „естественная“ установка не допускает точной математической формулировки. Для того чтобы прийти к точному определению, необходимо обратить порядок рассмотрения: вместо того, чтобы сперва следить за аргументом n и затем рассматривать связанную с ним зависимую переменную a_n, мы основываем наше определение на шагах, которые допускают последующую *проверку* утверждения $a_n \to a$. При таком исследовании приходится сначала выбирать сколь угодно малый интервал, окружающий a, а затем проверять, возможно ли выполнить это условие, выбирая независимую переменную n достаточно большой. Так-то мы приходим к точному определению предела, присваивая выражениям „сколь угодно малая грань“ и „достаточно большое n“ символические имена ε и N» [105, с. 66–67].

Разумеется, что признак, сформулированный в 2.3.1 (2): «если для всех бесконечно больших N общий член a_N невозможно отличить от стандартного числа a, то a объявляется (и является на самом деле) пределом (a_n)» — удачно схватывает динамическую идею предельного перехода.

Следует всегда помнить при этом, что нестандартный критерий предела применим только к стандартным последовательностям и не верен, вообще говоря, для нестандартных — плохо описанных — последовательностей. Так, если $a_n := N/n$, где $N \approx +\infty$, то $a_n \to 0$ и в то же время $a_N = 1$. Другими словами, критерий 2.3.1 дополняет современные представления о пределе, а не отвергает или отменяет их. Более точно, определяя предел только для стандартных последовательностей, мы тем самым автоматически формируем стандартное множество всех сходящихся последовательностей с помощью принципа стандартизации. Иначе говоря, привычное ε-N-определение и непривычное определение с актуальными бесконечно большими и бесконечно малыми теснейшим образом взаимосвязаны, находятся в неразрывном единстве.

Полезно особо подчеркнуть, что в приложениях (в физике, в частности) приходится сталкиваться с реальными, явно описанными, т. е. стандартными последовательностями. Кроме того, в подобных ситуациях «бесконечно большое» имеет точный (физический) смысл — прямо указывается горизонт — граница, за которой числа объявлены неразличимыми. Учитывая также, что проблемы существования равным образом решаются на практике из содержательных соображений (если нет физической скорости, ее не стоит и искать), возникает задача опознания заведомо имеющегося предела стандартной последовательности. Нестандартный анализ дает простой рецепт: «Возьмите общий член вашей последовательности с каким-нибудь (все равно каким) бесконечно большим номером; определяемое (с точностью до малых) этим членом число и есть искомый предел». В этой связи становится более понятной обоснованность методов родоначальников дифференциального и интегрального исчисления, которые искали ответы на вопросы о точных значениях конкретных «стандартных» объектов: площадей фигур, уравнений касательных к «именным» кривым, интегралов явно выписанных аналитических выражений и т. п.

2.3.3. Важным новым вкладом нестандартного анализа является формирование понятия предела *конечной последовательности* $a[N] := (a_1, \dots, a_N)$, где N — бесконечно большое натуральное число. Интуитивная идея, положенная в основу следующего определения, хорошо отражает практические приемы нахождения числовых характеристик необозримых дискретных совокупностей — термодинамических параметров объемов жидкости или газа, оценок спроса населения и т. п.

2.3.4. Число a называют *микропределом* или *околопредельным значением* последовательности $a[N]$, если для всех бесконечно больших M, меньших N, будет $a_M \approx a$. При этом говорят также, что $a[N]$ *почти сходится* к a. В случае, когда a — доступное число, стандартную часть ${}^\circ a$ называют пределом (или S-*пределом*) последовательности $a[N]$ и пишут ${}^\circ a = {}^\approx\lim a[N]$ или ${}^\circ a = S\text{-}\lim_{n\le N} a_n$. Итак,

$$
{}^\circ a = {}^\approx\lim a[N] \leftrightarrow a \in {}^\approx\mathbb{R} \wedge (\forall\, M \approx +\infty, M \le N)(a_M \approx a).
$$

2.3.5. *Пусть* (a_n) — *стандартная последовательность,* $N \approx +\infty$ *и* $a \in {}^\approx\mathbb{R}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) a — *микропредел* $a[N]$;

(2) *последовательность* (a_n) *сходится к* ${}^\circ a$.

$\lhd$ Импликация (2) $\to$ (1) содержится в 2.3.1(2). Для доказательства (1) $\to$ (2) возьмем произвольное стандартное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество

$$A := \{m \in \mathbb{N} : (\forall\, n)(m \le n \le N) \to |a_n - {}^{\circ}a| \le \varepsilon\}.$$

Множество A непусто, ибо $N \in A$. Значит, A содержит наименьший элемент m. Если $m \approx +\infty$, то $m - 1 \approx +\infty$ и по условию $m - 1 \in A$. Таким образом, m стандартно. Кроме того, если $n \ge m$ и n стандартно, то $n \le N$ и $|a_n - {}^{\circ}a| \le \varepsilon$. Итак, $(\forall\, \varepsilon \in {}^{\circ}\mathbb{R}, \varepsilon > 0)$ $(\exists\, m \in {}^{\circ}\mathbb{N})$ $(\forall\, n \in {}^{\circ}\mathbb{N})$ $n \ge m \to |a_n - {}^{\circ}a| \le \varepsilon$. По принципу переноса заключаем: (a_n) сходится к ${}^{\circ}a$. $\rhd$

2.3.6. Установленный признак дает точное обоснование *принципа заданного горизонта*, состоящего в том, что в конкретных исследованиях указывают «физическое» или «экономическое» актуальное бесконечно большое число, служащее как мерилом представительности исследуемой совокупности, так и естественной границей сверху.

2.3.7. Примеры.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$

$\lhd$ Возьмем бесконечно большое $\imath$. Имеем ${}^{\circ}\bigl(\frac{\imath-1}{\imath}\bigr) = {}^{\circ}\bigl(1 - \frac{1}{\imath}\bigr) = 1$. Подробнее говоря (Л. Эйлер): «Так как $\imath$ есть число бесконечно большое, то $\frac{\imath-1}{\imath} = 1$; действительно, ясно, что чем большее число подставим вместо $\imath$, тем ближе значение $\frac{\imath-1}{\imath}$ будет подходить к единице; если $\imath$ станет больше всякого заданного числа, то дробь $\frac{\imath-1}{\imath}$ станет равна единице» [236, с. 116]. $\rhd$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$

$\lhd$ Для каждого бесконечно большого N имеем $2^N = (1+1)^N \ge N(N-1)/2$, т. е. $0 \le N/2^N \le 2/(N-1) \approx 0$. Итак, $N/2^N \approx 0$. $\rhd$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2\pi n! e) = 0.$

$\lhd$ Для каждого натурального n выполнено

$$0 < e - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(k+1)!}.$$

Отсюда для бесконечно большого N выводим

$$0 \leq N!\left(e - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}\right) \leq \frac{3N!}{(N+1)!} = \frac{3}{N+1} \approx 0.$$

Пусть $x := 2\pi N!e$ и $y := 2\pi N! \sum_{k=1}^{N} 1/k!$. Тогда $x \approx y$. При этом $\sin y = 0$. Ясно, что

$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right| \leq |x-y|,$$

т. е. $\sin x \approx \sin y = 0$. $\rhd$

(4) *Пусть (a_n) такова, что последовательности (a_{2n}), (a_{2n+1}) и (a_{3n}) сходятся. Тогда (a_n) сходится.*

$\lhd$ Можно считать, что (a_n) — стандартная последовательность. Для бесконечно большого N будет $2N \approx +\infty$, $2N+1 \approx +\infty$ и $3N \approx +\infty$, т. е. $a_{2N} \approx a$, $a_{2N+1} \approx b$, $a_{3N} \approx c$ для некоторых стандартных чисел a, b, c. В частности, $a_{6N} \approx a \approx c$ и $a_{6N+1} \approx b \approx c$. Значит, $a = b = c$, что и нужно. $\rhd$

(5) *Пусть (a_n) сходится к нулю, тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = 0.$$

$\lhd$ В силу принципа переноса можно считать, что последовательность (a_n) стандартна. Возьмем $N \approx +\infty$. Пусть M есть целая часть $\sqrt{N}$. Ясно, что M — бесконечно большое число. При этом для каждого стандартного $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ будет $|a_N| \leq n^{-1}$, стало быть,

$$s_N := \left|\frac{a_1 + \ldots + a_N}{N}\right| \leq \left|\frac{a_1 + \ldots + a_M}{N}\right| + \left|\frac{a_{M+1} + \ldots + a_N}{N}\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{n}\frac{N-M-1}{N} + \frac{M}{N}\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Поскольку $1/N \approx 0$ и $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \in {}^{\circ}\mathbb{R}$, выводим, что число s_N бесконечно мало. $\rhd$

(6) *Существует банахов предел, т. е. такой непрерывный линейный функционал l на пространстве $l_\infty :=$*

$l_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, *что для каждой последовательности* $a := (a_n)$ *из* l_∞ *верно*:

$$(\exists \lim a_n) \to l(a) = \lim a_n;$$
$$\liminf a_n \le l(a) \le \limsup a_n;$$
$$('a)(n) := a_{n+1} \to l(a) = l('a).$$

$\lhd$ Для доказательства этого утверждения возьмем какое-нибудь бесконечно большое натуральное число N. Для каждой стандартной последовательности $a = (a_k)$ из l_∞ величина

$$f(a) := \frac{1}{N} \sum_{k=N}^{2N-1} a_k$$

доступна. В самом деле, в силу стандартности a величина $\|a\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ стандартна. Кроме того,

$$|f(a)| \le \frac{1}{N} \sum_{k=N}^{2N-1} |a_k| \le \frac{1}{N} \sum_{k=N}^{2N-1} \|a\|_\infty \le \|a\|_\infty.$$

Учитывая стандартность множества $l_\infty \times \mathbb{R}$, рассмотрим теперь стандартизацию

$$l := {}^*\{(a,t) \in l_\infty \times \mathbb{R} : t = {}^\circ f(a)\}.$$

Докажем, что l — искомый объект. Прежде всего, установим, что l — функция. Надо показать, что

$$(\forall\, a \in l_\infty)(\forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R})((a,t_1) \in l \wedge (a,t_2) \in l \to t_1 = t_2).$$

Достаточно проверить это свойство для стандартных a, t_1, t_2 в силу принципа переноса. Но в таком случае по определению стандартизации $t_1 = {}^\circ f(a)$ и $t_2 = {}^\circ f(a)$. Осталось вспомнить (см. 2.2.16), что стандартная часть единственна. Линейность l проверяется таким же рассуждением. Столь же ясно, что $a \ge 0 \to l(a) \ge 0$, т. е. l положителен.

Пусть a — сходящаяся к $\bar{a}$ стандартная последовательность. Тогда для каждого стандартного $\varepsilon > 0$ в силу 2.3.1(2) выполнено $|a_N -$

$\bar{a}| \le \varepsilon, \dots, |a_{2N-1} - \bar{a}| \le \varepsilon$, ибо все a_M при $M \ge N$ бесконечно близки к $\bar{a}$. Отсюда

$$|f(a) - \bar{a}| = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=N}^{2N-1} (a_k - \bar{a}) \right| \le \varepsilon,$$

т. е. $\bar{a} = {}^\circ f(a)$. Найденное свойство вместе с положительностью l обеспечивают искомые оценки.

Осталось установить инвариантность построенного функционала относительно сдвигов: $l('a) = l(a)$ для всех $a \in l_\infty$. Вновь можно считать, что последовательность a стандартна. В этом случае элемент $'a$ также стандартен и, следовательно,

$$l('a) = {}^\circ\left(\frac{1}{N} \sum_{k=N}^{2N-1} a_{k+1} \right) = \operatorname{st}\big(N^{-1}(a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{2N})\big) =$$

$$= \operatorname{st}\left(\frac{1}{N} \sum_{k=N}^{2N-1} a_k + \frac{1}{N} a_{2N} - \frac{1}{N} a_N \right) = {}^\circ\big(f(a) + N^{-1}a_{2N} - N^{-1}a_N\big) =$$

$$= {}^\circ f(a) + (N^{-1}a_{2N}) - {}^\circ(N^{-1}a_N) = {}^\circ f(a) = l(a).$$

Здесь мы учли доступность чисел a_{2N}/N и a_N/N и 2.2.18. $\triangleright$

2.3.8. *Нестандартный критерий непрерывности.* *Пусть f — стандартная числовая функция и x — стандартная точка ее области определения* $\operatorname{dom}(f)$. *Эквивалентны утверждения:*

(1) *f непрерывна в точке x;*

(2) *f переводит точки, бесконечно близкие к x, в точки, бесконечно близкие к $f(x)$, т. е.*

$$x' \approx x,\ x' \in \operatorname{dom}(f) \to f(x') \approx f(x).$$

$\triangleleft$ (1) $\to$ (2): Заметим прежде всего, что $\operatorname{dom}(f)$ — стандартное множество, и возьмем стандартное число $\varepsilon > 0$. Найдется $\delta > 0$ такое, что при $|x' - x| \le \delta$ и $x' \in \operatorname{dom}(f)$ будет $|f(x') - f(x)| \le \varepsilon$. В силу принципа переноса имеется и стандартное δ с тем же свойством. Если $x' \approx x$ и $x' \in \operatorname{dom}(f)$, то, конечно, $|x' - x| \le \delta$ (ибо $\delta \in {}^\circ\mathbb{R}$) и, стало быть, $|f(x) - f(x')| \le \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon \in {}^\circ\mathbb{R}$ это означает, что $f(x') \approx f(x)$.

(2) $\to$ (1): Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Нам нужно подыскать δ, фигурирующее в «ε-δ-определении». По принципу переноса

достаточно найти такое δ лишь для стандартного ε. В последнем же случае в качестве δ можно взять любое актуальное бесконечно малое положительное число. $\rhd$

2.3.9. В связи с 2.3.8 (2) функцию $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ называют *микронепрерывной в точке* x из $\mathrm{dom}(f)$, если при $x' \in \mathrm{dom}(f)$ и $x' \approx x$ будет $f(x') \approx f(x)$.

2.3.10. При обсуждении найденного нестандартного критерия, состоящего в том, что «непрерывность и микронепрерывность для стандартных функций в стандартной точке совпадают», можно повторить аргументацию, приведенную в 2.3.2. Стоит подчеркнуть, следуя Р. Куранту, что «как и в случае предела последовательности, определение Коши покоится, так сказать, на обращении интуитивно приемлемого порядка, в каком хотелось бы рассматривать переменные. Вместо того, чтобы рассматривать сперва независимую, а затем зависимую переменную, мы сначала направляем свое внимание „на границу точности“ ε для зависимой переменной, а потом пытаемся ограничить соответствующую „арену“ δ для независимой переменной» [105, с. 73]. Нестандартный критерий освобождает нас от неприятного обращения кванторов для всех доступных нам — стандартных — функций и точек. В то же время ε-δ-определение в полном объеме лишь косвенно восстанавливается через микронепрерывность в точке с помощью процедуры стандартизации. Так что вновь, как и следовало ожидать, стандартный и нестандартный подходы демонстрируют свое непростое — подлинное — единство. Интересным приобретением является новое математическое свойство — микронепрерывность функции в точке. Понять микронепрерывность в большем объеме помогают следующие утверждения.

2.3.11. Примеры.

(1) *Функция $x \mapsto x^2$ не является микронепрерывной в каждой бесконечно большой точке $t \in \mathbb{R}$.*

$\lhd$ В самом деле, $t + t^{-1} \approx t$ и в то же время $(t + t^{-1})^2 - t^2 \approx 2$. $\rhd$

(2) *Пусть δ — строго положительное бесконечно малое число. Рассмотрим функцию $x \mapsto \delta \sin(x^{-1})$, доопределяемую в нуле нулем. Эта функция разрывна в нуле и микронепрерывна в нуле.*

$\lhd$ Достаточно заметить, что $\sin x \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ для $x \in \mathbb{R}$, и сослаться на свойства бесконечно малых чисел 2.2.8. $\rhd$

2.3.12. *Нестандартный критерий равномерной непрерывности.* *Для стандартной числовой функции f, определенной на стандартном множестве $\operatorname{dom}(f)$, справедливы утверждения:*

(1) *f микронепрерывна, т. е. f микронепрерывна в каждой точке из $\operatorname{dom}(f)$ — символически:*

$$(\forall\, x, x' \in \operatorname{dom}(f))(x' \approx x \to f(x') \approx f(x));$$

(2) *f равномерно непрерывна.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Пусть $\varepsilon > 0$ — стандартное число и $\delta > 0$ бесконечно мало. Ясно, что при $|x - x'| \leq \delta$ будет $x \approx x'$. Значит,

$$(\forall\, \varepsilon \in {}^{\circ}\mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x, x' \in \operatorname{dom}(f))$$
$$(|x - x'| \leq \delta \to |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon).$$

Привлекая принцип переноса, убеждаемся в равномерной непрерывности f.

(2) $\to$ (1): В силу принципа переноса для каждого стандартного $\varepsilon > 0$ и некоторого стандартного $\delta > 0$ будет $|x - x'| \leq \delta \to |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$ при любых $x, x' \in \operatorname{dom}(f)$. Замечая, что $x \approx x' \to |x - x'| \leq \delta$, приходим к требуемому. $\rhd$

2.3.13. *Нестандартный критерий производной.* *Пусть f — стандартная функция, определенная в стандартной окрестности стандартной точки x из ${}^{\circ}\mathbb{R}$. Эквивалентны утверждения:*

(1) *f дифференцируема в точке x и $f'(x) = t$;*

(2) *для каждого ненулевого бесконечно малого числа h выполнено*

$$t = \operatorname{st}((f(x + h) - f(x))/h).$$

$\lhd$ Требуемое есть прямое следствие 2.3.8. $\rhd$

2.3.14. *Пусть y — стандартная функция, определенная в окрестности стандартной точки x и дифференцируемая в этой точке. Пусть, далее, dx — произвольное ненулевое бесконечно малое число. Обозначим (следуя Г. В. Лейбницу) символом dy дифференциал функции y в точке x, примененный к элементу dx. Тогда*

$$dy \approx y(x + dx) - y(x), \qquad \frac{dy}{dx} = y'(x).$$

$\lhd$ По определению Г. В. Лейбница, с учетом 2.3.9, имеем

$$dy = y'(x)dx, \quad y'(x) = \operatorname{st}\left(\frac{y(x+dx) - y(x)}{dx}\right).$$

Значит,

$$dy \approx \frac{y(x+dx) - y(x)}{dx}dx = y(x+dx) - y(x),$$

что доказывает первую часть утверждения. Вторая часть — следствие 2.3.10. $\rhd$

2.3.15. Приведенные в 2.3.13 и 2.3.14 нестандартные толкования роли бесконечно малых при определении производных, дифференциалов и приращений дополняют указания Л. Эйлера:

«В дифференциальном исчислении я уже отметил, что задачу разыскания дифференциалов нужно понимать не в абсолютном, а в относительном смысле; это значит, что если y есть некоторая функция от x, то нужно определить не столько сам ее дифференциал, сколько его отношение к дифференциалу dx. Действительно, так как все дифференциалы сами по себе равны нулю, то какова бы ни была функция y количества x, всегда $dy = 0$; таким образом, в абсолютном смысле здесь чего-нибудь большего нельзя и искать. Правильная же постановка вопроса такова: x получает бесконечно малое, т. е. исчезающее[1] приращение dx; требуется определить, как относится к dx приращение, которое вследствие этого получает функция y. Правда, оба приращения $= 0$, однако между ними существует определенное отношение, которое и находится должным образом в дифференциальном исчислении. Так, если $y = x^2$, то, как доказывается в дифференциальном исчислении, $\frac{dy}{dx} = 2x$, и это отношение приращений верно лишь в том случае, если приращение dx, которым порождается dy, считать равным нулю. Тем не менее после того, как сделано это предостережение об истинном понятии дифференциала, допустимо пользоваться и общепринятыми выражениями, в которых о дифференциалах говорится как бы в абсолютном смысле, лишь бы мысленно всегда иметь в виду истину. Так мы вправе сказать: если $y = x^2$, то $dy = 2xdx$. Правда, если бы кто-либо сказал, что $dy = 3xdx$ или что $dy = 4xdx$, то и это не будет ложным,

[1] Evanescens — актуальное число, которое «есть точно нуль». — Прим. ред.

ибо также и эти равенства имеют место вследствие того, что $dx = 0$ и $dy = 0$. Но лишь первое равенство согласуется с истинным соотношением $\frac{dy}{dx} = 2x$» [238, с. 9].

Полезно отметить, что Л. Эйлер употребляет знак $=$ там, где мы пишем $\approx$ (см. 2.2.10). Кроме того, следует подчеркнуть, что он ищет дифференциал, который считает имеющимся, работая с конкретными (дифференцируемыми) функциями. В этой связи вполне правомочно использовать для нахождения дифференциала любое — как угодно подобранное — бесконечно малое dx.

Итак, для Л. Эйлера с полным основанием дифференциал dy (вычисляемый при бесконечно малом dx) «есть точно нуль», дифференциал dy есть точно приращение — «абсолютный дифференциал» и в то же время дифференциал dy — «четвертый пропорциональный» при бесконечно малых приращениях, т. е. в наших обозначениях:

$$^\circ dy = 0, \quad ^\circ(dy - (y(x + dx) - y(x))) = 0;$$
$$^\circ\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y(x + dx) - y(x)}{dx}\right) = 0.$$

Проведенный анализ показывает корректность представлений и методов Л. Эйлера при работе с явно заданными — стандартными — объектами (функцией y и точкой x) в существеннейшем предположении бесконечной малости dx.

В свете изложенного необходимо с должной критичностью подойти к оценке следующих указаний Р. Куранта: «...если мы хотим постигнуть сущность дифференциального исчисления, то должны остерегаться того, чтобы смотреть на производную как на частное двух действительно существующих (актуальных) „бесконечно малых величин“. Дело обстоит так, что мы всегда должны сперва образовать отношение приращений $\Delta y/\Delta x$, где разность Δx не равна нулю. Затем следует представить себе, что путем преобразования этого отношения или каким-либо другим путем совершен переход к пределу. Но ни в коем случае нельзя представлять себе, что *сперва* совершает какой-то переход от Δx к бесконечно малой величине dx, которая все же отлична от нуля, и от Δy к dy и затем делим эти „бесконечно малые“ друг на друга. Такой взгляд на производную совершенно несовместим с требованием математической ясности понятий, да и вообще не имеет смысла» [105, с. 126–128]. Чрезмерная жесткость последней фразы лишь отчасти смягчается дальнейшим

разъяснением: «Физик, биолог, техник или всякий другой, кому приходится практически иметь дело с этими понятиями, имеет поэтому право, в пределах требуемой точности, отождествить производную с отношением приращений...
...„физически бесконечно малые“ величины имеют точный смысл. Это, безусловно, конечные, отличные от нуля величины, только выбранные в рассматриваемом вопросе достаточно малыми, например меньше какой-то доли длины волны или меньше расстояния двух электронов в атоме и т. п., вообще меньше некоторой желательной степени точности» [105, с. 135].

2.3.16. *Нестандартное представление интеграла Римана.* *Пусть* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *— стандартная непрерывная функция и* $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_N < x_{N+1} = b$ *— разбиение* $[a,b]$, *причем* $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ *и* $x_k \approx x_{k+1}$ *для* $k := 1, \ldots, N$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = {}^{\circ}\!\left(\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)\right).$$

$\lhd$ Следует заметить, прежде всего, что N бесконечно велико, и воспользоваться как определением интеграла, так и нестандартными критериями предела 2.3.1 и равномерной непрерывности f 2.3.12. $\rhd$

2.3.17. *Основной принцип интегрального исчисления.* *«...Возможно при вычислении суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых [одного знака] откидывать от каждого слагаемого бесконечно малую высшего порядка».*

$\lhd$ Пусть имеется сумма ${}^{\circ}\sum_{k=1}^{N} \alpha_k = t$, где $\alpha_k \approx 0$. По условию заданы $\beta_k := \alpha_k - o(\alpha_k)$. В силу 2.2.13 (2) выводим $\beta_k \cong \alpha_k$ и, стало быть,

$$t = {}^{\circ}\!\left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k\right) = {}^{\circ}\!\left(\sum_{k=1}^{N} \beta_k\right).$$

Это и требовалось. $\rhd$

2.3.18. Приведенные утверждения дают формальное обоснование представления интеграла в виде конечной суммы бесконечно малых элементов, т. е. оправдывают идущее из глубокой древности понимание интегрирования как своеобразного процесса суммирования. Полезно в этой связи привести здесь определение интеграла («с переменным верхним пределом»), данное Л. Эйлером:

«Интегрирование обычно определяется так. Говорят, что это есть суммирование всех значений дифференциального выражения $X\,dx$, если переменному x придавать последовательно все отличающиеся друг от друга на разность dx значения, начиная с некоторого данного значения вплоть до x, разность же эту считать бесконечно малой... Из изложенного же метода, во всяком случае, ясно, что интегрирование можно получить из суммирования с любой точностью; точно же его нельзя совершить иначе, как положив, что разности являются бесконечно малыми, т. е. нулями» [238, с. 163].

Стоит вновь подчеркнуть, что для поиска интеграла стандартной непрерывной функции в силу приведенных выше фактов следует найти точное значение (= стандартную часть) всего одной конечной суммы бесконечно большого числа малых слагаемых, в которой можно отбрасывать малые высших порядков. Для нестандартных функций этот прием, вообще говоря, не действует. Иначе говоря, как и в предыдущих случаях, мы обнаруживаем, что нестандартные представления об объектах математического анализа дополняют, уточняют и развивают (но ни в коей мере не отменяют) свои классические аналоги.

2.3.19. Отмеченные обстоятельства свидетельствуют, что нестандартный анализ в его теперешних формах — прямой наследник исчисления бесконечно малых. Именно поэтому сейчас все большее распространение получает термин «*инфинитезимальный анализ*».

Последний значительно точнее отражает суть дела, чем несколько экстравагантное название «нестандартный анализ», довольно часто вызывающее в конечном счете оправданное раздражение.

Стоит обратить особое внимание на то, что концепция актуальных бесконечно больших и бесконечно малых величин за последние триста лет никогда не исчезала из арсенала рабочих средств естествознания, а лишь отсутствовала в математике в течение примерно тридцати лет. Это позволяет нам не останавливаться подробнее на значении нестандартных методов.

Глава 3

Теоретико-множественные формализмы нестандартного анализа

Проведенное нами на содержательном «наивном» уровне обсуждение различий между стандартным — осуществимым и нестандартным — косвенным способами задания объектов позволило вложить согласующийся с интуицией смысл в понятия актуальных бесконечно большого и бесконечно малого чисел. В качестве замечательного приобретения удалось глубже освоить способы рассуждения, принятые при оформлении математического анализа.

В то же время уже в простейших примерах мы сталкиваемся с серьезными трудностями. Прежде всего, остается неясным способ различения стандартных объектов от нестандартных, что заставляет считаться с возможностью неправильного применения принципов нестандартного анализа. Растущую тревогу вызывает появление объектов, сформированных по виду вполне приемлемыми математическими конструкциями, за которыми без противоречий не удается признать статуса «наивных» множеств. Здесь стоит назвать всевозможные монады, совокупности стандартных элементов, объекты $\approx$, ${}^{\approx}\mathbb{R}$, O, o и т. д.

Еще более неприятно, что «математический закон» $x \mapsto {}^{\circ}x$, действующий из $\overline{\mathbb{R}}$ в $\overline{\mathbb{R}}$, не является функцией. Дело в том, что понятие функции сформировано в математике задолго до появления теоретико-множественной установки. Так, еще в 1755 г. Л. Эйлер писал: «Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменениям, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других. Итак, ... все количества, которые как-либо зависят от x, т. е. определяются им, называются его функциями» [237, с. 38].

Динамическая идея преобразования одних объектов в другие не охватывается полностью господствующим сейчас «стационарным» теоретико-множественным представлением о функции как о множестве. Последнее «является формальной теоретико-множественной моделью интуитивной идеи функции — *моделью*, которая охватывает лишь один аспект этой идеи, а не все ее значение в целом» [38, с. 32].

Напомним в этой связи, что при $s, t \in [0, 1]$ выполнено:

$$^\circ(s+t) = {}^\circ s + {}^\circ t, \quad {}^\circ 0 = 0, \quad {}^\circ 1 = 1$$

и, кроме того, $^\circ t = 0$ в некотором подынтервале $t \in [0, h]$, где h — строго положительное число (любое актуальное бесконечно малое).

Наличие такой «числовой функции» вопиёт о противоречии или, деликатно говоря, свидетельствует наличие антиномий.

Названные обстоятельства требуют немедленного и явного уточнения используемых нами концепций и средств, указания фундамента, на котором они строятся.

Нестандартный анализ, как мы уже отмечали, получает обоснование в рамках теоретико-множественной установки. Точнее говоря, оказывается, что развитые выше представления «наивной» нестандартной теории множеств могут быть поставлены на те же (и, значит, столь же прочные) основы, на которых покоится канторовская теория или, что более строго, «приближающие ее снизу» аксиоматические теории множеств.

Для того чтобы яснее осознать связи математического анализа и теории множеств, стоит сопоставить следующие высказывания:

«...анализ ... есть сама наука о бесконечном».

Г. В. Лейбниц

«...математический анализ является просто наукой о бесконечном. Это старое его определение идет через века...»

Н. Н. Лузин

«МНОЖЕСТВ ТЕОРИЯ, раздел математики, в котором изучаются общие свойства множеств, преимущественно бесконечных». Большой энциклопедический словарь

Следовательно, самим понятием «бесконечность» анализ накрепко связан с теорией множеств. В то же время никогда не нужно забывать, что классические работы Г. Кантора появились спустя двести лет после открытия математического анализа.

Подведение теоретико-множественного обоснования под математику можно сравнить с используемым в современном строительстве методом монтажа зданий, начиная с верхних этажей «от чердака к подвалу». Интересно при этом подметить, что фундамент здания закладывается заранее. Ровно так же исходный фундамент математического анализа заложен практической деятельностью людей.

Нынешняя математика в своей существеннейшей части опирается на теорию множеств. Более точно, под основные этажи современной математики подведена теоретико-множественная база. Что дальше — это покажет будущее. А сейчас мы можем только констатировать продолжение процесса построения математического здания — процесса, готовящего грядущие перемены.

Доказательными свидетельствами ускоренного развития являются обострение ситуации, столкновение мнений, ожесточение борьбы идей. Некоторой иллюстрацией происходящей на наших глазах поляризации установок служит следующая (весьма далекая от полноты) подборка.

Pro

«После начального периода недоверия началось триумфальное шествие созданной теории множеств во всех областях математики. Ее влияние на математику нашего века ясно видно в выборе современных проблем и в тех методах, которыми эти проблемы решаются. Применение теории множеств является повсеместным».

К. Куратовский,
А. Мостовский [107, с. 7]

Contra

«... утверждают, что теория множеств важна для научно-технического прогресса и является новейшим достижением математики. В действительности теория множеств не имеет ничего общего с научно-техническим прогрессом и не является новейшим достижением математики».

Л. С. Понтрягин [192, с. 6]

«Одним из творений Георга Кантора является теория множеств, элементы которой в наше время преподаются в старших классах средней школы и даже ранее. Это еще одна область математики, о которой думали, что она не будет иметь ни малейшего практического применения. Каким это было заблуждением. Элементы теории множеств сейчас в ходу даже у авторов детективных историй.

Хорошо известна связь теории множеств с составлением программ для вычислительных машин, а последние обслуживают несметное количество практических проектов».

Л. Янг [243, с. 154]

«Математика, основанная на канторовской теории множеств, превратилась в математику канторовской теории множеств... Современная математика изучает, таким образом, конструкцию, отношение которой к реальному миру по меньшей мере проблематично... Это ставит под сомнение роль математики как научного и полезного метода. Математика может быть сведена к простой игре, происходящей в некотором специфическом искусственном мире. Это не опасность для математики в будущем, а непосредственный кризис современной математики».

П. Вопенка [31, с. 14]

Заключая предварительное обсуждение, следует подчеркнуть, что только теперь, развеяв иллюзию возможности окончательного «абсолютного» обоснования нестандартного анализа (как и всей математики) на теоретико-множественной основе, мы можем приступить к реализации этого проекта.

3.1. Язык теории множеств

Аксиоматические теории множеств точно регламентируют корректные способы формирования множеств. Образно говоря, аксиоматики описывают миры — универсумы — множеств, которые призваны служить адекватными отображениями наших интуитивных представлений о «канторовом рае» — универсуме наивной теории множеств. Интересующие нас аксиоматики строятся и изучаются как формальные теории. Необходимо специально отметить, что, несмотря на свою очевидную ограниченность (математика не сводится к синтаксису своих текстов) и во многом благодаря ей (вычленение семиотических аспектов эксплицирует проблему смысла), формальный подход доказал свою исключительную плодотворность (теоремы Гёделя, независимость гипотезы континуума и аксиомы выбора, булевозначный анализ и т. п.).

Стержнем формальной теории является ее язык. Точное описание и изучение последнего по необходимости производится средствами некоторого, вообще говоря, другого языка, который принято называть метаязыком. Обычно в качестве метаязыка употребляются определенным образом ограниченные и регламентированные фрагменты естественных языков, обогащенные разными техническими терминами. Средства, допускаемые в метаязык, важны с точки зрения метаматематики. Учитывая, что нас интересуют не метаматематические, а прикладные теоретико-модельные аспекты формальной теории множеств, мы не предъявляем к метаязыку чрезмерно жесткие требования. В частности, в дальнейшем широко используются общепринятые выразительные средства и уровень строгости обычной — содержательной — математики.

3.1.1. Аксиоматическая теория множеств — *формальная система.* Составляющими такой системы являются алфавит, формулы, аксиомы и правила вывода.

В качестве *алфавита* рассматривают фиксированный набор A символов произвольной природы — канторовское множество. Конечные строки элементов A называют выражениями, иногда — текстами.

Если каким-либо способом (предписаниями, алгоритмами и т. п.) выделено некоторое множество «правильно составленных» выражений $\Phi(A)$, то говорят, что задан *язык с алфавитом* A. При этом выделенные выражения называют формулами. После этого фиксируют некоторые конечные или бесконечные совокупности формул, именуемые *аксиомами*, а также явно описывают допускаемые *правила вывода* — отношения в $\Phi(A)$. Формулы, получаемые из аксиом за конечное число шагов с помощью указанных правил вывода, называют *теоремами.* Часто используют (и мы будем поступать также) более вольный и удобный способ выражения. Именно, говорят, что теоремы формальной системы составляют наименьшее множество формул, содержащее все аксиомы и замкнутое относительно правил вывода.

3.1.2. Нас будет интересовать специальный тип формального языка — *язык* первого порядка (с равенством) исчисления предикатов (с равенством). *Сигнатурой* σ называют тройку (F, P, a), где F и P — некоторые множества, называемые множеством символов операций и множеством символов предикатов соответственно, а a — отображение $F \cup P$ в множество натуральных чисел. Говорят, что $u \in F \cup P$ есть *n-арный* или *n-местный символ*, если $a(u) = n$. *Алфавит* языка первого порядка сигнатуры σ состоит из следующих символов:

(1) *множество символов* сигнатуры σ, т. е. множество $F \cup P$;

(2) *множество переменных*: строчные или прописные латинские буквы, возможно, с индексами;

(3) *пропозициональные связки*: $\wedge$ — конъюнкция, $\vee$ — дизъюнкция, $\to$ — импликация, $\neg$ — отрицание;

(4) *кванторы*: $\forall$ — квантор общности и $\exists$ — квантор существования;

(5) *символ равенства* $=$;

(6) *вспомогательные символы*: (— открывающая скобка,) — закрывающая скобка, , — запятая.

3.1.3. В языке теории множеств выделяют формулы и термы.

(1) *Термы* сигнатуры σ составляют наименьшее множество выражений языка (той же сигнатуры), удовлетворяющее условиям:

(а) всякая переменная есть терм;

(б) всякий нульместный символ операции есть терм;

(в) если $f \in F$, $a(f) = n$ и $t_1, \dots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ — терм.

(2) *Атомные* или *атомарные формулы сигнатуры* σ — это выражения вида

$$t_1 = t_2, \quad p(y_1, \dots, y_n), \quad q,$$

где $t_1, t_2, y_1, \dots, y_n$ — термы сигнатуры σ, p — некоторый n-местный предикатный символ и q — нульместный предикатный символ.

(3) *Формулы сигнатуры* σ составляют наименьшее множество выражений, удовлетворяющее условиям:

(а) атомные формулы сигнатуры σ являются формулами сигнатуры σ;

(б) если φ и ψ — формулы сигнатуры σ, то $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$ также формулы сигнатуры σ;

(в) если φ — формула сигнатуры σ, а x — переменная, то $(\forall x)\,\varphi$, $(\exists x)\,\varphi$ также формулы сигнатуры σ.

Вхождение переменной x в формулу φ *связано* в φ или входит в область действия квантора, если x входит в подформулу φ вида $(\forall x)\,\psi$ или $(\exists x)\,\psi$. В противном случае вхождение x свободно в φ. Говорят, что переменная x *свободна* (связана) в φ, если существует свободное (связанное) вхождение x в φ. При желании подчеркнуть, что в формуле φ свободными являются переменные $x_1, \dots, x_n$, мы пишем $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ или просто $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Слова «предложение» и «утверждение» неформально трактуют как синонимы слова «формула». Формулу без свободных переменных называют *высказыванием*. Говоря об истинности или ложности формулы φ, имеют в виду *универсальное замыкание* формулы φ, которое получается навешиванием квантора всеобщности на каждую свободную переменную формулы φ. Обратите внимание, что квантификация допустима лишь по отношению к переменным. Слова «первый порядок» подчеркивают именно эту синтаксическую особенность рассматриваемого языка.

3.1.4. *Язык теории множеств* — язык первого порядка, сигнатура которого содержит лишь один бинарный предикатный символ $\in$ и не имеет прочих предикатных или функциональных символов. Таким образом, теория множеств — это простой пример *теории первого порядка*. Обычно пишут $x \in y$ вместо $\in (x, y)$ и говорят, что x — *элемент* или *член* y. В этой связи говорят также о *принадлежности* или *членстве* множеств. Таким образом, формулы теории множеств суть формальные тексты, составленные из атомных формул вида $x \in y$ и $x = y$ посредством пропозициональных связок и кванторов.

Теория множеств, точнее говоря, та теория множеств, которую мы излагаем в настоящей книге, строится на основе законов классической логики. Иными словами, в ней действуют обычные логические аксиомы и правила вывода исчисления предикатов, которые можно найти почти в любом руководстве по математической логике (см., например, [66, 94, 233]). Отметим здесь же, что используемое в книге исчисление предикатов часто именуется *классическим*, *узким* или *исчислением первого порядка*.

Помимо этого принимается некоторое количество нелогических или специальных аксиом, отражающих содержательные представления о множествах или классах. Варьируя в разумных пределах специальные аксиомы, получают различные по своим выразительным возможностям аксиоматические системы для теории множеств. В этой главе описаны наиболее употребительные теории множеств.

3.1.5. Одной из важнейших функций метаязыка является введение новых сокращающих символов и установление соответствующих синтаксических правил. Дело в том, что формализация даже несложных фрагментов содержательной математики приводит к громоздким текстам, запись и прочтение которых проблематичны по физическим и психологическим причинам. Это обстоятельство вынуждает вводить большое количество сокращений и, по сути дела, просто строить более удобный сокращенный вариант исходного символического языка. При этом необходимым требованием является принципиальная возможность однозначного перевода сокращенного изложения на формализованный язык. В соответствии с нашими планами мы не будем останавливаться подробно на способах введения сокращений, точных описаний, функциональных выражений и т. п. Например, в дальнейшем, как и ранее, мы применяем *символ присваивания* $:=$, не вдаваясь в сопутствующие тонкости.

3.1.6. Приведем примеры сокращения некоторых формальных текстов языка теории множеств. Словесные толкования этих текстов апеллируют к интуитивным наивным представлениям о множествах. Прежде всего отметим следующие общепринятые сокращения:

$$
\begin{gathered}
(\exists!\, x)\, \varphi(x) := (\exists\, x)\, \varphi(x) \wedge (\forall\, x)(\forall\, y)(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \to x = y);\\
(\exists\, x \in y)\, \varphi := (\exists\, x)(x \in y \wedge \varphi);\\
(\forall\, x \in y)\, \varphi := (\forall\, x)(x \in y \to \varphi),
\end{gathered}
$$

где φ — некоторая формула. Полагают также $x \neq y := \neg(x = y)$ и $x \notin y := \neg(x \in y)$. Для простейших теоретико-множественных операций приняты обычные соглашения:

$$
\begin{gathered}
x \subset y := (\forall\, z)(z \in x \to z \in y);\\
u = \bigcup x := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (\exists\, y \in x) z \in y);\\
u = \bigcap x := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (\forall\, y \in x) z \in y);\\
u = y - x := y \setminus x := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (z \in y \wedge z \notin x)).
\end{gathered}
$$

Если φ — формула, то совокупность $\mathscr{P}_\varphi(x)$ всех подмножеств x, удовлетворяющих условию φ, описывается выражением $(z \in \mathscr{P}_\varphi(x)) \leftrightarrow (z \subset x \wedge \varphi(z))$. В частности, если $\operatorname{fin}(y)$ означает свойство множества y быть конечным, $\mathscr{P}_{\operatorname{fin}}(x)$ — это совокупность всех конечных подмножеств x.

Пустое множество $\varnothing$ не содержит элементов, так что

$$u = \varnothing := (\forall\, x)(x \in u \leftrightarrow x \neq x).$$

В приведенных выше текстах использован весьма употребительный прием сокращения — пропуск части скобок.

3.1.7. Утверждение о том, что x есть *неупорядоченная пара* элементов y и z, формализуется так: $(\forall\, u)(u \in x \leftrightarrow u = y \vee u = z)$. При этом полагают $\{y, z\} := x$. Отметим, что фигурные скобки отсутствуют в исходном алфавите и, стало быть, суть метасимволы.

Упорядоченная пара и *упорядоченная n-ка* вводятся приемом Куратовского:

$$(x, y) := \langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\};$$
$$(x_1, \dots, x_n) := \langle x_1, \dots, x_n\rangle := \langle\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle,$$

где $\{x\} := \{x, x\}$. Обратим внимание на возникающую перегруженность круглых скобок. Это обстоятельство неизбежно и не должно восприниматься как повод для обязательного введения новых символов. Отметим также, что говоря об упорядоченных парах и n-ках, прилагательные обычно опускают.

С помощью заключенных соглашений можно придать формальный смысл предложению «X — *декартово произведение* $Y \times Z$». Именно, по определению считают: $X := \{(y, z) : y \in Y, z \in Z\}$.

3.1.8. Рассмотрим утверждения:

(1) $\mathrm{Rel}\,(X)$;

(2) $Y = \mathrm{dom}(X)$;

(3) $Z = \mathrm{im}(X)$.

Соответствующие формальные тексты имеют вид

(1′) $(\forall\, u)(u \in X \to (\exists\, v)(\exists\, w) u = (v, w))$;

(2′) $(\forall\, u)(u \in Y \leftrightarrow (\exists\, v)(\exists\, w) w = (u, v) \wedge w \in X)$;

(3′) $(\forall\, u)(u \in Z \leftrightarrow (\exists\, v)(\exists\, w) w = (v, u) \wedge w \in X)$.

Таким образом, в (1)–(3) речь идет о том, что элементами X служат упорядоченные пары, причем Y — *область определения* X, а Z — это *область значений* X. При этом X иногда называют *абстрактным отношением*.

Однозначность X, или сокращенно $\mathrm{Un}\,(X)$, выражается формулой

$$\mathrm{Un}\,(X){:=}\ (\forall\, u)(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)((u,v_1)\in X \wedge (u,v_2)\in X \to v_1=v_2).$$

Полагают $\mathrm{Fnc}\,(X){:=}\ \mathrm{Func}\,(X){:=}\ \mathrm{Un}\,(X)\wedge \mathrm{Rel}\,(X)$. Если выполнено $\mathrm{Fnc}\,(X)$, то по очевидным причинам X часто именуют *функцией* или даже *класс-функцией.* При этом для выражения $(u,v)\in X$ приняты записи $v=X(u)$, $X:u\mapsto v$ и т. п. Далее, фраза F — *отображение* или *функция* из X в Y означает, что $F\subset X\times Y$, при этом $\mathrm{Fnc}\,(F)$ и область определения F совпадает с X:

$$F:X\to Y{:=}\ F\subset X\times Y\wedge \mathrm{Fnc}\,(F)\wedge \mathrm{dom}(F)=X.$$

Термин *класс-функция* также применяют для F при желании подчеркнуть, что F — это класс. *Ограничение* X на U есть по определению $X\cap(U\times \mathrm{im}(X))$. Его обозначают $X\restriction U$, $X|U$ или $X|_U$.

Если существует и притом единственное z, для которого (y,z) $\in X$, то полагают $X\text{‘}y{:=}\ z$. В остальных случаях считают $X\text{‘}y{:=}\ \varnothing$. Наконец, по определению $X\text{“}y:=\mathrm{im}(X\restriction y)$. Вместо $X\text{“}\{x\}$ пишут $X(x)$ или даже Xx, если это не приводит к недоразумениям.

Стоит подчеркнуть, что здесь и в дальнейшем мы придерживаемся свободной точки зрения на введение и сокращение скобок. Иначе говоря, их появление и ликвидация, как правило, управляются соображениями удобства, а также требованиями к уровню формализации текущего фрагмента текста.

Абстрактные отношения достойны особого внимания. Приведем уместные подробности.

Соответствием из множества X в множество Y называют упорядоченную тройку $\Phi{:=}\ (F,X,Y)$, где F — некоторое подмножество произведения $X\times Y$. Отметим, что для F выполнено $\mathrm{Rel}\,(F)$. Часто говорят, что F — *график* X — область отправления и Y — область прибытия соответствия Φ. При этом пишут $\mathrm{Gr}(\Phi)=F$. Напомним, что *отношением* или *бинарным отношением* на X называют соответствие, у которого область отправления и область прибытия есть X.

Образом множества $A\subset X$ *относительно соответствия* Φ называют проекцию на Y множества $(A\times Y)\cap F$, обозначаемую символом $\Phi(A)$ или даже $F(A)$. Итак,

$$\Phi(A){:=}\ F(A){:=}\ \{y\in Y:(\exists\, x\in A)((x,y)\in F)\}.$$

Задание соответствия Φ равносильно указанию отображения

$$\widetilde{\Phi} : x \mapsto \Phi(\{x\}) \in \mathscr{P}(Y) \quad (x \in X),$$

где $\mathscr{P}(Y)$ — совокупность всех подмножеств множества Y. На этом основании соответствие Φ иногда отождествляется с отображением $\widetilde{\Phi}$. Более того, часто не различают отображение $\widetilde{\Phi}$, соответствие Φ и график Φ, используя одну и ту же букву для их обозначения. Пишут также $\Phi(x)$ вместо $\Phi(\{x\})$.

Область определения соответствия Φ — это область определения его графика F. Иначе говоря,

$$\operatorname{dom}(\Phi) := \{x \in X : \Phi(x) \neq \varnothing\}.$$

Аналогично, область значений или образ соответствия — это образ его графика.

3.1.9. Предположим, что X и Y — абстрактные отношения, т. е. $\mathrm{Rel}\,(X)$ и $\mathrm{Rel}\,(Y)$. Можно организовать *суперпозицию* (или *композицию*) X и Y, обозначаемую символом $Y \circ X$, собирая в единое целое в точности те упорядоченные пары (x, z), для которых $(x, y) \in X$ и $(y, z) \in Y$ при подходящем y:

$$(\forall\, u)(u \in Y \circ X \leftrightarrow (\exists\, x)(\exists\, y)(\exists\, z)(x, y) \in X \wedge (y, z) \in Y \wedge u = (x, z)).$$

Имея абстрактное отношение X, определяют обратное абстрактное отношение X^{-1} по правилу:

$$(\forall\, u)(u \in X^{-1} \leftrightarrow (\exists\, x)(\exists\, y)(x, y) \in X \wedge u = (y, x)).$$

Символом I_X обозначается *тождественное отношение* на X, т. е.

$$(\forall\, u)(u \in I_X \leftrightarrow (\exists\, x)(x \in X \wedge u = (x, x))).$$

Детализируем сказанное для соответствий.

Итак, пусть $\Phi := (F, X, Y)$ — это соответствие из X в Y. Положим $F^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in F\}$. Соответствие $\Phi^{-1} := (F^{-1}, Y, X)$ называют *обратным* для Φ. Рассмотрим еще одно соответствие $\Psi := (G, Y, Z)$, и пусть H — образ множества $(F \times Z) \cap (X \times G)$ при отображении $(x, y, z) \mapsto (x, z)$. Ясно, что

$$H = \{(x, z) \in X \times Z : (\exists\, y \in Y)((x, y) \in F \wedge (y, z) \in G)\},$$

т. е. H совпадает с суперпозицией $G \circ F$ графиков G и F. Соответствие $\Psi \circ \Phi := (G \circ F, X, Z)$ называют *композицией соответствий* Φ и Ψ. Справедливы следующие очевидные равенства:

$$(\Psi \circ \Phi)^{-1} = \Phi^{-1} \circ \Psi^{-1}, \quad \Theta \circ (\Psi \circ \Phi) = (\Theta \circ \Psi) \circ \Phi.$$

Остановимся еще на одном понятии, связанном с соответствиями. Рассмотрим соответствие $\Phi := (F, X, Y)$. *Полярой* $\pi_\Phi(A)$ *множества* $A \subset X$ *относительно соответствия* Φ называют совокупность таких $y \in Y$, что $A \times \{y\} \subset F$. Таким образом,

$$\pi_\Phi(A) := \pi_F(A) := \{y \in Y : (\forall\, x \in A)((x, y) \in F)\}.$$

Если соответствие Φ фиксировано, то для простоты пишут $\pi(A)$ вместо $\pi_\Phi(A)$ и $\pi^{-1}(A)$ вместо $\pi_{\Phi^{-1}}(A)$.

Простейшие свойства поляр таковы:

(1) если $A \subset B \subset X$, то $\pi(A) \supset \pi(B)$;

(2) для любого $A \subset X$ выполнены включения

$$A \subset \pi^{-1}(\pi(A)); \quad A \times \pi(A) \subset F;$$

(3) если $A \times B \subset F$, то $B \subset \pi(A)$ и $A \subset \pi^{-1}(B)$;

(4) если $(A_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — это непустое семейство подмножеств множества X, то $\pi(\bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi) = \bigcap_{\xi \in \Xi} \pi(A_\xi)$;

(5) если $A \subset X$ и $B \subset Y$, то $\pi(A) = \pi(\pi^{-1}(\pi(A)))$ и $\pi^{-1}(B) = \pi^{-1}(\pi(\pi^{-1}(B)))$.

3.1.10. В случае $\mathrm{Rel}\,(X) \wedge ((X \cap Y^2) \circ (X \cap Y^2) \subset X)$ говорят, что X — *транзитивное* отношение на Y. Если $\mathrm{Rel}\,(X) \wedge (I_Y \subset X)$, то X называют *рефлексивным* (на Y). Если $X \cap Y^2 = X^{-1} \cap Y^2$, то X называют *симметричным* (на Y). Наконец, при $\mathrm{Rel}\,(X) \wedge ((X \cap X^{-1}) \cap Y^2 \subset I_Y)$ используют термин «X — *антисимметричное* отношение на Y». Здесь, конечно же, использовано стандартное сокращение: $Y^2 := Y \times Y$.

Рефлексивное и транзитивное отношение называют *предпорядком* (или отношением предпорядка). Антисимметричный предпорядок — это *порядок*. Симметричный предпорядок — это *эквивалентность*. Используют и другую стандартную в данной ситуации терминологию. Напомним, в частности, что порядок X на Y называют *линейным*, а само Y — *цепью* (относительно X), если $Y^2 \subset X \cup X^{-1}$. Если всякое непустое подмножество множества Y имеет наименьший (относительно порядка X) элемент, то говорят, что X *вполне упорядочивает* Y или что Y *вполне упорядочено* (подразумеваемым порядком X).

3.1.11. Кванторы называют *ограниченными*, если они входят в текст в виде $(\forall\, x \in y)$ или $(\exists\, x \in y)$. Существует классификация формул теории множеств (и вообще любой теории первого порядка), основанная на характере использования ограниченных и неограниченных (т. е. не являющихся ограниченными) кванторов. В дальнейшем особую роль будут играть два класса формул — ограниченные формулы, называемые иначе Σ_0-*формулами,* а также Σ_1-формулы. Говорят, что формула φ *ограничена*, если всякий квантор присутствует в φ в виде $(\forall\, x \in y)$ или $(\exists\, x \in y)$. Формулу φ относят к классу Σ_1 или называют Σ_1-*формулой*, если φ строится из атомных формул и их отрицаний с помощью только логических операций $\wedge$, $\vee$, $(\forall\, x \in y)$ и $(\exists\, x)$. Ясно, что всякая ограниченная формула попадает в класс Σ_1. Однако не всякая Σ_1-формула ограничена и существуют формулы, не содержащиеся в классе Σ_1. Рассмотрим соответствующие примеры. Начнем с ограниченных формул.

3.1.12. Запись $z = \{x, y\}$ эквивалентна ограниченной формуле

$$x \in z \wedge y \in z \wedge (\forall\, u \in z)(u = x \vee u = y).$$

Отсюда видно, что упорядоченная пара вводится ограниченной формулой. То же самое можно сказать и о декартовом произведении, так как $Z = X \times Y$ можно записать в виде

$$((\forall\, z \in Z)(\exists\, x \in X)(\exists\, y \in Y)(z = (x, y)))\wedge$$
$$\wedge((\forall\, x \in X)(\forall\, y \in Y)(\exists\, z \in Z)(z = (x, y))).$$

Еще одну ограниченную формулу доставляет понятие «отображение F из X в Y». Действительно, из сказанного выше следует, что $F \subset X \times Y$ — ограниченная формула, а кроме того, выражения $\mathrm{dom}(F) = X$ и $\mathrm{Un}\,(F)$, эквивалентные соответственно формулам

$$(\forall\, x \in X)(\exists\, y \in Y)(\exists\, z \in F)(z = (x, y)),$$
$$(\forall\, z_1 \in F)(\forall\, z_2 \in F)(\forall\, x \in X)(\forall\, y_1 \in Y)(\forall\, y_2 \in Y)$$
$$z_1 = (x, y_1) \wedge z_2 = (x, y_2) \to y_1 = y_2,$$

также являются ограниченными формулами.

3.1.13. Утверждение «множества x и y *равномощны*», означающее, что «существует биекция между x и y» или, символически, $\mathrm{Equip}(x, y)$, записывается Σ_1-формулой:

$$(\exists\, f)(f : x \to y \wedge \mathrm{im}(f) = y \wedge \mathrm{Un}\,(f^{-1})).$$

Однако это обстоятельство не выражается ограниченной формулой. Еще одну Σ_1-формулу дает понятие абстрактного отношения:

$$\mathrm{Rel}\,(X) := (\forall\, u \in X)(\exists\, v)(\exists\, w)(u = (v, w)).$$

Следующая формула, утверждающая, что множество y не равномощно никакому своему элементу, в класс Σ_1 не входит:

$$(\forall\, x \in y)\, \neg \mathrm{Equip}(x, y).$$

3.1.14. Примечания.

(1) Разумеется, варьировать можно не только специальные аксиомы теории первого порядка, но и ее логическую часть, т. е. логические аксиомы и правила вывода. Получающиеся при этом множества теорем могут существенно отличаться друг от друга. Так, например, удаляя из аксиом исчисления высказываний закон исключенного третьего, получают интуиционистское исчисление высказываний. Аналогично строится интуиционистское исчисление предикатов (см. [38, 61]).

(2) Современная формальная логика сформировалась в ходе долгого и трудного развития философской и математической мысли.

Классическое исчисление предикатов восходит к аристотелевой силлогистике. Происхождение интуиционистской логики связано с другими философскими идеями. В разные эпохи для разных целей изобретались логические системы, существенно отличные от обеих названных систем. Так, древняя индийская логика имела три типа отрицаний: чего-то никогда не было и не может быть; что-то было, но сейчас отсутствует; что-то сейчас есть, но скоро исчезнет.

(3) Как видно из 3.1.6 и 3.1.7, сокращения могут участвовать в формулах, в сокращениях, в сокращениях в сокращениях и т. п. Изобретение и введение символов во многом являются искусством и, как всякое искусство, не могут быть формализованы полностью. Тем не менее систематизация и кодификация правил определения сокращений необходимы как с теоретической, так и с практической точек зрения. Некоторые такие системы правил (точные описания, введение функциональных букв и т. п.) можно найти в [35, 94, 227].

3.2. Аксиоматика Цермело — Френкеля

Как уже отмечалось в 3.1.4, аксиомы теории множеств включают в себя общелогические аксиомы теорий первого порядка, фиксирующие классические правила логического вывода. Ниже перечисляются специальные аксиомы теории множеств ZF_1–ZF_6 и AC. Если принять в качестве специальных аксиом ZF_1–ZF_6, то возникающую аксиоматическую систему называют системой или *теорией множеств Цермело — Френкеля* и обозначают ZF. При добавлении к ZF аксиомы выбора AC возникает более широкая теория, которую по-прежнему именуют теорией Цермело — Френкеля, но обозначают символом ZFC. Отметим, что параллельные словесные формулировки аксиом мотивируются канторовскими представлениями о множествах.

3.2.1. При изучении ZFC часто используют термины *свойство* и *класс*. Уточним их формальный статус. Рассмотрим формулу $\varphi = \varphi(x)$, построенную в рамках ZFC (символически: $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$). Вместо текста $\varphi(y)$ пишут $y \in \{x : \varphi(x)\}$. Таким образом, действует так называемая *схема Чёрча* для классификации

$$y \in \{x : \varphi(x)\} := \varphi(y).$$

Встречая запись $y \in \{x : \varphi(x)\}$, на языке ZFC говорят, что y обладает свойством φ, или y лежит в классе $\{x : \varphi(x)\}$. В этом смысле свойство, формула и класс в ZFC подразумевают одно и то же. Схемой Чёрча мы фактически уже пользовались в 3.1.6 и 3.1.7. При работе с ZFC удобны и другие широко распространенные сокращения, в частности,

$$\mathbb{U} := \{x : x = x\} \text{ — } \textit{универсум} \text{ или } \textit{класс всех множеств};$$

$$\{x : \varphi(x)\} \in \mathbb{U} := (\exists\, z)(\forall\, y)\, \varphi(y) \leftrightarrow y \in z;$$

$$\{x : \varphi(x), \psi(x)\} := \{x : \varphi(x)\} \cap \{x : \psi(x)\};$$

$$x \cup y := \cup\{x, y\}, \quad x \cap y \cap z := \cap\{x, y, z\} \ldots .$$

Перейдем теперь к формулировкам специальных аксиом ZFC.

3.2.2. *Аксиома экстенсиональности* $\mathbf{ZF_1}$:
два множества равны в том (и только в том) случае, если они состоят из одних и тех же элементов:

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y.$$

Отметим, что вторую эквивалентность без изменения объема аксиомы можно заменить на $\to$, ибо обратная импликация является теоремой исчисления предикатов.

3.2.3. *Аксиома объединения* $\mathbf{ZF_2}$:
объединение множества множеств — также множество:

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(\exists\, u)(u \in z \wedge z \in x) \leftrightarrow z \in y.$$

Используя сокращения, аксиому ZF_2 переписывают в виде

$$(\forall\, x) \bigcup x \in \mathbb{U}.$$

3.2.4. *Аксиома степени* $\mathbf{ZF_3}$:
все подмножества данного множества составляют некоторое множество, т. е.

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(z \in y \leftrightarrow (\forall\, u)(u \in z \to u \in x)),$$

или в краткой записи

$$(\forall\, x)\mathscr{P}(x) \in \mathbb{U}.$$

3.2.5. *Аксиома подстановки* $\mathbf{ZF_4^{\varphi}}$:
произвольный взаимнооднозначный образ множества — снова множество:

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)(\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \to y = z) \to$$
$$\to (\forall\, a)(\exists\, b)((\exists\, s \in a)(\exists\, t)\, \varphi(s,t) \leftrightarrow t \in b).$$

В несколько сокращенной записи:

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)(\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \to y = z) \to$$
$$\to (\forall\, a)(\{v : (\exists\, u \in a)\, \varphi(u,v)\} \in \mathbb{U}).$$

Здесь φ — формула ZFC, не содержащая свободных вхождений a. Отметим, что ZF_4^{φ} является схемой для бесконечного набора аксиом, так как для каждой подходящей $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ формулируется своя аксиома. Тем не менее для краткости и единообразия говорят просто об аксиоме подстановки, имея в виду отмеченную ее особенность.

Сформулируем полезные следствия ZF_4^{φ}.

3.2.6. Пусть $\psi = \psi(z)$ — формула ZFC. Тогда для любого множества x можно составить его подмножество, отбирая элементы x со свойством ψ, т. е.

$$(\forall\, x)\{z \in x : \psi(x)\} \in \mathbb{U}.$$

Это утверждение — аксиома ZF_4^{φ}, где в качестве φ фигурирует формула $\psi(u) \wedge (u = v)$. Приведенное положение часто именуют *аксиомами выделения* или *аксиомами свертывания.*

3.2.7. Применяя аксиому ZF_4^{φ} для формулы

$$\varphi(u, v) := (u = \varnothing \to v = x) \wedge (u \neq \varnothing \to v = y)$$

и множества $a := \mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$, мы убеждаемся в том, что неупорядоченная пара $\{x, y\}$ двух множеств (ср. 3.1.7) — снова множество. Последнее утверждение часто именуют *аксиомой неупорядоченной пары.*

3.2.8. ***Аксиома бесконечности*** $\mathbf{ZF_5}$**:**
существует по крайней мере одно бесконечное множество:

$$(\exists\, x)(\varnothing \in x \wedge (\forall\, y)(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)).$$

Тем самым существует такое множество x, что $\varnothing \in x$, $\{\varnothing\} \in x$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in x$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \in x$ и т. д. Внимательный читатель заметит некоторую щель между формальной и неформальной формулировками аксиомы бесконечности. Бдительный читатель может заподозрить злоупотребление термином «бесконечность». На самом деле, аксиома бесконечности относится к основополагающим доктринам канторианства. В этой связи некоторое таинство здесь неизбежно и должно приветствоваться.

3.2.9. ***Аксиома фундирования*** $\mathbf{ZF_6}$**:**
всякое непустое множество имеет непересекающийся со всем множеством элемент

$$(\forall\, x)(x \neq \varnothing \to (\exists\, y)(y \in x \wedge y \cap x = \varnothing)).$$

Применив аксиому ZF_6 к одноэлементному множеству $x := \{y\}$, получим $y \notin y$. Несколько забегая вперед, отметим, что по аналогичной причине (на этот раз нужно взять $x := \{x_1, \dots, x_n\}$) не существуют бесконечно убывающие $\in$-последовательности $x_1 \ni x_2 \ni \dots \ni x_n \ni \dots$.

3.2.10. ***Аксиома выбора* AC:**
произведение непустого множества непустых множеств не пусто:

$$(\forall\, x)(\exists\, f)(\mathrm{Fnc}\,(f) \wedge x \subset \mathrm{dom}(f)) \wedge (\forall\, y \in x)\, y \neq \varnothing \to f(y) \in y.$$

Функцию f в описанной ситуации называют *выбирающей* для x.

Известно большое количество утверждений, эквивалентных аксиоме выбора в рамках рассматриваемой нами теории, см. [356]. Приведем формулировки двух наиболее популярных из них.

Теорема Цермело (принцип полного упорядочения)**.** *Всякое множество может быть вполне упорядочено.*

Лемма Куратовского — Цорна (принцип максимальности)**.** *Пусть M — (частично) упорядоченное множество, в котором любое линейное упорядоченное множество имеет верхнюю границу. Тогда любой элемент M мажорируется некоторым максимальным элементом.*

3.2.11. На основе приведенной аксиоматики складывается точное представление о классе всех множеств как об «универсуме фон Неймана».

Исходным объектом построения мыслится пустое множество. Элементарный шаг введения новых множеств из уже построенных состоит в формировании объединения множеств подмножеств имеющихся множеств. Трансфинитное повторение таких шагов исчерпывает класс всех множеств.

Классы (в «платонистском» стиле) можно мыслить как внешние объекты по отношению к элементам универсума фон Неймана. Класс в этом понимании есть совокупность множеств, удовлетворяющих теоретико-множественному свойству, описываемому формулой теории Цермело — Френкеля. Поэтому класс, состоящий из элементов некоторого множества (по аксиоме подстановки) сам является множеством. Формально корректное определение универсума фон Неймана требует предварительного знакомства с понятиями ординала и кумулятивной иерархии. Ниже приводим необходимый минимум сведений об этих объектах.

3.2.12. Множество x называют *транзитивным*, если каждый элемент x является подмножеством x. Множество x называют *орди-*

航налом, если само x транзитивно и линейно упорядочено отношением $\in$. В символической записи эти определения выглядят так:

$$\mathrm{Tr}\,(x) := (\forall\, y \in x)(y \subset x) := \ x \text{ — «транзитивное множество»};$$
$$\mathrm{Ord}\,(x) := \mathrm{Tr}\,(x) \wedge (\forall\, y \in x)(\forall\, z \in x)$$
$$(y \in z \vee z \in y \vee z = y) := \ \text{«}x\text{ — ординал»}.$$

Ординалы принято обозначать малыми греческими буквами. Каждый ординал рассматривается с естественным отношением порядка: для β, $\gamma \in \alpha$ полагают

$$\gamma \leq \beta \leftrightarrow \gamma \in \beta \vee \gamma = \beta.$$

Класс всех ординалов обозначается символом On, так что $\mathrm{On} := \{\alpha : \mathrm{Ord}\,(\alpha)\}$.

Ординал является *вполне упорядоченным множеством*, т. е. он линейно упорядочен и любое его подмножество имеет наименьший элемент (последнее обеспечено аксиомой фундирования). Несложно убедиться, что

$$\alpha \in \mathrm{On} \wedge \beta \in \mathrm{On} \to \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha;$$
$$\alpha \in \mathrm{On} \wedge \beta \in \alpha \to \beta \in \mathrm{On};$$
$$\alpha \in \mathrm{On} \to \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{On};$$
$$\mathrm{Ord}\,(\varnothing).$$

Ординал $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ называют *сыном* α. Ординал, являющийся сыном другого ординала, называют *последующим*. Ординал, не равный нулю и не являющийся последующим, называют *предельным*. Приняты обозначения:

$$K_{\mathrm{I}} := \{\alpha \in \mathrm{On} : (\exists\, \beta)\ \ \mathrm{Ord}\,(\beta) \wedge \alpha = \beta + 1 \vee \alpha = \varnothing\};$$
$$K_{\mathrm{II}} := \{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha \text{ — предельный ординал}\};$$
$$0 := \varnothing, \quad 1 := 0 + 1, \quad 2 := 1 + 1, \ldots,$$
$$\omega := \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Сейчас самый подходящий момент напомнить, что *континуум*, о котором мы изредка говорим в этой книге, это просто множество подмножеств ω.

3.2.13. Отметим, что в ZFC можно доказать возможность использования общеизвестных (на «наивном» уровне) свойств ординалов, в частности законность трансфинитной индукции и рекурсивных определений. Приведем определение универсума фон Неймана, сознательно опуская пока формальное обоснование законности подобных определений. Для каждого ординала α положим

$$V_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{P}(V_\beta),$$

т. е. $V_\alpha = \{x : (\exists\,\beta)(\beta \in \alpha \wedge x \subset V_\beta)\}$. Подробнее говоря,

$$\begin{aligned} V_0 &:= \varnothing; \\ V_{\alpha+1} &:= \mathscr{P}(V_\alpha); \\ V_\beta &:= \bigcup_{\alpha<\beta} V_\alpha, \quad \text{если} \quad \beta \in K_{\mathrm{II}}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\mathbb{V} := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha.$$

Принципиальным фактом, обеспеченным аксиомой фундирования, является теорема

$$(\forall\,x)(\exists\,\alpha)(\mathrm{Ord}\,(\alpha) \wedge x \in V_\alpha),$$

которую записывают в виде $\mathbb{U} = \mathbb{V}$ и выражают словами: «*класс всех множеств — это универсум фон Неймана*» или «*любое множество вполне фундировано*».

Графически универсум фон Неймана $\mathbb{V}$ можно представлять себе как перевернутую пирамиду, вершиной которой служит пустое множество. Другие «нижние» этажи пирамиды таковы:

$$V_0 = \varnothing,\ V_1 = \{\varnothing\},\ V_2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots,$$
$$V_\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}, \dots .$$

Реализация универсума $\mathbb{V}$ в виде так называемой «*кумулятивной иерархии*» множеств $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$ позволяет с каждым множеством x связать его ранг:

$$\mathrm{rank}(x) := \text{ наименьший ординал } \alpha \text{ такой, что } x \in V_{\alpha+1}.$$

Легко убедиться, что

$$a \in b \to \mathrm{rank}(a) < \mathrm{rank}(b);$$
$$\mathrm{Ord}\,(\alpha) \to \mathrm{rank}(\alpha) = \alpha;$$
$$(\forall\, x)(\forall\, y)\,\mathrm{rank}(y) < \mathrm{rank}(x) \to (\varphi(y) \to \varphi(x)) \to (\forall\, x)\,\varphi(x),$$

где φ — формула ZFC. Последнюю теорему (точнее, схему теорем) называют *принципом индукции по рангу.*

3.2.14. Ординал, который не равномощен никакому предшествующему ординалу, называют *кардиналом.* Любое натуральное число является кардиналом. Кардинал, не являющийся натуральным числом, называют *бесконечным.* Значит, ω — наименьший бесконечный кардинал.

Числом Хартогса $\mathscr{H}(x)$ множества x называют наименьший из ординалов α таких, что нет никакого инъективного отображения из α в x. Ясно, что $\mathscr{H}(x)$ — это кардинал для любого x. При этом число Хартогса любого ординала α является наименьшим кардиналом, строго большим, чем α.

По рекурсии определяют *алефическую шкалу*:

$$\aleph_0 := \omega_0 = \omega;$$
$$\aleph_{\alpha+1} := \omega_{\alpha+1} = \mathscr{H}(\omega_\alpha);$$
$$\aleph_\beta := \omega_\beta := \sup\{\omega_\alpha : \alpha < \beta\}, \quad \text{если} \quad \beta \in K_{\mathrm{II}}.$$

Справедливы следующие утверждения:

(1) *бесконечные кардиналы составляют вполне упорядоченный собственный класс;*

(2) *отображение $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ является порядковым изоморфизмом класса ординалов и класса бесконечных кардиналов;*

(3) *существует отображение $|\cdot|$ из универсума $\mathbb{V}$ на класс всех кардиналов такое, что множества x и $|x|$ равномощны для любого $x \in \mathbb{U}$.*

Кардинал $|x|$ называют *мощностью* или *кардинальным числом множества* x. Итак, всякое множество равномощно единственному кардиналу, а именно своему кардинальному числу. Множество x *счетно*, если $|x| = \omega_0$, и *не более чем счетно*, если $|x| \leq \omega_0$. Кардинал, следующий за кардиналом $\varkappa$, обозначают символом $\varkappa^+$.

Для произвольного ординала α обозначим символом 2^{ω_α} мощность множества $\mathscr{P}(\omega_\alpha)$, т. е. $2^{\omega_\alpha} := |\mathscr{P}(\omega_\alpha)|$. Такое обозначение оправдано тем, что 2^x и $\mathscr{P}(x)$ равномощны для любого x, где 2^x — класс всех отображений из x в 2. Теорема, установленная Г. Кантором, утверждает, что $|x| < |2^x|$, каково бы ни было множество x. В частности, $\omega_\alpha < 2^{\omega_\alpha}$ для любого ординала α. При этом будет $\omega_{\alpha+1} \leq 2^{\omega_\alpha}$.

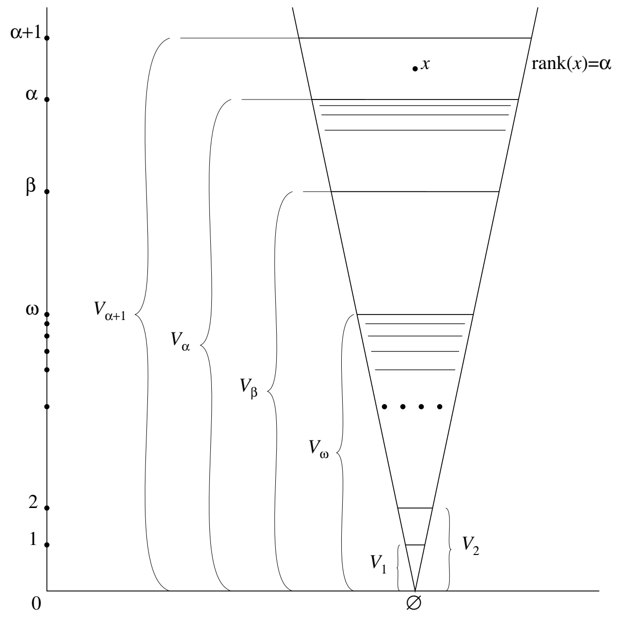


Рис. 3

Вопрос о том, имеются или нет промежуточные мощности между $\omega_{\alpha+1}$ и 2^{ω_α}, т. е. выполнено ли равенство $\omega_{\alpha+1} = 2^{\omega_\alpha}$, составляет содержание *обобщенной проблемы континуума.* При $\alpha = 0$ это классическая *проблема континуума.* Под *гипотезой континуума* CH (обобщенной гипотезой континуума GCH) понимают равенство $\omega_1 = 2^\omega$ (соответственно равенство $\omega_{\alpha+1} = 2^{\omega_\alpha}$ для всех $\alpha \in \mathrm{On}$).

3.2.15. В дальнейшем нам понадобится важный технический результат, называемый часто *принципом отражения.* В известном смысле этот результат показывает, что «конкретные» теоретико-множественные события происходят с множествами ограниченного ранга.

Теорема Монтегю — Леви. *Пусть* $\varphi := \varphi(x_1, \dots, x_n)$ *— формула теории* ZFC *и* α *— ординал. Тогда существует ординал* β *такой, что* $\beta > \alpha$ *и*

$$(\forall\, x_1, \dots, x_n \in V^\beta)\, \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{V^\beta}(x_1, \dots, x_n),$$

где φ^{V^β} *— релятивизация* φ *на* V^β.

$\lhd$ Пусть в пренексной нормальной форме φ имеет вид

$$\varphi = (Q_1 y_1) \dots (Q_m y_m)\, \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Таким образом, ψ не имеет кванторов и $Q_k \in \{\exists, \forall\}$.

Введем в рассмотрение формулу

$$\psi_k := (Q_{k+1} y_{k+1}) \dots (Q_m y_m)\, \psi$$

для $k := 0, \dots, m$. При этом с должными оговорками получаем

$$\psi_k = \psi_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{k-1}).$$

Фиксируем набор свободных переменных в ψ_k и найдем наименьший ординал γ такой, что

$$(\exists\, y_k)\psi_k \to (\exists\, y_k \in V^\gamma)\, \psi_k$$

при условии $Q_k = \exists$ и

$$(\exists\, y_k)\neg\, \psi_k \to (\exists\, y_k \in V^\gamma)\neg\, \psi_k,$$

если $Q_k = \forall$. Введем обозначения:

$$g_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{k-1}) := \gamma.$$

Для каждого ординала α, используя аксиому подстановки, строим множество $A_k(\alpha)$, заданное следующим образом:

$$\{g_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{k-1}) : x_1, \dots, x_n \in V^\alpha; y_1, \dots, y_{k-1} \in V^\alpha\}.$$

Полагаем
$$f_k(\alpha) := \sup\{\alpha + 1, (\sup A_k(\alpha)) + 1\}.$$

Используя возникающие ординальнозначные функции, последовательно определяем
$$f^{(0)}(\alpha) := \alpha;$$
$$f^{(1)}(\alpha) := \sup\{f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)\};$$
$$f^{(s+1)}(\alpha) := f^{(1)}(f^{(s)}(\alpha)) \quad (s \in \mathbb{N}).$$

И наконец, рассмотрим
$$f(\alpha) := \sup_{s\in\mathbb{N}} f^{(s)}(\alpha).$$

Видно, что для каждого α ординал $f(\alpha)$ предельный и мажорирует α. Более того, для любых $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in V^{f(\alpha)}$ и $1 \le k \le m$ выполнено
$$g_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{k-1}) < f(\alpha).$$

Полагая $\beta := f(\alpha)$, учитывая, что $\psi_{k-1} = (Q_k y_k)\psi_k$, и привлекая определение g_k, последовательно выводим:
$$\psi_m = \psi_m^{V^\beta} \to$$
$$\to \big(\psi_{m-1} \leftrightarrow (Q_m y_m \in V^\beta)\psi_m\big) \to$$
$$\to \left(\psi_{m-1} \leftrightarrow \psi_{m-1}^{V^\beta}\right) \to \dots$$
$$\dots \to \psi_1 \leftrightarrow \psi_1^{V^\beta} \to$$
$$\to (Q_1 y_1)\psi_1 \leftrightarrow (Q_1 y_1 \in V^\beta)\psi_1 \to$$
$$\to \psi_0 \leftrightarrow \psi_0^{V^\beta} \to$$
$$\to \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{V^\beta}(x_1, \dots, x_n).$$

Последнее и требовалось установить. $\triangleright$

Следствие. *Пусть* $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ *— формулы* ZFC, *у которых свободны лишь переменные из* $x_1, \dots, x_n$. *Тогда при* $\alpha \in \mathrm{On}$ *будет*

$$(\exists\, \beta > \alpha)(\forall\, x_1, \dots, x_n \in V^\beta)(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_1^{V^\beta}) \wedge \ldots \wedge (\varphi_m \leftrightarrow \varphi_m^{V^\beta}).$$

$\triangleleft$ Положим

$$\varphi(t, x_1, \dots, x_n) := (t = 1 \wedge \varphi_1) \vee (t = 2 \wedge \varphi_2) \vee \ldots \vee (t = m \wedge \varphi_m)$$

и, применяя теорему, выводим требуемое. $\triangleright$

3.2.16. При изучении различных моделей теории множеств широко используется конструкция ультрапроизведения. Мы приведем подробности, полезные читателю, желающему восполнить детали, связанные с уточнениями формально-логического статута нестандартных теорий множеств.

Пусть U — некоторое множество и ε — отношение в U. В контексте теории множеств пару (U, ε) называют *универсетом* или *универсоидом.* При этом вместо $(x, y) \in \varepsilon$ будем иногда писать $x\varepsilon y$.

Рассмотрим формулу $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ теории ZFC.

Допустим, что $x_1, \dots, x_n \in U$ и при интерпретации ε в качестве отношения принадлежности и ограничении всех кванторов в φ на U имеет место $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. В этой ситуации пишут $(U, \varepsilon) \vDash \varphi(x_1, \dots, x_n)$, или $\varphi^{(U,\varepsilon)}(x_1, \dots, x_n)$, или даже φ^U и говорят о *релятивизации* φ. Используют и иные аббревиатуры.

Рассмотрим степень $\mathfrak{X} := X^{\mathscr{E}}$ фиксированного множества X, где $\mathscr{E}$ — некоторое множество индексов (X и $\mathscr{E}$ для удобства считаются непустыми). Для $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{X}$ и $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n) \in (\mathrm{ZFC})$ положим

$$[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] := \{e \in \mathscr{E} : \varphi^X(x_1(e), \dots, x_n(e))\},$$

где φ^X — релятивизация φ на X.

Пусть, далее, $\mathscr{F}$ — фильтр в $\mathscr{E}$ и

$$f \sim_{\mathscr{F}} g := [\![f = g]\!] \in \mathscr{F} \quad (f, g \in \mathfrak{X}).$$

Обозначим символом ${}^{\mathscr{F}}\!X$ фактор-множество $\mathfrak{X}/\sim_{\mathscr{F}}$ и соответственно символом ${}^{\mathscr{F}}\!f$ — класс эквивалентных f элементов. Ясно, что при $f \sim_{\mathscr{F}} f'$ и $g \sim_{\mathscr{F}} g'$ будет

$$[\![f'\varepsilon g']\!] = [\![f = f']\!] \cap [\![g = g']\!] \cap [\![f'\varepsilon g']\!].$$

Таким образом, $[\![f\varepsilon g]\!] \in \mathscr{F} \leftrightarrow [\![f'\varepsilon g']\!] \in \mathscr{F}$. Иначе говоря, в ${}^{\mathscr{F}}\!X$ корректно определено отношение

$$ {}^{\mathscr{F}}\!\varepsilon := \left\{ ({}^{\mathscr{F}}\!f,\, {}^{\mathscr{F}}\!g) \in ({}^{\mathscr{F}}\!X)^2 : [\![f\varepsilon g]\!] \in \mathscr{F} \right\}. $$

Легко удостовериться, что

$$ {}^{\mathscr{F}}\!\varepsilon = \sim_{\mathscr{F}} \circ \varepsilon_{\mathfrak{X}} \circ \sim_{\mathscr{F}} $$

для подходящей интерпретации $\varepsilon_{\mathfrak{X}}$ отношения принадлежности в $\mathfrak{X}$. Возникающее ${}^{\mathscr{F}}\!X$ называют *фильтрованной степенью* X. Если $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, то об ${}^{\mathscr{F}}\!X$ говорят как об *ультрастепени* X.

В силу сделанных определений для $f, g \in \mathfrak{X}$ будет

$$ {}^{\mathscr{F}}\!f \; {}^{\mathscr{F}}\!\varepsilon \; {}^{\mathscr{F}}\!g \leftrightarrow [\![f\varepsilon g]\!] \in \mathscr{F}; $$

$$ {}^{\mathscr{F}}\!f = {}^{\mathscr{F}}\!g \leftrightarrow [\![f = g]\!] \in \mathscr{F}. $$

Иными словами, для каждой атомарной формулы $\varphi = \varphi(x, y)$ теории ZFC выполнено

$$ ({}^{\mathscr{F}}\!X,\, {}^{\mathscr{F}}\!\varepsilon) \vDash \varphi^{{}^{\mathscr{F}}\!X}({}^{\mathscr{F}}\!f,\, {}^{\mathscr{F}}\!g) \leftrightarrow [\![\varphi(f, g)]\!] \in \mathscr{F}. $$

Для $x \in X$ положим $\overline{x}(e) := x$ $(e \in \mathscr{E})$ и обозначим $*x := {}^{\mathscr{F}}\!x$. Подчеркнем, что $*x = *y \leftrightarrow x = y$ и $*x \,{}^{\mathscr{F}}\!\!\in *y \leftrightarrow x \in y$. Оказывается, что подобного рода эффекты носят общий характер. Для их описания дадим определение.

Пусть теперь $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная формула ZFC. Говорят, что формула φ *фильтрована* (относительно X, $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$), если

$$ ({}^{\mathscr{F}}\!X,\, {}^{\mathscr{F}}\!\varepsilon) \vDash \varphi^{{}^{\mathscr{F}}\!X}({}^{\mathscr{F}}\!f_1, \dots, {}^{\mathscr{F}}\!f_n) \leftrightarrow [\![\varphi(f_1, \dots, f_n)]\!] \in \mathscr{F} $$

для всех $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{X}$.

Теорема Лося. *Каждая формула* ZFC *является фильтрованной относительно любого ультрафильтра.*

$\lhd$ Поскольку атомарные формулы фильтрованы, то следует убедиться в том, что пропозициональные связки и навешивание кванторов сохраняют фильтрованность. Если формула φ фильтрована, то фильтрованность $\neg\varphi$ обеспечивается характеристическим свойством ультрафильтра: $F \in \mathscr{F} \leftrightarrow F' := \mathscr{E} - F \notin \mathscr{F}$. Установим поэтому лишь то минимально необходимое свойство, что при $\psi(y) := (\forall x)\varphi(x,y)$ фильтрованность φ обеспечивает фильтрованность ψ.

Итак, пусть $[\![\psi(y)]\!] \in \mathscr{F}$ для $y \in \mathscr{F}$ и $x \subset {}^{\mathscr{F}}X$. Ясно, что $[\![\psi(y)]\!] \subset [\![\varphi(x,y)]\!]$. Стало быть, $({}^{\mathscr{F}}X, {}^{\mathscr{F}}\varepsilon) \vDash {}^{\mathscr{F}}\varphi(x,y)$. В силу произвольности x заключаем: $({}^{\mathscr{F}}X, {}^{\mathscr{F}}\in) \vDash (\forall x)\varphi^{\mathscr{F}}(x,y)$.

Пусть, наконец, известно, что при $x, y \in {}^{\mathscr{F}}X$ будет $\varphi^{{}^{\mathscr{F}}X}(x,y)$, т. е. $[\![\varphi(x,y)]\!] \in \mathscr{F}$. Проверим, что $B := [\![(\forall x)\,\varphi(x,y)]\!]$ также лежит в $\mathscr{F}$. В самом деле, для $e \in \mathscr{E} - B := B'$ имеется $\overline{x}(e)$ такой, что $\neg\varphi(x(e), y(e))$. Возьмем какой угодно x_0 из $\mathfrak{X}$ и положим $\overline{\overline{x}}(e) := \overline{x}(e)$ для $e \in B'$ и $\overline{\overline{x}}(e) := x_0(e)$ в противном случае. Ясно, что $[\![\varphi(\overline{x}, y)]\!] \subset \mathscr{E} - B' = B$. Стало быть, $B \in \mathscr{F}$, ибо $[\![\varphi(\overline{\overline{x}}, y)]\!] \in \mathscr{F}$, что и требовалось. $\rhd$

Следствие 1. *Пусть X — непустое множество и $*X$ — некоторая его ультрастепень. Тогда для $x_1, \ldots, x_n \in X$ и $\varphi \in$ (ZFC) выполнено*

$$\varphi^X(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{*X}(*x_1, \ldots, *x_n).$$

$\lhd$ По теореме Лося $\varphi^{*X}(*x_1, \ldots, *x_n) \leftrightarrow [\![\varphi(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)]\!] \in \mathscr{F}$, где $\mathscr{F}$ — рассматриваемый ультрафильтр, а $\overline{x}_k(e) = (x_k)$ при $e \in \mathscr{E}$. По определению $[\![\cdot]\!]$ будет $[\![\varphi(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)]\!] \in \mathscr{F} \leftrightarrow \varphi^X(x_1, \ldots, x_n)$, что и требовалось. $\rhd$

Пусть X — бесконечное множество и $\mathscr{E}$ — направление всех его непустых конечных подмножеств. Пусть, далее, $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, содержащий фильтр хвостов направления $\mathscr{E}'$ дополнений множеств из $\mathscr{E}$. Ультрастепень ${}^{\mathscr{F}}X$ назовем *каноническим расширением* X, сохранив за ней обозначение $*X$.

Следствие 2. *Для формулы $\varphi = \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \in$ ZFC, элементов $x_1, \ldots, x_n \in X$ и канонического расширения $*X$ справедлив принцип идеализации в слабой форме*

$$(\forall^{\mathrm{fin}} A \subset X)(\exists\, b \in X)(\forall\, a \in A)\varphi^X(a, b, x_1, \ldots, x_n) \to$$
$$\to (\exists\, b \in *X)(\forall\, a \in A)\varphi^{*X}(*a, b, *x_1, \ldots, *x_n).$$

$\lhd$ Для $e \in \mathscr{E}$ найдется $b(e) \in X$ так, что выполняется $(\forall\, a \in e)$ $\varphi^X(a, b(e), x_1, \ldots, x_n)$. Иначе говоря, для возникающего $b \in X^{\mathscr{E}}$ имеем

$$[\![\varphi(\overline{x}, b, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)]\!] \subset \{e \in \mathscr{E} : a \in e\},$$

где, как обычно, $\overline{y}(e) := y$ для $y \in X$ и $e \in \mathscr{E}$. По теореме Лося заключаем: $\varphi^{*X}(*a,\ {}^{\mathscr{F}}b,\ *x_1, \dots, *x_n)$. Это и требовалось установить. $\triangleright$

Непустое множество Z, являющееся подмножеством $\widetilde{Z}$, называем *цермеловским подмножеством* $(\widetilde{Z})$, если

(а) Z транзитивно в $\overline{Z}$ (т. е. $a \in \widetilde{Z} \wedge b \in Z \wedge a \in b \to a \in Z$);

(б) Z замкнуто относительно образования неупорядоченных пар элементов;

(в) $a \in Z \to \bigcup a \in Z \wedge \mathscr{P}(a) \in Z$.

Пусть $(\widetilde{Z}, \widetilde{\varepsilon})$ — универсет и (Z, ε) — также универсет, причем Z — непустое подмножество $\widetilde{Z}$ и ε — сужение $\widetilde{\varepsilon}$ на E^2. В этом случае (Z, ε) называют *подуниверсетом* $(\widetilde{Z}, \varepsilon)$. Если при интерпретации $\widetilde{\varepsilon}$ в качестве отношения принадлежности Z моделирует цермеловское подмножество $\widetilde{Z}$, то Z называют *цермеловским универсетом* (в $(\widetilde{Z}, \widetilde{\varepsilon})$). Указание на $\widetilde{Z}$ часто опускают, если это не вызывает недоразумений.

Следствие 3. *Пусть $(\mathfrak{X}, \varepsilon)$ — цермеловский универсет и $*\mathfrak{X}$ — ультрастепень X. Пусть, далее, $X \in \mathfrak{X}$, $Y \in *\mathfrak{X}$ и $\widetilde{f} : X \to \widetilde{Y}$ (т. е. $\widetilde{f}$ — внешняя функция), где $\widetilde{Y} := \{y : y \overset{*\mathfrak{X}}{\in} Y\}$. Существует элемент $f \in *\mathfrak{X}$ такой, что f — функция из $*X$ в Y внутри $(*\mathfrak{X})$ и при этом $\widetilde{f}(x) = f(*x)$ для $x \in X$.*

$\triangleleft$ Если $\widetilde{f} = \varnothing$, то полагаем $f := \varnothing$. Если же $\widetilde{f} \neq \varnothing$, то $Y \neq \varnothing$. Пусть $Y = {}^{\mathscr{F}}\mathscr{Y}_0$, где $\mathscr{F}$ — рассматриваемый ультрафильтр в соответствующем направлении $\mathscr{E}$. При этом

$$[\![\mathscr{Y}_0 \neq \varnothing]\!] = \{e \in \mathscr{E} : \mathscr{Y}_0(e) \neq \varnothing\} \in \mathscr{F}.$$

Переопределяя, если нужно, $\mathscr{Y}_0(e)$ при $e \notin [\![\mathscr{Y}_0 \neq \varnothing]\!]$, можно считать, что $Y = {}^{\mathscr{F}}\mathscr{Y}$ и $\mathscr{Y}(e) \neq \varnothing$ при всех $e \in \mathscr{E}$.

Пусть $y \in \widetilde{Y}$ и $y = {}^{\mathscr{F}}\mathfrak{y}$. Ясно, что $[\![\mathfrak{y} \in \mathscr{Y}]\!] \in \mathscr{F}$. Положим $h(y)(e) := \mathfrak{y}(e)$ при $e \in [\![\mathfrak{y} \in \mathscr{Y}]\!]$ и доопределим $h(y)$ при иных e, например, как какой-либо элемент $\mathscr{Y}(e) \in X$. Важно, что ${}^{\mathscr{F}}h(y) = y$ при любом подобном выборе. Для $e \in \mathscr{E}$ определим функцию $g(e) : X \to \mathscr{Y}(e)$ соотношением $g(e)(x) := h(f(x))(e)$ (здесь $x \in X$). Множество $g(e) := \{(x,\ g(e)(x)) : x \in X\}$ является элементом $\mathfrak{X}$ (ибо $\mathfrak{X}$ — цермеловский универсет). Тем самым возникает элемент g из $\mathfrak{X}^{\mathscr{E}}$ такой, что $g : e \in \mathscr{E} \mapsto g(e) \in \mathfrak{X}$. При этом, как очевидно, $[\![g : \overline{X} \to \mathscr{Y}]\!] = \mathscr{E}$. Стало быть, по теореме Лося $f := {}^{\mathscr{F}}g$ — функция из $*X$ в Y. Осталось заметить, что при $x \in X$ по тем же причинам

$$\widetilde{f}(x) = f(*x) \leftrightarrow f(*x) = {}^{\mathscr{F}}h(\widetilde{f}(x)) \leftrightarrow [\![g(\overline{x}) = h(\widetilde{f}(x))]\!] \in \mathscr{F}.$$

Кроме того, по определению

$$g(\overline{x})(e) = g(e)(x) = h(\widetilde{f}(x))(e)$$

при всех $e \in \mathscr{E}$. Последнее наблюдение завершает доказательство. $\triangleright$

3.2.17. Для исследования более глубоких и тонких свойств множеств требуется еще одна общая конструкция, называемая *ультрапределом*. Здесь приводится лишь нужный для дальнейшего минимум свойств ультрапредела.

Пусть (U, ε) — универсет и $V := \mathscr{P}(U)$. Положим

$$f_U(u) := f(u) = \{v \in U : (v, u) \in \varepsilon\} \quad (u \in U);$$

$$E := \{(A, B) \in V \times V : (\exists\, a \in U)(A = f(a) \wedge a \in B)\}.$$

Отметим, что для $v \subset U$ по определению образа будет

$$A \in f(v) \leftrightarrow (\exists\, u \in v)(A = f(a)) \leftrightarrow (A, v) \in E.$$

Иначе говоря,

$$f(v) = \{A \in V : (A, v) \in E\}.$$

Универсет (V, E) называют *предрасширением* (U, ε).

3.2.18. *Пусть (U, ε) — универсет, в котором выполнена аксиома экстенсиональности и (V, E) — его предрасширение. Тогда*

(1) *(V, E) удовлетворяет аксиоме экстенсиональности;*

(2) *отображение $f := f_U : U \to U$ инъективно и*

$$(f(u), f(v)) \in E \leftrightarrow (u, v) \in \varepsilon.$$

(3) *для $A \in V$ выполнено*

$$(\forall\, u \in U)(A, f(u)) \in E \leftrightarrow (\exists\, a)((a, u) \in \varepsilon \wedge A = f(a)).$$

$\triangleleft$ (1): Удостоверимся теперь в экстенсиональности (V, E).

Возьмем $x, y \in V$ такие, что $(\forall\, z \in V)(z, x) \in E \to (z, y) \in E$. Достаточно проверить, что $x \subset y$. Возьмем $w \in x, w \in U$. Тогда $(f(w), x) \in E$ и, стало быть, для некоторого $\overline{w} \in U$ будет $f(w) = f(\overline{w})$ и $\overline{w} \in y$. Но $\overline{w} = w$ по уже доказанному. Итак, $(\forall\, w \in U) w \in x \to w \in y$. Осталось вспомнить, что $x, y \in \mathscr{P}(U)$.

(2): Отметим, что $(u, v) \in \varepsilon$ означает, что $u \in f(v)$. Отсюда, используя экстенсиональность для ε в U, выводим:

$$f(u) = f(v) \to ((\forall\, z \in U) z \in f(u) \leftrightarrow z \in f(v)) \to \\ \to ((\forall\, z \in U)(z, u) \in \varepsilon \leftrightarrow (z, v) \in \varepsilon) \to u = v.$$

Если теперь $(f(u), f(v)) \in E$, то по определению для некоторого $a \in \overline{U}$ будет $f(a) = f(a)$ и $a \in f(v)$. По доказанному $a = u$. Значит, $(u, v) \in \varepsilon$.

В свою очередь, импликация $(u, v) \in \varepsilon \to (f(u), f(v)) \in E$ ясна (и не требует экстенсиональности в U) — в качестве требуемого в определении E элемента a можно взять U.

(3): Если $(a, u) \in \varepsilon$ и $A = f(a)$, то $a \in f(u)$ и, стало быть, $(A, f(u)) \in E$ по определению.

Наоборот, привлекая (2), выводим

$$(A, f(u)) \in E \to (\exists\, a \in U) A = f(a) \wedge a \in f(u) \to \\ \to A = f(a) \wedge (f(a), f(u)) \in E \to (a, u) \in \varepsilon \wedge A = f(a),$$

что и требовалось. $\rhd$

Пусть (U, ε) — универсет, удовлетворяющий аксиоме экстенсиональности. Положим $U_0 := U,\ \varepsilon_0 := \varepsilon$. Применяя последовательно предыдущие предложения и имея (U_k, ε_k), полагаем

$$U_{k+1} := \mathscr{P}(U_k);$$

$$f_k(u) = \{\overline{u} \in U_k : (\overline{u}, U) \in \varepsilon_k\} \quad (u \in U_k);$$

$$\varepsilon_{k+1} := \{(u, v) \in U_{k+1} \times U_{k+1} : (\exists\, a \in U_k)(u = f_k(a) \wedge a \in v)\}.$$

Тем самым возникает последовательность инъекций

$$U_0 \xrightarrow{f_1} U_1 \xrightarrow{f_2} U_2 \to \cdots \to U_n \xrightarrow{f_{n+1}} U_{n+1} \to \dots$$

Нетрудно подобрать множество V и последовательность инъекций $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ такие, что возникающая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
U_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[drrrrr, "g_0"'] & U_1 \arrow[r, "f_2"] \arrow[drrrr, "g_1"] & U_2 \arrow[r] \arrow[drrr, "g_2"] & \cdots \arrow[r] & U_n \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[dr] & U_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n+1}"] & \cdots \\
 & & & & & V &
\end{tikzcd}$$

коммутативна и $V = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U'_n$, где $U'_n := g_n(U_n)$.

В самом деле, можно рассмотреть прямую сумму

$$\widetilde{V} := \{(x, n) : x \in U_n, n \in \mathbb{Z}\}$$

и ввести отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом. Элемент (x, n) эквивалентен (y, m), если имеется $k \geq n, m$ такое, что $f_k \circ f_{k-1} \circ \ldots \circ f_n(x) = f_k \circ f_{k-1} \circ \ldots \circ f_m(y)$. В качестве V берем $\widetilde{V}/\!\sim$. Отображение g_n возникает как композиция естественного вложения U_n в $\widetilde{V}$ и фактор-отображения $\widetilde{V}$ на V. О наборе из V и $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ обычно говорят как об *индуктивном пределе спектра* $(U_n, f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Наделяя U'_n отношением $\varepsilon'_n := g_n^{-1} \circ \varepsilon_n \circ g_n^{-1}$, полагают

$$E := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon'_n.$$

Возникающий универсоид (V, E) называют *внешним расширением* (U, ε). При этом U можно считать вложением в V посредством инъекции $\iota := g_0$. (Часто подразумевают и естественное отождествление (U_n, ε_n) с (U'_n, ε'_n), что сокращает записи.)

3.2.19. *Для элементов u, v внешнего расширения (V, E) выполнено*

$$(u, v) \in E \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, n \in \mathbb{N})(v \in U'_{n+1} \wedge u \in U'_n \wedge g_n^{-1}(u) \in g_{n+1}^{-1}(v)) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall\, n \geq n_0)(v \in U'_{n+1} \wedge u \in U'_n \wedge g_n^{-1}(u) \in g_{n+1}^{-1}(v)).$$

◁ На основании 3.2.18 (2) имеем

$$f_{n+1} \circ \varepsilon_n \circ f_{n+1}^{-1} \subset \varepsilon_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Отсюда

$$g_n \circ \varepsilon_n \circ g_n^{-1} = (g_{n+1} \circ f_{n+1}) \circ \varepsilon_n \circ (f_{n+1}^{-1} \circ g_{n+1}^{-1}) =$$

$$= g_{n+1} \circ (f_{n+1} \circ \varepsilon_n \circ f_{n+1}^{-1}) \circ g_{n+1}^{-1} \in g_{n+1} \circ \varepsilon_{n+1} \circ g_{n+1}^{-1}.$$

Поэтому можно считать, что

$$(u, v) \in E \leftrightarrow (\exists\, n \in \mathbb{N})(u, v) \in g_{n+1} \circ \varepsilon_{n+1} \circ g_{n+1}^{-1}.$$

При этом для каждого $n \geq n_0$ также

$$(u, v) \in g_{n+1} \circ \varepsilon_{n+1} \circ g_{n+1}^{-1}.$$

Ясно, что $v = g_{n+1}(\overline{v})$, где $\overline{v} := g_{n+1}^{-1}(v) \in U_{n+1}$ и $u = g_{n+1}(\overline{u})$, где $\overline{u} := g_{n+1}^{-1}(v)$. При этом $\overline{u}\varepsilon_{n+1}\overline{v}$ и $\overline{v} \in U_{n+1}$, т. е. для некоторого $a \in v_n$ выполнено $\overline{v} = f_{n+1}(a)$. Итак, $(\overline{u}, f_{n+1}(a)) \in \varepsilon_{n+1}$. Значит, на основании 3.2.18 (3) будет $\overline{u} = f_{n+1}(\overline{\overline{u}})$ для некоторого $\overline{\overline{u}} \in U_n$. Стало быть, $u = g_{n+1}(\overline{u}) = g_{n+1}(f_{n+1})(\overline{\overline{u}}) = g_n(\overline{\overline{u}}) \in U_n'$. Поскольку $(f_{n+1}(\overline{\overline{u}}),\ \overline{v}) \in \varepsilon_{n+1}$, то $\overline{\overline{u}} \in \overline{v}$ по определению ε_{n+1}. Осталось заметить, что $g_n^{-1}(u) = \overline{\overline{u}}$ и $g_{n+1}^{-1}(v) = \overline{v}$. ▷

3.2.20. *Пусть (V, E) — внешнее расширение универсета (U, ε), удовлетворяющего аксиоме экстенсиональности. Тогда*

(1) $(V, E) \vDash$ *аксиома экстенсиональности;*
(2) $(V, E) \vDash$ *аксиома пары;*
(3) $(V, E) \vDash$ *аксиома объединения;*
(4) $(V, E) \vDash$ *аксиома степени;*
(5) $(V, E) \vDash$ *схема аксиом выделения;*
(6) $(V, E) \vDash$ *аксиома выбора;*
(7) $(V, E) \vDash$ *аксиома пустого множества;*
(8) $(V, E) \vDash$ *аксиома бесконечности;*
(9) $(\forall\, a, b \in U)((a, b) \in \varepsilon) \leftrightarrow (\iota(a), \iota(b)) \in E;$
(10) $(\forall\, x, y \in V)((x, y) \in E \wedge y \in \iota(U) \to x \in \iota(U));$
(11) $(\forall\, \overline{U} \subset U)(\exists\, \overline{\overline{U}} \in V)(\forall\, v \in V)((v, \overline{\overline{U}}) \in E \leftrightarrow v \in \iota(\overline{U})).$

$\lhd$ (1): На основании 3.2.18 (1) и принципа индукции в (U_n, ε_n) имеет место аксиома экстенсиональности. Осталось заметить, что сужение E на $U'_n \times U'_n$ совпадает с ε'_n (при всех $n \in \mathbb{Z}_+$).

(2): Пусть $u, v \in U'_n$, причем $u = g_n(x), v = g_n(y)$. Пара $z := \{x, y\}$ — элемент U_{n+1}. Стало быть, $w := g_{n+1}(z)$ — элемент U'_{n+1}. Видно, что $(z, w) \in E \leftrightarrow z = u \vee z = v$.

(3): Пусть $u \in V$. Можно считать, что $u = g_{n+2}(x)$ и $x \in U_{n+2}$. Положим

$$y := \bigcup \{f_{n+1}(z) : z \in f_{n+2}(x), z \in U_{n+1}\}.$$

Ясно, что $y \in U_{n+1}$. Обозначим $v := g_{n+1}(y)$. Заметим, что для $w \in V$ будет

$$(w, v) \in E \leftrightarrow (\exists\, \varkappa)(\varkappa, v) \in E \wedge (w, \varkappa) \in E.$$

В самом деле, для $a \in U_{n+1}$ имеем

$$a \in y \leftrightarrow ((\exists\, z \in U_{n+1}) z \in f_{n+2}(x)) \wedge a \in f_{n+1}(z) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (z, x) \in \varepsilon_{n+2} \wedge (a, z) \in \varepsilon_{n+1}.$$

Осталось привлечь 3.2.19.

(4): Возьмем $u \in V$, и пусть $u = g_n(x)$, где $x \in U_n$. Положим $A := \{y \in U_n : f_{n+1}(y) \subset f_{n+1}(x)\}$. Удостоверимся, что множество $v := g_{n+2}(A)$ играет роль множества подмножеств u в (V, E). Прежде всего, заметим, что

$$f_{n+1}(y) \subset f_{n+1}(x) \leftrightarrow (\forall\, z \in V)(z, g_{n+1}(f_{n+1}(y))) \in E \to (z, u) \in E \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (V, E) \vDash g_n(y) \text{ — подмножество } x.$$

Таким образом, для любого $a \in V$ получаем

$$(a, v) \in E \leftrightarrow (a, g_{n+1}(A)) \in E \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow ((\exists\, \overline{a} \in A)(a = g_n(\overline{a})) \leftrightarrow (\exists\, y \in U_n) a = g_n(y) \wedge f_{n+1}(y) \subset f_{n+1}(x) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, z \in V) a = Z \wedge (V, E) \vDash z \text{ — подмножество } v \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (V, E) \vDash a \text{ — подмножество } v.$$

(5): Пусть $\varphi = \varphi(x, y) \in$ (ZFC) и $u, y \in V$. Считаем, что $u = g_{n+1}(x)$. Положим $A := \{z \in f_{n+1}(x) : \varphi(g_n(z), y)\}$. Ясно, что $A \in U_{n+1}$. Обозначим $v := g_{n+1}(A)$. При этом для $a \in U$ выполнено

$$(a, v) \in E \leftrightarrow (\exists\, z \in U_n) a = g_n(z) \wedge z \in A \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, z \in U_n) z \in f_{n+1}(x) \wedge a = g_n(z) \wedge \varphi(g_n(z), y) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (a, u) \in E \wedge \varphi(a, y).$$

(6): Пусть $u = g_{n+1}(x)$. Положим

$$A := \{z \in U_n : z \in f_{n+1}(x) \wedge f_{n+1}(z) \neq \varnothing\}.$$

Имеется функция выбора $\psi : A \to U_{n+1}$ такая, что $\psi(z) \in f_{n+1}(z)$ для всех $z \in A$. Множество ψ — элемент U_{n+3}. Пусть $f := g_{n+3}(\psi)$. Легко убедиться, что f выполняет роль функции в (V, E), причем

$$(\forall\, v \in V)(v, y) \in E \wedge v \neq 0) \to (f(v), y) \in E.$$

Такое f и требовалось предъявить.

(7)–(10) сомнений не вызывают.

(11) В качестве $\overline{\overline{\overline{U}}}$ возьмем $g_1(\overline{\overline{U}})$ (это корректно, ибо $\overline{U} \in U_1$). В силу (4) будет $(v, \overline{\overline{U}}) \in \iota \leftrightarrow (\exists\, u \in U_0) v = \iota(u) \wedge u \in \overline{U}$. Иными словами, $(v, \overline{\overline{U}}) \in E \leftrightarrow v \in \iota(\overline{v})$. $\rhd$

3.2.21. Примечания.

(1) Первая (наряду с теорией типов Б. Рассела) система аксиом для теории множеств, предложенная Е. Цермело в 1908 г., совпадает, по существу, с ZF_1–ZF_3, ZF_5. Аксиомы экстенсиональности ZF_1 и объединения ZF_2 предложены ранее Г. Фреге (1883 г.) и Г. Кантором (1899 г.) соответственно. Идея аксиомы бесконечности ZF_5 восходит к Р. Дедекинду.

(2) Аксиома выбора AC неявно использовалась, по-видимому, давно, но замечена она Дж. Пеано в 1890 г. и Б. Леви в 1902 г. Эта аксиома введена Е. Цермело в 1904 г. и была наиболее оспариваемой в течение многих лет. Аксиома выбора лежит в основе многих важных фрагментов современной математики. Неудивительно, что в настоящее время она принята большинством ученых. Обсуждение места и роли аксиомы выбора в различных разделах математики можно найти в [34, 101, 218, 356, 400].

(3) Теория множеств Цермело оформилась в начале 20-х годов XX века. В тот период завершилась формализация языка теории множеств, позволившая уточнить расплывчатое описание свойств, допускаемых в аксиоме выделения. В то же время аксиомы Цермело не дают в качестве следствия утверждение Кантора о том, что взаимнооднозначный образ множества есть множество. Указанный пробел устранили А. Френкель в 1922 г. и Т. Сколем в 1923 г., предложив варианты аксиомы подстановки. Этот момент можно считать рождением теории ZFC.

(4) Аксиому фундирования ZF_6, по существу, предложил Дж. фон Нейман в 1925 г. Эта аксиома не зависит от остальных аксиом ZFC.

(5) Система аксиом ZFC является бесконечной. Невозможность конечной аксиоматизируемости ZFC установил Р. Монтэгю в 1960 г., см. [21, 218, 327, 400].

3.3. Теория внутренних множеств Нельсона

Предварительный анализ свойств стандартных и нестандартных множеств, проведенный нами ранее, выявил, что в универсуме фон Неймана есть место бесконечно малым числам, но нет места для всей их совокупности.

Иначе говоря, нестандартный анализ указывает, что теория Цермело — Френкеля, описывающая классический мир «стандартной» математики, выделяет собственную, внутреннюю часть универсума «наивных» множеств. Подчеркивая это обстоятельство, в нестандартной теории множеств элементы универсума фон Неймана называют *внутренними множествами.* Таким образом, множество в смысле теории Цермело — Френкеля и внутреннее множество — это синонимы.

Удобное обоснование нестандартного анализа дает теория внутренних множеств, предложенная Э. Нельсоном — теория IST.

3.3.1. Алфавит формальной теории IST получается добавлением к алфавиту теории ZFC одного-единственного нового символа — символа одноместного предиката St, выражающего свойство быть *стандартным множеством.*

Иначе говоря, в число допустимых для рассмотрения фрагментов текстов IST включаются записи вида $\mathrm{St}(x)$ или, более развернуто, «x стандартно», или, наконец, «x — стандартное множество». Итак, содержательной областью изменения переменных IST является мир Цермело — Френкеля — универсум фон Неймана, в котором теперь выделены стандартные и нестандартные множества.

3.3.2. Формулы IST определяются обычной процедурой. При этом к числу атомарных формул добавляются тексты: $\mathrm{St}(x)$, где x — переменная. Каждая формула ZFC является формулой IST, обратное утверждение очевидно не верно.

Для различения формул используют следующую терминологию: формулы ZFC называют *внутренними*, формулы IST, не являющиеся формулами ZFC, называют *внешними*. Так, текст «x стандартно» — это внешняя формула теории IST.

Иногда ниже удобно использовать образные сокращения: писать $\varphi \in (\mathrm{IST})$ вместо φ — формула IST и соответственно $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ вместо φ — формула ZFC, т. е. φ — внутренняя формула теории IST.

3.3.3. Различие между формулами IST приводит к вычленению внешних и внутренних классов. Если φ — внешняя формула IST, то текст $\varphi(y)$ описывают словами: «y — элемент *внешнего класса* $\{x : \varphi(x)\}$». Термин *внутренний класс* используется в том же смысле, что термин класс в теории Цермело — Френкеля. В случаях, когда это не может привести к недоразумениям, внешние и внутренние классы называют просто классами.

3.3.4. Внешние классы, составленные из элементов некоторого внутреннего множества, мы называем *внешними множествами*, или, более полно, внешними подмножествами данного множества. Полезно вновь обратить внимание на то, что внутренний класс, составленный из элементов внутреннего множества, — это снова внутреннее множество. Помимо сокращений, принятых в ZFC, в теории внутренних множеств используются дополнительные соглашения. Вот некоторые из них:

$$\mathbb{V}^{\mathrm{St}} := \{x : \mathrm{St}(x)\} \ \text{— внешний класс стандартных множеств;}$$

$$x \in \mathbb{V}^{\mathrm{St}} := x \text{ стандартно} := (\exists\, y)\ (\mathrm{St}(y) \wedge y = x);$$

$$(\forall^{\mathrm{st}} x)\, \varphi := (\forall\, x)(x \text{ стандартно } \to \varphi);$$

$$(\exists^{\mathrm{st}} x)\,\varphi := (\exists\, x)(x \text{ стандартно } \wedge \varphi);$$

$$(\forall^{\mathrm{st\,fin}} x)\,\varphi := (\forall^{\mathrm{st}} x)(x \text{ конечно } \to \varphi);$$

$$(\exists^{\mathrm{st\,fin}} x)\,\varphi := (\exists^{\mathrm{st}} x)(x \text{ конечно } \wedge \varphi);$$

$${}^{\circ}x := \{y \in x : y \text{ стандартно}\}.$$

Внешнее множество ${}^{\circ}x$ часто называют *стандартным ядром* x.

Возникающая в силу сложившейся традиции коллизия обозначений (для $x \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ символ ${}^{\circ}x$ обозначает и стандартную часть $\mathrm{st}(x)$ этого числа) не приводит к сколь-либо значительным недоразумениям.

3.3.5. Аксиомы IST получаются добавлением к перечню аксиом ZFC следующих трех новых схем, носящих, как указывалось ранее, название *принципов нестандартной теории множеств*:

(1) принцип переноса —

$$(\forall^{\mathrm{st}} x_1)(\forall^{\mathrm{st}} x_2)\dots(\forall^{\mathrm{st}} x_n)((\forall^{\mathrm{st}} x)\,\varphi(x, x_1, \dots, x_n) \to \\ \to (\forall\, x)\,\varphi(x, x_1, \dots, x_n))$$

для каждой внутренней формулы φ;

(2) принцип идеализации —

$$(\forall\, x_1)(\forall\, x_2)\dots(\forall\, x_n)((\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)(\exists\, x)(\forall\, y \in z)\,\varphi(x, y, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y)\,\varphi(x, y, x_1, \dots, x_n)),$$

где $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ — произвольная внутренняя формула;

(3) принцип стандартизации —

$$(\forall\, x_1)\dots(\forall\, x_n)((\forall^{\mathrm{st}} x)(\exists^{\mathrm{st}} y)(\forall^{\mathrm{st}} z)(z \in y) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z, x_1, \dots, x_n)))$$

для всякой формулы φ.

3.3.6. ***Теорема Поуэлла.*** *Теория* IST *является консервативным расширением теории* ZFC.

$\triangleleft$ Пусть φ — формула ZFC, $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ и φ установлена в IST. Допустим, что в предъявленном доказательстве φ использованы аксиомы $\psi_1, \dots, \psi_m$ из ZFC. По теореме Монтегю — Леви имеется такой ординал α, что при $x_1, \dots, x_n \in V^\alpha$ будет

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{V^\alpha}(x_1, \dots, x_n) \wedge \psi_1^{V^\alpha} \wedge \dots \wedge \psi_m^{V^\alpha}$$

Положим $U_0 := V^\alpha$ и $\varepsilon_0 := \in|_{V^\alpha \times V^\alpha}$. В качестве $\mathscr{E}$ возьмем $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(U_0)$, и пусть $\mathscr{F}$ — фиксированный ультрафильтр, содержащий фильтр хвостов $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(U_0)$. Обозначим U_1 ультрастепень (= расширение) U_0 и $\iota_1 : U_0 \to U_1$ — каноническое вложение U_0 в U_1. Повторяя этот процесс, обозначим $U_{n+1} := {U_n}^{\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(U_0)}/\mathscr{F}$ и $\iota_{n+1} : U_n \to U_{n+1}$ — каноническое вложение в ультрастепень и будем считать U_n вложенным в U_{n+1} (отождествлением U_n и $\iota_{n+1}(U_n)$). Пусть, далее, $U := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U_n$ и $\varepsilon := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_n$, где $\varepsilon_{n+1} := \iota_n \circ \varepsilon_n \circ \iota_{n+1}$ — интерпретация отношения принадлежности. Пусть, далее, $* : U_0 \to U$ — каноническое вложение U_0 в U. Предикат $\mathrm{St}(\cdot)$ трактуем как принадлежность к $\{*u : u \in U_0\}$. Поскольку $x \in V^\alpha \to (\exists\, \beta \in \alpha)\ x \in V^\beta \to \mathscr{P}(x) \in V^\beta$, можно сделать вывод о том, что в U удовлетворена аксиома стандартизации. Справедливость принципов переноса и идеализации обоснована теоремой Лося (см. следствие 2). Тем самым в (U, ε) удовлетворены «стандартные» релятивизации $\psi_1, \dots, \psi_m$ и принципы IST. Это означает, что $\varphi^U(*x_1, \dots, *x_n)$ и $\varphi^{V^\alpha}(x_1, \dots, x_n)$. Стало быть, φ удовлетворена в универсуме фон Неймана. $\triangleright$

3.3.7. Приведенная теорема означает, что внутренние теоремы теории внутренних множеств являются теоремами теории Цермело — Френкеля. Иначе говоря, при доказательстве «стандартных» теорем о множествах из универсума фон Неймана мы вправе пользоваться формализмом IST с той же степенью надежности, которую мы имеем при работе в рамках теории ZFC. Не следует забывать при этом, что теория ZFC обосновывается, в конечном счете, своей практической «непогрешимостью» и содержательной оправданностью.

3.3.8. При обдумывании смысла формального выражения аксиом теории внутренних множеств бросается в глаза несколько громоздкая запись принципа идеализации. В то время как приведенные уточнения правил переноса и стандартизации вполне адекватно отражают выдвинутые ранее наивные концепции, место указанной формулировки принципа идеализации вызывает некоторые затруднения. Поэтому, прежде всего, установим, что принцип идеализации 3.3.5 (2) гарантирует наличие нестандартных элементов.

3.3.9. *Существует такое конечное внутреннее множество, среди элементов которого встречается каждое стандартное множество.*

$\lhd$ Рассмотрим следующую формулу: $\varphi := (x$ конечно $\wedge\, y \in x)$. Отметим, что $\varphi \in$ (ZFC). Ясно, что для каждого стандартного конечного z найдется такое x, что при всех $y \in z$ будет $\varphi(x, y)$. В качестве такого x можно взять самое z. Остается воспользоваться принципом идеализации. $\rhd$

3.3.10. При применениях принципа идеализации полезно иметь в виду, что стандартные конечные множества — это в точности те множества, каждый элемент которых стандартен. Указанный факт установлен в 2.2.2. Поучительно рассмотреть его формальный вывод, основанный на принципе идеализации.

3.3.11. *Для внутреннего множества A выполнено*

$$A = {}^{\circ}A \leftrightarrow (A \text{ *стандартно*}) \wedge (A \text{ *конечно*}).$$

$\lhd$ Составим формулу $\varphi := (x \in A \wedge x \neq y)$. Бесспорно, $\varphi \in$ (ZFC). Тогда по принципу идеализации

$$(\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)(\exists\, x)(\forall\, y \in z)\, \varphi(x, y, A) \leftrightarrow (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y)(x \in A \wedge x \neq y) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, x \in A)\ (x \text{ — нестандартное}) \leftrightarrow A - {}^{\circ}A \neq \varnothing.$$

Иными словами, получаем

$$A = {}^{\circ}A \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st\,fin}} z)(\forall\, x)(\exists\, y \in z)(x \notin A \vee x = y) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st\,fin}} z)(\forall\, x \in A)(\exists\, y \in z)(x = y) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st\,fin}} z)(A \subset z),$$

что и требовалось доказать. $\rhd$

3.3.12. *Пусть X, Y — стандартные множества и $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — некоторая формула* IST. *Справедливо правило введения стандартных функций* (= принцип конструирования):

$$(\forall^{\mathrm{st}} x)(\exists^{\mathrm{st}} y)(x \in X \to y \in Y \wedge \varphi(x, y, z)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} y(\,\cdot\,))(\forall^{\mathrm{st}} x)(y(\,\cdot\,) \text{ — функция из } X \text{ в } Y \wedge$$
$$\wedge (x \in X \to \varphi(x, y(x), z))).$$

$\lhd$ Рассмотрим стандартизацию $\overline{F}(x) := {}^*\{y \in Y : \varphi(x, y, z)\}$. Еще раз применяя 3.3.5 (3), образуем стандартное множество

$$F := {}^*\{(x, A) \in X \times \mathscr{P}(Y) : \overline{F}(x) = A\}$$

(здесь мы используем стандартность $\mathscr{P}(Y)$, обеспеченную предположением о стандартности Y). По условию имеем $(\forall^{\mathrm{st}} x \in X)\, \overline{F} \neq \varnothing$. При этом $F(x) = \overline{F}(x)$ по определению F. Итак,

$$((\forall^{\mathrm{st}} x \in X)(F(x) \neq \varnothing)) \to ((\forall\, x \in X)(F(x) \neq \varnothing))$$

в силу принципа переноса. Используя аксиому выбора, можно заключить:

$$(\exists\, y(\,\cdot\,))(y(\,\cdot\,) \text{ — функция из } X \text{ в } Y) \wedge (\forall\, x \in X)(y(x) \in F(x)).$$

Привлекая принцип переноса, выводим, что имеется стандартная функция $y(\,\cdot\,)$, определенная на X со значениями в Y, для которой $y(x) \in F(x)$ при всех $x \in X$. Вновь учитывая определение F, видим: $y(\,\cdot\,)$ — искомая функция. $\rhd$

3.3.13. В дальнейшем (как и прежде) весьма удобно пользоваться некоторыми символическими записями установленных правил, сознательно допуская при этом известные отступления от сделанных соглашений. Так, способы введения стандартных функций из 3.3.12 стоит переписывать в виде:

(1) $(\forall^{\mathrm{st}} x)(\exists^{\mathrm{st}} y)\, \varphi(x, y) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} y(\,\cdot\,))(\forall^{\mathrm{st}} x)\, \varphi(x, y(x))$,

(2) $(\exists^{\mathrm{st}} x)(\forall^{\mathrm{st}} y)\, \varphi(x, y) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} y(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st}} x)\, \varphi(x, y(x))$,

где $\varphi \in$ (IST), т. е. произвольная формула IST. Иначе говоря, мы опускаем указания на возможное наличие свободных переменных в φ и на необходимое допущение «ограниченности», состоящее в том, что x и y считаются пробегающими заданные стандартные множества. Точно так же, если $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\psi = \psi(y_1, \ldots, y_n)$, то мы будем писать $\varphi \leftrightarrow \psi$ в случае, когда

$$(\forall^{\mathrm{st}} x_1) \ldots (\forall^{\mathrm{st}} x_n)(\forall^{\mathrm{st}} y_1) \ldots (\forall^{\mathrm{st}} y_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(y_1, \ldots, y_n),$$

и говорить об эквивалентности формул φ и ψ (хотя если одна из формул φ или ψ внешняя, формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\psi(y_1, \ldots, y_n)$ могут не быть равносильными при некоторых наборах переменных).

Используя новые возможности, принцип переноса мы будем сокращенно изображать символами:

(3) $(\forall^{\mathrm{st}} x)\, \varphi(x) \leftrightarrow (\forall\, x)\, \varphi(x)$,

(4) $(\exists^{\mathrm{st}} x)\, \varphi(x) \leftrightarrow (\exists\, x)\, \varphi(x)$,

всегда имея в виду, что формула φ в такой записи должна быть внутренней: $\varphi \in$ (ZFC). Полезно привести здесь же элементарные правила:

(5) $(\forall\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y)\, \varphi(x,y) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} y)(\forall\, x)\, \varphi(x,y)$,

(6) $(\exists\, x)(\exists^{\mathrm{st}} y)\, \varphi(x,y) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} y)(\exists\, x)\, \varphi(x,y)$,

справедливые для любой формулы φ, и новые записи принципа идеализации:

(7) $(\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)(\exists\, x)(\forall\, y \in z)\, \varphi(x,y) \leftrightarrow (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y)\, \varphi(x,y)$,

(8) $(\exists^{\mathrm{st\,fin}} z)(\forall\, x)(\exists\, y \in z)\, \varphi(x,y) \leftrightarrow (\forall\, x)(\exists^{\mathrm{st}} y)\, \varphi(x,y)$,

относящиеся только к внутренним формулам $\varphi \in$ (ZFC).

3.3.14. Приведенные правила дают возможность перевода многих (но, разумеется, не всех) понятий и предложений нестандартного анализа в равносильные математические определения и утверждения, не апеллирующие к стандартности. Иначе говоря, формулы IST, выражающие «нечто необычное» о стандартных объектах, можно преобразовать в эквивалентные формулы ZFC, представляющие обычные математические записи рассматриваемых выражений. Процедуру, приводящую к описанному результату, называют *алгоритмом Нельсона.* Частями такого процесса являются правила 3.3.13 (1)–3.3.13 (8). Качественно говоря, суть алгоритма «дешифровки» состоит в том, что, вводя стандартные функции, привлекая идеализацию и перестановки кванторов, мы редуцируем утверждение к форме, приспособленной для переноса. В конечном счете перевод состоит в приведении формулы к виду, пригодному для элиминации — исключения — внешнего понятия стандартности. Необходимо подчеркнуть, что во всех случаях фактического использования каких-либо из соотношений 3.3.13, оговоренные выше требования, обеспечивающие законность их применения, должны быть заранее удовлетворены.

3.3.15. Алгоритм Нельсона состоит из следующих шагов:

(1) высказывание нестандартного анализа выписывается как формула IST, т. е. осуществляется дешифровка всех сокращений;

(2) рассматриваемая формула IST приводится к пренексной нормальной форме

$$(Q_1 x_1) \ldots (Q_n x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

где φ — формула ZFC, а $Q_k \in \{\forall, \exists, \forall^{\mathrm{st}}, \exists^{\mathrm{st}}\}$ для $k := 1, \ldots, n$;

(3) если Q_n — *«внутренний» квантор*, т. е. $\forall$ или $\exists$, то полагают $\varphi := (Q_n x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и переходят к шагу (2);

(4) если Q_n — *«внешний» квантор*, т. е. $\forall^{\mathrm{st}}$ или $\exists^{\mathrm{st}}$, то отыскивают первый внутренний квантор при просматривании кванторной приставки $(Q_1 x_1) \ldots (Q_n x_n)$ в направлении справа налево;

(5) если при шаге (4) внутренних кванторов не встретилось, то на основании 3.3.13 (3) и 3.3.13 (4) заменяют квантор Q_n на соответствующий внутренний квантор и переходят к шагу (2) (т. е. последовательно справа налево «стирают» верхний индекс $^{\mathrm{st}}$ над каждым квантором);

(6) пусть Q_m — первый из встретившихся внутренних кванторов. Допустим, что Q_{m+1} — внешний квантор того же типа, что и Q_m (т. е. $Q_m = \forall$ и $Q_{m+1} = \forall^{\mathrm{st}}$ или $Q_m = \exists$ и $Q_{m+1} = \exists^{\mathrm{st}}$). Используем правила 3.3.13 (5) и 3.3.13 (6) и возвращаемся к (2);

(7) если все кванторы $Q_{m+1}, \ldots, Q_n$ имеют один и тот же тип, то применяем принцип идеализации в форме 3.3.13 (7) или 3.3.13 (8) и переходим к (2);

(8) если происходит смена кванторов, т. е. Q_{p+1} имеет тот же тип, что и Q_m, а все кванторы $Q_{m+1}, \ldots, Q_p$ — другого — противоположного — типа, то можно применить 3.3.13 (1) или 3.3.13 (2), считая при этом $x := (x_{m+1}, \ldots, x_p)$, $y := x_{p+1}$. Затем мы переходим к (2).

3.3.16. Следует иметь в виду, что одно и то же содержательное утверждение можно выразить по-разному, в том числе и в форме, абсолютно недоступной для восприятия. В этой связи при практическом применении алгоритма Нельсона необходимо учитывать конкретные возможности сокращения процедуры «протаскивания наружу внешних кванторов». В частности, не всегда целесообразно рассматривать формулы, приведенные с самого начала к пренексной нормальной форме (т. е. доводить до конца шаг (2) алгоритма).

3.3.17. Примеры.

(1) *В нестандартном анализе справедлив принцип внешней индукции, т. е. для произвольной формулы* $\varphi \in (\mathrm{IST})$ *выполнено:*

$$(\varphi(1) \wedge ((\forall\, n \in {}^{\circ}\mathbb{N})\, \varphi(n) \to \varphi(n+1))) \to (\forall\, n \in {}^{\circ}\mathbb{N})\, \varphi(n).$$

$\lhd$ Применять к формальной записи исследуемого принципа алгоритм Нельсона прямо нельзя, так как формула φ может быть внешней. В этой связи рассмотрим стандартизацию $A := {}^{*}\{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}$. Ясно, что $1 \in A$ и для каждого стандартного $n \in A$ будет $n+1 \in A$. Нужно установить, что ${}^{\circ}\mathbb{N} \subset A$. Выпишем требуемую формулу и применим к ней алгоритм Нельсона:

$$\begin{gathered}(1 \in A \wedge (\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(n \in A \to (n+1) \in A)) \to {}^{\circ}\mathbb{N} \subset A \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} m)(\forall^{\mathrm{st}} n)(m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge 1 \in A \wedge n \in A \to (n+1) \in A) \to \\ \to m \in A \leftrightarrow (1 \in A \wedge (\forall\, n \in \mathbb{N})(n \in A \to (n+1) \in A)) \to \mathbb{N} \subset A,\end{gathered}$$

что и требовалось установить. $\rhd$

(2) *Сумма бесконечно малых бесконечно мала.*

$$\begin{gathered}\lhd\ (\forall\, s \in \mathbb{R})(\forall\, t \in \mathbb{R})(s \approx 0 \wedge t \approx 0 \to s + t \approx 0) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall\, s \in \mathbb{R})\,(\forall\, t \in \mathbb{R})(s \approx 0 \wedge t \approx 0 \to (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)|s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\forall\, s \in \mathbb{R})(\forall\, t \in \mathbb{R})((\forall^{\mathrm{st}} \delta_1 > 0) \wedge \\ \wedge (\forall^{\mathrm{st}} \delta_2 > 0)(|s| < \delta_1 \wedge |t| < \delta_2 \to |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\forall\, s \in \mathbb{R})(\forall t \in \mathbb{R})(\exists^{\mathrm{st}} \delta_1 > 0)(\exists^{\mathrm{st}} \delta_2 > 0)(|s| < \delta_1 \wedge \\ \wedge |t| < \delta_2 \to |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(\forall\, s)\,(\forall\, t)(\exists^{\mathrm{st}} \delta_1)(\exists^{\mathrm{st}} \delta_2)(\varepsilon > 0 \wedge \ldots \\ \ldots \wedge \delta_2 > 0 \wedge |s| < \delta_1 \wedge |t| < \delta_2 \to |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(\forall\, s)(\forall\, t)(\exists^{\mathrm{st}} \delta_1)(\exists^{\mathrm{st}} \delta_2)(|s| < \delta_1 \wedge |t| < \delta_2 \to |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(\exists^{\mathrm{st\,fin}} \Delta_1)(\exists^{\mathrm{st\,fin}} \Delta_2)(\forall\, s)\,(\forall\, t)(\exists\, \delta_1 \in \Delta_1)(\exists\, \delta_2 \in \Delta_2) \\ (|s| < \delta_1 \wedge |t| < \delta_2 \to |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(\exists^{\mathrm{st}} \delta_1)(\exists^{\mathrm{st}} \delta_2)(\forall\, |s| < \delta_1)(\forall\, |t| < \delta_2)|s+t| \le \varepsilon \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, |s| < \delta)(\forall\, |t| < \delta)|s+t| \le \varepsilon.\ \rhd\end{gathered}$$

(3) *Лемма Робинсона.* *Пусть* (a_n) — *внутренняя последовательность чисел и* $a_n \approx 0$ *для всех* $n \in {}^\circ\mathbb{N}$. *Тогда найдется* $N \approx +\infty$, *для которого* $a_n \approx 0$ *при любом* $n \le N$.

$\lhd$ Применим алгоритм Нельсона к требуемому заключению

$$
\begin{gathered}
(\exists\, N \approx +\infty)(\forall\, n \le N)\, a_n \approx 0 \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists\, N \in \mathbb{N})((\forall^{\mathrm{st}} m \in \mathbb{N})(N \ge m) \wedge (\forall\, n \in \mathbb{N})(n \le N \to \\
\to (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)|a_n| < \varepsilon) \leftrightarrow (\exists\, N)(\forall^{\mathrm{st}} m)(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon) \\
(\forall\, n)(N \ge m \wedge (n \le N \to |a_n| < \varepsilon)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\{m_1, \dots, m_p\})(\forall^{\mathrm{st}}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\})(\exists\, N)(\forall\, k := 1, \dots, p) \\
(N \ge m_k \wedge n \le N \to |a_n| < \varepsilon_k) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} m)(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(\exists\, N)\ (N \ge m \wedge (n \le N \to |a_n| < \varepsilon)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} m)(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(m \in \mathbb{N} \wedge \varepsilon > 0 \to |a_m| < \varepsilon).
\end{gathered}
$$

Теперь применим алгоритм Нельсона к условию рассматриваемого утверждения:

$$
\begin{gathered}
(\forall\, n \in {}^\circ\mathbb{N})(a_n \approx 0) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} n)(n \in \mathbb{N} \to (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)|a_n| < \varepsilon) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} n)(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(n \in \mathbb{N} \wedge \varepsilon > 0 \to |a_n| < \varepsilon).
\end{gathered}
$$

Таким образом, посылка и заключение эквивалентны. $\rhd$

(4) *Принцип единственности.* *В условиях стандартности антуража каждый объект, определенный нестандартной теоремой существования и единственности, является стандартным.*

Иными словами, если $y, V \in \mathbb{V}^{\mathrm{St}}$ *и* $\varphi = \varphi(x, y)$ — *внешняя формула* IST, *то*

$$
((\exists!\, \overline{x} \in V)\, \varphi(\overline{x}, y)) \to ((\exists!\, \overline{x} \in V)\, \varphi(\overline{x}, y) \wedge \mathrm{St}(\overline{x})).
$$

$\lhd$ Используя алгоритм Нельсона, формулу φ можно преобразовать к виду

$$
\varphi(x, y) := (\forall^{\mathrm{st}} u)(\exists^{\mathrm{st}} v)\psi(x, u, v, y),
$$

где $\psi \in$ (ZFC).

В частности, по принципу конструирования

$$
(\exists^{\mathrm{st}} \overline{v}\,(\cdot))(\forall^{\mathrm{st}} u)\, \psi(\overline{x}, u, \overline{v}(u), y). \qquad (1)
$$

Помимо этого,

$$(\forall\, z)(\forall^{\mathrm{st}} u)(\exists^{\mathrm{st}} v)\, \psi(z,u,v,y) \to z = \overline{x}).$$

Применяя к последней формуле алгоритм Нельсона, выводим

$$(\forall^{\mathrm{st}} v\,(\cdot))(\exists^{\mathrm{st\,fin}} U)(\forall\, z)(((\forall\, u \in U)\psi(z,u,v(u),y)) \to z = \overline{x}). \qquad (2)$$

Обозначим $\overline{U}$ стандартное конечное множество, отвечающее в силу (2) функции $\overline{v}(\cdot)$, взятой в соответствии с (1).

Видно, что $(\forall\, u \in \overline{U})\psi(x,u,\overline{v}(u),y)$. Отсюда заключаем, что $(\exists\, z)(\forall\, u \in \overline{U})\psi(z,u,\overline{v}(u),y)$. По принципу переноса

$$(\exists^{\mathrm{st}} z)(\forall\, u \in \overline{U})\, \psi(z,u,v(u),y).$$

На основании (2) заключаем $z = \overline{x}$, т. е. $\mathrm{St}(\overline{x})$. $\triangleright$

3.3.18. В дальнейшем наряду с теорией IST Э. Нельсона нам понадобится некоторая ее разновидность — теория ограниченных (или доступных) множеств BST, предложенная В. Кановеем и М. Риикеном в [368].

Теория BST сохраняет алфавит и связанную с ним атрибутику IST. Отличия лежат в формулировке принципов нестандартной теории множеств. Принципы переноса и стандартизации IST также сохраняются в BST. Однако теория BST считает каждое внутреннее множество лежащим в некотором стандартном множестве и соответствующим образом ограничивает процесс идеализации:

(1) принцип ограниченности —

$$(\forall x)(\exists^{\,\mathrm{st}} X)(x \in X);$$

(2) принцип ограниченной идеализации —

$$\begin{gathered}(\forall\, x_1)(\forall\, x_2)\ldots(\forall\, x_n)((\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)(\exists\, x \in z_0)(\forall\, y \in z)\\ \varphi(x,y,x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow (\exists\, x \in z_0)(\forall^{\,\mathrm{st}} y)\, \varphi(x,y,x_1,\ldots,x_n)),\end{gathered}$$

где $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ — произвольная внутренняя формула, а z_0 — какое-либо стандартное множество.

В. Кановей и М. Риикен доказали, что принцип ограниченной идеализации можно заменить на следующий

(2) принцип внутреннего насыщения —

$$(\forall\, x_1)(\forall\, x_2)\ldots(\forall\, x_n)((\forall^{\mathrm{st\,fin}} z \subset z_0)\,(\exists\, x)(\forall\, y \in z)\,\varphi(x,y,x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y \in z_0)\,\varphi(x,y,x_1,\ldots,x_n)),$$

где $\varphi \in$ (ZFC) — произвольная внутренняя формула, а z_0 — какое-либо стандартное множество.

Важнейшим обстоятельством является то, что класс *ограниченных* или *доступных* множеств, составленный элементами стандартных множеств в IST, служит моделью BST. Отсюда вытекает, что BST является консервативным расширением ZFC.

3.4. Теории внешних множеств

Основные установки нестандартного анализа имеют адекватное отображение в формальном аппарате теории внутренних множеств Нельсона. Теорема Поуэлла позволяет считать IST техникой исследования универсума фон Неймана. В то же время наличие внешних объектов полностью подрывает широко распространенное представление о том, что формализм Цермело — Френкеля доставляет достаточную оперативную свободу с точки зрения наивной теории множеств. Оставаясь в рамках IST, мы не в состоянии даже спросить, например: «А нельзя ли выделить такие числа, чтобы каждый элемент $\mathbb{R}$ однозначно записывался в виде некоторой их комбинации со стандартными коэффициентами — ведь $\mathbb{R}$ явно можно мыслить себе векторным пространством над ${}^\circ\mathbb{R}$?» Количество подобных недопустимых вопросов, имеющих бесспорное математическое содержание, столь велико, что потребность расширения рамок IST переходит в сферу жизненной необходимости.

Априорные запреты формулировать проблемы — это наложение произвольных ограничений на разум. Введение ad hoc догмата — «ясно выраженное запрещение думать» (по меткому выражению Л. Фейербаха) — путь, заведомо неприемлемый при поисках истины. Практическое решение задачи возвращения в «канторов рай» состоит, в частности, в нахождении формализма, позволяющего работать с внешними по отношению к универсуму фон Неймана множествами привычными математическими средствами. Мы ознакомимся сейчас с аксиоматическими подходами к изучению внешних множеств.

Первый вариант такого формализма принадлежит К. Хрбачеку, предложившему соответствующую теорию множеств EXT. Близкую разновидность — так называемую теорию NST — построил затем Т. Каваи. Упомянутые нестандартные теории множеств, содержательно говоря, показывают, что мир внешних множеств устроен с точки зрения математического прагматика-филистера столь же хорошо, как и универсум наивных множеств. Иначе говоря, в нем допустимы классические теоретико-множественные операции включая выделение подмножеств с помощью свойств (аксиомы свертывания) и полное упорядочение произвольных множеств (аксиома выбора). В то же время среди внешних множеств есть весь набор стандартных и нестандартных внутренних множеств, удовлетворяющих вариантам принципов переноса, идеализации и стандартизации, близким к их интуитивным формулировкам. Выражаясь строже, можно сказать, что внутренние множества включают в число внешних по определению.

С позиций реальных потребностей существующего (стандартного и нестандартного) математического анализа теории EXT и NST предоставляют практически одинаковые возможности, которых заведомо и с лихвой хватает для обоснованного использования употребительных аналитических конструкций. Необходимо, однако, внимательно и с должной критичностью проштудировать детали приводимых аксиоматик теории внешних множеств, чтобы избежать иллюзий, сопутствующих эйфории вседозволенности.

Так, стоит подчеркнуть, что мир внешних множеств не является универсумом фон Неймана (аксиома фундирования отсутствует и это обстоятельство существенно). Кроме того, точные формулировки принципов нестандартного анализа в EXT имеют технические отличия от их аналогов в IST. Поэтому EXT не является расширением теории Нельсона IST, хотя EXT служит консервативным расширением ZFC. Указанный пробел восполнил Т. Каваи. Его теория NST обогащает формальный аппарат IST и вместе с этим служит надежной техникой изучения ZFC наряду с IST и EXT.

3.4.1. Алфавит формальной теории EXT получается добавлением к алфавиту IST одного-единственного нового символа — символа одноместного предиката Int, выражающего свойство быть внутренним множеством. Иначе говоря, в рассмотрение допускаются тексты, содержащие записи вида $\mathrm{Int}(x)$, или, более развернуто, «x — внутреннее», или, наконец, «x — внутреннее множество». Интуитивно считают, что содержательной областью изменения переменных EXT является *универсум всех внешних множеств* $\mathbb{V}^{\mathrm{Ext}} := \{x : x = x\}$, в котором лежат как *мир стандартных множеств* $\mathbb{V}^{\mathrm{St}} := \{x \in \mathbb{V}^{\mathrm{Ext}} : \mathrm{St}(x)\}$, так и расширяющий его *мир внутренних множеств* $\mathbb{V}^{\mathrm{Int}} := \{x \in \mathbb{V}^{\mathrm{Ext}} : \mathrm{Int}(x)\}$.

3.4.2. Соглашения в EXT аналогичны принятым в ZFC и IST. В частности, конечно же, мы будем и дальше использовать «классификаторы» — фигурные скобки — в EXT (см. 3.3.3) и привычные знаки для обозначения простейших действий над классами внешних множеств. Следуя прежним образцам, для формулы φ из EXT (символически $\varphi \in (\mathrm{EXT})$) условимся писать:

$$(\forall^{\mathrm{st}} x)\,\varphi := (\forall\, x)(\mathrm{St}(x) \to \varphi) := (\forall\, x \in \mathbb{V}^{\mathrm{St}})\,\varphi,$$
$$(\exists^{\mathrm{Int}}\, x)\,\varphi := (\exists\, x)(\mathrm{Int}(x) \wedge \varphi) := (\exists\, x \in \mathbb{V}^{\mathrm{Int}})\,\varphi.$$

Подобные правила, понятные из контекста, в дальнейшем используются без особых разъяснений. Помимо этого, нам потребуется специальное новое понятие и соответствующее обозначение. Мы скажем, что внешнее множество A имеет *стандартный размер* (символически $A \in \mathbb{V}^{\mathrm{size}}$), если существуют стандартное множество a и внешняя функция f такие, что $(\forall\, X)(X \in A \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} x \in a)\ X = f(x))$.

3.4.3. Пусть $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ — некоторая формула EXT, являющаяся формулой ZFC (т. е. не содержащая символов St и Int). Заменим каждый квантор Q в записи φ на Q^{st}. Полученную формулу обозначают φ^{St} и называют *стандартизацией* φ или *релятивизацией* φ на $\mathbb{V}^{\mathrm{St}}$. Аналогично, заменяя каждый квантор Q на Q^{Int}, получаем формулу φ^{Int}, называемую *интернализацией* φ или *релятивизацией* φ на $\mathbb{V}^{\mathrm{Int}}$. Подчеркнем, что со свободными переменными в φ при этом ничего не происходит. Указанное правило распространяют и на сокращения. Например, для внешних множеств A и B пишем:

$$A \subset {}^{\mathrm{St}}B := (\forall^{\mathrm{st}} x)(x \in A \to x \in B) :=$$
$$:= ((\forall\, x)(x \in A \to x \in B))^{\mathrm{St}} := (A \subset B)^{\mathrm{St}};$$
$$A \in {}^{\mathrm{Int}}B := (A \in B)^{\mathrm{Int}} := A \in B := A \in {}^{\mathrm{St}}B := (A \in B)^{\mathrm{St}}.$$

3.4.4. Специальные аксиомы EXT делятся на три группы. Первую составляют *правила образования внешних множеств*, вторую — *аксиомы связи миров* множеств $\mathbb{V}^{\mathrm{St}}$, $\mathbb{V}^{\mathrm{Int}}$ и $\mathbb{V}^{\mathrm{Ext}}$ и, наконец, третью группу образуют *принципы переноса, идеализации и стандартизации.*

3.4.5. В EXT выполнены законы *теории множеств Цермело* (теории Z), т. е. приняты следующие аксиомы конструирования внешних множеств:

(1) аксиома экстенсиональности —

$$(\forall A)(\forall B)(A \subset B \wedge B \subset A) \leftrightarrow A = B;$$

(2) аксиома существования пары —

$$(\forall A)(\forall B)\{A, B\} \in \mathbb{V}^{\mathrm{Ext}};$$

(3) аксиома объединения —

$$(\forall A)\bigcup A \in \mathbb{V}^{\mathrm{Ext}};$$

(4) аксиома множества подмножеств —

$$(\forall A)\mathscr{P}(A) \in \mathbb{V}^{\mathrm{Ext}};$$

(5) схема аксиом свертывания —

$$(\forall A)(\forall X_1)\dots(\forall X_n)\{X \in A : \varphi(X, X_1, \dots, X_n)\} \in \mathbb{V}^{\mathrm{Ext}}$$

для произвольной формулы $\varphi \in (\mathrm{EXT})$;

(6) аксиома полного упорядочения — *каждое внешнее множество может быть вполне упорядочено.*

Последнее свойство — *теорема Цермело* — обеспечивает, как известно (ср. (3.2.10)), аксиому выбора в обычной мультипликативной форме или в форме леммы Куратовского — Цорна. Отметим здесь же, что в число аксиом Z обычно включается аксиома бесконечности, которая в EXT появится ниже.

3.4.6. Вторая группа аксиом EXT содержит такие утверждения:

(1) принцип моделирования — *мир внутренних множеств* $\mathbb{V}^{\mathrm{Int}}$ — *это универсум фон Неймана*, т. е. для каждой аксиомы φ теории Цермело — Френкеля интернализация φ^{Int} — аксиома EXT;

(2) аксиома транзитивности —

$$(\forall\, x \in \mathbb{V}^{\mathrm{Int}})(x \subset \mathbb{V}^{\mathrm{Int}}),$$

т. е. внутренние множества составлены только из внутренних элементов;

(3) аксиома вложения —

$$\mathbb{V}^{\mathrm{St}} \subset \mathbb{V}^{\mathrm{Int}},$$

т. е. стандартные множества являются внутренними.

3.4.7. Третью группу аксиом EXT составляют следующие предложения:

(1) принцип переноса —

$$(\forall^{\mathrm{st}} x_1) \ldots (\forall^{\mathrm{st}} x_n)(\varphi^{\mathrm{St}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{Int}}(x_1, \ldots, x_n))$$

для каждой формулы $\varphi \in \mathrm{(ZFC)}$;

(2) принцип идеализации —

$$\begin{aligned}(\forall^{\mathrm{Int}}\, x_1) \ldots (\forall^{\mathrm{Int}} x_n)(\forall\, A \in \mathbb{V}^{\mathrm{size}})(((\forall^{\mathrm{fin}} z)(z \subset A) \to \\ \to (\exists^{\mathrm{Int}}\, x)(\forall\, y \in z)\, \varphi^{\mathrm{Int}}(x, y, x_1, \ldots, x_n)) \to \\ \to (\exists^{\mathrm{Int}}\, x)(\forall^{\mathrm{Int}}\, y \in A)\, \varphi^{\mathrm{Int}}(x, y, x_1, \ldots, x_n))\end{aligned}$$

для произвольной $\varphi \in \mathrm{(ZFC)}$;

(3) принцип стандартизации —

$$(\forall\, A)(\exists^{\mathrm{st}} a)(\forall^{\mathrm{st}} x)(x \in A \leftrightarrow x \in a)$$

— *для любого внешнего множества A существует его стандартизация ${}^*A$.*

3.4.8. Простейшим достойным упоминания полезным следствием приведенных аксиом является *абсолютность ограниченных формул теории* ZFC. Точнее говоря, для $\varphi \in (\Sigma_0)$ будет

$$(\forall^{\mathrm{Int}}\, x_1) \ldots (\forall^{\mathrm{Int}}\, x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{Int}}(x_1, \ldots, x_n),$$
$$(\forall^{\mathrm{st}} x_1) \ldots (\forall^{\mathrm{st}} x_n)\, \varphi^{\mathrm{St}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \varphi^{\mathrm{Int}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Значит, любое «ограниченное» свойство стандартных множеств можно без опаски выражать как в терминах внешних, так и в терминах внутренних или же стандартных элементов. Например, $x \subset y \leftrightarrow x \subset {}^{\mathrm{St}} y \leftrightarrow x \subset {}^{\mathrm{Int}} y$ для стандартных множеств x и y.

3.4.9. *Теорема Хрбачека.* *Теория* EXT *является консервативным расширением* ZFC, *т. е. для каждой* $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ *верно*

$$(\varphi \text{ — теорема ZFC}) \leftrightarrow (\varphi^{\mathrm{Int}} \text{ — теорема EXT}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\varphi^{\mathrm{St}} \text{ — теорема EXT}).$$

$\lhd$ Доказательство этой теоремы приведено в [349]. $\rhd$

3.4.10. При осмысливании изложенной выше аксиоматики полезно отдавать себе отчет в том, что теория EXT не служит расширением теории IST.

Иными словами, мир внутренних множеств $\mathbb{V}^{\mathrm{Int}}$ не является моделью теории внутренних множеств Нельсона, поскольку принципы идеализации и стандартизации в этих теориях имеют различные формулировки.

В универсуме $\mathbb{V}^{\mathrm{Int}}$ стандартизация допускается при существенно менее ограничительных предположениях, чем в IST. Так, для любой $\varphi \in (\mathrm{IST})$ и произвольного $A \in \mathbb{V}^{\mathrm{Int}}$ можно организовать ${}^*\{x \in A : \varphi(x)\}$, ибо $\{x \in A : \varphi(x)\}$ — внешнее подмножество A. В IST при этом, вообще говоря, нужно дополнительно требовать стандартность A — ведь стандартизовать множество, содержащее все стандартные элементы, в IST не удается.

В EXT, в свою очередь, совокупность всех стандартных элементов $\mathbb{V}^{\mathrm{St}}$ не попадает вообще ни в одно внешнее (и тем более внутреннее) множество.

Действительно, справедливо следующее утверждение.

3.4.11. *Не существует такого внешнего множества — элемента $\mathbb{V}^{\mathrm{Ext}}$, в число элементов которого попадают все стандартные множества.*

$\lhd$ Предположим противное, т. е. пусть для некоторого $X \in \mathbb{V}^{\mathrm{Ext}}$ верно, что $\mathbb{V}^{\mathrm{St}} \subset X$. По аксиоме свертывания 3.4.5(5) для формулы $\varphi(x) := \mathrm{St}(x)$ заключаем, что $\mathbb{V}^{\mathrm{St}}$ — это внешнее множество, т. е. $(\exists\, Y)(\forall\, Z)(Z \in Y \leftrightarrow \mathrm{St}(Z))$. Рассмотрим стандартизацию ${}^*\mathbb{V}^{\mathrm{St}}$. Тогда ${}^*\mathbb{V}^{\mathrm{St}}$ оказывается стандартным конечным множеством, содержащим каждое стандартное множество. Последнее, очевидно, невозможно. $\rhd$

3.4.12. Приведенное предложение 3.4.11 показывает, что принцип идеализации в EXT («релятивизированный» на $\mathbb{V}^{\mathrm{Int}}$) не только по форме, но и по существу отличается от своего аналога в IST. В то же время указанные отличия не следует абсолютизировать. Вложить точный смысл в сделанное заявление помогают следующие факты.

3.4.13. *Имеют место утверждения:*

(1) *внешние натуральные числа совпадают со стандартными натуральными числами;*

(2) *конечное внешнее множество будет стандартным в том и только в том случае, если оно состоит исключительно из стандартных элементов;*

(3) *для произвольного внешнего множества A его стандартное ядро ${}^\circ A := \{a \in A : \mathrm{St}(a)\}$ — это множество стандартного размера;*

(4) *каждое бесконечное внутреннее множество содержит нестандартный элемент.*

$\lhd$ (1): В силу принципа индукции по стандартным натуральным числам (который, очевидно, верен в EXT — ср. 2.2.2 (1)) для множества $\mathbb{N}^{\mathrm{Ext}}$ внешних натуральных чисел имеем $\mathbb{N}^{\mathrm{Ext}} \supset {}^\circ\mathbb{N}$. Кроме того, ясно, что ${}^*\varnothing = \varnothing$ и ${}^*1 = {}^*\{\varnothing\} = \{\varnothing\} = 1$. Итак, в силу принципа индукции по внешним натуральным числам (обычная теорема Z) $\mathbb{N}^{\mathrm{Ext}} \subset {}^\circ\mathbb{N}$. Окончательно ${}^\circ\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathrm{Ext}}$.

(2): Стандартное множество — внутреннее. Значит, с учетом 3.4.6 (2) можно прибегнуть к аргументации доказательства 2.2.2 (3). Конечное множество, составленное из стандартных элементов, стандартно по 2.2.2 (2).

(3): Пусть ${}^*A$ — стандартизация A. Положим $f(a) := a$ для $a \in {}^\circ A$. Очевидно, $(\forall\, X)(X \in {}^\circ A \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} x \in {}^*A)\, f(x) = X)$.

(4): Обозначим A рассматриваемое внутреннее множество. В силу (3) ${}^\circ A$ имеет стандартный размер. Итак, мы можем применить принцип идеализации при $\varphi(x, y) := y \neq x \wedge x \in A$. Для каждого конечного $z \subset {}^\circ A$ безусловно $(\exists\, x \in A)(\forall\, y \in z)\, x \neq y$, ибо множество A бесконечно. Окончательно $(\exists\, x \in A)(\forall\, y \in {}^\circ A)\, x \neq y$. $\rhd$

3.4.14. В связи с 3.4.13 и 3.4.9 удобно выделить вариант теории внутренних множеств INT, являющийся консервативным расширением ZFC и такой, что EXT, в свою очередь, — расширение INT. Отличие INT от теории IST в принятии принципов идеализации и стандартизации в следующих формах:

(1) $(\forall\, A)(\forall\, x_1)\ldots(\forall\, x_n)((\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)(z \subset A)(\exists\, x)(\forall\, y \in z)$
$\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y \in A)\, \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$
для всякой $\varphi \in$ (ZFC);

(2) $(\forall\, A)(\exists^{\mathrm{st}}\, {}^*A)(\forall^{\mathrm{st}} x)(x \in A \leftrightarrow x \in {}^*A \wedge \varphi(x))$
при произвольной $\varphi \in$ (INT).

Полезно отметить, что в INT в своих существенных частях действует алгоритм Нельсона.

3.4.15. Перейдем теперь к описанию теории NST в варианте, наиболее близком к EXT и IST (фактически Т. Каваи построил несколько отличную систему, позволяющую рассматривать классы теории фон Неймана — Гёделя — Бернайса в качестве внешних множеств).

3.4.16. Алфавит и соглашения формальной теории NST совпадают с алфавитом и соглашениями теории EXT. Более того, в NST принимаются все аксиомы конструирования внешних множеств, все аксиомы связи миров множеств и принцип переноса теории EXT. Отличия NST от EXT лежат в способах формулирования принципов стандартизации и идеализации и в следующем дополнительном постулате.

3.4.17. ***Аксиома приемлемости*** — $\mathbb{V}^{\mathrm{St}} \in \mathbb{V}^{\mathrm{Ext}}$, *т. е. мир стандартных множеств теории Каваи — это внешнее множество.*

В связи со сформулированной аксиомой внешнее множество A в NST называют *множеством приемлемого размера* и пишут $A \in \mathbb{V}^{\mathrm{a-size}}$, если найдется внешняя функция f, отображающая $\mathbb{V}^{\mathrm{St}}$ на A.

Подчеркнем, что $\mathbb{V}^{\mathrm{St}}$ имеет приемлемый размер. Отметим здесь же, что в дальнейшем запись a-$\mathrm{fin}(A)$ означает, что имеется взаимнооднозначное внешнее отображение A на некоторое стандартное конечное множество.

3.4.18. ***Принцип стандартизации*** *в* NST *гласит:*

$$(\forall A)((\exists^{\mathrm{st}} X)\, A \subset X \to (\exists^{\mathrm{st}}\, {}^*\!A)(\forall^{\mathrm{st}} x)(x \in A \leftrightarrow x \in {}^*\!A)).$$

Иными словами, в NST можно стандартизовать только внешние подмножества стандартных множеств, а не произвольные внешние множества, как в EXT.

3.4.19. ***Принцип идеализации*** *в* NST *состоит в следующем:*

$$\begin{aligned}(\forall^{\mathrm{Int}}\, x_1) \dots (\forall^{\mathrm{Int}}\, x_n)(\forall\, A \in \mathbb{V}^{\mathrm{a-size}})(((\forall z)\, z \subset A \wedge a = \mathrm{fin}(z) \to \\ \to (\exists^{\mathrm{Int}}\, x)(\forall\, y \in z)\, \varphi^{\mathrm{Int}}(x, y, x_1, \dots, x_n)) \to \\ \to (\exists^{\mathrm{Int}}\, x)(\forall^{\mathrm{Int}}\, y \in A)\, \varphi^{\mathrm{Int}}(x, y, x_1, \dots, x_n))\end{aligned}$$

для произвольной формулы $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$.

3.4.20. ***Теорема Каваи.*** *Теория* NST *является консервативным расширением* ZFC.

$\triangleleft$ Доказательство повторяет схему рассуждений теоремы Поуэлла с привлечением 3.2.20 (см. [374]). $\triangleright$

3.4.21. Вновь обратим внимание на то, что мир внутренних множеств V^{Int} в универсуме NST с релятивизированными принципами стандартизации, идеализации и переноса служит моделью IST. Иными словами, технические средства, представляемые NST для работы с внешними множествами, возникающими в IST, можно без опаски использовать для получения утверждений «стандартной» математики.

Отметим здесь же, что доказательство теоремы Каваи, так же как и теорем Хрбачека и Поуэлла, в существенном опирается на применение подходящих аналогов локальной теоремы Мальцева или, говоря точнее, на предъявленную выше технику ультрапроизведений и ультрапределов. Более детальное изложение названного аппарата выходит за рамки нашего изложения.

3.4.22. Проявляя известную вольность, обозначим $\mathbb{V}^E$ универсум внешних множеств (не уточняя, о какой из теорий NST или EXT идет речь). Аналогично будем использовать знак $\mathbb{V}^I$ (соответственно $\mathbb{V}^S$) для указаний на мир внутренних (соответственно стандартных) множеств. Повторяя схему построения универсума фон Неймана, т. е. последовательно итерируя операции объединения и перехода к совокупности всех внешних подмножеств данного множества, из пустого множества можно вырастить мир $\mathbb{V}^C$ — *универсум «классических множеств»*. Подробнее говоря, полагают

$$V_\beta^C := \{x : (\exists^{\mathrm{st}}\alpha \in \beta)(x \in \mathscr{P}^{\mathrm{Ext}}(V_\alpha^C))\},$$
$$\mathbb{V}^C := \bigcup_{\beta\in\mathrm{On}^{\mathrm{St}}} V_\beta^C,$$

где $\mathrm{On}^{\mathrm{St}}$ — класс всех стандартных ординалов. Таким образом, пустое множество является «классическим» и каждое «классическое» множество составлено только из «классических» элементов.

3.4.23. С помощью рекурсии — прогулки по этажам универсума «классических» множеств — задают робинсоновскую стандартизацию или $*$-изображение. Стандартное множество $*A$ называют *робинсоновской стандартизацией* или *$*$-изображением* «классического» множества A в том и только в том случае, если каждый стандартный элемент $*A$ является $*$-изображением некоторого элемента A. Символически: $*\varnothing := \varnothing$, $\quad *A := {}^*\{*a : a \in A\}$. Допуская вольность в обозначениях и следуя одной из традиций, мы часто считаем, что символы $*A$ и ${}^*A$ обозначают одно и тоже множество.

Отметим, что в рамках EXT законность применения обычной стандартизации не вызывает сомнений. В теории NST допустимость использования этой операции в определении робинсоновской стандартизации следует из способа построения $\mathbb{V}^C$. Аналогичное рассуждение (ср. 3.2.12) показывает, что $*$-изображение отождествляет и притом взаимнооднозначным образом миры $\mathbb{V}^C$ и $\mathbb{V}^S$. Робинсоновская стандартизация, сверх того, обеспечивает справедливость *принципа переноса*:

$$(\forall\, A_1 \in \mathbb{V}^C)\dots(\forall\, A_n \in \mathbb{V}^C)(\varphi^C(A_1,\dots,A_n) \leftrightarrow \varphi^S(*A_1,\dots,*A_n))$$

для произвольной формулы φ теории Цермело — Френкеля (как обычно, φ^C и φ^S — релятивизации φ на $\mathbb{V}^C$ и $\mathbb{V}^S$ соответственно).

Биективные отображение часто рассматривают как отождествления объектов. В этой связи, допуская вольность, при операциях со $*$-изображением вместо $*A$ пишут ${}^*A$. Мы также будем с удовольствием использовать эту порочную практику в дальнейшем изложении.

3.5. Установки нестандартного анализа

Проведенные в предыдущих параграфах рассмотрения обогатили и расширили исходные наивные представления о множестве, используемые в нестандартном анализе. От обычного универсума фон Неймана $\mathbb{V}$ мы перешли к миру $\mathbb{V}^I$ теории внутренних множеств с отмеченными в нем реперными точками — стандартными множествами, составляющими класс $\mathbb{V}^S$ (рис. 4).

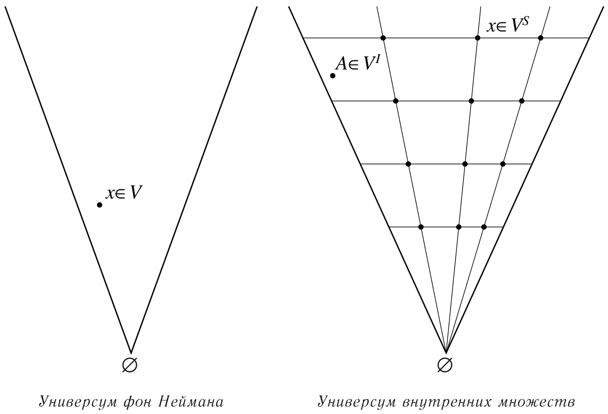
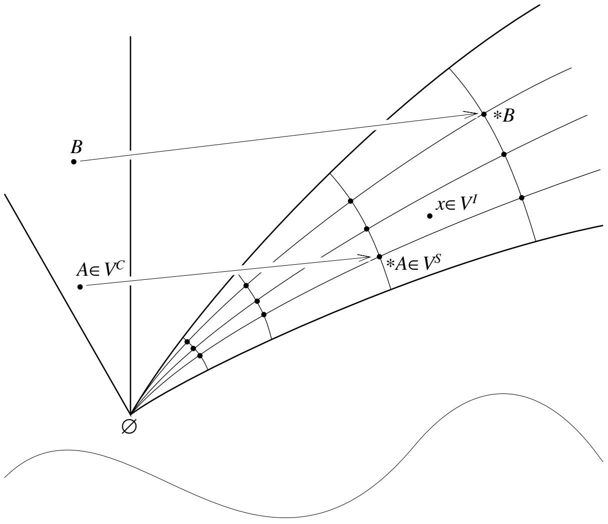


Рис. 4

Дальнейший анализ показал, что $\mathbb{V}^I$ лежит в новом классе — в универсуме $\mathbb{V}^E$ внешних множеств (составляющих мир Цермело). В $\mathbb{V}^E$ выделен универсум «классических» множеств $\mathbb{V}^C$ — еще одна реализация мира стандартных множеств $\mathbb{V}^S$. Точнее говоря, имеется робинсоновское $*$-изображение, поэлементно отождествляющее $\mathbb{V}^C$ и $\mathbb{V}^S$. При этом в силу принципов переноса $\mathbb{V}^C$, $\mathbb{V}^S$ и $\mathbb{V}^I$ можно рассматривать как «ипостаси» универсума фон Неймана $\mathbb{V}$ (рис. 5).

3.5.1. Изложенная картина расположения и другие известные взаимосвязи миров $\mathbb{V}^E$, $\mathbb{V}^I$, $\mathbb{V}^S$ и $\mathbb{V}^C$ приводят к выделению трех общих теоретико-множественных установок нестандартного анализа.

В этих установках — их называют классической, неоклассической и радикальной — фиксируются представления о предмете и средствах исследования. Принятие той или иной концепции определяет, в частности, способ изложения математических результатов, полученных с помощью нестандартных методов. В этой связи знакомство с упомянутыми установками нужно считать совершенно необходимым.



Универсум внешних множеств

Рис. 5

3.5.2. Классическая установка нестандартного анализа отвечает методике его основоположника А. Робинсона, и в настоящее время соответствующий формализм наиболее распространен. При этой установке *главным объектом изучения объявляется мир классической математики, отождествляемый с универсумом «классических» множеств* $\mathbb{V}^C$. Последний считают «стандартным универсумом» (на практике чаще всего работают с достаточно большим фрагментом, частью $\mathbb{V}^C$, содержащей необходимые для исследования объекты — с так называемой «*суперструктурой*»). В качестве техники исследования исходного — стандартного — универсума предъявляется «нестандартный универсум» $\mathbb{V}^I$, составленный из внутренних множеств, или его подходящая часть и $*$-изображение, подклеивающее обычные стандартные объекты к их образам в «нестандартном универсуме».

Полезно подметить своеобразное использование слов «стандартный» и «нестандартный» при излагаемом подходе. Робинсоновские стандартизации — элементы универсума $\mathbb{V}^S$ — воспринимаются как «нестандартные» объекты. «Стандартное» множество — это по понятию произвольный представитель мира «классических» множеств $\mathbb{V}^C$ — член «стандартного универсума». Указывается, что $*$-изображение, как правило, добавляет новые «идеальные» элементы в множество. Здесь подразумевают, что ${}^*A = \{{}^*a : a \in A\}$ только в том случае, если «классическое» — «стандартное» — множество A конечно. Например, помещая $\mathbb{R}$ в $\mathbb{V}^C$ и в соответствии со сказанным изучая его $*$-изображение ${}^*\mathbb{R}$, мы видим, что ${}^*\mathbb{R}$ играет роль поля вещественных чисел в смысле универсума внутренних множеств — «во внутреннем смысле нестандартного универсума». В то же самое время ${}^*\mathbb{R}$ не сводится к набору своих стандартных элементов ${}^\circ({}^*\mathbb{R}) = \{{}^*t : t \in \mathbb{R}\}$. Учитывая, что ${}^*\mathbb{R}$ есть «внутреннее множество вещественных чисел $\mathbb{R}$», а ${}^\circ({}^*\mathbb{R})$ — его стандартное ядро, допускают известную вольность, полагая ${}^\circ\mathbb{R} := \{{}^*t : t \in \mathbb{R}\}$ и даже $\mathbb{R} := \{{}^*t : t \in \mathbb{R}\}$.

Образно наличие «новых» элементов в ${}^*\mathbb{R}$ выражают символом ${}^*\mathbb{R} - \mathbb{R} \neq \varnothing$ и говорят о построении системы «гипердействительных» чисел ${}^*\mathbb{R}$, расширяющей обычное поле вещественных чисел $\mathbb{R}$. Аналогичную политику проводят при рассмотрении произвольного классического множества X. Именно, считают, что $X = \{{}^*x : x \in X\}$ и тем самым $X \subset {}^*X$. Если X бесконечно, то ${}^*X - X \neq \varnothing$. Иными словами, все бесконечные множества при помощи робинсоновской стандартизации насыщаются новыми элементами. Более того, «идеальных» объектов добавляется значительное количество — ведь в $\mathbb{V}^I$ действует принцип идеализации, который в излагаемой установке часто называют *техникой направленности* или *насыщением.*

3.5.3. Пусть U — произвольное соответствие, а A и B — множества. Говорят, что U *направлено из* A *в* B или, короче, просто направлено, если для каждого непустого конечного подмножества A_0 в A найдется элемент $b \in B$ такой, что $(a_0, b) \in U$ при всех $a_0 \in A_0$.

Если в определении направленности рассматривать подмножества A_0, мощности не более заданного кардинала $\varkappa$, то возникающее определение приводит к определению $\varkappa$-*направленности.*

3.5.4. *Принцип направленности в слабой форме.* *Для любого соответствия U, направленного из A в B, имеется элемент $b \in {}^*B$, удовлетворяющий соотношению $({}^*a, b) \in {}^*U$ при каждом $a \in A$.*

3.5.5. Нетрудно видеть, что, в свою очередь, справедливость принципа направленности обеспечивает нам естественный эквивалент принципа идеализации в ослабленной форме — «релятивизированный на стандартные множества». В этой связи в приложениях выделяют консервативные расширения классической теории множеств, использующие как уже отмеченную возможность идеализации в слабой форме, так и принятие формулировок, обеспечивающих дополнительные возможности введения нестандартных элементов и более адекватных содержанию принципа идеализации в полных его выражениях.

3.5.6. *Принцип направленности в сильной форме.* *Пусть соответствие U таково, что ${}^*U$ направлено из A в ${}^*B$. Тогда имеется элемент $b \in {}^*B$, для которого при всех $a \in A$ будет $({}^*a, b) \in {}^*U$.*

Напомним, что семейство $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ называют *центрированным*, если для каждого непустого конечного подмножества Γ_0 выполнено:

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_0} A_\gamma \neq \varnothing.$$

3.5.7. *Принцип насыщения.* *Справедливы утверждения:*

(1) *Пусть $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — центрированное семейство внутренних множеств. Тогда $\bigcap_{n \in {}^*\mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$.*

(2) *Пусть $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — возрастающее семейство внутренних множеств и $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Тогда для некоторого $N \in {}^*\mathbb{N}$ будет $A = A_N$.*

Можно доказать, используя свободу в выборе ультрафильтров при построении ультрапределов (см. 3.2.17), что имеются расширения, в которых 3.5.7 и аналогичные принципы выполняются для произвольных центрированных семейств с множеством индексов Γ мощности не выше $\varkappa$. Работая в таких обстоятельствах, принято говорить о *$\varkappa$-насыщенности.* В этой терминологии 3.5.7 гарантирует ω_0-насыщенность. В приложениях нередко используют и ω_1-насыщенность.

3.5.8. Полезно помнить, что в «расширенном», «нестандартном» мире — в универсуме внутренних множеств $\mathbb{V}^I$ — действует принцип переноса, т. е. с учетом свойств робинсоновской стандартизации $(\forall\, x_1 \in \mathbb{V}^C) \ldots (\forall\, x_n \in \mathbb{V}^C)(\varphi^C(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^I({}^*x_1, \ldots, {}^*x_n))$ для каждой формулы φ теории множеств Цермело — Френкеля. Напомним, что такую форму принципа переноса именуют *принципом Лейбница.*

3.5.9. При работе с «нестандартным универсумом» иногда специально выделяют «*технику внутренних множеств*». Имеется в виду способ доказательства, основанный на том, что внешние множества, заданные «теоретико-множественным способом», — внутренние. Вот одна из возможных форм применения этой техники.

3.5.10. *Пусть A — бесконечное множество. Для любого внутреннего свойства φ не верно, что $\{x : \varphi^I(x)\} = {}^*A - A$.*

$\triangleleft$ Допустим противное. Тогда класс $\{x : \varphi^I(x)\}$ — это внутреннее множество ${}^*A$. Стало быть, A внутреннее. Но для бесконечного A внешнее множество ${}^*A - A$ не является внутренним. $\triangleright$

В приложениях полезны и многие другие несложные формы принципов нестандартного анализа.

3.5.11. *Имеют место утверждения:*

(1) **Принцип продолжения**. *Произвольная последовательность $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ внутренних множеств A_n продолжается до внутренней последовательности $(A_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$;*

(2) **Принцип переполненности**. *Если множество A внутреннее и $\mathbb{N} \subset A$, то A содержит некоторое бесконечно большое число, т. е. элемент множества ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$;*

(3) **Принцип незаполненности**. *Если множество A внутреннее и каждое бесконечно большое $N \in {}^*\mathbb{N}$ принадлежит A, то A содержит некоторое стандартное $n \in \mathbb{N}$;*

(4) **Принцип доступности**. *Если внутреннее множество $B \subset \mathbb{R}$ состоит только из доступных элементов, то существует стандартное $t \in \mathbb{R}$, такое, что $B \subset [-t, t]$;*

(5) **Принцип перманентности**. *Если внутреннее множество B содержит все положительные доступные* *числа, то оно содержит и интервал* $[0, \Omega]$ *для некоторого бесконечно большого* Ω*;*

(5) **Принцип Коши.** *Если внутреннее множество* B *содержит все бесконечно малые числа, то оно содержит и интервал* $[-a, a]$ *для некоторого стандартного* $a \in \mathbb{R}$*;*

(6) **Принцип Робинсона.** *Если внутреннее множество* B *состоит только из бесконечно малых чисел, то* B *содержится в интервале* $[-\varepsilon, \varepsilon]$*, где* ε *— бесконечно малое число.*

3.5.12. Подводя итоги, можно сказать, что при классической установке работают с двумя универсумами — стандартным и нестандартным. Имеются формальные возможности связывать свойства стандартных и нестандартных объектов с помощью процедуры «навешивания звездочек» — с помощью $*$-изображения. При этом предоставлено право свободно переносить утверждения об объектах одного мира в другой — действует принцип Лейбница. Нестандартный мир богат идеальными элементами — в нем актуально осуществимы всевозможные трансфинитные конструкции, ибо справедлив принцип направленности. Множества, выпадающие за пределы нестандартного универсума, называют внешними (здесь проявляется особенность принимаемой терминологии: внутренние множества при излагаемом подходе внешними не являются. Полезный прием исследования составляет техника внутренних множеств. Главное достоинство классической установки — это наличие $*$-изображения, которое позволяет применять аппарат нестандартного анализа к самым произвольным обычным множествам. Например, можно утверждать, что функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна в том и только в том случае, если ${}^*f : [a, b] \to {}^*\mathbb{R}$ микронепрерывна, т. е. если ${}^*f$ не теряет бесконечную близость гипердействительных чисел.

Основное затруднение в усвоении таких представлений связано с необходимостью вообразить колоссальное количество новых идеальных объектов, присоединяемых к обычным множествам. Заметные сложности вызывает естественное желание работать (по крайней мере, на первых порах) с двумя наборами переменных, относящимися соответственно к стандартному и нестандартному универсумам. (При построении интернализации φ^I формулы φ мы фактически предполагаем такую процедуру.) Словом, *двуязычность* и *робин-*

соновская стандартизация — неотъемлемые атрибуты классической установки — определяют все ее особенности, преимущества и дефекты присущего ей аппарата.

3.5.13. Неоклассическая установка нестандартного анализа отвечает методике, предложенной Э. Нельсоном. При этой установке *главным объектом изучения объявляется мир математики, рассматриваемый как универсум* $\mathbb{V}^I$, *лежащий в среде внешних множеств — элементов* $\mathbb{V}^E$. «Классические» множества отдельно к анализу не привлекаются. Стандартные и нестандартные элементы указываются в обычных объектах математики, составляющих $\mathbb{V}^I$. Так, в качестве поля вещественных чисел фигурирует $\mathbb{R}$ из мира $\mathbb{V}^I$, совпадающее, разумеется, с полем ${}^*\mathbb{R}$ гипердействительных чисел — «идеальным» объектом классической установки. Позиции, освещенные в гл. 2, отвечают указанной неоклассической установке. Связанные с ней преимущества определяются возможностью изучать уже хорошо знакомые множества и отыскивать новое в их устройстве с помощью дополнительных языковых средств. Как отмечает Э. Нельсон, «подлинно новыми в нестандартном анализе являются не теоремы или доказательства, а понятия — внешние предикаты...» [437, с. 134]. Недостатки последовательно проводимой неоклассической установки вызваны необходимостью неявного переноса определений и свойств со стандартных объектов на внутренние. С этим обстоятельством мы уже сталкивались.

3.5.14. Радикальная установка нестандартного анализа состоит в том, что *предметом изучения математики объявляется универсум внешних множеств* во всей полноте и сложности его собственного устройства. Классические и неоклассические представления о нестандартном анализе — как о технике изучения математики (основанной на формализме Цермело — Френкеля) при радикальном подходе объявляются «узкими», «стыдливыми» и отметаются. С первого взгляда описанный подход воспринимается в качестве явно несерьезного и крайнего. Необходимо, по размышлению, отвести возникающие представления об экстремизме радикальной установки нестандартного анализа. Этот «экстремизм» — иллюзорный, кажущийся. Широко распространенное воззрение на математику как на науку о формах и отношениях, взятых в отвлечении от их содержания, и даже существенно менее обязывающая классическая теоретико-множественная установка, восходящая к Г. Кантору, безусловно охватывает «крайние» мысли о предмете нестандартного анализа.

Следовательно, наиболее «смелые» взгляды на множества, возникшие в итоге довольно кропотливого исследования, в конечном счете вошли составной частью в исходную посылку, обогатив ее новым содержанием. Ведь начальным пунктом для нас служило скромное положение о том, что нестандартный анализ оперирует в точности теми же множествами, как и вся математика (см. 2.1.3).

3.6. Теория фон Неймана — Гёделя — Бернайса

Как уже отмечалось в 3.2.5, схема аксиом подстановки ZF_4^{φ} охватывает бесконечное число аксиом из-за произвола в выборе формулы φ. Однако можно попытаться ввести новые неопределяемые примитивные объекты, задаваемые формулами φ из ZF_4^{φ}. Тогда множество утверждений, содержащихся в схеме ZF_4^{φ}, можно высказать в виде одной аксиомы о таких объектах. При этом потребуются аксиомы, из которых вытекало бы существование объекта, соответствующего формуле. А поскольку все формулы строятся по единой процедуре за конечное число шагов, то не исключена возможность обойтись конечным числом аксиом. Это основное соображение, идущее от фон Неймана, и положено в аксиоматику теории множеств, развитой Гёделем и Бернайсом и обозначаемой NGB. Первоначальным неопределяемым объектом теории NGB является класс. Класс, являющийся элементом какого-либо класса, называют *множеством*. Прочие классы именуют *собственными*. Объективизация классов определяет коренное отличие NGB от ZFC, в метаязыке которой «класс» и «свойство» воспринимаются как синонимы. При изложении аксиоматической теории NGB пользуются, как правило, одной из двух различных модификаций языка ZFC. Первая из них состоит в добавлении к языку ZFC нового одноместного предикатного символа M. Содержательно $M(X)$ означает, что X есть множество. Вторая модификация использует два разных типа переменных для множеств и классов. Стоит подчеркнуть, что указанные приемы не являются обязательными для описания NGB, а используются лишь из соображений удобства.

3.6.1. Система NGB — теория первого порядка с равенством. Строго говоря, язык NGB ничем не отличается от языка ZFC. Однако в качестве переменных принято употреблять прописные латинские буквы X, Y, Z, ... (с индексами). Строчные же латинские буквы оставляем для argo, возникающего в результате введения сокращающих символов, отсутствующих в языке NGB.

Пусть $M(X)$ служит сокращением для формулы $(\exists\, Y)\ (X \in Y)$ (читается «X есть множество»). Введем строчные латинские буквы x, y, z, ... (с индексами) для переменных, ограниченных множествами. Точнее, формулы $(\forall\, x)\, \varphi(x)$ и $(\exists\, x)\, \varphi(x)$ являются сокращениями для формул $(\forall\, X)(M(X) \to \varphi(X))$ и $(\exists\, X)(M(X) \wedge \varphi(X))$ соответственно. Содержательно эти формулы означают: «для любого множества верно φ» и «существует множество, для которого верно φ». При использовании указанных сокращений переменная X не должна входить в формулу φ, а также в те формулы, частями которых являются эти сокращения. Впрочем, установленных правил употребления строчных и прописных букв мы будем придерживаться лишь в пределах текущего параграфа. Убедившись же в принципиальной формализуемости теории классов, постепенно вернемся к общепринятому — более свободному — математическому языку.

Приступим к формулировке специальных аксиом теории NGB.

3.6.2. ***Аксиома экстенсиональности* (*для классов*) NGB$_1$:** *два класса совпадают, если* (*и только если*) *они состоят из одних и тех же элементов*

$$(\forall\, X)(\forall\, Y)(X = Y \leftrightarrow (\forall\, Z)(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y)).$$

3.6.3. ***Аксиомы для множеств*:**

(1) аксиома (неупорядоченной) пары NGB$_2$:

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\exists\, z)(\forall\, u)(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y);$$

(2) аксиома объединения NGB$_3$:

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(z \in y \leftrightarrow (\exists\, u)(u \in x \wedge z \in u));$$

(3) аксиома степени NGB$_4$:

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(z \in y \leftrightarrow z \subset x);$$

(4) аксиома бесконечности $\mathbf{NGB_5}$:

$$(\exists\, x)(0 \in x \wedge ((\forall\, y)(y \in x \leftrightarrow y \cup \{y\} \in x))).$$

Как видно, эти аксиомы совпадают с одноименными аналогами из ZF, сформулированными в 3.2.3, 3.2.4, 3.2.7 и 3.2.8. Следует только иметь в виду, что в словесных формулировках слово множество здесь уже означает класс, являющийся элементом класса. В символической же записи аксиом малые латинские буквы свидетельствуют о сокращениях (см. 3.6.1). Так, например, частично развернутая аксиома степени NGB_4 имеет вид

$$(\forall X)(M(X) \to (\exists Y)(M(Y) \wedge (\forall Z)(M(Z) \to (Z \in Y \leftrightarrow Z \subset X)))).$$

В записи аксиомы бесконечности NGB_5 использовано сокращение

$$0 \in x := (\exists\, y)(y \in x \wedge (\forall\, u)(u \notin y)).$$

Существование пустого множества заранее не предполагается, а вытекает из аксиомы бесконечности. Тем не менее иногда это утверждение включают в список NGB в качестве отдельной аксиомы:

(5) $(\exists\, y)(\forall\, u)(u \notin y)$.

3.6.4. *Аксиома подстановки* $\mathbf{NGB_6}$: *если класс X однозначен, то для любого множества y класс вторых компонент тех пар из X, первые компоненты которых входят в y, является множеством:*

$$(\forall\, X)(\mathrm{Un}\,(X) \to (\forall\, y)(\exists\, z)(\forall\, u)(u \in z \leftrightarrow (\exists\, v)((v, z) \in X \wedge v \in y))).$$

Как и предполагалось, схема ZF_4^{φ} превратилась в одну аксиому. Здесь уже отметим, что схеме аксиом выделения из ZF (см. 3.2.5) также соответствует одна аксиома — аксиома выделения. Она утверждает, что для любых множества x и класса Y существует множество, состоящее из элементов, общих для x и Y, т. е.

$$(\forall\, x)(\forall\, Y)(\exists\, z)(\forall\, u)(u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in Y).$$

Эта аксиома слабее аксиомы подстановки (она выводится из NGB_6 и нижеследующей теоремы 3.6.14), но в некоторых случаях более удобна в обращении.

Следующая группа аксиом NGB_7–NGB_{13} гарантирует возможности формирования классов. Эти аксиомы утверждают, что для некоторых свойств, выраженных формулами, существуют классы всех множеств, обладающих соответствующими свойствами.

Единственность при этом вытекает, как обычно, из аксиомы экстенсиональности NGB_1.

3.6.5. *Аксиома* $\in$*-отношения* $\mathbf{NGB_7}$: *существует класс, состоящий в точности из тех упорядоченных пар множеств, у которых первая компонента служит элементом второй:*

$$(\exists\, X)(\forall\, y)(\forall\, z)((y, z) \in X \leftrightarrow y \in z).$$

3.6.6. *Аксиома пересечения* $\mathbf{NGB_8}$: *для любых двух классов существует их пересечение:*

$$(\forall\, X)(\forall\, Y)(\exists\, Z)(\forall\, u)(u \in Z \leftrightarrow u \in X \wedge u \in Y).$$

3.6.7. *Аксиома дополнения* $\mathbf{NGB_9}$: *для каждого класса существует дополнительный ему класс:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(u \in Y \leftrightarrow u \notin X).$$

Отсюда вытекает существование универсального класса $\mathbb{U} := {}^{-}\varnothing$ — дополнения пустого класса $\varnothing$.

3.6.8. *Аксиома области определения* $\mathbf{NGB_{10}}$: *для каждого класса X упорядоченных пар существует класс $Y := \operatorname{dom}(X)$, элементами которого являются в точности первые компоненты элементов класса X:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(u \in Y \leftrightarrow (\exists\, v)((u, v) \in X)).$$

3.6.9. *Аксиома декартова произведения* $\mathbf{NGB_{11}}$: *для всякого класса X существует класс $Y := X \times \mathbb{U}$, состоящий из всевозможных упорядоченных пар, первые компоненты которых являются элементами класса X:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(\forall\, v)((u, v) \in Y \leftrightarrow u \in X).$$

3.6.10. *Аксиомы перестановки* $\mathbf{NGB_{12}}$ *и* $\mathbf{NGB_{13}}$. *Пусть $\sigma := (i_1, i_2, i_3)$ — перестановка множества $\{1, 2, 3\}$. Класс Y назовем* σ*-транспонированием класса X, если $(x_1, x_2, x_3) \in Y$ тогда и только тогда, когда $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \in X$. Для любого класса X существуют его $(2, 3, 1)$- и $(1, 3, 2)$-транспонирования:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(\forall\, v)(\forall\, w)((u, v, w) \in Y \leftrightarrow (v, w, u) \in X);$$
$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(\forall\, v)(\forall\, w)((u, v, w) \in Y \leftrightarrow (u, w, v) \in X).$$

3.6.11. *Аксиома фундирования* $\mathbf{NGB_{14}}$: *в каждом непустом классе есть элемент, не имеющий с ним общих элементов:*

$$(\forall\, X)(X \neq \varnothing \to (\exists\, y)(y \in X \wedge y \cap X = \varnothing)).$$

3.6.12. *Аксиома выбора* $\mathbf{NGB_{15}}$: *для каждого класса X существует выбирающая функция, т. е. однозначный класс, сопоставляющий всякому непустому множеству из X некоторый его элемент:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(u \neq \varnothing \wedge u \in X \to (\exists! v)(v \in u \wedge (u, v) \in Y)).$$

Это очень сильная форма аксиомы выбора. Она равносильна существованию одновременного выбора по одному элементу из каждого непустого множества.

На этом список специальных аксиом NGB завершается. Как видно, теории NGB, в отличие от ZFC, имеет лишь конечное число аксиом. Другое удобное качество системы NGB состоит в том, что она фактически имеет дело с множествами и со свойствами множеств как с формальными объектами, осуществляя объективизацию, недоступную выразительным средствам ZFC.

3.6.13. Из группы аксиом формирования классов мы выведем несколько утверждений, которые потребуются нам при доказательстве общей теоремы о существовании классов.

(1) *Для любого класса существует его* $(2,1)$*-транспонирование*:

$$(\forall\, X)(\exists\, Z)(\forall\, u)(\forall\, v)((u, v) \in Z \leftrightarrow (v, u) \in X).$$

$\triangleleft$ Аксиома декартова произведения гарантирует существование класса $X \times \mathbb{U}$. Последовательное применение аксиом $(2,3,1)$-транспонирования и $(1,3,2)$-транспонирования к классу $X \times \mathbb{U}$ дает класс Y всех троек (v, u, w) таких, что $(v, u) \in X$. Остается воспользоваться аксиомой области определения и заключить, что $Z := \mathrm{dom}(Y)$ — искомый класс. $\triangleright$

(2) *Для любых двух классов существует их декартово произведение*:

$$(\forall\, X)(\forall\, Y)(\exists\, Z)(\forall\, w)(w \in Z \leftrightarrow (\exists Z \leftrightarrow (\exists u \in X)(\exists v \in Y)(w = (u, v))).$$

$\lhd$ Нужно воспользоваться последовательно аксиомой декартова произведения, утверждением (1), аксиомой пересечения и положить $Z := (\mathbb{U} \times Y) \cap (X \times \mathbb{U})$. $\rhd$

Для $n \geq 2$ в силу 3.6.13 (2) определен класс $\mathbb{U}^n$ всех упорядоченных n-ок.

(3) *Для любого класса X существует класс $Z := (\mathbb{U}^n \times \mathbb{U}^m) \cap (X \times \mathbb{U}^m)$:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Z)(\forall\, x_1)\dots(\forall\, x_n)(\forall\, y_1)\dots(\forall\, y_m)$$
$$((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in Z \leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \in X).$$

(4) *Для любого класса X существует класс $Z := (\mathbb{U}^m \times \mathbb{U}^n) \cap (\mathbb{U}^m \times X)$:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Z)(\forall\, x_1)\dots(\forall\, x_n)(\forall\, y_1)\dots(\forall\, y_m)$$
$$((y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n) \in Z \leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \in X).$$

$\lhd$ Для доказательства (3) и (4) нужно применить аксиому декартова произведения и аксиому пересечения. $\rhd$

(5) *Для любого класса X существует класс Z, такой, что*

$$(\forall\, x_1)\dots(\forall\, x_n)(\forall\, y_1)\dots(\forall\, y_m)$$
$$((x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_m, x_n) \in Z \leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \in X).$$

$\lhd$ Следует применить аксиомы перестановки и аксиому декартова произведения. $\rhd$

3.6.14. *Теорема.* *Пусть φ — формула, в построении которой участвуют только переменные из числа $X_1, \dots, X_n$, $Y_1, \dots, Y_m$, причем φ предикативна, т. е. в φ связаны лишь переменные, ограниченные множествами. Тогда в* NGB *доказуемо утверждение*

$$(\forall\, Y_1)\dots(\forall\, Y_m)(\exists\, Z)(\forall\, x_1)\dots(\forall\, x_n)$$
$$((x_1, \dots, x_n) \in Z \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)).$$

$\lhd$ Пусть формула φ записана с учетом принятых сокращений в таком виде, что связанными в ней являются только переменные для множеств. Достаточно рассмотреть те φ, которые не содержат подформул вида $Y \in W$ и $X \in X$, ибо последние заменяются на эквивалентные: $(\exists\, x)(x = Y \wedge x \in W)$ и $(\exists\, u)(u = X \wedge u \in X)$. Кроме того, можно исключить из φ символ равенства, подставив в соответствии с аксиомой экстенсиональности вместо $X = Y$ выражение $(\forall\, u)(u \in X \leftrightarrow u \in Y)$. Доказательство проводится индукцией по длине k формулы φ, т. е. по числу k логических связок и кванторов, входящих в φ.

При $k = 0$ формула φ атомна и имеет вид $x_i \in x_j$ или $x_j \in x_i$, или $x_i \in Y_l$ $(i < j \leq n, l \leq m)$. Если $\varphi := x_i \in x_j$, то по аксиоме $\in$-отношения существует класс W_1, для которого

$$(\forall\, x_i)(\forall\, x_j)((x_i, x_j) \in W_1 \leftrightarrow x_i \in x_j).$$

Если же $\varphi := x_j \in x_i$, то вначале, воспользовавшись той же аксиомой, находим класс W_2 со свойством

$$(\forall\, x_i)(\forall\, x_j)((x_j, x_i) \in W_2 \leftrightarrow x_j \in x_i),$$

а затем применяем 3.6.13 (1). В результате подберем класс W_3, для которого будет

$$(\forall\, x_i)(\forall\, x_j)((x_i, x_j) \in W_3 \leftrightarrow x_j \in x_i).$$

Итак, в любом из этих двух случаев существует такой класс W, что справедлива формула

$$\Phi : (\forall\, x_i)(\forall\, x_j)((x_i, x_j) \in W \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m)).$$

На основании 3.6.13 (4) в формуле Φ можно заменить подформулу $(x_i, x_j) \in W$ на $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i) \in Z_1$ для некоторого другого класса Z_1 и добавить кванторы $(\forall\, x_1) \ldots (\forall\, x_{i-1})$ в начале. Пусть Ψ — получаемая при этом формула. В силу 3.6.13 (5) в формуле Ψ вместо подформулы $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_j) \in Z_1$ допустимо написать $(x_1, \ldots,$ $x_i,\ x_{i+1}, \ldots, x_j) \in Z_2$ для некоторого другого класса Z_2 и добавить кванторы $(\forall\, x_{i+1}) \ldots (\forall\, x_{j-1})$ в начале формулы Ψ. Наконец, применив 3.6.13 (3) к Z_2, найдем класс Z, для которого верна формула

$$(\forall\, x_1) \ldots (\forall\, x_n)((x_1, \ldots, x_n) \in Z \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m)).$$

Для оставшегося случая $x_i \in Y_l$ требуемое утверждение следует из существования декартовых произведений $W := \mathbb{U}^{i-1} \times Y_l$ и $Z := W \times \mathbb{U}^{n-i}$. Тем самым теорема установлена при $k = 0$.

Допустим, что для всех $k < p$ теорема доказана и формула φ имеет p логических связок и кванторов. Достаточно рассмотреть случаи, когда φ получается из каких-то формул с помощью отрицания, импликации и квантора общности.

(а) $\varphi := \neg\psi$. По индукционному предположению существует класс V такой, что

$$(\forall\, x_1)\dots(\forall\, x_n)((x_1,\dots,x_n) \in V \leftrightarrow \psi(x_1,\dots,x_n,Y_1,\dots,Y_m)).$$

По аксиоме дополнения имеется класс $Z := \mathbb{U} - V := \mathbb{U}\backslash V$, удовлетворяющий нужным условиям.

(б) $\varphi := \psi \to \theta$. Вновь по индукционному предположению найдутся классы V и W, для которых при V и ψ выполнено отмеченное в (а) и, кроме того,

$$(\forall\, x_1)\dots(\forall\, x_n)((x_1,\dots,x_n) \in W \leftrightarrow \theta(x_1,\dots,x_n,Y_1,\dots,Y_m)).$$

Искомый класс $Z := \mathbb{U} - (V \cap (\mathbb{U} - W))$ существует ввиду аксиомы пересечения и аксиомы дополнения.

(в) $\varphi := (\forall\, x)\psi$. Пусть V и ψ те же, что и в (а). Если применить аксиому области определения к классу $X := \mathbb{U} - V$, то получим класс Z_1, для которого

$$(\forall\, x_1)\dots(\forall\, x_n)((x_1,\dots,x_n) \in Z \leftrightarrow (\exists\, x)\neg\psi(x_1,\dots,x_n,Y_1,\dots,Y_m)).$$

Класс $Z := \mathbb{U} - Z_1$, который существует по аксиоме дополнения, будет искомым, ибо $(\forall\, x)\psi$ эквивалентна $\neg(\exists\, x)(\neg\psi)$. $\triangleright$

3.6.15. Каждая из приведенных выше аксиом формирования классов NGB_7–NGB_{13} является следствием теоремы 3.6.14 при подходящем выборе формулы φ. С другой стороны, сама эта теорема, как видно из доказательства, выводится из аксиом формирования классов. Замечательно, что вместо бесконечного числа утверждений, содержащихся в 3.6.14, можно обойтись конечным числом аксиом NGB_7–NGB_{13}.

Теорема 3.6.14 позволяет доказывать существование самых разнообразных классов. Так, для всякого класса Y существуют класс всех его подмножеств $\mathscr{P}(Y)$ и объединение всех его элементов $\bigcup Y$, определяемые обычными формулами

$$(\forall\, u)(u \in \mathscr{P}(Y) \leftrightarrow u \subset Y),$$

$$(\forall\, u)(u \in \bigcup Y \leftrightarrow (\exists\, v)(v \in Y \wedge u \in v)).$$

В этом легко можно убедиться, если взять $\varphi(X,Y) := X \subset Y$ и $\varphi(X,Y) := (\exists\, u)(x \in u \wedge u \in Y)$. По аналогичным соображениям возможны определения Z^{-1}, $\operatorname{im} Z$, $Z \restriction Y$, $Z``Y$, $X \cup Y$ и т. п., где X, Y и Z — некоторые классы (ср. 3.1.8).

3.6.16. *Теорема.* *Всякая теорема теории* ZFC *является теоремой* NGB.

$\lhd$ Все аксиомы ZF являются теоремами теории NGB. Докажем единственную неочевидную часть этого утверждения, касающуюся аксиомы подстановки ZF_4^{φ}. Пусть формула φ не содержит свободных вхождений переменной y и $\{x, t, z_1, \dots, z_m\}$ — полный набор переменных, использованных в построении φ. Далее предположим, что для всех x, u, v, $z_1, \dots, z_m$ выполняется

$$\varphi(x, u, z_1, \dots, z_m) \wedge \varphi(x, v, z_1, \dots, z_m) \to u = v.$$

Формула φ предикативна, так как все переменные в ней ограничены множествами. По теореме 3.6.14 существует класс Z такой, что

$$(\forall\, x)(\forall\, u)((x, u) \in Z \leftrightarrow \varphi(x, u, z_1, \dots, z_m)).$$

Из указанного выше свойства φ видно, что класс Z однозначен, т. е. в NGB доказуема $\mathrm{Un}\,(Z)$. По аксиоме подстановки NGB_6 существует множество y, для которого

$$(\forall\, v)(v \in y \leftrightarrow (\exists\, u)((u, v) \in \ Z \wedge u \in x)).$$

Ясно, что для y выполняется нужное соотношение

$$(\forall\, z_1) \dots (\forall\, z_m)(\forall\, v)(v \in y \leftrightarrow (\exists\, u \in x)\, \varphi(x, v, z_1, \dots, z_m)). \ \rhd$$

3.6.17. *Теорема.* *Каждая теорема* NGB, *в которой говорится о множествах, является теоремой* ZFC.

$\lhd$ Доказательство можно найти, например, в [49]. Оно требует привлечения некоторых фактов из теории моделей, выходящих за рамки настоящей книги. $\rhd$

Утверждения 3.6.16 и 3.6.17 часто формулируют в следующем виде.

3.6.18. *Теорема.* *Теория множеств фон Неймана — Гёделя — Бернайса* NGB *является консервативным расширением теории множеств Цермело — Френкеля* ZFC.

3.6.19. Из других аксиоматических теорий множеств отметим теорию Бернайса — Морса, расширяющую теорию NGB. Эта теория имеет специальные аксиомы NGB_1–NGB_5, NGB_{14} и следующую схему аксиом выделения:

$$(\exists X)(\forall Y)(Y \in X \leftrightarrow M(Y) \wedge \varphi(Y, X_1, \dots, X_n)),$$

где φ — произвольная формула, не содержащая вхождений переменной X.

Из 3.6.14 видно, что если в формуле φ область действия кванторов ограничена множеством, то схема аксиом выделения есть теорема NGB. Теория множеств Бернайса — Морса допускает в схеме аксиом выделения квантификацию по произвольным классам. К теории множеств Бернайса — Морса можно также добавить аксиому выбора NGB_{15}.

3.7. Нестандартная теория классов

В этом параграфе представлена еще одна система аксиом NCT, аналогичная теории внутренних множеств Нельсона IST, но отличающаяся от нее тем, что NCT расширяет теорию классов фон Неймана — Бернайса — Гёделя. Принципы переноса, идеализации и стандартизации в теории NCT формулируются как аксиомы, а не как схемы аксиом, так что теория NCT, как и NGB, конечно аксиоматизируема.

3.7.1. Язык NCT получается добавлением к языку NGB одноместного предикатного символа St (символ $\mathrm{St}(X)$ читается «X — стандартный класс»). Так же, как и в 3.6, переменные, принимающие значения произвольных классов, обозначены заглавными латинскими буквами, а переменные, принимающие значения множеств, — строчными.

Мы будем придерживаться и других сокращений и определений из 3.6. В частности, класс X называем *множеством* и пишем $M(X)$, если X является элементом какого-нибудь класса: $M(X) := (\exists Y)(X \in Y)$, см. 3.6.1. Как и раньше, запись $S(X_1, \dots, X_n) :=$

$\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ означает, что выражение $S(X_1, \ldots, X_n)$ служит сокращением для $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$.

Итак, язык NCT — язык исчисления предикатов с равенством, содержащий один бинарный предикатный символ $\in$ и один унарный предикатный символ St. Перечислим специальные аксиомы теории NCT.

(1) Принимаемые в NCT аксиомы экстенсиональности, пары, объединения, степени, бесконечности, регулярности и выбора совпадают с соответствующими аксиомами NBG_1–NBG_5, NBG_{14}, NBG_{15} (см. 3.6.2, 3.6.3, 3.6.11, 3.6.12).

(2) Аксиома подстановки в NCT принимается в виде:

$$(\forall V)(\forall x)(\exists y)(\forall u \in x)(\exists v((u, v) \in V) \to (\exists v \in y)((u, v) \in V)).$$

Ниже используются следующие сокращения:

$$(\exists^{\,\mathrm{st}} x)\varphi := (\exists x)(\mathrm{St}(x) \wedge \varphi),$$
$$(\forall^{\,\mathrm{st}} x)\varphi := (\forall x)(\mathrm{St}(x) \to \varphi).$$

(3) Аксиома ограниченности:

$$(\forall x)(\exists^{\,\mathrm{st}} z)(x \in z).$$

(4) Аксиома переноса:

$$(\forall^{\,\mathrm{st}} X)((\exists x) x \in X \to (\exists^{\,\mathrm{st}} x) x \in X).$$

(5) Аксиома стандартизации:

$$(\forall X)(\exists^{\,\mathrm{st}} Y)(\forall^{\,\mathrm{st}} x)(x \in Y \leftrightarrow x \in X).$$

Отправляясь от пустого множества, по аксиоме стандартизации можно получить стандартный класс L, не содержащий стандартных элементов. По аксиоме переноса $L = \varnothing$, т. е. *пустое множество стандартно.*

3.7.2. Формулу NCT называют *предикативной*, если в ней связаны только переменные, ограниченные множествами, и предикат стандартности присутствует только в составе внешних кванторов, т. е. все вхождения кванторов и предиката стандартности имеют вид $\exists x$, $\exists^{\mathrm{st}} x$, $\forall x$, $\forall^{\mathrm{st}} x$. Заметим, что подформулу $\mathrm{St}(x)$ можно заменить на $(\exists^{\mathrm{st}} y)(y = x)$.

Пусть p — произвольное множество. Класс X называется *p-стандартным* (символически $\mathrm{st}_p\, X$), если он является *p-сечением* некоторого стандартного класса Y, т. е. $\exists^{\mathrm{st}} Y (X = Y``p)$, где $Y``p = \{v : (p, v) \in Y\}$. Класс X называют *внутренним* и пишут $\mathrm{int}\, X$, если он p-стандартен для некоторого p.

Аксиома существования классов: *Для каждой предикативной формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)$ справедливы утверждения:*

(1) *для любых классов $Y_1, \dots, Y_m$ существует класс $\mathscr{T} = \{(x_1, \dots, x_n) : \varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)\}$;*

(2) *если φ — внутренняя формула и классы $Y_1, \dots, Y_n$ стандартны, то $\mathscr{T}$ есть стандартный класс.*

Точно так же, как и для теории NGB, вместо приведенной здесь схемы аксиом существования классов достаточно принять в качестве аксиом лишь конечное число ее частных случаев (см. NGB_7–NGB_{13}), после чего данная схема аксиом в полном объеме может быть доказана (см. 3.6.14). Следовательно, теория NCT является конечно аксиоматизируемой.

Из аксиомы существования классов легко вытекает следующее утверждение.

3.7.3. *Если в условиях аксиомы существования классов формула φ и классы $Y_1, \dots, Y_n$ — внутренние, то $\mathscr{T}$ есть внутренний класс. При этом если все Y_i будут p-стандартными для некоторого фиксированного множества p, то класс $\mathscr{T}$ также p-стандартен.*

$\lhd$ Следует из аксиомы существования классов. $\rhd$

Введем теперь следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{U} &:= \{x : x = x\} = \{x : x \notin \varnothing\},\\
\mathbb{E} &:= \{x : \ (\exists u)(\exists v)\,(x = (u, v) \wedge u \in v)\},\\
\mathbb{S} &:= \{x : \mathrm{St}(x)\},\\
{}^{-}X &:= \{x : x \notin X\}.
\end{aligned}
$$

Согласно аксиомам существования классов совокупности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{E}$ суть стандартные классы, $\mathbb{S}$ есть класс и для любых классов X и Y совокупности ${}^{-}X$, $X \cap Y$, $\mathrm{dom}(X)$, $X \times \mathbb{U}$ суть классы, стандартные, если стандартны X и Y.

Любое множество x является x-стандартным и, следовательно, внутренним, поскольку $x = \mathbb{E}^{-1}``x$. Любой стандартный класс $X$ — внутренний, так как $X = (\{\varnothing\} \times X)``\varnothing$.

3.7.4. Следующие две аксиомы выражают свойства внутренних классов.

(1) Аксиома выделения:

$$(\forall^{\mathrm{int}} X)(\forall x)(\exists y)(\forall u)(u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge u \in X).$$

(2) Аксиома идеализации:

$$(\forall^{\mathrm{int}} X)(\forall^{\mathrm{st}} a_0)((\forall^{\mathrm{st\,fin}} c \subseteq a_0)(\exists x)(\forall a \in c)((x, a) \in X) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists x)(\forall^{\mathrm{st}} a \in a_0)((x, a) \in X)).$$

3.7.5. Следующие утверждения непосредственно вытекают из аксиомы существования классов и предложения 3.7.3.

(1) *Пусть φ — внутренняя предикативная формула. Тогда*

$$(\forall^{\mathrm{int}} X_1) \dots (\forall^{\mathrm{int}} X_n)(\forall x)(\exists y)(\forall u)(u \in y \leftrightarrow \\ \leftrightarrow y \in x \wedge \varphi(x, X_1, \dots, X_n)).$$

В частности, выполняется схема аксиом выделения BST.

(2) *В* NCT *выполняются аксиомы стандартизации и идеализации* BST.

(3) **Принцип переноса.** *Если φ — внутренняя предикативная формула, то*

$$(\forall^{\mathrm{st}} X_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}} X_n)((\forall^{\mathrm{st}} x)\, \varphi(x, X_1, \dots, X_n) \to \\ \to (\forall x)\, \varphi(x, X_1, \dots, X_n)).$$

В частности, выполнена схема аксиом переноса BST.

(4) *Всякое доказуемое в* BST *предложение доказуемо и в* NCT.

Напомним, что аксиомы переноса, идеализации, стандартизации и выделения BST являются частными случаями соответствующих аксиом NCT, в которых классы определяются предикативными формулами с множественными свободными переменными (для аксиом выделения, переноса и идеализации эти формулы — внутренние).

3.7.6. Отметим следующие утверждения:

(1) *Если x и p — произвольные множества, то*

$$\mathrm{st}_p\, x \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} z)(x = z``p) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} f)(\mathrm{Fnc}\ f \wedge x = f(p)).$$

$\lhd$ Пусть x — это p-стандартное множество. Тогда по аксиоме ограниченности и принципу переноса $x = z``p$ для некоторого стандартного $z$. Тогда функция $f = \{(q, z``q) : q \in \mathrm{dom}(z)\}$ стандартна и $f(p) = x$. Наоборот, если функция f стандартна, то по принципу переноса множество $f(p)$ будет p-сечением стандартного множества $\{(q,u) : u \in f(q)\}$. $\rhd$

(2) *Пусть φ — внутренняя предикативная формула и p — произвольное множество. Тогда*

$$(\forall^{\mathrm{st}}_p X_1)\ldots(\forall^{\mathrm{st}}_p X_n)((\forall^{\mathrm{st}}_p x)\,\varphi(x, X_1, \ldots, X_n) \to \\ \to (\forall x)\,\varphi(x, X_1, \ldots, X_n)).$$

$\lhd$ Согласно предложению 3.7.3 достаточно доказать, что каждый непустой p-стандартный класс X содержит p-стандартный элемент. Пусть $X = Y``p$, причем $\mathrm{st}\, Y$ и $p \in r$ для некоторого стандартного r. По аксиомам выделения и выбора и теореме переноса найдется такая стандартная функция f, что

$$(\forall q \in r)((\exists y)(q, y) \in Y \to (\exists y)(q, y) \in Y \cap f).$$

Так как X непуст, то $p \in \mathrm{dom}(f)$ и $f(p)$ будет p-стандартным элементом X. $\rhd$

3.7.7. Для произвольного класса C положим $^{\circ}C := C \cap \mathbb{S}$. Аксиома стандартизации постулирует существование для любого класса X стандартного класса Y со свойством $^{\circ}Y = {}^{\circ}X$. По принципу переноса такой стандартный класс единствен. Он обозначается через $^{\mathrm{s}}X$.

(1) ***Теорема.*** *Класс стандартен тогда и только тогда, когда его пересечение с каждым стандартным множеством есть стандартное множество.*

$\lhd$ Необходимость следует из аксиом существования классов и выделения. Докажем достаточность. Пусть X — такой класс, что $(\forall^{\mathrm{st}} z)(\exists^{\mathrm{st}} t)(t = X \cap z)$. Положим $Y := {}^{\mathrm{s}}\{x : x \in X\}$ и покажем, что $Y = X$. Благодаря аксиоме ограниченности для этого достаточно проверить, что для любого стандартного множества z имеет место равенство $z \cap X = z \cap Y$. По выбору Y будет

$$^{\circ}(X \cap z) = {}^{\circ}X \cap {}^{\circ}z = {}^{\circ}Y \cap {}^{\circ}z = {}^{\circ}(Y \cap z).$$

Поскольку $X \cap z$ и $Y \cap z$ являются стандартными множествами, то по принципу переноса из последней цепочки равенств следует требуемое. $\rhd$

(2) *Множество является стандартным и конечным тогда и только тогда, когда все его элементы стандартны.*

$\lhd$ По принципу идеализации имеем:

$$\mathrm{St}(x) \wedge \mathrm{fin}(x) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st\ fin}} y \subseteq x)(\forall a \in x)(\exists b \in y)(a = b) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall a \in x)(\exists^{\mathrm{st}} b \in x)(a = b),$$

что и требовалось. $\rhd$

Множество называют *стандартно-конечным*, если его мощность есть стандартное натуральное число.

3.7.8. *Теорема.* *Множество является стандартно-конечным в том и только в том случае, если все его подклассы суть множества.*

$\lhd$ Пусть x — некоторое множество, $|x| = \alpha$ и $f : \alpha \to x$ — взаимнооднозначная функция.

Если x не является стандартно-конечным, то по принципу переноса $(\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(\alpha > n)$. Для класса $I := \{f(n) : n \in {}^{\circ}\mathbb{N}\}$ мы можем записать:

$$(\forall^{\mathrm{st\ fin}} s \subseteq \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in s)(f(k) \in I \wedge n < k).$$

Если бы I был множеством, то нашлось бы такое $k \in \mathbb{N}$, что $f(k) \in I$ и $(\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})$ $(n < k)$, что невозможно, так как $f(k) \in I$ только для стандартных k в силу взаимнооднозначности f.

Пусть теперь x стандартно-конечно и $X \subseteq x$. Рассмотрим класс $T := \{n \in \alpha : f(n) \in X\}$. По принципам стандартизации и переноса существует множество $t = {}^{\mathrm{s}}T$, $t \subseteq \alpha$. Так как, по предложению 3.7.7 (2), $\alpha \subseteq \mathbb{S}$, имеет место равенство $t = {}^{\circ}t = {}^{\circ}T = T$. Тогда $X = \{f(n) : n \in t\}$ есть множество. $\rhd$

3.7.9. Назовем *p-монадой* $\mu_p(x)$ множества x пересечение всех p-стандартных классов, содержащих x. Поскольку дополнение к стандартному классу есть стандартный класс, то p-монады двух произвольных множеств либо не пересекаются, либо совпадают. По предложению 3.7.6 (1) имеем:

$$\mu_p(x) = \{y : (\forall_p^{\mathrm{st}} z)(y \in z \leftrightarrow x \in z)\}.$$

Если множество p стандартно, то класс $\mu_p(x)$ будем называть *монадой* множества x и обозначать $\mu(x)$. Очевидно, что

$$\mu(x) = \bigcap\{a \in \mathbb{S} : x \in a\}.$$

Пусть x — произвольное множество. По аксиоме ограниченности $x \in x_0$ для некоторого стандартного x_0. Используя принцип переноса, нетрудно показать, что $u = {}^s\{a \subseteq x_0 : x \in a\}$ есть стандартный ультрафильтр, причем $\bigcap{}^\circ u = \mu(x)$. Наоборот, если u — произвольный стандартный ультрафильтр, то по принципам переноса и идеализации $\bigcap{}^\circ u \neq \varnothing$ и $\mu(x) = \bigcap{}^\circ u$ для любого $x \in \bigcap{}^\circ u$.

Класс $\bigcap{}^\circ u$ называют *гнездом* ультрафильтра u и обозначают $\nu(u)$. Для класса всех ультрафильтров будем использовать сокращение Ult, а для множества всех ультрафильтров на множестве x — символ $\mathrm{Ult}(x)$.

Для произвольных множеств x и p выполняется следующее равенство $\mu_p(x) = \mu((p, x))$“p.

$\triangleleft$ Используя 3.7.6 (1), получим:

$$y \in \mu((p,x))\text{“}p \leftrightarrow (p, y) \in \mu((p, x)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} z)((p, x) \in z \leftrightarrow (p, y) \in z) \leftrightarrow y \in \mu_p(x),$$

что и требовалось. $\triangleright$

3.7.10. Класс X назовем *p-насыщенным,* если вместе с каждым множеством X содержит всю p-монаду этого множества.

(1) *Множество x является p-стандартным тогда и только тогда, когда оно p-насыщено.*

$\lhd$ Пусть x является p-насыщенным. Возьмем произвольный элемент $u \in x$ и покажем, что u принадлежит p-сечению некоторого стандартного множества, включенному в x. Действительно, если допустить противное, то

$$(\forall^{\mathrm{st}} z)(u \in z``p \to (\exists v \in z``p)(v \notin x)).$$

Область изменения z в этой формуле можно ограничить стандартным множеством $\{t : t \subseteq \bigcup x_0\}$, где $x_0 \ni x$ стандартно. По принципу идеализации получим:

$$(\exists v \notin x)(\forall^{\mathrm{st}} z)(u \in z``p \to v \in z``p),$$

что противоречит включению $\mu_p(u) \subseteq x$.

Таким образом, мы имеем: $(\forall u \in x)(\exists^{\mathrm{st}} z)(u \in z``p \subseteq x)$. Вновь применив принцип идеализации, получим такое стандартное конечное множество $z_0$, что $(\forall u \in x)(\exists z \in z_0)(u \in z``p \subseteq x)$. Нетрудно проверить, что x будет p-сечением стандартного множества $\bigcup z_0$. $\rhd$

(2) *Для любых множеств x и p имеет место эквивалентность*

$$\mu_p(x) = \{x\} \leftrightarrow \mathrm{st}_p\, x.$$

$\lhd$ Импликация влево очевидна. Если же $\mu_p(x) = \{x\}$, то $\{x\}$ — это p-насыщенное и, значит, p-стандартное множество. Тогда по принципу переноса x также будет p-стандартным. $\rhd$

3.7.11. Аксиома насыщенности:

$$(\forall X)(\exists p)(\forall x \in X)(\mu_p(x) \subseteq X),$$

т. е. всякий класс является p-насыщенным для некоторого множества p.

Для произвольных класса $D \subseteq \mathrm{Ult}$ и множества p положим

$$\mathrm{Psls}(D, p) := \bigcup_{u \in {}^{\circ}D} \nu(u)``p.$$

Полумножествами называются подклассы множеств:

$$\mathrm{Sms}\, X := (\exists^{\mathrm{st}} z)(X \subseteq z).$$

3.7.12. *Теорема.* *Пусть X — произвольный класс. Тогда найдутся такой стандартный класс $D \subseteq \mathrm{Ult}$ и множество p, что выполняется равенство $X = \mathrm{Psls}(D, p)$. Если X — полумножество, то D можно выбрать множеством.*

◁ Пусть X — это p-насыщенный класс. Положим $D := {}^s\{u \in \mathrm{Ult} : \nu(u)``p \subseteq X\}$. Тогда по предложению из 3.7.9 выполняется требуемое равенство.

Это же равенство остается в силе для $X \in z$, где z стандартно, если вместо D взять стандартное по принципу переноса множество $d := D \cap \mathrm{Ult}(r \times z)$, где r — произвольное стандартное множество, содержащее p. ▷

Таким образом, всякое полумножество в NCT оказывается определимым некоторой предикативной Σ_2^{st}-формулой. Можно показать также, что если в формуле все кванторы ограничены полумножествами, то она эквивалентна некоторой предикативной формуле.

В самом деле, достаточно заменить все подформулы вида $\mathrm{st}\, X$ на $(\forall^{\mathrm{st}} s)(\exists^{\mathrm{st}} t)(t = X \cap s)$, а подформулы вида $(\exists X)(\mathrm{Sms}\, X \to \varphi(X, \dots))$ на $(\exists^{\mathrm{st}} d)(\exists p)\, \varphi(\mathrm{Psls}(d, p), \dots)$.

Следующая теорема является принципом насыщенности в его традиционной формулировке. Отметим, что, в отличие от NCT, ни в IST, ни в BST эта теорема не может быть не только доказана, но даже сформулирована.

3.7.13. Теорема. *Пусть класс X и стандартное множество z_0 таковы, что $(\forall^{\mathrm{st}} x \in z_0)(\exists y)((x, y) \in X)$. Тогда найдется такая функция-множество f, что $(\forall^{\mathrm{st}} x \in z_0)((x, f(x)) \in X)$.*

◁ По аксиомам выделения и ограниченности найдется стандартное множество t такое, что

$$(\forall x \in z_0)((\exists y)(x, y) \in X \to (\exists y \in t)(x, y) \in X).$$

Пусть X — это p-насыщенный класс. Если $(x, y) \in X$ и x стандартно, то $(\forall y\prime \in \mu(y))(x, y\prime) \in X$, поскольку $\mu_p((x, y)) = \{x\} \times \mu_p(y)$. Положим $d = {}^s\{(x, u) \in z \times \mathrm{Ult}(t) : \{x\} \times (\nu(u)``p) \subseteq X\}$. Аксиома выбора и принцип переноса позволяют выбрать такую стандартную функцию $h : z_0 \to \mathrm{Ult}(t)$, что $(\forall x \in z_0)((x, h(x)) \in d)$. Имеем:

$$(\forall^{\mathrm{st\,fin}} z \in z_0)(\exists f)(\forall x \in z)(\forall^{\mathrm{st}} a \in h(x))(\mathrm{Fnc}\,(f) \wedge f(x) \in a).$$

По принципу идеализации получим такую функцию f, для которой $(\forall^{\mathrm{st}} x \in z)(f(x) \in \nu(h(x)))$. Это f мы и искали. ▷

3.7.14. Примечания.

(1) Нестандартная теория классов NCT, представленная в этом параграфе, предложена П. В. Андреевым и Е. И. Гордоном в [7]. От других теорий внешних множеств NCT отличается естественностью и простотой. В частности, она содержит лишь конечное число аксиом — принципы переноса, идеализации и стандартизации Э. Нельсона формулируются здесь в виде отдельных аксиом, а не их схем.

(2) Наличие классов позволяет формализовать в рамках NCT различные конструкции, использующие внешние множества, что невозможно в IST. В частности, одной из аксиом NCT является аксиома насыщенности (см. 3.7.11), играющая исключительно важную роль в приложениях нестандартного анализа.

(3) Все множества в NCT являются внутренними. Внешние объекты суть собственные классы. При этом, как и в альтернативной теории множеств П. Вопенки AST [31], здесь возможны подклассы множеств, которые не являются множествами (аксиома выделения истинна только для внутренних множеств). Следуя П. Вопенке, последние названы полумножествами. Теория NCT имеет и некоторые другие свойства AST. В частности, в ней справедлива теорема о том, что множество стандартно-конечно (т. е. его мощность есть стандартное натуральное число) в том и только в том случае, когда оно не содержит подполумножеств.

(4) Если внутренний класс (в частности, внутреннее множество) X представляет собой сечение стандартного класса множеством p, то говорят, что X стандартен относительно p, или p-стандартен, см. 3.7.2. Это понятие относительной стандартности в рамках теории IST было впервые введено в статье [44], где, в частности, было доказано, что принцип переноса и импликация вправо в принципе идеализации остаются справедливыми, если заменить все вхождения предиката стандартности в них на предикат стандартности относительно произвольного, но фиксированного для каждой конкретной формулы множества p. То же остается справедливым и для теории NCT (см. 3.7.7 (1)).

3.8. Непротиворечивость NCT

Настоящий параграф посвящен доказательству того, что NCT является консервативным расширением BST.

3.8.1. *Теорема.* *Всякое предикативное предложение, доказуемое в* NCT, *доказуемо в* BST.

$\lhd$ Мы покажем, что всякая модель BST изоморфно вкладывается в некоторую модель NCT в качестве универсума всех множеств, откуда по теореме о полноте следует доказываемое утверждение. $\rhd$

3.8.2. Рассмотрим произвольную модель $\mathfrak{M} = (M, \in^M, \mathrm{st}^M)$ теории BST. Пусть L есть обогащение языка BST элементами из M, рассматриваемыми как новые константные символы. Будем считать $\mathfrak{M}$ моделью языка L, принимая за интерпретацию символа $a \in M$ само множество a. Множества из M, входящие в формулу языка L, будем называть ее параметрами.

Имея формулу φ языка L с одной свободной переменной, положим $\lceil\varphi\rceil := \{x : \mathfrak{M} \models \varphi(x)\}$. Пусть, далее,

$$N := \{\lceil\varphi\rceil : \varphi \text{ — формула языка } L \text{ с одной свободной переменной}\};$$

$$\mathrm{Std} := \{\lceil\varphi\rceil \in N : \varphi \text{ — внутренняя формула со стандартными параметрами}\};$$

$$\mathrm{Set}(a) := \lceil x \in a\rceil \text{ для любого } a \in M.$$

Для любых $p, q \in N$ определим

$$p \in^N q := (\exists\, a \in M)(p = \mathrm{Set}(a) \wedge a \in q),$$
$$\mathrm{st}^N p := p \in \mathrm{Std}\,.$$

3.8.3. *Для любых* $a, b \in M$ *и* $p, q \in N$ *имеют место следующие утверждения:*

(1) $p \in^N q \to (\exists\, a \in M)(p = \mathrm{Set}(a))$;

(2) $\mathrm{Set}(a) = \mathrm{Set}(b) \leftrightarrow a = b$;

(3) *если* $p = \mathrm{Set}(a)$ *и* $q = \mathrm{Set}(b)$, *то* $p \in^N q \leftrightarrow a \in^M b$;

(4) *если* $p = \mathrm{Set}(a)$, *то* $\mathrm{st}^N p \leftrightarrow \mathrm{st}^M a$.

$\lhd$ В самом деле, (1) верно по определению отношения $\in^N$, (2) вытекает из справедливости аксиомы экстенсиональности в $\mathfrak{M}$, а (3) следует из (1) по определению отношения $\in^N$.

Для обоснования (4) заметим, что из определения st^N следует $p = \{b : \mathfrak{M} \models b \in a\} = \{b : \mathfrak{M} \models \varphi(b)\}$, где φ — внутренняя формула со стандартными параметрами. Следовательно, $\mathfrak{M} \models$

$(\forall x)(x \in a \leftrightarrow \varphi(x))$. Из того, что в $\mathfrak{M}$ выполнена схема аксиом переноса, следует, что $\mathfrak{M} \models \mathrm{st}\, a$, т. е. $\mathrm{st}^M a$. Наоборот, если $\mathrm{st}^M a$, то $p = \lceil x \in a \rceil \in \mathrm{Std}$. $\triangleright$

(5) *Отображение* Set *изоморфно вкладывает* $\mathfrak{M}$ *как модель языка* L *в модель* $\mathfrak{N} = (N, \in^N, \mathrm{st}^N)$, *причем для всякого* $p \in N$ *будет* $\mathfrak{N} \models (\exists\, X)(p \in X) \to (\exists\, a \in M)$ $(p = \mathrm{Set}(a))$.

$\triangleleft$ Очевидно следует из (1)–(4). $\triangleright$

Предложение 3.8.3 (5) показывает, что класс p является множеством в $\mathfrak{N}$ в том и только в том случае, когда $p = \mathrm{Set}(a)$ для некоторого $a \in M$, т. е. $\mathfrak{M}$ действительно вкладывается в $\mathfrak{N}$ как универсум всех множеств.

3.8.4. Остается проверить выполнимость аксиом NCT в модели $\mathfrak{M}$.

Из предложения 3.8.3 (5) следует, что аксиомы NCT, являющиеся предикативными предложениями, выполняются в $\mathfrak{N}$, если они истинны в BST. Это верно по отношению к аксиомам пары, объединения, степени, бесконечности, выбора, регулярности и ограниченности. Аксиома экстенсиональности выполняется в $\mathfrak{N}$ благодаря построению отношения $\in^N$.

Если φ — формула языка L, то символом $\mathbf{C}_\varphi$ мы будем обозначать совокупность $\{x : \varphi(x, x_1, \dots, x_n)\}$. Пусть $\Phi(X_1, \dots, X_n)$ — предикативная формула, а $\varphi_1(x, x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x, x_1, \dots, x_m)$ — формулы языка L, свободные переменные которых не участвуют в построении Φ. Обозначим через $\Phi(\mathbf{C}_{\varphi_1}, \dots, \mathbf{C}_{\varphi_n})$ формулу, которая получается из $\Phi(X_1, \dots, X_n)$ заменой:

(1) всех вхождений атомарных формул вида $y \in X_j$ на $\varphi_j(y, x_1, \dots, x_m)$;

(2) всех вхождений атомарных формул вида $X_i \in X_j$ на
$$(\exists\, x)((\forall y)(y \in x \leftrightarrow \varphi_i(y, x_1, \dots, x_m)) \wedge \varphi_j(x, x_1, \dots, x_m));$$

(3) всех вхождений атомарных формул вида $X_i = X_j$ на
$$(\forall x)(\varphi_i(x, x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow \varphi_j(x, x_1, \dots, x_m));$$

(4) всех вхождений атомарных формул вида $X_i = x$ на
$$(\forall y)(y \in x \leftrightarrow \varphi_i(y, x_1, \dots, x_m)).$$

Свободными переменными формулы $\Phi(\mathbf{C}_{\varphi_1}, \dots, \mathbf{C}_{\varphi_n})$ являются таковые у формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

3.8.5. *Если Φ — предикативная формула и $\mathbf{C}_{\varphi_1}, \dots, \mathbf{C}_{\varphi_n}$ — совокупности без свободных переменных, то*

$$\mathfrak{N} \models \Phi(\ulcorner\varphi_1\urcorner, \dots, \ulcorner\varphi_n\urcorner) \leftrightarrow \mathfrak{M} \models \Phi(\mathbf{C}_{\varphi_1}, \dots, \mathbf{C}_{\varphi_n}).$$

$\lhd$ Доказательство проводится индукцией по сложности Φ с использованием предложений из 3.8.3. $\rhd$

3.8.6. Заметим, что аксиомы NCT, не являющиеся предикативными предложениями, имеют вид

$$(Q_1 X)(Q_2 Y)(QZ)\Psi(X, Y, Z),$$

где $Q_1, Q_2 \in \{\forall, \forall^{\mathrm{st}}\}$, $Q \in \{\exists, \exists^{\mathrm{st}}\}$ и Ψ — предикативная формула. Будем говорить, что предложение указанного вида *истинно в* BST *для классов*, если для произвольных формул $\varphi_1(x, u_1, \dots, u_l)$ и $\varphi_2(x, v_1, \dots, v_m)$ языка BST, внутренних, если соответствующие кванторы внешние, можно указать такую формулу $\varphi(x, w_1, \dots, w_n)$ языка BST, внутреннюю, если квантор Q внешний, что предложение

$$(Q_1 u_1) \dots (Q_1 u_l)(Q_2 v_1) \dots (Q_2 v_m)(Q w_1) \dots (Q w_n)\Psi(\mathbf{C}_{\varphi_1}, \mathbf{C}_{\varphi_2}, \mathbf{C}_{\varphi})$$

истинно в BST. При этом предполагается, что переменные u_i, v_i, w_i не участвуют в построении формулы Ψ.

3.8.7. *Пусть предложение Φ имеет вид*

$$(Q_1 X)(Q_2 Y)(Q_3 Z)\Psi(X, Y, Z)$$

из 3.8.6. *Тогда если Φ истинно в* BST *для классов, то Φ выполняется в $\mathfrak{N}$.*

$\lhd$ Рассмотрим случай, когда в Φ все кванторы по классам внешние. Возьмем произвольные $\mathfrak{N}$-стандартные элементы $\ulcorner\varphi_1\urcorner, \ulcorner\varphi_2\urcorner \in N$. Из того, что Φ истинно в BST для классов, следует, что найдется такая внутренняя формула φ языка L с $\mathfrak{M}$-стандартными параметрами и одной свободной переменной, что $\mathfrak{M} \models \Psi(\mathbf{C}_{\varphi_1}, \mathbf{C}_{\varphi_2}, \mathbf{C}_{\varphi})$. Таким образом, мы имеем: $\mathrm{st}^N \ulcorner\varphi\urcorner$ и $\mathfrak{N} \models \Psi(\ulcorner\varphi_1\urcorner, \ulcorner\varphi_2\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner)$ по предложению 3.8.5, что и требовалось. $\rhd$

Нетрудно доказать истинность в BST для классов аксиом переноса, существования классов, регулярности, подстановки и идеализации. Аксиомы стандартизации, выделения и насыщенности требуют отдельного рассмотрения.

Мы будем пользоваться определениями, обозначениями и доказанными выше фактами о монадах и ультрафильтрах, которые имеют место также и в BST. Кроме того, будет использована следующая теорема из [6].

3.8.8. Теорема. *Для любой формулы Φ с двумя свободными переменными найдется внутренняя формула φ, удовлетворяющая условию*

$$(\forall p)(\forall^{\mathrm{st}} x)(\Phi(x,p) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} U \in \mathrm{Ult})(p \in \nu(U) \to \varphi(x,U)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} U \in \mathrm{Ult})(p \in \nu(U) \wedge \varphi(x,U))).$$

3.8.9. Теорема. *Аксиома стандартизации* NCT *верна в* BST *для классов.*

$\lhd$ Пусть Φ — произвольная формула. Можно считать, что она имеет не более двух свободных переменных. Выберем согласно теореме 3.8.8 внутреннюю формулу φ, удовлетворяющую условию теоремы. Тогда если множество p и ультрафильтр U таковы, что $p \in \nu(U)$, то

$$(\forall^{\mathrm{st}} x)(\Phi(x,p) \leftrightarrow \varphi(x,U)).$$

Поскольку всякое множество принадлежит гнезду некоторого стандартного ультрафильтра, это доказывает истинность аксиомы стандартизации в BST для классов. $\rhd$

Пусть U — ультрафильтр. Обозначим

$$\mathrm{dom}(U) := \{\mathrm{dom}(u) : u \in U\};$$
$$\mathrm{im}(U) := \{\mathrm{im}(u) : u \in U\}.$$

Используя принципы переноса и идеализации, нетрудно показать, что $\mathrm{dom}(U)$ и $\mathrm{im}(U)$ являются ультрафильтрами для всякого ультрафильтра U, причем для любых множеств a и b справедливы импликации

$$(a,b) \in \nu(U) \to a \in \nu(\mathrm{dom}(U)) \wedge b \in \nu(\mathrm{im}(U));$$
$$a \in \nu(\mathrm{dom}(U)) \to (\exists\, b \in \mathrm{im}(U))((a,b) \in \nu(U)).$$

3.8.10. *Теорема.* *Аксиома выделения истинна в* BST *для классов.*

$\lhd$ Пусть Φ есть формула с двумя свободными переменными. Согласно теореме 3.8.8 для некоторой внутренней формулы φ будет:

$$\Phi(a,b) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} U \in \mathrm{Ult})((a,b) \in \nu(U) \wedge \varphi(U)).$$

Обозначим

$$\psi(V,W) := (\exists\, U \in \mathrm{Ult})(\mathrm{dom}(U) = V \wedge \mathrm{im}(U) = W \wedge \varphi(U)).$$

По теореме 3.8.10 и принципу переноса BST для любого стандартного множества A найдется такое стандартное множество R, что

$$(\forall V \in \mathrm{Ult}(A))((\exists\, W)\,\psi(V,W) \to (\exists\, W \in R)\,\psi(V,W)).$$

Обозначим $Y := \bigcup\bigcup R$. Тогда по принципу переноса и свойствам гнезд ультрафильтров для всякого $a \in A$ будем иметь:

$$\begin{aligned}(\exists\, b)\Phi(a,b) &\to (\exists^{\mathrm{st}} V \in \mathrm{Ult}(A))(\exists^{\mathrm{st}} W \in \mathrm{Ult})(a \in \nu(V) \wedge \psi(V,W)) \to \\ &\to (\exists^{\mathrm{st}} V \in \mathrm{Ult}(A))(\exists^{\mathrm{st}} W \in R)(a \in \nu(U) \wedge \psi(V,W)) \to \\ &\to (\exists\, b \in Y)(\exists^{\mathrm{st}} U)((a,b) \in \nu(U) \wedge \varphi(U)) \to \\ &\to (\exists\, b \in Y)\Phi(a,b).\end{aligned}$$

Пусть теперь $\Psi(x,y,p)$ — произвольная формула. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого p и всякого стандартного X найдется такое множество Y, что верна формула

$$(\forall x \in X)((\exists\, y)\Psi(x,y,p) \to (\exists\, y \in Y)\Psi(x,y,p)).$$

Зафиксировав стандартные множества X и p, положим

$$\Phi(a,b) := (\exists\, x)(\exists\, p)(a = (x,p) \wedge \Psi(x,b,p)).$$

По доказанному найдется такое стандартное множество Y, что для любого $p \in P$ выполняется требуемая формула. Осталось применить аксиому ограниченности. $\rhd$

3.8.11. *Теорема.* *Аксиома насыщенности истинна в* BST *для классов.*

$\lhd$ В силу теоремы 3.8.8 для всякой формулы Φ с двумя свободными переменными можно построить такую внутреннюю формулу φ, что

$$\Phi(x,p) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} U)((p,x) \in \nu(U) \wedge \varphi(U)).$$

Отсюда для любого множества p по предложению 3.7.9 получаем

$$(\forall x)(\Phi(x,p) \to (\forall y \in \mu_p(x))\, \Phi(y,p)),$$

что и доказывает утверждение теоремы. $\rhd$

Итак, все аксиомы NCT истинны в $\mathfrak{N}$, следовательно, теорема 3.8.1 доказана полностью.

3.8.12. Примечания.

(1) Разумеется, тот факт, что собственные классы не являются элементами других классов, несколько ограничивает выразительные возможности теории NCT. В частности, в ней не удается в полном объеме формализовать конструкцию нестандартной оболочки внутреннего нормированного пространства E. В самом деле, элементами этой нестандартной оболочки являются классы эквивалентности внешнего подкласса ограниченных элементов E по внешнему отношению бесконечной близости в E. Но поскольку эти классы — внешние, то не существует класса, содержащего их в качестве элементов. Для того же, чтобы рассматривать нестандартную оболочку E как класс, состоящий из представителей указанных классов эквивалентности, нужно добавить к NCT более сильную форму аксиомы выбора, утверждающую, например, возможность такого вполне упорядочения полумножества, при котором каждый *подкласс* этого полумножества имеет наименьший элемент. Такое упорядочение назовем сильно полным. Однако такая аксиома не может быть добавлена к NCT без противоречия (см. [7]).

(2) Можно показать, что класс может быть сильно вполне упорядочен лишь в том случае, если для него существует биекция на полумножество стандартных элементов некоторого стандартного множества (полумножество ограниченных элементов внутреннего нормированного пространства таковым не является).

(3) Класс X имеет *стандартный размер*, если можно подыскать функцию F и класс D такие, что $X = F``{}^{\circ}D$. При этом функцию F можно считать внутренней, а класс D — стандартным. Имеет место следующее утверждение (см. [7]).

Теорема. *На полумножестве X можно задать сильно полный порядок в том и только в том случае, если оно имеет стандартный размер.*

(4) В NCT может быть формализовано и доказано утверждение, равносильное теореме о полноте нестандартной оболочки. Речь идет об утверждении о том, что всякая внешняя, т. е. занумерованная стандартными натуральными числами, S-фундаментальная, последовательность e_n элементов E (т. е. такая последовательность, что $(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon > 0)(\exists^{\mathrm{st}}n_0)(\forall^{\mathrm{st}}m, n > n_0)(\|e_n - e_m\| < \varepsilon)$), имеет S-предел в E (т. е. $(\exists\, e \in E)(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon > 0)(\exists^{\mathrm{st}}n_0)(\forall^{\mathrm{st}}n > n_0)\|e_n - e\| < \varepsilon)$).

Аналогично в рамках NCT могут быть формализованы содержащиеся в главе 7 рассмотрения, связанные с построением топологических групп, как фактор-групп гиперконечных групп по внешнему нормальному делителю.

3.9. Теория относительно стандартных множеств

В этом параграфе мы рассмотрим теорию относительно стандартных множеств в рамках теории внутренних множеств Э. Нельсона.

3.9.1. Наличие актуальных бесконечно малых чисел в нестандартном анализе дает возможность формировать новые (а по существу узаконивает давно отвергнутые) понятия для изучения классических объектов анализа. В частности, интересным приобретением являются новые математические понятия — микропредел конечной последовательности (см. 2.3.4) и микронепрерывность функции в точке (см. 4.4.5). Эти и другие аналогичные понятия позволяют сформулировать нестандартные определения предела (см. 2.3.5), непрерывности (см. 2.3.8, 4.2.7), компактности (см. 4.3.6) и т. д., лежащие в основе большого числа приложений нестандартного анализа.

Однако существенным ограничением является то, что все эти эквивалентные определения имеют дело со стандартными объектами.

Даже если нестандартные методы применяются к изучению стандартного объекта, часто возникают трудности, связанные с указанным ограничением. Рассмотрим два типичных примера.

(1) Обратимся к нестандартному определению того факта, что $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} x_{nm} = a$ для стандартной двойной последовательности $(x_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}}$ и стандартного числа a. Воспользуемся утверждением (см. 2.3.5): *стандартное число $a \in \mathbb{R}$ будет пределом стандартной последовательности (a_n) тогда и только тогда, когда a — микропредел $a[N]$, где N — бесконечно большое натуральное число.* Отсюда получаем эквивалентное условие

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} x_{nm} = a \leftrightarrow (\forall N \approx +\infty)\,(\lim_{m\to+\infty} x_{N,m} \approx a).$$

Однако нельзя применить нестандартное определение предела далее, так как внутренняя последовательность $y_m := {}^*x_{N,m}$ не является стандартной. Аналогичная последовательность возникает и при рассмотрении повторного предела $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, а также при попытке получить нестандартное представление несобственного интеграла (см. утверждение 2.3.6).

(2) Попытаемся теперь дать нестандартное доказательство следующего утверждения:

Равномерный предел последовательности ограниченных равномерно непрерывных функций на равномерном пространстве будет равномерно непрерывной функцией.

Итак, стандартная последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится равномерно к стандартной функции f на множестве X. По тем же соображениям, что и в (1) для бесконечно большого натурального числа N и любого $x \in X$ будет $f_N(x) \approx f(x)$, так как $\sup\{|f_N(x) - f(x)| : x \in X\} \approx 0$. В силу 2.3.12 (ср. 4.4.6 (1)) достаточно показать, что для любых $x', x'' \in X$ верно $x' \approx x'' \to f(x') \approx f(x'')$. Итак, мы имеем $f(x') \approx f_N(x')$ и $f(x'') \approx f_N(x'')$. Однако, несмотря на равномерную непрерывность функции f_N, мы не можем утверждать, что $f_N(x') \approx f_N(x'')$, поскольку нестандартный равномерный критерий непрерывности неприменим к нестандартной функции f_N.

Трудности указанного вида преодолеваются путем введения относительно нестандартных элементов. Неформально говоря, относительно нестандартное множество — нестандартное множество более высокого порядка, чем данное.

3.9.2. Концепцию относительной стандартности мы будем рассматривать в рамках теории внутренних множеств Э. Нельсона.

Обозначим символом $\mathrm{Ffin}(f)$ утверждение: f — функция и каждый элемент из образа $\mathrm{im}(f)$ представляет собой конечное множество, символически:

$$\mathrm{Ffin}(f) := \mathrm{Func}\,(f)\ \wedge\ (\forall x \in \mathrm{im}(f))\ \mathrm{fin}(f(x)).$$

Элемент x назовем *допустимым* (в символах $\mathrm{Su}(x)$), если $(\exists^{\mathrm{st}} X)\ (x \in X)$. Введем определимый в IST предикат $x \,\mathrm{st}\, y$ (читается «x стандартно относительно y» или «x является y-стандартным») формулой:

$$x \,\mathrm{st}\, y := (\exists^{\mathrm{st}} \varphi)(\mathrm{Ffin}(\varphi) \wedge y \in \mathrm{dom}(\varphi) \wedge x \in \varphi(y)).$$

Напомним, что $\mathrm{fin}(x)$ означает лишь то, что мощность x есть элемент ω, т. е. положительное целое число, возможно, и бесконечно большое, если x — нестандартное множество.

3.9.3. Ниже нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Допустим, что $A(x, y)$ — *формула* ZFC, *причем в теории* ZFC *выводима формула* $(\forall x)(\exists!\, y)A(x, y)$. *Тогда в теории* IST *выводима формула* $(\forall^{\mathrm{st}} x)(\forall y)(A(x, y) \to \mathrm{St}(y))$.

$\lhd$ Вытекает непосредственно из принципа переноса. $\rhd$

В дальнейшем мы будем использовать следующие сокращения, аналогичные сокращениям 3.3.4:

$$(\forall^{\mathrm{st}\, y} x)\, \varphi := (\forall\, x)\, (x \text{ стандартно относительно } y \to \varphi);$$
$$(\exists^{\mathrm{st}\, y} x)\, \varphi := (\exists\, x)\, (x \text{ стандартно относительно } y \wedge \varphi);$$
$$(\forall^{\mathrm{st\,fin}\, y} x)\, \varphi := (\forall^{\mathrm{st}\, y} x)\, (x \text{ конечно} \to \varphi);$$
$$(\exists^{\mathrm{st\,fin}\, y} x)\, \varphi := (\exists^{\mathrm{st}\, y} x)\, (x \text{ конечно} \wedge \varphi).$$

3.9.4. *Двуместный предикат $x \,\mathrm{st}\, y$ обладает следующими свойствами:*

(1) $x \,\mathrm{st}\, y \ \to\ \mathrm{Su}(x) \wedge \mathrm{Su}(y)$.

(2) $x \,\mathrm{st}\, y \wedge y \,\mathrm{st}\, z \ \to\ x \,\mathrm{st}\, z$.

(3) $x \,\mathrm{st}\, y \wedge \mathrm{fin}(x) \ \to\ (\forall z \in x)\, z \,\mathrm{st}\, y$.

(4) $\mathrm{Su}(y) \wedge \mathrm{St}(x) \ \to\ x \,\mathrm{st}\, y$.

В последнем утверждении St — это уже знакомый одноместный предикат из IST, выражающий свойство быть «стандартным», см. 3.3.1.

$\lhd$ Утверждение (1) очевидно. Чтобы установить (2), допустим, что $x \in \varphi_1(y)$ и $y \in \varphi_2(z)$, где φ_1 и φ_2 — стандартные функции, причем $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — конечные множества для любого $t \in \mathrm{dom}(\varphi_i)$. Построим функцию h следующим образом:

$$\mathrm{dom}\, h := \mathrm{dom}(\varphi_2),\ h(t) := \{\varphi_1(u) : u \in \varphi_2(t) \cap \mathrm{dom}(\varphi_1)\}\ (t \in \mathrm{dom}(\varphi_2)).$$

Как видно, $h(t)$ конечно для любого $t \in \mathrm{dom}(\varphi_2)$ из-за конечности $\varphi_1(t)$ и $x \in h(z)$. Согласно предложению 3.9.3 h — стандартная функция, что и доказывает (2).

Для обоснования (3) предположим, что ψ — стандартная функция, $\psi(t)$ конечно для каждого $t \in \mathrm{dom}(\psi)$, и возьмем $x \in \psi(y)$. Вновь, опираясь на предложение 3.9.3, построим новую стандартную функцию g следующим образом:

$$g(t) := \{v : v \in \psi(t) \wedge v \text{ конечно}\} \quad (t \in \mathrm{dom}(g) := \mathrm{dom}(\psi)).$$

Ясно, что $z \in g(y)$, и остается заметить, что для любого $t \in \mathrm{dom}(\psi)$ множество $g(t)$ конечно, как конечное объединение конечных множеств.

Наконец, чтобы убедиться в справедливости (4), возьмем стандартное множество X, содержащее y. Существование такого X следует из $\mathrm{Su}(y)$. Определим функцию φ формулой $\varphi(t) := \{x\}$ $(t \in X)$. Эта функция стандартна ввиду стандартности x и $x \in \varphi(y)$. $\rhd$

3.9.5. *Релятивизированный принцип переноса.* *Если A — внутренняя формула, содержащая в качестве свободных переменных только $x, t_1, \dots, t_k$ $(k \geq 1)$, то для любого допустимого τ имеет место формула*

$$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t_k)((\forall^{\mathrm{st}\,\tau} x)\, A(x, t_1, \dots, t_k) \to \\ \to (\forall x)\, A(x, t_1, \dots, t_k)).$$

$\lhd$ Для краткости положим $k = 1$. Нужно доказать справедливость следующего предложения в IST:

$$(\forall \tau)(\mathrm{Su}(\tau) \to (\forall^{\mathrm{st}\tau} t)((\forall^{\mathrm{st}\tau} x)\, A(x, t) \to (\forall x)\, A(x, t))).$$

Поскольку $\neg\,\mathrm{Su}(t) \to \neg(t\,\mathrm{st}\,\tau)$, то ввиду предложения 3.9.4 последняя формула эквивалентна следующей:

$$(\forall\tau)(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t)((\forall^{\mathrm{st}\,\tau} x)\, A(x,t) \to (\forall x)\, A(x,t)).$$

Перепишем эту формулу на языке IST:

$$\begin{gathered}(\forall\tau)(\forall^{\mathrm{st}}\varphi)(\forall t)\,(\tau \in \mathrm{dom}(\varphi) \wedge t \in \varphi(\tau) \to \\ \to ((\forall^{\mathrm{st}}\psi)(\forall x)(\tau \in \mathrm{dom}(\psi) \wedge x \in \psi(\tau) \to A(x,t)) \to \\ \to (\forall y)\, A(y,t))).\end{gathered}$$

Здесь и ниже φ и ψ обозначают функции, значениями которых служат конечные множества, а Φ — какое-нибудь множество таких функций. К полученной формуле применим алгоритм Нельсона 3.3.15. Тогда получим еще одну эквивалентную (в исчислении предикатов) запись

$$\begin{gathered}(\forall^{\mathrm{st}}\varphi)\,(\forall\tau,t)\,(\exists^{\mathrm{st}}\psi)(\tau \in \mathrm{dom}(\varphi) \wedge t \in \varphi(\tau)\wedge \\ \wedge(\forall x)(\tau \in \mathrm{dom}(\psi) \wedge x \in \psi(\tau) \to A(x,t)) \to \\ \to (\forall y)\, A(y,t)).\end{gathered}$$

В силу принципа идеализации последняя эквивалентна формуле

$$\begin{gathered}(\forall^{\mathrm{st}}\varphi)(\exists^{\mathrm{st\ fin}}\Phi)(\forall\tau)\,(\forall t)(\tau \in \mathrm{dom}(\varphi) \wedge t \in \varphi(\tau)\wedge \\ \wedge(\forall\psi \in \Phi)(\forall x)(\tau \in \mathrm{dom}(\psi) \wedge x \in \psi(\tau) \to A(x,t)) \to \\ \to (\forall y)\, A(y,t)).\end{gathered}$$

В соответствии с принципом переноса у первых двух кванторов знак st можно опустить, и мы приходим к тому, что нужно обосновать следующую формулу в теории ZFC:

$$\begin{gathered}(\forall\varphi)(\exists^{\mathrm{fin}}\Phi)(\forall\tau,t)(\tau \in \mathrm{dom}(\varphi) \wedge t \in \varphi(\tau)\wedge \\ \wedge(\forall\psi \in \Phi)(\forall x)(\tau \in \mathrm{dom}(\psi) \wedge x \in \psi(\tau) \to A(x,t)) \to \\ \to (\forall y)\, A(y,t)).\end{gathered}$$

Рассмотрим фиксированную функцию φ и построим одноточечное множество $\Phi = \{\psi\}$, где функция ψ определена следующим образом. Пусть $M := \bigcup \mathrm{im}(\varphi)$ и $M_1 := \{t \in M \,:\, (\exists y)\,\neg A(y,t)\}$. Из аксиом ZFC следует существование такой функции h, что $\mathrm{dom}(h) = M_1$ и верна

$\neg A(h(t), t)$ для всех $t \in \mathrm{dom}(h)$. Положим теперь $\mathrm{dom}(\psi) := \mathrm{dom}(\varphi)$ и $\psi(\alpha) := \{h(\nu) : \nu \in \varphi(\alpha) \cap M_1\}$ $(\alpha \in \mathrm{dom}(\varphi))$. Если $\varphi(\alpha) \cap M_1 = \varnothing$, то полагаем $\psi(\alpha) := \varnothing$. Заметим, что $\psi(\alpha)$ конечно ввиду конечности $\varphi(\alpha)$. Зафиксируем $\tau \in \mathrm{dom}(\varphi)$ и $t \in \varphi(\tau)$. Для обоснования требуемой ZFC-формулы теперь достаточно показать, что верна следующая импликация:

$$(\forall x \in \psi(\tau))\, A(x, t) \to (\forall y)\, A(y, t).$$

Если $t \in M - M_1$, то указанная импликация верна, а если $t \in M_1$, то ее посылка ложна. В самом деле, если $x = h(t)$, то $x \in \psi(\tau)$, ибо $t \in \varphi(\tau) \cap M_1$, но $A(h(t), t)$ ложна. $\triangleright$

3.9.6. *Релятивизированный принцип идеализации.* *Пусть дана некоторая внутренняя формула $B(x, y)$, которая наряду с x и y может содержать еще какие-нибудь свободные переменные. Тогда для любого допустимого τ выполняется*

$$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau\,\mathrm{fin}} z)(\exists x)(\forall y \in z)\, B(x, y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} y)\, B(x, y).$$

$\triangleleft$ Так же, как и в 3.9.5, φ и ψ обозначают функции, значениями которых служат конечные множества, а Φ и Ψ — некоторые множества таких функций. Заметим прежде всего, что сформулированный принцип будет установлен, если доказать импликацию $\to$, так как противоположная импликация следует из 3.9.4 (3). Допустим, что формула B содержит еще одну свободную переменную t. Тогда нужно показать справедливость формулы

$$\begin{gathered}(\forall \tau)(\mathrm{Su}(\tau) \to (\forall t)(\forall^{\mathrm{st}\ \tau\ \mathrm{fin}} x)(\exists y)(\forall z \in x)\, B(z, y, t) \to \\ \to (\exists u)(\forall^{\mathrm{st}\ \tau} v) B(v, u, t))).\end{gathered}$$

Привлекая вновь 3.9.4, замечаем, что эта формула эквивалентна следующей:

$$\begin{gathered}(\forall \tau)(\forall t)((\forall^{\mathrm{st}\ \tau\ \mathrm{fin}} x)(\exists y)(\forall z \in x)\, B(z, y, t) \to \\ \to (\exists u)(\forall^{\mathrm{st}\ \tau} v)\, B(v, u, t)).\end{gathered}$$

Перепишем последнее утверждение в терминах IST, т. е. предикат

$x \operatorname{st} \tau$ заменим на эквивалентный фрагмент текста в языке IST

$$
\begin{aligned}
&(\forall\tau)(\forall t)((\forall^{\mathrm{st}}\varphi)(\forall^{\mathrm{fin}}x)(\tau\in\operatorname{dom}(\varphi)\wedge x\in\varphi(\tau)\to\\
&\qquad\to(\exists y)(\forall z\in x)\,B(z,y,t))\to\\
&\qquad\to(\exists u)(\forall^{\mathrm{st}}\Psi)(\forall v)\bigl(\tau\in\operatorname{dom}(\psi)\wedge v\in\psi(\tau)\to B(v,u,t)))\\
&\qquad\leftrightarrow\\
&(\forall\tau)(\forall t)((\forall^{\mathrm{st}}\varphi)(\forall^{\mathrm{fin}}x)(\tau\in\operatorname{dom}(\varphi)\wedge x\in\varphi(\tau)\to\\
&\qquad\to(\exists y)(\forall z\in x)\,B(z,y,t))\to\\
&\qquad\to(\forall^{\mathrm{st\ fin}}\Psi)(\exists u)(\forall\psi\in\Psi)(\forall v)(\tau\in\operatorname{dom}(\psi)\wedge v\in\psi(\tau)\to\\
&\qquad\to B(v,u,t)))\\
&\qquad\leftrightarrow\\
&(\forall^{\mathrm{st\ fin}}\Psi)(\exists^{\mathrm{st\ fin}}\Phi)(\forall\tau)(\forall t)((\forall\varphi\in\Phi)(\forall^{\mathrm{fin}}x)\\
&\qquad(\tau\in\operatorname{dom}(\varphi)\wedge x\in\varphi(\tau)\to\\
&\qquad\to(\exists y)(\forall z\in x)\,B(z,y,t))\to(\exists u)(\forall\psi\in\Psi)(\forall v)\\
&\qquad(\tau\in\operatorname{dom}(\psi)\wedge v\in\psi(\tau)\to B(v,u,t))).
\end{aligned}
$$

В последней из цепочки эквивалентных формул, как и в доказательстве 3.9.5, можно опустить знак st в первых двух кванторах ввиду принципа переноса, и вновь дело сводится к доказательству полученной ZFC-формулы. Возьмем произвольное конечное множество Ψ функций и определим Φ, полагая $\Phi := \{\varphi\}$, где

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dom}(\varphi) &:= \bigcup_{\psi\in\Psi}\operatorname{dom}(\psi),\\
\varphi(\alpha) &:= \Bigl\{\bigcup\psi(\alpha) : \psi\in\Psi,\ \alpha\in\operatorname{dom}(\psi)\Bigr\}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что $\varphi(\alpha)$ — конечное множество. Фиксируем произвольные τ и t. Если $\tau\notin\operatorname{dom}(\varphi)$, то $\tau\notin\operatorname{dom}(\psi)$ для всех $\psi\in\Psi$, значит, требуемая формула истинна. Если же $\tau\in\operatorname{dom}(\varphi)$, то необходимо обосновать справедливость импликации

$$
\begin{aligned}
&(\exists y)\ \Bigl(\forall z\in\bigcup\{\psi(\tau) : \psi\in\Psi,\ \tau\in\operatorname{dom}(\psi)\}\Bigr)\ B(z,y,t)\to\\
&\to(\exists u)(\forall\psi\in\Psi)(\forall v)(\tau\in\operatorname{dom}(\psi)\wedge v\in\psi(\tau)\to B(v,u,t)).
\end{aligned}
$$

Посылку этой импликации можно преобразовать следующим образом:

$$
\begin{gathered}
(\exists y)\big(\forall z \in \bigcup\{\psi(\tau) : \psi \in \Psi,\ \tau \in \operatorname{dom}(\psi)\}\big)\, B(z, y, t) \\
\leftrightarrow \\
(\exists y)(\forall z)(\exists \psi \in \Psi)(\tau \in \operatorname{dom}(\psi) \wedge z \in \psi(\tau) \to B(z, y, t)) \\
\leftrightarrow \\
(\exists y)(\forall z)(\forall \psi \in \Psi)(\tau \in \operatorname{dom}(\psi) \wedge z \in \psi(\tau) \to B(z, y, t)).
\end{gathered}
$$

Теперь очевидно, что в указанной импликации посылка равносильна заключению. $\triangleright$

3.9.7. Отметим несколько простых следствий из уже установленных принципов 3.9.5 и 3.9.6.

(1) *Пусть выполнены условия предложения* 3.9.3, x — *некоторый τ-стандартный элемент и y удовлетворяет $A(x, y)$. Тогда y также τ-стандартный элемент.*

$\triangleleft$ Следует непосредственно из релятивизированного принципа переноса. $\triangleright$

(2) *Для того чтобы τ-стандартное множество x было конечным, необходимо и достаточно, чтобы x состояло из τ-стандартных элементов.*

$\triangleleft$ Импликация $\to$ совпадает с 3.9.4 (3). Докажем обратную импликацию. Для этого запишем заключение нашего утверждения в виде $(\forall u \in x)\,(\exists^{\mathrm{st}\ \tau} v)\,(u = v)$. Применив релятивизированный принцип идеализации, это предложение можно переписать в следующей эквивалентной форме: $(\exists^{\mathrm{st}\ \tau\ \mathrm{fin}} V)(\forall u \in x)(\exists v \in V)(u = v)$, которая означает, что $x \subset V$ и x конечно, поскольку таково множество V. $\triangleright$

(3) $\operatorname{fin}(x) \to |x| \operatorname{st} \tau$.

$\triangleleft$ Следует непосредственно из (1). $\triangleright$

3.9.8. Покажем, что для принципа стандартизации нельзя установить результат, аналогичный 3.9.5 и 3.9.6. Осуждаемый *релятивизированный принцип стандартизации* запишем в виде

(1) $(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} x)(\exists^{\mathrm{st}\,\tau} y)(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} z)(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge C(z))$,

где $C(z)$ — формула IST, содержащая, быть может, свободные переменные, отличные от z. Будет установлено, что 3.9.8 (1) приводит к противоречию, даже если формула $C(z)$ удовлетворяет следующему дополнительному требованию: каждое вхождение предиката st в $C(z)$ имеет вид $\cdot\,\mathrm{st}\,\tau$, а одноместный предикат $\mathrm{st}(x)$ не входит в $C(z)$.

Дело в том, что существование стандартной части ${}^\circ t$ для каждого доступного гипердействительного числа $t \in \mathbb{R}$ следует в IST из принципа стандартизации, см. 2.2.16. Рассуждения, приводящие к этому результату, можно повторить и для τ-стандартной части, если имеет место 3.9.8 (1). Пусть τ — произвольное допустимое внутреннее множество. Число $x \in \mathbb{R}$ назовем *τ-бесконечно малым* и напишем $x \overset{\tau}{\approx} 0$, если $|x| \leq \varepsilon$ для любого τ-стандартного $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Итак, из 3.9.8 (1) с формулой $C(z)$, удовлетворяющей указанному выше ограничению, вытекает справедливость предложения

$$(\forall \tau)\,(\forall t \in \mathbb{R})((\exists^{\mathrm{st}\ \tau} u \in \mathbb{R})(|t| < u) \to (\exists^{\mathrm{st}\ \tau} v \in \mathbb{R})(|t - v| \overset{\tau}{\approx} 0)).$$

Тот факт, что 3.9.8 (1) ложно, вытекает теперь из следующего ниже предложения.

3.9.9. *Существуют бесконечно большое натуральное число N и $x \in [0,1]$ такие, что если y является N-бесконечно близким к x, то y не будет N-стандартным.*

$\lhd$ Доказательство будет приведено ниже в 4.6.15. $\rhd$

3.9.10. В заключение этого параграфа мы представим вкратце аксиоматическую теорию RIST относительно внутренних множеств. Язык этой теории получается из языка теории Цермело — Френкеля добавлением одного двуместного предиката st. Как и выше, выражение $x\,\mathrm{st}\,y$ читается как «x стандартно относительно y». Формула теории RIST внутренняя, если она не содержит предиката st. Так же, как и в 3.9.3 определяются внешние кванторы $\forall^{\mathrm{st}\,\alpha}$, $\exists^{\mathrm{st}\,\alpha}$, $\forall^{\mathrm{st\,fin}\,\alpha}$, $\exists^{\mathrm{st\,fin}\,\alpha}$.

Аксиомы RIST включают все аксиомы теории Цермело — Френкеля. Предикат st удовлетворяет следующим трем аксиомам:

(1) $(\forall x)\, x\,\mathrm{st}\,x$;

(2) $(\forall x)(\forall y)\, x\,\mathrm{st}\,y \vee y\,\mathrm{st}\,x$;

(3) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\,\mathrm{st}\,y \wedge y\,\mathrm{st}\,z \to x\,\mathrm{st}\,z)$.

Кроме того, теория RIST (как и IST) включает три новые схемы. Схемы аксиом переноса и идеализации те же, что и в 3.9.5 и 3.9.6, а в схеме аксиом стандартизации необходимо ограничить класс формул в соответствии с замечанием 3.9.8.

3.9.11. ***Схема аксиом переноса.*** Если $\varphi(x, t_1, \ldots, t_k)$ — внутренняя формула со свободными переменными $x, t_1, \ldots, t_k$ и τ — фиксированное множество, то

$$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t_1) \ldots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t_k) \bigl((\forall^{\mathrm{st}\,\tau} x)\, \varphi(x, t_1, \ldots, t_k) \to (\forall x)\, \varphi(x, t_1, \ldots, t_k)\bigr).$$

3.9.12. ***Схема аксиом идеализации.*** Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$ — внутренняя формула со свободными переменными $x_1, \ldots, x_k, y$, причем, возможно, есть и другие свободные переменные. Пусть, далее, $\tau_1, \ldots, \tau_k$ — фиксированные множества и β не является стандартным относительно $(\tau_1, \ldots, \tau_k)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) Принцип ограниченной идеализации:
$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau_1\,\mathrm{fin}} z_1) \ldots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau_k\,\mathrm{fin}} z_k)$
$(\exists^{\mathrm{st}\,\beta} y)(\forall x_1 \in z_1) \ldots (\forall x_k \in z_k)\, \varphi(x_1, \ldots, x_k, y) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}\,\beta} y)(\forall^{\mathrm{st}\,\tau_1} x_1) \ldots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau_k} x_k)\, \varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$.

(2) Принцип неограниченной идеализации:
$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau\,\mathrm{fin}} z_1) \ldots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau\,\mathrm{fin}} z_k)$
$(\exists y)(\forall x_1 \in z_1) \ldots (\forall x_k \in z_k)\, \varphi(x_1, \ldots, x_k, y) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists y)(\forall^{\mathrm{st}\,\tau_1} x_1) \ldots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau_k} x_k)\, \varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$.

3.9.13. Для формулировки схемы аксиом стандартизации введем класс τ-внешних формул $\mathscr{F}_\tau$, где τ — фиксированное множество. Если $\mathscr{F}$ — класс формул теории RIST, то $\mathscr{F}_\tau$ определяют как наименьший его подкласс, удовлетворяющий следующим условиям:

(1) атомарная формула $x \in y$, где x и y — переменные или константы, входит в $\mathscr{F}_\tau$;

(2) если формулы φ и ψ входят в $\mathscr{F}_\tau$, то и формулы $\neg\varphi$ и $\varphi \to \psi$ входят в $\mathscr{F}_\tau$;

(3) если формула $\varphi(x, y)$ входит в $\mathscr{F}_\tau$, то в $\mathscr{F}_\tau$ входит и формула $(\exists y)\, \varphi(x, y)$;

(4) если формула $\varphi(x, y)$ входит в $\mathscr{F}_\tau$, а β — такое множество, что множество τ стандартно относительно β, то и формула $(\exists^{\mathrm{st}\,\beta} y)\, \varphi(x, y)$ входит в $\mathscr{F}_\tau$.

3.9.14. ***Схема аксиом стандартизации.*** *Если τ — фиксированное множество и φ — некоторая τ-внешняя формула, то*

$$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} y)(\exists^{\mathrm{st}\,\tau} z)(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t)(t \in z \leftrightarrow (t \in y \wedge \varphi(t))).$$

3.9.15. ***Теорема.*** *Теория* RIST *является консервативным расширением теории* ZFC.

3.9.16. Примечания.

(1) Материал, вошедший в пункты 3.9.2–3.9.9, взят из статьи Е. И. Гордона [44], см. также [325]. Так как принцип стандартизации не имеет места, то, в частности, можно сделать вывод, что принцип стандартизации теории IST не является следствием остальных аксиом этой теории (подробности см. в [44, 325]).

(2) Определения и основные свойства относительно стандартных элементов получены в рамках теории внутренних множеств IST, однако все эти результаты имеют место и в любом нестандартном универсуме, удовлетворяющем принципу Нельсона. При этом, разумеется, необходимо иметь в виду особенности классической установки нестандартного анализа 3.5.2–3.5.12.

(3) Аксиоматическая теория RIST, изложенная в 3.9.10–3.9.14, была предложена И. Пэрером [450]. Там же установлена теорема 3.9.15. Ранее И. Пэрер осуществил (непротиворечивое относительно ZFC) расширение теории IST посредством добавления последовательности не определимых в IST предикатов $\mathrm{St}_p(x)$, т. е. x стандартно степени $1/p$, см. [449]. Другие результаты в этом направлении см. в [190, 451].

(4) В [44, 325] рассмотрен также более простой вариант понятия относительной стандартности. Именно, вводится отношение x *сильно стандартен относительно* τ или x *сильно* τ*-стандартен* формулой

$$x \,\mathrm{sst}\, \tau := (\exists^{\mathrm{st}} \varphi)\,(\mathrm{Fnc}\,(\varphi) \wedge \tau \in \mathrm{dom}(\varphi) \wedge x = \varphi(\tau)).$$

Ясно, что $x \,\mathrm{sst}\, y \to x \,\mathrm{st}\, y$. Обратное в общем случае неверно, см. [325].

(5) Утверждения 3.9.4 $(1, 2, 4)$ и релятивизированный принцип переноса остаются в силе, если заменить в них все вхождения предиката $\cdot\,\mathrm{st}\,\cdot$ на $\cdot\,\mathrm{sst}\,\cdot$. В релятивизированном принципе идеализации сохраняется лишь импликация $\to$.

(6) Имеет место следующая формула (см. [325]):

$$(\exists N \in \omega)\,(\exists n < N)\,(\neg n \,\mathrm{sst}\, N).$$

$\lhd$ Достаточно доказать, что в IST ложно предложение

$$(\forall N \in \omega)\,(\forall n < N)(\exists^{\mathrm{st}} \varphi \in \omega^{\omega})(n = \varphi(N)).$$

Применив к нему принципы идеализации и переноса, получаем внутреннее предложение

$$(\exists \Phi \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\omega))(\forall n, N \in \omega)(n < N \to (\exists \varphi \in \Phi)(n = \varphi(N))).$$

Покажем, что отрицание последнего предложения истинно в теории ZFC.

В самом деле, пусть $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ — произвольное конечное множество функций $\varphi_l : \omega \to \omega$. Выберем $N > k$. Тогда, очевидно, имеется $n \in \{0, 1, \dots, N-1\} - \{\varphi_1(N), \dots, \varphi_k(N)\}$. Пара чисел n, N удовлетворяет формуле $n < N \wedge (\forall \varphi \in \Phi)\,(n \neq \varphi(N))$, что и требовалось. $\triangleright$

(7) Из (6) можно вывести, что 3.9.4 (3) (как и импликация $\leftarrow$ в релятивизированном принципе идеализации) не имеет места для предиката sst. В самом деле, конечное множество $\{0, 1, \dots, N-1\}$ стандартно относительно N (в смысле нового определения относительной стандартности). Однако можно указать такое N, при котором некоторый элемент $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ не будет стандартным относительно N в смысле нового определения. Отсюда вытекает ложность 3.9.4 (3).

(8) Относительно современного состояния аксиоматики нестандартного анализа см. капитальную монографию В. Кановея и М. Рикена [372].

Глава 4

Монады в общей топологии

В рамках теоретико-множественной установки математики в начале XX века был выработан универсальный подход к изучению структуры непрерывности и близости, получивший оформление в общей топологии.

Рассматривая микроструктуру числовой прямой, мы уже увидели, что с позиций нестандартного анализа набор актуальных бесконечно малых возникает как монада — как внешнее пересечение стандартных элементов фильтра окрестностей нуля единственной отделимой топологии, согласованной со стандартной алгебраической структурой поля вещественных чисел. Можно сказать, что в понятии монады фильтра фактически осуществляется определенный синтез общетопологических и инфинитезимальных идей. Соответствующие связи станут основным предметом исследования в настоящей главе.

Мы сосредоточимся на уже наиболее разработанных способах изучения классических топологических концепций и конструкций, группирующихся вокруг компактности, с помощью идеализации, допускаемой в нестандартной теории множеств.

Вклад нового подхода в эту проблематику связан, главным образом, с выработкой принципиально важного понятия околостандартной точки. Соответствующий критерий компактности стандартного пространства — околостандартность каждой его точки — показывает значение и смысл концепции околостандартности, осуществляющей известную индивидуализацию для точек общепринятого понятия компактности, относящегося к множествам.

Подобного рода приемы индивидуализации составляют заметную и характерную часть арсенала нестандартных методов анализа.

4.1. Монады и фильтры

Простейшим примером фильтра служит, как известно, совокупность надмножеств некоторого непустого множества. Нестандартный анализ позволяет подобным же образом изучать произвольный стандартный фильтр как стандартизацию фильтра внешних надмножеств подходящим образом задаваемого внешнего множества — монады этого фильтра. Способ введения таких монад и их простейшие свойства рассматриваются в текущем параграфе.

4.1.1. Пусть X — стандартное множество и $\mathscr{B}$ — стандартный базис фильтра в X. Таким образом, $\mathscr{B} \neq \varnothing$, $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$, $\varnothing \notin \mathscr{B}$ и B_1, $B_2 \in \mathscr{B} \to (\exists\, B \in \mathscr{B})(B \subset B_1 \cap B_2)$. Символом $\mu(\mathscr{B})$ обозначают *монаду* $\mathscr{B}$, т. е. внешнее множество, определенное соотношением

$$\mu(\mathscr{B}) := \bigcap\{B : B \in {}^{\circ}\mathscr{B}\}.$$

4.1.2. *Внутреннее множество является надмножеством некоторого стандартного элемента стандартного базиса фильтра $\mathscr{B}$ в том и только в том случае, если оно содержит монаду $\mu(\mathscr{B})$.*

$\lhd$ Если $A \supset B$ и $B \in {}^{\circ}\mathscr{B}$, то $A \supset \mu(\mathscr{B})$ по определению. Если, наоборот, $A \supset \mu(\mathscr{B})$, то, учитывая, что по принципу идеализации имеется внутреннее множество $B \in \mathscr{B}$, для которого $B \subset \mu(\mathscr{B})$, выводим: $A \supset B$. $\rhd$

4.1.3. *Каждый стандартный фильтр $\mathscr{F}$ является стандартизацией внешнего главного фильтра надмножеств монады $\mu(\mathscr{F})$.*

$\lhd$ В символах требуется установить

$$(\forall^{\mathrm{st}} A)((A \in \mathscr{F}) \leftrightarrow (A \supset \mu(\mathscr{F}))).$$

Последнее соотношение, очевидно, содержится в 4.1.2. $\rhd$

4.1.4. *Монада фильтра $\mathscr{F}$ является внутренним множеством в том и только в том случае, если она стандартна. При этом исходный стандартный $\mathscr{F}$ есть фильтр надмножеств $\mu(\mathscr{F})$.*

$\triangleleft$ Если $\mu(\mathscr{F})$ — внутреннее множество, то с учетом 4.1.3 и принципа идеализации имеем

$$(\exists\, A)(\forall^{\mathrm{st}} F)(F \in \mathscr{F} \leftrightarrow F \supset A) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{U})(\exists\, A)$$
$$(\forall\, F \in \mathscr{U})(F \in \mathscr{F} \leftrightarrow F \supset A) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} U)\ (\exists\, A)(U \in \mathscr{F} \leftrightarrow U \supset A).$$

Привлекая принцип переноса, выводим, что $\mathscr{F}$ — фильтр надмножеств некоторого множества A. Поскольку такое множество A единственно, $A = \mu(\mathscr{F})$ и при этом A стандартно. $\triangleright$

4.1.5. Для стандартного базиса фильтра $\mathscr{B}$ элементы из $\mu(\mathscr{B})$ называют *бесконечно малыми* или *удаленными* (относительно $\mathscr{B}$). Аналогично, элемент $B \in \mathscr{B}$ такой, что $B \subset \mu(\mathscr{B})$, также называют бесконечно малым или удаленным. Совокупность всех бесконечно удаленных множеств из $\mathscr{B}$ обозначают ${}^{a}\mathscr{B}$.

4.1.6. Примеры.

(1) Монада $\mu(\mathbb{R})$ представляет собой монаду фильтра окрестностей нуля обычной топологии на $\mathbb{R}$.

(2) Пусть $\mathscr{B}$ — базис фильтра и $\operatorname{fil}\mathscr{B}$ — фильтр, порожденный $\mathscr{B}$, т. е. совокупность надмножеств элементов из $\mathscr{B}$. Символически:

$$\operatorname{fil}\mathscr{B} := \{F \subset X : (\exists\, B \in \mathscr{B})(B \subset F)\}.$$

По принципу переноса если $\mathscr{B}$ — стандартный базис фильтра (в стандартном множестве X), то $\operatorname{fil}\mathscr{B}$ — стандартный фильтр. При этом $\mu(\mathscr{B}) = \mu(\operatorname{fil}\mathscr{B})$. Отметим, что в дальнейшем бывает удобным рассматривать монаду произвольного внутреннего фильтра $\mathscr{F}$. Ее определяют очевидным образом: $\mu(\mathscr{F}) := \bigcap {}^{\circ}\mathscr{F}$. Подчеркнем, что монада фильтра $\mathscr{F}$ в стандартном множестве X обязательно является внешним надмножеством некоторого внутреннего элемента $\mathscr{F}$.

(3) Пусть Ξ — стандартное направление, т. е. непустое направленное множество. В силу принципа идеализации в Ξ имеются внутренние элементы, мажорирующие все стандартные точки Ξ. Такие элементы Ξ называют *бесконечно большими, недоступными* или *удаленными* в Ξ. Рассмотрим стандартный базис фильтра хвостов $\mathscr{B} := \{[\xi, \to) := \{\eta \in \Xi : \eta \geq \xi\} : \xi \in \Xi\}$.

По определению $\eta \in \mu(\mathscr{B}) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \Xi)\, \eta \geq \xi$, т. е. монада фильтра хвостов, как и следовало ожидать, составлена из удаленных элементов рассматриваемого направления. Используем обозначение ${}^{a}\Xi := \mu(\mathscr{B})$.

(4) Пусть $\mathscr{E}$ — некоторое стандартное покрытие стандартного множества X, т. е. $X \subset \bigcup \mathscr{E}$. Рассмотрим совокупность $\Xi(\mathscr{E})$ стандартных конечных объединений элементов $\mathscr{E}$. Таким образом, $\Xi(\mathscr{E}) := {}^*\{\cup \mathscr{E}_0 : \mathscr{E}_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{st\,fin}}(\mathscr{E})\}$, где $\mathscr{P}_{\mathrm{st\,fin}}(\mathscr{E})$ — множество стандартных конечных подмножеств $\mathscr{E}$. Внешнее объединение бесконечно удаленных элементов $\Xi(\mathscr{E})$ называют *монадой* $\mathscr{E}$ и обозначают $\mu(\mathscr{E})$. Итак,

$$\mu(\mathscr{E}) = \bigcup\{E : E \in {}^{\circ}\mathscr{E}\}.$$

Аналогично определяют монаду любого фильтрованного по возрастанию семейства множеств.

(5) Пусть $f \subset X \times Y$ и $\mathscr{F}$ — (базис) фильтра в X, причем f задевает $\mathscr{F}$, т. е. $(\forall\, F \in \mathscr{F})\ \mathrm{dom}(f) \cap F \neq \varnothing$. Положим, как это принято,

$$f(\mathscr{F}) := \{B \subset Y : (\exists\, F \in \mathscr{F})(B \supset f(F))\}.$$

Таким образом, $f(\mathscr{F})$ — фильтр в Y — образ $\mathscr{F}$ при соответствии f. Принимая гипотезу *стандартности антуража*, т. е., считая X, Y, f, $\mathscr{F}$ стандартными объектами, с учетом принципа идеализации имеем

$$\begin{gathered}
y \in \mu(f(\mathscr{F})) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} B \in f(\mathscr{F}))(y \in B) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(y \in f(F)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\exists\, x)(x \in F \wedge y \in f(x)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists\, x)(\forall\, F \in \mathscr{F}_0)(x \in F \wedge y \in f(x)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists\, x)\ (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(x \in F \wedge y \in f(x)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))(y \in f(x)) \leftrightarrow (y \in f(\mu(\mathscr{F}))).
\end{gathered}$$

Итак, *образ монады фильтра — есть монада образа этого фильтра*:

$$\mu(f(\mathscr{F})) = f(\mu(\mathscr{F})).$$

Пусть теперь $\mathscr{G}$ — базис фильтра в Y, причем f^{-1} задевает $\mathscr{G}$. Рассмотрим прообраз $f^{-1}(\mathscr{G})$ фильтра $\mathscr{G}$ при соответствии f (т. е. образ этого фильтра при соответствии f^{-1}). Ясно, что в силу уже доказанного $\mu(f^{-1}(\mathscr{G})) = f^{-1}(\mu(\mathscr{G}))$. Полезно подчеркнуть, что последнее соотношение может быть доказано без использования «насыщения». В самом деле, прямо по определению выводим

$$\mu(f^{-1}(\mathscr{G})) = \bigcap_{G \in {}^\circ\mathscr{G}} f^{-1}(G) = f^{-1}\Big(\bigcap_{G \in {}^\circ\mathscr{G}} G\Big) = f^{-1}(\mu(\mathscr{G})),$$

т. е. монада прообраза фильтра есть прообраз монады исходного фильтра. Стоит подчеркнуть, что при выводе этого положения мы пользовались тем, что соответствие f позволяет определять и внешние прообразы внешних подмножеств Y.

4.1.7. *Пусть $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ — два стандартных базиса фильтра в некотором стандартном множестве. Тогда*

$$\operatorname{fil}\mathscr{B}_1 \supset \operatorname{fil}\mathscr{B}_2 \leftrightarrow \mu(\mathscr{B}_1) \subset \mu(\mathscr{B}_2).$$

$\lhd$ $\rightarrow$: Если B_2 стандартно и $B_2 \supset \mu(\mathscr{B}_2)$, то на основании 4.1.2 $B_2 \in \operatorname{fil}\mathscr{B}_2$ и, стало быть, $B_2 \in \operatorname{fil}\mathscr{B}_1$. Отсюда $B_2 \supset \mu(\mathscr{B}_1)$. Следовательно, $\mu(\mathscr{B}_1) \subset \mu(\mathscr{B}_2)$.

$\leftarrow$: Пусть F_2 — стандартный элемент $\operatorname{fil}\mathscr{B}_2$, т. е. надмножество некоторого стандартного $B_2 \in \mathscr{B}_2$. По условию B_2 содержит монаду $\mu(\mathscr{B}_1)$. Значит, в силу 4.1.2 $B_2 \in \operatorname{fil}\mathscr{B}_1$. Поэтому и $F_2 \in \operatorname{fil}\mathscr{B}_1$. Остается сослаться на принцип переноса. $\rhd$

4.1.8. *Пусть $f : X \to Y$ и $\mathscr{A}$ — базис фильтра в X, а $\mathscr{B}$ — базис фильтра в Y. В случае стандартных параметров следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $f(\mathscr{A}) \supset \operatorname{fil}\mathscr{B}$;

(2) $f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \operatorname{fil}\mathscr{A}$;

(3) $\mu(f(\mathscr{A})) \subset \mu(\mathscr{B})$;

(4) $f(\mu(\mathscr{A})) \subset \mu(\mathscr{B})$.

$\lhd$ Эквивалентность (1) $\leftrightarrow$ (2) видна из выкладки:

$$f(\mathscr{A}) \supset \operatorname{fil}\mathscr{B} \leftrightarrow (\forall\, B \in \mathscr{B})(\exists\, A \in \mathscr{A})(f(A) \subset B) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, B \in \mathscr{B})(\exists\, A \in \mathscr{A})(A \subset f^{-1}(B)) \leftrightarrow (f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \operatorname{fil}\mathscr{A}).$$

Равносильность (1) и (3) обеспечена 4.1.7. Для завершения доказательства следует заметить, что с учетом 4.1.6 (5) будет

$$f(\mu(\mathscr{A})) \subset \mu(\mathscr{B}) \leftrightarrow \mu(\mathscr{A}) \subset f^{-1}(\mu(\mathscr{B})) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \mu(\mathscr{A}) \subset \mu(f^{-1}(\mathscr{B})) \leftrightarrow f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \operatorname{fil}\mathscr{A}.$$

Предложение доказано. $\rhd$

4.1.9. В классической установке в формулировке 4.1.8 можно добиться сокращения. Именно, слова «в случае стандартных параметров» можно опустить, записав 4.1.8 (4) в форме $*f(\mu(\mathscr{A})) \subset \mu(\mathscr{B})$, где $*$ — робинсоновская стандартизация. Обычно молчаливо предполагают $f := *f$, что приводит к наиболее образной и легко запоминаемой формулировке. Той же формулировкой часто пользуются и в рамках неоклассической и радикальной установок. Иначе говоря, если нестандартный анализ применяется в качестве техники исследования универсума фон Неймана, «названные» параметры без специальных указаний считают стандартными множествами, а термин «внутреннее множество» заменяют более привычным: «множество». Понятно, что это удобное соглашение полностью коррелирует с качественными представлениями о стандартных объектах. В дальнейшем мы также будем стоять на свободной точке зрения, опуская по мере возможности указания на тип возникающих множеств в случаях, когда это не должно приводить к сколь-либо серьезным недоразумениям.

4.1.10. *Справедливы утверждения:*

(1) *фильтры $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ имеют точную верхнюю границу в том и только в том случае, если $\mu(\mathscr{F}_1) \cap \mu(\mathscr{F}_2) \neq \varnothing$;*

(2) *для любого ограниченного сверху множества фильтров $\mathscr{E}$ выполнено*

$$\mu(\sup \mathscr{E}) = \bigcap \{\mu(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in {}^{\circ}\mathscr{E}\},$$

т. е. монада пересечения фильтров есть пересечение монад.

$\lhd$ Утверждение (1) мгновенно вытекает из 4.1.7.

Для доказательства (2) заметим сначала, что при $\mathscr{F} \in {}^{\circ}\mathscr{E}$ верно $\mathscr{F} \le \sup \mathscr{E}$ и, стало быть, $\mu(\sup \mathscr{E}) \subset \mu(\mathscr{F})$. Это обеспечивает включение $\mu(\sup \mathscr{E}) \subset \bigcap\{\mu(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in {}^{\circ}\mathscr{E}\}$. Пусть теперь $F \in {}^{\circ}\sup \mathscr{E}$. В силу свойств фильтров найдется стандартное конечное множество $\mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}$ такое, что $F \in \sup \mathscr{E}_0$. На основании 4.1.3 с учетом (1) выводим $F \supset \mu(\sup \mathscr{E}_0) = \bigcap\{\mu(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in \mathscr{E}_0\}$. Заключаем:

$$\mu(\sup \mathscr{E}) \supset \bigcap \{\mu(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in \mathscr{E}_0,\ \mathscr{E}_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{st\,fin}}(\mathscr{E})\} = \bigcap \{\mu(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in {}^{\circ}\mathscr{E}\},$$

что и требовалось. $\rhd$

4.1.11. *Пусть $\mathscr{A}$ — некоторый ультрафильтр, т. е. максимальный по включению элемент множества фильтров $\mathscr{F}(X)$ рассматриваемого множества X, и $\mathscr{F}$ — фильтр: $\mathscr{F} \in \mathscr{F}(X)$. Тогда либо $\mu(\mathscr{A}) \cap \mu(\mathscr{F}) = \varnothing$, либо $\mu(\mathscr{A}) \subset \mu(\mathscr{F})$.*

$\triangleleft$ Если $\mu(\mathscr{A}) \cap \mu(\mathscr{F}) \neq \varnothing$, то на основании 4.1.10 (1) имеется верхняя грань $\mathscr{A} \vee \mathscr{F} = \mathscr{A}$. Следовательно, $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ и по 4.1.7 верно $\mu(\mathscr{A}) \subset \mu(\mathscr{F})$. $\triangleright$

4.1.12. *Нестандартный критерий для ультрафильтра.* *Фильтр $\mathscr{F}$ в X является ультрафильтром в том и только в том случае, если монаду $\mathscr{F}$ легко поймать, т. е. для всяких стандартных подмножеств A и B в X таких, что $A \cup B = X$, будет $\mu(\mathscr{F}) \subset A$ или $\mu(\mathscr{F}) \subset B$.*

$\triangleleft$ $\rightarrow$: Раз $\mu(\mathscr{F}) \subset A \cup B$, то можно считать, что $\mu(\mathscr{F}) \cap A \neq \varnothing$. Так как $A = \mu(\{\operatorname{fil} \mathscr{A}\})$, то в силу 4.1.11 $\mu(\mathscr{F}) \subset A$.

$\leftarrow$: Пусть $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}$. Тогда по 4.1.7 $\mu(\mathscr{G}) \subset \mu(\mathscr{F})$. Если A стандартно и $A \supset \mu(\mathscr{G})$, то либо $A \supset \mu(\mathscr{F})$, либо $A' := X - A \supset \mu(\mathscr{F})$ по условию. Случай $A' \supset \mu(\mathscr{F})$ исключен, так как было бы, что $\mu(\mathscr{F}) \cap \mu(\mathscr{G}) \subset A \cap A' = \varnothing$. Значит, $A \supset \mu(\mathscr{F})$, т. е. $A \in \mathscr{F}$ по 4.1.2. Итак, для всякого стандартного $A \in \mathscr{G}$ верно, что $A \in \mathscr{F}$. По принципу переноса $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$, т. е. $\mathscr{F}$ — ультрафильтр. $\triangleright$

4.1.13. *Стандартный критерий ультрафильтра.* *Фильтр $\mathscr{F}$ является ультрафильтром в том и только в том случае, если $A \cup B \in \mathscr{F} \rightarrow A \in \mathscr{F} \vee B \in \mathscr{F}$.*

$\triangleleft$ $\rightarrow$: Если $A \cup B \in \mathscr{F}$, то монада поймана; $\mu(\mathscr{F}) \subset A \cup B$. Если $\mu(\mathscr{F}) \cap A \neq \varnothing$, то $\mu(\mathscr{F}) \subset A$ и $A \in \mathscr{F}$. Если же $\mu(\mathscr{F}) \cap B \neq \varnothing$, то $\mu(\mathscr{F}) \subset B$ и $B \in \mathscr{F}$.

$\leftarrow$: Пусть $A \cup B = X$. Если $A \in \mathscr{F}$, то $A \supset \mu(\mathscr{F})$. Если же $B \in \mathscr{F}$, то $B \supset \mu(\mathscr{F})$, т. е. монада легко ловится. $\triangleright$

4.1.14. *Каждый предел фильтра — это точка его прикосновения. Точки прикосновения ультрафильтра — это его пределы.*

$\triangleleft$ Достаточно работать в стандартном антураже. Ясно, что $\mathscr{F} \rightarrow x \leftrightarrow \mu(\mathscr{F}) \subset \mu(x) := \mu(\tau(x))$. Помимо этого, $x \in \operatorname{cl}(\mathscr{F}) := \bigcap\{\operatorname{cl}(F) : F \in \mathscr{F}\} \leftrightarrow (\forall F \in \mathscr{F})(\forall U \in \tau(x))(U \cap F \neq \varnothing) \leftrightarrow (\mu(\mathscr{F}) \cap \mu(x) \neq \varnothing)$ в силу 4.1.10 (1). Тем самым первая часть утверждения доказана. Если же теперь $\mathscr{F}$ — ультрафильтр и $x \in \operatorname{cl}(\mathscr{F})$, то

$\mu(\mathscr{F}) \cap \mu(x) \neq \varnothing$. На основании альтернативы, описанной в 4.1.11, выводим $\mu(\mathscr{F}) \subset \mu(x)$, т. е. $\mathscr{F} \to x$. $\triangleright$

4.1.15. *Пусть $\mathscr{E}$ — некоторое покрытие X. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *найдется стандартное конечное подпокрытие $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$, т. е. такое $\mathscr{E}_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{st\,fin}}(\mathscr{E})$, что $X \subset \cup\mathscr{E}_0$;*

(2) *монада $\mu(\mathscr{E})$ совпадает с X;*

(3) *монада $\mu(\mathscr{E})$ — стандартное множество;*

(4) *монада $\mu(\mathscr{E})$ — внутреннее множество;*

(5) *для каждого стандартного ультрафильтра $\mathscr{F}$ в множестве X найдется $E \in \mathscr{E}$, лежащее в $\mathscr{F}$.*

$\triangleleft$ Импликации (1) $\to$ (2) $\to$ (3) $\to$ (4) очевидны. Если $\mu(\mathscr{E})$ — внутреннее множество, то с учетом 4.1.6 (4) и 4.1.4 выводим, что $\mu(\mathscr{E})$ стандартно, т. е. найдется стандартное конечное $\mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}$ такое, что $\mu(\mathscr{E}) = \cup\mathscr{E}_0 \supset X$. Значит, (4) $\to$ (1). Импликация (1) $\to$ (5) очевидна. Для доказательства (5) $\to$ (1) допустим, что вопреки утверждаемому $(\forall^{\mathrm{st\,fin}}\mathscr{E}_0) \cup \mathscr{E}_0 \notin X$. Рассмотрим $\mathscr{E}' := \{E' := X - E : E \in \mathscr{E}\}$. Ясно, что семейство $\mathscr{E}'$ можно считать порождающим базис фильтра в X. Пусть $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, содержащий этот базис. Тогда имеется $E \in \mathscr{E}$, такое что $E \in \mathscr{F}$. Кроме того, по построению $E' \in \mathscr{F}$. Получается противоречие. $\triangleright$

4.1.16. В заключение текущего параграфа приведем полезные признаки, основанные на «технике внутренних множеств».

4.1.17. *Принцип Коши.* *Пусть $\mathscr{F}$ — стандартный фильтр в некотором стандартном множестве. Пусть, далее, $\varphi := \varphi(x)$ — некоторое внутреннее свойство (т. е. $\varphi = \varphi^I$ для некоторой теоретико-множественной формулы φ). Если для каждого удаленного элемента x верно $\varphi(x)$, то имеется стандартное множество $F \in \mathscr{F}$ такое, что $(\forall\, x \in F)\, \varphi(x)$.*

$\triangleleft$ Найдется внутреннее множество F с требуемым свойством (таков любой удаленный элемент фильтра $\mathscr{F}$). Значит, по принципу переноса существует искомое стандартное F. $\triangleright$

4.1.18. *Принцип заданного горизонта.* *Пусть X и Y — некоторые стандартные множества, $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — стандартные фильтры в X и Y соответственно, причем $\mu(\mathscr{F}) \cap {}^{\circ}X \neq \varnothing$. Фиксируем какое-нибудь удаленное множество — «горизонт» — F из ${}^{a}\mathscr{F}$. Для стан-*

дартного соответствия $f \subset X \times Y$, задевающего $\mathscr{F}$, эквивалентны утверждения:

(1) $f(\mu(\mathscr{F}) - F) \subset \mu(\mathscr{G})$;

(2) $(\forall\, F' \in {}^a\mathscr{F})\ f(F' - F) \subset \mu(\mathscr{G})$;

(3) $f(\mu(\mathscr{F})) \subset \mu(\mathscr{G})$.

$\lhd$ Ясно, что (3) $\to$ (1) $\to$ (2). Стало быть, следует установить только импликацию (2) $\to$ (3).

Возьмем $G \in {}^\circ\mathscr{G}$. Допустим, что для каждого стандартного F'' из ${}^\circ\mathscr{F}$ найдется x из $F'' - F$, для которого $f(x) \notin G$. В силу принципа идеализации в этом случае существует $x' \in \mu(\mathscr{F})$ такой, что $x' \notin F$ и в то же время $f(x') \notin G$. Рассмотрим $F' := F \cup \{x'\}$. Ясно, что $F' \in {}^a\mathscr{F}$. Получили противоречие, означающее, что для некоторого стандартного $F'' \in \mathscr{F}$ будет $f(F'' - F) \subset G$. Учитывая, что в F нет стандартных элементов X, выводим

$$(\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\exists^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\forall^{\mathrm{st}} x \in F)(f(x) \in G).$$

Остается воспользоваться принципом переноса. $\rhd$

4.2. Монады в топологических пространствах

В этом параграфе изучаются свойства монад фильтров окрестностей в топологических пространствах.

4.2.1. Пусть (X, τ) — стандартное *предтопологическое пространство.* Таким образом, для каждого (стандартного) x из X задан (стандартный) фильтр $\tau(x)$ в X. Обозначим $\mu(x) := \mu_\tau(x) := \mu(\tau(x))$. Элементы $\mu(x)$ называют *бесконечно близкими точками* к x. Очевидно, что $\mu(x)$ — монада фильтра окрестностей $\tau(x)$ точки x. Предтопологическое пространство (X, τ) называют *топологическим*, если каждая окрестность точки в X содержит открытую окрестность этой точки. Иными словами, у любого $x \in {}^\circ X$ имеется бесконечно малая окрестность $U \in \tau(x)$, для которой $\mu(x') \subset \mu(x)$ при всех $x' \in U$.

4.2.2. Пусть G — (внешнее) множество в топологическом пространстве (X, τ). Положим $h(G) := \bigcup\{\mu(x) : x \in {}^\circ G\}$. Множество $h(G)$ называют *гало* G в X. Множество $G \cap h(G)$ называют *автогало* или *околостандартной частью* G и обозначают $\mathrm{nst}\,(G)$.

Если $G \supset h(G)$, то G называют *насыщенным* или, более полно, τ-насыщенным. Если для всякого $x \in G$ верно, что $\mu(x) \subset G$, то G называют *вполне насыщенным* (*вполне* τ-*насыщенным*).

4.2.3. *Стандартное множество открыто в том и только в том случае, если оно насыщено.*

$\triangleleft$ Если G открыто и $x \in {}^{\circ}G$, то $G \supset \mu(x)$. Значит, G содержит свое гало. Наоборот, если $G \supset h(G)$, то, выбирая удаленный элемент U_x из фильтра $\tau(x)$ для $x \in {}^{\circ}G$, видим, что $G \supset U_x$. По принципу переноса G открыто. $\triangleright$

4.2.4. Стандартную точку x из X называют *микропредельной* для U, если $\mu(x) \cap U \neq \varnothing$. Стандартное множество, образованное всеми микропредельными точками U, называют *микрозамыканием* U и обозначают $\mathrm{cl}_{\approx}(U)$.

4.2.5. *Микрозамыкание* $\mathrm{cl}_{\approx}(U)$ *произвольного внутреннего множества* U *замкнуто. Если* U *— стандартное множество, то микрозамыкание* $\mathrm{cl}_{\approx}(U)$ *совпадает с замыканием* $\mathrm{cl}(U)$ *множества* U.

$\triangleleft$ Пусть $A := \mathrm{cl}_{\approx}(U) = {}^*\{x \in X : \mu(x) \cap U \neq \varnothing\}$ и $y \in \mathrm{cl}(A)$. Следует установить, что $y \in A$. По принципу переноса можно считать, что y — стандартный элемент. Возьмем стандартную открытую окрестность V точки y. По условию имеется стандартная точка $x \in V$ такая, что $x \in A$. По определению стандартизации и монады выводим, что $V \supset \mu(x)$ и $\mu(x) \cap U \neq \varnothing$. Отсюда $(\forall^{\mathrm{st}} V \in \tau(y)) V \cap U \neq \varnothing$. В силу принципа идеализации заключаем: $\mu(y) \cap U \neq \varnothing$, т. е. $y \in \mathrm{cl}_{\approx}(U)$.

Пусть теперь U стандартно. Ясно, что ${}^{\circ}U \subset \mathrm{cl}_{\approx}(U)$. Стало быть, $U \subset \mathrm{cl}_{\approx}(U)$ и $\mathrm{cl}(U) \subset \mathrm{cl}_{\approx}(U)$ в силу уже доказанного. Если взять $y \in \mathrm{cl}(U)$, то $(\forall^{\mathrm{st}} V \in \tau(y)) V \cap U \neq \varnothing$. Значит, по принципу идеализации $\mu(y) \cap U \neq \varnothing$, т. е. $y \in \mathrm{cl}_{\approx}(U)$. $\triangleright$

4.2.6. *Для точки* x *и непустого множества* U *эквивалентны следующие утверждения:*

(1) x *— точка прикосновения* U*;*

(2) x *— микропредельная точка* U*;*

(3) *существует стандартный фильтр* $\mathscr{F}$*, монада* $\mu(\mathscr{F})$ *которого лежит в монаде* $\mu(x)$*;*

(4) *имеется такая стандартная сеть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ точек U, что ее элементы с бесконечно большими номерами бесконечно близки к x, т. е. $x_\xi \in \mu(x)$ при всех $\xi \in {}^a\Xi$.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Если $x \in \mathrm{cl}(U)$, то имеется точная верхняя граница $\tau(x) \vee \mathrm{fil}\,\{U\}$. В силу 4.1.10 (1) будет

$$\varnothing \neq \mu(\tau(x) \vee \mathrm{fil}\,\{U\}) = \mu(\tau(x)) \cap \mu(\mathrm{fil}\,\{U\}) = \mu(x) \cap U.$$

Последнее означает, что $x \in \mathrm{cl}_\approx(U)$.

(2) $\to$ (3): Если $x \in \mathrm{cl}_\approx(U)$, то $U \cap \mu(x) \neq \varnothing$. Отсюда на основании 4.1.10 (1) строим фильтр $\mathscr{F}$, такой что $A \in \mathscr{F} \leftrightarrow A \supset U \cap \mu(x)$. Ясно, что $\mathscr{F}$ — искомый.

(3) $\to$ (4): Полагаем $\Xi := \tau(x)$ и $\xi_1 \leq \xi_2 \leftrightarrow \xi_1 \supset \xi_2$. Определим x_ξ как произвольную точку какого-нибудь $F \in \mathscr{F}$ такого, что $F \subset \xi$. Ясно, что $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — искомая сеть. В самом деле, по построению $x_\xi \in \mu(x)$ при $\xi \in {}^a\Xi$.

(4) $\to$ (1): Пусть V — стандартная окрестность x и η — произвольный бесконечно большой номер из Ξ. Ясно, что $x_\xi \in V$ для $\xi \geq \eta$, ибо $\mu(x) \subset V$ и $\xi \in {}^a\Xi$. Итак, $V \cap U \neq \varnothing$ (так как $x_\xi \in U$ по условию). $\rhd$

4.2.7. *Нестандартный критерий непрерывности.* *Пусть (X,τ), (Y,σ) — стандартные топологические пространства, $f : X \to Y$ — стандартное отображение и x — стандартная точка в X. Эквивалентны утверждения:*

(1) *f непрерывно в точке x;*

(2) *f переводит точки, бесконечно близкие к x, в точки, бесконечно близкие к $f(x)$, т. е.*

$$(\forall\, x')(x' \in \mu_\tau(x) \to f(x') \in \mu_\sigma(f(x))).$$

$\lhd$ Достаточно сослаться на 4.1.8. $\rhd$

4.2.8. Для множества A в X символом $\mu(A)$ обозначим пересечение стандартных открытых множеств, содержащих A. Множество $\mu(A)$ называют *монадой* A. Отметим, что $\mu(\varnothing) = \varnothing$. Если $A \neq \varnothing$, то $\mu(A)$ — это монада фильтра окрестностей множества A.

4.2.9. *Пусть (X, τ) — стандартное топологическое пространство. Тогда*

(1) *(X, τ) — отделимое ($= \mathrm{T}_1$) пространство в том и только в том случае, если ${}^\circ\mu(x) = \{x\}$ для всякой точки $x \in {}^\circ X$;*

(2) *(X, τ) — хаусдорфово ($= \mathrm{T}_2$) пространство в том и только в том случае, если $\mu(x_1) \cap \mu(x_2) = \varnothing$ для $x_1, x_2 \in {}^\circ X$, $x_1 \neq x_2$;*

(3) *(X, τ) регулярно, если оно отделимо и обладает свойством T_3: для каждых замкнутого стандартного $A \subset X$ и стандартной точки $x \notin A$ верно $\mu(x) \cap \mu(A) = \varnothing$;*

(4) *(X, τ) нормально, если оно отделимо и обладает свойством T_4: для любых двух непересекающихся замкнутых множеств A и B в X верно $\mu(A) \cap \mu(B) = \varnothing$.*

4.2.10. *Справедливы утверждения:*

(1) *стандартное множество будет вполне насыщено тогда и только тогда, когда оно открыто;*

(2) *монада произвольного множества вполне насыщена;*

(3) *монада стандартного фильтра $\mathscr{F}$ вполне насыщена в том и только в том случае, если $\mathscr{F}$ имеет базис из открытых множеств;*

(4) *монада $\mu(A)$ произвольного внутреннего A является наименьшим вполне насыщенным множеством, содержащим A, при этом имеет место представление $\mu(A) = \bigcup\{\mu(a) : a \in A\}$.*

$\lhd$ (1): Если A стандартно и вполне насыщено, то оно заведомо насыщено и, стало быть, A открыто по 4.2.3. Если же заранее известно, что A стандартно и открыто, то для $a \in A$ будет $\mu(a) \subset A$ по определению монады, т. е. A вполне насыщено.

(2): Монада множества есть по определению пересечение стандартных открытых множеств. Значит, с учетом (1) она вполне насыщена.

(3): Если у $\mathscr{F}$ есть базис из открытых стандартных множеств, то все следует из (1). Если $\mu(\mathscr{F})$ вполне насыщено и V — стандартный элемент $\mathscr{F}$, то $V \supset \mu(\mathscr{F}) \supset \bigcup\{U_a : a \in F\}$, где F — какой-нибудь бесконечно удаленный элемент $\mathscr{F}$ и U_a — какая-нибудь бесконечно малая окрестность точки a. Так как $\bigcup\{U_a : a \in F\} \in \mathscr{F}$, то требуемое вытекает из принципа переноса.

(4): В силу (2) $\mu(A)$ вполне насыщено. Кроме того, на основании (3) вполне насыщено $B := \bigcup\{\mu(a) : a \in A\}$. Следует проверить только, что $B = \mu(A)$. Включение $B \subset \mu(A)$ очевидно. Предположим, что, вопреки доказываемому, $B \neq \mu(A)$, т. е. найдется $x \in \mu(A)$ такое, что $x \notin B$. Значит, для каждого $a \in A$ имеется стандартная окрестность U_a точки a, обладающая тем свойством, что $x \notin U_a$. Иначе говоря, $(\forall\, a \in A)(\exists^{\mathrm{st}}\, U_a)\ U_a \in \tau(a)$. Привлекая принцип идеализации, видим, что существует стандартное конечное множество $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$ такое, что $A \subset U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}$. Отсюда $x \in \mu(A) \subset U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}$. Получаем противоречие. $\rhd$

4.2.11. *Пусть (X, τ) — отделимое топологическое пространство. Отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \tau)$ непрерывно в точке x в том и только в том случае, если для какой-либо бесконечно малой окрестности U точки x выполнено $f(\mu_\tau(x) - U) \subset \mu_\sigma(f(x))$.*

$\lhd$ В силу отделимости $\mu_\tau(x) - U = \mu(x) - U$, где $\mu(x)$ — монада фильтра $\tau(x)$ проколотых окрестностей x, т. е. $V \in \tau(x) \leftrightarrow V \cup \{x\} \in \tau(x)$. Ясно, что $\mu(x) = \mu_\tau(x) - \{x\}$ и при этом $U - \{x\}$ — бесконечно малый элемент $\tau(x)$. Привлекая принцип заданного горизонта 4.1.18, видим, что $f(\mu(x) - U) \subset \mu_\sigma(f(x)) \leftrightarrow f(\mu(x)) \subset \mu_\sigma(f(x)) \leftrightarrow f(\mu_\tau(x)) \subset \mu_\sigma(f(x))$. $\rhd$

4.2.12. *Пусть $(Y_\xi, \sigma_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — стандартное семейство топологических пространств. Пусть, далее, $(f_\xi : X \to Y_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство отображений и $\tau := \sup_{\xi \in \Xi} f_\xi^{-1}(\sigma_\xi)$ — инициальная топология в X, т. е. слабейшая топология, в которой непрерывны отображения f_ξ при всех $\xi \in \Xi$. Тогда для каждой стандартной точки $x \in X$ верно*

$$\mu_\tau(x) = \bigcap_{\xi \in {}^\circ\Xi} f_\xi^{-1}\big(\mu(\sigma_\xi(f_\xi(x)))\big).$$

$\lhd$ На основании 4.1.8 выводим требуемое. $\rhd$

4.2.13. *Точка x' тихоновского произведения бесконечно близка к данной точке x, если стандартные координаты x' бесконечно близки к соответствующим стандартным координатам x.*

$\lhd$ Формально говоря, пусть $(X_\xi, \tau_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — стандартное семейство стандартных топологических пространств. Пусть, далее, $(\mathscr{X}, \tau)$ —

тихоновское произведение $(X_\xi, \tau_\xi)_{\xi\in\Xi}$, т. е.

$$\mathscr{X} := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi; \quad \tau := \sup_{\xi\in\Xi} \mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\tau_\xi),$$

где Pr_ξ — оператор проектирования $\mathscr{X}$ на X_ξ. Для $x \in {}^\circ\mathscr{X}$ в силу 4.2.12 и 4.1.6 (5) выводим

$$\mu(x) = \bigcap_{\xi\in{}^\circ\Xi} \mu\big(\mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\tau_\xi(x_\xi))\big) = \bigcap_{\xi\in{}^\circ\Xi} \mathrm{Pr}_\xi^{-1}\left(\mu(\tau_\xi(x_\xi))\right).$$

Отметим, что для $\xi \in {}^\circ\Xi$ верно $x' \in \mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\mu(\tau_\xi(x_\xi))) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_\xi\, x' \in \mu(\tau_\xi(x_\xi))$, т. е.

$$\mathrm{Pr}_\xi^{-1}\left(\mu(\tau_\xi(x_\xi))\right) = \mu_{\tau_\xi}(x_\xi) \times \prod_{\eta\neq\xi} X_\eta.$$

Отсюда (ср. 4.1.6 (5)) для каждого стандартного $\xi \in \Xi$ справедливо

$$\mathrm{Pr}_\xi(\mu(x)) = \mu(\tau_\xi(x_\xi)),$$

что и требовалось. $\triangleright$

4.3. Околостандартность и компактность

Близость к стандартной точке, возникающая в топологических пространствах, позволяет дать удобные критерии компактных пространств. Получение таких критериев — основная тема текущего параграфа.

4.3.1. Точку x некоторого стандартного топологического пространства (X, τ) называют *околостандартной* или, более полно, τ-околостандартной, если $x \in \mathrm{nst}\,(X)$, т. е. если для некоторой стандартной $x' \in {}^\circ X$ будет $x \in \mu(x')$.

4.3.2. *Точка $x \in X$ является околостандартной в том и только в том случае, если для каждого стандартного открытого покрытия $\mathscr{E}$ множества X будет $x \in \mu(\mathscr{E})$. Иными словами,*

$$\mathrm{nst}\,(X) = \bigcap\{\mu(\mathscr{E}) : \mathscr{E} \text{ — открытое покрытие } X\}.$$

$\lhd$ Пусть сначала $x \in \operatorname{nst}(X)$ и $x' \in {}^\circ X$ таково, что $x \in \mu(x')$. Для открытого покрытия $\mathscr{E}$ имеется стандартный элемент $E \in \mathscr{E}$ такой, что $x' \in E$, т. е. $\mu(x') \subset E$ на основании 4.2.3. Значит, $x \in \mu(x') \subset E \subset \mu(\mathscr{E})$. Пусть теперь $x \notin \operatorname{nst}(X)$. Тогда для всякого $x' \in {}^\circ X$ верно $x \notin \mu(x')$. Значит, существует стандартная открытая окрестность $U_{x'}$ точки x', для которой $x \notin U_{x'}$. Стандартизация $\mathscr{E} := {}^*\{U_{x'} : x' \in {}^\circ X\}$ представляет собой открытое покрытие X, для которого $x \notin \mu(\mathscr{E})$. $\rhd$

4.3.3. *Каждая околостандартная точка стандартного топологического пространства бесконечно близка к единственной стандартной точке в том и только в том случае, если рассматриваемое пространство хаусдорфово.*

$\lhd$ Если τ — хаусдорфова топология и $x', x'' \in {}^\circ X$, то $\mu(x') \cap \mu(x'') \neq \varnothing \to x' = x''$. Наоборот, пусть $x \in \mu(x') \cap \mu(x'')$ при $x', x'' \in {}^\circ X$. Поскольку x околостандартна, то $x' = x''$ по условию. Итак, $x' \neq x'' \to \mu(x') \cap \mu(x'') = \varnothing$. $\rhd$

4.3.4. Определим внешнее соответствие $\operatorname{st}(x) := \{x' \in {}^\circ X : x \in \mu(x')\}$. В хаусдорфовом случае st — отображение $\operatorname{nst}(X)$ на ${}^\circ X$.

4.3.5. *Для каждого внутреннего U справедливо представление* $\operatorname{cl}_\approx(U) = {}^*\operatorname{st}(U)$. *В частности, стандартное множество U замкнуто в том и только в том случае, если $U = {}^*\operatorname{st}(U)$.*

$\lhd$ Все содержится в 4.2.5. $\rhd$

4.3.6. *Нестандартные критерии компактности.* *Для стандартного пространства sX эквивалентны утверждения:*

(1) *X компактно;*

(2) *каждая точка из X околостандартна;*

(3) *автогало X — внутреннее множество.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Пусть $\mathscr{E}$ — открытое покрытие X. Тогда монада $\mu(\mathscr{E})$ совпадает с X на основании 4.1.15 (и компактности X). В силу 4.3.2 видим: $\operatorname{nst}(X) = \bigcap_{\mathscr{E}} \mu(\mathscr{E}) = X$.

(2) $\to$ (3): Очевидно.

(3) $\to$ (1): Пусть $\mathscr{E}$ — стандартное открытое покрытие X. Поскольку $(\forall x \in \operatorname{nst}(X))(\exists^{\mathrm{st}} E \in \mathscr{E})\, x \in E$, то по принципу идеализации $(\exists^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}) \cup \mathscr{E}_0 \supset \operatorname{nst}(X) \supset {}^\circ X$. Отсюда по принципу переноса $\mathscr{E}_0$ — покрытие X. $\rhd$

4.3.7. *Пусть C — множество в топологическом пространстве X. Эквивалентны утверждения:*

(1) *C компактно в индуцированной топологии;*

(2) *C лежит в гало $h(C)$;*

(3) *монада $\mu(C)$ совпадает с гало $h(C)$.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Раз C компактно в индуцированной топологии, то $C \subset \mathrm{nst}\,(C) \subset h(C)$ на основании 4.3.6.

(2) $\to$ (3): Ясно, что всегда $h(G) = \bigcup\{\mu(x) : x \in {}^\circ G\} \subset \mu(G)$. По условию для каждого $x \in C$ найдется $y \in {}^\circ C$, удовлетворяющий соотношению $x \in \mu(y)$. В силу 4.2.8 (2) $\mu(x) \subset \mu(y)$. Стало быть, с учетом 4.2.8 (4) получаем: $\mu(C) = \bigcup\{\mu(x) : x \in C\} \subset \bigcup\{\mu(y) : y \in {}^\circ C\} = h(C)$.

(3) $\to$ (1): Пусть $\mathscr{E}$ — стандартное открытое покрытие C. По определению $C \subset \mu(C) \subset h(C)$. Видно (ср. 4.3.2), что тем самым $C \subset \mu(\mathscr{E})$. На основании 4.1.15 фиксируем наличие в $\mathscr{E}$ конечного подпокрытия C. $\rhd$

4.3.8. ***Нестандартный критерий относительной компактности.*** *Для регулярного пространства X и множества C в X эквивалентны утверждения:*

(1) *C относительно компактно (т. е. $\mathrm{cl}(C)$ компактно);*

(2) *C лежит в околостандартной части X.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Ясно, что без дополнительных гипотез из 4.3.7 вытекает

$$C \subset \mathrm{cl}(C) \subset h(\mathrm{cl}(C)) \subset h(X) = h(X) \cap X = \mathrm{nst}\,(X).$$

(2) $\to$ (1): Рассмотрим замыкание $\mathrm{cl}(C)$, и пусть $\mathscr{E}$ — открытое покрытие $\mathrm{cl}(C)$. Значит, для каждого $c \in C$ найдется $E \in \mathscr{E}$, содержащее c. Пусть E_c — некоторая замкнутая окрестность c, содержащаяся в E. Понятно, что семейство $\mathscr{E}' := \{E_c : c \in C\}$ составляет стандартное покрытие $\mathrm{cl}(C)$. Семейство $\mathscr{E}' \cup \{X - \mathrm{cl}(C)\}$ образует покрытие X и, значит, с учетом 4.3.1 выводим, что $C \subset \mathrm{nst}\,(X) \subset \mu(\mathscr{E}') \cup \{X - \mathrm{cl}(C)\}$. На основании 4.1.15 найдется конечное множество $\mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}'$, покрывающее C. Понятно, что $\bigcup \mathscr{E}_0$ замкнуто, т. е. $\mathscr{E}_0$ — покрытие $\mathrm{cl}(C)$. Каждый элемент из $\mathscr{E}_0$ по построению подмножество некоторого элемента из $\mathscr{E}$. Таким образом, можно выделить конечное подпокрытие $\mathrm{cl}(C)$ из исходного $\mathscr{E}$. $\rhd$

4.3.9. Критерий 4.3.8 допускает усиление. Именно, оказывается, что микрозамыкание произвольного внутреннего подмножества околостандартной части произвольного хаусдорфова пространства компактно.

4.3.10. *Пусть* $\mathscr{X} := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$ *— стандартное произведение стандартных топологических пространств. Точка* $x \in \mathscr{X}$ *околостандартна в том и только в том случае, если околостандартны ее стандартные координаты:* $x_\xi \in \operatorname{nst}(X_\xi)$ *для* $\xi \in {}^\circ\Xi$.

$\lhd$ Если $x \in \operatorname{nst}(\mathscr{X})$, то с учетом 4.1.12 для некоторого $y \in {}^\circ\mathscr{X}$ и всякого $\xi \in {}^\circ\Xi$ будет $x_\xi \in \mu(y_\xi)$. Осталось заметить, что $y_\xi \in {}^\circ X_\xi$ по принципу переноса. Пусть теперь заранее известно, что $x_\xi \in \operatorname{nst}(X_\xi)$ для $\xi \in {}^\circ\Xi$.

Рассмотрим внешнюю функцию $y : \xi \mapsto \operatorname{st}(x_\xi)$ из ${}^\circ\Xi$ в $\bigcup_{\xi\in\Xi} {}^\circ X_\xi$. Ясно, что для стандартизации ${}^*y$ будет ${}^*y \in {}^\circ\mathscr{X}$ и $x \in \mu({}^*y)$ в силу 4.1.12. $\rhd$

4.3.11. *Теорема Тихонова.* *Тихоновское произведение семейства компактных множеств компактно.*

$\lhd$ По принципу переноса можно считать, что речь идет о стандартном семействе стандартных пространств. В последнем случае на основании 4.3.10 каждая точка произведения околостандартна. $\rhd$

4.3.12. В дальнейшем мы будем, как правило, рассматривать хаусдорфовы компактные пространства. Пользуясь принятой терминологией, такие пространства называют коротко — *компактами.*

4.4. Бесконечная близость в равномерных пространствах

В равномерных пространствах возникает важное симметричное, рефлексивное и транзитивное отношение между внутренними точками — их бесконечная близость. Сейчас мы изучим важнейшие конструкции, связанные с этим понятием.

4.4.1. Пусть $(X, \mathscr{U})$ — равномерное пространство. Это означает, что $\mathscr{U} := \{\varnothing\}$, если $X = \varnothing$. Если же $X \neq \varnothing$, то $\mathscr{U}$ — фильтр в X^2, называемый *равномерностью* и обладающий теми свойствами, что

(1) $\mathscr{U} \subset \operatorname{fil}\{I_X\}$;

(2) $(\forall U \in \mathscr{U})(U^{-1} \in \mathscr{U})$;
(3) $(\forall V \in \mathscr{U})(\exists U \in \mathscr{U})(U \circ U \subset V)$.

4.4.2. *Критерий Люксембурга.* *Фильтр $\mathscr{U}$ в X^2 — равномерность на (непустом) множестве X в том и только в том случае, если монада $\mu(\mathscr{U})$ — внешнее отношение эквивалентности на X.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Имеем

$$\mu(\mathscr{U}) = \bigcap {}^{\circ}\mathscr{U} = \bigcap_{U \in {}^{\circ}\mathscr{U}} U = \bigcap_{U \in {}^{\circ}\mathscr{U}} U^{-1} = \mu(\mathscr{U})^{-1};$$

$$\mu(\mathscr{U}) \supset I_X;$$

$$\mu(\mathscr{U}) = \bigcap \{U \circ U : U \in {}^{\circ}\mathscr{U}\} \supset \mu(\mathscr{U}) \circ \mu(\mathscr{U}) \supset \mu(\mathscr{U}) \circ I_X \supset \mu(\mathscr{U}).$$

Здесь мы воспользовались тем, что U^{-1} и $U \circ U$ стандартны при условии стандартности U. Кроме того, $U \supset \mu(\mathscr{U})$ для $U \in {}^{\circ}\mathscr{U}$ по определению монады.

$\leftarrow$: В силу 4.1.4 фильтр $\mathscr{U}$ — это стандартизация надмножеств своей монады, т. е.

$$U \in {}^{\circ}\mathscr{U} \leftrightarrow U \supset \mu(\mathscr{U}).$$

Отсюда следует, что $\mathscr{U} \subset \operatorname{fil}\{I_X\}$ и $U \in \mathscr{U} \rightarrow U^{-1} \in \mathscr{U}$. Рассмотрим бесконечно малый элемент W фильтра $\mathscr{U}$. В силу уже доказанного $U := W^{-1} \cap W \in \mathscr{U}$. Кроме того, $U \circ U \subset \mu(\mathscr{U}) \circ \mu(\mathscr{U}) = \mu(\mathscr{U})$. Значит, для каждого стандартного $V \in \mathscr{U}$ найдется $U \in \mathscr{U}$ такой, что $U \circ U \subset V$. В силу принципа переноса заключаем, что $\mathscr{U}$ — равномерность. $\rhd$

4.4.3. При применении критерия Люксембурга полезно помнить, что далеко не каждое отношение эквивалентности на X^2 является монадой (т. е. задает равномерность в X). Например, если считать $x, y \in \mathbb{R}$ эквивалентными при $x - y \in {}^{\circ}\mathbb{R}$, то эквивалентные нулю точки заполнят множество ${}^{\circ}\mathbb{R}$, не являющееся монадой никакого фильтра. Это означает, в частности, что такая эквивалентность может быть задана никакой стандартной равномерностью.

4.4.4. Если x, y — точки пространства X с равномерностью $\mathscr{U}$, то x и y называют *бесконечно близкими* (относительно $\mathscr{U}$) и пишут $x \approx_{\mathscr{U}} y$ или просто $x \approx y$ при условии $(x, y) \in \mu(\mathscr{U})$. Для произвольного множества A в X (возможно, внешнего) множество $\mu_{\mathscr{U}}(A)$

называют *микрогало* множества A в X и обозначают ${}^{\approx}A$. Если множество A стандартно, то, допуская известную непоследовательность, для обозначения гало $h(A)$ множества A также используют символ ${}^{\approx}A$, имея в виду равенство $h(A) = {}^{\approx\circ}A$. Разумеется, что гало здесь вычисляется относительно равномерной топологии $\tau_{\mathscr{U}}$, порожденной $\mathscr{U}$. Отметим, что монада стандартной точки x в такой топологии состоит, как и следовало ожидать, из бесконечно близких к ней точек, т. е. представляет собой микрогало ${}^{\approx}x := {}^{\approx}\{x\}$ этой точки. Иногда используют несколько менее адекватную существу дела терминологию, называя микрогало ${}^{\approx}x$ внутренней точки x монадой этой точки.

4.4.5. Функцию f, действующую из равномерного пространства X в равномерное пространство Y, переводящую бесконечно близкие точки в бесконечно близкие, называют *микронепрерывной* на X.

4.4.6. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *стандартная функция микронепрерывна в том и только в том случае, если она равномерно непрерывна;*

(2) *стандартное множество состоит из микронепрерывных функций в том и только в том случае, если это множество равностепенно (равномерно) непрерывно.*

$\triangleleft$ (1): Равномерная непрерывность $f : X \to Y$ означает, что $f^{\times}(\mathscr{U}_X) \supset \mathscr{U}_Y$, где $\mathscr{U}_X$, $\mathscr{U}_Y$ — равномерности в X и Y соответственно и $f^{\times}(x, x') := (f(x), f(x'))$ для $x, x' \in X$. С учетом 4.1.8 выводим

$$f^{\times}(\mathscr{U}_X) \supset \mathscr{U}_Y \leftrightarrow \mu(f^{\times}(\mathscr{U}_X)) \subset \mu(\mathscr{U}_Y).$$

(2): Множество $\mathscr{E} \subset Y^X$ называют, как известно, равностепенно (равномерно) непрерывным, если $(\forall\, V \in \mathscr{U}_Y)(\exists\, U \in \mathscr{U}_X)(\forall\, f \in \mathscr{E})$ $f^{-1} \circ V \circ f \in \mathscr{U}_X$. Значит, для такого $\mathscr{E}$ по принципу переноса $(\forall^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{U}_Y)(\exists^{\mathrm{st}} U \in \mathscr{U}_X)(\forall\, f \in \mathscr{E})(\forall\, x, x' \in U)((f(x), f(x')) \in V)$. В частности, если $x \approx x'$, то для каждого $f \in \mathscr{E}$ при любой $V \in {}^{\circ}\mathscr{U}_Y$ будет $(f(x), f(x')) \in V$, т. е. $f(x) \approx f(x')$. Итак, равностепенно непрерывное стандартное множество имеет только микронепрерывные элементы.

Для доказательства противоположной импликации воспользуемся, ради разнообразия, принципом Коши 4.1.17. Действительно, для $V \in {}^{\circ}\mathscr{U}_Y$ и произвольного удаленного элемента $U \in {}^{\circ}\mathscr{U}_X$ верно

$(\forall\, f \in \mathscr{E})\, f^{\times}(U) \subset V$. Значит, это же внутреннее свойство справедливо для некоторого стандартного $U \in \mathscr{U}_X$. Остается воспользоваться принципом переноса. $\triangleright$

4.4.7. *Пусть* $(X, \mathscr{U}_X)$, $(Y, \mathscr{U}_Y)$ — *стандартные равномерные пространства и* f — *внутренняя функция*; $f : X \to Y$. *Пусть далее* ${}^{E}\mathscr{U}_X$ *и* ${}^{E}\mathscr{U}_Y$ — *фильтры внешних надмножеств* ${}^{\circ}\mathscr{U}_X$ *и* ${}^{\circ}\mathscr{U}_Y$ *соответственно. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(1) f *микронепрерывна;*

(2) $f : (X, {}^{E}\mathscr{U}_X) \to (Y, {}^{E}\mathscr{U}_Y)$ *равномерно непрерывна;*

(3) $(\forall^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{U}_Y)(\exists^{\mathrm{st}} U \in \mathscr{U}_X)(f^{\times}(U) \subset V)$.

$\triangleleft$ (1) $\to$ (3): Пусть $V \in {}^{\circ}\mathscr{U}_Y$. Для всякого удаленного элемента $U \in {}^{\circ}\mathscr{U}_X$ будет $(x, x') \in U \to x \approx x' \to f(x) \approx f(x')$, т. е. $f^{\times}(U) \subset V$. По принципу Коши 4.1.17 имеется стандартное U с тем же свойством.

(3) $\to$ (1): Возьмем $x \approx x'$ и стандартный элемент $V \in \mathscr{U}_Y$. По условию при некотором стандартном $U \in \mathscr{U}_X$ будет $f^{\times}(U) \subset V$. В частности, $(f(x), f(x')) \in V$. Значит, $f(x) \approx f(x')$.

(3) $\leftrightarrow$ (2): Очевидно. $\triangleright$

4.4.8. Примеры.

(1) Пусть X — множество и d — *полуметрика* (= *отклонение*) на X. Иными словами, имеются (стандартные) объекты X и $d : X^2 \to \mathbb{R}$ такие, что

$$d(x, x) = 0 \quad (x \in X);$$
$$d(x, y) = d(y, x) \quad (x, y \in X);$$
$$d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y) \quad (x, y, z \in X).$$

Рассмотрим цилиндры $\{d \le \varepsilon\} := \{(x, y) \in X_2 : d(x, y) \le \varepsilon\}$ и семейство $\mathscr{U}_d := \mathrm{fil}\,\{\{d \le \varepsilon\} : \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$. Ясно, что $\mathscr{U}_d$ задает в X структуру равномерного пространства — обычную равномерность *полуметрического пространства* (X, d). Отметим, что монада этой равномерности определена следующим отношением эквивалентности:

$$x \approx_d y \leftrightarrow d(x, y) \approx 0 \leftrightarrow d(x, y) \in \mu(\mathbb{R}).$$

(2) Пусть $(X, \mathfrak{M})$ — *мультиметрическое пространство*, т. е. $\mathfrak{M}$ — *мультиметрика* (= непустое множество полуметрик на X). Монаду $\mu(\mathfrak{M})$ определяют как пересечение монад (стандартных) равномерных пространств (X, d), где $d \in {}^\circ\mathfrak{M}$. Именно,

$$x \approx_{\mathfrak{M}} y \leftrightarrow (\forall\, d \in {}^\circ\mathfrak{M})(d(x,y) \approx 0).$$

Нет сомнений, что монада $\mu(\mathfrak{M})$ есть монада равномерности $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} := \sup\{\mathscr{U}_d : d \in \mathfrak{M}\}$ рассматриваемого мультиметрического пространства $(X, \mathfrak{M})$. Полезно здесь же напомнить, что каждое равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ мультиметризуемое, т. е. $\mathscr{U} = \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$ для подходящей мультиметрики $\mathfrak{M}$.

(3) Пусть $(X, \mathscr{U})$ — равномерное пространство. Наделим пространство $\mathscr{P}(X)$ *равномерностью Въеториса*, базис фильтра окружений в которой составлен из множеств:

$$\{(A,B) \in \mathscr{P}(X)^2 : B \subset U(A),\ A \subset U(B)\},$$

где $U \in \mathscr{U}$. Очевидно, что монада $\mu_v := \mu_v(\mathscr{U})$ равномерности Въеториса имеет вид:

$$\mu_v = \{(A,B) : A \subset {}^{\approx}B,\ B \subset {}^{\approx}A\}.$$

(4) Пусть (X, τ) — компакт, т. е. хаусдорфово компактное пространство. Это пространство равномеризуемо и притом единственным способом — фильтр $\mathscr{U}$ такой, что равномерная топология $\tau_{\mathscr{U}}$ совпадает с τ, есть фильтр окрестностей диагонали в X^2. Значит, $\mu(\mathscr{U}) = \mu_{\tau\times\tau}(I_X)$. Иначе говоря, $x \approx x' \leftrightarrow \mathrm{st}(x) = \mathrm{st}(x')$, ибо $\mu_{\tau\times\tau}(x,x) = \mu_\tau(x) \times \mu_\tau(x)$ для стандартной точки x в силу 4.2.13 и каждая точка X^2 околостандартна по 4.3.6.

(5) Пусть X, Y — непустые множества, $\mathscr{U}_Y$ — равномерность в Y и $\mathscr{B}$ — фильтрованное по возрастанию семейство подмножеств X. Рассмотрим равномерность $\mathscr{U}$ в Y^X, называемую «*равномерностью равномерной сходимости на множествах из* $\mathscr{B}$». Семейство $\mathscr{U}$ представляет собой совокупность надмножеств следующих элементов:

$$V_{B,U} := \{(f,g) \in Y^X \times Y^X : g \circ I_B \circ f^{-1} \subset U\},$$

где $B \in \mathscr{B}$ и $U \in \mathscr{U}_Y$. Ясно, что

$$(f,g) \in \mu(\mathscr{U}) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(\forall^{\mathrm{st}} U \in U_Y)(\forall\, x \in B)(f(x), g(x) \in U) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(\forall\, x \in B)(f(x) \approx g(x)) \leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{B}))(f(x) \approx g(x)),$$

где, как обычно, $\mu(\mathscr{B}) := \bigcup {}^\circ\mathscr{B}$ — монада семейства $\mathscr{B}$. Если $\mathscr{B} = \{X\}$, то говорят о *сильной равномерности* $\mathscr{U}_s$ на X. Бесспорно выполнение соотношения:

$$(f, g) \in \mu(\mathscr{U}_s) \leftrightarrow (\forall\, x \in X)(f(x) \approx g(x)).$$

Если $\mathscr{B} = \mathscr{P}_{\text{fin}}(X)$, то $\mu(\mathscr{B}) = {}^\circ X$ и, стало быть, для соответствующей *слабой равномерности* $\mathscr{U}_w$ (или, что по определению то же самое, для *равномерности поточечной сходимости*) будет

$$(f, g) \in \mu(\mathscr{U}_w) \leftrightarrow (\forall^{\text{st}} x \in X)(f(x) \approx g(x)).$$

4.4.9. Множество A называют *бесконечно малым* (относительно равномерности $\mathscr{U}$), если $A^2 \subset \mu(\mathscr{U})$, т. е. если любые две точки из A бесконечно близки.

4.4.10. *Для стандартного фильтра $\mathscr{F}$ в $(X, \mathscr{U})$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *монада $\mu(\mathscr{F})$ бесконечно мала;*

(2) *фильтр $\mathscr{F}$ — это фильтр Коши;*

(3) *для всякого $U \in {}^\circ\mathscr{U}$ найдется $x \in {}^\circ X$ такой, что $\mu(\mathscr{F}) \subset U(x)$.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Пусть $\mu(\mathscr{F})^2 \subset \mu(\mathscr{U})$. Ясно, что $\mu(\mathscr{F})^2 = \mu(\mathscr{F}^\times)$, где $\mathscr{F}^\times := \{F^2 : F \in \mathscr{F}\}$, ибо

$$(x, y) \in \mu(\mathscr{F}^\times) \leftrightarrow (\forall^{\text{st}} F \in \mathscr{F})(x \in F \wedge y \in F) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (x \in \mu(\mathscr{F}) \wedge y \in \mu(\mathscr{F})).$$

Итак, $\mu(\mathscr{F}^\times) \subset \mu(\mathscr{U})$, т. е. $\mathscr{F}^\times \supset \mathscr{U}$. Последнее означает, что $\mathscr{F}$ — фильтр Коши.

(2) $\to$ (3): Для $U \in {}^\circ\mathscr{U}$ существует стандартный элемент $F \in \mathscr{F}$, для которого $F \times F \subset U$. Если $x \in {}^\circ F$, то $(\forall^{\text{st}} y \in F)(y \in U(x))$. Значит, $F \subset U(x)$ и тем более $\mu(\mathscr{F}) \subset U(x)$.

(3) $\to$ (1): Идеализация дает $(\exists\, x \in X)\ \mu(\mathscr{F}) \subset {}^\approx x$. Следовательно, монада $\mu(\mathscr{F})$ бесконечна мала. $\rhd$

4.4.11. *Фильтр Коши сходится в том и только в том случае, если его монада содержит околостандартную точку.*

$\lhd$ $\to$: Если $\mathscr{F}$ — рассматриваемый фильтр, то $\mu(\mathscr{F}) \subset \mu(x)$, как только $\mathscr{F} \to x$. Любая точка из $\mu(\mathscr{F})$ околостандартна.

$\leftarrow$: Пусть $\mu(\mathscr{F}) \cap {}^\approx x \neq \varnothing$. Для $y \in \mu(\mathscr{F})$ и $z \in \mu(\mathscr{F}) \cap {}^\approx x$ будет $y \approx z \approx x$, т. е. $y \approx x$. Значит, $\mu(\mathscr{F}) \subset \mu(x)$. Остается апеллировать к 4.1.7. $\rhd$

4.5. Предстандартность, полнота и полная ограниченность

Как известно, в равномерных пространствах обеспечен удобный признак компактности — классический критерий Хаусдорфа. В этом параграфе приводятся его нестандартные аналоги и связанные с ними критерии предстандартности в пространствах непрерывных функций.

4.5.1. *Для точки x стандартного равномерного пространства X эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *микрогало x является монадой некоторого стандартного фильтра в X;*

(2) *микрогало x — монада некоторого фильтра Коши в X;*

(3) *микрогало x совпадает с монадой минимального по включению фильтра Коши;*

(4) *микрогало x содержит некоторую бесконечно малую монаду;*

(5) *существует стандартная обобщенная последовательность $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов X, микросходящаяся к x, т. е. такая, что для всех удаленных элементов $\xi \in {}^a\Xi$ верно $x_\xi \approx x$.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Если ${}^\approx x = \mu(\mathscr{F})$ для некоторого стандартного фильтра $\mathscr{F}$, то внешнее множество $\mu(\mathscr{F})$ бесконечно мало (так как микрогало ${}^\approx x$ бесконечно мало).

(2) $\to$ (3): Пусть ${}^\approx x = \mu(\mathscr{F})$, а $\mathscr{F}'$ — фильтр Коши и $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$. Тогда по 4.1.17 $\mu(\mathscr{F}') \supset \mu(\mathscr{F}) = {}^\approx x$. Если $y \in \mu(\mathscr{F}')$, то в силу бесконечной малости $\mu(\mathscr{F}')$ будет $y \approx x$, т. е. $\mu(\mathscr{F}') = \mu(x) = \mu(\mathscr{F})$. Отсюда $\mathscr{F}' = \mathscr{F}$ по 4.1.4.

(3) $\to$ (4): Очевидно.

(4) $\to$ (1): Допустим, что ${}^\approx x \supset \mu(\mathscr{F})$ и фильтр $\mathscr{F}$ — это фильтр Коши. Положим $\mathscr{F}' := \mathrm{fil}\{U(F) : U \in \mathscr{U}_X, F \in \mathscr{F}\}$. Имеем для $\mathscr{U} := \mathscr{U}_X$ соотношения

$$
{}^\approx\mu(\mathscr{F}) = \mu(\mathscr{U})\,(\mu(\mathscr{F})) = \mu(\mathscr{U})\Big(\bigcap_{F\in{}^\circ\mathscr{F}} F\Big) = \bigcap_{F\in{}^\circ\mathscr{F}} \mu(\mathscr{U})(F) =
$$

$$
= \bigcap_{F\in{}^\circ\mathscr{F}}\ \bigcap_{U\in{}^\circ\mathscr{U}} U(F) = \bigcap\{F' : F' \in {}^\circ\mathscr{F}'\} = \mu(\mathscr{F}').
$$

Ясно, что ${}^{\approx}\mu(\mathscr{F}) \supset {}^{\approx}x$. Значит, $\mu(\mathscr{F}) = {}^{\approx}x = \mu(\mathscr{F}')$.

(4) → (5): Если $\mathscr{F}$ — фильтр и $\mu(\mathscr{F}) \subset {}^{\approx}x$, то, выбирая обычным способом по стандартной точке из каждого стандартного $F \in {}^{\circ}\mathscr{F}$ и привлекая стандартизацию, строим нужную последовательность. Наоборот, если $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ микросходится к x, то монада фильтра хвостов этой последовательности содержится в микрогало ${}^{\approx}x$. ▷

4.5.2. Точку x, удовлетворяющую одному (а значит, и любому) из эквивалентных условий 4.5.1 (1)–(4), называют *предстандартной* в X. Внешнее множество всех предстандартных точек в X обозначают $\operatorname{pst}(X)$.

4.5.3. *Околостандартные точки (относительно равномерной топологии) являются предстандартными.*

◁ Пусть $x \in \operatorname{nst}(X)$ для рассматриваемого пространства $(X, \mathscr{U})$. Значит, $x \in {}^{\approx}y$ для некоторого $y \in {}^{\circ}X$. Отсюда ${}^{\approx}x \supset {}^{\approx}y = \mu(\tau_{\mathscr{U}}(y))$. На основании 4.5.1 $x \in \operatorname{pst}(X)$. ▷

4.5.4. *Образ предстандартной точки при равномерно непрерывном отображении предстандартен.*

◁ Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр Коши и $\mu(\mathscr{F}) \subset {}^{\approx}x$. Ясно, что $f(\mathscr{F})$ — фильтр Коши в образе X при отображении f. Итак, $\mu(f(\mathscr{F})) \subset {}^{\approx}f(x)$, т. е. $f(x)$ — предстандартная точка по 4.5.2. ▷

4.5.5. *Точка тихоновского произведения стандартного семейства равномерных пространств предстандартна в том и только в том случае, если предстандартны ее стандартные координаты.*

◁ →: Пусть $\mathscr{X} := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$ и $\mathscr{U}_{\mathscr{X}} := \sup_{\xi\in\Xi} \operatorname{Pr}_\xi^{-1}(\mathscr{U}_\xi)$ — тихоновское произведение стандартных пространств $(X_\xi, \mathscr{U}_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Возьмем $x \in \operatorname{pst}(\mathscr{X})$. На основании 4.5.1 имеется фильтр Коши $\mathscr{F}$ в $(\mathscr{X}, \mathscr{U}_{\mathscr{X}})$ такой, что ${}^{\approx}x = \mu(\mathscr{F})$. Для всякого стандартного $\xi \in \Xi$ в силу равномерной непрерывности Pr_ξ и 4.4.6 $\operatorname{Pr}_\xi({}^{\approx}x) \subset {}^{\approx}x_\xi$, т. е. ${}^{\approx}x_\xi \supset \operatorname{Pr}_\xi(\mu(\mathscr{F})) = \mu(\operatorname{Pr}_\xi(\mathscr{F}))$. Значит, x_ξ — предстандартная точка в X_ξ при $\xi \in {}^{\circ}\Xi$.

←: Если для всякого $\xi \in {}^{\circ}\Xi$ верно, что ${}^{\approx}x_\xi = \mu(\mathscr{F}_\xi)$ при подходящем выборе фильтра $\mathscr{F}_\xi$, то рассмотрим фильтр

$$\mathscr{F} := \sup_{\xi\in\Xi} \operatorname{Pr}_\xi^{-1}(\mathscr{F}_\xi).$$

Ясно, что фильтр $\mathscr{F}$ стандартен и

$$\mu(\mathscr{F}) = \bigcap_{\xi\in{}^\circ\Xi} \mu(\mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\mathscr{F}_\xi)) = \bigcap_{\xi\in{}^\circ\Xi} \mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\mu(\mathscr{F}_\xi)) =$$

$$= \bigcap_{\xi\in{}^\circ\Xi} \mathrm{Pr}_\xi^{-1}({}^{\approx}x_\xi) = \{y \in \mathscr{X} : (\forall\, \xi \in {}^\circ\Xi)\, y_\xi \approx x_\xi\} = {}^{\approx}x.$$

Тем самым доказательство завершено. $\rhd$

4.5.6. ***Нестандартный критерий полноты.*** *Стандартное равномерное пространство полно в том и только том случае, если чтобы каждая его предстандартная точка околостандартна.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Пусть X — полное пространство, т. е. такое, что каждый фильтр Коши в X сходится. Возьмем $x \in \mathrm{pst}\,(X)$. На основании 4.5.2 для некоторого стандартного фильтра Коши $\mathscr{F}$ будет $\mu(\mathscr{F}) = {}^{\approx}x$. В силу полноты существует $y \in {}^\circ X$ такой, что $\mu(y) \supset \mu(\mathscr{F})$. Итак, ${}^{\approx}y = \mu(y) \supset \mu(\mathscr{F}) \supset {}^{\approx}x$. Следовательно, ${}^{\approx}y = {}^{\approx}x$, т. е. $x \in \mathrm{nst}\,(X)$.

$\leftarrow$: Пусть $\mathrm{nst}\,(X) = \mathrm{pst}\,(X)$ и $\mathscr{F}$ — фильтр Коши в X. Возьмем $x \in \mu(\mathscr{F})$. Тогда ${}^{\approx}x \supset \mu(\mathscr{F})$ (ибо $\mu(\mathscr{F})$ — бесконечно малое множество). На основании 4.5.2 $x \in \mathrm{pst}\,(X)$. Значит, $x \in \mathrm{nst}\,(X)$. Остается привлечь 4.4.11. $\rhd$

4.5.7. *Тихоновское произведение семейства полных равномерных пространств полно.*

$\lhd$ В силу принципа переноса достаточно разобрать случай стандартных параметров. Если стандартные сомножители полны, то каждая их предстандартная точка околостандартна по 4.5.5. Остается вспомнить, что околостандартные точки — это точки с околостандартными стандартными координатами (см. 4.3.10), а предстандартные точки — это точки с предстандартными стандартными координатами по 4.5.5. Кроме того, нужно учесть, что равномерная топология произведения есть произведение равномерных топологий сомножителей. $\rhd$

4.5.8. *Пространство функций, действующих в полное пространство, при наделении его сильной равномерностью становится полным.*

$\lhd$ Пусть $(Y, \mathscr{U})$ — полное стандартное равномерное пространство, X — стандартное множество. Возьмем предстандартную точку

$f \in Y^X$. В силу 4.5.2 и 4.4.8 это значит, что имеется стандартная последовательность $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов Y^X, для которой

$$(\forall\,\xi \in {}^a\Xi)(\forall\,x \in X)(f_\xi(x) \approx f(x)).$$

На основании 4.5.7 f околостандартна в слабой равномерности, т. е. найдется стандартный элемент $g \in Y^X$ такой, что

$$(\forall\,\xi \in {}^a\Xi)(\forall^{\mathrm{st}}x \in X)(f_\xi(x) \approx g(x)).$$

Значит, для каждого стандартного $x \in X$ последовательность $(f_\xi(x))_{\xi\in\Xi}$ сходится к $g(x)$. В силу принципа переноса $(\forall\,x \in X)$ $f_\xi(x) \to g(x)$. Отсюда $(\forall\,U \in {}^\circ\mathscr{U})(\forall\,x \in X)(f(x), g(x)) \in U$. Последнее обеспечивает тот факт, что f бесконечно близка к g в сильной равномерности. Ссылки на 4.5.6 и принцип переноса завершают доказательство. $\triangleright$

4.5.9. *Пусть E — это некоторое множество в равномерном пространстве $(X, \mathscr{U})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество E вполне ограничено, т. е. для каждого $U \in \mathscr{U}$ имеется конечное множество $E_0 \subset E$ такое, что $E \subset U(E_0)$ (для всякого $U \in \mathscr{U}$ существует конечная U-сеть);*

(2) *найдется внутреннее конечное покрытие E бесконечно малыми внутренними множествами;*

(3) *множество E имеет конечный скелет, т. е. найдется внутреннее конечное множество E_0 в X такое, что E лежит в микрогало ${}^{\approx}E_0$;*

(4) *множество E лежит в микрогало некоторого внутреннего вполне ограниченного множества.*

$\triangleleft$ (1) $\leftrightarrow$ (2): Привлекая определение и принцип идеализации, последовательно выводим:

$$(\forall^{\mathrm{st}}U \in \mathscr{U})(\exists\,E_0)(E_0 \subset E \wedge E_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) \wedge E \subset U(F_0)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st\,fin}}\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U})(\exists\,E_0)(\forall\,U \in \mathscr{U}_0)(E_0 \subset E \wedge E_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) \wedge E \subset$$
$$\subset U(E_0)) \leftrightarrow (\exists E_0)(\forall^{\mathrm{st}}U \in \mathscr{U})(E_0 \subset E \wedge E_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) \wedge E \subset U(E_0)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\,E_0 \subset E)(E_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) \wedge E \subset {}^{\approx}E_0).$$

(1) $\leftrightarrow$ (3): Безусловно, что E — вполне ограничено в том и только в том случае, если для каждого стандартного $U \in \mathscr{U}$ найдется конечное покрытие $\{E_1, \dots, E_n\}$ множества E такое, что $E_k \times E_k \subset U$ (т. е. E_k мало порядка U) для $k := 1, \dots, n$. Остается воспользоваться принципом идеализации.

(3) $\to$ (4): Очевидно.

(4) $\to$ (1): Пусть U — стандартное окружение. Имеется симметричный элемент $V \in {}^\circ\mathscr{U}$, для которого $V \circ V \subset U$. Ясно, что для некоторого конечного E' в X будет $V(E') \supset E_0$, где E_0 — заданное вполне ограниченное множество с тем свойством, что ${}^{\approx}E_0 \supset E$. Значит, $U(E') \supset V \circ V(E') \supset V(E_0) \supset E$. $\triangleright$

4.5.10. *В каждом стандартном равномерном пространстве имеется универсальный конечный скелет, т. е. общий внутренний конечный скелет для всех вполне ограниченных стандартных множеств исходного пространства.*

$\triangleleft$ Вспоминая, что объединение конечного числа вполне ограниченных множеств вполне ограничено, и учитывая 4.5.9, для пространства X, конечного стандартного набора $\mathscr{E}$ вполне ограниченных множеств и стандартного конечного набора $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}_X$ можно подобрать единое конечное множество в X, служащее U-сетью любого $E \in \mathscr{E}$ при каждом $U \in \mathscr{U}_0$. Привлекаем идеализацию. $\triangleright$

4.5.11. ***Нестандартные критерии полной ограниченности.*** *Для равномерного пространства X эквивалентны утверждения:*

(1) *X вполне ограничено;*

(2) *каждая точка X предстандартна;*

(3) *множество $\operatorname{pst}(X)$ является внутренним;*

(4) *множество X имеет конечный скелет.*

$\triangleleft$ (1) $\to$ (2): Пусть $x \in X$. Для всякой стандартной $U \in \mathscr{U}$ найдется стандартная точка $x' \in {}^\circ X$, для которой $x \in U(x')$ — *элемент конечной стандартной* U-*сети для* X. Положим $\mathscr{F} := \operatorname{fil}{}^*\{U(x') : U \in {}^\circ\mathscr{U}\}$. Ясно, что $\mathscr{F}$ — фильтр Коши на основании 4.4.10. При этом по построению $x \in \mu(\mathscr{F})$, т. е. $x \in \operatorname{pst}(X)$.

(2) $\to$ (3): Очевидно.

(3) $\to$ (1): Предположим, что для некоторого стандартного $U \in \mathscr{U}$ и всякого конечного стандартного $E \subset X$ не верно, что $\operatorname{pst}(X) \subset U(E)$. По принципу идеализации это означает, что найдется внутренняя точка $x \in \operatorname{pst}(X)$, обладающая свойством: $x \notin U(y)$ при

любом $y \in {}^\circ X$. По определению 4.5.2 ${}^{\approx}x = \mu(\mathscr{F})$ для подходящего фильтра Коши $\mathscr{F}$. Возьмем $F \in {}^\circ\mathscr{F}$ такое, что $F \times F \subset U$. Тогда для всякого $y \in {}^\circ F$ будет $x \in \mu(\mathscr{F}) \subset U(y)$, вопреки нашему допущению. Итак, $(\forall^{\mathrm{st}} U \in \mathscr{U})(\exists^{\mathrm{st\,fin}} E \subset X)(U(E) \supset \operatorname{pst}(X))$. Осталось вспомнить, что $\operatorname{pst}(X) \supset {}^\circ X$.

(1) $\leftrightarrow$ (4): Содержится в 4.5.9. $\triangleright$

4.5.12. *Критерий Хаусдорфа.* *Равномерное пространство является компактным в том и только в том случае, если оно полно и вполне ограничено.*

$\triangleleft$ $\to$: Если пространство X компактно (и стандартно), то каждая точка в нем околостандартна и, стало быть, предстандартна по 4.5.3. На основании 4.5.11 X вполне ограничено. В силу 4.5.6 X полно.

$\leftarrow$: Раз X вполне ограничено, то по 4.5.11 $X = \operatorname{pst}(X)$. Поскольку X полно, то по 4.6.6 $\operatorname{pst}(X) = \operatorname{nst}(X)$. Окончательно $X = \operatorname{nst}(X)$, т. е. X — компактно по 4.3.6. $\triangleright$

4.5.13. *Пусть X — произвольное множество, а Y — равномерное пространство и $f : X \to Y$ — (стандартная) функция. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *f — вполне ограниченное отображение, т. е.* $\operatorname{im} f$ *вполне ограничен в Y;*

(2) *существует внутреннее конечное покрытие $\mathscr{E}$ множества X такое, что $f(E)$ бесконечно мало для каждого $E \in \mathscr{E}$, т. е. f — почти ступенчатая функция относительно $\mathscr{E}$;*

(3) *существуют внутреннее $n \in \mathbb{N}$ и набор $\{X_1, \dots, X_n\}$ внешних попарно непересекающихся множеств, таких что $X_1 \cup \ldots \cup X_n = X$ и $f(x) \approx (x')$ для всех $x, x' = X_k$ при каждом $k := 1, \dots, n$.*

$\triangleleft$ (1) $\to$ (2): В силу 4.5.9 имеется внутреннее конечное покрытие $\mathscr{E}$ множества $\operatorname{im} f$ такое, что $E \in \mathscr{E} \to E \subset \mu(\mathscr{U}_Y)$. Полагаем $\mathscr{E}' := \{f^{-1}(E) : E \in \mathscr{E}\}$. Ясно, что $\mathscr{E}'$ — искомое покрытие X.

(2) $\to$ (3): Очевидно.

(3) $\to$ (1): Возьмем $y_k \in f(X_k)$ и положим $E := \{y_k : k = 1, \dots, n\}$. Ясно, что E — внутреннее конечное множество. По условию E — скелет $f(X)$. Значит, на основании 4.5.9 $\operatorname{im} f$ вполне ограничен. $\triangleright$

4.5.14. *Пространство $CB(X,Y)$ вполне ограниченных отображений из X в Y полно в сильной равномерности.*

$\lhd$ В силу 4.5.8 достаточно установить замкнутость $CB(X,Y)$. Итак, пусть стандартная $f : X \to Y$ такова, что для некоторой вполне ограниченной функции g будет $(\forall x \in X) f(x) \approx g(x)$. Ясно, что $\operatorname{im} f \subset {}^{\approx}\operatorname{im} g$. Учитывая полную ограниченность $\operatorname{im} g$, 4.2.5 и 4.5.9, выводим: $f \in \operatorname{cl}(CB(X,Y)) \to f \in CB(X,Y)$. $\rhd$

4.5.15. Конечное покрытие $\mathscr{E}$ множества X называют *мелким*, если оно вписано в каждое стандартное конечное покрытие $\mathscr{E}_0$ стандартного множества X, т. е. если каждое множество из $\mathscr{E}$ содержится в некотором множестве из $\mathscr{E}_0$. Отображение, действующее из X в равномерное пространство и являющееся почти ступенчатым относительно каждого мелкого покрытия X, называют *микроступенчатым* на X.

4.5.16. *Критерий предстандартности в $CB(X,Y)$.* *Пусть Y — полное равномерное пространство. Функция $f : X \to Y$ предстандартна в $CB(X,Y)$ (относительно сильной равномерности) в том и только в том случае, если f микроступенчата на X и образ f составлен из околостандартных точек Y.*

$\lhd$ $\to$: На основании 4.5.14 и 4.5.6 выводим, что f околостандартна в сильной равномерности. Значит, для некоторой $g \in {}^{\circ}CB(X,Y)$ при всех $x \in X$ будет $f(x) \approx g(x)$. Ясно, что $\operatorname{im} f \subset {}^{\approx}\operatorname{im} g$. Кроме того, $\operatorname{im} g \subset \operatorname{pst}(Y)$ в силу 4.5.13. Если теперь $\mathscr{E}$ — какое-либо мелкое покрытие, то, учитывая определение полной ограниченности, для каждого стандартного $V \in \mathscr{U}_Y$ можно подыскать стандартное конечное покрытие $\mathscr{E}'$ в X такое, что $g(E)^2 \subset V$ при всяком $E \in \mathscr{E}'$. Отсюда выводим, что $(\forall E \in \mathscr{E})\, g(E)^2 \subset V$, т. е. g почти ступенчата на $\mathscr{E}$. Значит, при $E \in \mathscr{E}$ и $x, x' \in E$ будет $g(x) \approx f(x) \approx f(x') \approx g(x')$, т. е. f также почти ступенчата относительно $\mathscr{E}$. В силу произвольности $\mathscr{E}$ отображение f микроступенчато.

$\leftarrow$: Поскольку $\operatorname{im} f \subset \operatorname{nst}(Y)$, то $(\forall x \in X)(\exists^{\mathrm{st}} y \in Y)(\forall^{\mathrm{st}} W \in \tau(y))(f(x) \in W)$. Применяя правило введения стандартных функций, имеем

$$(\forall^{\mathrm{st}} W(\,\cdot\,))(\forall x \in X)(\exists^{\mathrm{st}} y \in Y)(f(x) \in W(y)).$$

На основании принципа идеализации выводим:

$$(\forall^{\mathrm{st}} W(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st}}\{y_1, \dots, y_n\})(\forall x \in X)(\exists k)(f(x) \in W(y_k)).$$

Возьмем теперь $V \in \mathscr{U}_Y$. По условию для всякого мелкого покрытия $\mathscr{E}$ множества X и для $E \in \mathscr{E}$ будет $f(E)^2 \subset V$. Привлекая принцип Коши 4.1.17 (учитывая, что мелкие покрытия — удаленные элементы направленного множества конечных покрытий), видим, что имеется стандартное конечное покрытие $\mathscr{E}_V$ такое, что $f(E)^2 \subset V$ при $E \in \mathscr{E}_V$.

Подберем соответствующее стандартное покрытие $\mathscr{E}_V$ и стандартный конечный набор Y_0 элементов Y, для которых $\operatorname{im} f \subset V(Y_0)$.

Используя $\mathscr{E}_V$ и Y_0, легко построить стандартную ступенчатую функцию f_V такую, что $(\forall x \in X)((f_V(x), f(x)) \in V)$. Ясно, что для $U \in {}^\circ\mathscr{U}_Y$, удовлетворяющего условиям: $U = U^{-1}$ и $U \circ U \subset V$, будет $(f_{V'}(x), f_{V''}(x)) \in V' \circ V''^{-1} \subset U \circ U \subset V$ при любых $V', V'' \subset U$. Значит, стандартная сеть $(f_V)_{V \in \mathscr{U}_Y}$ (более полно: ${}^*\{f_V : V \in {}^\circ\mathscr{U}_Y\}$) фундаментальна. Обозначим через g ее стандартный предел в $CB(X, Y)$. По-прежнему справедливо: $(\forall^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{U}_Y)(\forall x \in X)$ $((g(x), f(x)) \in V)$. Окончательно $g \approx f$ в сильной равномерности. Итак, f околостандартна, а значит, и предстандартна в силу полноты $CB(X, Y)$, отмеченной 4.5.14. $\rhd$

4.5.17. *Нестандартные критерии относительной компактности.* *В полном отделимом пространстве X для множества E эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *E относительно компактно;*

(2) *E предкомпактно (т. е. пополнение E компактно);*

(3) *E вполне ограничено;*

(4) *$E \subset \operatorname{pst}(X)$;*

(5) *$E \subset \operatorname{nst}(X)$;*

(6) *E лежит в микрогало конечного множества;*

(7) *$\operatorname{cl}(U)$ имеет конечный скелет.*

$\lhd$ В силу полноты X по 4.5.6 $\operatorname{pst}(X) = \operatorname{nst}(X)$. Значит, (5) $\to$ (1) $\to$ (4) на основании 4.3.8. Бесспорно, что (7) $\to$ (6) $\to$ (3) $\to$ (1) $\to$ (2). Если выполнено (2), то замыкание $\operatorname{cl}(E)$ полно и вполне ограничено по критерию Хаусдорфа. Учитывая 4.5.11, выводим импликацию (2) $\to$ (7). $\rhd$

4.5.18. *Критерии предстандартности в $C(X, Y)$.* *Пусть X — компакт, Y — полное равномерное пространство и $C(X, Y)$ — пространство непрерывных функций, действующих из X в Y, наделенное сильной равномерностью. Для внутреннего элемента $f \in$*

$C(X, Y)$ *эквивалентны утверждения:*

(1) f *предстандартен;*

(2) f *околостандартен;*

(3) f *микронепрерывен и переводит стандартные точки в околостандартные.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Ясно, что f предстандартен в Y^X с сильной равномерностью, например, на основании 4.5.4. В силу 4.5.8 и 4.5.6 f околостандартен в Y^X, т. е. имеется стандартная $g \in Y^X$, для которой $f(x) \approx g(x)$ при всех $x \in X$. Пусть $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — стандартная последовательность в $C(X, Y)$, микросходящаяся к f. Возьмем $x' \approx x$ и заметим, что $f_\xi(x') \approx f_\xi(x)$ для всех стандартных $\xi \in \Xi$ (в силу непрерывности f_ξ и компактности X). Тогда (ср. 3.3.17(3)) для некоторого $\eta \in {}^a\Xi$ будет $f_\eta(x') \approx f_\eta(x)$. Отсюда последовательно выводим $g(x') \approx f(x') \approx f_\eta(x') \approx f_\eta(x) \approx f(x) \approx g(x)$. Таким образом, стандартная функция g микронепрерывна и, стало быть, $g \in CB(X, Y)$ по 4.4.6.

(2) $\to$ (3): По условию для некоторой стандартной непрерывной функции g выполнено: $g(x) \approx f(x)$ для всех $x \in X$. Тем самым $f({}^\circ X) \subset {}^\approx g({}^\circ X) \subset {}^{\approx\circ} g(X) \subset \operatorname{nst}(Y)$. Помимо этого, по 4.5.6 g микронепрерывна и, стало быть, для $x' \approx x$ будет $f(x) \approx g(x) \approx g(x') \approx f(x')$.

(3) $\to$ (1): В силу 4.5.3 следует убедиться только, что (3) $\to$ (2). Пусть f — микронепрерывная функция, для которой $f({}^\circ X) \subset \operatorname{nst}(X)$. По принципу введения стандартных функций имеется стандартная функция g такая, что $g(x) \in {}^\circ f(x)$ для $x \in {}^\circ X$. Проверим, что g равномерно непрерывна. Для этого возьмем стандартное окружение $V \in \mathscr{U}_Y$ и подберем стандартное $W \in \mathscr{U}_Y$ из условия $W \circ W \circ W \subset V$. Учитывая 4.5.7, подыщем стандартное U из единственной равномерности $\mathscr{U}_X$ (см. 4.4.8 (4)), чтобы было $f^\times(U) \subset W$. Для стандартных $x, x' \in {}^\circ X$ при $(x, x') \in U$ будет $(f(x), f(x')) \in W$, $(f(x'), g(x')) \in W$, $(g(x), f(x)) \in W$. Следовательно, $(g(x), g(x')) \in W \circ W \circ W \subset V$. Окончательно

$$(\forall^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{U}_Y)(\exists^{\mathrm{st}} U \in \mathscr{U}_X)(\forall^{\mathrm{st}} x, x' \in U)((g(x), g(x')) \in V).$$

Значит, по принципу переноса $g \in C(X, Y)$. Теперь для произвольного $x \in X$ выводим $f(x) = f(x') \approx g(x') \approx g(x)$, где x' — единственная стандартная точка, бесконечно близкая к x. Итак, элемент f бесконечно близок к g в сильной равномерности. $\rhd$

4.5.19. *Теорема Асколи — Арцела.* *Пусть X — компакт, а Y — полное отделимое равномерное пространство и $E \subset C(X, Y)$. Множество E относительно компактно в сильной равномерности в том и только в том случае, если E равностепенно непрерывно и равномерно (вполне) ограничено (т. е. для некоторого вполне ограниченного C в Y будет $f(X) \subset C$ при всех $f \in E$).*

$\lhd$ Все следует из 4.5.18, 4.5.17 и 4.4.6 (2). $\rhd$

4.6. Относительные монады

Понятие относительно стандартного элемента, введенное в 3.9, удобно при характеризации некоторых топологических свойств.

4.6.1. Пусть τ — произвольный допустимый элемент (см. 3.9.2). Возьмем τ-стандартное топологическое пространство X. Для τ-стандартной точки $a \in X$ определим ее τ-*монаду* как пересечение всех τ-стандартных окрестностей этой точки:

$$\mu^{\tau}(a) := \bigcap \{u \subset X : u \text{ открыто}, \ a \in u, \ u \operatorname{st} \tau\}.$$

Если $x \in \mu^{\tau}(a)$, то говорят, что x является τ-*бесконечно близкой к* a точкой и пишут $x \overset{\tau}{\approx} a$. Если X — равномерное пространство с τ-стандартной равномерностью Σ, то про произвольные две точки x и y в нем говорят, что они τ-*бесконечно близки* и пишут $x \overset{\tau}{\approx} y$, если $(x, y) \in \bigcap \{\sigma \in \Sigma : \sigma \operatorname{st} \tau\}$.

Непосредственно из принципа идеализации следует, что если a не является изолированной точкой, то $\mu^{\tau}(a) - \{a\} \neq \varnothing$.

4.6.2. *Пусть τ и λ — допустимые элементы, причем τ является λ-стандартным. Если X — это τ-стандартное топологическое пространство и $a \in X$ — некоторая τ-стандартная точка в нем, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *$\mu^{\lambda}(a) \subset \mu^{\tau}(a)$;*

(2) *для произвольных $x, y \in X$ из $x \overset{\lambda}{\approx} y$ следует $x \overset{\tau}{\approx} y$;*

(3) *если X и a стандартны, то $\mu^{\lambda}(a) \subset \mu(a)$;*

(4) *если X и a стандартны, то для произвольных $x, y \in X$ из $x \overset{\lambda}{\approx} y$ вытекает $x \approx y$.*

$\lhd$ Доказательство следует из 3.9.4 (2). Из этого же предложения видно, что $X \operatorname{st} \lambda$, стало быть, определение $\mu^{\lambda}(a)$ корректно.

В случае стандартных X и a следует взять $\tau = \varnothing$ (или любое другое стандартное множество), поскольку формулы $\mathrm{st}(X)$ и $X \,\mathrm{st}\, \varnothing$ равносильны. $\triangleright$

4.6.3. Теорема. *Пусть заданы некоторое топологическое пространство X, множество A в X и точка $a \in X$. Тогда:*

(1) *A открыто в том и только в том случае, если $\mu^\tau(x) \subset A$ для любых τ-стандартных $x \in A$;*

(2) *A замкнуто в том и только в том случае, если любая τ-стандартная точка $x \in X$, имеющая τ-бесконечно близкие точки из A, содержится в A, т. е. если*

$$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} x \in X)(\forall \eta \in A)(\eta \in \mu^\tau(x) \to x \in A).$$

$\triangleleft$ Эти утверждения доказываются так же, как и аналогичные факты для стандартных объектов. Для полноты приведем доказательство (1).

Пусть σ — топология на X и $\sigma(a)$ — множество всех открытых окрестностей точки a. Из τ-стандартности топологического пространства X в силу 3.9.7 (1) вытекает τ-стандартность топологии σ, а также множества $\sigma(a)$ для каждого τ-стандартного $a \in X$. Допустим открытость множества A и возьмем τ-стандартный элемент $x \in A$. Тогда по определению τ-монады $\mu^\tau(x) = \bigcap\{u : u \,\mathrm{st}\, \tau, u \in \sigma(x)\}$, следовательно, $\mu^\tau(x) \subset A$, так как $A \in \sigma(x)$. Для обоснования обратного утверждения предположим, что $\mu^\tau(x) \subset A$ для любого τ-стандартного $x \in A$, но A не является открытым. Так как X, A стандартны относительно τ, то в силу релятивизированного принципа переноса будет

$$(\exists^{\mathrm{st}\ \tau} x \in A)(\forall^{\mathrm{st}\ \tau} U \in \sigma(x))(\exists^{\mathrm{st}\ \tau} y)(y \in U \wedge y \notin A).$$

Рассмотрим бинарное отношение $\mathscr{R} \subset \sigma(x) \times X$, определяемое формулой

$$(u, z) \in \mathscr{R} \leftrightarrow z \in U \wedge z \notin A.$$

Отношение $\mathscr{R}$ удовлетворяет условию принципа идеализации, поскольку $\bigcap I \in \sigma(x)$ и $\bigcap I \,\mathrm{st}\, \tau$ для любого τ-стандартного конечного множества $I \subset \sigma(x)$. Но это означает, что $(\exists y)(\forall^{\mathrm{st}\ \tau} U \in \sigma(x))(y \in U \wedge y \notin A)$. Тем самым приходим к противоречивому соотношению $y \in \mu^\tau(x) - A$. $\triangleright$

4.6.4. *Теорема.* *Пусть топологические пространства X и Y, отображение $f : X \to Y$, точки $a \in X$ и $b \in Y$ являются τ-стандартными. Если τ — это λ-стандартный элемент для некоторого допустимого λ, то справедливы соотношения*

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *в том и только в том случае, если для любого* $\xi \in X$ *из* $\xi \overset{\lambda}{\approx} a$ *следует* $f(\xi) \overset{\tau}{\approx} b$;

(2) *в случае равномерных пространств X и Y отображение f равномерно непрерывно в том и только в том случае, если для любых $\xi, \eta \in X$ из $\xi \overset{\lambda}{\approx} \eta$ следует $f(\xi) \overset{\tau}{\approx} f(\eta)$.*

$\lhd$ Докажем (1). Из-за τ-стандартности f, a и b релятивизированный принцип переноса дает

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}\ \tau} W \in \sigma_Y(b))(\exists^{\mathrm{st}\ \tau} u \in \sigma_X(a))(f(u) \subset W),$$

где σ_Y и σ_X — топологии в Y и X соответственно. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Требуется доказать, что $f(\mu^\lambda(a)) \subset \mu^\tau(b)$. Согласно 4.6.2 (1) $\mu^\lambda(a) \subset \mu^\tau(a)$, поэтому достаточно показать, что $f(\mu^\tau(a)) \subset \mu^\tau(b)$ или, в эквивалентной записи,

$$(\forall^{\mathrm{st}\ \tau} W \in \sigma_Y(b))(f(\mu^\tau(a)) \subset W).$$

Предположим, что $u \operatorname{st} \tau$, $u \in \sigma_X(a)$ и $f(u) \subset W$. Тогда $\mu^\tau(a) \subset u$, значит, $f(\mu^\tau(a)) \subset W$, что и требовалось.

Для обоснования обратной импликации предположим, что имеет место включение $f(\mu^\lambda(a)) \subset \mu^\tau(b)$. Зафиксируем произвольную τ-стандартную окрестность $W \in \sigma_Y(b)$ и заметим, что в силу 3.9.4 (2) будет $W \operatorname{st} \lambda$ и $f(\mu^\lambda(a)) \subset W$.

Докажем сначала формулу $(\exists^{\mathrm{st}\ \lambda} U \in \sigma_X(a))(f(U) \subset W)$. Если это не так, то отношение $\mathscr{R}_1 \subset \sigma_X(a) \times Y$, определяемое равенством $\mathscr{R}_1 := \{(U, y) : y \in U \wedge f(y) \notin W\}$, удовлетворяет условию релятивизированного принципа идеализации. Применив последний, получаем формулу

$$(\exists y)(\forall^{\mathrm{st}\ \lambda} U \in \sigma_X(a))(y \in U \wedge f(y) \notin W).$$

Это противоречит включению $f(\mu^\lambda(a)) \subset W$. Таким образом, $(\exists u \in \sigma_X(a))\,(f(U) \subset W)$. Так как все параметры в последнем предложении τ-стандартны, то релятивизированный принцип переноса дает $(\exists^{\mathrm{st}\ \tau} U \in \sigma_X(a))\,(f(U) \subset W)$, что и требовалось. Утверждение (2) доказывается аналогично. $\rhd$

4.6.5. Теоремы 4.6.3 и 4.6.4 применимы к любым допустимым объектам, так как $x \operatorname{st} x$ для любого допустимого x. Так, например, если $\tau := (X, A)$ (или же если $\tau := (X, Y, f, a, b)$), то объекты X и A в теореме 4.6.3 (соответственно X, Y, f, a, b в теореме 4.6.4) стандартны относительно τ. Отсюда вытекают, в частности, следующие утверждения.

(1) *Пусть X — допустимое топологическое пространство и $A \subset X$. Если $\tau := (X, A)$, то множество $A \subset X$ открыто в том и только в том случае, если $\mu^\tau(x) \subset A$ для любого $x \in A$, стандартного относительно τ.*

(2) *Пусть X и Y — допустимые топологические пространства, $f : X \to Y$, $a \in X$ и $b \in Y$. При $\tau := (X, Y, f, a, b)$ верна следующая эквивалентность:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \leftrightarrow (\forall x \in \mu^\tau(a))\, f(x) \in \mu^\tau(b).$$

4.6.6. Рассмотрим теперь подробнее случай $X := \mathbb{R}$. Зафиксируем внутреннее допустимое множество τ. Пусть $x \in \mathbb{R}$ — произвольное (не обязательно стандартное) число. Будем говорить, что x является τ-*бесконечно малым* числом и писать $x \overset{\tau}{\approx} 0$, если $(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} y \in \mathbb{R}_+)\, |x| < y$. Естественны также следующие определения: x — это τ-*бесконечно большое* число, символически $x \overset{\tau}{\approx} \infty$ или $x \overset{\tau}{\sim} \infty$, если $1/x$ — это τ-бесконечно малое число; x — это τ-*доступное* или τ-*конечное* число, если x не является τ-бесконечно большим; последнее обстоятельство записывают как $x \overset{\tau}{\ll} \infty$.

Как видно непосредственно из определений, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
x \overset{\tau}{\approx} 0 \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}\ \tau} y \in \mathbb{R}_+)\,(|x| \le y),\\
x \overset{\tau}{\approx} \infty \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}\ \tau} y \in \mathbb{R}_+)\,(|x| > y),\\
x \overset{\tau}{\ll} \infty \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}\ \tau} y \in \mathbb{R}_+)\,(|x| \le y).
\end{gathered}$$

4.6.7. *Число $x \in \mathbb{R}_+$ будет τ-бесконечно малым тогда и только тогда, когда $|x| < \varphi(\tau)$ для любой стандартной функции φ со значениями в $\mathbb{R}_+$ такой, что $\tau \in \operatorname{dom}(\varphi)$.*

$\lhd$ Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $y \in \mathbb{R}_+$ и $y \operatorname{st} \tau$. Покажем, что $|x| < y$. Из условия $y \operatorname{st} \tau$ вытекает существование такой стандартной функции ψ, что $\tau \in \operatorname{dom}(\psi)$, $\operatorname{im}(\psi) \subset \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+)$ (как обычно, символом $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(A)$ обозначим множество всех конечных подмножеств A), $y \in \psi(\tau)$. Определим стандартную (ввиду 3.9.3) функцию $\varphi : \operatorname{dom}(\psi) \to \mathbb{R}_+$, положив $\varphi(\alpha) := \min \psi(\alpha)$. Тогда из условий следует, что $|x| < \varphi(\tau)$, а из определения функции φ видно, что $y \geq \varphi(\tau)$. $\rhd$

4.6.8. *Для любого $x \in \mathbb{R}_+$ и натурального числа $n \leq x$ выполняется $n \operatorname{st} x$.*

$\lhd$ Пусть $m := [x]$ — целая часть числа x. Тогда $m \operatorname{st} x$ и $n \leq m$. Рассмотрим множество $\overline{m} = \{0, 1, \dots, m\}$. Как видно из предложения 3.9.7 (1), $\overline{m} \operatorname{st} m$. Более того, $\overline{m}$ — конечное множество, т. е. верна формула $\operatorname{fin}(\overline{m})$. Из 3.9.7 (2) вытекает, что $n \operatorname{st} \overline{m}$, если $n \in \overline{m}$. $\rhd$

4.6.9. *Пусть $\lambda \operatorname{st} \tau$. Если $x \overset{\tau}{\approx} 0$ (или $x \overset{\tau}{\approx} \infty$), то $x \overset{\lambda}{\approx} 0$ (соответственно $x \overset{\lambda}{\approx} \infty$). Если число x является λ-доступным, то x и τ-доступно.*

$\lhd$ Следует из соотношений, отмеченных в 4.6.6. $\rhd$

4.6.10. *Теорема.* *Имеют место утверждения:*

(1) **Принцип доступности.** *Если внутреннее множество $B \subset \mathbb{R}$ состоит только из τ-доступных элементов, то существует τ-стандартное $t \in \mathbb{R}$ такое, что $B \subset [-t, t]$.*

(2) **Принцип перманентности.** *Если внутреннее множество B содержит все положительные τ-доступные числа, то оно содержит и интервал $[0, \Omega]$ для некоторого τ-бесконечно большого Ω.*

(3) **Принцип Коши.** *Если внутреннее множество B содержит все τ-бесконечно малые числа, то оно содержит и интервал $[-a, a]$ для некоторого τ-стандартного $a \in \mathbb{R}_+$.*

(4) **Принцип Робинсона.** *Если внутреннее множество B состоит только из τ-бесконечно малых чисел, то B содержится в интервале $[-\varepsilon, \varepsilon]$, где ε — некоторое τ-бесконечно малое положительное число.*

◁ Ограничимся доказательством (1) и (4).

(1): Если $\lambda \overset{\tau}{\approx} \infty$, то по условию $|\xi| < \lambda$ для всех $\xi \in B$ (см. 4.6.6). Тем самым B — ограниченное множество. Так как множество $B' := \{|b| : b \in B\}$ ограничено сверху, то существует положительное $\mu := \sup(B')$. Если $\mu \overset{\tau}{\approx} \infty$, то $\mu - 1 \overset{\tau}{\approx} \infty$ и по определению супремума $\mu - 1 < |\xi| \le \mu$ для некоторого $\xi \in B$. Но это противоречит доступности ξ. Следовательно, μ — это τ-доступное число, значит (см. 4.6.6), существует τ-стандартное число $t \in \mathbb{R}$ такое, что $t > \mu$. Как видно, $B \subset [-t, t]$.

(4): Возьмем произвольное τ-стандартное число $y \in \mathbb{R}$. По условию для любого $\xi \in B'$ будет $\xi \le y$, следовательно, B' — ограниченное множество. Положим $\varepsilon := \sup(B')$. Тогда будет $B \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ и для любого τ-стандартного $y \in \mathbb{R}$ верно $\varepsilon \le y$. Аналогично доказываются (2) и (3). ▷

4.6.11. *Для каждого бесконечно большого* (*бесконечно малого*) *числа $x \in \mathbb{R}$ существует нестандартное число η такое, что $x \overset{\eta}{\approx} \infty$* (*соответственно $x \overset{\eta}{\approx} 0$*). *Это число η можно выбрать доступным, бесконечно малым или бесконечно большим.*

◁ Рассмотрим внутреннее отношение $\sigma \subset \mathbb{R}_+^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, определяемое формулой

$$(f, \xi, \eta) \in \sigma \leftrightarrow f(\eta) < |x| \wedge \eta \ne \xi.$$

Предполагая x бесконечно большим, легко видеть, что σ удовлетворяет посылке принципа идеализации, т. е. выполняется

$$(\forall^{\mathrm{st\ fin}} M \subset \mathbb{R}_+^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R})(\exists \eta)(\forall (f, \xi) \in M)((f, \xi, \eta) \in \sigma).$$

Применив принцип идеализации, получим

$$(\exists \eta)(\forall^{\mathrm{st}} f \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{R}})(\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \mathbb{R})(f(\eta) < |x| \wedge \eta \ne \xi).$$

Число η, удовлетворяющее последнему соотношению, будет искомым. Если η доступно, то $\eta' = \eta - {}^\circ\eta \approx 0$ также удовлетворяет требуемым условиям в силу предложения 4.6.9. ▷

Рассмотрим теперь, как введенные понятия могут помочь обойти трудности, о которых говорилось в начале параграфа 3.9.

4.6.12. Теорема. *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ стандартны и для каждого x из некоторой окрестности нуля существует $\lim_{y\to 0} f(x,y)$. Тогда*

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = a \leftrightarrow (\forall \alpha \approx 0)\,(\forall \beta \overset{\alpha}{\approx} 0)\,(f(\alpha,\beta) - a \approx 0).$$

$\lhd$ Пусть $a := \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$. Положим

$$g(x) := \lim_{y\to 0} f(x,y).$$

Тогда $g(\alpha) \approx a$ для любого $\alpha \approx 0$. Отметим, что g — стандартная функция в силу 3.9.3, следовательно, $g(\alpha)\,\mathrm{st}\,\alpha$. Теперь ввиду 4.6.2 и 3.9.4 (2) равенство $g(\alpha) = \lim_{y\to 0} f(\alpha,y)$ эквивалентно утверждению

$$(\forall \beta \overset{\alpha}{\approx} 0)\, f(\alpha,\beta) \overset{\alpha}{\approx} g(\alpha).$$

В силу 4.6.2 из $f(\alpha,\beta) \overset{\alpha}{\approx} \varphi(\alpha)$ следует $f(\alpha,\beta) \approx g(\alpha)$. Но так как $g(\alpha) \approx a$, то $f(\alpha,\beta) \approx a$.

Докажем обратное утверждение. При этом достаточно установить предложение

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta)(\forall x)\Big(|x| < \delta \to (\exists \gamma)(\forall y)(|y| < \gamma \to |f(x,y) - a| < \varepsilon)\Big).$$

Зафиксируем произвольное стандартное ε и рассмотрим внутреннее множество

$$M :=$$
$$:= \Big\{\delta > 0 : (\forall x)\,\Big(|x| < \delta \to (\exists \gamma)(\forall y)(|y| < \gamma \to |f(x,y) - a| < \varepsilon)\Big)\Big\}.$$

Легко понять, что M содержит все бесконечно малые числа. В самом деле, если $\delta \approx 0$ и $|x| < \delta$, то $x \approx 0$. Если $\gamma \overset{x}{\approx} 0$, то $(\forall y)(|y| < \gamma \to y \overset{x}{\approx} 0)$. Отсюда $|f(x,y) - a| < \varepsilon$. Теперь очевидно, что в силу принципа Коши M содержит и некоторый стандартный элемент. $\rhd$

Понятно, что эта теорема имеет место и в случае, если $x \to b$ и $y \to c$ для произвольных стандартных b и c. Без труда рассматриваются и случаи бесконечного предела и предела в бесконечности, а также повторный предел в произвольных топологических пространствах.

4.6.13. *Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на каждом конечном интервале и существует $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ хотя бы в смысле главного значения, то имеет место представление*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = {}^{\circ}\!\left(\Delta \sum_{-[\frac{a}{\Delta}]}^{[\frac{a}{\Delta}]} {}^{*}\!f(k\Delta)\right)$$

для любых $a \approx \infty$ и $\Delta \overset{a}{\approx} 0$.

$\lhd$ Следует непосредственно из 4.6.12. $\rhd$

4.6.14. Рассмотрим теперь три простых иллюстративных примера.

(1) Обратимся к «трудной» части теоремы Лопиталя.

Пусть f и g — стандартные функции, дифференцируемые в окрестности стандартной точки a. Допустим, что $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, $g'(x) \neq 0$ в окрестности a и

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d.$$

Требуется показать, что $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = d$. Возьмем произвольные точки y, $z \approx a$. Для определенности полагаем $a < z < y$. По теореме Коши существует точка $\eta \in [z, y]$, для которой

$$\frac{{}^{*}\!f(y) - {}^{*}\!f(z)}{{}^{*}\!g(y) - {}^{*}\!g(z)} = \frac{{}^{*}\!f'(\eta)}{{}^{*}\!g'(\eta)} \approx d,$$

поскольку $\eta \approx a$. Рассмотрим равенство

$$\frac{{}^{*}\!f(y) - {}^{*}\!f(z)}{{}^{*}\!g(y) - {}^{*}\!g(z)} = \frac{{}^{*}\!f(z)}{{}^{*}\!g(z)} \cdot \left(1 - \frac{{}^{*}\!f(y)}{{}^{*}\!f(z)}\right) \cdot \left(1 - \frac{{}^{*}\!g(y)}{{}^{*}\!g(z)}\right)^{-1}.$$

Из этой формулы вытекает, что если $z \overset{y}{\approx} a$, то ${}^{*}\!f(y)/{}^{*}\!f(z) \approx 0$ и ${}^{*}\!g(y)/{}^{*}\!g(z) \approx 0$ в силу теоремы 4.6.4 (1) (точнее, ее очевидной модификации для бесконечных пределов), следовательно, ${}^{*}\!f(z)/{}^{*}\!g(z) \approx d$. Таким образом, ${}^{*}\!f(z)/{}^{*}\!g(z) \approx d$ для любого $z \overset{y}{\approx} a$. В соответствии с 4.6.4 (1) это означает, что $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = d$.

(2) Завершим доказательство утверждения из 4.6.4 (2). Для этого возьмем x' и x'' так, чтобы $x' \overset{N}{\approx} x''$. Тогда ввиду 4.6.4 (2) ${}^*f_N(x') \approx {}^*f_N(x'')$ и мы получаем немедленно ${}^*f(x') \approx {}^*f(x'')$. Тем самым для любых x', x'' из $x' \overset{N}{\approx} x''$ следует ${}^*f(x') \approx {}^*f(x'')$. Но согласно 4.6.4 (2) это и означает равномерную непрерывность функции f.

(3) В качестве применения предложения 4.6.11 укажем следующее утверждение (см. [5, 1.3.2]).

Пусть $(a_{m,n})_{m\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}}$ — некоторая стандартная двойная последовательность такая, что существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = a; \quad \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = b.$$

Тогда

$$(\forall m \approx \infty)(\exists n_1, n_2 \approx \infty)$$
$$\big((\forall n < n_1)(n \approx \infty \to a_{m,n} \approx a) \wedge (\forall n > n_2)(a_{m,n} \approx b)\big).$$

Для доказательства этого утверждения нужно подобрать $n_1 \approx \infty$ так, чтобы $m \overset{n_1}{\approx} \infty$ (что возможно в силу 4.6.11) и $n_2 \overset{m}{\approx} \infty$.

4.6.15. *Теорема.* *Существуют бесконечно большое натуральное число N и $x \in [0,1]$ такие, что если число y стало N-бесконечно близким к x, то y не будет N-стандартным.*

$\lhd$ Предположим, что это утверждение теоремы ложно. Тогда, воспользовавшись 4.6.6, выводим, что в IST истинно предложение

$$(\forall N \in \mathbb{N})(\forall x \in [0,1])(\exists^{\mathrm{st}}\varphi \in (\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R})_+)^{\mathbb{N}})(\exists z \in \mathbb{R}_+)$$
$$(\forall^{\mathrm{st}}\psi \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}})(z \in \varphi(N) \wedge |x - z| < \psi(N)).$$

К последней формуле применим алгоритм Нельсона. В дальнейшем считаем, что переменные N, x, φ, z, ψ пробегают те же множества, что в этой формуле, и не будем указывать этого в следующих ниже соотношениях. На основании принципа идеализации приходим к предложению

$$(\forall N)(\forall x)(\exists^{\mathrm{st}}\varphi)\,(\forall^{\mathrm{st}}\Xi)(\exists z)(\forall\psi \in \Xi)(z \in \varphi(N) \wedge |x - z| < \psi(N)),$$

где $\Xi \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}})$. Применяя к этому предложению принцип стандартизации, получаем, что оно равносильно формуле

$$(\forall N)\,(\forall x)(\forall^{\mathrm{st}}\tilde{\Xi})(\exists^{\mathrm{st}}\varphi)(\exists z)(\forall\psi \in \tilde{\Xi}(\varphi))(z \in \varphi(N) \wedge |x - z| < \psi(N)),$$

где $\tilde{\Xi} : \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}} \to \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}})$. Меняя местами крайние левые кванторы $\forall$, используя вновь принцип идеализации, а затем принцип переноса, выводим, что последняя формула равносильна следующему внутреннему предложению:

$$\begin{gathered}(\forall\tilde{\Xi})(\exists\Phi)(\forall N)\,(\forall x)(\exists\varphi \in \Phi)(\forall\psi \in \tilde{\Xi}(\varphi))(\exists z)\\ (z \in \varphi(N) \wedge |x - z| < \psi(N)),\end{gathered}$$

где $\Phi \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}})$. Осталось доказать, что полученное предложение ложно в ZFC.

Определим функцию $\tilde{\Xi}$ и множество $M_{\varphi,n}$ формулами

$$\begin{gathered}\tilde{\Xi}(\varphi) := \{\psi\}, \quad \psi(n) := a_n := 1/2n|\varphi(n)| \quad \varphi \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}});\\ M_{\varphi,n} := \bigcup_{z \in \varphi(n)} (z - a_n, z + a_n),\end{gathered}$$

где $|\varphi(n)|$ — число элементов множества $\varphi(n)$.

Заметим, что $\nu(M_{\varphi,n}) \leq 1/n$, где ν — мера Лебега. Если $\Phi \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}})$, то положим

$$\overline{M}_{\Phi,n} := \bigcup_{\varphi \in \Phi} M_{\varphi,n}.$$

Ясно, что $\nu(\overline{M}_{\Phi,n}) \leq |\Phi|/n$.

Если бы указанное выше предложение выполнялось в ZFC, то, применив его к построенной функции, получили бы

$$(\exists\Phi \in \mathscr{P}^{\mathrm{fin}}(\mathscr{P}^{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}})(\forall n \in \mathbb{N})\,([0,1] \subset \overline{M}_{\Phi,n}).$$

Но это неверно, так как при $n > |\Phi|$ приходим к противоречивому выводу $\nu(\overline{M}_{\Phi,n}) < 1$. $\triangleright$

4.6.16. Примечания.

(1) Материал этого параграфа взят из [44], см. также [325].

(2) Из 4.6.14 вытекает также, что нестандартные критерии компактности 4.3.6 не допускают обобщения на случай τ-стандартных объектов, как это имеет место для критерия равномерной непрерывности 4.4.6 (1) (см. 4.6.4).

(3) Рассмотрим отношение строгой стандартности sst, о котором говорилось в 3.9.16 (4). Заменяя $\cdot\,\mathrm{st}\,\cdot$ на $\cdot\,\mathrm{sst}\,\cdot$ в 4.6.6, мы определяем τ-бесконечно малые (τ-бесконечно большие, τ-доступные) числа относительно этого предиката $\cdot\,\mathrm{sst}\,\cdot$. При этом из предложения 4.6.7 видно, что понятие τ-бесконечно малого (τ-бесконечно большого, τ-доступного) числа относительно предиката $\cdot\,\mathrm{st}\,\tau\cdot$ совпадает с соответствующим понятием относительно предиката $\cdot\,\mathrm{sst}\,\tau\cdot$.

(4) Простая модификация доказательства предложения 4.6.7 показывает, что понятие τ-бесконечной близости в произвольных топологических пространствах и равномерных пространствах относительно предикатов $\cdot\,\mathrm{st}\,\cdot$ и $\cdot\,\mathrm{sst}\,\cdot$ совпадают. Отсюда вытекает, что теоремы 4.6.3, 4.6.4, 4.6.10, 4.6.12 и предложения 4.6.9, 4.6.11 остаются в силе, если в них предикат $\cdot\,\mathrm{st}\,\tau\cdot$ заменить на $\cdot\,\mathrm{sst}\,\tau\cdot$.

(5) Несмотря на (4), предложение 4.6.8 не имеет места с предикатом $\cdot\,\mathrm{sst}\,\tau\cdot$. Отсюда вытекает, что ни 3.9.4 (3), ни импликация $\leftarrow$ в релятивизированном принципе идеализации не сохраняются при замене $\cdot\,\mathrm{st}\,\tau\cdot$ на $\cdot\,\mathrm{sst}\,\tau\cdot$. Подробнее об этом см. [44, 325].

4.7. Компактность и субнепрерывность

В этом параграфе даются стандартные и нестандартные критерии компактности и аналогичных понятий для фильтров, детализирующие аналогичные факты нестандартной общей топологии, относящиеся к множествам (ср. 4.3, 4.5). Приведены приложения к теории субнепрерывных соответствий, развитой в [319, 479].

4.7.1. Фильтр $\mathscr{F}$ (в топологическом пространстве X) называют *компактным* (см. [448]), если каждый фильтр, более тонкий, чем $\mathscr{F}$, имеет точку прикосновения в X. Соответственно сеть называют *компактной,* если каждая ее подсеть имеет сходящуюся подсеть.

4.7.2. *Стандартный фильтр $\mathscr{F}$ в X является компактным в том и только в том случае, если каждая точка его монады околостандартна:* $\mu(\mathscr{F}) \subset \mathrm{nst}\,(X)$.

$\lhd$ $\rightarrow$: Пусть $x \in \mu(\mathscr{F})$. Рассмотрим ультрафильтр $(x) := {}^*\{U \subset X : x \in U\}$ в исходном пространстве X. Ясно, что $(x) \supset \mathscr{F}$ и, стало быть, имеется стандартная точка x' такая, что $x \approx x'$. Иными словами, x — околостандартная точка.

$\leftarrow$: Если $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}$, то $\mu(\mathscr{G}) \subset \mu(\mathscr{F})$. Пусть $x \in \mu(\mathscr{G})$. Тогда $x \in \operatorname{nst}(X)$, т. е. для некоторой $x' \in {}^{\circ}X$ будет $x \approx x'$. Последнее означает, что x' — точка прикосновения $\mathscr{F}$. $\rhd$

4.7.3. *Фильтр $\mathscr{F}$ в X является компактным в том и только в том случае, если для любого открытого покрытия множества X найдется конечное подпокрытие некоторого элемента из $\mathscr{F}$.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Достаточно работать в стандартном антураже. Итак, если $\mathscr{F}$ компактен, то $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{nst}(X)$. Учитывая, что $\operatorname{nst}(X)$ лежит в монаде любого стандартного покрытия $\mathscr{E}$, выводим: $(\exists F \in \mathscr{F})(\forall x \in F)(\exists E \in {}^{\circ}\mathscr{E})(x \in E)$. В качестве искомого F можно взять любой бесконечно малый элемент $\mathscr{F}$. Применяя последовательно принципы идеализации и переноса, получим требуемое.

$\leftarrow$: Пусть $\mathscr{E}$ — открытое покрытие X и $\mu(\mathscr{E})$ — объединение стандартных элементов $\mathscr{E}$, т. е. монада $\mathscr{E}$. По принципу переноса имеются стандартное $F \in \mathscr{F}$ и конечное стандартное подмножество $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$ такие, что $\bigcup \mathscr{E}_0 \supset F \supset \mu(\mathscr{F})$. Значит, $\mu(\mathscr{F}) \subset \mu(\mathscr{E})$. Остается вспомнить, что $\operatorname{nst}(X)$ — это в точности пересечение монад стандартных открытых покрытий X. $\rhd$

4.7.4. Сформулированный в 4.7.3 признак делает естественным поиск аналога критерия Хаусдорфа для фильтров. В этой связи будем рассматривать равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$.

4.7.5. Фильтр $\mathscr{F}$ в X называют *вполне ограниченным,* если для каждого окружения $U \in \mathscr{U}$ имеется конечная U-сеть некоторого элемента F фильтра $\mathscr{F}$.

4.7.6. Фильтр $\mathscr{F}$ в X называют *полным,* если каждый фильтр Коши, более тонкий, чем $\mathscr{F}$, сходится в X.

4.7.7. *Стандартный фильтр является полным в том и только в том случае, если каждая предстандартная точка его монады околостандартна.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Пусть $\mathscr{F}$ — полный фильтр и $x \in \operatorname{pst}(X) \cap \mu(\mathscr{F})$ — предстандартная точка монады $\mathscr{F}$. Предстандартность x означает, что x

лежит в монаде некоторого фильтра Коши $\mathscr{G}$. При этом $\mu(\mathscr{F}) \cap \mu(\mathscr{G}) \neq \varnothing$. Ясно, что верхняя грань $\mathscr{G}$ и $\mathscr{F}$ — это фильтр Коши и, стало быть, имеется точка $x' \in {}^\circ X$, для которой $x' \in \mu(\mathscr{G}) \cap \mu(\mathscr{F})$. Отсюда $x' \approx x$ и $x \in \operatorname{nst}(X)$.

$\leftarrow$: Пусть $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — фильтр Коши. Если $x \in \mu(\mathscr{G})$, то $x \in \mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{nst}(X)$. Значит, у $\mathscr{G}$ есть точка прикосновения. $\triangleright$

4.7.8. *Стандартный фильтр является вполне ограниченным в том и только в том случае, если каждая точка его монады предстандартна.*

$\triangleleft$ $\rightarrow$: По принципу переноса для каждого стандартного окружения U из $\mathscr{U}$ имеются стандартный элемент F фильтра $\mathscr{F}$ и конечное стандартное множество E такие, что $U(E) \supset F$. Стало быть, $\mu(\mathscr{F}) \subset U(E)$. Тем самым для $x \in \mu(\mathscr{F})$ и любого $U \in {}^\circ\mathscr{U}$ будет $x \in U(x')$ при подходящем стандартном x'. Положим $\mathscr{G} := {}^*\{U(x') : U \in \mathscr{U}, x \in U(x')\}$. Ясно, что $\mathscr{G}$ — базис фильтра Коши и $x \in \mu(\mathscr{G})$ по построению. Следовательно, $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{pst}(X)$.

$\leftarrow$: Допустим, что рассматриваемый фильтр $\mathscr{F}$ таков, что $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{pst}(X)$, и тем не менее $\mathscr{F}$ не вполне ограничен. По принципу переноса имеется стандартное окружение U из ${}^\circ\mathscr{U}$ такое, что для всяких $F \in {}^\circ\mathscr{F}$ и любого стандартного конечного множества E найдется $x \in F$, не попадающий в $U(E)$. По принципу идеализации имеется элемент $x \in \mu(\mathscr{F})$ такой, что $x \notin U(y)$ для каждого стандартного $y \in X$. По условию $x \in \mu(\mathscr{G})$, где $\mathscr{G}$ — фильтр Коши. Возьмем $G \in {}^\circ\mathscr{G}$ так, чтобы было $G \times G \subset U$. Тогда для всякого $y \in G$ выполнено $x \in \mu(\mathscr{G}) \subset U(y)$ вопреки исходному допущению. $\triangleright$

4.7.9. Критерий Хаусдорфа для фильтров. *Фильтр является компактным в том и только в том случае, если он полон и вполне ограничен.*

$\triangleleft$ $\rightarrow$: Достаточно работать в стандартном антураже. Если $\mathscr{F}$ компактен, то $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{nst}(X)$ по 4.7.2. Учитывая, что $\operatorname{nst}(X) \subset \operatorname{pst}(X)$, заключаем: $\mathscr{F}$ полон и вполне ограничен.

$\leftarrow$: Если $\mathscr{F}$ вполне ограничен, то по 4.7.8 $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{pst}(X)$. Если $\mathscr{F}$ полон, то $\mu(\mathscr{F}) \cap \operatorname{pst}(X) \subset \operatorname{nst}(X)$. Отсюда выводим: $\mu(\mathscr{F}) = \mu(\mathscr{F}) \cap \operatorname{pst}(X) \subset \operatorname{nst}(X)$. Остается сослаться на 4.7.2. $\triangleright$

4.7.10. Найденные признаки могут быть положены в основу изучения различных топологических понятий, близких к непрерывности. Остановимся здесь на одном из них (см. [319, 448, 479]).

4.7.11. Соответствие Γ, действующее из X в Y, называют *субнепрерывным в точке* x из $\operatorname{dom}(\Gamma)$, если образ фильтра окрестностей точки x при Γ является компактным в Y. Соответствие Γ, субнепрерывное в каждой точке $\operatorname{dom}(\Gamma)$, называют *субнепрерывным.*

4.7.12. *Стандартное соответствие* Γ *из* X *в* Y *субнепрерывно в том и только в том случае, если* $\Gamma(\operatorname{nst}(X)) \subset \operatorname{nst}(Y)$.

$\lhd$ Доказательство следует из 4.7.2, ибо $\operatorname{nst}(X)$ представляет собой объединение монад точек стандартного ядра ${}^{\circ}X$. $\rhd$

4.7.13. *Соответствие субнепрерывно в том и только в том случае, если оно переводит компактные фильтры в компактные.*

$\lhd$ Поскольку фильтр окрестностей точки заведомо компактен, достаточность приведенного условия бесспорна. Пусть теперь заранее известно, что соответствие субнепрерывно. Без умаления общности можно работать в стандартном антураже. Привлекая 4.7.12 и 4.7.2, видим, что в данной ситуации образ стандартного компактного фильтра компактен. Остается сослаться на принцип переноса. $\rhd$

4.7.14. В связи с критерием 4.7.13 субнепрерывные соответствия называют иногда *компактными* (ср. [448]).

4.7.15. *Субнепрерывное соответствие, действующее в хаусдорфово пространство, сохраняет относительную компактность.*

$\lhd$ Если U — стандартное относительно компактное множество в X, то $U \subset \operatorname{nst}(X)$. Стало быть, $\Gamma(U) \subset \operatorname{nst}(Y)$. В соответствии с 4.3.8 $\Gamma(U)$ относительно компактно. $\rhd$

4.7.16. *Пусть* Γ *— некоторое замкнутое субнепрерывное соответствие. Тогда* Γ *полунепрерывно сверху.*

$\lhd$ По принципу переноса можно работать в стандартном антураже. Итак, пусть A — стандартное замкнутое множество и $x \in \operatorname{cl}(\Gamma^{-1}(A))$. Имеется $x' \approx x$, для которого при некотором $a' \in A$ будет $(x', a') \in \Gamma$. Раз $a' \in \Gamma(\operatorname{nst}(X))$, то найдется стандартное a в образе, для которого $a \approx a'$. В силу замкнутости A выводим: $a \in A$. В силу замкнутости Γ выполнено $(x, a) \in \Gamma$. Итак, $x \in \Gamma^{-1}(A)$. $\rhd$

4.7.17. Предложение 4.7.16 фактически установлено в [479] и обобщает более ранее утверждение о функциях из [319]. В заключение дадим простое нестандартное доказательство небольшой модификации критерия непрерывности 5.1 из [319].

4.7.18. *Пусть $f : X \to Y$ — функция, действующая в хаусдорфово пространство. Тогда f непрерывна в том и только в том случае, если для каждой точки x из X имеется элемент y из Y такой, что условие $x_\xi \to x$ влечет существование подсети $(x_\eta)_{\eta\in \mathrm{H}}$, для которой $f(x_\eta) \to y$.*

$\lhd$ Нуждается в проверке лишь достаточность сформулированного признака. Будем работать в стандартном антураже. По условию имеем

$$(\forall x_\xi \to x)(\exists y_\eta \to y)\ (x_\eta, y_\eta) \in f.$$

Ясно (ср. теорему 5.3.11), что последнее соотношение можно переписать в виде

$$(\forall x' \approx x)(\exists y' \approx y)(x', y') \in f.$$

В частности, для некоторого $y' \approx y$ выполнено $y' = f(x)$. В силу хаусдорфовости Y заключаем, что $y = f(x)$. Кроме того, $x' \approx x \to f(x') \approx f(x)$, т. е. f — непрерывная функция. $\rhd$

4.8. Циклические и экстенсиональные фильтры

В этом параграфе даются необходимые для дальнейшего вспомогательные (и в большей части очевидные) сведения о спусках и подъемах фильтров.

4.8.1. *Для непустых элементов $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ и разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ выполнено*

$$\Bigl(\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\Bigr)\!\downarrow = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\!\downarrow.$$

$\lhd$ Обозначим $A := \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi$. Ясно, что при каждом $\xi \in \Xi$ будет $[\![a \in A_\xi]\!] \geq [\![a \in A]\!] \wedge [\![A = A_\xi]\!] = [\![A = A_\xi]\!] \geq b_\xi$, как только $a \in A\!\downarrow$. В силу принципа переноса в $\mathbb{V}^{(B)}$ верно $[\![a \in A_\xi]\!] = [\![(\exists a_\xi \in A_\xi)(a = a_\xi)]\!]$. Значит, с учетом принципа максимума $(\exists a_\xi \in A_\xi\!\downarrow)[\![a \in A_\xi]\!] = [\![a = a_\xi]\!] \geq b_\xi$. Таким образом, $a = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi a_\xi$.

Пусть теперь известно, что $b_\xi a = b_\xi a_\xi$ при некоторых $a_\xi \in A_\xi\!\downarrow$ и всех $\xi \in \Xi$. Тогда, учитывая, что $[\![A = A_\xi]\!] \geq b_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ по определению перемешивания, выводим $[\![a \in A]\!] \geq [\![a = a_\xi]\!] \wedge [\![a_\xi \in A_\xi]\!] \wedge [\![A_\xi = A]\!] \geq b_\xi$ при $\xi \in \Xi$, т. е. $[\![a \in A]\!] \geq \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi = 1$ и $a \in A\!\downarrow$. $\rhd$

4.8.2. *Для циклических множеств* A_ξ, *где* $A_\xi \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$ *при* $\xi \in \Xi$, *выполнено*

$$\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi{\uparrow} = \Big(\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\Big){\uparrow}.$$

$\lhd$ Учитывая, что $A_\xi{\uparrow}{\downarrow} = A_\xi$ при $\xi \in \Xi$ по условию, на основании 4.8.1 выводим

$$\Big(\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi{\uparrow}\Big){\downarrow} = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi{\uparrow}{\downarrow} = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi.$$

Отсюда, вспоминая, что для непустого внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ множества A верно $A = A{\downarrow}{\uparrow}$, получаем

$$\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi{\uparrow} = \Big(\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi{\uparrow}\Big){\downarrow}{\uparrow} = \Big(\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\Big){\uparrow},$$

что и завершает доказательство. $\rhd$

4.8.3. *Пусть* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *некоторое разбиение единицы и семейства элементов* $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$, $(Y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *таковы, что* $[\![X_\xi \supset Y_\xi]\!] = \mathbb{1}$ $(\xi \in \Xi)$. *Тогда*

$$\Big[\!\!\Big[\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi X_\xi \supset \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi Y_\xi\Big]\!\!\Big] = \mathbb{1}.$$

$\lhd$ Обозначим $X := \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi X_\xi$ и $Y := \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi Y_\xi$. Ясно, что $[\![Y \subset X]\!] \geq [\![X = X_\xi]\!] \wedge [\![X_\xi \supset Y]\!] \geq [\![X = X_\xi]\!] \wedge [\![X_\xi \supset Y_\xi]\!] \wedge [\![Y = Y_\xi]\!]$ $\geq b_\xi \wedge \mathbb{1} \wedge \mathbb{b}_\xi = \mathbb{b}_\xi$ при всех $\xi \in \Xi$. $\rhd$

4.8.4. *Пусть* X — *непустой элемент* $\mathbb{V}^{(B)}$. *Тогда*

$$[\![\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) = \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\upuparrows}]\!] = \mathbb{1},$$

где, как обычно, $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(A)$ — *совокупность конечных подмножеств* A *и* $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\upuparrows} := \{Y{\uparrow} : Y \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})\}{\uparrow}$.

$\lhd$ Включение $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\upuparrows} \subset \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ не вызывает сомнений (подъем конечного множества конечен). Остается проверить следующее соотношение:

$$a := [\![(\forall t)t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) \to t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\upuparrows}]\!] = \mathbb{1}.$$

Последнее равносильно равенству

$$\bigwedge\left\{[\![t\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\Uparrow}]\!]:\ [\![t\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)]\!]=\mathbb{1}\right\}=\mathbb{0}.$$

Если $[\![t\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)]\!]=\mathbb{1}$, то в силу принципа переноса будет

$$\mathbb{1}=[\![(\exists n\in\mathbb{N}^{\wedge})(\exists f:n\to X)(t=\operatorname{im}f)]\!]=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}[\![f:n^{\wedge}\to X]\!]\wedge[\![t=\operatorname{im}f]\!].$$

Используя принцип перемешивания и принцип максимума, подберем счетное разбиение единицы (b_n) в B и последовательность (f_n) в $\mathbb{V}^{(B)}$ так, что $b_n\leq[\![f_n:n^{\wedge}\to X]\!]\wedge[\![t=\operatorname{im}f]\!]$. Можно считать без ограничения общности, что $[\![f_n:n^{\wedge}\to X]\!]=\mathbb{1}$. Положим $g_n:=f{\downarrow}:n\to X{\downarrow}$. Тогда $\operatorname{im}g\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})$ и $b_n\leq[\![t=(\operatorname{im}g)\uparrow]\!]$. Отсюда выводим:

$$\mathbb{1}=\bigvee_{\mathbb{n}\in\mathbb{N}}[\![\mathbb{t}=(\operatorname{im}\mathbb{g})\uparrow]\!]\leq$$
$$\leq\bigvee\{[\![t=u]\!]:\ u\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\uparrow}\}=[\![t\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\Uparrow}]\!],$$

что и требовалось. $\rhd$

4.8.5. *Пусть $\mathscr{G}$ — базис фильтра в множестве X, причем $X\in\mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$, т. е. X — подмножество $\mathbb{V}^{(B)}$. Положим*

$$\mathscr{G}':=\{F\in\mathscr{P}(X{\uparrow}){\downarrow}:\ (\exists G\in\mathscr{G})\,[\![\,F\supset G{\uparrow}\,]\!]=\mathbb{1}\};$$
$$\mathscr{G}'':=\{G{\uparrow}:\ G\in\mathscr{G}\}.$$

Тогда $\mathscr{G}'{\uparrow}$ и $\mathscr{G}''{\uparrow}$ — базисы одного и того же фильтра $\mathscr{G}^{\uparrow}$ в $X{\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

$\lhd$ Проверим, что $\mathscr{G}'{\uparrow}$ — базис фильтра в $X{\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Имеем

$$[\![(\forall F_1,F_2\in\mathscr{G}'{\uparrow})(\exists F\in\mathscr{G}'{\uparrow})(F\subset F_1\cap F_2)]\!]=$$
$$=\bigwedge_{F_1,F_2\in\mathscr{G}'}[\![(\exists F\in\mathscr{G}'{\uparrow})(F\subset F_1\subset F_2)]\!].$$

Если $F_1,F_2\in\mathscr{G}'$, то найдутся $G_1,G_2\in\mathscr{G}$ такие, что $[\![F_1\supset G_1{\uparrow}]\!]=\mathbb{1}$ и $[\![F_2\supset G_2{\uparrow}]\!]=\mathbb{1}$. Возьмем элемент $G\in\mathscr{G}$, для которого $G\subset G_1\cap G_2$. Тогда будет $(G_1\cap G_2){\uparrow}\in\mathscr{G}'{\uparrow}$ и

$$[\![F_1\cap F_2\supset(G_1\cap G_2){\uparrow}]\!]\geq[\![F_1\supset G_1{\uparrow}]\!]\wedge[\![F_2\supset G_2{\uparrow}]\!]=\mathbb{1}.$$

Кроме того, бесспорно, что $\mathscr{G}''\!\uparrow$ — базис фильтра в $X\!\uparrow$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. По построению, $\mathscr{G}' \supset \mathscr{G}''$. Тем более $\mathscr{G}'\!\uparrow\downarrow \supset \mathscr{G}''\!\uparrow\downarrow$ и, значит, $[\![\mathscr{G}'\!\uparrow \supset \mathscr{G}''\!\uparrow]\!] = \mathbb{1}$. Следовательно, и подавно $[\![\mathrm{fil}\{\mathscr{G}'\!\uparrow\} \supset \mathrm{fil}\{\mathscr{G}''\!\uparrow\}]\!] = \mathbb{1}$, где, как обычно, $\mathrm{fil}\{\mathscr{B}\}$ — множество надмножеств элементов $\mathscr{B}$. Помимо того,

$$[\![(\forall F_1 \in \mathscr{G}'\!\uparrow)(\exists F_2 \in \mathscr{G}''\!\uparrow)(F_1 \supset F_2)]\!] =$$
$$= \bigwedge_{F_1 \in \mathscr{G}'} [\![(\exists F_2 \in \mathscr{G}''\!\uparrow)(F_1 \supset F_2)]\!] = \mathbb{1},$$

ибо для $G_1 \in \mathscr{G}$ такого, что $[\![F_1 \supset G_1\!\uparrow]\!] = \mathbb{1}$, будет $G_1\!\uparrow \in \mathscr{G}'\!\uparrow$. Итак, $[\![\mathrm{fil}\{\mathscr{G}'\!\uparrow\} \subset \mathrm{fil}\{\mathscr{G}''\!\uparrow\}]\!] = \mathbb{1}$ по принципу переноса в $\mathbb{V}^{(B)}$. $\rhd$

4.8.6. Фильтр $\mathscr{G}^{\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, построенный в 4.8.5, называют *подъемом* $\mathscr{G}$.

4.8.7. *Пусть* $\mathscr{G}$ *— базис фильтра в* $X\!\downarrow$ *для непустого* X *из* $\mathbb{V}^{(B)}$. *Пусть, далее,* $\mathrm{mix}(\mathscr{G})$ *— совокупность перемешиваний непустых семейств элементов* $\mathscr{G}$. *Тогда если* $\mathscr{G}$ *состоит из циклических множеств, то* $\mathrm{mix}(\mathscr{G})$ *— базис фильтра в* $X\!\downarrow$ *и* $\mathrm{mix}(\mathscr{G}) \supset \mathscr{G}$. *Кроме того, имеет место равенство* $\mathscr{G}^{\uparrow} = \mathrm{mix}(\mathscr{G})^{\uparrow}$.

$\lhd$ Пусть $U, V \in \mathrm{mix}(\mathscr{G})$. Это означает, что имеются множества Ξ, H, разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, $(c_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ и семейства $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$, $(V_\xi)_{\eta\in\mathrm{H}}$ элементов $\mathscr{G}$, для которых $b_\xi U = b_\xi U_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ и $c_\eta V = c_\eta V_\eta$ $(\eta \in \mathrm{H})$. Пусть $W_{(\xi,\eta)} \subset U_\xi \cap V_\eta$ — некоторый элемент базиса $\mathscr{G}$. Положим $d_{(\xi,\eta)} := b_\xi \wedge c_\eta$. Ясно, что $(d_{(\xi,\eta)})_{(\xi,\eta)\in\Xi\times\mathrm{H}}$ — разбиение единицы. Рассмотрим $W := \sum_{(\xi,\eta)\in\Xi\times\mathrm{H}} d_{(\xi,\eta)} W_{(\xi,\eta)}$, т. е. совокупность соответствующих перемешиваний элементов $W_{(\xi,\eta)}$. Ясно, что $d_{(\xi,\eta)}U = b_\xi c_\eta U = c_\eta b_\xi U_\xi \supset d_{(\xi,\eta)} W_{(\xi,\eta)}$ и аналогично $d_{(\xi,\eta)}V \supset d_{(\xi,\eta)} W_{(\xi,\eta)}$. Тем самым $W \subset U \cap V$ и $W \in \mathrm{mix}(\mathscr{G})$.

Поскольку $\mathscr{G}$ состоит из циклических множеств, то с учетом 4.8.2 и 4.8.3 видно, что $\mathrm{mix}(\mathscr{G})' = \mathrm{mix}(\mathscr{G}')$, что и завершает доказательство. $\rhd$

4.8.8. Для *фильтра* $\mathscr{F}$ в X внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ положим $\mathscr{F}^{\downarrow} := \mathrm{fil}\{F\!\downarrow : F \in \mathscr{F}\!\downarrow\}$. Фильтр $\mathscr{F}^{\downarrow}$ в $X\!\downarrow$ называют спуском $\mathscr{F}$. Базис фильтра $\mathscr{G}$ в $X\!\downarrow$ называют *экстенсиональным*, если имеется фильтр $\mathscr{F}$ в X такой, что $\mathrm{fil}\{\mathscr{G}\} = \mathscr{F}^{\downarrow}$. Базис фильтра $\mathscr{G}$ в $X\!\downarrow$ называют *циклическим*, если $\mathrm{fil}\{\mathscr{G}\}$ имеет базис из циклических множеств. (Заметим, что в литературе циклическими иногда называют экстенсиональные фильтры.)

4.8.9. *Фильтр $\mathscr{F}$ экстенсионален в том и только в том случае, если $\mathscr{F}$ циклический и $\mathscr{F} = \operatorname{fil}\{\operatorname{mix}(\mathscr{F})\}$*

$\lhd$ Все следует из 4.8.2, 4.8.3 и 4.8.7. $\rhd$

4.8.10. *Для экстенсиональных фильтров $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ в $X{\downarrow}$ выполнено $\mathscr{F} \supset \mathscr{G} \leftrightarrow [\![\mathscr{F}^{\uparrow} \supset \mathscr{G}^{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ Если $\mathscr{F} \supset \mathscr{G}$, то $\mathscr{F}' \supset \mathscr{G}'$ и тем более $[\![\mathscr{F}^{\uparrow} \supset \mathscr{G}^{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$. Отсюда $\mathscr{F}^{\uparrow}{\downarrow} \supset \mathscr{G}^{\uparrow}{\downarrow}$, т. е. $\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow} \supset \mathscr{G}^{\uparrow\downarrow}$. Остается вспомнить 4.8.8. $\rhd$

4.8.11. Максимальные элементы в множестве экстенсиональных фильтров называют *проультрафильтрами.*

4.8.12. *Проультрафильтры суть максимальные элементы множества циклических фильтров.*

$\lhd$ Если $\mathscr{A}$ — проультрафильтр и $\mathscr{F}$ — мажорирующий его циклический фильтр, то $\mathscr{A} \subset \mathscr{F} \subset \operatorname{mix}(\mathscr{F})$. Отсюда $\mathscr{A} = \mathscr{F}$. Наоборот, пусть $\mathscr{A}$ — максимальный циклический фильтр. Тогда $\mathscr{A} = \operatorname{mix}(\mathscr{A})$ и, стало быть, $\mathscr{A}$ — проультрафильтр. $\rhd$

4.8.13. *Проультрафильтры в $X{\downarrow}$ — это в точности спуски ультрафильтров в X.*

$\lhd$ Прямое следствие 4.8.8. $\rhd$

4.8.14. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $f : X \to Y$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и выполняется соотношение $[\![\mathscr{F} - \text{фильтр в } X]\!] = \mathbb{1}$, то*

$$f(\mathscr{F})^{\downarrow} = f{\downarrow}(\mathscr{F}^{\downarrow});$$

(2) *для экстенсионального отображения $f : X{\downarrow} \to Y{\downarrow}$ и фильтра $\mathscr{F}$ в $X{\downarrow}$ верно*

$$f(\mathscr{F})^{\uparrow} = f{\uparrow}\,(\mathscr{F}^{\uparrow});$$

(3) *образ экстенсионального фильтра при экстенсиональном отображении экстенсионален;*

(4) *образ проультрафильтра при экстенсиональном отображении — проультрафильтр.*

$\lhd$ (1): Используя определения и свойства спуска $f{\downarrow}$ отображения f, имеем

$$G \in f(\mathscr{F})^{\downarrow} \leftrightarrow (\exists U \in f(\mathscr{F}){\downarrow})(G \supset U{\downarrow}) \leftrightarrow (\exists F \in \mathscr{F}{\downarrow})(G \supset f(F){\downarrow}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists F \in \mathscr{F}{\downarrow})(G \supset f{\downarrow}(F{\downarrow}) \leftrightarrow (\exists F \in \mathscr{F}^{\downarrow})(G \supset f{\downarrow}(F) \leftrightarrow G \in f{\downarrow}(\mathscr{F}^{\downarrow}).$$

(2): Используя свойства подъема $f{\uparrow}$, проводим оценки:

$$[\![G \in f{\uparrow}(\mathscr{F}^{\uparrow})]\!] = [\![(\exists U \in f{\uparrow}(\mathscr{F}^{\uparrow}))(G \supset U)]\!] =$$
$$= [\![(\exists F \in \mathscr{F}^{\uparrow})(G \supset f{\uparrow}(F))]\!] = \bigvee_{F \in \mathscr{F}} [\![G \supset f{\uparrow}(F{\uparrow})]\!] =$$
$$= \bigvee_{F \in \mathscr{F}} [\![G \supset f(F){\uparrow}]\!] = \bigvee_{U \in f(\mathscr{F})'} [\![G \supset U]\!] = [\![(\exists U \in f(\mathscr{F})'{\uparrow})(G \supset U)]\!] =$$
$$= [\![(\exists U \in f(\mathscr{F})^{\uparrow})(G \supset U)]\!] = [\![G \in f(\mathscr{F})^{\uparrow}]\!].$$

(3): Применяя последовательно (2) и (1), имеем

$$f(\mathscr{F})^{\uparrow\downarrow} = f{\uparrow}(\mathscr{F}^{\uparrow})^{\downarrow} = f{\uparrow}{\downarrow}(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}) = f(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}).$$

Последнее равенство обеспечивает требуемое.

(4): Если $f : X{\downarrow} \to Y{\downarrow}$ — экстенсиональное отображение и $\mathscr{F}$ — проультрафильтр, то $\mathscr{F}^{\uparrow}$ — ультрафильтр в X внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Следовательно, $f{\uparrow}(\mathscr{F}^{\uparrow})$ — ультрафильтр в Y внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тем самым $f{\uparrow}\ (\mathscr{F}^{\uparrow})^{\downarrow}$ — проультрафильтр. Остается заметить, что $f{\uparrow}\ (\mathscr{F}^{\uparrow})^{\downarrow} = f(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}) = f(\mathscr{F})$ в силу (3). $\rhd$

4.9. Существенные и проидеальные точки циклических монад

В этом параграфе дается признак цикличности фильтра и вводятся связанные с ним необходимые для дальнейшего понятия.

4.9.1. Монаду $\mu(\mathscr{F})$ фильтра $\mathscr{F}$ называют *циклической*, если она совпадает со своей циклической оболочкой $\mathrm{mix}(\mu(\mathscr{F}))$.

4.9.2. *Нестандартный критерий цикличности фильтра.* *Стандартный фильтр является циклическим в том и только в том случае, если циклична его монада.*

$\lhd$ Пусть $\mathscr{F}$ — стандартный фильтр. Допустим, что он циклический. Возьмем внутреннее множество Ξ и внутреннее разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ точек монады $\mu(\mathscr{F})$. По условию у фильтра $\mathscr{F}$ имеется базис $\mathscr{G}$ из циклических множеств и, стало быть, $\mu(\mathscr{F}) = \bigcap\{G : G \in {}^\circ\mathscr{G}\}$, где, как обычно, ${}^\circ\mathscr{G}$ — множество стандартных элементов $\mathscr{G}$. Если x — перемешивание $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, то x лежит в каждом стандартном G из $\mathscr{G}$ (ибо $x_\xi \in G$ при $\xi \in \Xi$). Тем самым $\mu(\mathscr{F}) \supset \operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F})) \supset \mu(\mathscr{F})$.

Если заранее известно, что монада $\mu(\mathscr{F})$ — циклическое внешнее множество, то, взяв бесконечно малый элемент $F \in \mathscr{F}$ (т. е. такой, что $F \subset \mu(\mathscr{F})$), видим, что $F_0 := \operatorname{mix}(F) \subset \operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F})) \subset \mu(\mathscr{F})$. Значит, внутреннее множество F_0 бесконечно мало и лежит в $\mathscr{F}$. Итак, $(\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\exists F_0 \in \mathscr{F})(F_0 = \operatorname{mix}(F_0) \wedge F \supset F_0)$. По принципу Лейбница выводим, что $\mathscr{F}$ обладает циклическим базисом. $\rhd$

4.9.3. *Теорема.* *Для стандартного фильтра $\mathscr{F}$ в $X{\downarrow}$ положим*

$$\mathscr{F}{\uparrow\downarrow} := \operatorname{fil}\{F{\uparrow\downarrow} : F \in \mathscr{F}\}.$$

Тогда $\operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F})) = \mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow})$ и $\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}$ — это наибольший циклический фильтр, более грубый, чем $\mathscr{F}$.

$\lhd$ Ясно, что $\mathscr{F}{\uparrow\downarrow} \subset \mathscr{F}$ и, значит, с учетом 4.9.2 $\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}) \supset \mu(\mathscr{F})$ и $\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}) \supset \operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))$. Пусть теперь $x \in \mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow})$. По определению монады и свойствам перемешивания имеем

$$(\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\exists (b_\xi)_{\xi\in\Xi})(\exists (x_\xi)_{\xi\in\Xi})(\forall \xi \in \Xi)(x_\xi \in F \wedge b_\xi x = b_\xi x_\xi).$$

Ясно, что тем самым выполняется

$$(\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists (b_\xi)_{\xi\in\Xi})(\exists (x_\xi)_{\xi\in\Xi})(\forall F_0 \in \mathscr{F}_0)$$
$$(\forall \xi \in \Xi)(x_\xi \in F \wedge b_\xi x_\xi = b_\xi x).$$

Применяя принцип идеализации в сильной форме, имеем

$$(\exists (b_\xi)_{\xi\in\Xi})(\exists (x_\xi)_{\xi\in\Xi})(\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\forall \xi \in \Xi)(x_\xi \in F \wedge b_\xi x_\xi = b_\xi x).$$

Последнее означает, что существуют элементы $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ из монады $\mu(\mathscr{F})$ такие, что $x = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi$, т. е. $x \in \operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))$. Окончательно заключаем о равенстве: $\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}) = \operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))$.

Пусть теперь $\mathscr{G}$ — циклический фильтр, причем $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$. Тем самым $\operatorname{mix}(\mu(\mathscr{G})) = \mu(\mathscr{G}) \supset \operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F})) = \mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow})$. Итак, $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}{\uparrow\downarrow}$. $\rhd$

4.9.4. Пусть x — внутренняя точка из $X{\downarrow}$. Определим стандартный фильтр (x) в $X{\downarrow}$ соотношением

$$(x) := {}^*\{U \subset X{\downarrow} : x \in U\},$$

где * — *символ стандартизации*. Таким образом, (x) составлен в точности такими стандартными подмножествами $X{\downarrow}$, которые содержат x. Элемент x называют *существенной точкой* $X{\downarrow}$ (и пишут $x \in e(X)$), если $(x){\uparrow}{\downarrow}$ — проультрафильтр в $X{\downarrow}$.

4.9.5. *Каждая точка x монады стандартного проультрафильтра $\mathscr{F}$ является существенной. При этом справедливы равенства*

$$\mathscr{F} = (x)^{\uparrow\downarrow} = (x){\uparrow}{\downarrow} = \mathrm{fil}\{{}^*\{U{\uparrow}{\downarrow} : x \in U \wedge U \subset X{\downarrow}\}\}.$$

$\lhd$ Так как (см. [414]) монада $\mu(\mathscr{F})$ по условию задевает монаду ультрафильтра (x), то $(x) \supset \mathscr{F}$. Следовательно, $(x){\uparrow}{\downarrow} \supset \mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow} = \mathscr{F}$. На основании 4.8.12 выводим $\mathscr{F} = (x){\uparrow}{\downarrow}$. В силу 4.8.5 имеет место равенство $(x){\uparrow}{\downarrow}^{\uparrow} = (x)^{\uparrow}$. Значит, из-за 4.8.13 x — существенная точка. Наконец, $(x)^{\uparrow\downarrow} = \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow} = \mathscr{F} = (x){\uparrow}{\downarrow}$. $\rhd$

4.9.6. *Образ существенной точки при экстенсиональном отображении — существенная точка в образе.*

$\lhd$ Пусть x — существенная точка $X{\downarrow}$ и $f : X{\downarrow} \to Y{\downarrow}$ — экстенсиональное отображение. Имеется проультрафильтр $\mathscr{F}$ такой, что $x \in \mu(\mathscr{F})$. Ясно, что $f(x) \in f(\mu(\mathscr{F})) = \mu(f(\mathscr{F}))$. В самом деле, с учетом сильной идеализации

$$\begin{gathered} y \in \mu(f(\mathscr{F})) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(y \in f(F)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists x)(\forall F \in \mathscr{F}_0)(x \in F \wedge y = f(x)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists x)(\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F}) x \in F \wedge y = f(x) \leftrightarrow (\exists x \in \mu(\mathscr{F}))(y = f(x)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow y \in f(\mu(\mathscr{F})). \end{gathered}$$

Остается сослаться на 4.8.14. $\rhd$

4.9.7. *Пусть E — некоторое стандартное множество и X — стандартный элемент $\mathbb{V}^{(B)}$. Рассмотрим произведение $X^{E^\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, где $E^\wedge$ — стандартное имя E в $\mathbb{V}^{(B)}$. Если x — существенная точка $X^{E^\wedge}{\downarrow}$, то для всякого стандартного $e \in E$ точка $x{\downarrow}(e)$ — существенная в $X{\downarrow}$.*

◁ Раз $x \in X^{E^\wedge}{\downarrow}$, то $[\![x : E^\wedge \to X]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $x{\downarrow} : E \to X{\downarrow}$ и для всякого $e \in E$ будет $[\![x{\downarrow}(e) = x(e^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$ по определению спуска $x{\downarrow}$.

Рассмотрим отображение, переводящее элемент $x \in X^{E^\wedge}{\downarrow}$ в точку $x(e^\wedge)$ из $X{\downarrow}$ для фиксированного стандартного $e \in E$. Ясно, что для $x_1, x_2 \in X^{E^\wedge}{\downarrow}$ верно

$$[\![x_1 = x_2]\!] = [\![(\forall e \in E^\wedge)(x_1(e) = x_2(e))]\!] = \bigwedge_{e \in E} [\![x_1(e^\wedge) = x_2(e^\wedge)]\!] \leq \\ \leq [\![x_1(e^\wedge) = x_2(e^\wedge)]\!],$$

т. е. введенное стандартное отображение экстенсионально. На основании 4.9.6 заключаем, что $x(e^\wedge)$ — существенная точка в $X{\downarrow}$. Осталось вспомнить, что $x{\downarrow}(e) = x(e^\wedge)$ по определению спуска. ▷

4.9.8. *Пусть $\mathscr{F}$ — циклический фильтр в $X{\downarrow}$ и ${}^e\mu(\mathscr{F}) := \mu(\mathscr{F}) \cap e(X)$ — множество существенных точек его монады. Тогда ${}^e\mu(\mathscr{F}) = {}^e\mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow})$.*

◁ Пусть $x \in {}^e\mu(\mathscr{F})$. Значит, x лежит в монаде некоторого проультрафильтра $\mathscr{G}$. Отсюда $\mu(\mathscr{G}) \cap \mu(\mathscr{F}) \neq \varnothing$ и, стало быть, $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}$. С учетом 4.8.10 $\mathscr{G}^{\uparrow\downarrow} \supset \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}$ и $x \in \mu(\mathscr{G}) \subset \mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow})$. Если теперь известно, что $x \in {}^e\mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow})$, то имеется ультрафильтр $\mathscr{G}$ в X внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $x \in \mu(\mathscr{G}^{\downarrow})$ и $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}^{\uparrow}$. Поскольку $\mathscr{F} = \mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow} \subset \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow} \subset \mathscr{G}^{\downarrow}$ в силу 4.9.7, то $\mu(\mathscr{F}) \supset \mu(\mathscr{G}^{\downarrow})$. Следовательно, $x \in {}^e\mu(\mathscr{F})$. ▷

4.9.9. Пусть A — подмножество рассматриваемого нами спуска $X{\downarrow}$. Множество $(X - A{\uparrow}){\downarrow}$ называют *продополнением* или *циклическим дополнением* A и обозначают A^c. Точку $x \in X{\downarrow}$ называют *проидеальной,* если x лежит в продополнении каждого конечного стандартного подмножества $X{\downarrow}$. Совокупность всех проидеальных точек $X{\downarrow}$ обозначаем $p(X)$.

4.9.10. *Если у множества $X{\downarrow}$ нет проидеальных точек, то X — конечное множество внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.*

◁ По принципу идеализации имеется конечное стандартное множество Y в $X{\downarrow}$ такое, что $Y^e = \varnothing$. Итак, $[\![X - Y{\uparrow} = \varnothing{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $X = Y{\uparrow}$. ▷

4.9.11. *Если X — бесконечное множество внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то проидеальные точки $X{\downarrow}$ составляют циклическую монаду. Подъем циклического фильтра с монадой $p(X)$ — это фильтр дополнений конечных подмножеств X внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.*

$\lhd$ Продополнения конечных подмножеств $X{\downarrow}$ составляют базис фильтра. В самом деле, раз $(Y \cup Z){\uparrow}{\downarrow} \supset Y{\uparrow}{\downarrow} \cup Z{\uparrow}{\downarrow}$, то $(Y \cup Z){\uparrow} \supset Y{\uparrow} \cup Z{\uparrow}$ и $[\![X - (Y \cup Z){\uparrow} \subset X - (Y{\uparrow} \cup Z{\uparrow})]\!] = \mathbb{1}$. Значит, $(Y \cup Z)^c \subset (X - Y{\uparrow}){\downarrow} \cap (X - Z{\uparrow}){\downarrow} = Y^c \cap Z^c$. Таким образом, на основании 4.9.2 $p(X)$ — это циклическая монада. Обозначим ${}_p\mathscr{F}$ фильтр с монадой $p(X)$, т. е. фильтр продополнений конечных множеств в $X{\downarrow}$. Пусть далее ${}_{\mathrm{cf}}\mathscr{F}(X)$ — фильтр дополнений конечных множеств в X внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ ($=$ коконечный фильтр в X). С учетом 4.9.4 имеем

$$
\begin{gathered}
[\![Y \in {}_{\mathrm{cf}}\mathscr{F}(X)]\!] = [\![(\exists Z \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X))(Y \supset X - Z)]\!] = \\
= \bigvee_{A \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})} [\![Y \supset X - A{\uparrow}]\!] = \bigvee_{A \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})} [\![Y \supset A^c{\uparrow}]\!] = \\
= \bigvee_{Z \in {}_p\mathscr{F}} [\![Y \supset Z{\uparrow}]\!] = [\![Y \in {}_p\mathscr{F}^{\uparrow}]\!].
\end{gathered}
$$

Стало быть, ${}_{\mathrm{cf}}\mathscr{F}(X) = {}_p\mathscr{F}^{\uparrow}$. $\rhd$

4.10. Изображения компактных и предкомпактных пространств

В этом параграфе мы применим циклические монады для получения нужных нам описаний спусков — изображений топологических пространств в булевозначных моделях теории множеств. Идейно приводимые ниже результаты тесно примыкают к классическим работам А. Робинсона [464] и В. Люксембурга [414]. Ниже всюду для простоты рассматривается внутреннее (в смысле $\mathbb{V}^{(B)}$) непустое равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$. Обычное предположение «стандартности антуража» действует и в этом параграфе, т. е., в частности, при использовании нестандартных методов B, X, $\mathscr{U}$ и т. п. считаются стандартными множествами. Как это принято, пишем $x \approx y$ вместо $(x, y) \in \mu(\mathscr{U}^{\downarrow})$.

4.10.1. Равномерное пространство $(X{\downarrow}, \mathscr{U}^{\downarrow})$ называют *прокомпактным* или *циклически компактным*, если пространство $(X, \mathscr{U})$ компактно внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Аналогичный смысл вкладывают в термин *прополная ограниченность* и т. п. Иногда используют термины типа «циклическая компактность».

4.10.2. *Нестандартные критерии прокомпактности.* *Для стандартного пространства X эквивалентны утверждения:*

(1) *$X{\downarrow}$ — прокомпактное пространство;*

(2) *каждая существенная точка $X{\downarrow}$ околостандартна;*

(3) *каждая существенная идеальная точка $X{\downarrow}$ околостандартна.*

$\triangleleft$ (1) $\to$ (2): Пусть x — существенная точка $X{\downarrow}$. Тогда x лежит в монаде проультрафильтра $(x)^{\uparrow\downarrow}$. Значит, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ верно, что найдется элемент $y \in X$ такой, что $(x)^{\uparrow}$ сходится к y. В силу принципа максимума и принципа Лейбница (во внутреннем мире) можно заключить, что имеется стандартный элемент $y \in X{\downarrow}$ такой, что $(x)^{\uparrow\downarrow} \supset \mathscr{U}^{\uparrow}(y)$. Отсюда вытекает, что $\mu((x)^{\uparrow\downarrow}) \subset \mathscr{U}^{\downarrow}(y)$ и, стало быть, $x \approx y$. Иными словами, x — околостандартная точка.

(2) $\to$ (3): Очевидно.

(3) $\to$ (1): Следует убедиться, что ультрафильтр в X внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ имеет точку прикосновения. Будем, не ограничивая общности, считать, что $\mathscr{F}$ не является главным ультрафильтром. Следовательно, $\mathscr{F}$ тоньше фильтра дополнений конечных множеств внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Привлекая 4.9.6, видим, что $\mu(\mathscr{F}^{\downarrow}) \subset p(X)$. Если $x \in \mu(\mathscr{F}^{\downarrow})$, то на основании 4.9.8 $\mathscr{F} = (x)^{\uparrow}$ и, кроме того, x — существенная точка. По условию такая точка околостандартна, т. е. имеется стандартный $y \in X{\downarrow}$, для которого $\mathscr{U}^{\downarrow}(y) \cap \mu(\mathscr{F}^{\downarrow}) \neq \varnothing$. Тем самым y — точка прикосновения $\mathscr{F}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. $\triangleright$

4.10.3. Доказанное в 4.10.2 показывает отличия булевозначного критерия прокомпактности от привычного: «компактное пространство — это пространство с околостандартными точками». Наличие колоссального количества прокомпактных и некомпактных пространств обеспечивает разнообразие примеров нестандартных но неидеальных точек. Отметим здесь же, что совместное применение 4.10.2 и 4.9.7 позволяет, конечно же, дать нестандартное доказательство естественного аналога теоремы Тихонова для произведения прокомпактных пространств — «спуска теоремы Тихонова в $\mathbb{V}^{(B)}$».

4.10.4. *Нестандартный критерий пропредкомпактности.* *Стандартное пространство является спуском вполне ограниченного равномерного пространства в том и только в том случае, если каждая его существенная точка предоколостандартна.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Пусть x — существенная точка $X{\downarrow}$. Тогда $(x)^{\uparrow}$ — ультрафильтр внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и, значит, $(x)^{\uparrow}$ является фильтром Коши в X в силу полной ограниченности X в $\mathbb{V}^{(B)}$. Спуск фильтра Коши — фильтр Коши в спуске. Значит, x — элемент монады фильтра Коши, т. е. x — предоколостандартная точка.

$\leftarrow$: Возьмем ультрафильтр $\mathscr{F}$ в X внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Нужно установить, что $\mathscr{F}$ — фильтр Коши в $\mathbb{V}^{(B)}$. Возьмем точку x из монады спуска $\mathscr{F}^{\downarrow}$. Тогда x существенна и, стало быть, предоколостандартна. Значит, микрогало x, т. е. множество $\mathscr{U}^{\downarrow}(x)$, — это монада фильтра Коши. Тем самым $\mathscr{F}^{\downarrow}$ — фильтр Коши. $\rhd$

4.11. Монады проультрафильтров и экстенсиональных фильтров

В 4.4.11 предложен подход к применению монадологии, развитой в нестандартном анализе, к изучению циклических фильтров, возникающих при использовании булевозначных моделей. В этом разделе приводятся критерии монад проультрафильтров и экстенсиональных фильтров и обсуждаются некоторые связанные с ними свойства этих объектов. При использовании монадологии подразумевается неоклассическая установка. Гипотеза стандартности антуража применяется, как обычно, без дополнительных оговорок.

4.11.1. Пусть X — рассматриваемое циклическое множество (= спуск некоторого B-множества). Символом μ_d обозначим оператор взятия (дискретной) *монадной оболочки.* Иными словами, $\mu_d(\varnothing) := \varnothing$ и, кроме того, для непустого U в X множество $\mu_d(U)$ — это монада стандартизации внешнего фильтра надмножеств U, т. е.

$$x \in \mu_d(U) \leftrightarrow ((\forall^{\mathrm{st}} V \subset X)\ U \subset V \to x \in U).$$

По аналогии определим *циклически монадную оболочку* μ_c следующим образом:

$$x \in \mu_c(U) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} V)(V = V{\uparrow\downarrow} \wedge V \subset X \wedge U \subset V \to x \in V).$$

Таким образом, для непустого U циклически монадная оболочка $\mu_c(U)$ есть монада циклической оболочки стандартизации фильтра надмножеств U.

4.11.2. *Циклически монадная оболочка множества представляет собой циклическую оболочку его монадной оболочки:*

$$\mu_c(U) = \mathrm{mix}(\mu_d(U))$$

для каждого U.

$\lhd$ Пусть $U \neq \varnothing$ и стандартное множество V таково, что $V \supset \mathrm{mix}(\mu_d(U))$. На основании 4.9.3 для некоторого элемента W фильтра ${}^*\{U_1 \subset X : U_1 \supset U\}$ будет $V \supset W{\uparrow\downarrow}$ и, следовательно, $V \supset \mu_c(U)$. Таким образом, $\mu_c(U) \subset \mathrm{mix}(\mu_d(U))$, ибо стоящее справа множество — это монада. В свою очередь, если $V \supset \mu_c(U)$ и V стандартно, то V содержит циклическую оболочку надмножества U и, стало быть, $V \supset U$. Отсюда $V \supset \mu(({}^*\{W : W \supset U\}){\uparrow\downarrow})$ и остается вновь апеллировать к 4.9.3. $\rhd$

4.11.3. Максимальные по включению циклические фильтры в X называют *проультрафильтрами* в X. *Существенная точка* в X по определению — элемент монады стандартного проультрафильтра. Внешнее множество всех существенных точек X обозначают символом ${}^eX$. Полезно подчеркнуть, что проультрафильтры в X суть в точности спуски ультрафильтров в подъеме $X{\uparrow}$ множества X.

4.11.4. *Нестандартный критерий проультрафильтра.* *Фильтр является проультрафильтром в том и только в том случае, если, во-первых, его монада циклическая и, во-вторых, ее легко поймать стандартным циклическим множеством.*

$\lhd$ Пусть $\mathscr{F}$ — рассматриваемый фильтр. Нас интересует справедливость следующего утверждения:

$$(\mathscr{F} \text{ — } \textit{проультрафильтр}\ ) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \mu(\mathscr{F}) = \mathrm{mix}(\mu(\mathscr{F})) \wedge (\forall^{\mathrm{st}} V)(V = V{\uparrow\downarrow} \rightarrow \mu(\mathscr{F}) \subset V \vee \mu(\mathscr{F}) \subset V').$$

Для стандартного V либо $\mu(\mathscr{F}) \cap V = \varnothing$, либо $\mu(\mathscr{F}) \cap V \neq \varnothing$. В первом случае $V' := X - V \in \mathscr{F}$. Во втором возникает фильтр $\mathscr{G}$ с монадой $\mu(\mathscr{F}) \cap V$. Ясно, что если $\mathscr{F}$ — проультрафильтр и V — циклическое множество, то $\mathscr{G} = \mathscr{F}$ на основании критерия циклического фильтра 4.9.2. Таким образом, $V \in \mathscr{F}$, что устанавливает импликацию $\rightarrow$.

Установим справедливость импликации $\leftarrow$. Возьмем циклический фильтр $\mathscr{G}$, более тонкий, чем $\mathscr{F}$. Ясно, что $G \in \mathscr{G} \rightarrow G' \notin \mathscr{F}$ (иначе, $G' \supset \mu(\mathscr{F}) \supset \mu(\mathscr{G})$). Стало быть, $G \in \mathscr{F}$. Следовательно, $\mathscr{G} = \mathscr{F}$. $\rhd$

4.11.5. *Стандартные критерии проультрафильтра.* *Пусть $\mathscr{F}$ — циклический фильтр в X. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *$\mathscr{F}$ — проультрафильтр;*

(2) *при любом конечном множестве $\mathscr{E}$ подмножество X будет либо $(\bigcup \mathscr{E})' \in \mathscr{F}$, либо $E{\uparrow\downarrow} \in \mathscr{F}$ для некоторого $E \in \mathscr{E}$;*

(3) *для всякого конечного набора циклических множеств в $\mathscr{F}$ входит либо одно из них, либо дополнение каждого;*

(4) *если U — произвольное множество, то либо $U{\uparrow\downarrow} \in \mathscr{F}$, либо $U' \in \mathscr{F}$;*

(5) *для каждого циклического множества V либо $V \in \mathscr{F}$, либо $V' \in \mathscr{F}$.*

$\lhd$ Для доказательства (1) $\to$ (2) воспользуемся принципом переноса и нестандартным критерием проультрафильтра 4.11.4. Итак, пусть $\mathscr{F}$ — стандартный фильтр и $\mathscr{E}$ — стандартное конечное множество стандартных подмножеств X. Возможны два случая: либо $\mu(\mathscr{F}) \bigcap \bigcup \mathscr{E} = \varnothing$, либо $\mu(\mathscr{F}) \bigcap \bigcup \mathscr{E} \neq \varnothing$. В первом из них множество $(\bigcup \mathscr{E})'$, очевидно, входит в $\mathscr{F}$. Во втором найдется $E \in \mathscr{E}$, для которого $E \cap \mu(\mathscr{F}) \neq \varnothing$. Тем самым $E{\uparrow\downarrow} \cap \mu(\mathscr{F}) \neq \varnothing$. Учитывая стандартность $E{\uparrow\downarrow}$, на основании 4.11.4 заключаем $E{\uparrow\downarrow} \supset \mu(\mathscr{F})$ и, стало быть, $E{\uparrow\downarrow} \in \mathscr{F}$.

Импликации (2) $\to$ (3) $\to$ (4) $\to$ (5) не вызывают сомнений. То, что (5) обеспечивает (1), вытекает из 4.11.4 и принципа переноса. $\rhd$

4.11.6. *Следствие.* *Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в X. Фильтр $\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}$ является проультрафильтром в том и только в том случае, если для каждого подмножества U в X будет $U{\uparrow\downarrow} \in \mathscr{F}$ или же найдется F из $\mathscr{F}$, для которого $F{\uparrow\downarrow} \subset U'$.*

4.11.7. *Следствие.* *Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в X. Для того чтобы $\mathscr{F}$ был проультрафильтром, необходимо и достаточно выполнение равенства $\mathscr{F} = (\ddot{\mathscr{F}}){\uparrow\downarrow}$, где $\ddot{\mathscr{F}}$ — гриль фильтра $\mathscr{F}$, определенный соотношением*

$$U \in \ddot{\mathscr{F}} \leftrightarrow (\forall F \in \mathscr{F}) U \cap F \neq \varnothing.$$

$\lhd$ Пусть известно, что $\mathscr{F}$ — проультрафильтр. Ясно, что $\mathscr{F} \subset \ddot{\mathscr{F}}$ и, следовательно, $\mathscr{F} = \mathscr{F}{\uparrow\downarrow} \subset (\ddot{\mathscr{F}}){\uparrow\downarrow}$. Если $V \in (\ddot{\mathscr{F}}){\uparrow\downarrow}$, то найдется

U из $\ddot{\mathscr{F}}$, для которого $V \supset U{\uparrow}{\downarrow}$. При этом $U{\uparrow}{\downarrow}$ явно входит в $\mathscr{F}$ на основании (4). Стало быть, $V \in \mathscr{F}$.

Допустим теперь, что $\mathscr{F} = (\ddot{\mathscr{F}}){\uparrow}{\downarrow}$. Поскольку по определению каждый элемент в правой части — это надмножество циклического множества, то $\mathscr{F}$ — циклический фильтр. Пусть U — произвольное циклическое множество. Если $U \cap F = \varnothing$ для некоторого $F \in \mathscr{F}$, то $U' \in \mathscr{F}$. Если же $U \cap F \neq \varnothing$ для всякого $F \in \mathscr{F}$, то U входит в $(\ddot{\mathscr{F}}){\uparrow}{\downarrow}$ и потому $U \in \mathscr{F}$. На основании (5) заключаем, что $\mathscr{F}$— проультрафильтр. $\triangleright$

4.11.8. Семейство $(\ddot{\mathscr{F}}){\uparrow}{\downarrow}$ из 4.11.7 называют *циклическим грилем* $\mathscr{F}$ или (реже) *прогрилем.*

Смысл этого понятия и способ его применения раскрываются в связи с техникой спусков и подъемов. Напомним, что для семейства $\mathscr{E}$ непустых подмножеств $X{\uparrow}$ *спуск* $\mathscr{E}^{\downarrow}$ вводят соотношением

$$U \in \mathscr{E}^{\downarrow} \leftrightarrow U \subset X \wedge (\exists E \in \mathscr{E}{\downarrow})(U \supset E{\downarrow}).$$

4.11.9. Для фильтра $\mathscr{F}$ и его гриля $\ddot{\mathscr{F}}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ справедливо равенство

$$(\ddot{\mathscr{F}})^{\downarrow} = (\mathscr{F}^{\downarrow}){\uparrow}{\downarrow}.$$

$\triangleleft$ Для доказательства достаточно заметить, что в силу правил подсчета оценок в $\mathbb{V}^{(B)}$ выполнено

$$[\![U{\uparrow} \in \ddot{\mathscr{F}}]\!] = \bigwedge_{F \in \mathscr{F}{\downarrow}} [\![U{\uparrow} \cap F{\uparrow} \neq \varnothing]\!],$$

где U — подмножество X. $\triangleright$

4.11.10. *Экстенсиональный фильтр является проультрафильтром в том и только в том случае, если его циклический гриль является фильтром.*

$\triangleleft$ Ясно, что фильтр $\mathscr{F}$ — это проультрафильтр в том и только в том случае, если $\mathscr{F}^{\uparrow}$ совпадает со своим грилем внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Последнее бывает тогда и только тогда, когда гриль $\mathscr{F}^{\uparrow}$ — это фильтр внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Остается привлечь 4.11.9. $\triangleright$

4.11.11. ***Критерий существенности.*** *Точка существенна в том и только в том случае, если ее можно отделить стандартным циклическим множеством от любого не содержащего ее стандартного циклического множества.*

$\lhd$ Символически нас интересует утверждение

$$x \in {}^eX \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall U = U{\uparrow}{\downarrow}) x \notin U \to (\exists V = V{\uparrow}{\downarrow})\ x \in V \wedge U \cap V = \varnothing.$$

Пусть сначала x — существенная точка и стандартное циклическое множество U таково, что $x \notin U$. В силу 4.11.3 дополнение U' входит в фильтр $(x){\uparrow}{\downarrow}$, порождаемый циклическими надмножествами x (ибо $(x){\uparrow}{\downarrow}$ — это проультрафильтр по условию). Стало быть, для некоторого V будет $x \in V$ и $V{\uparrow}{\downarrow} \cap U \neq \varnothing$.

Если выполнено условие отделимости, то для фильтра $(x){\uparrow}{\downarrow}$ будут удовлетворены условия критерия проультрафильтра 4.11.4.

В самом деле, пусть $U = U{\uparrow}{\downarrow}$ — произвольное циклическое множество. Нужно убедиться, что либо U, либо U' входит в $(x){\uparrow}{\downarrow}$. В случае $x \in U$ по определению $U \in (x){\uparrow}{\downarrow}$. Если же $x \in U'$, то по предположению для некоторого $V \in (x){\uparrow}{\downarrow}$ будет $V \cap U = \varnothing$, т. е. $V \subset U'$ и $U' \in (x){\uparrow}{\downarrow}$. $\rhd$

4.11.12. *Следствие.* *Если в монаде ультрафильтра $\mathscr{F}$ есть существенная точка, то $\mu(\mathscr{F}) \subset {}^eX$ и, кроме того, $\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}$ — проультрафильтр.*

$\lhd$ Пусть V — произвольное циклическое множество и $x \in \mu(\mathscr{F}) \cap {}^eX$. Если $x \in V$, то $V \cap \mu(\mathscr{F}) \neq \varnothing$ и, стало быть, $V \in \mathscr{F}$, а потому и $V \in \mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}$. Если $x \notin V$, то на основании 4.11.11 для некоторого циклического U будет $x \in U$ и $U \cap V = \varnothing$. Ясно, что $U \in \mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}$. Отсюда следует, что $V' \in \mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}$. Остается сослаться на 4.11.5, чтобы заключить, что $\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}$ — проультрафильтр. Как уже отмечалось, $\mu(\mathscr{F}){\uparrow}{\downarrow} \subset {}^eX$ в этом случае. Поскольку $\mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}) = \mathrm{mix}(\mu(\mathscr{F}))$, на основании теоремы 4.9.3 выводим требуемое. $\rhd$

4.11.13. *Критерий экстенсиональности фильтра.* *Фильтр является экстенсиональным в том и только в том случае, если его монада представляет собой циклически монадную оболочку множества своих существенных точек.*

$\lhd$ В символической записи нам следует установить эквивалентность

$$(\mathscr{F} \text{ экстенсионален}) \leftrightarrow \mu(\mathscr{F}) = \mathrm{mix}(\mu_d({}^e\mu(\mathscr{F}))).$$

Условие экстенсиональности $\mathscr{F}$ можно переписать в виде $[\![\, \mathscr{F}^{\uparrow}$ — фильтр $X{\uparrow} \,]\!] = \mathbb{1}$. Используя принцип переноса булевозначного анализа, для некоторого множества $\mathfrak{A}$ проультрафильтров в X можно записать

$$[\![F \in \mathscr{F}^{\uparrow}]\!] = \bigwedge_{\mathscr{A} \in \mathfrak{A}} [\![F \in \mathscr{A}^{\uparrow}]\!].$$

Отсюда следует, что для циклического множества F в X выполнено

$$F \in \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow} \leftrightarrow F \in \bigcap_{\mathscr{A} \in \mathfrak{A}} \mathscr{A}^{\uparrow\downarrow}.$$

Тем самым для стандартного циклического F выводим

$$F \supset \mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}) \leftrightarrow F \supset \mu_d\Bigg(\bigcup_{\mathscr{A} \in {}^{\circ}\mathfrak{A}} \mu(\mathscr{A}^{\uparrow\downarrow}) \Bigg),$$

где ${}^{\circ}\mathfrak{A}$ — стандартное ядро $\mathfrak{A}$, т. е. внешнее множество стандартных элементов $\mathfrak{A}$. Последнее в силу 4.11.2 переписывается в виде

$$\mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}) = \operatorname{mix}\Bigg(\mu\Bigg(\bigcup_{\mathscr{A} \in {}^{\circ}\mathfrak{A}} \mu(\mathscr{A}^{\uparrow\downarrow}) \Bigg) \Bigg).$$

Остается заметить, что на основании 4.9.5 монады проультрафильтров состоят только из существенных точек и множество $\mathfrak{A}$ есть совокупность проультрафильтров, мажорирующих $\mathscr{F}$. $\triangleright$

4.11.14. *Следствие.* *Стандартное множество циклично в том и только в том случае, если оно является циклически монадной оболочкой своих существенных точек.*

4.11.15. *Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в X, а b — элемент булевой алгебры B. Пусть, далее, $b\mathscr{F}$ — образ фильтра $\mathscr{F}$ при умножении на b. Тогда имеет место равенство*

$$b(b\mathscr{F})^{\uparrow} = b\mathscr{F}^{\uparrow}.$$

$\triangleleft$ В самом деле, справедлива оценка

$$[\![(b\mathscr{F})^{\uparrow} = \mathscr{F}^{\uparrow}]\!] \geq \bigwedge_{F \in \mathscr{F}} [\![(bF){\uparrow} \in \mathscr{F}^{\uparrow}]\!] \geq \bigwedge_{F \in \mathscr{F}} [\![(bF){\uparrow} = F{\uparrow}]\!] \geq$$

$$\geq \bigwedge_{F \in \mathscr{F}} \bigwedge_{x \in X} [\![bx \in F{\uparrow}]\!] \geq \bigwedge_{F \in \mathscr{F}} \bigwedge_{x \in X} [\![bx = x]\!] \geq b.$$

Отсюда и вытекает требуемое соотношение. $\triangleright$

4.11.16. *Пусть $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — фильтры внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $b \in B$. Тогда выполнено*

$$b\mathscr{F} = b\mathscr{G} \leftrightarrow b\mathscr{F}^{\downarrow} = b\mathscr{G}^{\downarrow}.$$

$\lhd$ Если $[\![\mathscr{F} \subset \mathscr{G}]\!] \geq b$, то с учетом принципа максимума для каждого $F \in \mathscr{F}^{\downarrow}$ найдется $G \in \mathscr{G}^{\downarrow}$ так, что

$$[\![F{\uparrow} \supset G{\uparrow}]\!] = [\![\mathscr{F} \supset \mathscr{G}]\!] \geq b.$$

Иначе говоря, $bF{\uparrow} \supset bG{\uparrow}$ и, стало быть, для циклических F и G будет $bF \supset bG$. Таким образом, $b\mathscr{F}^{\downarrow} \subset b\mathscr{G}^{\downarrow}$.

Пусть теперь заранее известно, что $b\mathscr{F}^{\downarrow} \subset b\mathscr{G}^{\downarrow}$. Тогда последовательно с учетом 4.11.15 выводим

$$b\mathscr{F}^{\downarrow} \subset b\mathscr{G}^{\downarrow} \to (b\mathscr{F}^{\downarrow})^{\uparrow} \subset (b\mathscr{G}^{\downarrow})^{\uparrow} \to$$
$$\to b(b\mathscr{F}^{\downarrow})^{\uparrow} \subset b(b\mathscr{G}^{\downarrow})^{\uparrow} \to b(b\mathscr{F}^{\downarrow\uparrow}) \subset b(b\mathscr{G}^{\downarrow\uparrow}) \to b\mathscr{F} \subset b\mathscr{G}.$$

Окончательно заключаем: $[\![\mathscr{F} \subset \mathscr{G}]\!] \geq b \leftrightarrow b\mathscr{F}^{\downarrow} \subset b\mathscr{G}^{\downarrow}$. Отсюда и вытекает требуемая эквивалентность. $\rhd$

4.11.17. ***Нестандартный критерий для перемешивания фильтров.*** *Пусть $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — стандартное семейство экстенсиональных фильтров и $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — стандартное разбиение единицы. Фильтр $\mathscr{F}$ является перемешиванием $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в том и только в том случае, если*

$$(\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \Xi)\ b_\xi \mu(\mathscr{F}) = b_\xi \mu(\mathscr{F}_\xi).$$

$\lhd$ В соответствии с общим определением F входит в перемешивание $\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi \mathscr{F}_\xi$, если найдется семейство $(F_\xi)_{\xi\in\Xi}$ такое, что $F_\xi \in \mathscr{F}_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ и при этом $F \supset \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi F_\xi$. Учитывая правила 4.8.1 и 4.8.2 и экстенсиональность фильтров семейства $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$, заключаем, что, во-первых, $\mathscr{F}$ также экстенсионален, а, во-вторых, подъем $\mathscr{F}^{\uparrow}$ является перемешиванием $(\mathscr{F}_\xi^{\uparrow})_{\xi\in\Xi}$ с теми же вероятностями. Используя отделимость $\mathbb{V}^{(B)}$ и предложения 4.11.16 и 4.1.6 (5), последовательно выводим:

$$\mathscr{F}^{\uparrow} = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi \mathscr{F}_\xi^{\uparrow} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \Xi)\ b_\xi \mathscr{F}^{\uparrow} = b_\xi \mathscr{F}_\xi^{\uparrow} \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \Xi)\ b_\xi \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow} = b_\xi \mathscr{F}_\xi^{\uparrow\downarrow} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \Xi)\ b_\xi \mathscr{F} = b_\xi \mathscr{F}_\xi \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \Xi) \mu(b_\xi \mathscr{F}) = \mu(b_\xi \mathscr{F}_\xi) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \Xi)\ b_\xi \mu(\mathscr{F}) = b_\xi \mu(\mathscr{F}_\xi).$$

что завершает доказательство. $\rhd$

4.11.18. Примечания.

(1) Использование монад в топологии — классическое достижение инфинитезимального анализа, представленное в большинстве имеющихся руководств. Мы следуем, в основном, статье В. Люксембурга [414].

(2) Изложение теории относительных монад базируется на работах Е. И. Гордона [45, 46].

(3) Теория циклических монад и проультрафильтров предложена С. С. Кутателадзе [136, 139] в связи с разработкой приемов булевозначного анализа (см. [128]).

Глава 5

Инфинитезимали и субдифференциалы

Нестандартные методы анализа нашли применения во многих разделах математики. В этой главе мы остановимся на использовании актуальных бесконечно малых в *субдифференциальном исчислении* — одном из новых разделов функционального анализа, обязанных своему развитию теории экстремальных задач. При исследовании оптимизационных проблем значительное внимание уделяется поиску удобных выпуклых аппроксимаций для достаточно произвольных функций и множеств. Дело в том, что для выпуклых задач развита весьма мощная и эффективная техника теоретического анализа и построены соответствующие вычислительные алгоритмы. Способы локальной аппроксимации множеств и функций, развиваемые в субдифференциальном исчислении, связаны с построением достаточно сложных, зачастую труднообозримых формул. Возникающие понятия — гиперкасательные, пределы по Рокафеллару, производные Кларка — при первом знакомстве вызывают недоумение, так как смысл их формальных определений уловить совсем нелегко.

Нестандартный анализ предлагает эффективные упрощающие процедуры — привлечение легализуемых им внешних понятий «*убивает кванторы*», что существенно сокращает сложность восприятия описываемых стандартных конструкций. Ниже мы займемся главным образом развитием и иллюстрацией этих положений для классификаций односторонних касательных к произвольным функциям и множествам.

Следует подчеркнуть, что многие конструкции, описываемые в настоящей главе, имеют более широкую область применимости, нежели субдифференциальное исчисление, в контексте которого ведется изложение.

5.1. Топологии в векторных пространствах

Изучение локальных аппроксимаций в векторных пространствах связано с особенностями монад, задающих топологии, согласованные с имеющимися там структурами. Именно этими топологиями мы займемся в текущем параграфе.

5.1.1. *Пусть U — звездное множество в векторном пространстве, т. е. $[0,1]\, U \subset U$. Множество U поглощает множество V в том и только в том случае, если для некоторого (а тогда и для любого) положительного инфинитезимального α будет $\alpha V \subset U$.*

$\lhd$ Раз U поглощает V, то по определению имеется $\beta > 0$, для которого $\beta V \subset U$. По принципу переноса с учетом стандартности U и V можно заключить, что $(\exists^{\mathrm{st}} \beta > 0)\, \beta V \subset U$. Теперь если $\alpha > 0$ и $\alpha \approx 0$, то $\alpha V = \alpha/\beta(\beta V) \subset \alpha/\beta U \subset U$. Оставшаяся часть утверждения очевидна. $\rhd$

5.1.2. Пусть x — стандартный элемент рассматриваемого стандартного векторного пространства X. Внешнее множество $\{\alpha x : \alpha > 0, \alpha \approx 0\}$ называют *радиус-монадой* x или *конатусом* вектора x, или, наконец, *направлением* на x. Термин «конатус» был предложен Т. Гоббсом [37, p. 173], писавшим. что конатус “is motion through a space and a time less than any given, that is, less than any determined whether by exposition or assigned by number, that is, through a point."
Объединение радиус-монад стандартных элементов X называют *конатусом направлений* этого пространства и обозначают $\mathrm{cnt}(X)$.

5.1.3. *Стандартное звездное множество U является поглощающим в X в том и только в том случае, если U содержит конатус направлений $\mathrm{cnt}(X)$ пространства X.*

5.1.4. ***Нестандартный критерий векторной топологии.*** *Пусть X — стандартное векторное пространство над основным полем $\mathbb{F}$ и $\mathscr{N}$ — стандартный фильтр в X. Существует векторная* *топология* τ *на* X *такая, что* $\mathscr{N} = \tau(0)$ *в том и только в том случае, если монада* $\mu(\mathscr{N})$ *фильтра* $\mathscr{N}$ *содержит конатус направлений* $\operatorname{cnt}(X)$ *и, кроме того, является внешним* ${}^{\approx}\mathbb{F}$*-подмодулем* X.

(Здесь, как обычно, ${}^{\approx}\mathbb{F} := \{t \in F : (\exists^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})|t| \le n\}$ — доступная часть основного поля скаляров $\mathbb{F}$, наделенная естественной структурой внешнего кольца. Напомним, что $\mathbb{F}$ — это $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$.)

$\lhd$ $\rightarrow$: Так как сложение непрерывно в нуле, то $\mu(\mathscr{N}) + \mu(\mathscr{N}) = \mu(\mathscr{N})$, т. е. $\mu(\mathscr{N})$ — внешняя подгруппа X. Пусть $\alpha \in {}^{\approx}\mathbb{F}$ и $\mathscr{G}$ — какой-нибудь базис $\mathscr{N}$, состоящий из уравновешенных множеств. Если $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ таково, что $|\alpha| \le n$, то для $G \in {}^{\circ}\mathscr{G}$ и $x \in \mu(\mathscr{N})$ будет $\alpha/n\ x \in G$. Отсюда $\alpha/nx \in \bigcap\{G : G \in {}^{\circ}\mathscr{G}\} = \mu(\mathscr{G}) = \mu(\mathscr{N})$. Стало быть, $\alpha x \in n\mu(\mathscr{N}) = \mu(\mathscr{N})$. Окончательно $\alpha\mu(\mathscr{N}) = \mu(\mathscr{N})$ для $\alpha \in {}^{\approx}\mathbb{F}$. Необходимо, наконец, отметить, что $\mathscr{N}$ имеет базис из поглощающих множеств, и сослаться на 5.1.3, чтобы заключить: $\mu(\mathscr{N}) \supset \operatorname{cnt}(X)$.

$\leftarrow$: Возьмем $U \in {}^{\circ}\mathscr{N}$. В соответствии с 4.1.4 это означает, что $U \supset \mu(\mathscr{N})$. Если W — бесконечно малый элемент $\mathscr{N}$, то его уравновешенная оболочка V также бесконечно мала (ибо $V \subset \mu(\mathscr{N})$). Кроме того, $V + V \subset \mu(\mathscr{N}) + \mu(\mathscr{N}) \subset \mu(\mathscr{N}) \subset U$. Итак,

$$(\forall^{\mathrm{st}} U \in \mathscr{N})(\exists V \in \mathscr{N})(V \text{ уравновешено } \wedge V + V \subset U).$$

По принципу переноса делаем вывод, что $\mathscr{N} + \mathscr{N} = \mathscr{N}$ и, кроме того, $\mathscr{N}$ имеет базис из уравновешенных множеств. На основании 5.1.3 отмечаем также, что $\mathscr{N}$ составлен из уравновешенных стандартных множеств. Тем самым $\mathscr{N}$ действительно определяет векторную топологию на X. $\rhd$

5.1.5. *Для каждой точки* x *монады* $\mu(X) := \mu(\tau(0))$ *топологического векторного пространства имеется бесконечно большое натуральное число* $N \in \mathbb{N} - {}^{\circ}\mathbb{N}$ *такое, что* $Nx \in \mu(X)$.

$\lhd$ Если V — стандартная окрестность нуля и $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$, то на основании 5.1.4 множество $A(n, V) := \{m \in \mathbb{N} : m \ge n \wedge mx \in V\}$ не пусто (ибо $\mu(X) \subset V$). По принципу переноса имеется элемент N, для которого $(\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(\forall^{\mathrm{st}} U \in \tau(0))(N \in A(n, V))$. Ясно, что элемент N — искомый. $\rhd$

5.1.6. В приложениях иногда удобно рассматривать *почти векторные топологии.* Такая топология τ на пространстве X характеризуется теми свойствами, что, во-первых, непрерывно умножение векторов из X на каждый скаляр из основного поля и, во-вторых, сложение непрерывно по совокупности переменных. Пару (X, τ), равно как и само X, называют при этом *почти топологическим векторным пространством.* Естественность этого понятия легко осознать в связи со следующим очевидным утверждением.

5.1.7. *Нестандартный критерий почти векторной топологии.* *Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{F}$. Существует почти векторная топология τ на X такая, что $\tau(0)$ совпадает с фиксированным фильтром $\mathscr{N}$ в том и только в том случае, если монада $\mu(\mathscr{N})$ является внешним векторным пространством над внешним полем стандартных скаляров ${}^\circ\mathbb{F}$.*

5.1.8. В связи с 5.1.7 отметим, что монада фильтра окрестностей нуля почти векторного пространства является выпуклым внешним множеством. Внутреннее выпуклое множество U содержит, очевидно, произвольные выпуклые комбинации своих элементов, т. е. для конечных наборов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ положительных скаляров, составляющих в сумме единицу, и набора $\{u_1, \dots, u_N\}$ элементов U будет $\sum_{k=1}^N \alpha_k u_k \in U$. Здесь N — произвольный (внутренний) элемент $\mathbb{N}$. Сформулированное свойство, называемое *гипервыпуклостью*, для внешних выпуклых множеств не выполняется (принцип индукции по внутренним натуральным числам в мире внешних множеств просто неверен). Примеры, подтверждающие высказанное положение, легко извлечь с учетом следующего полезного предложения.

5.1.9. *Нестандартный критерий локально выпуклой топологии.* *Векторная топология является локально выпуклой в том и только в том случае, если монада ее фильтра окрестностей нуля — гипервыпуклое множество.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Стандартные окрестности локально выпуклой топологии содержат стандартные выпуклые, а потому и гипервыпуклые окрестности. Пересечение же гипервыпуклых внешних множеств вновь гипервыпукло.

$\leftarrow$: Каждая стандартная окрестность нуля рассматриваемой топологии τ содержит выпуклую оболочку бесконечно малой окрестности (ибо эта оболочка целиком лежит в монаде $\tau(0)$ в силу ее гипервыпуклости). По принципу переноса заключаем, что любая окрестность в $\tau(0)$ содержит выпуклую окрестность нуля. $\rhd$

5.1.10. В заключение текущего параграфа, несколько уклоняясь от основной линии изложения, отметим, что нестандартный анализ топологических векторных пространств и операторов в них связан с изучением расположения точек различного вида. При этом, помимо уже встречавшихся нам околостандартных и предстандартных точек, важное место занимают специфические понятия «борнологического типа». Остановимся здесь лишь на простейших понятиях такого рода.

5.1.11. *Пусть (X, τ) — локально выпуклое пространство и x — внутренняя точка X. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *при любом бесконечно малом $\alpha \in \mathbb{F}$ верно $\alpha x \approx_\tau 0$;*

(2) $x \in \bigcap\limits_{V \in \tau(0)} \bigcup\limits_{n \in {}^{\circ}\mathbb{N}} nV$;

(3) *для всякой стандартной непрерывной полунормы p (элемента зеркала τ) выполнено $p(x) \in {}^{\approx}\mathbb{F}$.*

$\lhd$ (1) $\leftrightarrow$ (2): Воспользуемся алгоритмом Нельсона:

$$
\begin{gathered}
(\forall\, \alpha \in \mathscr{F})(\alpha \approx 0 \to \alpha x \approx 0) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} V \in \tau(0))(\forall\, \alpha)((\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})\, |\alpha| \le n^{-1} \to \alpha x \in V) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} V \in \tau(0))(\forall\, \alpha)(\exists^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(|\alpha| \le n^{-1} \to \alpha x \in V) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} V \in \tau(0))(\exists^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(x \in nV).
\end{gathered}
$$

(1) $\to$ (3): Если p — непрерывная полунорма, то для всякого $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ будет $|t|p(x) = p(|t|x) \approx 0$ в силу 4.2.7. Итак, $p(x) \in {}^{\approx}\mathbb{R}$.

(3) $\to$ (1): При каждой стандартной непрерывной полунорме p верно $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \approx 0$, как только $|\alpha| \approx 0$. Останется заметить, что последнее и означает инфинитезимальность αx в топологии τ. $\rhd$

5.1.12. Точка x, удовлетворяющая одному, а тогда и любому из эквивалентных условий 5.1.11 (1)–(3), называется *доступной*, реже *конечной*, в (X, τ). При этом пишут $x \in \mathrm{ltd}(X, \tau)$ или просто $x \in \mathrm{ltd}(X)$, если в указании на топологию нет особой необходимости, и говорят о принадлежности x *доступной части* пространства X.

5.1.13. ***Нестандартный критерий ограниченности.*** *Пусть X — стандартное локально выпуклое пространство. Стандартное множество U в X ограничено в том и только в том случае, если оно составлено доступными точками X, т. е. $U \subset \mathrm{ltd}(X)$.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Если U ограничено, то имеется стандартное $t \in {}^{\circ}\mathbb{R}$ такое, что $p(U) \le t$ для взятой непрерывной полунормы p. Значит, при $\alpha \approx 0$ и $x \in U$ будет $p(\alpha x) \le t\alpha$, т. е. $\alpha x \approx 0$.

Разнообразия ради мы воспользуемся секвенциальным признаком ограниченности. Итак, пусть (α_n) — стандартная последовательность скаляров, сходящаяся к нулю, и (u_n) — стандартная последовательность точек U. Нужно показать, что $\alpha_n u_n \to 0$. Пусть N — бесконечно большой номер. Тогда $\alpha_N \approx 0$ и, стало быть, на основании 5.1.11 (1) и условия будет $\alpha_N u_N \approx 0$. $\rhd$

5.1.14. Точку x пространства X называют *ограниченной* и пишут $x \in \operatorname{bd}(X)$, если найдется стандартное ограниченное множество, содержащее x.

5.1.15. ***Нестандартные критерии нормируемости.*** *Пусть X — (отделимое) локально выпуклое пространство. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *X нормируемо;*

(2) *$\operatorname{bd}(X) = \operatorname{ltd}(X)$;*

(3) *$\mu(X) \subset \operatorname{bd}(X)$.*

$\lhd$ (1) $\rightarrow$ (2): Ясно, что $\operatorname{bd}(X) \subset \operatorname{ltd}(X)$ без каких-либо гипотез об X. Если же X нормируемо, то

$$\operatorname{ltd}(X) = \{x \in X : \|x\| \in {}^{\approx}\mathbb{R}\},$$

где $\|\cdot\|$ — подходящая норма. Тем самым $\operatorname{ltd}(X)$ лежит, например, в шаре $B_X := \{x \in X : \|x\| \le 1\}$.

(2) $\rightarrow$ (3): Поскольку $\mu(X)$ всегда лежит в $\operatorname{ltd}(X)$, то требуемое очевидно.

(3) $\rightarrow$ (1): Пусть U — бесконечно малая окрестность в X. Имеем по условию, что для каждого $x \in U$ найдется стандартное множество V такое, что V ограничено и $x \in V$. Тем самым на основании принципа идеализации U лежит в некотором ограниченном множестве. Остается сослаться на классический критерий Колмогорова. $\rhd$

5.1.16. Приведенное утверждение показывает, в частности, что в общем (ненормируемом) случае доступных точек в пространстве больше, чем ограниченных. В нормированном же пространстве X, конечно, $\operatorname{ltd}(X) = \operatorname{bd}(X)$.

5.2. Классические аппроксимирующие и регуляризирующие конусы

В негладком анализе ведется интенсивный поиск удобных способов локальной односторонней аппроксимации произвольных функций и множеств. Принципиальным исходным пунктом послужило данное Ф. Кларком определение субдифференциала липшицевой функции [114]. Построенные и изучаемые в этой связи касательные конусы и отвечающие им производные зачастую определяются громоздкими труднообозримыми формулами. Здесь мы применим нестандартный анализ в качестве техники «убивания кванторов» — сворачивания сложных формул. Оказывается, что в обычном предположении *стандартности антуража* — в случае стандартности свободных переменных (см. 4.1.9) — конусы Булигана, Кларка и Адамара и связанные с ними регуляризирующие конусы определяются ясными инфинитезимальными конструкциями — прямыми апелляциями к бесконечно близким точкам и направлениям.

5.2.1. Пусть X — вещественное векторное пространство. В этом пространстве наряду с фиксированной почти векторной топологией $\sigma := \sigma_X$ с фильтром окрестностей нуля $\mathscr{N}_\sigma := \sigma(0)$ выделим почти векторную топологию τ с фильтром $\mathscr{N}_\tau := \tau(0)$. Как обычно, введем отношение бесконечной близости, ассоциированное с соответствующей равномерностью: $x_1 \approx {}_\sigma x_2 \leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mu(\mathscr{N}_\sigma)$. Аналогичное правило действует для τ. Ниже, если явно не оговорено противное, σ считаем векторной топологией. При этом монаду фильтра окрестностей $\sigma(x)$ обозначаем $\mu(\sigma(x))$, а монаду $\mu(\sigma(0))$ — просто $\mu(\sigma)$.

5.2.2. Для фиксированных множеств F в X и точки x из X в субдифференциальном исчислении рассматривают, в частности, следующие *конусы Адамара, Кларка* и *Булигана*:

$$\mathrm{Ha}(F, x') := \bigcup_{\substack{U \in \sigma(x') \\ \alpha'}} \mathrm{int}_\tau \left(\bigcap_{\substack{x \in F \cap U \\ 0 < \alpha \leq \alpha'}} \frac{F - x}{\alpha} \right);$$

$$\mathrm{Cl}(F, x') := \bigcap_{V \in \mathscr{N}_\tau} \bigcup_{\substack{U \in \sigma(x') \\ \alpha'}} \bigcap_{\substack{x \in F \cap U \\ 0 < \alpha \leq \alpha'}} \left(\frac{F - x}{\alpha} + V \right);$$

$$\operatorname{Bo}(F,x') := \bigcap_{\substack{U\in\sigma(x')\\ \alpha'}} \operatorname{cl}_\tau\Bigg(\bigcup_{\substack{x\in F\cap U\\ 0<\alpha\le\alpha'}} \frac{F-x}{\alpha}\Bigg),$$

где, как обычно, $\sigma(x') := x' + \mathscr{N}_\sigma$. Если $h \in \operatorname{Ha}(F,x')$, то иногда говорят, что F *эпилипшицево* в x' по отношению к h. Ясно, что

$$\operatorname{Ha}(F,x') \subset \operatorname{Cl}(F,x') \subset \operatorname{Bo}(F,x').$$

5.2.3. Выделяют также *гиперкасательный конус, конус допустимых направлений и контингенцию* F в точке x' соотношениями:

$$H(F,x') := \bigcup_{\substack{U\in\sigma(x')\\ \alpha'}} \bigcap_{\substack{x\in F\cap U\\ 0<\alpha\le\alpha'}} \frac{F-x}{\alpha};$$

$$\operatorname{Fd}(F,x') := \bigcap_{\alpha'>0} \frac{F-x'}{\alpha'};$$

$$K(F,x') := \bigcap_{\alpha'} \operatorname{cl}_\tau\Bigg(\bigcup_{0<\alpha\le\alpha'} \frac{F-x'}{\alpha}\Bigg).$$

Для экономии слов удобно считать, что $x' \in F$. Например, можно без оговорок сказать, что конусы $H(F,x')$ и $K(F,x')$ — это соответственно конус Адамара и конус Булигана для случая, когда τ или σ — дискретная топология. Итак, ниже всегда $x' \in F$. При этом ради экономии места принимают следующие сокращения:

$$(\forall^\bullet x)\,\varphi := (\forall\, x \approx_\sigma x')\,\varphi := (\forall\, x)(x\in F \wedge x \approx_\sigma x') \to \varphi,$$
$$(\forall^\bullet h)\,\varphi := (\forall\, h \approx_\tau h')\,\varphi := (\forall\, h)(h\in X \wedge h \approx_\tau h') \to \varphi,$$
$$(\forall^\bullet \alpha)\,\varphi := (\forall\, \alpha \approx 0)\,\varphi := (\forall\, \alpha)((\alpha>0 \wedge \alpha\approx 0) \to \varphi).$$

Двойственным образом определяют кванторы $\exists^\bullet x$, $\exists^\bullet h$, $\exists^\bullet \alpha$, т. е. считают

$$(\exists^\bullet x)\,\varphi := (\exists\, x \approx_\sigma x')\,\varphi := (\exists\, x)(x\in F \wedge x \approx_\sigma x') \wedge \varphi,$$
$$(\exists^\bullet h)\,\varphi := (\exists\, h \approx_\tau h')\,\varphi := (\exists\, h)(h\in X \wedge h \approx_\tau h') \wedge \varphi,$$
$$(\exists^\bullet \alpha)\,\varphi := (\exists\, \alpha \approx 0)\,\varphi := (\exists\, \alpha)(\alpha>0 \wedge \alpha\approx 0) \wedge \varphi.$$

Установим, что упомянутые конусы определяются простыми инфинитезимальными конструкциями.

5.2.4. *Конус Булигана является стандартизацией* $\exists\exists\exists$*-конуса, т. е. для стандартного элемента* h' *выполняется*

$$h' \in \mathrm{Bo}\,(F, x') \leftrightarrow (\exists^\bullet\, x)(\exists^\bullet\, \alpha)(\exists^\bullet h)(x + \alpha h \in F).$$

$\lhd$ Из определения конуса Булигана следуют эквивалентности

$$\begin{gathered} h' \in \mathrm{Bo}\,(F, x') \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall\, U \in \sigma(x'))(\forall\, \alpha' \in \mathbb{R})(\forall\, V \in \mathscr{N}_\tau)(\exists\, x \in F \cap U) \\ (\exists\, 0 < \alpha \le \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall\, U)(\forall\, \alpha')(\forall\, V)(\exists\, x)(\exists\, \alpha)(\exists\, h) \\ (x \in F \cap U \wedge h \in h' + V \wedge 0 < \alpha \le \alpha' \wedge x + \alpha h \in F). \end{gathered}$$

В силу принципа переноса выводим

$$\begin{gathered} h' \in \mathrm{Bo}\,(F, x') \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} U)(\forall^{\mathrm{st}} \alpha')(\forall^{\mathrm{st}} V)(\exists^{\mathrm{st}} x)(\exists^{\mathrm{st}} \alpha)(\exists^{\mathrm{st}} h) \\ (x \in F \cap U \wedge h \in h' + V \wedge 0 < \alpha \le \alpha' \wedge x + \alpha h \in F). \end{gathered}$$

Используя теперь принцип идеализации в слабой форме, получаем

$$\begin{gathered} h' \in \mathrm{Bo}\,(F, x') \to (\exists\, x)(\exists\, \alpha)(\exists\, h)(\forall^{\mathrm{st}} U)(\forall^{\mathrm{st}} \alpha')(\forall^{\mathrm{st}} V) \\ (x \in F \cap U \wedge h \in h' + V \wedge 0 < \alpha \le \alpha' \wedge x + \alpha h \in F) \to \\ \to (\exists\, x \approx_\sigma x')(\exists\, \alpha \approx 0)(\exists\, h \approx_\tau h')(x + \alpha h \in F) \to \\ \to (\exists^\bullet x)(\exists^\bullet \alpha)(\exists^\bullet h)(x + \alpha h \in F). \end{gathered}$$

Пусть, в свою очередь, стандартный элемент h' входит в стандартизацию «$\exists\exists\exists$-конуса». Поскольку стандартные элементы стандартного фильтра содержат элементы монады этого фильтра, получаем

$$\begin{gathered} (\forall^{\mathrm{st}} U \in \sigma(x'))(\forall^{\mathrm{st}} \alpha' \in \mathbb{R})(\forall^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{N}_\tau) \\ (\exists\, x \in F \cap U)(\exists\, 0 < \alpha < \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F). \end{gathered}$$

В силу принципа переноса заключаем, что $h' \in \mathrm{Bo}\,(F, x')$. $\rhd$

5.2.5. Доказанное утверждение переписывается в виде

$$\mathrm{Bo}\,(F, x') = {}^*\{h' \in X : (\exists^\bullet\, x)(\exists^\bullet \alpha)(\exists^\bullet h)(x + \alpha h \in F)\},$$

где, как обычно, * — символ стандартизации. В этой связи используют образные обозначения:

$$\exists\exists\exists(F, x') := \mathrm{Bo}\,(F, x').$$

В дальнейшем подобного рода обозначения мы будем употреблять без особых оговорок.

5.2.6. *Конус Адамара — это стандартизация* $\forall\forall\forall$*-конуса:*

$$\mathrm{Ha}(F, x') = \forall\forall\forall(F, x').$$

Иначе говоря, для стандартных h', F *и* x' *выполнено*

$$h' \in \mathrm{Ha}(F, x') \leftrightarrow (x' + \mu(\sigma)) \cap F + \mu(\mathbb{R}_+)(h' + \mu(\tau)) \subset F,$$

где $\mu(\mathbb{R}_+)$ *— внешнее множество положительных бесконечно малых чисел.*

$\lhd$ Доказательство получается из соображений двойственности из 5.2.4, если (что, конечно же, корректно) забыть о наличии F в $\exists^\bullet x$. $\rhd$

5.2.7. Из уже установленного видны соотношения

$$h' \in H(F, x') \leftrightarrow (\forall^\bullet x)(\forall^\bullet \alpha)(x + \alpha h' \in F),$$
$$h' \in K(F, x') \leftrightarrow (\exists^\bullet \alpha)(\exists^\bullet\, h)(x' + \alpha h \in F).$$

5.2.8. *Для стандартных* F, x', h' *(в условиях слабой идеализации) эквивалентны утверждения:*

(1) $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$;

(2) *существуют бесконечно малые* $U \in \sigma(x')$, $V \in \mathscr{N}_\tau$ *и* $\alpha' > 0$ *такие, что*

$$h' \in \bigcap_{\substack{0<\alpha\le\alpha' \\ x\in F\cap U}} \left(\frac{F - x}{\alpha} + V\right);$$

(3) $(\exists\, U \in \sigma(x'))(\exists\, \alpha')\,(\forall\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \le \alpha')$ $(\exists\, h \approx {}_\tau h')\ x + \alpha h \in F.$

◁ Используя очевидные сокращения, можно записать

$$h' \in \mathrm{Cl}(F, x') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, V)(\exists\, U)(\exists\, \alpha')(\forall\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \leq \alpha')(\exists\, h \in h' + V)$$
$$x + \alpha h \in F.$$

Привлекая принцип переноса и слабую идеализацию, имеем последовательно

$$h \in \mathrm{Cl}(F, x') \to (\forall^{\mathrm{st}} V)(\exists^{\mathrm{st}} U)(\exists^{\mathrm{st}} \alpha')(\forall\, x \in F \cap V)$$
$$(\forall\, 0 < \alpha \leq \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F) \to$$
$$\to (\forall^{\mathrm{st}} \{V_1, \dots, V_n\})(\exists^{\mathrm{st}} U)(\exists^{\mathrm{st}} \alpha')(\exists^{\mathrm{st}} V)(\forall\, k := 1, \dots, n)$$
$$V_k \supset V \wedge (\forall\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \leq \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F) \to$$
$$\to (\exists\, U)(\exists\, \alpha')(\exists\, V)(\forall^{\mathrm{st}} V')\, V' \supset V \wedge (\forall\, x \in F \cap U)$$
$$(\forall\, 0 < \alpha \leq \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F).$$

Отсюда, без сомнения, следует, что для некоторых $V \in \mathscr{N}_\tau$, $V \subset \mu(\tau)$ и $U \in \sigma(x')$, $U \subset \mu(\sigma) + x'$ и бесконечно малого α будет (2) и, тем более, (3).

Если, в свою очередь, выполнено (3), то с учетом определения отношения $\approx_\tau$ будет

$$(\forall^{\mathrm{st}} V)(\exists\, U)(\exists\, \alpha')(\forall\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \leq \alpha')(\exists\, h \in h' + V)$$
$$x + \alpha h \in F.$$

Значит, по принципу переноса $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$. ▷

5.2.9. *Конус Кларка (в условиях сильной идеализации) является стандартизацией* $\forall\forall\exists$*-конуса:*

$$\mathrm{Cl}(F, x') = {}^{*}\forall\forall\exists(F, x').$$

Иными словами,

$$h' \in \mathrm{Cl}(F, x') \leftrightarrow (\forall^{\bullet} x)(\forall^{\bullet} \alpha)(\exists^{\bullet} h)(x + \alpha h \in F).$$

◁ Пусть сначала $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$. Возьмем произвольные $x \approx_\sigma x'$ и $\alpha > 0$, $\alpha \approx 0$. Для каждой стандартной окрестности V — элемента фильтра $\mathscr{N}_\tau$ — в силу принципа переноса найдется элемент h, для которого $h \in h' + V$ и $x + \alpha h \in F$. Применяя сильную идеализацию, имеем

$$(\forall^{\mathrm{st}} V)(\exists\, h)(h \in h' + V \wedge x + \alpha h \in F) \to$$
$$\to (\exists\, h)(\forall^{\mathrm{st}} V)(h \in h' + V \wedge x + \alpha h \in F) \to$$
$$\to (\exists^{\bullet} h)(x + \alpha h \in F),$$

т. е. $h' \in \forall\forall\exists(F, x')$.

Пусть теперь $h' \in \forall\forall\exists(F, x')$. Возьмем произвольную стандартную окрестность V из фильтра $\mathscr{N}_\tau$. Фиксируем бесконечно малую окрестность U точки x' и положительное бесконечно малое число α'. Тогда по условию для некоторого $h \approx_\tau h'$ будет

$$(\exists\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \leq \alpha')(x + \alpha h \in F).$$

Иными словами,

$$(\forall^{\mathrm{st}} V)(\exists\, U)(\exists\, \alpha')(\forall\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \leq \alpha')(\exists\, h \in h' + V)$$
$$(x + \alpha h \in F).$$

В силу принципа переноса $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$. $\triangleright$

5.2.10. Приведем пример применения найденного нестандартного критерия элементов конуса Кларка для вывода его основного (и хорошо известного) свойства. Более общее утверждение будет установлено ниже.

5.2.11. *Конус Кларка произвольного множества в топологическом векторном пространстве является выпуклым и замкнутым.*

$\triangleleft$ В силу принципа переноса достаточно рассмотреть ситуацию, в которой параметры — пространство, топология, множество и т. п. — стандартны. Итак, пусть $h_0 \in \mathrm{cl}_\tau(\mathrm{Cl}(F, x'))$. Возьмем стандартную окрестность V из $\mathscr{N}_\tau$, и пусть стандартные элементы $V_1, V_2 \in \mathscr{N}_\tau$ таковы, что $V_1 + V_2 \subset V$. Найдется стандартный элемент $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$ такой, что $h' - h_0 \in V'$. Кроме того, для любых $x \approx_\tau x'$ и $\alpha > 0$, $\alpha \approx 0$ для некоторого h будет $h \in h' + V_2$ и $x + \alpha h \in F$. Ясно, что $h \in h' + V_2 \subset h_0 + V_1 + V_2 \subset h_0 + V$. Отсюда следует, что $h_0 \in \mathrm{Cl}(F, x')$.

Для доказательства выпуклости конуса Кларка достаточно заметить, что $\mu(\tau) + \mu(\mathbb{R}_+)\mu(\tau) \subset \mu(\tau)$ ввиду непрерывности отображения $(x, \alpha, h) \mapsto x + \alpha h$. $\triangleright$

5.2.12. *Пусть θ — векторная топология и $\theta \geq \tau$. Тогда*

$$\forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta(F), x') \subset \forall\forall\exists(F, x').$$

Если к тому же $\theta \geq \sigma$, то

$$\forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta(F), x') = \forall\forall\exists(F, x').$$

$\lhd$ Пусть $h' \in \forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta(F), x')$ — некоторый стандартный элемент названного конуса. Возьмем элементы $x \in F$ и $\alpha > 0$ такие, что $x \approx_\sigma x'$ и $\alpha \approx 0$. Ясно, что $x \in \mathrm{cl}_\theta(F)$. Значит, для некоторого $h \in {}_\tau h'$ будет $x + \alpha h \in \mathrm{cl}_\theta(F)$. Возьмем бесконечно малую окрестность W из $\mu(\theta)$. Окрестность αW — также элемент $\theta(0)$ и, стало быть, для некоторого $x'' \in F$ будет $x'' - (x + \alpha h) \in \alpha W$. Положим $h'' := (x'' - x)/\alpha$. Ясно, что $x + \alpha h'' \in F$ и, кроме того, $\alpha h'' \in \alpha h + \alpha W$. Отсюда $h'' \in h + W \subset h' + \mu(\tau) + W \subset h' + \mu(\tau) + \mu(\theta) \subset h' + \mu(\tau) + \mu(\tau) \subset h' + \mu(\tau)$, т. е. $h'' \approx_\tau h'$. Итак, $h' \in \forall\forall\exists(F, x')$.

Пусть теперь $\theta \geq \sigma$ и $h' \in \forall\forall\exists(F, x')$. Возьмем положительное бесконечно малое α и какой-нибудь элемент $x \in \mathrm{cl}_\theta(F)$ такой, что $x \approx_\sigma x'$. Подберем $x'' \in F$, для которого $x - x'' \in \alpha W$, где $W \subset \mu(\theta)$ — бесконечно малая симметричная окрестность нуля в θ. Поскольку $\theta \geq \sigma$, то $\mu(\theta) \subset \mu(\tau)$, т. е. $x - x'' \in \mu(\theta) \subset \mu(\sigma)$. Иначе говоря, $x \approx_\sigma x' \approx_\sigma x''$. По определению (элемент h', как обычно, считается стандартным) для некоторого $h \approx_\tau h'$ будет $x'' + \alpha h \in F$. Положим $h'' := (x'' - x)/\alpha + h$. Ясно, что при этом выполнено

$$\begin{aligned} h'' \in h + W \subset h + \mu(\theta) \subset h' + \mu(\theta) + \mu(\tau) \subset \\ \subset h' + \mu(\tau) + \mu(\tau) \subset h' + \mu(\tau), \end{aligned}$$

т. е. $h'' \approx_\tau h'$. Кроме того,

$$x + \alpha h'' = x + (x'' - x) + \alpha h = x'' + \alpha h \in F \subset \mathrm{cl}_\theta(F).$$

Окончательно $h' \in \forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta(F), x')$. $\rhd$

5.2.13. Из найденных представлений, в частности, видно:

$$\mathrm{Ha}(F, x') \subset H(F, x') \subset \mathrm{Cl}(F, x') \subset K(F, x') \subset \mathrm{cl}_\tau(\mathrm{Fd}(F, x')).$$

При условии $\sigma = \tau$ для выпуклого F будет

$$\mathrm{Fd}(F, x') \subset \mathrm{Cl}(F, x') \subset \mathrm{cl}(\mathrm{Fd}(F, x')),$$

т. е.

$$\mathrm{Cl}(F, x') = K(F, x') = \mathrm{cl}(\mathrm{Fd}(F, x')).$$

5.2.14. Приведенные нестандартные критерии конусов Булигана, Адамара и Кларка показывают, что эти конусы взяты из перечня восьми возможных конусов с инфинитезимальной приставкой $(Q^\bullet x)\,(Q^\bullet \alpha)\,(Q^\bullet h)$ (здесь Q — либо $\forall$, либо $\exists$). Ясно, что для полного описания всех этих конусов достаточно привести характеризации $\forall\exists\exists$-конуса и $\forall\exists\forall$-конуса.

5.2.15. *Имеет место представление*

$$\forall\exists\exists(F, x') = \bigcap_{\substack{\alpha' \\ V \in \mathscr{N}_\tau}} \bigcup_{U \in \sigma(x')} \bigcap_{x \in F \cap U} \left(V + \bigcup_{0 < \alpha \le \alpha'} \frac{F - x}{\alpha} \right).$$

$\lhd$ Для доказательства следует сначала понять, что требуемое равенство — сокращенная запись утверждения: для стандартных h', F, x' выполнено:

$$(\forall^\bullet x)(\exists^\bullet \alpha)(\exists^\bullet h)(x + \alpha h \in F) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, V \in \mathscr{N}_\tau)(\forall\, \alpha')(\exists\, U \in \sigma(x'))(\forall\, x \in F \cap U)$$
$$(\exists\, 0 < \alpha \le \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F).$$

Значит, при $h' \in \forall\exists\exists(F, x')$ и стандартных $V \in \mathscr{N}_\tau$ и $\alpha > 0$ в качестве требуемой окрестности U можно взять внутреннее подмножество монады $\mu(\sigma(x'))$. В свою очередь, последовательное применение принципов переноса и сильной идеализации дает

$$(\forall^{\mathrm{st}} V)(\forall^{\mathrm{st}} \alpha')(\forall x \approx_\sigma x')(\exists 0 < \alpha \le \alpha')(\exists h \in h' + V)\, x + \alpha h \in F \to$$
$$\to (\forall\, x \approx_\sigma x')(\forall^{\mathrm{st}} \{V_1, \dots, V_n\})(\forall^{\mathrm{st}} \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\})$$
$$(\exists h)(\exists \alpha)(\forall\, k := 1, \dots, n)(0 < \alpha \le \alpha'_k \wedge h \in h' + V_k \wedge x + \alpha h \in F) \to$$
$$\to (\forall x \approx_\sigma x')(\exists h)(\exists \alpha)(\forall^{\mathrm{st}} V)(h \in h' + V) \wedge (\forall^{\mathrm{st}} \alpha')$$
$$(0 < \alpha \le \alpha' \wedge x + \alpha h \in F) \to (\forall^\bullet\, x)(\exists^\bullet h)(\exists\, \alpha \approx 0)\, x + \alpha h \in F \to$$
$$\to h' \in {}^*\{h' : (\forall^\bullet x)(\exists^\bullet \alpha)(\exists^\bullet h)(x + \alpha h \in F)\} \to h' \in \forall\exists\exists(F, x').$$

Тем самым доказательство закончено. $\rhd$

5.2.16. Помимо указанных выше восьми инфинитезимальных конусов классического ряда имеются еще девять пар конусов, содержащих конус Адамара и лежащих в конусе Булигана. Такие конусы, понятно, порождаются изменением порядка кванторов. Пять новых пар устроены сложным образом по типу $\forall\exists\forall$-конуса. Прочие порождаются перестановками и дуализациями конуса Кларка и $\forall\exists\exists$-конуса. Например, в естественных образных обозначениях имеем

$$\forall\forall\exists(F,x') = \bigcap_{U\in\sigma(x')} \bigcup_{\alpha'} \operatorname{int}_\tau\left(\bigcap_{0<\alpha\le\alpha'} \bigcup_{x\in F\cap U} \frac{F-x}{\alpha}\right),$$

$$\exists\exists\forall(F,x') = \bigcup_{\alpha'} \bigcap_{U\in\sigma(x')} \operatorname{cl}_\tau\left(\bigcup_{x\in F\cap U} \bigcap_{0<\alpha\le\alpha'} \frac{F-x}{\alpha}\right),$$

$$\exists\forall\forall(F,x') = \bigcap_{\substack{U\in\sigma(x')\\ \alpha'}} \operatorname{cl}_\tau\left(\bigcap_{\substack{0<\alpha\le\alpha'\\ x\in F\cap U}} \frac{F-x}{\alpha}\right).$$

Последний конус у́же конуса Кларка и является выпуклым в случае, если $\mu(\sigma)+\mu(\mathbb{R}_+)\mu(\tau)\subset\mu(\sigma)$. Его обозначают $\mathrm{Ha}^+(F,x')$. Отметим, что

$$\mathrm{Ha}(F,x')\subset\mathrm{Ha}^+(F,x')\subset\mathrm{Cl}(F,x').$$

Выпуклым является $\forall\,\alpha\exists\,h\forall\,x$-конус, который обозначают символом $\mathrm{In}(F,x')$. Ясно, что

$$\mathrm{Ha}^+(F,x')\subset\mathrm{In}(F,x')\subset\mathrm{Cl}(F,x').$$

5.2.17. При вычислении касательных к композиции соответствий используют специальные *регуляризирующие конусы*.

Именно, если $F\subset X\times Y$, где векторные пространства X и Y снабжены топологиями σ_X, τ_X и σ_Y, τ_Y соответственно и $a':=(x',y')\in F$, полагают $\sigma:=\sigma_X\times\sigma_Y$ и

$$R^1(F,a') := \bigcap_{V\in\mathscr{N}_{\tau_Y}} \bigcup_{\substack{W\in\sigma(\alpha')\\ \alpha'}} \bigcup_{\substack{a\in W\cap F\\ 0<\alpha\le\alpha}} \left(\frac{F-a}{\alpha}+\{0\}\times V\right),$$

$$Q^1(F,a') := \bigcap_{V\in\mathscr{N}_{\tau_Y}} \bigcup_{\substack{W\in\sigma(a')\\ \alpha'\\ U\in\mathscr{N}_\sigma}} \bigcap_{\substack{a\in W\cap F\\ 0<\alpha\leq\alpha'\\ x\in U}} \left(\frac{F-x}{\alpha} + \{x\}\times V\right),$$

$$QR^2(F,a') := \bigcup_{\substack{W\in\sigma(a')\\ \alpha'\\ U\in\mathscr{N}_\sigma}} \bigcap_{\substack{a\in W\cap F\\ 0<\alpha\leq\alpha'\\ x\in U}} \left(\frac{F-x}{\alpha} + (x,0)\right).$$

Конусы $R^2(F,a')$, $Q^2(F,a')$ и $QR^1(F,a')$ определяют двойственным образом. Более того, аналогичные обозначения распространяют на случай произведений пространств в числе, большем двух, подразумевая, что верхний индекс над символом аппроксимирующего множества указывает номер координаты, на которую накладывается условие соответствующего типа. Отметим также, что в приложениях обычно рассматривают попарно совпадающие топологии: $\sigma_X = \tau_X$ и $\sigma_Y = \tau_Y$. Дадим удобные очевидные нестандартные критерии описанных регуляризирующих конусов.

5.2.18. *Для стандартных векторов $s'\in X$ и $t'\in Y$ выполнено:*

$$(s',t')\in R^1(F,a') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, a\approx_\sigma a', a\in F)(\forall\,\alpha\in\mu(\mathbb{R}_+))(\exists\, t\approx_{\tau_Y} t')(a+\alpha(s',t)\in F);$$
$$(s',t')\in Q^1(F,a') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall a\approx_\sigma a', a\in F)(\forall \alpha\in\mu(\mathbb{R}_+))(\forall s\approx \tau_X s')(\exists t\approx_{\tau_Y} t')(a+\alpha(s,t)\in F);$$
$$(s',t')\in QR^2(F,a') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, a\approx_\sigma a', a\in F)(\forall\,\alpha\in\mu(\mathbb{R}_+))(\forall\, s\approx_{\tau_X} s')(a+\alpha(s,t')\in F).$$

5.2.19. Из 5.2.18 видно, что конусы типа QR^j — разновидности конуса Адамара, конусы R^j — разновидности конуса Кларка. Конусы R^j при этом получаются также специализацией конусов типа Q^j при соответствующем подборе дискретных топологий. В обычных предположениях названные конусы являются выпуклыми. Приведем доказательство указанного факта только для конуса Q^j, чего в силу уже отмеченного вполне достаточно.

5.2.20. *Если отображение $(a,\alpha,b)\mapsto a+\alpha b$ непрерывно как действующее из $(X\times Y,\sigma)\times(\mathbb{R},\tau_\mathbb{R})\times(X\times Y,\tau_X\times\tau_Y)$ в $(X\times Y,\sigma)$, то конусы $Q^j(F,a')$ для $j:=1,2$ выпуклые.*

$\lhd$ По принципу переноса можно работать в стандартном антураже, т. е. в предположении стандартности рассматриваемых параметров, и пользоваться критерием 5.2.18. Итак, пусть (s', t') и (s'', t'') лежат в $Q^1(F, x')$. Для $a \approx {}_\sigma a'$ и $a \in F$, положительного $\alpha \approx 0$ и $s \approx {}_{\tau_X}(s' + s'')$ в силу 5.2.18 при некотором $t_1 \approx {}_{\tau_Y} t'$ будет $a_1 := a + \alpha(s - s'', t_1) \in F$. По условию $\mu(\sigma) + \alpha(\mu(\tau_X) \times \mu(\tau_Y)) \subset \mu(\sigma)$. Стало быть, $a_1 \approx {}_\sigma a$ и $a_1 \in F$. Вновь привлекая 5.2.18, найдем $t_2 \approx {}_{\tau_Y} t''$, для которого $a_1 + \alpha(s'', t_2) \in F$. Ясно, что для $t := t_1 + t_2$ будет $t \approx {}_{\tau_Y}(t' + t'')$ и $a + \alpha(s, t) = a + \alpha(s - s'', t_1) + \alpha(s'', t_2) = a_1 + \alpha(s'', t_2) \in F$, что и требовалось доказать, ибо однородность $Q^1(F, a')$ обеспечена устойчивостью монад почти векторных топологий относительно умножений на стандартные скаляры (см. 5.1.4). $\rhd$

5.2.21. Проведенный анализ показывает, что имеет смысл ввести в рассмотрение конусы P^j и S^j с помощью следующих прямых стандартизаций:

$$
\begin{gathered}
(s', t') \in P^2(F, a') \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists\, s \approx {}_{\tau_X} s')(\forall\, t \approx {}_{\tau_Y} t')(\forall\, a \approx {}_\sigma a', a \in F)(\forall\, \alpha \in \mu(\mathbb{R}_+)) \\
(a + \alpha(s, t) \in F); \\
(s', t') \in S^2(F, a) \leftrightarrow (\forall\, t \approx {}_{\tau_Y} t')(\exists\, s \approx {}_{\tau_X} s')(\forall\, a \approx {}_\sigma a', a \in F) \\
(\forall\, \alpha \in \mu(\mathbb{R}_+))(a + \alpha(s, t) \in F).
\end{gathered}
$$

В принципе, явный вид конусов P^j и S^j можно выписать (мы обсудим это в следующем параграфе). Однако от возникающих явных формул (особенно для S^j) мало пользы ввиду их необозримой громоздкости. Впрочем, как мы уже убедились, подобные формулы фактически осложняют анализ, скрывая прозрачный «инфинитезимальный» смысл конструкций.

5.2.22. *Для $j := 1, 2$ выполнено*

$$
\mathrm{Ha}(F, a') \subset P^j(F, a') \subset S^j(F, a') \subset Q^j(F, a') \subset R^j(F, a') \subset \mathrm{Cl}(F, a').
$$

При этом названные конусы выпуклы, как только $\mu(\sigma) + \alpha(\mu(\tau_X) \times \mu(\tau_Y)) \subset \mu(\sigma)$ для всех $\alpha > 0$, $\alpha \approx 0$.

$\lhd$ Включения, которые требуется доказать, очевидны из нестандартных определений соответствующих конусов. Выпуклость большинства из указанных конусов уже отмечалась. Установим для полноты выпуклость $S^2(F, a')$.

То, что $S^2(F,a')$ выдерживает умножение на положительные стандартные скаляры, вытекает из неделимости монады. Проверим, что $S^2(F,a')$ — полугруппа. Итак, для стандартных (s',t') и (s'',t'') из $S^2(F,a')$ возьмем $t \approx_{\tau_Y} (t'+t'')$. Тогда $t-t'' \approx_{\tau_Y} t'$ и имеется $s_1 \approx_{\tau_X} s'$, обслуживающее $t-t''$ в соответствии с определением $S^2(F,a')$. Подберем $s_2 \approx_{\tau_X} s''$, обслуживающее t'' в том же очевидном смысле. Ясно, что $(s_1+s_2) \approx_{\tau_X} (s'+s'')$. При этом для всяких $a \in F$ и $\alpha > 0$ таких, что $a \approx_\sigma a'$ и $\alpha \approx 0$, будет $a_1 := a + \alpha(s_1, t-t'') \in F$. Поскольку a_1, как видно, бесконечно близко (в смысле σ) к a', из условия выбора s_2 заключаем: $a_1 + \alpha(s_2, t'') \in F$. Отсюда непосредственно видно, что $a + \alpha(s_1+s_2, t) \in F$, т. е. $(s'+s'', t'+t'') \in S^2(F,a')$.

Выпуклость $P^j(F,a')$ проверяется аналогичным прямым рассуждением. $\triangleright$

5.2.23. Из доказательства 5.2.22 видно, что можно рассматривать выпуклые расширения конусов P^j и S^j — конусы P^{+j} и S^{+j}, получающиеся «переносом квантора $\forall\,\alpha$». Например, определяют конус $P^{+2}(F,a')$ соотношением

$$(s',t') \in P^{+2}(F,a') \leftrightarrow (\forall\,\alpha \in \mu(\mathbb{R}_+))(\exists\, s \approx_{\tau_X} s')(\forall\, t \approx_{\tau_Y} t')$$
$$(\forall\, a \approx_\sigma a', a \in F)(a + \alpha(s,t) \in F).$$

В связи с 5.2.19 ясно, что имеет смысл использовать и регуляризации, получающиеся специализацией конуса Ha^+ при подборе дискретных топологий. Соответствующие явные формулы опускаются. Значение регуляризирующих конусов связано с их ролью при субдифференцировании сложных отображений, которым посвящен пункт 5.5.

5.3. Пределы по Куратовскому и Рокафеллару

В предыдущем параграфе мы увидели, что многие интересующие нас конструкции связаны с процедурой чередования кванторов в инфинитезимальных конструкциях. Подобные образования возникают в различных задачах и соотнесены с некоторыми принципиальными фактами. О тех из них, которые наиболее часто встречаются при субдифференцировании, и пойдет сейчас речь. Начнем с общих наблюдений об алгоритме Нельсона.

5.3.1. *Пусть $\varphi = \varphi(x, y) \in$ (ZFC), т. е. φ — некоторая формула теории Цермело — Френкеля, не содержащая никаких свободных переменных, кроме x, y. Тогда*

$$
\begin{gathered}
(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, \varphi(x, y) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\forall\, x \in F)\, \varphi(x, y), \\
(\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, \varphi(x, y) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\exists\, x \in F)\, \varphi(x, y),
\end{gathered}
$$

где, как обычно, $\mu(\mathscr{F})$ — монада стандартного фильтра $\mathscr{F}$.

$\lhd$ Достаточно доказать импликацию $\to$: в первой из эквивалентностей. По условию для любого удаленного элемента F фильтра $\mathscr{F}$ выполнено внутреннее свойство $\psi := (\forall\, x \in F)\, \varphi(x, y)$. Значит, по принципу Коши ψ справедливо для какого-либо стандартного F. $\rhd$

5.3.2. *Пусть $\varphi = \varphi(x, y, z) \in$ (ZFC) и $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — некоторые стандартные фильтры (в каких-либо стандартных множествах). Тогда*

$$
\begin{gathered}
(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))\, \varphi(x, y, z) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\exists^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\forall\, x \in F)(\exists\, y \in G)\, \varphi(x, y, z) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} F(\,\cdot\,))(\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\forall\, x \in F(G))(\exists\, y \in G)\, \varphi(x, y, z), \\
(\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall\, y \in \mu(\mathscr{G}))\, \varphi(x, y, z) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\exists\, x \in F)(\forall\, y \in G)\, \varphi(x, y, z) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\exists\, x \in F(G))(\forall\, y \in G)\, \varphi(x, y, z)
\end{gathered}
$$

(здесь символ $F(\,\cdot\,)$ обозначает функцию из $\mathscr{G}$ в $\mathscr{F}$).

$\lhd$ Доказательство состоит в апелляции к принципам идеализации и конструирования с учетом 5.3.1. $\rhd$

5.3.3. *Пусть $\varphi = \varphi(x, y, z, u) \in$ (ZFC) и $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ — три стандартных фильтра. Если u — стандартное множество, то выполнены соотношения:*

$$
\begin{gathered}
(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))(\forall\, z \in \mu(\mathscr{H}))\, \varphi(x, y, z, u) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, G(\,\cdot\,))(\exists\, F \in \mathscr{F})(\exists^{\mathrm{fin}} \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H})(\forall\, x \in \mathscr{F}) \\
(\exists\, H \in \mathscr{H}_0)(\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi(x, y, z, u); \\
(\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall\, y \in \mu(\mathscr{G}))(\exists\, z \in \mu(\mathscr{H}))\, \varphi(x, y, z, u) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists\, G(\,\cdot\,))(\forall\, F \in \mathscr{F})(\forall^{\mathrm{fin}} \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H})(\exists\, x \in F) \\
(\forall\, H \in \mathscr{H}_0)(\forall\, y \in G(H))(\exists\, z \in H)\, \varphi(x, y, z, u),
\end{gathered}
$$

где $G(\,\cdot\,)$ — функция из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{G}$.

$\triangleleft$ Реализуя алгоритм Нельсона, выводим:

$$
\begin{gathered}
(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))(\forall\, z \in \mu(\mathscr{H}))\, \varphi \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} G(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st}} H \in \mathscr{H})(\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G(\,\cdot\,))(\forall\, x)(\exists^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\exists^{\mathrm{st}} H \in \mathscr{H}) \\
(x \in F \to (\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{F}_0)(\exists^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{H}_0)(\forall\, x)(\exists\, F \in \mathscr{F}_0)(\exists\, H \in \mathscr{H}_0) \\
(F \in \mathscr{F} \wedge H \in \mathscr{H} \wedge (x \in F \to (\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H})(\forall\, x)(\exists\, F \in \mathscr{F}_0) \\
(x \in F \to (\exists\, H \in \mathscr{H}_0)(\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, G(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists^{\mathrm{fin}} \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H})(\forall\, x) \\
((\forall\, F \in \mathscr{F}_0)(x \in F) \to (\exists\, H \in \mathscr{H}_0)(\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, G(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists^{\mathrm{fin}} \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H})(\forall\, x \in \textstyle\bigcap \mathscr{F}_0) \\
(\exists\, H \in \mathscr{H}_0)(\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi.
\end{gathered}
$$

Остается заметить, что для конечного множества $\mathscr{F}_0$, содержащегося в $\mathscr{F}$, обязательно $\bigcap \mathscr{F}_0 \in \mathscr{F}$. $\triangleright$

5.3.4. Приведенное предложение дает возможность охарактеризовать в явном виде $\forall\exists\forall$-конусы и им подобные образования. Легко видеть, что возникающие стандартные описания неудобоваримы. Остановимся теперь на наиболее важных для приложений конструкциях, связанных с приставками типа $\forall\exists$, $\forall\forall$, $\exists\forall$ и $\exists\exists$. Начнем с некоторых средств, позволяющих использовать распространенный язык бесконечно малых переменных величин для анализа таких конструкций.

5.3.5. Пусть Ξ — *направление*, т. е. непустое направленное множество. В соответствии с принципом идеализации в Ξ имеются внутренние элементы, мажорирующие ${}^{\circ}\Xi$. Напомним (см. 4.1.6 (3)), что их называют *удаленными* или *бесконечно большими* в Ξ. Рассмотрим стандартный базис фильтра хвостов $\mathscr{B} := \{\sigma(\xi) : \xi \in \Xi\}$, где σ — порядок в Ξ. Ясно, что монада фильтра хвостов составлена из удаленных элементов рассматриваемого направления. Используют записи: ${}^{a}\Xi := \mu(\mathscr{B})$ и $\xi \approx +\infty \leftrightarrow \xi \in {}^{a}\Xi$.

5.3.6. *Пусть* Ξ, H — *два направления и* $\xi := \xi(\,\cdot\,) : \mathrm{H} \to \Xi$ — *некоторое отображение. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $\xi({}^a\mathrm{H}) \subset {}^{\mathrm{a}}\Xi$;

(2) $(\forall\,\xi \in \Xi)(\exists\,\eta \in \mathrm{H})(\forall\,\eta' \geq \eta)(\xi(\eta') \geq \xi)$.

$\triangleleft$ В самом деле, (1) означает, что фильтр хвостов Ξ грубее образа фильтра хвостов H, т. е. что в каждом хвосте направления Ξ лежит образ некоторого хвоста H. Последнее утверждение и составляет содержание (2). $\triangleright$

5.3.7. В случае выполнения эквивалентных условий 5.3.6 (1), 5.3.6 (2) говорят, что H — *поднаправление* Ξ (относительно $\xi(\,\cdot\,)$).

5.3.8. Пусть X — некоторое множество и $x := x(\,\cdot\,) : \Xi \to X$ — некоторая сеть элементов X (пишем также $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ или просто (x_ξ)). Пусть, далее, $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ — еще одна сеть элементов X. Говорят, что (y_η) — *подсеть Мура* сети (x_ξ) или *строгая подсеть* (x_ξ), если H является поднаправлением Ξ относительно такого $\xi(\,\cdot\,)$, что $y_\eta = x_{\xi(\eta)}$ при всех $\eta \in \mathrm{H}$, т. е. $y = x \circ \xi$. Подчеркнем, что в силу 4.1.6 (5) выполнено $y({}^a\mathrm{H}) \subset \mathrm{x}({}^{\mathrm{a}}\Xi)$.

5.3.9. Последнее указанное свойство подсетей Мура кладут в основу более свободного определения подсети, которое привлекает непосредственной связью с фильтрами. Именно, сеть $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ элементов X называют *подсетью* (или *подсетью в широком смысле слова*) сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов X, если

$$(\forall\,\xi \in \Xi)(\exists\,\eta \in \mathrm{H})(\forall\,\eta' \geq \eta)(\forall\,\xi' \geq \xi)(x(\xi') = y(\eta')),$$

т. е. в случае, когда каждый хвост сети x содержит некоторый хвост y. На языке монад, разумеется, выполнено $y({}^a\mathrm{H}) \subset x({}^a\Xi)$ или, в наглядной записи:

$$(\forall\,\eta \approx +\infty)(\exists\,\xi \approx +\infty)(y_\eta = x_\xi).$$

При этом, стремясь к образности, часто пишут $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ — подсеть сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ (что может привести к недоразумениям). Полезно подчеркнуть, что в общем случае подсети не обязаны являться подсетями Мура. Отметим также, что две сети в одном множестве называют *эквивалентными*, если каждая из них — подсеть другой, т. е. если их монады совпадают.

5.3.10. Если $\mathscr{F}$ — фильтр в X и (x_ξ) — сеть элементов X, то говорят, что рассматриваемая *сеть подчинена* $\mathscr{F}$ при условии: $\xi \approx +\infty \to x_\xi \in \mu(\mathscr{F})$. Иначе говоря, сеть (x_ξ) подчинена $\mathscr{F}$, если фильтр ее хвостов тоньше $\mathscr{F}$. При этом допускают вольность и пишут $x_\xi \downarrow \mathscr{F}$, имея в виду аналогию с топологическими обозначениями сходимости. Отметим здесь же, что в случае, когда $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, $\mathscr{F}$ совпадает с фильтром хвостов любой подчиненной ему сети (x_ξ), т. е. сама такая сеть (x_ξ) — *ультрасеть.*

5.3.11. ***Теорема.*** *Пусть $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — формула теории Цермело — Френкеля, не содержащая никаких свободных параметров, кроме x, y, z, причем z — стандартное множество. Пусть, далее, $\mathscr{F}$ — фильтр в X, а $\mathscr{G}$ — фильтр в Y. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $(\forall\, G \in \mathscr{G})(\exists\, F \in \mathscr{F})(\forall\, x \in F)(\exists\, y \in G)\, \varphi(x, y, z)$;

(2) $(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))\, \varphi(x, y, z)$;

(3) *для любой сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов X, подчиненной $\mathscr{F}$, найдутся сеть $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ элементов Y, подчиненная $\mathscr{G}$, и строгая подсеть $(x_{\xi(\eta)})_{\eta\in\mathrm{H}}$ сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ такие, что при всех $\eta \in \mathrm{H}$ будет $\varphi(x_{\xi(\eta)}, y_\eta, z)$, т. е. символически*

$$(\forall\, x_\xi \downarrow \mathscr{F})(\exists\, y_\eta \downarrow \mathscr{G})\, \varphi(x_{\xi(\eta)}, y_\eta, z);$$

(4) *для любой сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов X, подчиненной $\mathscr{F}$, найдутся сеть $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ элементов Y, подчиненная $\mathscr{G}$, и подсеть $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ такие, что при всех $\eta \in \mathrm{H}$ будет $\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$, т. е. символически*

$$(\forall\, x_\xi \downarrow \mathscr{F})(\exists\, y_\eta \downarrow \mathscr{G})\, \varphi(x_\eta, y_\eta, z);$$

(5) *для любой ультрасети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов X, подчиненной $\mathscr{F}$, найдутся ультрасеть $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$, подчиненная $\mathscr{G}$, и ультрасеть $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$, эквивалентная $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$, такие, что $\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$ при всех $\eta \in \mathrm{H}$.*

$\triangleleft$ (1) $\to$ (2): Пусть $x \in \mu(\mathscr{F})$. По принципу переноса для каждого стандартного G имеется стандартное F такое, что $(\forall\, x \in F)$ $(\exists\, y \in G)\varphi(x, y, z)$. Значит, для $x \in \mu(\mathscr{F})$ будет $(\forall\, G \in {}^\circ\mathscr{G})(\exists\, y \in G)$ $\varphi(x, y, z)$. Привлекая принцип идеализации, выводим: $(\exists\, y)(\forall\, G \in {}^\circ\mathscr{G})(y \in G \wedge \varphi(x, y, z))$. Итак, $y \in \mu(\mathscr{G})$ и $\varphi(x, y, z)$.

(2) $\to$ (3): Пусть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — стандартная сеть в X, подчиненная $\mathscr{F}$. Для каждого стандартного G из $\mathscr{G}$ и $\xi \in {}^\circ\Xi$ положим

$$A_{(G,\xi)} := \{\xi' \geq \xi : (\forall\, \xi'' \geq \xi')(\exists\, y \in G)\, \varphi(x_{\xi''}, y, z)\}.$$

На основании 4.1.8 видим, что ${}^a\Xi \subset A_{(G,\xi)}$. Учитывая, что $A_{(G,\xi)}$ — внутреннее множество, по принципу Коши заключаем: ${}^\circ\!A_{(G,\xi)} \neq \varnothing$. Тем самым на направлении $\mathrm{H} := \mathscr{G} \times \Xi$ (с естественным упорядочением) заданы стандартные отображения $\xi : \mathrm{H} \to \Xi$ и $y : \mathrm{H} \to \mathrm{Y}$ такие, что $\xi(\eta) \in A_{(G,\xi)}$ и $y_\eta \in G$ при $G \in \mathscr{G}$ и $\xi \in \Xi$, для которых $\eta \in (G, \xi)$. Видно, что $\xi(\eta) \approx +\infty$ и $y_\eta \in \mu(\mathscr{G})$ при $\eta \approx +\infty$.

(3) $\to$ (4): Очевидно.

(4) $\to$ (1): Если (1) не выполнено, то по условию

$$(\exists\, G \in \mathscr{G})(\forall\, F \in \mathscr{F})(\exists\, x \in F)(\forall\, y \in G)\, \neg\varphi(x, y, z).$$

Для $F \in \mathscr{F}$ выбираем $x_F \in F$ так, чтобы было $\neg\varphi(x, y, z)$ при всех $y \in G$. Отметим, что получаемую сеть $(x_F)_{F\in\mathscr{F}}$ элементов X, равно как и множество G, можно считать стандартными на основании принципа переноса. Нет сомнений, что $x_F \downarrow \mathscr{F}$ и, стало быть, в силу (3) найдутся направление H и подсеть $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ сети $(x_F)_{F\in\mathscr{F}}$ такие, что для некоторой сети $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ будет $\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$ при всяком $\eta \in \mathrm{H}$. По определению 5.3.9 x_η при каждом бесконечно большом η совпадает с x_F для некоторого удаленного F, т. е. $x_\eta \in \mu(\mathscr{F})$. По условию $y_\eta \in \mu(\mathscr{G})$ и тем более $y_\eta \in G$. При этом оказывается $\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$ и $\neg\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$, чего быть не может. Полученное противоречие свидетельствует о ложности сделанного допущения. Таким образом, (1) выполнено (как только имеет место (4)).

(1) $\leftrightarrow$ (5): Для доказательства требуемой эквивалентности достаточно заметить, что она становится очевидной в случае, когда $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ суть ультрафильтры. Остается заметить, что каждая монада есть объединение монад ультрафильтров. $\rhd$

5.3.12. В приложениях бывает удобным рассматривать конкретизации 5.3.11, отвечающие случаям, в которых один из фильтров дискретен. Так, используя естественные обозначения, выводим

$$(\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, \varphi(x, y) \leftrightarrow (\exists\, x_\xi \downarrow \mathscr{F})\, \varphi(x_\xi, y);$$
$$(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, \varphi(x, y) \leftrightarrow (\forall\, x_\xi \downarrow \mathscr{F})(\exists\, x_\eta \downarrow \mathscr{F})\, \varphi(x_\eta, y).$$

5.3.13. Пусть $F \subset X \times Y$ — внутреннее соответствие из стандартного множества X в стандартное множество Y. Допустим, что в X выделен стандартный фильтр $\mathscr{N}$, а в Y — топология τ. Полагаем

$$\begin{aligned}
\forall\forall(F) &:= {}^*\{y' : (\forall\, x \in \mu(\mathscr{N}) \cap \operatorname{dom}(F))(\forall\, y \approx y')(x,y) \in F\},\\
\exists\forall(F) &:= {}^*\{y' : (\exists\, x \in \mu(\mathscr{N}) \cap \operatorname{dom}(F))(\forall\, y \approx y')(x,y) \in F\},\\
\forall\exists(F) &:= {}^*\{y' : (\forall\, x \in \mu(\mathscr{N}) \cap \operatorname{dom}(F))(\exists\, y \approx y')(x,y) \in F\},\\
\exists\exists(F) &:= {}^*\{y' : (\exists\, x \in \mu(\mathscr{N}) \cap \operatorname{dom}(F))(\exists\, y \approx y')(x,y) \in F\},
\end{aligned}$$

где, как обычно, * — символ стандартизации, а запись $y \approx y'$ означает, что $y \in \mu(\tau(y'))$. Множество $Q_1Q_2(F)$ называют Q_1Q_2-*пределом* F (здесь Q — один из кванторов $\forall$ или $\exists$).

5.3.14. В приложениях обычно ограничиваются случаем, когда F — стандартное соответствие, определенное на некотором элементе фильтра $\mathscr{N}$. При этом изучают $\exists\exists$-предел и $\forall\exists$-предел. Первый называют *верхним пределом*, а второй — *нижним пределом* F вдоль $\mathscr{N}$.

Если рассматривается сеть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в области определения F, то, имея в виду фильтр хвостов сети, полагают

$$\begin{aligned}
\operatorname{Li}_{\xi\in\Xi} F &:= \liminf_{\xi\in\Xi} F(x_\xi) := \forall\exists(F),\\
\operatorname{Ls}_{\xi\in\Xi} F &:= \limsup_{\xi\in\Xi} F(x_\xi) := \exists\exists(F).
\end{aligned}$$

В таких случаях чаще всего говорят о *пределах по Куратовскому.*

5.3.15. *Для стандартного соответствия F справедливы представления:*

$$\begin{aligned}
\exists\exists(F) &= \bigcap_{U\in\mathscr{N}} \operatorname{cl}\Big(\bigcup_{x\in U} F(x)\Big);\\
\forall\exists(F) &= \bigcap_{U\in\ddot{\mathscr{N}}} \operatorname{cl}\Big(\bigcup_{x\in U} F(x)\Big),
\end{aligned}$$

где $\ddot{\mathscr{N}}$ — так называемый гриль $\mathscr{N}$, т. е. семейство, составленное всеми подмножествами X, задевающими монаду $\mu(\mathscr{N})$.

Иначе говоря,

$$\ddot{\mathscr{N}} = {}^*\{U' \subset X : U' \cap \mu(\mathscr{N}) \neq \varnothing\} =$$
$$= \{U' \subset X : (\forall\, U \in \mathscr{N})(U \cap U' \neq \varnothing)\}.$$

Отметим в этой связи соотношения:

$$\forall\exists(F) = \bigcap_{U \in \ddot{\mathscr{N}}} \operatorname{int} \bigcup_{x \in U} (F(x)),$$
$$\forall\forall(F) = \bigcup_{U \in \mathscr{N}} \operatorname{int}\Bigl(\bigcap_{x \in U} F(x)\Bigr).$$

5.3.16. Из теорем 5.3.11 мгновенно следует описание пределов на языке сетей.

5.3.17. *Элемент y лежит в $\forall\exists$-пределе F в том и только в том случае, если для каждой сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов* $\operatorname{dom}(F)$, *подчиненной $\mathscr{N}$, найдутся подсеть $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и сеть $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$, сходящаяся к y, такие, что $(x_\eta, y_\eta) \in F$ для всех $\eta \in \mathrm{H}$.*

5.3.18. *Элемент y лежит в $\exists\exists$-пределе F в том и только в том случае, если существуют сеть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов* $\operatorname{dom}(F)$, *подчиненная $\mathscr{N}$, и сеть $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$, сходящаяся к y, для которых $(x_\xi,\, y_\xi) \in F$ при любых $\xi \in \Xi$.*

5.3.19. *Для любого внутреннего соответствия F выполнено:*

$$\forall\forall(F) \subset \exists\forall(F) \subset \forall\exists(F) \subset \exists\exists(F).$$

При этом $\exists\exists(F)$, $\forall\exists(F)$ суть замкнутые, а $\forall\forall(F)$ и $\exists\forall(F)$ — открытые множества.

$\lhd$ Искомые включения бесспорны. Таким образом, с учетом соображений двойственности установим для определенности замкнутость $\forall\exists$-предела.

Если V — стандартная открытая окрестность y' из $\operatorname{cl}(\forall\exists(F))$, то имеется $y \in \forall\exists(F)$, для которого $y \in V$. Для $x \in \mu(\mathscr{N})$ подыщем y'' так, чтобы было $y'' \in \mu(\tau(y))$ и $(x, y'') \in F$. Ясно, что $y'' \in V$, ибо V — окрестность y. Итак,

$$(\forall\, x \in \mu(\mathscr{N}))(\forall\, V \in {}^\circ\tau(y'))(\exists\, y'' \in V)\,(x, y'') \in F.$$

Используя принцип идеализации, выводим: $y' \in \forall\exists(F)$. $\rhd$

5.3.20. Приведенные общие утверждения позволяют охарактеризовать элементы многих аппроксимирующих или регуляризирующих конусов на языке сетей, что распространено в литературе (см. [114, 126]). Отметим, в частности, что конус Кларка $\mathrm{Cl}(F, x')$ для F в X получается как предел по Куратовскому:

$$\mathrm{Cl}(F, x') = \mathrm{Li}_{\tau(x') \times \tau_{\mathbb{R}^+}(0)}\, \Gamma_F,$$

где Γ_F — *гомотетия*, связанная с F, т. е.

$$(x, \alpha, h) \in \Gamma_F \leftrightarrow h \in \frac{F - x}{\alpha} \quad (x, h \in X, \alpha > 0).$$

5.3.21. В выпуклом анализе нередко используют специальные разновидности пределов по Куратовскому, связанные с надграфиками функций, действующих в расширенную числовую прямую $\overline{\mathbb{R}}$. Прежде всего, приведем полезные признаки верхнего и нижнего пределов.

5.3.22. *Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — стандартная функция, определенная на стандартном X, и $\mathscr{F}$ — некоторый стандартный фильтр в X. Для каждого стандартного $t \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\sup_{F \in \mathscr{F}} \inf f(F) \leq t \leftrightarrow (\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^{\circ}f(x) \leq t,$$

$$\inf_{F \in \mathscr{F}} \sup f(F) \leq t \leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^{\circ}f(x) \leq t.$$

$\lhd$ Проверим сначала первую эквивалентность. Применяя последовательно принципы переноса и идеализации, выводим

$$\sup_{F \in \mathscr{F}} \inf f(F) \leq t \to (\forall\, F \in \mathscr{F}) \inf f(F) \leq t \to$$
$$\to (\forall F \in \mathscr{F})(\forall \varepsilon > 0) \inf f(F) < t + \varepsilon \to (\forall \varepsilon)(\forall F)(\exists\, x \in F)$$
$$(f(x) < t + \varepsilon) \to (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(\forall^{\mathrm{st}} F)(\exists\, x)(x \in F \wedge f(x) < t + \varepsilon) \to$$
$$\to (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(\forall^{\mathrm{st}} F)(x \in F \wedge f(x) < t + \varepsilon) \to$$
$$\to (\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(f(x) < t + \varepsilon) \to (\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^{\circ}f(x) \leq t$$

(здесь мы учли 2.2.18 (3)). Теперь заметим, что для всякого стандартного элемента F фильтра $\mathscr{F}$ будет $x \in \mu(\mathscr{F}) \subset F$. Значит,

$\inf f(F) \le t$ (ибо $\inf f(F) \le f(x) < t + \varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$). Отсюда в силу принципа переноса для внутреннего F из $\mathscr{F}$ выполнено $\inf f(F) \le t$, что и нужно.

Ввиду уже доказанного и с учетом стандартности $-f$ и t выводим

$$\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) \ge$$
$$\ge t \leftrightarrow -\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) \le -t \leftrightarrow \sup_{F\in\mathscr{F}} \inf(-f)(F) \le -t \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ(-f(x)) \le -t \leftrightarrow (\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ f(x) \ge t.$$

Таким образом, получается

$$\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) < t \leftrightarrow \neg\big(\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) \ge t\big) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \neg((\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ f(x) \ge t) \leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ f(x) \le t.$$

Окончательно на основе доказанного заключаем

$$\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) \le t \leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0)\ \inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) < t + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ f(x) < t + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\, {}^\circ f(x) < t + \varepsilon \leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ f(x) \le t,$$

ибо число ${}^\circ f(x)$ стандартно. $\rhd$

5.3.23. *Пусть X, Y — стандартные множества, $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ — стандартная функция и $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — стандартные фильтры в X и в Y соответственно. Для каждого стандартного вещественного числа t выполнено*

$$\sup_{G\in\mathscr{G}}\ \inf_{F\in\mathscr{F}}\ \sup_{x\in F}\ \inf_{y\in G}\ f(x,y) \le t \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))\, {}^\circ f(x,y) \le t.$$

$\lhd$ Положим $f_G(x) := \inf\{f(x,y) : y \in G\}$. Заметим, что f_G — стандартная функция, если только G — стандартное множество. Привлекая принцип переноса, предложение 5.3.22 и (сильную) идеализацию, последовательно выводим

$$
\begin{gathered}
\sup_{G\in\mathscr{G}}\ \inf_{F\in\mathscr{F}}\ \sup_{x\in F}\inf_{y\in G} f(x,y)\le t \leftrightarrow (\forall\, G\in\mathscr{G})\ \inf_{F\in\mathscr{F}}\ \sup_{x\in F} f_G(x)\le t\leftrightarrow\\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G\in\mathscr{G})\ \inf_{F\in\mathscr{F}}\ \sup_{x\in F} f_G(x)\le t\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G\in\mathscr{G})(\forall\, x\in\mu(\mathscr{F}))\ {}^{\circ}f_G(x)\le\\
\le t\leftrightarrow(\forall\, x\in\mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} G\in\mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon>0)\ \inf_{y\in G} f(x,y)<t+\varepsilon\to\\
\to(\forall\, x\in\mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon>0)(\forall^{\mathrm{st}} G\in\mathscr{G})(\exists\, y\in G)(f(x,y)<t+\varepsilon)\to\\
\to(\forall\, x\in\mu(\mathscr{F}))(\exists\, y\in\mu(\mathscr{G}))(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon>0)(f(x,y)<t+\varepsilon)\to\\
\to(\forall\, x\in\mu(\mathscr{F}))(\exists\, y\in\mu(\mathscr{G}))\ {}^{\circ}f(x,y)\le t.
\end{gathered}
$$

Из последнего соотношения для внутреннего элемента $F\subset\mu(\mathscr{F})$ фильтра $\mathscr{F}$ и стандартного элемента G фильтра $\mathscr{G}$ выводим

$$
\begin{gathered}
\sup_{x\in F}\inf_{y\in G} f(x,y)\le t\to\ \inf_{F\in\mathscr{F}}\ \sup_{x\in F}\inf_{y\in G} f(x,y)\le t\to\\
\to(\forall^{\mathrm{st}} G\in\mathscr{G})\ \inf_{F\in\mathscr{F}}\ \sup_{x\in F}\inf_{y\in G} f(x,y)\le t\to\\
\to(\forall\, G\in\mathscr{G})\ \inf_{F\in\mathscr{F}}\ \sup_{x\in F}\inf_{y\in G} f(x,y)\le t
\end{gathered}
$$

в силу принципа переноса. $\rhd$

5.3.24. В связи с 5.3.23 величину

$$
\lim\sup_{\mathscr{F}}\inf_{\mathscr{G}} f:=\sup_{G\in\mathscr{G}}\ \inf_{F\in\mathscr{F}}\ \sup_{x\in F}\ \inf_{y\in G} f(x,y)
$$

называют *пределом f по Рокафеллару.*

Если $f:=(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство функций, действующих из топологического пространства (X,σ) в $\overline{\mathbb{R}}$ и $\mathscr{N}$ — фильтр в Ξ, то определяют *нижний предел* в точке x' из X семейства f и его *верхний предел* или *предел по Рокафеллару*

$$
\begin{gathered}
\mathrm{li}_{\mathscr{N}} f(x'):=\sup_{V\in\sigma(x')}\ \sup_{U\in\mathscr{N}}\ \inf_{\xi\in U}\ \inf_{x\in V} f_\xi(x),\\
\mathrm{ls}_{\mathscr{N}}(x'):=\sup_{V\in\sigma(x')}\ \inf_{U\in\mathscr{N}}\ \sup_{\xi\in U}\ \inf_{x\in V} f_\xi(x).
\end{gathered}
$$

Последние пределы часто называют *эпипределами.* Смысл этого определения раскрывает следующее очевидное утверждение.

5.3.25. *Нижний и верхний пределы произвольного семейства надграфиков служат соответственно надграфиками нижнего и верхнего пределов рассматриваемого семейства функций.*

5.4. Аппроксимации, определяемые набором инфинитезималей

В этом параграфе мы займемся проблемой анализа классических аппроксимирующих конусов кларковского типа с помощью детализации вклада бесконечно малых чисел, участвующих в их определении. Такой анализ позволяет выделить как новые аналоги касательных конусов, так и новые описания конуса Кларка.

5.4.1. Вновь рассмотрим вещественное векторное пространство X, наделенное линейной топологией σ и почти векторной топологией τ. Пусть, далее, в X выделены множество F и точка x' из F. В соответствии с соглашением из 5.2 названные объекты считаются стандартными множествами.

Фиксируем некоторую инфинитезималь — вещественное число α, для которого $\alpha > 0$ и $\alpha \approx 0$. Положим

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ha}_\alpha(F, x') &:= {}^*\{h' \in X : (\forall\, x \approx_\sigma x', x \in F)(\forall\, h \approx_\tau h')(x + \alpha h \in F)\},\\
\mathrm{In}_\alpha(F, x') &:= {}^*\{h' \in X : (\exists\, h \approx_\tau h')(\forall\, x \approx_\sigma x', x \in F)(x + \alpha h \in F)\},\\
\mathrm{Cl}_\alpha(F, x') &:= {}^*\{h' \in X : (\forall\, x \approx_\sigma x', x \in F)(\exists\, h \approx_\tau h')(x + \alpha h \in F)\},
\end{aligned}$$

где, как обычно, * — символ стандартизации внешнего множества.

Рассмотрим теперь некоторое непустое, вообще говоря, внешнее множество инфинитезималей Λ и положим

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x') &:= {}^*\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathrm{Ha}_\alpha(F, x'),\\
\mathrm{In}_\Lambda(F, x') &:= {}^*\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathrm{In}_\alpha(F, x'),\\
\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') &:= {}^*\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathrm{Cl}_\alpha(F, x').
\end{aligned}$$

Аналогичную политику обозначений примем и для других вводимых типов аппроксимаций. В качестве примера стоит подчеркнуть, что в силу определений для стандартного h' из X выполнено:

$$\begin{gathered}
h' \in \mathrm{In}_\Lambda(F, x') \leftrightarrow\\
\leftrightarrow (\forall\, \alpha \in \Lambda)(\exists\, h \approx_\tau h')(\forall\, x \approx_\sigma x', x \in F)(x + \alpha h \in F).
\end{gathered}$$

Полезно отметить, что в случае, когда Λ — это монада соответствующего стандартного фильтра $\mathscr{F}_\Lambda$, где $\mathscr{F}_\Lambda := {}^*\{A \subset \mathbb{R} : A \supset \Lambda\}$, то, например, для $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ будет

$$\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') = \bigcap_{V \in \mathscr{N}} \bigcup_{\substack{U \in \sigma(x') \\ A \in \mathscr{F}_\Lambda}} \bigcap_{\substack{x \in F \cap U \\ \alpha \in A, \alpha > 0}} \left(\frac{F - x}{\alpha} + V \right).$$

Если же Λ — не монада (например, одноточечное множество), то явный вид $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ связан с той моделью анализа, в которой фактически ведется исследование. Подчеркнем, что ультрафильтр $\mathscr{U}(\alpha) := {}^*\{A \subset \mathbb{R} : \alpha \in A\}$ имеет монаду, не сводящуюся к исходной инфинитезимали α, т. е. множество $\mathrm{Cl}_\alpha(F, x')$, вообще говоря, шире, чем $\mathrm{Cl}_{\mu(\mathscr{U}_{(\alpha)})}(F, x')$. В то же время оказывается, что введенные аппроксимации обладают многими достоинствами, присущими кларковским конусам. При детализации и обосновании последнего положения без особых оговорок, как и в 5.2, мы используем предположение непрерывности отображения $(x, \beta, h) \mapsto x + \beta h$ пространства $(X \times \mathbb{R} \times X, \sigma \times \tau_\mathbb{R} \times \tau)$ в (X, σ) в нуле (эквивалентное в стандартном антураже включению $\mu(\sigma) + \mu(\mathbb{R}_+)\mu(\tau) \subset \mu(\sigma)$).

5.4.2. *Теорема.* *Для каждого множества Λ положительных бесконечно малых чисел справедливы утверждения:*

(1) $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x'), \mathrm{In}_\Lambda(F, x'), \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ — *полугруппы, причем*

$$\mathrm{Ha}(F, x') \subset \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x') \subset \mathrm{In}_\Lambda(F, x') \subset$$
$$\subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') \subset K(F, x'),$$
$$\mathrm{Cl}(F, x') \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x');$$

(2) *если Λ — внутреннее множество, то $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ является τ-открытым;*

(3) $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ — *это τ-замкнутое множество, причем для выпуклого F будет $K(F, x') = \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$, как только $\sigma = \tau$;*

(4) *если $\tau = \sigma$, то имеет место равенство*

$$\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') = \mathrm{Cl}_\Lambda(\mathrm{cl}(F), x');$$

(5) *выполнена формула Рокафеллара*

$$\mathrm{Ha}_{\Lambda}(F,x') + \mathrm{Cl}_{\Lambda}(F,x') \subset \mathrm{Ha}_{\Lambda}(F,x');$$

(6) *если x' — это τ-граничная точка F, то для множества $F' := (X - F) \cup \{x'\}$ выполнено*

$$\mathrm{Ha}_{\Lambda}(F,x') = -\,\mathrm{Ha}_{\Lambda}(F',x').$$

$\lhd$ (1): Проверим для определенности, что полугруппой является $\mathrm{In}_{\Lambda}(F,x')$. Если стандартные h', h'' входят в $\mathrm{In}_{\Lambda}(F,x')$, то для каждого $\alpha \in \Lambda$ при некотором $h_1 \approx_{\tau} h'$ будет $x'' := x + \alpha h_1 \in F$, как только $x \in F$ и $x \approx_{\sigma} x'$. По условию имеется $h_2 \approx_{\tau} h''$, для которого $x'' + \alpha h_2 \in F$, ибо $x'' \approx_{\sigma} x$. Окончательно $h_1 + h_2 \approx_{\tau} h' + h''$ и $h_1 + h_2$ «обслуживает» вхождение $h' + h'' \in \mathrm{In}_{\Lambda}(F,x')$.

Если $h' \in \mathrm{Cl}_{\Lambda}(F,x')$ и h' стандартен, то $x' + \alpha h \in F$ для каких-нибудь $\alpha \in \Lambda$ и $h \approx_{\tau} h'$. Это означает, что $h' \in K(F,x')$. Прочие включения, выписанные в (1), не вызывают сомнений.

(2): Если h' — стандартный элемент $\mathrm{Ha}_{\Lambda}(F,x')$, то

$$(\forall\, x \approx_{\sigma} x', x \in F)(\forall\, h \approx_{\tau} h')(\forall\, \alpha \in \Lambda)(x + \alpha h \in F).$$

С учетом 5.3.2, используя то, что Λ — внутреннее множество, выводим

$$(\exists^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{N}_{\tau})(\exists^{\mathrm{st}} U \in \sigma(x'))(\forall\, x \in U \cap F)(\forall\, h \in h' + V)(\forall\, \alpha \in \Lambda)$$
$$(x + \alpha h \in F).$$

Подберем стандартные окрестности V_1, $V_2 \in \mathscr{N}_{\tau}$, так, чтобы было $V_1 + V_2 \subset V$. Тогда для всех стандартных $h'' \in h' + V_1$ выполнено

$$(\forall\, x \in U \cap F)(\forall\, h \in h'' + V_2)(\forall\, \alpha \in \Lambda)(x + \alpha h \in F),$$

т. е. $h'' \in \mathrm{Ha}_{\Lambda}(F,x')$ при любых $h'' \in h + V_1$.

(3): Пусть h' — стандартный элемент $\mathrm{cl}_{\tau}(\mathrm{Cl}_{\Lambda}(F,x'))$. Возьмем произвольную стандартную окрестность V точки h' и выберем вновь стандартные V_1, $V_2 \in \mathscr{N}_{\tau}$, из условия $V_1 + V_2 \subset V$. По определению замыкания имеется $h'' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$ такой, что $h'' \in h' + V_1$. На основании 5.4.1 и в силу 5.3.2 будет

$$(\forall\, \alpha \in \Lambda)(\exists^{\mathrm{st}} U \in \sigma(x'))(\forall\, x \in F \cap U)(\exists\, h \in h'' + V_2)(x + \alpha h \in F).$$

При этом $h \in h'' + V_2 \subset h' + V_1 + V_2 \subset h' + V$. Иначе говоря,

$$(\forall^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{N}_\tau)(\forall\, \alpha \in \Lambda)(\exists^{\mathrm{st}} U \in \sigma(x'))(\forall\, x \in F \cap U)(\exists\, h \in h' + V)$$
$$(x + \alpha h \in F).$$

Значит, $h' \in \mathrm{Cl}_\alpha(F,x')$ при каждом $\alpha \in \Lambda$, т. е. $h' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$.

Если теперь $h' \in \mathrm{Fd}(F,x')$ и h' стандартен, то для некоторого стандартного $\alpha' > 0$ по принципу переноса будет $x' + \alpha' h' \in F$. Если $x \approx{}_\sigma x'$ и $x \in F$, то $(x - x')/\alpha' \approx{}_\sigma 0$. Для $h := h' + (x - x')/\alpha'$ будет $h \approx{}_\tau h'$ и, кроме того, $x + \alpha' h \in F$. С учетом выпуклости F верно: $x + (0,\alpha']h \subset F$. В частности, $x + \Lambda h \subset F$. Итак, $(\forall\, x \approx{}_\sigma x', x \in F)(\forall\, \alpha \in \Lambda)(\exists\, h \approx{}_\tau h')(x + \alpha h \in F)$, т. е. $h' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$. Следовательно,

$$\mathrm{Fd}(F,x') \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F,x') \subset K(F,x') \subset \mathrm{cl}(\mathrm{Fd}(F,x')).$$

С учетом τ-замкнутости $\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$ заключаем: $K(F,x') = \mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$.

(4): Устанавливается как и в предложении 5.2.11.

(5): Для стандартных $k' \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F,x')$ и $h' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$ при каждом $\alpha \in \Lambda$ и любом $x \in F$ таком, что $x \approx{}_\sigma x'$, подобрав h из условий $h \approx{}_\tau h'$ и $x + \alpha h \in F$, получаем последовательно

$$\begin{gathered} x + \alpha(h' + k' + \mu(\tau)) = x + \alpha h + \alpha(k' + (h - h') + \mu(\tau)) \subset \\ \subset (x + \mu(\sigma)) \cap F + \alpha(k' + \mu(\tau) + \mu(\tau)) \subset \\ \subset (x + \mu(\sigma)) \cap F + \alpha(k' + \mu(\tau)) \subset F, \end{gathered}$$

что и означает вхождение $h' + k'$ в $\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x')$.

(6): Пусть $-h \notin \mathrm{Ha}_\Lambda(F',x')$. Тогда для некоторого $\alpha \in \Lambda$ найдется $h \approx{}_\tau h'$ так, что при подходящем $x \approx{}_\sigma x'$, $x \in F$ выполнено $x - \alpha h \in F$. Если все же $h \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F,x')$, то, в частности, $h \in \mathrm{Ha}_\alpha(F,x')$ и $x = (x - \alpha h) + \alpha h \in F$, ибо $x - \alpha h \approx{}_\sigma x$. Итак, $x \in F \cap F'$, т. е. $x = x'$. Кроме того, $(x' - \alpha h) + \alpha(h + \mu(\tau)) \subset F$, ибо $h + \mu(\tau) \subset \mu(\tau(h'))$. Стало быть, x' — это τ-внутренняя точка F, что противоречит условию. Следовательно, $h \notin \mathrm{Ha}_\Lambda(F,x')$, что обеспечивает включение $-\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x') \subset (F',x')$. Меняя в приведенном рассуждении F' и $F = (F')'$ местами, приходим к требуемому. $\triangleright$

5.4.3. Важно подчеркнуть, что во многих случаях описанные аналоги конусов Адамара и Кларка являются выпуклыми. В самом деле, имеют место следующие утверждения.

5.4.4. *Пусть τ — векторная топология и $t\Lambda \subset \Lambda$ для некоторого стандартного $t \in (0,1)$. Тогда $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ — выпуклый конус. Если к тому же Λ — внутреннее множество, то $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ также выпуклый конус.*

$\lhd$ Предположим, что рассматривается $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$, и $h \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ — стандартный элемент этого множества. На основании 5.4.2 (2) $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ открыто в топологии τ. Кроме того, $th \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$, где t — фигурирующее в условии стандартное положительное число. $\rhd$

5.4.5. *Пусть $t\Lambda \subset \Lambda$ для каждого стандартного $t \in (0,1)$. Тогда множества $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$, $\mathrm{In}_\Lambda(F, x')$ и $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ являются выпуклыми конусами.*

$\lhd$ Предположим для определенности, что речь идет о $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$. Пусть h' — стандартный вектор из названного множества и $0 < t < 1$ — стандартное число. Пусть $x \approx_\sigma x'$, $x \in F$ и $\alpha \in \Lambda$. Для x и $t\alpha \in \Lambda$ подберем h, для которого $h \approx_\tau h'$ и $x + \alpha t h \in F$. Поскольку $th \approx_\tau th'$ на основании 5.1.7, то $th' \in \mathrm{Cl}_\alpha(F, x')$. Иначе говоря, на основании принципа переноса $(0,1)\,\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$. Остается сослаться на 5.4.2 (1). $\rhd$

5.4.6. Множество Λ назовем *представительным*, если $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ и $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ суть (выпуклые) конусы. Предложения 5.4.4 и 5.4.5 дают примеры представительных Λ.

5.4.7. Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — функция, действующая в расширенную числовую прямую. Для инфинитезимали α, точки x' из $\mathrm{dom}(f)$ и вектора $h' \in X$ полагаем

$$
\begin{aligned}
f(\mathrm{Ha}_\alpha)(x')(h') &:= \inf\{t \in \mathbb{R} : (h', t) \in \mathrm{Ha}_\alpha(\mathrm{epi}(f), (x', f(x')))\},\\
f(\mathrm{In}_\alpha)(x')(h') &:= \inf\{t \in \mathbb{R} : (h', t) \in \mathrm{In}_\alpha(\mathrm{epi}(f), (x', f(x')))\},\\
f(\mathrm{Cl}_\alpha)(x')(h') &:= \inf\{t \in \mathbb{R} : (h', t) \in \mathrm{Cl}_\alpha(\mathrm{epi}(f), (x', f(x')))\}.
\end{aligned}
$$

Производные $f(\mathrm{Ha}_\Lambda)$, $f(\mathrm{In}_\Lambda)$ и $f(\mathrm{Cl}_\Lambda)$ вводятся естественным образом. Отметим, что производную $f(\mathrm{Cl}) := f(\mathrm{Cl}_{\mu(\mathbb{R}_+)})$ называют *производной Рокафеллара* и обозначают символом $f^\uparrow$. В этой связи мы пишем

$$
f^\uparrow_\alpha(x') := f(\mathrm{Cl}_\alpha)(x'), \quad f^\uparrow_\Lambda(x') := f(\mathrm{Cl}_\Lambda)(x').
$$

Если τ — это дискретная топология, то $\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x') = \mathrm{In}_\Lambda(F,x') = \mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$. При этом производную Рокафеллара называют *производной Кларка* и используют обозначения

$$f^\circ_\alpha(x') := f^\uparrow_\alpha(x'), \quad f^\circ_\Lambda(x') := f^\uparrow_\Lambda(x').$$

При $\Lambda = \mu(\mathbb{R}_+)$ указание на Λ опускают.

Рассматривая эпипроизводные, предполагают, что пространство $X\times\mathbb{R}$ наделено обычными произведениями топологий $\sigma\times\tau_\mathbb{R}$ и $\tau\times\tau_\mathbb{R}$, где $\tau_\mathbb{R}$ — стандартная топология $\mathbb{R}$. Иногда удобно наделять $X\times\mathbb{R}$ парой топологий $\sigma\times\tau_0$ и $\tau\times\tau_\mathbb{R}$, где τ_0 — тривиальная топология в $\mathbb{R}$. При использовании таких топологий говорят о *производных Кларка и Рокафеллара вдоль эффективной области* $\mathrm{dom}(f)$ и добавляют индекс d в обозначениях: f°_d, $f^\uparrow_{\Lambda,d}$ и т. п.

5.4.8. *Справедливы утверждения:*

$$f^\uparrow_\alpha(x')(h') \leq t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \approx {}_\sigma x', t \approx f(x'), t \geq f(x))\, (\exists\, h \approx {}_\tau h')\ {}^\circ((f(x+\alpha h)-t)/\alpha) \leq t';$$
$$f^\circ_\alpha(x')(h') < t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \approx {}_\sigma x', t \approx f(x'), t \geq f(x))\, (\forall\, h \approx {}_\tau h')\ {}^\circ((f(x+\alpha h)-t)/\alpha) < t';$$
$$f^\uparrow_{\alpha,d}(x')(h') \leq t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \approx {}_\sigma x', x \in \mathrm{dom}(f))(\exists\, h \approx {}_\tau h')\,{}^\circ((f(x+\alpha h)-t)/\alpha) \leq t';$$
$$f^\circ_{\alpha,d}(x')(h') < t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \approx {}_\sigma x', x \in \mathrm{dom}(f))(\forall\, h \approx {}_\tau h')\,{}^\circ((f(x+\alpha h)-t)/\alpha) < t'.$$

$\lhd$ Для доказательства нужно апеллировать к 2.2.18 (3). $\rhd$

5.4.9. *Если f — полунепрерывная снизу функция, то*

$$f^\uparrow_\alpha(x')(h') \leq t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \forall\, x \approx {}_\sigma x', f(x) \approx f(x'))(\exists\, h \approx {}_\tau h')\ {}^\circ\!\left(\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}\right) \leq t';$$
$$f^\circ_\alpha(x')(h') < t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \approx {}_\sigma x', f(x) \approx f(x'))(\forall\, h \approx {}_\tau h')\ {}^\circ\!\left(\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}\right) < t'.$$

$\lhd$ Нуждаются в проверке только импликации вправо. В силу идентичности таких проверок осуществим первую из них. На основании полунепрерывности f снизу выводим: $x' \approx {}_{\sigma} x \to {}^{\circ}f(x) \geq f(x')$. Значит, при x, t таких, что $t \approx f(x')$ и $t \geq f(x)$, выполнено ${}^{\circ}t \geq {}^{\circ}f(x) \geq f(x') = {}^{\circ}t$. Иначе говоря, ${}^{\circ}f(x) = f(x')$ и $f(x) \approx f(x')$. Подбирая подходящее h с помощью условий, видим

$$^{\circ}(\alpha^{-1}(f(x+\alpha h)-t)) \leq {}^{\circ}(\alpha^{-1}(f(x+\alpha h)-f(x))) \leq t',$$

что и обеспечивает требуемое. $\rhd$

5.4.10. *Для непрерывной функции f имеют место равенства*

$$f^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x') = f^{\uparrow}_{\Lambda}(x'), \quad f^{\circ}_{\Lambda,d}(x') = f^{\circ}_{\Lambda}(x').$$

$\lhd$ Достаточно заметить, что непрерывность f в стандартной точке означает $(x \approx {}_{\sigma} x', x \in \mathrm{dom}(f)) \to f(x) \approx f(x')$ (см. 4.2.7). $\rhd$

5.4.11. *Теорема.* *Пусть Λ — монада. Тогда справедливы представления:*

(1) *если f — полунепрерывная снизу функция, то*

$$f^{\uparrow}_{\Lambda}(x')(h') = \limsup_{\substack{x \to_f x' \\ \alpha \in \mathscr{F}_{\Lambda}}} \inf_{h \to h'} \frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha},$$

$$f^{\circ}_{\Lambda}(x')(h') = \limsup_{\substack{x \to_f x' \\ \alpha \in \mathscr{F}_{\Lambda}}} \frac{f(x+\alpha h')-f(x)}{\alpha},$$

где $x \to {}_f x'$ означает, что $x \to {}_{\sigma} x'$ и $f(x) \to f(x')$;

(2) *для непрерывной функции f выполнено*

$$f^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x')(h') = \limsup_{\substack{x \to x' \\ \alpha \in \mathscr{F}_{\Lambda}}} \inf_{h \to h'} \frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha},$$

$$f^{\circ}_{\Lambda,d}(x')(h') = \limsup_{\substack{x \to x' \\ \alpha \in \mathscr{F}_{\Lambda}}} \frac{f(x+\alpha h')-f(x)}{\alpha}.$$

$\lhd$ Для доказательства достаточно привлечь критерий для предела по Рокафеллару 5.2.23 и 5.4.9, 5.4.10. $\rhd$

5.4.12. *Теорема.* *Пусть Λ — представительное множество инфинитезималей. Справедливы утверждения:*

(1) *если f — отображение, липшицево по направлениям в точке x', т. е. такое, что $\mathrm{Ha}(\mathrm{epi}(f),\ (x', f(x'))) \neq \varnothing$, то $f^{\uparrow}_{\Lambda}(x') = f^{\circ}_{\Lambda}(x')$; если к тому же f непрерывно в точке x', то*

$$f^{\uparrow}_{\Lambda}(x') = f^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x') = f^{\circ}_{\Lambda,d}(x') = f^{\circ}_{\Lambda}(x');$$

(2) *если f — произвольное отображение, причем конус Адамара эффективного множества f в точке x' не пуст, т. е. $\mathrm{Ha}(\mathrm{dom}(f),\ x') \neq \varnothing$, то $f^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x') = f^{\circ}_{\Lambda,d}(x')$.*

$\lhd$ Доказательство обоих искомых утверждений проводится по одному образцу, связанному с применением теоремы 5.4.2. Разберем подробно случай липшицевости f по направлениям. Положим $\mathscr{A} := \mathrm{epi}(f)$, $a' := (x', f(x'))$.

В силу условий $\mathrm{Cl}_{\Lambda}(\mathscr{A}, a')$ и $\mathrm{Ha}_{\Lambda}(\mathscr{A}, a')$ — выпуклые конусы. При этом $\mathrm{Ha}_{\Lambda}(\mathscr{A}, a') \supset \mathrm{Ha}(\mathscr{A}, a')$ и, стало быть,

$$\mathrm{int}_{\tau\times\tau_{\mathbb{R}}}(\mathrm{Ha}_{\Lambda}(\mathscr{A}, a')) \neq \varnothing.$$

На основании формулы Рокафеллара выводим:

$$\mathrm{cl}_{\tau\times\tau_{\mathbb{R}}}(\mathrm{Ha}_{\Lambda}(\mathscr{A}, a')) = \mathrm{Cl}_{\Lambda}(\mathscr{A}, a').$$

Отсюда и вытекает требуемое утверждение. $\rhd$

5.4.13. *Теорема.* *Пусть $f_1, f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — произвольные функции и $x' \in \mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2)$. Тогда*

$$(f_1 + f_2)^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x') \leq (f_1)^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x') + (f_2)^{\circ}_{\Lambda,d}(x').$$

Если, кроме того, f_1 и f_2 непрерывны в точке x', то

$$(f_1 + f_2)^{\uparrow}_{\Lambda}(x') \leq (f_1)^{\uparrow}_{\Lambda}(x') + (f_2)^{\circ}_{\Lambda}(x').$$

$\lhd$ Пусть стандартный элемент h' выбран следующим образом:

$$h' \in \mathrm{dom}\big((f_2)^{\circ}_{\Lambda,d}\big) \cap \mathrm{dom}\big((f_1)^{\uparrow}_{\Lambda,d}\big).$$

Если такого h' нет, то искомые оценки очевидны.

Возьмем $t' \geq (f_1)^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x')(h')$ и $s' > (f_2)^{\circ}_{\Lambda,d}(x')(h')$. Тогда на основании 5.4.8 для каждого $x \approx {}_{\sigma}x'$, $x \in \operatorname{dom}(f_1) \cap \operatorname{dom}(f_2)$ и любого $\alpha \in \Lambda$ имеется h, для которого $h \approx {}_{\tau}h'$ и, кроме того,

$$\delta_1 := {}^{\circ}((f_1(x + \alpha h) - f_1(x))/\alpha) \leq t';$$
$$\delta_2 := {}^{\circ}((f_2(x + \alpha h) - f_2(x))/\alpha) < s'.$$

Отсюда выводим: $\delta_1 + \delta_2 < t' + s'$, что обеспечивает (1). Если f_1 и f_2 непрерывны в точке x', то следует привлечь 5.4.10. $\triangleright$

5.4.14. В заключение текущего пункта разберем специальные представления конуса Кларка, возникающие в конечномерном пространстве и связанные со следующим замечательным результатом.

5.4.15. ***Теорема Корне.*** *В конечномерном пространстве конус Кларка представляет собой предел по Куратовскому контингенций:*

$$\operatorname{Cl}(F, x') = \operatorname{Li}_{\substack{x \to x' \\ x \in F}} K(F, x).$$

5.4.16. ***Следствие.*** *Пусть Λ — (внешнее) множество строго положительных инфинитезималей, содержащее сходящуюся к нулю (внутреннюю) последовательность. Тогда справедливо равенство*

$$\operatorname{Cl}_{\Lambda}(F, x') = \operatorname{Cl}(F, x').$$

$\triangleleft$ По принципу Лейбница можно работать в стандартном антураже. Поскольку включение $\operatorname{Cl}_{\Lambda}(F, x') \supset \operatorname{Cl}(F, x')$ очевидно, возьмем стандартную точку h' из $\operatorname{Cl}_{\Lambda}(F, x')$ и установим, что h' лежит в конусе Кларка $\operatorname{Cl}(F, x')$.

Поскольку с учетом 5.3.13 справедливо представление

$$\operatorname{Li}_{\substack{x \to x' \\ x \in F}} K(F, x) = {}^{*}\{h' : (\forall\, x \approx x', x \in F)(\exists\, h \approx h')\, h \in K(F, x)\},$$

убедимся в том, что при $x \approx x'$, $x \in F$ будет $h \in K(F, x)$ для некоторого элемента h, бесконечно близкого к h'.

Если (α_n) — последовательность элементов Λ, сходящаяся к нулю, то по условию выполнено

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})(\exists\, h_n)(x + \alpha_n h_n \in F \wedge h_n \approx h').$$

Для всякого стандартного $\varepsilon > 0$ и обычной нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^n$ будет $\|h_n - h'\| \le \varepsilon$. Стало быть, с учетом конечномерности можно подыскать последовательности $(\overline{\alpha}_n)$ и $(\overline{h}_n)$ такие, что

$$\overline{\alpha}_n \to 0, \quad \overline{h}_n \to \overline{h}, \quad \|\overline{h} - h'\| \le \varepsilon, \quad x + \overline{\alpha}_n \overline{h}_n \in F \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Используя принцип идеализации в сильной форме, заключаем, что имеются последовательности $(\overline{\alpha}_n)$ и $(\overline{h}_n)$, обслуживающие одновременно все стандартные положительные числа ε. Ясно, что соответствующий предельный вектор h бесконечно близок к h' и в то же время $h \in K(F, x)$ по определению контингенции. $\triangleright$

5.4.17. В качестве множества Λ в приведенной теореме может фигурировать монада любого сходящегося к нулю фильтра, например, фильтра хвостов фиксированной стандартной последовательности (α_n), составленной из строго положительных чисел и стремящейся к нулю. Приведем характеризации конуса Кларка, относящиеся к этому случаю и дополняющие приведенные выше. Для формулировки условимся символом $d_F(x)$ обозначать расстояние от точки x до множества F.

5.4.18. *Теорема.* *Для сходящейся к нулю последовательности (α_n) строго положительных чисел эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$;

(2) $\limsup\limits_{\substack{x \to x' \\ n \to \infty}} \frac{d_F(x + \alpha_n h') - d_F(x)}{\alpha_n} \le 0$;

(3) $\limsup\limits_{x \to x'} \limsup\limits_{n \to \infty} \alpha_n^{-1}(d_F(x + \alpha_n h') - d_F(x) \le 0$;

(4) $\limsup\limits_{\substack{x \to x' \\ x \in F}} \limsup\limits_{n \to \infty} \alpha_n^{-1} d_F(x + \alpha_n h') = 0$;

(5) $\limsup\limits_{x \to x'} \liminf\limits_{n \to \infty} \alpha_n^{-1}(d_F(x + \alpha_n h') - d_F(x)) \le 0$;

(6) $\lim\limits_{\substack{x \to x' \\ x \in F}} \liminf\limits_{n \to \infty} \frac{d_F(x + \alpha_n h')}{\alpha_n} = 0$.

$\triangleleft$ Прежде всего заметим, что при $\alpha > 0$ имеет место эквивалентность:

$$^\circ(\alpha^{-1} d_F(x + \alpha h')) = 0 \leftrightarrow (\exists\, h \approx h')(x + \alpha h \in F),$$

где ${}^\circ t$ — это, как обычно, стандартная часть числа t.

Действительно, для установления импликации влево положим $y := x + \alpha h'$. Тогда

$$d_F(x + \alpha h')/\alpha = \|x + \alpha h' - y\|/\alpha \leq \|h - h'\|.$$

При проверке противоположной импликации, привлекая принцип идеализации в сильной форме, последовательно получаем

$$\begin{aligned}{}^\circ(\alpha^{-1} d_F(x + \alpha h')) = 0 \to (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\, d_F(x + \alpha h')/\alpha < \varepsilon \to \\ \to (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\exists\, y \in F)\, \|x + \alpha h' - y\|/\alpha < \varepsilon \to \\ \to (\exists\, y \in F)(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\, \|h' - (y - x)/\alpha\| < \varepsilon \to \\ \to (\exists\, y \in F)\, \|h - (y - x)/\alpha\| \approx 0.\end{aligned}$$

Полагая $h := (y - x)/\alpha$, видим: $h \approx h'$ и при этом $x + \alpha h \in F$.

Перейдем теперь собственно к доказательству искомых эквивалентностей.

Поскольку импликации (3) $\to$ (4) $\to$ (6) и (3) $\to$ (5) $\to$ (6) очевидны, установим только, что (1) $\to$ (2) $\to$ (3) и (6) $\to$ (1).

(1) $\to$ (2): Работая в стандартном антураже, возьмем $x \approx x'$ и $N \approx +\infty$. Подберем $x'' \in F$ так, чтобы было $\|x - x''\| \leq d_F(x') + \alpha_N^2$. Поскольку имеет место неравенство

$$d_F(x + \alpha_N h') - d_F(x'' + \alpha_N h') \leq \|x - x''\|,$$

выводим следующие оценки:

$$\begin{aligned}(d_F(x + \alpha_N h') - d_F(x))/\alpha_N \leq (d_F(x'' + \alpha_N h') + \|x - x''\| - \\ - d_F(x))/\alpha_N \leq d_F(x'' + \alpha_N h')/\alpha_N + \alpha_N.\end{aligned}$$

В силу того, что $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$, с учетом выбора x'' и N для некоторого $h \approx h'$ будет $x'' + \alpha_N h \in F$. Значит, на основании уже доказанного ${}^\circ(d_F(x'' + \alpha_N h')/\alpha_N) = 0$. Отсюда

$$(\forall\, x \approx x')(\forall\, N \approx +\infty)\, {}^\circ(\alpha_N^{-1}(d_F(x + \alpha_N h') - d_F(x))) \leq 0.$$

Последнее в соответствии с 5.3.22 составляет нестандартный критерий справедливости (2).

(2) $\to$ (3): Достаточно заметить, что для $f : U \times V \to \overline{\mathbb{R}}$ и фильтров $\mathscr{F}$ в U и $\mathscr{G}$ в V будет

$$\begin{gathered}
\limsup_{\mathscr{F}} \limsup_{\mathscr{G}} f(x,y) \le t \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^{\circ}\!\limsup_{\mathscr{G}} f(x,y) \le t \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0) \inf_{G \in \mathscr{G}} \sup_{y \in G} f(x,y) < t + \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\exists\, G \in \mathscr{G}) \sup_{y \in G} f(x,y) < t + \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0) \sup_{y \in G} f(x,y) t + \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0) \sup_{y \in G} f(x,y) \le t + \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, G \in \mathscr{G})(\forall\, y \in G)\, {}^{\circ}f(x,y) \le t.
\end{gathered}$$

Здесь, как обычно, $\mu(\mathscr{F})$ — монада фильтра $\mathscr{F}$.

(6) $\to$ (1): Прежде всего, в обозначениях предыдущего фрагмента доказательства, выполнено

$$\begin{gathered}
\limsup_{\mathscr{F}} \liminf_{\mathscr{G}} f(x,y) \le t \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F})) \sup_{G \in \mathscr{G}} \inf_{y \in \mathscr{G}} f(x,y) \le t \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\forall\, G \in \mathscr{G}) \inf_{y \in G} f(x,y) \le t + \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall\, G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0) \inf_{y \in G} f(x,y) < t + \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall\, G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\exists\, y \in G)(f(x,y) < t + \varepsilon) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall\, G \in \mathscr{G})(\exists\, y \in G)\, {}^{\circ}f(x,y) \le t.
\end{gathered}$$

Привлекая условия, из установленного признака выводим:

$$(\forall\, x \approx x', x \in F)(\forall\, n)(\exists\, N \ge n)\, {}^{\circ}(\alpha_N^{-1} d_F(x + \alpha_N h')) = 0.$$

Иначе говоря, для некоторого h_N такого, что $h_N \approx h'$, будет $x + \alpha_N h_N \in F$. На основе приведенных соображений, как и при доказательстве 5.4.16, можно сделать вывод, что h' лежит в нижнем пределе по Куратовскому контингенций множества F в точках, близких к x', т. е. в конусе Кларка $\mathrm{Cl}(F, x')$. $\rhd$

5.5. Аппроксимация композиции множеств

Перейдем к изучению касательных кларковского типа и суперпозиции соответствий. При этом нам придется начать с некоторых топологических рассмотрений, относящихся к открытым и почти открытым операторам.

5.5.1. Пусть, помимо рассматриваемого векторного пространства X с топологиями σ_X и τ_X, задано еще одно векторное пространство Y с топологиями σ_Y и τ_Y. Рассмотрим линейный оператор T из X в Y и изучим, прежде всего, вопрос о связи аппроксимирующих множеств F в точке x', где $F \subset X$, и образа $T(F)$ в точке Tx'.

5.5.2. *Справедливы утверждения:*

(1) *включение*

$$T(\mu(\sigma_X(x')) \cap F) \supset \mu(\sigma_Y(Tx')) \cap T(F)$$

равносильно соотношению

$$(\forall\, U \in \sigma_X(x'))(\exists\, V \in \sigma_Y(Tx'))\, T(U \cap F) \supset V \cap T(F)$$

— условию (относительной) предоткрытости, или условию (ρ_-) (для параметров T, F и x');

(2) *условие (ρ_-) вместе с требованием непрерывности T как отображения (X, σ_X) в (Y, σ_Y) равносильно следующему условию (относительной) открытости, или условию (ρ):*

$$T(\mu(\sigma_X(x')) \cap F) = \mu(\sigma_Y(Tx')) \cap T(F);$$

(3) *оператор T удовлетворяет условию (относительной) почти открытости, или условию $(\overline{\rho})$, т. е.*

$$(\forall\, U \in \sigma_X(x'))(\exists\, V \in \sigma_Y(Tx'))$$
$$(\operatorname{cl}_{\tau_Y} T(U \cap F) \supset V \cap T(F))$$

в том и только в том случае, если

$$(\forall\, W \in \mathscr{N}_{\tau_Y})$$
$$(T(\mu(\sigma_X(x')) \cap F) + W \supset \mu(\sigma_Y(Tx')) \cap T(F)).$$

$\triangleleft$ Утверждения (1) и (2) получаются специализацией 5.3.2. Для доказательства (3) обозначим

$$\mathscr{A} := T(\sigma_X(x') \cap F) \quad \mathscr{B} := \sigma_Y(Tx') \cap T(F),$$
$$\mathscr{N} := \big\{N \subset Y^2 : (\exists\, W \in \mathscr{N}_{\tau_Y})\, N \supset \{(y_1, y_2) : y_1 - y_2 \in W\}\big\},$$

т. е. $\mathscr{N}$ — равномерность в Y, отвечающая рассматриваемой топологии. Используя введенные обозначения и привлекая 5.3.2, а также принципы идеализации и переноса, последовательно получаем:

$$\begin{gathered}(\forall\, N \in \mathscr{N})\, N(\mu(\mathscr{A})) \supset \mu(\mathscr{B}) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall\, N \in \mathscr{N})(\forall\, b \in \mu(\mathscr{B}))(\exists\, a \in \mu(\mathscr{A}))(b \in N(a)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall\, N \in \mathscr{N})(\forall^{\mathrm{st}} A \in \mathscr{A})(\exists^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(\forall\, b \in B)(\exists\, a \in A)(b \in N(a)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} A \in \mathscr{A})(\forall\, N \in \mathscr{N})(\exists^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(B \subset N(A)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} A \in \mathscr{A})(\exists^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(\forall\, N \in \mathscr{N})(B \subset N(A)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} A \in \mathscr{A})(\exists^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(B \subset \mathrm{cl}(A)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall\, A \in \mathscr{A})(\exists\, B \in \mathscr{B})(B \subset \mathrm{cl}(A)),\end{gathered}$$

где замыкание вычисляется в соответствующей равномерной топологии. $\triangleright$

5.5.3. *Теорема.* *Имеют место утверждения:*

(1) *если оператор T удовлетворяет условию (ρ) и непрерывен как отображение (X, τ_X) в (Y, τ_Y), то*

$$T(\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(T(F), Tx'),$$
$$T(\mathrm{In}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{In}_\Lambda(T(F), Tx');$$

если, сверх того, T — открытое отображение (X, τ_X) в (Y, τ_Y), то

$$T(\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{Ha}_\Lambda(T(F), T(x'));$$

(2) *если τ_Y — векторная топология, а линейный оператор $T : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ непрерывен и удовлетворяет условию $(\overline{\rho})$, то*

$$T(\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(T(F), Tx').$$

$\lhd$ (1): Проверим, например, второе из требуемых включений. Для этого, фиксировав $h' \in \mathrm{In}_\Lambda(F, x')$, при $\alpha \in \Lambda$ возьмем $h \approx \tau_X h'$ такой, что при всех $x \approx_{\sigma_X} x'$, $x \in F$ будет $x + \alpha h \in F$. Видно, что $Th \approx_{\sigma_Y} Th'$ и $Tx + \alpha Th \in T(F)$. Привлекая условие (ρ), заключаем: $Th' \in \mathrm{In}_\Lambda(T(F), Tx')$.

Пусть теперь известно, что T удовлетворяет указанному выше дополнительному условию открытости, т. е. на основании 5.5.2 (1) $T(\mu(\tau_X)) \supset \mu(\tau_Y)$. Вместе с непрерывностью T это означает совпадение выписанных монад. Если теперь $y \in T(F)$, $y \approx_{\sigma_Y} Tx'$, то по условию (ρ) будет $y = Tx$, где $x \in F$ и $x \approx_{\sigma_X} x'$. При этом для $z \approx_{\tau_Y} Th'$ можно подыскать $h \approx_{\tau_X} h'$, для которого $z = Th$. Значит, при всех $\alpha \in \Lambda$ выполнено $x + \alpha h \in F$, т. е. $y + \alpha z = Tx + \alpha Th \in T(F)$, как только стандартный h' таков, что $h' \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$.

(2): Возьмем инфинитезималь $\alpha \in \Lambda$ и какой-либо стандартный элемент $h' \in \mathrm{Cl}_\alpha(F, x')$. Пусть W — некоторая бесконечно малая окрестность нуля в τ_Y. Тогда αW — также окрестность нуля по условию. На основании $(\overline{\rho})$, взяв $y \approx_{\sigma_Y} Tx'$, $y \in T(F)$, найдем $x \in \mu(\sigma_X(x')) \cap F$ так, чтобы $y = Tx + \alpha w$ и $w \approx_{\tau_Y} 0$. По условию вхождения h' в конус Кларка имеется элемент $h'' \approx_{\tau_Y} h'$, для которого $x + \alpha h'' \in F$. Итак, $y + \alpha(Th'' - w) = y - \alpha w + \alpha Th'' = T(x + \alpha h'') \in T(F)$. Действительно, отсюда выводим, что $Th'' - w \in Th' + \mu(\tau_Y) - w \in Th' + \mu(\tau_Y) + \mu(\tau_Y) = Th' + \mu(\tau_Y)$. Тем самым установлено: $Th' \in \mathrm{Cl}_\alpha(T(F), Tx')$. $\rhd$

5.5.4. Рассмотрим теперь некоторые векторные пространства X, Y, Z, снабженные топологиями σ_X, τ_X; σ_Y, τ_Y и σ_Z, τ_Z соответственно. Пусть, далее, $F \subset X \times Y$, а $G \subset Y \times Z$ — два соответствия и точка $d' := (x', y', z') \in X \times Y \times Z$ такова, что $a' := (x', y') \in F$ и $b' := (y', z') \in G$. Обозначим $H := X \times G \cap F \times Z$, $c' := (x', z')$. Отметим, что $G \circ F = \mathrm{Pr}_{X \times Z} H$, где $\mathrm{Pr}_{X \times Z}$ — оператор естественного проектирования. Введем следующие сокращения:

$\sigma_1 := \sigma_X \times \sigma_Y$; $\sigma_2 := \sigma_Y \times \sigma_Z$; $\sigma := \sigma_X \times \sigma_Z$; $\overline{\sigma} := \sigma_X \times \sigma_Y \times \sigma_Z$;
$\tau_1 := \tau_X \times \tau_Y$; $\tau_2 := \tau_Y \times \tau_Z$; $\tau := \tau_X \times \tau_Z$; $\overline{\tau} := \tau_X \times \tau_Y \times \tau_Z$.

Полезно напомнить, что оператор $\mathrm{Pr}_{X \times Z}$ непрерывен и открыт (при использовании «однобуквенных» топологий). По-прежнему фиксируем некоторое множество Λ, составленное из инфинитезимальных чисел. Отметим также необходимое нам свойство монад.

5.5.5. *Монада суперпозиции — это суперпозиция монад.*

$\lhd$ Пусть $\mathscr{A}$ — фильтр в $X \times Y$, а $\mathscr{B}$ — в $Y \times Z$. Имеем

$$\mathscr{B} \circ \mathscr{A} := \mathrm{fil}\{B \circ A : A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\},$$

причем можно считать, что множества, фигурирующие в определении $\mathscr{B} \circ \mathscr{A}$, непусты. Ясно, что

$$B \circ A = \mathrm{Pr}_{X \times Z}(A \times Z \cap X \times B).$$

Итак, интересующий нас фильтр $\mathscr{B} \circ \mathscr{A}$ — это образ $\mathrm{Pr}_{X\times Z}(\mathscr{C})$, где $\mathscr{C} := \mathscr{C}_1 \vee \mathscr{C}_2$ и $\mathscr{C}_1 := \mathscr{A} \times \{Z\}$, $\mathscr{C}_2 := \{X\} \times \mathscr{B}$. Поскольку монада произведения есть произведение монад, а монада точной верхней границы фильтров — пересечение их монад, с учетом 4.1.6 (5) приходим к соотношению

$$\mu(\mathscr{B} \circ \mathscr{A}) = \mathrm{Pr}_{X \times Z}\big(\mu(\mathscr{A}) \times Z \cap X \times \mu(\mathscr{B})\big) = \mu(\mathscr{B}) \circ \mu(\mathscr{A}).$$

Это и требовалось установить. $\rhd$

5.5.6. *Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *для оператора* $\mathrm{Pr}_{X\times Z}$, *соответствия* H *и точки* c' *выполнено условие* (ρ);

(2) $G \circ F \cap \mu(\sigma(c')) = G \cap \mu(\sigma_2(b')) \circ F \cap \mu(\sigma_1(a'))$;

(3) $(\forall\, V \in \sigma_Y(y'))(\exists\, U \in \sigma_X(x'))(\exists\, W \in \sigma_Z(z'))$
$G \circ F \cap U \times W \subset G \circ I_V \circ F$,

где I_V *— это, как обычно, тождественное отношение на* V.

$\lhd$ Применяя 5.3.2, перепишем (3) в эквивалентной форме

$$\begin{gathered}(\forall\, V \in \sigma_Y(y'))(\exists\, O \in \sigma(c'))(\forall\, (x,z) \in O, (x,z) \in G \circ F)\\ (\exists\, y \in V)(x,y) \in F \wedge (y,z) \in G \leftrightarrow (\forall\, (x,z) \approx_{\sigma} c', (x,z) \in G \circ F)\\ (\exists\, y \approx_{\sigma_Y} y')(x,y) \in F \wedge (y,z) \in G \leftrightarrow \mu(\sigma(c')) \cap G \circ F \subset\\ \subset \mu(\sigma_2(b')) \cap G \circ \mu(\sigma_1(a')) \cap F.\end{gathered}$$

Остается заметить, что

$$\begin{gathered}\mathrm{Pr}_{X\times Z}\big(\mu(\overline{\sigma}(d')) \cap H\big) =\\ = \big\{(x,z) \in G \circ F : x \approx_{\sigma_X} x' \wedge\\ \wedge z \approx_{\sigma_Z} z' \wedge (\exists\, y \approx_{\sigma_Y} y')\,(x,y) \in F \wedge (y,z) \in G\big\} =\\ = \mu\big(\sigma_2(b')\big) \cap G \circ \mu\big(\sigma_1(a')\big) \cap F.\end{gathered}$$

Тем самым предложение доказано полностью. $\rhd$

5.5.7. *Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *для оператора* $\mathrm{Pr}_{X\times Z}$, *соответствия* H *и точки* c' *выполнено условие* $(\overline{\rho})$;

(2) $(\forall\, W \in \mathscr{N}_\tau)\, \mu(\sigma_2(b')) \cap G \circ \mu(\sigma_1(a')) \cap F + W \supset \mu(\sigma(c')) \cap G \circ F$;

(3) $(\forall\, V \in \sigma_2(b'))(\forall\, U \in \sigma_1(a'))(\exists\, W \in \sigma(c'))$ $W \cap G \circ F \subset \mathrm{cl}_\tau(V \cap G \circ U \cap F)$;

(4) $(\forall\, U \in \sigma_X(x'))(\forall\, V \in \sigma_Y(y'))(\forall\, W \in \sigma_Z(z'))$ $(\exists\, V \in \sigma(c'))O \cap G \circ F \subset \mathrm{cl}_\tau(G \circ I_V \circ F \cap U \times W)$;

(5) *если* $\tau \geq \sigma$, *то*

$$(\forall\, V \in \sigma_Y(y'))(\exists\, U \in \sigma_X(x'))(\exists\, W \in \sigma_Z(z'))$$
$$G \circ F \cap U \times W \subset \mathrm{cl}_\tau(G \circ I_V \circ F),$$

т. е., как говорят, выполнено условие $(\overline{\rho c})$ *в точке* $d' := (x', y', z')$.

$\lhd$ Из предложения 5.5.2 (3) и выкладки, проведенной при доказательстве 5.5.2 (3), непосредственно заключаем: (1) $\leftrightarrow$ (2) $\leftrightarrow$ (3).

Для доказательства эквивалентности (3) $\leftrightarrow$ (4) достаточно заметить:

$$(V \times W) \cap G \circ (U \times V) \cap F =$$
$$= \{(x, z) \in X \times Z : x \in U \wedge z \in W \wedge (\exists\, y \in V)(x, y) \in F \wedge (y, z) \in G\} =$$
$$= G \circ I_V \circ F \cap U \times W$$

для всяких $U \subset X$, $V \subset Y$, $W \subset Z$.

Таким образом, остается установить только, что (4) $\leftrightarrow$ (5). При этом импликация (4) $\to$ (5) не вызывает сомнений, ибо (5) получается специализацией (4) при $U := X$ и $W := Z$.

Для проверки (5) $\to$ (4), взяв $V \in \sigma_Y(y')$, подберем открытую окрестность $C \in \sigma(c')$, чтобы было $G \circ F \cap C \subset \mathrm{cl}_\tau(A)$, где $A := G \circ I_V \circ F$. Взяв открытые $U \in \sigma_X(x')$ и $W \in \sigma_Z(z')$, положим $B := U \times W$ и $O := B \cap C$. Очевидно, что $G \circ F \cap O \subset (\mathrm{cl}_\tau(A)) \cap B$. Работая в стандартном антураже, для $a \in (\mathrm{cl}_\tau(A)) \cap B$ найдем точку $a' \in A$ такую, что $a' \approx_\tau a$. Ясно, что $a' \approx_\sigma a$, ибо $\mu(\tau) \subset \mu(\sigma)$ по условию. Ввиду σ-открытости B будет $a' \in B$, т. е. $a' \in A \cap B$ и $a \in \mathrm{cl}_\tau(A \cap B)$. Окончательно $G \circ F \cap O \subset \mathrm{cl}_\tau(A \cap B)$, что и нужно было обеспечить. $\rhd$

5.5.8. *Имеют место включения:*

(1) $\mathrm{Ha}_\Lambda(H,d') \supset X \times \mathrm{Ha}_\Lambda(G,b') \cap \mathrm{Ha}_\Lambda(F,a') \times Z$;

(2) $R^2_\Lambda(H,d') \supset X \times R^1_\Lambda(G,b') \cap R^2_\Lambda(F,a') \times Z$;

(3) $\mathrm{Cl}_\Lambda(H,d') \supset X \times Q^1_\Lambda(G,b') \cap \mathrm{Cl}_\Lambda(F,a') \times Z$;

(4) $\mathrm{Cl}_\Lambda(H,d') \supset X \times \mathrm{Cl}(G,b') \cap Q^2_\Lambda(F,a') \times Z$;

(5) $\mathrm{Cl}^2(H,d') \supset X \times P^2(G,b') \cap S^2(F,a') \times Z$, *где множество* $\mathrm{Cl}^2(H,d')$ *определено соотношением*

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Cl}^2(H,d') := \\
:= {}^*\{(s',t',r') \in X \times Y \times Z : (\forall\, d \approx {}_{\overline{\sigma}} d', d \in H) \\
(\forall\, \alpha \in \mu(\mathbb{R}_+))(\exists\, s \approx {}_{\tau_X} s')(\forall\, t \approx {}_{\tau_Y} t')(\exists\, r \approx {}_{\tau_Z} z')(d + \alpha(s,t,r) \in H)\}.
\end{gathered}
$$

$\lhd$ Проверим только (1) и (5), так как прочие утверждения проверяются по той же схеме.

(1): Пусть элемент (s',t',r') стандартен и входит в правую часть рассматриваемого соотношения. Возьмем $d \approx {}_{\overline{\sigma}} d'$ и $\alpha \in \Lambda$, где $d := (x,y,z) \in H$. Ясно, что $a := (x,y) \in F$ и $a \approx {}_{\sigma_1} a'$, а $b := (y,z) \in G$, $b \approx {}_{\sigma_2} b'$. В этой связи для $\alpha \in \Lambda$ и $(s,t,r) \approx {}_{\overline{\tau}} (s',t',r')$ будет $a + \alpha(s,t) \in F$ и $b + \alpha(t,r) \in G$. Итак,

$$
\begin{aligned}
d + \alpha(s,t,r) &= (a + \alpha(s,t), z + \alpha r) \in F \times Z, \\
d + \alpha(s,t,r) &= (x + \alpha s, b + \alpha(t,r)) \in X \times G,
\end{aligned}
$$

т. е. $(s',t',r') \in \mathrm{Ha}_\Lambda(H,d')$.

(5): Возьмем стандартный элемент (s',t',r') из правой части (4). По определению имеется элемент $s \approx {}_{\tau_X} s'$ такой, что для всякого $t \approx {}_{\tau_Y} t'$ при некотором $r \approx {}_{\tau_Z} r'$ и всех $a \approx {}_{\sigma_1} a'$ и $b \approx_{\sigma_2} b'$ будет $a + \alpha(s,t) \in F$ и $b + \alpha(t,r) \in G$. Ясно, что и подавно $d + \alpha(s,t,r) \in H$, как только $b \approx {}_{\overline{\sigma}} d'$ и $d \in H$. $\rhd$

5.5.9. Подчеркнем, что механизм «проскоков», проиллюстрированный в 5.5.8, можно модифицировать в зависимости от целей исследования. Как правило, в такие цели включают оценки аппроксимации композиции множеств. При этом наиболее удобно использовать схему, основанную на использовании метода общего положения [114, 126], а также уточняющие и обобщающие эту схему результаты, представленные выше. Сформулируем только один из возможных результатов.

5.5.10. *Теорема.* *Пусть τ — векторная топология, $\tau \geq \sigma$ и соответствия $F \subset X \times Y$ и $G \subset Y \times Z$ таковы, что $\mathrm{Ha}(F, a') \neq \varnothing$ и конусы $Q_2(F, a') \times Z$ и $X \times \mathrm{Cl}(G, b')$ находятся в общем положении (относительно топологии $\overline{\tau}$), тогда*

$$\mathrm{Cl}(G \circ F, c') \supset \mathrm{Cl}(G, b') \circ \mathrm{Cl}(F, a'),$$

если выполнено условие $(\overline{\rho c})$ в точке d'.

$\lhd$ Доказательство проводится по образцу предложения 5.3.13 в [114] и состоит в констатации выполнения (уже установленных) условий, обеспечивающих справедливость следующих выкладок:

$$\mathrm{Cl}(G \circ F, c') = \mathrm{Cl}(\mathrm{Pr}_{X\times Z} H, \mathrm{Pr}_{X\times Z} d') \supset \mathrm{cl}_\tau(\mathrm{Pr}_{X\times Z} \mathrm{Cl}(H, d')) \supset$$
$$\supset \mathrm{Pr}_{X\times Z} \mathrm{cl}_{\overline{\tau}}(X \times \mathrm{Cl}(G, b') \cap Q^2(F, a') \times Z) =$$
$$= \mathrm{Pr}_{X\times Z}(\mathrm{cl}_{\overline{\tau}}(X \times \mathrm{Cl}(G, b')) \cap \mathrm{cl}_{\overline{\tau}}(Q^2(F, a') \times Z)) =$$
$$= \mathrm{Pr}_{X\times Z}(X \times \mathrm{Cl}(G, b') \cap \mathrm{Cl}(F, a') \times Z) = \mathrm{Cl}(G, b') \circ \mathrm{Cl}(F, a').$$

Тем самым доказательство завершено. $\rhd$

5.6. Инфинитезимальные субдифференциалы

В теории экстремальных задач известное внимание уделяется проблеме учета точности соблюдения критериев оптимальности при практической реализации вычислений. Общепринятый качественный подход к названной проблеме отражен в так называемом выпуклом ε-программировании, дающем аппарат оценок приближения к оптимуму по функционалу. Развитый на этом пути инструментарий достаточно специфичен и в некотором смысле оказывается искусственно усложненным. В то же время он не вполне коррелирует с бытующими приемами, основанными на поиске «практического оптимума» с помощью «практически точного» соблюдения требований дополняющей нежесткости, отвечающих классическому случаю $\varepsilon = 0$. В результате можно говорить об определенном расхождении и даже разрыве теоретических и практических воззрений.

Здесь мы изложим подход к преодолению имеющихся трудностей в рамках радикальной установки нестандартного анализа. В качестве основы вводится понятие инфинитезимально оптимального решения — допустимой точки, значение целевой функции в которой бесконечно близко к идеалу — не обязательно реализованному значению программы. Таким образом, инфинитезимальный оптимум предстает в качестве приемлемого претендента на роль «практического» оптимума, ибо никакие осуществимые процедуры не в состоянии отличить его от обычного — «теоретического» оптимума. Приводятся основные формулы исчисления инфинитезимальных субдифференциалов, отвечающих приведенной концепции оптимальности. Получающиеся правила для внешних множеств совпадают по форме со своими классическими аналогами стандартного выпуклого анализа. При этом в признаках инфинитезимальной оптимальности действительно возникает приближенно выполненная дополняющая нежесткость.

5.6.1. Пусть X — векторное пространство, $E^\bullet$ — упорядоченное векторное пространство с присоединенным наибольшим элементом $+\infty$. Рассмотрим выпуклый оператор $f : X \to E^\bullet$ и точку $\overline{x}$ из эффективного множества $\operatorname{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ оператора F. Для элемента $\varepsilon \geq 0$ (из конуса положительных элементов E^+ пространства E) принятым способом определяем *ε-субдифференциал* f в точке $\overline{x}$, т. е. множество

$$\partial_\varepsilon f(\overline{x}) := \{T \in L(X, E) : (\forall\, x \in X)(Tx - Tx \leq f(x) - f(\overline{x}) + \varepsilon)\},$$

где $L(X, E)$ — пространство линейных операторов, действующих из X в E.

5.6.2. Пусть в E выделено фильтрованное по убыванию семейство $\mathscr{E}$ положительных элементов. Считая E и $\mathscr{E}$ стандартными множествами, определим *монаду* $\mu(\mathscr{E})$ соотношением

$$\mu(\mathscr{E}) := \bigcap \{[0, \varepsilon] : \varepsilon \in {}^\circ\mathscr{E}\}.$$

Элементы $\mu(\mathscr{E})$ называют положительными *бесконечно малыми* или *инфинитезимальными* (*относительно* $\mathscr{E}$).

В дальнейшем без особых оговорок подразумевается, что E — это K-пространство, а монада $\mu(\mathscr{E})$ — это внешний конус над ${}^\circ\mathbb{R}$ и, кроме того, $\mu(\mathscr{E}) \cap {}^\circ E = 0$. (В приложениях, как правило, $\mathscr{E}$ — фильтр единиц в E.) Будет использоваться также отношение *бесконечной близости* между элементами E, т. е.

$$e_1 \approx e_2 \leftrightarrow e_1 - e_2 \in \mu(\mathscr{E}) \wedge e_2 - e_1 \in \mu(\mathscr{E}).$$

5.6.3. *Имеет место равенство*

$$\bigcap_{\varepsilon\in{}^\circ\mathscr{E}} \partial_\varepsilon f(\overline{x}) = \bigcup_{\varepsilon\in\mu(\mathscr{E})} \partial_\varepsilon f(\overline{x}).$$

$\lhd$ Для $T \in L(X,E)$ последовательно выводим:

$$T \in \bigcap_{\varepsilon\in{}^\circ\mathscr{E}} \partial_\varepsilon f(\overline{x}) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon \in \mathscr{E})(\forall\, x \in X)(Tx - T\overline{x} \le f(x) - f(\overline{x}) + \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon \in \mathscr{E})\, f^*(T) := \sup_{x\in\mathrm{dom}(f)} (Tx - f(x)) \le T\overline{x} - f(\overline{x}) + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon \in \mathscr{E}) 0 \le f^*(T) - (T\overline{x} - f(\overline{x})) \le -\varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow f^*(T) - (T\overline{x} - f(\overline{x})) \approx 0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, \varepsilon \in E^+)\, \varepsilon \approx 0 \wedge f^*(T) = T\overline{x} - f(\overline{x}) + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow T \in \bigcup_{\varepsilon\in\mu(\mathscr{E})} \partial_\varepsilon f(\overline{x}),$$

что и требуется. $\rhd$

5.6.4. Внешнее множество, фигурирующее в обеих частях равенства 5.6.3, называют *инфинитезимальным субдифференциалом* f в точке $\overline{x}$ и обозначают $Df(\overline{x})$. Элементы $Df(\overline{x})$ называют *инфинитезимальными субградиентами* f в точке $\overline{x}$. Специальных указаний на множество $\mathscr{E}$ при этом не делают, так как вероятность недоразумений незначительна.

5.6.5. *Пусть выполнено предположение стандартности антуража, т. е. параметры X, f, $\overline{x}$ — стандартные множества. Стандартизация инфинитезимального субдифференциала отображения f в точке $\overline{x}$ совпадает с (нулевым) субдифференциалом f в точке $\overline{x}$, т. е.*

$${}^*Df(\overline{x}) = \partial f(\overline{x}).$$

$\lhd$ Для стандартного $T \in {}^\circ L(X,E)$ в силу принципа переноса выполнено

$$T \in {}^*Df(\overline{x}) \leftrightarrow T \in Df(\overline{x}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon \in \mathscr{E})(\forall\, x \in X)(Tx - T\overline{x} \le f(x) - f(\overline{x}) + \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, \varepsilon \in \mathscr{E})(\forall\, x \in X)(Tx - T\overline{x} \le f(x) - f(\overline{x}) + \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow T \in \partial f(\overline{x}),$$

ибо $\inf \mathscr{E} = 0$ на основании соотношения $\mu(\mathscr{E}) \cap {}^\circ E = 0$. $\rhd$

5.6.6. *Пусть F — стандартное K-пространство и $g : E \to F^\bullet$ — возрастающий выпуклый оператор. Если множества $X \times \mathrm{epi}(g)$ и $\mathrm{epi}(f) \times F$ находятся в общем положении, то*

$$D(g \circ f)(\overline{x}) = \bigcup_{T \in Dg(f(\overline{x}))} D(T \circ f)\ (\overline{x}).$$

Если, кроме того, параметры (за исключением, быть может, точки $\overline{x}$) стандартны, то для стандартных ядер справедливо представление

$$^\circ D(g \circ f)(\overline{x}) = \bigcup_{T \in {}^\circ Dg(f(\overline{x}))} {}^\circ D(T \circ f)(\overline{x}).$$

$\triangleleft$ Отметим, что по условию монада $\mu(\mathscr{E})$ — это нормальная внешняя подполугруппа в F, т. е.

$$\varepsilon \in \mu(\mathscr{E}) \to [0, \varepsilon] \subset \mu(\mathscr{E}),$$
$$\mu(\mathscr{E}) + \mu(\mathscr{E}) \subset \mu(\mathscr{E}).$$

Учитывая это обстоятельство и привлекая как 5.6.3, так и правила вычисления ε-субдифференциалов, последовательно получаем

$$D(g \circ f)\,(\overline{x}) = \bigcup_{\varepsilon \in \mu(\mathscr{E})} \partial_\varepsilon (g \circ f)\,(\overline{x}) =$$
$$= \bigcup_{\varepsilon \in \mu(\mathscr{E})} \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon \\ \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0}} \bigcup_{T \in \partial \varepsilon_1 g(f(\overline{x}))} \partial_{\varepsilon_2} (T \circ f)\,(\overline{x}) =$$
$$= \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0 \\ \varepsilon_1 \approx 0, \varepsilon_2 \approx 0}} \bigcup_{T \in \partial_{\varepsilon_1} g(f(\overline{x}))} \partial_{\varepsilon_2} (T \circ f)\,(\overline{x}) =$$
$$= \bigcup_{\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_1 \approx 0} \bigcup_{T \in \partial_{\varepsilon_1} g(f(\overline{x}))} \bigcup_{\varepsilon_2 \geq 0, \varepsilon_2 \approx 0} \partial_{\varepsilon_2} (T \circ f)\,(\overline{x}) =$$
$$= \bigcup_{\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_1 \approx 0} \bigcup_{T \in \partial_{\varepsilon_1} g(f(\overline{x}))} D(T \circ f)\,(\overline{x}).$$

Пусть теперь выполнено предположение о стандартности антуража и $S \in {}^\circ D(g \circ f)\,(\overline{x})$. Тогда для некоторого бесконечно малого ε будет

$$(g \circ f)^*(S) = \sup_{x \in \mathrm{dom}(g \circ f)} (Sx - g \circ f(x)) \leq S\overline{x} - g(f(\overline{x})) + \varepsilon.$$

По формуле замены переменной в преобразовании Юнга — Фенхеля с учетом принципа переноса имеется стандартный оператор $T \in {}^{\circ}L(E,F)$ такой, что T положителен, т. е. $T \in L^{+}(E,F)$ и, кроме того,

$$(g \circ f)^{*}(S) = (T \circ f)^{*}(S) + g^{*}(T).$$

Отсюда следует

$$\begin{gathered}\varepsilon \geq \sup_{x \in \operatorname{dom}(f)} (Sx - T \circ f(x)) + \sup_{e \in \operatorname{dom}(g)} (Te - g(e)) - S\overline{x} + g(f(\overline{x})) = \\ = \sup_{x \in \operatorname{dom}(f)} (Sx - S\overline{x} - (T \circ f(x) - T \circ f(\overline{x}))) + \\ + \sup_{e \in \operatorname{dom}(g)} (Te - T \circ f(\overline{x}) - (g(e) - g(f(\overline{x})))).\end{gathered}$$

Положим

$$\varepsilon_1 := \sup_{e \in \operatorname{dom}(g)} (Te - T \circ f(\overline{x}) - (g(e) - g(f(\overline{x})))),$$

$$\varepsilon_2 := \sup_{x \in \operatorname{dom}(f)} (Sx - S\overline{x} - (T \circ f(x) - T \circ f(\overline{x}))).$$

Ясно, что $S \in \partial_{\varepsilon_2}(T \circ f)(\overline{x})$, т. е. $S \in {}^{\circ}D(T \circ f)(\overline{x})$ и $T \in \partial_{\varepsilon_1} g(f(\overline{x}))$, т. е. $T \in {}^{\circ}Dg(f(\overline{x}))$, ибо $\varepsilon_1 \approx 0$ и $\varepsilon_2 \approx 0$. $\triangleright$

5.6.7. *Пусть $f_1, \dots, f_n : X \to E^{\bullet}$ — выпуклые операторы, причем n — стандартное натуральное число. Если $f_1, \dots, f_n$ находятся в общем положении, то для точки $\overline{x} \in \operatorname{dom}(f_1) \cap \ldots \cap \operatorname{dom}(f_n)$ выполнено*

$$D(f_1 + \ldots + f_n)(\overline{x}) = Df_1(\overline{x}) + \ldots + Df_n(\overline{x}).$$

$\triangleleft$ Доказательство состоит в применении 5.6.3 и правила ε-субдифференцирования суммы с учетом того, что сумма стандартного числа бесконечно малых слагаемых вновь бесконечно мала. $\triangleright$

5.6.8. *Пусть $f_1, \dots, f_n : X \to E^{\bullet}$ — выпуклые операторы, причем n — стандартное число. Допустим, что $f_1, \dots, f_n$ находятся в общем положении, E — это векторная решетка и $\overline{x} \in \operatorname{dom}(f_1 \vee \ldots \vee f_n)$. Если F — стандартное K-пространство и $T \in L^{+}(E,F)$ — положительный линейный оператор, то элемент $S \in L(X,F)$ служит инфинитезимальным субградиентом оператора $T \circ (f_1 \vee \ldots \vee f_n)$ в точке*

$\overline{x}$ *в том и только в том случае, если совместна следующая система условий:*

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k; \quad T_k \in L^+(E, F) \quad (k := 1, \dots, n);$$

$$\sum_{k=1}^{n} T_k\overline{x} \approx T(f_1(\overline{x}) \vee \dots \vee f_n(\overline{x})); \quad S \in \sum_{k=1}^{n} D(T_k \circ f_k)(\overline{x}).$$

$\lhd$ Определяем следующие операторы:

$$(f_1, \dots, f_n) : X \to (E^n)^\bullet, \quad (f_1, \dots, f_n)(x) := (f_1(x), \dots, f_n(x));$$
$$\varkappa : E^n \to E, \quad \varkappa(e_1, \dots, e_n) := e_1 \vee \dots \vee e_n.$$

Тогда справедливо представление:

$$T \circ f_1 \vee \dots \vee f_n = T \circ \varkappa \circ (f_1, \dots, f_n).$$

Отсюда, учитывая 5.6.5 и вспоминая, что $T \circ \varkappa$ — сублинейный оператор, выводим требуемое. $\rhd$

5.6.9. Пусть X — векторное пространство, E — это K-пространство и $\mathfrak{A}$ — слабо порядково ограниченное множество в $L(X, E)$. Рассмотрим регулярный выпуклый оператор $f := \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle^e$, где, как обычно, $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ — *канонический сублинейный оператор*

$$\varepsilon_{\mathfrak{A}} : l_\infty(\mathfrak{A}, E) \to E, \quad \varepsilon_{\mathfrak{A}}(f) := \sup f(\mathfrak{A}),$$

и аффинный оператор $\langle \mathfrak{A} \rangle^\varepsilon$ для $e \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ действует по правилу $\langle \mathfrak{A} \rangle^e x := \langle \mathfrak{A} \rangle x + e$, $\langle \mathfrak{A} \rangle x : T \in \mathfrak{A} \mapsto Tx$.

5.6.10. *Если* $g : E \to F^\bullet$ — *возрастающий выпуклый оператор, действующий в стандартное* K-*пространство* F, *причем в образе* $f(X)$ *имеется алгебраически внутренняя точка* $\operatorname{dom}(g)$, *а элемент* $\overline{x}$ *из* X *таков, что* $f(\overline{x}) \in \operatorname{dom}(g)$, *то справедливо представление*

$$D(g \circ f)(\overline{x}) =$$
$$= \{T \circ \langle \mathfrak{A} \rangle : T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in Dg(f(\overline{x})), T \geq 0, T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} f(\overline{x}) \approx T \circ \langle \mathfrak{A} \rangle^e \overline{x}\}.$$

$\lhd$ Если $S \in D(g \circ f)(\overline{x})$, то по 5.6.3 $S \in \partial_\varepsilon(g \circ f)(\overline{x})$ при некотором $\varepsilon \approx 0$. Остается привлечь соответствующее правило ε-субдифференцирования.

Если же $T \geq 0$, $T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in Dg(f(\overline{x}))$ и $T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} f(\overline{x}) \approx T \circ \langle \mathfrak{A} \rangle^e \overline{x}$, то для некоторого $\varepsilon \approx 0$ будет, конечно же, $T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in \partial_\varepsilon g(f(\overline{x}))$. Положим, кроме того, $\delta := T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} f(\overline{x}) - T \circ \langle \mathfrak{A} \rangle^e \overline{x}$. Тогда $\delta \geq 0$ и $\delta \approx 0$ по условию. Значит, $T \circ \langle \mathfrak{A} \rangle \in \partial_{\varepsilon+\delta}(g \circ f)(\overline{x})$. Остается заметить, что $\varepsilon + \delta \approx 0$. $\triangleright$

5.6.11. *Пусть в условиях* 5.6.10 *отображение g — это сублинейный оператор Магарам. Тогда*

$$D(g \circ f)(\overline{x}) = \bigcup_{T \in Dg(f(\overline{x}))} \ \bigcup_{\delta \geq 0, T\delta \approx 0} T(\partial_\delta f(\overline{x})).$$

$\triangleleft$ В силу 5.6.5 можно считать, что $g := T$. Если для всякого $x \in X$ выполнено $Cx - C\overline{x} \leq f(x) - f(\overline{x}) + \delta$ и $T\delta \approx 0$, то бесспорно $TC \in \partial_{T\delta}(T \circ f)(\overline{x}) \subset D(T \circ f)(\overline{x})$. Для завершения доказательства возьмем $S \in D(T \circ f)(\overline{x})$. В силу 5.6.3 имеется бесконечно малое ε такое, что $S \in \partial_\varepsilon(T \circ f)(\overline{x})$. Привлекая соответствующее правило ε-субдифференцирования, найдем $\delta \geq 0$ и $C \in \partial_\delta f(\overline{x})$ такие, что $T\delta \leq \varepsilon$ и $S = TC$. Это и требовалось. $\triangleright$

5.6.12. *Пусть Ξ — некоторое множество и $(f_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — равномерно регулярное семейство выпуклых операторов. Справедливы представления:*

$$D\Bigg(\sum_{\xi \in \Xi} f_\xi\Bigg)(\overline{x}) = \bigcup_{\substack{\delta \in l_1(\Xi, E) \\ \delta \geq 0, \delta \approx 0}} \ \sum_{\xi \in \Xi} \partial_{\delta(\xi)} f_\xi(\overline{x});$$

$$D\big(\sup_{\xi \in \Xi} f_\xi\big)(\overline{x}) = \bigcup \Bigg\{ \sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi \partial_{\delta(\xi)} f_\xi(\overline{x}) : 0 \leq \alpha_\xi \leq I_E, \quad \sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi = I_E,$$

$$\sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi f_\xi(\overline{x}) \approx \sup_{\xi \in \Xi} f_\xi(\overline{x}), \quad \sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi \delta(\xi) \approx 0 \Bigg\}.$$

$\triangleleft$ Доказательство немедленно вытекает из 5.6.11 с учетом правил дезинтегрирования (см. [126]). $\triangleright$

5.6.13. Полезно отметить, что формулы 5.6.7–5.6.12 допускают уточнения, аналогичные имеющемуся в 5.6.6 в случае стандартности антуража (в который, быть может, не включена точка $\overline{x}$). Подчеркнем также, что по приведенным образцам выводится полный спектр всевозможных формул субдифференциального исчисления (свертки, лебеговы множества и т. п.).

5.6.14. Пусть, как и выше, $f : X \to E^{\bullet}$ — выпуклый оператор, действующий в стандартное K-пространство E, и $\mathscr{X} := \mathscr{X}(\,\cdot\,)$ — *обобщенная точка в* $\operatorname{dom}(f)$, т. е. сеть элементов $\operatorname{dom}(f)$. Говорят, что оператор $T \in L(X, E)$ — это *инфинитезимальный субградиент* f в обобщенной точке $\mathscr{X}$, если для некоторого бесконечно малого положительного ε выполнено

$$f^*(T) \le \liminf(T\mathscr{X} - f(\mathscr{X})) + \varepsilon$$

(здесь, конечно, действует правило $T\mathscr{X} := T \circ \mathscr{X}$). Таким образом, в предположении стандартности антуража инфинитезимальный субградиент — это обычный опорный оператор в обобщенной точке (см. [1, 126]). Условимся обозначать символом $Df(\mathscr{X})$ совокупность всех инфинитезимальных субградиентов f в $\mathscr{X}$. Это множество по понятным причинам называют *инфинитезимальным субдифференциалом* f в $\mathscr{X}$. Приведем выводы для двух основных правил субдифференцирования в обобщенной точке, представляющие интерес в связи с тем, что точные формулы для соответствующих ε-субдифференциалов неизвестны.

5.6.15. *Пусть $f_1, \dots, f_n$ — стандартный набор выпуклых операторов в общем положении и обобщенная точка $\mathscr{X}$ лежит в пересечении* $\operatorname{dom}(f_1) \cap \ldots \cap \operatorname{dom}(f_n)$. *Тогда*

$$D(f_1 + \ldots + f_n)\ (\mathscr{X}) = Df_1(\mathscr{X}) + \ldots + Df_n(\mathscr{X}).$$

$\lhd$ Пусть $T_k \in Df_k(\mathscr{X})$ для $k := 1, \dots, n$, т. е.

$$f_k^*(T_k) \le \liminf(T_k\mathscr{X} - f_k(\mathscr{X})) + \varepsilon_k$$

при подходящих бесконечно малых $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. При этом

$$(f_1 + \ldots + f_n)^*(T_1 + \ldots + T_n) \le \sum_{k=1}^{n} f_k^*(T_k) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} (\liminf(T_k\mathscr{X} - f_k(\mathscr{X})) + \varepsilon_k) \le$$

$$\le \liminf \sum_{k=1}^{n} (T_k\mathscr{X} - f_k(\mathscr{X})) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$$

в силу обычных свойств преобразования Юнга — Фенхеля и нижнего предела. Остается заметить, что $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n \approx 0$ и сделать вывод о справедливости включения $\supset$ для множеств, рассматриваемых в интересующем нас равенстве.

Для проверки противоположного включения, сведя дело к $n=2$, возьмем $T \in D(f_1 + f_2)(\mathscr{X})$. Тогда при некоторых $\varepsilon \approx 0$ и T_1, T_2 таких, что $T_1 + T_2 = T$, будет

$$\begin{gathered}(f_1 + f_2)^*(T) = f_1^*(T_1) + f_2^*(T_2),\\ f_1^*(T_1) + f_2^*(T_2) - \liminf(T\mathscr{X} - (f_1 + f_2)(\mathscr{X})) \le \varepsilon.\end{gathered}$$

Положим по определению

$$\begin{aligned}\delta_1 &:= f_1^*(T_1) - \liminf(T_1\mathscr{X} - f_1(\mathscr{X})),\\ \delta_2 &:= f_2^*(T_2) - \liminf(T_2\mathscr{X} - f_2(\mathscr{X})).\end{aligned}$$

Видно, что при $k := 1, 2$ выполнено

$$0 \le \sup_{x \in \operatorname{dom}(f_k)} (T_k x - f_k(x)) - \limsup\,(T_k\mathscr{X} - f_k(\mathscr{X})) \le \delta_k.$$

Значит, остается убедиться в бесконечной малости δ_1 и δ_2. Имеем

$$\begin{gathered}\delta_1 + \delta_2 \le \\ \le \varepsilon + \liminf(T\mathscr{X} - (f_1 + f_2)(\mathscr{X})) - \sum_{k=1}^{2} \liminf(T_k\mathscr{X} - f_k(\mathscr{X})) \le \\ \le (\varepsilon + \limsup(T_1\mathscr{X} - f_1(\mathscr{X})) - \liminf(T_1\mathscr{X} - f_1(\mathscr{X})))\wedge \\ \wedge(\varepsilon + \limsup(T_2\mathscr{X} - f_2(\mathscr{X})) - \liminf(T_2\mathscr{X} - f_2(\mathscr{X})) \le \\ \le \big(\varepsilon + f_1^*(T_1) - \liminf(T_1\mathscr{X} - f_1(\mathscr{X}))\big)\wedge \\ \wedge\big(\varepsilon + f_2^*(T_2) - \liminf(T_2\mathscr{X} - f_2(\mathscr{X}))\big) \le \\ \le \varepsilon + \delta_1 \wedge \delta_2.\end{gathered}$$

Отсюда $0 \le \delta_1 \vee \delta_2 \le \varepsilon$, что и завершает доказательство. $\triangleright$

5.6.16. *Пусть F — стандартное K-пространство и $g : E \to F'$ — возрастающий выпуклый оператор. Если множества $X \times \operatorname{epi}(g)$ и*

$\mathrm{epi}(f) \times F$ *находятся в общем положении, то для обобщенной точки* $\mathscr{X}$ *в* $\mathrm{dom}(g \circ f)$ *выполнено*

$$D(g \circ f)(\mathscr{X}) = \bigcup_{T \in Dg(f(\mathscr{X}))} D(T \circ f)(\mathscr{X}).$$

$\lhd$ Если известно, что

$$(T \circ f)^*(S) \leq \liminf(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon_1,$$
$$g^*(T) \leq \liminf(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon_2$$

для некоторых бесконечно малых ε_1 и ε_2, то

$$(g \circ f)^*(S) \leq (T \circ f)^*(S) + g^*(T) \leq$$
$$\leq \liminf(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon_1 + \liminf(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon_2 \leq$$
$$\leq \liminf(S\mathscr{X} - g \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Следовательно, $S \in D(g \circ f)(\mathscr{X})$ и правая часть анализируемой формулы символизирует множество, входящее в ее левую часть.

Для завершения доказательства возьмем $S \in D(g \circ f)(\mathscr{X})$. Тогда найдутся бесконечно малое ε и оператор T такие, что

$$(g \circ f)^*(S) = (T \circ f)^*(S) + g^*(T) \leq \liminf(S\mathscr{X} - g \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon.$$

Положим

$$\delta_1 := (T \circ f)^*(S) - \liminf(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})),$$
$$\delta_2 := g^*(T) - \liminf(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})).$$

Учитывая свойства верхних и нижних пределов, выводим, во-первых,

$$\delta_1 \geq (T \circ f)^*(S) - \limsup(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) \geq 0,$$
$$\delta_2 \geq g^*(T) - \limsup(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) \geq 0$$

и, во-вторых,

$$\delta_1 + \delta_2 \leq$$
$$\leq \liminf(S\mathscr{X} - g \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon - \liminf(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) -$$
$$- \liminf(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) \leq (\limsup(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) -$$
$$- \liminf(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon) \wedge (\limsup(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) -$$
$$- \liminf(T \circ f(\mathscr{X}) - gf(\mathscr{X})) + \varepsilon) \leq \delta_1 \wedge \delta_2 + \varepsilon,$$

ибо справедливы очевидные неравенства

$$\limsup(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) \leq g^*(T),$$
$$\limsup(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) \leq (T \circ f)^*(S).$$

Таким образом, $0 \leq \delta_1 \vee \delta_2 \leq \varepsilon$ и $\delta_1 \approx 0$, $\delta_2 \approx 0$. Это означает, что $T \in Dg(f(\mathscr{X}))$ и $S \in D(T \circ f)\,(\mathscr{X})$. $\triangleright$

5.6.17. Дадим теперь некоторое обобщение понятия инфинитезимального субдифференциала, апеллирующее к предельно широкому спектру внешних возможностей.

Пусть, как и прежде, F — выпуклый оператор и B — возможно внешнее подмножество $\operatorname{dom}(F)$. Полагаем

$$DF(B) := \bigcap_{\overline{x} \in B} DF(\overline{x}).$$

Внешнее множество $DF(B)$ называют *инфинитезимальным субдифференциалом F вдоль множества B*.

Пусть теперь $\mathscr{B}$ — (вообще говоря, внешний) базис фильтра в эффективной области определения $\operatorname{dom}(F)$ выпуклого оператора F. Иногда такой базис называют *обобщенной точкой.* Определим *инфинитезимальный субдифференциал* F вдоль базиса фильтра $\mathscr{B}$ (в обобщенной точке $\mathscr{B}$) соотношением

$$DF(\mathscr{B}) := \bigcup_{B \in \mathscr{B}} DF(B).$$

5.6.18. *Для оператора T из $L(X, Y)$ эквивалентны утверждения:*

(1) $T \in DF(\mathscr{B})$;

(2) $(\exists B \in \mathscr{B})(\forall \overline{x} \in B)(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))\, T \in \partial_\varepsilon F(\overline{x})$;

(3) $(\exists B \in \mathscr{B})(\forall \varepsilon \in {}^\circ\mathscr{E})(\forall \overline{x} \in B) T \in \partial_\varepsilon F(\overline{x})$;

(4) $(\exists B \in \mathscr{B})(\forall \overline{x} \in B)(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))(F^*(T) \leq T\overline{x} - F\overline{x} + \varepsilon)$, *где F^* — преобразование Юнга — Фенхеля оператора F;*

(5) *найдется $B \in \mathscr{B}$ такое, что*
$(\forall \overline{x} \in B) \sup\limits_{x \in \operatorname{dom}(F)} ((Tx - T\overline{x}) - (Fx - F\overline{x})) \approx 0.$

◁ Привлекая определения, видим

$$DF(\mathscr{B}) = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} \bigcap_{\overline{x}\in B} DF(\overline{x}) = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} \bigcap_{\overline{x}\in B} \bigcap_{\varepsilon\in{}^\circ\mathscr{E}} \partial_\varepsilon F(\overline{x}) =$$
$$= \bigcup_{B\in\mathscr{B}} \bigcap_{\varepsilon\in{}^\circ\mathscr{E}} \bigcap_{\overline{x}\in B} \partial_\varepsilon F(\overline{x}),$$

что означает эквивалентность (1) $\leftrightarrow$ (3). Ссылка на принцип Коши обеспечивает (2) $\leftrightarrow$ (3). Прочие эквивалентности следуют из определения преобразования Юнга — Фенхеля. ▷

5.6.19. *Пусть $\mathscr{C} := \{C \subset X : (\exists B \in \mathscr{B})\, C \supset B\}$ — внешний фильтр, порожденный базисом $\mathscr{B}$. Тогда $DF(\mathscr{C}) = DF(\mathscr{B})$.*

◁ Ясно, что $\mathscr{C} \supset \mathscr{B}$ и поэтому

$$DF(\mathscr{C}) = \bigcup_{C\in\mathscr{C}} DF(C) \supset \bigcup_{B\in\mathscr{B}} DF(B) = DF(\mathscr{B}).$$

Если теперь $T \in DF(\mathscr{C})$, то в силу 5.6.18 для некоторого C из $\mathscr{C}$ будет выполнено условие

$$(\forall \overline{x} \in C) \sup_{x\in\operatorname{dom}(F)} ((Tx - T\overline{x}) - (Fx - F\overline{x})) \approx 0.$$

Множество C содержит некоторый элемент B базиса $\mathscr{B}$ по условию. Апеллируя к 5.6.18, видим, что $T \in DF(B) \subset DF(\mathscr{B})$. ▷

5.6.20. *Пусть $\mathscr{B}$ — внутренний фильтр в X и $f : X \to \mathbb{R}$ — (всюду определенная) выпуклая функция. Тогда для $x^\# \in X^\#$ выполнено*

$$x^\# \in Df(\mathscr{B}) \leftrightarrow (\exists \varepsilon \in \mu(\mathbb{R}_+))\ f^*(x^\#) \le \liminf\,(x^\#(\mathscr{B}) - f(\mathscr{B})) + \varepsilon,$$

где $\mu(\mathbb{R}_+)$ — множество положительных инфинитезималей в $\mathbb{R}$.

◁ Для проверки импликации вправо заметим, что в силу 5.6.18 для некоторого внутреннего B из $\mathscr{B}$ и любого стандартного $\varepsilon > 0$ будет

$$f^*(x^\#) \le \inf\big\{\langle x \mid x^\#\rangle - f(x) : x \in B\big\} + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$(\forall\varepsilon \in {}^\circ\mathbb{R}_+)\, f^*(x^\#) \leq \liminf_{x\in B} \big(\langle x \mid x^\#\rangle - f(x)\big) + \varepsilon.$$

Остается сослаться на принцип Коши.

Установим теперь импликацию влево. Для этого возьмем бесконечно малое $\delta > 0$ и подберем $B \in \mathscr{B}$ так, чтобы было

$$\liminf_{x\in B} \langle x \mid x^\#\rangle - f(x) \leq \inf(x^*(B) - f(B)) + \delta.$$

После этого можно сослаться на 5.6.18. $\triangleright$

5.6.21. *Пусть Z — стандартное K-пространство и $C : Y \to Z^\bullet$ — возрастающий выпуклый оператор. Если множества $X \times \operatorname{epi}(G)$ и $\operatorname{epi}(F) \times Z$ находятся в общем положении и $\mathscr{B}$ — базис фильтра в $\operatorname{dom}(F)$, то*

$$D(G\circ F)(\mathscr{B}) = \bigcup_{S\in DG(F(\mathscr{B}))} D(S\circ F)(\mathscr{B}).$$

$\triangleleft$ Доказательство состоит в проверке двух включений. Для проверки одного из них возьмем $S \in DG(F(\mathscr{B}))$ и $T \in D(S\circ F)(\mathscr{B})$. Тогда в силу 5.6.18 выполнены соотношения

$$(\exists \overline{B} \in \mathscr{B})(\forall \overline{x} \in \overline{B})(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))T \in \partial_\varepsilon(S\circ F)(\overline{x});$$
$$(\exists \overline{\overline{B}} \in \mathscr{B})(\forall \overline{x} \in \overline{\overline{B}})(\exists \delta \in \mu(\mathscr{E}))S \in \partial^\delta G((S\circ F)(\overline{x})).$$

Поскольку $\mathscr{B}$ — это базис фильтра, для некоторого $B \in \mathscr{B}$ будет $B \subset \overline{B} \cap \overline{\overline{B}}$. При этом для $\overline{x} \in B$ справедливы неравенства

$$(G\circ F)^*(T) \leq G^*(S) + (S\circ F)^*(T) \leq T\overline{x} - G(F(\overline{x})) + \varepsilon + \delta.$$

Здесь мы учли подходящее правило подсчета преобразования Юнга — Фенхеля. Инфинитезимали составляют конус. Поэтому $\varepsilon + \delta \approx 0$ и ссылка на 5.6.18 гарантирует вхождение $T \in D(G\circ F)(\mathscr{B})$. Следовательно, множество из правой части доказываемого включения содержится в множестве, стоящем в его левой части.

Для доказательства оставшегося все еще непроверенным включения возьмем $T \in D(G \circ F)(\mathscr{B})$. В силу 5.6.18 для некоторого B из $\mathscr{B}$ будет

$$(\forall \overline{x} \in B)(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))(G \circ F)^*(T) \leq T\overline{x} - G(F(\overline{x})) + \varepsilon.$$

Применяя точную формулу для преобразования Юнга — Фенхеля композиции выпуклых операторов, найдем положительный оператор $S \in L^+(Y, Z)$, для которого

$$(G \circ F)^*(T) = G^*(S) + (S \circ F)^*(T).$$

Взяв $\overline{x} \in \overline{B}$, положим

$$\varepsilon_1 := G^*(S) - (SF(\overline{x}) - G \circ F(\overline{x})); \quad \varepsilon_2 := (S \circ F)^*(T) - (T\overline{x} - SF\overline{x}).$$

Ясно, что $0 \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$. Стало быть, ε_1 и ε_2 — бесконечно малые величины. Итак, $S \in DG(F(B)) \subset DG(F(\mathscr{B}))$ и $T \in D(S \circ F)(B) \subset D(S \circ F)(\mathscr{B})$. $\triangleright$

5.6.22. *Пусть $F_1, \dots, F_n : X \to Y^\bullet$ — выпуклые операторы, причем n — стандартное число. Если $F_1, \dots, F_n$ находятся в общем положении и $\mathscr{B}$ — базис фильтра в $\operatorname{dom}(F_1) \cap \dots \cap \operatorname{dom}(F_n)$, то*

$$D(F_1 + \dots + F_n)(\mathscr{B}) = D(F_1)(\mathscr{B}) + \dots + D(F_n)(\mathscr{B}).$$

$\triangleleft$ Если $T_k \in D(F_k(\mathscr{B}))$, то найдутся $B_1, \dots, B_n \in \mathscr{B}$ такие, что для каждого $\overline{x}$ из B_k при некотором бесконечно малом ε_k выполнено $T_k \in \partial^{\varepsilon_k}(F_k)(\overline{x})$. Если теперь $\overline{x} \in B_1 \cap \dots \cap B_n$, то выполнено

$$T_1 + \dots + T_n \in \partial_{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n}(F_1 + \dots + F_n)(\overline{x}).$$

Сумма стандартного числа бесконечно малых бесконечно мала. Следовательно, ссылка на 5.6.18 подтверждает, что множество в правой части доказуемого равенства содержится в множестве из левой части.

Пусть теперь $T \in D(F_1 + \dots + F_n)(\mathscr{B})$. Привлекая 5.6.18, видим, что для некоторого $B \in \mathscr{B}$ выполняется условие

$$(\forall \overline{x} \in \mathscr{B})(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))\, T \in \partial_\varepsilon(F_1 + \dots + F_n)(\overline{x}).$$

Таким образом, взяв $\overline{x} \in B$, можно подыскать инфинитезималь ε, для которой

$$(F_1 + \ldots + F_n)^*(T) \leq T\overline{x} - (F_1 + \ldots + F_n)(\overline{x}) + \varepsilon.$$

Используя точную формулу для подсчета преобразования Юнга — Фенхеля, найдем операторы $T_1, \ldots, T_n \in L(X, Y)$, удовлетворяющие соотношениям

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k; \quad \left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right)^*(T) = \sum_{k=1}^{n} F_k^*(T_k).$$

Полагаем теперь

$$\varepsilon_k := F_k^*(T_k) - (T_k\overline{x} - F_k\overline{x}) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Ясно, что $\varepsilon_k \geq 0$ и $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n \leq \varepsilon$. Следовательно, $\varepsilon_k \approx 0$ и $T_k \in DF_k(\overline{x})$ для каждого $k = 1, \ldots, n$. Это и требовалось установить. $\triangleright$

5.6.23. *Пусть $F_1, \ldots, F_n : X \to Y^\bullet$ — выпуклые операторы, причем n — стандартное число. Допустим, что $F_1, \ldots, F_n$ находятся в общем положении, Y — векторная решетка и $\mathscr{B}$ — базис фильтра в $\operatorname{dom}(F_1 \vee \ldots \vee F_n)$. Если Z — стандартное K-пространство и $T \in L(Y, Z)$ — положительный линейный оператор, то элемент $S \in L(X, Z)$ служит инфинитезимальным субградиентом оператора $T \circ (F_1 \vee \ldots \vee F_n)$ вдоль $\mathscr{B}$ в том и только в том случае, если для некоторого $B \in \mathscr{B}$ совместна следующая система условий:*

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k; \quad T \in L^+(Y, Z), \quad k = 1, \ldots, n;$$

$$\sum_{k=1}^{n} T_k(F_k(\overline{x})) \approx T(F_1(\overline{x}) \vee \ldots \vee F_n(\overline{x})) \quad (\overline{x} \in B);$$

$$S \in \sum_{k=1}^{n} D(T_k \circ F_k)(B).$$

$\triangleleft$ Определим следующие операторы:

$$(F_1, \ldots, F_n) : X \to (Y^n)^\bullet; \quad (F_1, \ldots, F_n)(x) := (F_1(x), \ldots, F_n(x));$$

$$\varkappa : Y^n \to Y; \quad \varkappa(y_1, \ldots, y_n) := y_1 \vee \ldots \vee y_n.$$

Тогда справедливо представление

$$T \circ F_1 \vee \ldots \vee F_n = T \circ \varkappa \circ (F_1, \ldots, F_n).$$

Учитывая 5.6.22, выводим требуемое. $\triangleright$

5.6.24. *Пусть X — векторное пространство, Y — некоторое K-пространство и $\mathscr{A}$ — слабо порядково ограниченное множество в $L(X,Y)$, а $F = \varepsilon_{\mathscr{A}} \circ \langle\mathscr{A}\rangle_y$, — регулярный выпуклый оператор.*

Пусть, далее, $G : Y \to Z^{\bullet}$ — возрастающий выпуклый оператор, действующий в стандартном K-пространстве Z, причем в образе $F(X)$ имеется алгебраически внутренняя точка $\mathrm{dom}(S)$, а базис фильтра $\mathscr{B}$ в X таков, что $F(\mathscr{B})$ — базис фильтра в $\mathrm{dom}(G)$. Оператор S из $\mathscr{L}(X,Z)$ входит в инфинитезимальный субдифференциал $D(G\circ F)(\mathscr{B})$ в том и только в том случае, если найдется $B \in \mathscr{B}$ такой, что совместна следующая система условий:

$$
S = T \circ \langle\mathscr{A}\rangle; \quad T \geq 0; \quad T \circ \Delta_{\mathscr{A}} \in DG(F(B));
$$
$$
(\forall \overline{x} \in B)\, T \circ \Delta_{\mathscr{A}} F\overline{x} \approx T \circ \langle\mathscr{A}\rangle_y \overline{x}.
$$

$\lhd$ В силу правил субдифференциального исчисления разрешимость приведенной системы означает, что $S \in D(G\circ F)(\overline{x})$ для каждого $\overline{x} \in B$. Таким образом, остается установить обратную импликацию. Как легко видеть,

$$
D(G\circ F)(\mathscr{B}) = D(G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \circ \langle\mathscr{A}\rangle_y) = \partial(G\circ\mathscr{E}_{\mathscr{A}})(\overline{\mathscr{B}}) \circ \langle\mathscr{A}\rangle,
$$

где $\overline{\mathscr{B}} := \langle\mathscr{A}\rangle_y(\mathscr{B})$. Значит, нам достаточно получить представление оператора $T \in D(G\circ\mathscr{E}_{\mathscr{A}})(\overline{\mathscr{B}})$. Итак, пусть

$$
(\exists B \in \mathscr{B})(\forall \overline{x} \in B)(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))
$$
$$
(G\circ\mathscr{E}_{\mathscr{A}})^* T \leq T \circ \langle\mathscr{A}\rangle_y \overline{x} - G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \circ \langle\mathscr{A}\rangle_y \overline{x} + \varepsilon.
$$

В силу общих правил замены переменных в преобразовании Юнга — Фенхеля (теорема 3.7.10 в [126]), выполнено

$$
(G\circ\mathscr{E}_{\mathscr{A}})^* T = G^*(T\circ\Delta_{\mathscr{A}}).
$$

Полагая $\overline{y} := \langle\mathscr{A}\rangle_y \overline{x}$ для $\overline{x} \in B$, получаем

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &\geq (G\circ\mathscr{E}_{\mathscr{A}})^* T + T\circ\mathscr{E}_{\mathscr{A}}\overline{y} - T\overline{y} = \\
&= G^*(T\circ\Delta_{\mathscr{A}}) + G\circ\mathscr{E}_{\mathscr{A}}\overline{y} - T\overline{y} = \\
&= \sup_{y\in\mathrm{dom}(G)} (T\circ\Delta_{\mathscr{A}} y - T\circ\Delta_{\mathscr{A}}\circ\mathscr{E}_{\mathscr{A}}\circ\mathscr{E}_{\mathscr{A}}\overline{y}) - \\
&\quad -(Gy - G\circ\mathscr{E}_{\mathscr{A}}\overline{y}) + T\circ\Delta_{\mathscr{A}}\circ\mathscr{E}_{\mathscr{A}}\overline{y} - T\overline{y} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что $T\circ\Delta_{\mathscr{A}} \in DG(F(B))$ и $T\circ\Delta_{\mathscr{A}}F\overline{x} \approx T\circ\langle\mathscr{A}\rangle_y\overline{x}$. Тем самым требуемое утверждение установлено. $\rhd$

5.6.25. Суть изложенной схемы в том, что необходимое представление субградиентов осуществляется в некотором смысле независимо от выбора исследуемой точки за счет точности применяемых правил вычисления преобразований Юнга — Фенхеля.

Иными словами, поведение инфинитезимальных субградиентов, по форме аналогичное свойствам обычных «точных» субградиентов, по существу родственно случаю ε-субдифференциалов, учитывающих поведение рассматриваемых операторов «в целом», во всей области их определения. Таким образом, хотя по форме правила подсчета инфинитезимальных субдифференциалов аналогичны обычным правилам локального субдифференцирования, условия их справедливости существенно более жесткие, совпадающие с условиями в целом для преобразований Юнга — Фенхеля или ε-субдифференциалов.

По изложенной схеме можно получить аналоги для всего спектра правил субдифференциального исчисления (дезинтегрирование, свертки Рокафеллара, лебеговы множества и т. п.). Естественным путем отсюда выводятся и признаки инфинитезимальной оптимальности. Подробности мы опускаем.

5.7. Инфинитезимальная оптимальность

В этом параграфе мы изучим новое понятие решения экстремальной задачи, основанное на использовании актуальных нестандартных величин. Для простоты ограничимся случаем «точечных» субдифференциалов.

5.7.1. Точку $\overline{x} \in \operatorname{dom}(f)$ называют *инфинитезимальным решением* безусловной программы $f(x) \to \inf$, где $f : X \to E^{\bullet}$, если $0 \in Df(\overline{x})$, т. е. если $\overline{x}$ допустимо и $f(\overline{x}) \approx \inf\{f(x) : x \in X\}$. Естественным образом понимают инфинитезимальное решение произвольной программы.

5.7.2. *В стандартной безусловной программе* $f(x) \to \inf$ *имеется инфинитезимальное решение в том и только в том случае, если, во-первых, образ* $f(X)$ *ограничен снизу и, во-вторых, существует стандартное обобщенное решение* $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathscr{E}}$ *рассматриваемой программы, т. е.* $x_\varepsilon \in \operatorname{dom}(f)$ *и* $e \leq f(x_\varepsilon) \leq e + \varepsilon$ *для всех* $\varepsilon \in \mathscr{E}$, *где* $e := \inf f(X)$ *— значение программы.*

$\triangleleft$ В силу принципов идеализации и переноса с учетом 5.6.3 выводим:

$$(\exists\, \overline{x} \in X)(0 \in Df(\overline{x})) \leftrightarrow (\exists\, x \in X)(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E})(0 \in \partial_\varepsilon f(x)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E})(\exists\, x \in X)(\forall\, \varepsilon \in \mathscr{E}_0)(0 \in \partial_\varepsilon f(x)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E})(\exists\, x_\varepsilon \in X)(0 \in \partial_\varepsilon f(x_\varepsilon)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, \varepsilon \in \mathscr{E})(\exists\, x_\varepsilon \in X)(\forall\, x \in X)(f(x) \geq f(x_\varepsilon) - \varepsilon),$$

что и нужно. $\triangleright$

5.7.3. Рассмотрим *регулярную выпуклую программу*

$$g(x) \leq 0, \quad f(x) \to \inf .$$

Таким образом, $g, f : X \to E^{\bullet}$ (для простоты $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) = X$) при каждом $x \in X$ либо $g(x) \leq 0$, либо $g(x) \geq 0$ и, кроме того, для некоторого $x_0 \in X$ элемент $-g(x_0)$ — это единица в E.

5.7.4. *В стандартном антураже допустимая внутренняя точка $\overline{x}$ является инфинитезимальным решением рассматриваемой регулярной программы в том и только в том случае, если совместна следующая система условий:*

$$\alpha, \beta \in {}^{\circ}[0, I_E], \quad \alpha + \beta = I_E, \quad \ker(\alpha) = 0;$$
$$\beta \circ g(\overline{x}) \approx 0, \quad 0 \in D(\alpha \circ f)(\overline{x}) + D(\beta \circ g)(\overline{x}).$$

$\triangleleft$ $\leftarrow$: При совместности рассматриваемой системы для допустимого x при некоторых бесконечно малых ε_1 и ε_2 будет

$$\alpha f(\overline{x}) \leq \alpha f(x) + \beta g(x) - \beta g(\overline{x}) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \alpha f(x) + \varepsilon$$

для каждого стандартного $\varepsilon \in {}^{\circ}\mathscr{E}$. В частности, $\alpha(f(\overline{x}) - f(x)) \leq \alpha\varepsilon$ при $\varepsilon \in {}^{\circ}\mathscr{E}$, ибо α — это стандартное отображение. В силу условия $\ker(\alpha) = 0$ и общих свойств мультипликаторов видим, что $\overline{x}$ — инфинитезимальное решение.

$\rightarrow$: Пусть $e := \inf\{f(x) : x \in X, g(x) \leq 0\}$ — значение рассматриваемой программы. По условию и в силу принципа переноса e — стандартный элемент. Значит, вновь привлекая принцип переноса, по теореме о векторном минимаксе найдем стандартные мультипликаторы $\alpha, \beta \in {}^\circ[0, I_E]$ такие, что

$$\alpha + \beta = I_E; \quad 0 = \inf_{x \in X} (\alpha(f(x) - e) + \beta \circ g(x)).$$

Обычным рассуждением (см. [1]) проверяется, что $\ker(\alpha) = 0$. Кроме того, поскольку $\overline{x}$ является инфинитезимально оптимальным решением, для некоторого бесконечно малого ε будет $f(\overline{x}) - e = \varepsilon$. Следовательно, при любом $x \in X$ справедливы оценки $-\alpha\varepsilon \leq \alpha f(x) -\alpha f(\overline{x}) + \beta g(x)$. В частности, $0 \geq \beta g(\overline{x}) \geq -\alpha\varepsilon \geq -\varepsilon$, т. е. $\beta g(\overline{x}) \approx 0$ и

$$0 \in \partial_{\alpha\varepsilon + \beta g(\overline{x})}(\alpha \circ f + \beta \circ g)\ (\overline{x}) \subset D(\alpha \circ f + \beta \circ g)\ (\overline{x}),$$

ибо $\alpha\varepsilon + \beta g(\overline{x}) \approx 0$. $\rhd$

5.7.5. Рассмотрим *регулярную в смысле Слейтера программу*

$$Ax = A\overline{x}, \quad g(x) \leq 0, \quad f(x) \to \inf,$$

т. е., во-первых, $A \in L(X, \mathfrak{X})$ — линейный оператор со значениями в некотором векторном пространстве $\mathfrak{X}$, отображения $g : X \to F^\bullet$ и $f : X \to E^\bullet$ — выпуклые операторы (для удобства $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) = X$), во-вторых, F — архимедово упорядоченное векторное пространство, E — это стандартное K-пространство ограниченных элементов и, наконец, в-третьих, для некоторой допустимой точки x_0 элемент $-g(x_0)$ является сильной единицей в F.

5.7.6. ***Критерий инфинитезимальной оптимальности.*** *Допустимая точка $\overline{x}$ является инфинитезимальным решением регулярной в смысле Слейтера программы в том и только в том случае, если совместна следующая система условий:*

$$\gamma \in L^+(F, E), \quad \mu \in L(\mathfrak{X}, E), \quad \gamma g(\overline{x}) \approx 0,$$
$$0 \in Df(\overline{x}) + D(\gamma \circ g)(\overline{x}) + \mu \circ A.$$

$\lhd$ $\leftarrow$: При совместности рассматриваемой системы для всякой допустимой точки x и некоторых бесконечно малых ε_1 и ε_2 будет

$$f(\overline{x}) \leq f(x) + \varepsilon_1 + \gamma g(x) - \gamma g(\overline{x}) + \varepsilon_2 - \mu(Ax) + \mu(A\overline{x}) \leq$$
$$\leq f(x) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \gamma g(\overline{x}) \leq f(x) + \varepsilon$$

при любом стандартном $\varepsilon \in {}^\circ\mathscr{E}$.

$\rightarrow$: Если $\overline{x}$ — инфинитезимальное решение, то $\overline{x}$ и ε-решение для подходящего бесконечно малого ε. Остается привлечь соответствующий критерий ε-оптимальности. $\rhd$

5.7.7. Допустимая точка $\overline{x}$ называется *инфинитезимально оптимальной по Парето* в программе 5.7.5, если $\overline{x}$ является ε-оптимальной по Парето для какого-нибудь бесконечно малого ε (относительно сильной порядковой единицы $\mathbb{1}_E$ в пространстве E), т. е. если для допустимого x выполнено $f(x)-f(\overline{x}) \le \varepsilon\mathbb{1}_E$, то $f(x)-f(\overline{x}) = \varepsilon\mathbb{1}_E$ при $\varepsilon \in \mu(\mathbb{R}_+)$.

5.7.8. *Пусть точка $\overline{x}$ инфинитезимально оптимальна по Парето в регулярной в смысле Слейтера программе. Тогда при некоторых линейных функционалах α, β, γ на пространствах E, F и $\mathfrak{X}$ соответственно совместна следующая система условий:*

$$\alpha > 0, \quad \beta \ge 0, \quad \beta g(\overline{x}) \approx 0,$$
$$0 \in D(\alpha \circ f)(\overline{x}) + D(\beta \circ g)(\overline{x}) + \gamma \circ A.$$

Если, в свою очередь, приведенные соотношения выполнены для некоторой допустимой точки $\overline{x}$, причем $\alpha(\mathbb{1}_E) = 1$ и $\ker(\alpha) \cap E^+ = 0$, то $\overline{x}$ служит инфинитезимально оптимальным по Парето решением рассматриваемой программы.

$\triangleleft$ Первая часть доказываемого утверждения вытекает из обычного признака ε-оптимальности по Парето с учетом отмеченных ранее свойств бесконечно малых. Если же выполнена гипотеза второй части интересующего нас предложения, то, привлекая определения, для любого допустимого $x \in X$ выводим:

$$0 \le \alpha(f(x) - f(\overline{x})) + \beta g(x) - \beta g(\overline{x}) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \le$$
$$\le \alpha(f(x) - f(\overline{x})) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \beta g(\overline{x})$$

при подходящих бесконечно малых ε_1, ε_2. Положим $\varepsilon := \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \beta g(\overline{x})$. Ясно, что $\varepsilon \approx 0$ и, кроме того, $\varepsilon \ge 0$. Если теперь для допустимого x верно, что $f(x)-f(\overline{x}) \le -\varepsilon\mathbb{1}_E$, то получаем равенство $\alpha(f(\overline{x}) - f(x)) = \varepsilon$. Иными словами, $\alpha(f(x) - f(\overline{x}) - \varepsilon\mathbb{1}_E) = 0$ и $f(x) - f(\overline{x}) = \varepsilon\mathbb{1}_E$. Последнее как раз и означает, что $\overline{x}$ — это ε-оптимальное по Парето решение. $\triangleright$

5.7.9. По описанному образцу можно получить признаки инфинитезимальных решений и в других основных формах задач выпуклого программирования. В качестве иллюстрации мы применим субдифференциальное исчисление к выводу критерия инфинитезимальной оптимальности в дискретной динамической экстремальной задаче.

Пусть $X_0, \dots, X_N$ — топологические векторные пространства, и пусть $G_k : X_{k-1} \rightrightarrows X_k$ — непустое выпуклое соответствие для каждого $k := 1, \dots, N$. Набор $G_1, \dots, G_N$ задает *динамическое семейство* процессов $(G_{k,l})_{k<l\le N}$, где соответствие $G_{k,l} : X_k \rightrightarrows X_l$ определено с помощью равенств

$$G_{k,l} := G_{k+1} \circ \dots \circ G_l, \quad \text{если } k + 1 < l;$$
$$G_{k,k+1} := G_{k+1} \quad (k := 0, 1, \dots, N-1).$$

Очевидно, что $G_{k,l} \circ G_{l,m} = G_{k,m}$ для всех $k < l < m \le N$.

Траекторию указанного семейства процессов определяют как упорядоченный набор элементов $\mathfrak{x} := (x_0, \dots, x_N)$ такой, что $x_l \in G_{k,l}(x_k)$ при каждом $k < l \le N$. При этом говорят, что x_0 — *начало* $\mathfrak{x}$, а x_N — *конец* $\mathfrak{x}$.

Пусть E — топологическое пространство Канторовича. Рассмотрим выпуклые операторы $f_k : X_k \to E^\bullet$ $(k := 0, 1, \dots, N)$, а также выпуклые множества $S_0 \subset X_0$ и $S_N \subset X_N$. Имея набор $\mathfrak{x} := (x_0, \dots, x_N)$, положим

$$f(\mathfrak{x}) := \sum_{k=0}^{N} f_k(x_k).$$

Траекторию называют *допустимой*, если ее начало принадлежит S_0, а конец — S_N. Траекторию $\mathfrak{x}^0 := \big(x_1^0, \dots, x_N^0\big)$ называют *инфинитезимально оптимальной*, если $x_0^0 \in S_0$, $x_N^0 \in S_N$ и $f(\mathfrak{x}^0)$ достигает инфинитезимального минимума на множестве всех допустимых траекторий. Здесь мы сталкиваемся с частным случаем общей *дискретной динамической экстремальной задачи*, состоящей в поиске оптимальной в том или ином смысле траектории динамического семейства.

Рассмотрим множества

$$C_0 := S_0 \times \prod_{k=1}^{N} X_k; \quad C_1 := G_1 \times \prod_{k=2}^{N} X_k;$$
$$C_2 := X_0 \times G_2 \times \prod_{k=3}^{N} X_k; \dots; \quad C_N := \prod_{k=0}^{N-2} X_k \times G_N;$$
$$C_{N+1} := \prod_{k=1}^{N-1} X_k \times S_N; \quad X := \prod_{k=0}^{N} X_k.$$

Определим оператор $\tilde f_k : X \to E^\bullet$ формулой

$$\tilde f_k(\mathfrak{x}) := f_k(x_k) \quad (\mathfrak{x} := (x_0, \dots, x_N),\ k := 0, \dots, N).$$

5.7.10. *Пусть выпуклые множества*

$$C_0 \times E^+, \dots, C_{N+1} \times E^+, \quad \operatorname{epi}(\tilde f_0), \dots, \operatorname{epi}(\tilde f_N)$$

находятся в общем положении в пространстве $X \times E$. *Допустимая траектория* $\bigl(x_0^0, \dots, x_N^0\bigr)$ *является инфинитезимально оптимальной в том и только в том случае, если совместна следующая система условий:*

$$\alpha_k \in \mathscr{L}(X_k, E) \ \ (k := 0, \dots, N);$$

$$(\alpha_{k-1}, \alpha_k) \in DG_k\bigl(x_{k-1}^0, x_k^0\bigr) - \{0\} \times Df_k\bigl(x_k^0\bigr) \quad (k := 1, \dots, N);$$

$$-\alpha_0 \in DS_0(x_0) + Df_0(x_0); \quad \alpha_N \in DS_N(x_N).$$

◁ Как видно, инфинитезимально оптимальная траектория $u := \bigl(x_0^0, \dots, x_N^0\bigr)$ будет также инфинитезимальным решением программы

$$v \in C_0 \cap \dots \cap C_{N+1}, \quad f(v) \to \inf,$$

следовательно,

$$0 \in D\left(\sum_{k=0}^{N} \tilde f_k + \sum_{k=0}^{N+1} \delta_E(C_k)\right)(u).$$

Ввиду предположения об общем положении можно применить теорему 4.2.7 из [126]. Значит, найдутся линейные операторы $\mathscr{A}_k, \mathscr{B}_l \in \mathscr{L}(X, E)$, для которых выполнены соотношения

$$\mathscr{A}_k \in DC_k(u) \quad (k := 0, 1, \dots, N),$$
$$\mathscr{B}_l \in D\tilde f_l(u) \quad (l := 0, 1, \dots, N),$$
$$0 = \sum_{k=0}^{N+1} \mathscr{A}_k + \sum_{k=0}^{N} \mathscr{B}_l.$$

Нетрудно видеть, что операторы $\mathscr{A}_k$ и $(\mathscr{B} := \mathscr{B}_1 + \dots + \mathscr{B}_N)$ можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
\mathscr{A}_0 = (\alpha'_0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0),\\
\mathscr{A}_1 = (\alpha_0, \alpha'_1, 0, \dots, 0, 0, 0),\\
\mathscr{A}_2 = (0, -\alpha_1, \alpha'_2, \dots, 0, 0, 0),\\
\vdots\\
\mathscr{A}_{N-1} = (0, 0, 0, \dots, -\alpha_{N-2}, \alpha'_{N-1}, 0),\\
\mathscr{A}_N = (0, 0, 0, \dots, 0, -\alpha_{N-1}, \alpha'_N),\\
\mathscr{A}_{N+1} = (0, 0, 0, \dots, 0, 0, -\alpha_N),\\
\mathscr{B} = (-\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N-2}, \beta_{N-1}, \beta_N),
\end{gathered}
$$

где $\alpha_k, \alpha'_k \in \mathscr{L}(X_k, E)$ и $-\beta_l \in Df_l\big(x_l^0\big)$ $(l := 1, \dots, N)$. Отсюда выводим $\alpha'_k = \alpha_k - \beta_k$ $(k = 1, \dots, N)$. Теперь для $k := 1, \dots, N$ ввиду субдифференциальных включений для операторов $\mathscr{A}_k$ можем написать

$$
(\alpha_{k-1}, \alpha'_k) = (\alpha_{k-1}, \alpha_k - \beta_k) = (\alpha_{k-1}, \alpha_k) + (0, -\beta_k) \in DG_{\hat{k}}\big(x_{k-1}^0, x_k^0\big)
$$

и, далее,

$$
(\alpha_{k-1}, \alpha_k) \in DG_k\big(x_{k-1}^0, x_k^0\big) - \{0\} \times Df_k\big(x_k^0\big).
$$

Кроме того, при $k = 0$ и $k = N + 1$ получаем соотношения

$$
-\alpha_0 = \alpha'_0 - \beta_0 \in DS_0\big(x_0^0\big) + Df_0\big(x_0^0\big), \quad \alpha_N \in DS_N\big(x_N^0\big),
$$

что и требовалось. $\triangleright$

5.7.11. Приведенную в 5.7.9 динамическую экстремальную задачу называют *терминальной* при условии, что целевая функций зависит только от терминального состояния:

$$
f(\mathfrak{x}) = f_N(x_N) \quad (\mathfrak{x} := (x_0, \dots, x_N) \in X).
$$

Мы предполагаем, что f — выпуклый оператор, действующий из X_N в E.

Если $(x_0, \dots, x_N)$ — инфинитезимально оптимальная траектория терминальной задачи, то x_N является инфинитезимальным решением следующей экстремальной задачи:

$$x \in C := C_{0,N}(S_0) \cap S_N, \quad f_N(x) \to \inf .$$

Это следует из того, что, очевидно, найдется траектория с началом $a \in S_0$ и концом $b \in C$. С другой стороны, если $\bar{x}$ — инфинитезимальное решение сформулированной экстремальной задачи, то $\bar{x} \in G_{0,N}(x_0)$ для некоторого $x_0 \in S_0$, а траектория, соединяющая x_0 и $\bar{x}$, будет инфинитезимально оптимальной. В то же время нам сейчас интересна глобальная характеризация оптимальной траектории в целом, а не только ее терминальное состояние. В этом состоит различие между рассматриваемой задачей и любой программой вида $x \in C$, $f(x) \to \inf$.

Последовательность линейных операторов $\alpha_k \in \mathscr{L}(X_k, E)$ $(k := 0, \dots, N)$ называют *инфинитезимальной характеристикой* траектории $(x_0, \dots, x_N)$, если выполнены следующие соотношения:

$$\alpha_k x - \alpha_l y \approx \alpha_k x_k - \alpha_l x_l \quad ((x, y) \in G_{k,l},\ 0 \le k < l \le N).$$

5.7.12. *Предположим, что выпуклые множества*

$$C_0 \times E^+, \dots, C_{N+1} \times E^+; \quad \prod_{k=0}^{N-1} X_k \times \operatorname{epi}(f)$$

находятся в общем положении. Допустимая траектория $(x_0, \dots, x_N)$ инфинитезимально оптимальна в том и только в том случае, если существует инфинитезимальная характеристика $(\alpha_0, \dots, \alpha_N)$ этой траектории такая, что

$$\alpha_0 x_0 \approx \inf_{x \in S_0} \{\alpha_0 x\}; \quad \alpha_N \in Df(x_N) + DS_N(x_N).$$

$\triangleleft$ Субдифференциальные включения теоремы 4 можно переписать в эквивалентной форме:

$$(\alpha_{k-1}, \alpha_k) \in DG_k(x_{k-1}, x_k) + Df_{k-1}(x_{k-1}) \times \{0\}$$
$$(k := 0, 1, \dots, N-1);$$
$$-\alpha_0 \in DS_0(x_0); \quad \alpha_N \in Df_N(x_N) + DS_N(x_N).$$

Отсюда немедленно вытекает требуемое. $\triangleright$

5.7.13. Примечания.

(1) Дать подробный указатель по проблемам негладкого анализа, рассматриваемым в текущей главе, не представляется возможным в виде грандиозности темы. Мы приводим здесь только несколько стандартных ссылок, отсылая читателя за подробностями к [126]. Отметим следующие превосходные сочинения, определившие многие основные направления исследований в рассматриваемой области: [60, 189, 259, 281, 410, 465, 466].

(2) Ренессанс теории локальных приближений связан с открытием Кларком выпуклого касательного конуса, носящего теперь его имя (см. [280, 281]). Кларк анализировал конечномерный случай. Изобретение общего определения в произвольном топологическом векторном пространстве оказалось весьма нетривиальным и было осуществлено Рокафелларом. Радикальные изменения, вызванные в негладком анализе появлением конуса Кларка, освещены в десятках обзоров и монографий. Отметим часть из них [59, 60, 189, 281, 410].

(3) Разнообразие касательных конусов сделано насущной проблему их классификации. Из пионерских исследований в этом направлении нужно выделить статьи Долецкого [304, 305] и Уарда [512–514]. Классификация касательных с помощью актуальных бесконечно малых принадлежит С. С. Кутателадзе [129, 131, 136].

(4) Регуляризирующие конусы типов R^1 и Q^1 введены А. Г. Кусраевым [108, 109, 112] и Тибольтом [507, 508].

(5) Теория сходимости соответствий, основанная на изучении поведения надграфиков, возникла благодаря теории оптимизации. Важную роль в развитии эписходимости сыграла книга Этуша [258]. Наше изложение следует, в основном, [136].

(6) Идея выделения конкретных наборов инфинитезималей для построения касательных предложена в [138]. Излагая проблемы, связанные с теоремой Корне, мы придерживаемся работы Хириарт-Урути [345].

Общий подход к построению аппроксимаций сумм и композиций был предложен в [112, 113]. Наше изложение следует С. С. Кутателадзе [136].

(7) Инфинитезимальные субдифференциалы были предложены и изучены в ряде работ С. С. Кутателадзе. Отметим первое подробное изложение основ этой теории [132]. Относительно инфинитезимальных версий теорем о характеристике см. [127].

Глава 6

Техника гиперприближений

Многие важные приложения инфинитезимального анализа к исследованию непрерывных и других бесконечных объектов основаны на «дискретном» моделировании последних. Речь идет о поиске конечномерных или конечных объектов, в той или иной форме бесконечно близких к исходным. Аналогия с хорошо известными секвенциальными схемами теории приближений подсказывает, что конечность в таких случаях подразумевает актуальные бесконечно большие величины.

Среди новых конструкций такого рода в первую очередь следует отметить нестандартные оболочки, введенные Люксембургом, и меры, введенные Лёбом и носящие теперь его имя. Первая позволяет моделировать бесконечномерные банаховы пространства с помощью гиперконечномерных пространств. Вторая — пространства со счетно-аддитивной мерой с помощью мер на гиперконечных множествах. Мы объединяем эти идеи термином «гиперприближение».

В этой главе рассмотрены конструкции нестандартной оболочки и меры Лёба, а также их приложения к изучению дискретного приближения в банаховых пространствах и построению гиперприближений интегральных и псевдоинтегральных операторов.

На протяжении всей главы мы работаем в рамках классической или даже радикальной установок инфинитезимального анализа, поскольку используемые нами конструкции часто оперируют со всеми типами канторовских множеств, доступных инфинитезимальному анализу. Это подразумевает, в частности, необходимость несколько утяжелять язык изложения приставкой «гипер», терминологически различая гиперконечные и конечные множества, гиперконечномерные и конечномерные пространства и т. п. Читатель должен осознавать принципиальную неизбежность той или иной формы «двуязычия» при использовании любой из установок инфинитезимального анализа.

Не оговаривая этого особо, мы обычно выбираем достаточно представительный для наших нужд нестандартный универсум или его фрагмент — подходящую суперструктуру. Всегда можно считать, что в выбранной суперструктуре выполняется нужная форма принципа насыщения или же $\varkappa$-насыщения. Иногда мы будем использовать и принцип направленности в сильной форме — принцип идеализации Нельсона (см. 3.5.2–3.5.11). Следует подчеркнуть, что подобная свобода действий совершенно законна и представляет собой обычную «нестандартную» практику.

6.1. Нестандартные оболочки

В этом параграфе мы опишем важную конструкцию инфинитезимального анализа, полезность которой демонстрируется на протяжении всей оставшейся части книги.

6.1.1. Пусть E — внутреннее векторное пространство над ${}^*\mathbb{F}$, где $\mathbb{F}$ — *основное поле* скаляров, т. е. одно из числовых полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Таким образом, заданы две внутренние операции $+ : E \times E \to E$ и $\cdot : {}^*\mathbb{F} \times E \to E$, удовлетворяющие обычным аксиомам векторного пространства. Поскольку $\mathbb{F} \subset {}^*\mathbb{F}$, то внутреннее векторное пространство E будет также и векторным пространством над $\mathbb{F}$, т. е. внешним векторным пространством, которое, однако, не будет ни нормированным, ни гильбертовым, даже если E является таковым как внутреннее пространство. Тем не менее с каждым внутренним нормированным (предгильбертовым) пространством связано некоторое внешнее банахово (гильбертово) пространство.

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — внутреннее нормированное пространство над ${}^*\mathbb{F}$. Как обычно, элемент $x \in E$ называют *доступным* (соответственно *бесконечно малым*), если $\|x\|$ — доступное (бесконечно малое) число.

Пусть $\operatorname{ltd}(E)$ и $\mu(E)$ — это внешние множества соответственно всех доступных и всех бесконечно малых элементов пространства E. Обозначение $\mu(E)$ согласуется с принятой в главе 4 символикой, так как $\mu(E)$ совпадает с монадой нуля в E.

Ясно, что $\operatorname{ltd}(E)$ — (внешнее) векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а $\mu(E)$ — его подпространство. Обозначим символом $E^{\#}$ фактор-пространство $\operatorname{ltd}(E)/\mu(E)$. На $E^{\#}$ вводят норму формулой

$$\|\pi x\| := \|x^{\#}\| := \operatorname{st}(\|x\|) \in \mathbb{F} \quad (x \in \operatorname{ltd}(E)),$$

где $\pi := (\cdot)^{\#} : \operatorname{ltd}(E) \to E^{\#}$ — канонический фактор-гомоморфизм.

При этом $(E^{\#}, \|\cdot\|)$ — внешнее нормированное пространство, именуемое *нестандартной оболочкой* E. Если пространство $(E, \|\cdot\|)$ стандартно, то нестандартной оболочкой E называют $({}^*E)^{\#}$.

Для каждого $x \in E$ элемент $\pi({}^*x) = ({}^*x)^{\#}$ содержится в $({}^*E)^{\#}$, причем $\|x\| = \|({}^*x)^{\#}\|$. Таким образом, отображение $x \mapsto ({}^*x)^{\#}$ осуществляет изометрическое вложение E в $({}^*E)^{\#}$. Обычно считают, что $E \subset ({}^*E)^{\#}$.

Предположим теперь, что E и F — внутренние нормированные пространства и $T : E \to F$ — внутренний ограниченный линейный оператор. Числовое множество

$$c(T) := \{C \in {}^*\mathbb{R} : (\forall x \in E)\|Tx\| \leq C\|x\|\}$$

является внутренним и ограниченным. Как известно, $\|T\| := \inf c(T)$.

Если $\|T\|$ — доступное число, то из классического нормативного неравенства $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$, справедливого для всех $x \in E$, видно, что $T(\operatorname{ltd}(E)) \subset \operatorname{ltd}(F)$ и $T(\mu(E)) \subset \mu(F)$. Следовательно, корректно определено снижение T на фактор-пространство — внешний оператор $T^{\#} : E^{\#} \to F^{\#}$, действующий по правилу

$$T^{\#}\pi x := \pi T x \quad (x \in E).$$

Оператор $T^{\#}$ линеен (над $\mathbb{F}$) и ограничен, причем $\|T^{\#}\| = \operatorname{st}(\|T\|)$. Естественно называть $T^{\#}$ *нестандартной оболочкой* T.

6.1.2. *Теорема.* *Пространство $E^{\#}$ банахово для каждого внутреннего (не обязательно полного) нормированного пространства E.*

$\lhd$ Введем следующие обозначения для открытого и замкнутого шаров с центром в a и радиуса ε: если X — нормированное пространство, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$, то

$$\overset{\circ}{B}_X(a, \varepsilon) := \overset{\circ}{B}_\varepsilon(a) := \{x \in X : \|x - a\| < 1\},$$
$$B_X(a, \varepsilon) := B_\varepsilon(a) := \{x \in X : \|x - a\| \leq 1\}.$$

Воспользуемся принципом вложенных шаров в качестве критерия полноты. Рассмотрим последовательность вложенных шаров $B_{E^\#}(x_n^\#, r_n)$, где $x_n \in E$ и $r_n \in \mathbb{R}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, причем $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Можно считать, что (r_n) убывает. Рассмотрим вложенную последовательность внутренних замкнутых шаров $B_E(x_n, r_n + r_n/2^{n+1})$ в E. В силу принципа насыщения существует элемент $x \in E$, содержащийся в каждом из этих шаров. Элемент $x^\#$ — общая точка всех шаров $B_{E^\#}(x_n^\#, r_n)$ для $n \in \mathbb{N}$. $\triangleright$

6.1.3. Если внутренняя размерность внутреннего нормированного пространства E конечна, то пространство E называют *гиперконечномерным.*

В дальнейшем наибольшее внимание уделяется внутренним гиперконечномерным пространствам, поэтому стоит подробнее остановиться на некоторых деталях данного определения.

Прежде всего необходимо уточнить, что такое сумма гиперконечного множества элементов линейного пространства. Для этого запишем определение конечной суммы в виде формулы и применим к ней принцип переноса. Если f — последовательность в E (т. е. $f : \mathbb{N} \to E$), то частичные суммы $g(n)$ ряда $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ определены рекурсией:

$$\mathrm{Seq}(f) \wedge \mathrm{Seq}(g) \wedge f(0) = g(0) \wedge (\forall k \in \mathbb{N})(g(k+1) = g(k) + f(k+1)),$$

где $\mathrm{Seq}(g)$ — сокращенная запись высказывания «g — последовательность». Обозначим сокращенно символом $\Sigma(f, g)$ приведенную выше формулу. Мощность множества M будем обозначать символом $|M|$, а конечный кардинал (= натуральное число) k отождествим с множеством $\{0, 1, \dots, k-1\}$.

Итак, пусть E — внутреннее векторное пространство (или внутренняя абелева группа), Y — гиперконечное подмножество E. Зафиксируем какую-нибудь биекцию $f : \{0, \dots, |Y| - 1\} \to Y$ и продолжим f до внутренней последовательности $f : {}^*\mathbb{N} \to Y$, считая f нулем при $n > |Y| - 1$. Определим последовательность $g : {}^*\mathbb{N} \to E$ формулой $\Sigma(f, g)$. В силу принципа переноса $g(|Y| - 1)$ не зависит от выбора внутренней биекции f. Стало быть, корректно следующее определение: $\sum_{x\in Y} x := g(|Y| - 1)$. В соответствии с принципом переноса построенная таким образом сумма гиперконечного множества обладает всеми свойствами обычной конечной суммы. Например, если $\{Y_m : m < \nu\}$ — внутреннее гиперконечное семейство подмножеств Y, которое является разбиением Y, то

$$\sum_{x\in Y} x = \sum_{k=0}^{\nu-1} \sum_{x\in Y_k} x.$$

Теперь легко определить внутреннее гиперконечномерное линейное пространство. Пусть E — внутреннее линейное пространство. Внутреннее гиперконечное множество $\{e_1, \dots, e_\Omega\}$, где $\Omega \in {}^*\mathbb{N}$, называют базисом в E, если для любого $x \in X$ существует единственное внутреннее гиперконечное множество $\{x_1, \dots, x_\Omega\}$ в ${}^*\mathbb{F}$, такое, что $x = \sum_{k=1}^{\Omega} x_k e_k$. Пространство, имеющее гиперконечный базис, и будет *гиперконечномерным,* а внутренняя мощность этого базиса служит (*внутренней*) *размерностью* пространства E. Обозначим внутреннюю размерность E символом $\dim(E)$, т. е. $\dim(E) := \Omega$.

В силу принципа переноса все свойства конечномерных пространств и их конечных базисов сохранены для гиперконечномерных пространств и их гиперконечных базисов. Например, $\dim(E) = \Omega$ тогда и только тогда, когда существует внутренне линейно независимое гиперконечное подмножество Y в E, имеющее внутреннюю мощность Ω, а любое гиперконечное множество, имеющее внутреннюю мощность $\Omega + 1$, является внутренне линейно зависимым. При этом внутреннее гиперконечное множество $\{y_1, \dots, y_\nu\}$ называют *внутренне линейно независимым,* если $\sum_{j=0}^{\nu} \lambda_j y_j \neq 0$ для любой внутренней конечной последовательности $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\nu\}$, в которой хотя бы один элемент отличен от нуля.

Заметим, что если множество $\{y_1, \dots, y_\nu\}$ внутренне линейно независимо, то оно линейно независимо и с внешней точки зрения. В самом деле, его внешняя линейная зависимость означает линейную зависимость над $\mathbb{F}$ каждого его стандартно-конечного подмножества, которая является линейной зависимостью и с внутренней точки зрения, поскольку стандартно-конечное множество является внутренним, а $\mathbb{F} \subset {}^*\mathbb{F}$.

С другой стороны, внутренне линейно зависимое множество может и не быть линейно зависимым с внешней точки зрения. Например, если $x \in E$, $x \neq 0$, $\alpha \in {}^*\mathbb{F} - \mathbb{F}$, то $\{x, \alpha x\}$ — внутренне линейно зависимое множество, но оно линейно независимо внешне, так как $\alpha \notin \mathbb{F}$.

В дальнейшем, говоря о внутренних линейных пространствах, мы всегда будем иметь в виду внутренние линейную зависимость и независимость, внутренний базис, внутреннюю размерность и т. п. Поэтому само прилагательное «внутренний» часто будет опускаться.

6.1.4. Наиболее типичный пример гиперконечномерного пространства — это пространство $({}^*\mathbb{C})^T$, составленное из всевозможных внутренних отображений $x : T \to {}^*\mathbb{C}$ некоторого гиперконечного множества T в поле гиперкомплексных чисел ${}^*\mathbb{C}$. На возникающем векторном пространстве можно рассмотреть внутреннюю норму

$$\|x\|_p := \left(\sum_{t\in T} |x(t)|^p\right)^{1/p} \qquad (x \in ({}^*\mathbb{C})^T),$$

где $p \in {}^*\mathbb{R}$, $1 \le p$. Это пространство обозначается символом $l_p(T)$ или же $l_p(n)$, где n — число элементов множества T.

Можно рассмотреть внутреннее скалярное произведение

$$\langle x, y\rangle := \sum_{t\in T} x(t)\overline{y(t)}.$$

Соответствующая гильбертова норма элемента x при этом совпадает с $\|x\|_2$, причем индекс $p = 2$ в обозначении нормы часто опускается.

С внутренней точки зрения все эти нормы на $({}^*\mathbb{C})^T$ в силу принципа переноса эквивалентны, т. е. $(\exists C_1, C_2 > 0)(\forall\, x)(C_1\|x\|_{p_1} \le \|x\|_{p_2} \le C_2\|x\|_{p_1})$. Однако $C_1, C_2 \in {}^*\mathbb{R}$, т. е., в частности, эти константы могут быть бесконечно малыми или бесконечно большими.

Напомним, что если E — некоторое нормированное пространство (для определенности, над полем $\mathbb{C}$), то E принято рассматривать как топологическое пространство, в котором фильтр окрестностей произвольной точки x имеет вид

$$\tau_E(x) := \mathrm{fil}\{B_\varepsilon(x) : \varepsilon \in \mathbb{R}_+\}.$$

При этом ${}^*E$ — внутреннее нормированное пространство над ${}^*\mathbb{C}$ и фильтр окрестностей произвольной точки y из ${}^*E$ имеет вид

$$\tau_{{}^*E}(y) := \mathrm{fil}\{B_\varepsilon(y) : \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_+\}.$$

Обычно в этих случаях в обозначениях операций сложения и умножения на скаляры, а также нормы и скалярного произведения знак * опускается.

Пространство $l_p(n)$ является банаховой решеткой. Отметим, полноты ради, что если E — внутренняя нормированная решетка, то $E^{\#}$ обладает естественной структурой порядка, индуцированной фактор-гомоморфизмом $x \mapsto x^{\#}$. Именно, положительный конус в $E^{\#}$ имеет вид $E^{\#} := \{x^{\#} : 0 \leq x \in \operatorname{ltd}(E)\}$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Нестандартная оболочка $E^{\#}$ внутренней нормированной решетки E будет банаховой решеткой с секвенциально o-непрерывной нормой. Более того, всякая возрастающая и ограниченная по норме последовательность в $E^{\#}$ является порядково ограниченной.

Если p и n — доступные числа, то $l_p(n)^{\#}$ — банахова решетка, *изоморфная* $l_q(n)$, где $q := \operatorname{st}(p)$, т. е. порядково изоморфная и линейно изометричная последнему пространству, см. 6.1.5. Если допустить, что p — бесконечно большое число, но n по-прежнему доступно, то пространство $l_p(n)^{\#}$ изоморфно $l_\infty(n)$. Можно показать также, что для бесконечно большого n и доступного $p \geq 1$ пространство $l_p(n)$ изоморфно $L_q(\mu)$ для некоторой меры μ. В случае, когда оба числа n и $p \geq 1$ бесконечно большие, $l_p(n)$ изоморфно $L_\infty(\mu)$.

6.1.5. *Теорема.* *Если E — внутреннее конечномерное нормированное пространство и $n := \dim(E)$ — стандартное число, то выполняется равенство $\dim(E^{\#}) = n$. В противном случае $E^{\#}$ не сепарабельно.*

$\triangleleft$ Покажем сначала, что если $E^{\#}$ сепарабельно, то оно конечномерно. Для $A \subset E$ обозначим $A^{\#} := \{e^{\#} : e \in A\} \subset E^{\#}$. Последнее обозначение используется как для внешних, так и для внутренних подмножеств E. Условимся через B_X обозначать *единичный шар* в нормированном пространстве X, т. е. $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

Легко видеть, что $B_{E^{\#}} = (B_E)^{\#}$.

В самом деле, включение $(B_E)^{\#} \subset B_{E^{\#}}$ вытекает из того, что $(\forall \lambda \in {}^*\mathbb{R})(\lambda \leq 1 \to {}^\circ\lambda \leq 1)$. Пусть $\xi \in B_{E^{\#}}$ т. е. $\|\xi\| \leq 1$. Если $\|\xi\| < 1$, то $(\exists e \in E)(\xi = e^{\#} \wedge \|e\| < 1)$, т. е. $e \in B_E$ и тем самым $\xi \in (B_E)^{\#}$. Если же $\|\xi\| = 1$, то $\xi = e^{\#}$, где $\|e\| \approx 1$ и может оказаться, что $\|e\| > 1$. Однако в этом случае $e' := \frac{e}{\|e\|} \approx e$, поэтому

$e'^{\#} = e^{\#}$. Итак, $\|e'\| = 1$ и вновь $\xi \in (B_E)^{\#}$. Аналогично, если $e \in \mathrm{ltd}(E)$, то $\overset{\circ}{B}_E(e,\varepsilon)^{\#} \subset B_{E^{\#}}(e^{\#},\varepsilon)$.

Для доказательства конечномерности $E^{\#}$ достаточно показать, что шар $B_{E^{\#}}$ компактен. По предположению $E^{\#}$ является сепарабельным, т. е. в $B_{E^{\#}}$ имеется счетное всюду плотное множество $\{e_k^{\#} : k \in \mathbb{N}\}$. Ввиду установленного выше, можно считать, что $e_k \in B_E$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим возрастающую последовательность внутренних множеств $M_n := \bigcup_{k=0}^n \overset{\circ}{B}_E(e_k,\varepsilon) \cap B_E$. Покажем, что $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = B_E$.

В самом деле, если $e \in B_E$, то $\|e^{\#} - e_n^{\#}\| < \varepsilon$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, но тогда и $\|e - e_n\| < \varepsilon$, т. е. $e \in B_E(e_n,\varepsilon) \subset M_n$. В силу принципа насыщения можно заключить, что $M_{n_0} = B_E$ для подходящего $n_0 \in {}^*\mathbb{N}$. Отсюда выводим

$$
\begin{aligned}
B_{E^{\#}} &= \left(\bigcup_{k=0}^{n_0} \overset{\circ}{B}_E(e_k,\varepsilon) \cap B_E\right)^{\#} = \\
&= \bigcup_{k=0}^{n_0} \left(\overset{\circ}{B}_E(e_k,\varepsilon) \cap B_E\right)^{\#} \subset \\
&\subset \bigcup_{k=0}^{n_0} \overset{\circ}{B}_{E^{\#}}(e_k^{\#},\varepsilon) \cap B_{E^{\#}}.
\end{aligned}
$$

Это включение позволяет заключить, что $\{e_0^{\#},\dots,e_{n_0}^{\#}\}$ служит ε-сетью для $B_{E^{\#}}$.

Покажем теперь, что если $e_1,\dots,e_n \in \mathrm{ltd}(E)$, где $n \in \mathbb{N}$ и элементы $e_1^{\#},\dots,e_n^{\#}$ линейно независимы, то и $e_1,\dots,e_n$ линейно независимы в E (т. е. над ${}^*\mathbb{F}$). В самом деле, пусть элементы $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in {}^*\mathbb{F}$ не все равны нулю и $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$. Если $\lambda := \max_k |\lambda_k|$, то $\lambda \neq 0$ и $\sum_{k=1}^n \mu_k e_k = 0$, где $\mu_k := \lambda_k/\lambda$ и $|\mu_k| \le 1$. Поскольку $|\mu_k|$ — доступно, заключаем, что ${}^\circ\mu_k$ лежит в ${}^*\mathbb{R}$. Легко проверить, что в этом случае $(\sum_{k=1}^n \mu_k e_k)^{\#} = \sum_{k=1}^n {}^\circ\mu_k e_k^{\#} = 0$. Но $\|\mu_j\| = 1$ при некотором j, т. е. ${}^\circ\mu_j \neq 0$, а это противоречит линейной независимости $e_1^{\#},\dots,e_n^{\#}$.

Из приведенных рассуждений следует, в частности, что если внутренняя размерность E — это стандартное число n, т. е. $\dim(E) = n$, то $\dim(E^{\#}) \le n$. Для доказательства обратного неравенства воспользуемся базисом Ауэрбаха (см. [342]).

Базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в нормированном пространстве X называют *базисом Ауэрбаха*, если $\|e_1\| = \ldots = \|e_n\| = 1$ и для каждого $j := 1, \dots, n$ выполнено

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \geq |\alpha_j| \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}).$$

(Это равносильно тому, что линейная оболочка множества $(e_k)_{k \neq j}$ *ортогональна* к вектору e_j, если *ортогональность* $M \subset L$ к $x \in L$ означает справедливость формулы $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ для всех $\alpha \in \mathbb{F}$ и $x \in M$, см. [36].)

Известно (см., например, [36]), что базис Ауэрбаха существует в любом конечномерном нормированном пространстве. Следовательно, в силу принципа переноса такой базис существует и во внутреннем n-мерном пространстве E.

Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис Ауэрбаха в E. Покажем, что элементы $e_1^{\#}, \dots, e_n^{\#}$ линейно независимы. Если $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k^{\#} = 0$, то $\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \| \approx 0$, но $\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \| \geq |\lambda_j|$ для всех $j := 1, \dots, n$. Однако это противоречит тому, что все числа λ_k стандартны и хотя бы одно из них отлично от нуля. Тем самым доказано, что внутренняя размерность E равна n, т. е. $\dim(E^{\#}) = n$. Тем самым первая часть теоремы доказана.

Наконец, предположим, что внутренняя размерность E больше любого стандартного n. Тогда для любого стандартного n существует внутреннее подпространство $E_1 \subset E$ такое, что $\dim(E_1) = n$. Как видно, $E_1^{\#}$ вложено в $E^{\#}$ с сохранением нормы, поэтому пространство $E^{\#}$ содержит n-мерное подпространство при любом $n \in \mathbb{N}$, значит, $E^{\#}$ не может быть ни конечномерным, ни сепарабельным. $\triangleright$

6.1.6. Пусть $\mathfrak{F}(E)$ — множество всех конечномерных подпространств нормированного пространства E. Взяв $F \in \mathfrak{F}(E)$, обозначим символом $\dim(F)$ размерность пространства F. По принципу переноса ${}^*\mathfrak{F}(E)$ состоит из (не обязательно всех) гиперконечномерных подпространств внутреннего пространства ${}^*E$, а ${}^*\dim$ — отображение из ${}^*\mathfrak{F}(E)$ в ${}^*\mathbb{N}$, причем ${}^*\dim(F) = \dim(F)$ для каждого $F \in \mathfrak{F}(E)$.

Для каждого (нормированного) векторного пространства E существует такое $F \in {}^*\mathfrak{F}(E)$, что $E \subset F \subset {}^*E$. Иными словами, существует гиперконечномерное подпространство $F \subset {}^*E$, содержащее все стандартные элементы внутреннего пространства ${}^*E$.

$\lhd$ Доказательство представляет собой простое применение принципа насыщения. Для каждого $x \in E$ обозначим $A_x := \{F \in {}^*\mathfrak{F}(E) : x \in F\}$. Семейство внутренних множеств $(A_x)_{x \in E}$ центрировано, т. е. обладает свойством конечного пересечения. По принципу насыщения существует множество $F \in {}^*\mathfrak{F}(E)$ такое, что $x \in F$ для всех $x \in X$. $\rhd$

Несмотря на простоту формулировки и доказательства, именно это предложение лежит в основе многочисленных приложений инфинитезимального анализа к теории банаховых пространств. Схема действий здесь такова.

Пространство E вкладывают в гиперконечномерное пространство F. Привлекая принцип переноса, теперь можно устанавливать различные утверждения относительно пространства F и операторов в нем, предварительно обосновав их для конечномерных подпространств E и операторов в них. Поскольку E содержится в F, переходя к стандартным частям, можно получить результаты относительно пространства E и операторов в нем.

Описанная схема, однако, не всегда проходит автоматически и порою требует весьма изощренной техники. В частности, необходимая для перехода к стандартным частям околостандартность в рассматриваемых структурах может вовсе отсутствовать и тогда ее приходится вводить искусственно, см. [419].

6.1.7. Рассмотрим теперь вкратце вопрос о том, что происходит со свойствами оператора при переходе к нестандартной оболочке.

Пусть E, F и G — внутренние нормированные пространства над полем ${}^*\mathbb{F}$ (т. е. над стандартизацией основного поля $\mathbb{F}$, совпадающей с ${}^*\mathbb{R}$ или ${}^*\mathbb{C}$), $S, T : E \to F$ и $R : F \to G$ — доступные внутренние операторы. Тогда имеют место следующие утверждения:

(1) $\|T^\#\| = {}^\circ\|T\|$;

(2) $(S + T)^\# = S^\# + T^\#$;

(3) $(\lambda T)^\# = ({}^\circ\lambda) \cdot T^\#$ *для любого* $\lambda \in \operatorname{ltd}({}^*\mathbb{F})$;

(4) $(R \circ T)^\# = R^\# \circ T^\#$.

$\lhd$ Эти свойства очевидны. $\rhd$

6.1.8. Предположим, что E — внутреннее векторное пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Тогда, как уже отмечалось, $E^\#$ — несепарабельное гильбертово пространство, в котором скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ определяется формулой

$$(x^\#, y^\#) := \langle x, y\rangle \quad (x, y \in E).$$

Если T — оператор, действующий в гильбертовых пространствах, то символом T^* мы обозначаем эрмитово сопряженный оператор. Пусть $\sigma(T)$ — *спектр оператора* T, а $\sigma_p(T)$ — его *точечный спектр* (т. е. множество собственных значений T).

Если E — внутреннее предгильбертово пространство, а $T : E \to E$ — внутренний линейный оператор с доступной нормой, то справедливы следующие утверждения:

(1) $(T^*)^\# = (T^\#)^*$;

(2) *если T — эрмитов (нормальный, унитарный) оператор, то таким же будет и оператор $T^\#$;*

(3) *если пространство E гиперконечномерно, то $\sigma(T^\#) = \sigma_p(T^\#)$.*

6.1.9. *Если E — внутреннее предгильбертово пространство, а F — внутреннее подпространство E, то $(F^\perp)^\# = (F^\#)^\perp$.*

$\lhd$ Пусть P_F — ортопроектор в E на подпространство F, а $P_{F^\#}$ — ортопроектор в $E^\#$ на подпространство $F^\#$. Покажем, что $P_F^\# = P_{F^\#}$. Из 6.1.7 и 6.1.8 вытекает, что $P_F^\#$ — ортопроектор. Остается показать, что $P_F^\# \xi = \xi$ в том и только в том случае, когда $\xi \in F^\#$. Если $\xi = x^\#$ и $x \in F$, то $P_T^\# x^\# = (P_F x)^\# = x^\# = \xi$. Наоборот, предположим, что $P_F^\# \xi = \xi$. Если $\xi = y^\#$, то $(P_F y)^\# = y^\#$, значит, $P_F y - y \approx 0$. Полагая $x := P_F y$, получаем $\xi = x^\#$, но поскольку $x = P_F y \in F$, то $\xi \in F^\#$. Для завершения доказательства заметим, что $H = F^\perp$ в том и только в том случае, если $P_H + P_F = I$ и $P_H P_F = P_F P_H = 0$. В этом случае, привлекая вновь 6.1.7, получим $P_{H^\#} + P_{F^\#} = I^\#$ и $P_{H^\#} P_{F^\#} = P_{F^\#} P_{H^\#} = 0^\#$, следовательно, $H^\# = (T^\#)^\perp$. $\rhd$

Приведем еще три вспомогательных факта, которые потребуются в дальнейшем. В следующих пунктах 6.1.10–6.1.12 символом E обозначено гиперконечномерное гильбертово пространство.

6.1.10. *Если внутренний линейный оператор T нормален и доступен, то $\sigma(T^\#) = \{{}^\circ\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$.*

$\lhd$ Пусть $B := \{{}^\circ\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$. Тогда B — замкнутое подмножество $\mathbb{C}$, так как $\sigma(T)$ — внутреннее множество в силу 4.2.5. Как видно, $B \subset \sigma(T^{\#})$. Допустим, что $\mu \notin B$. Тогда существует стандартное число $\delta > 0$ такое, что $|\mu - \xi| \geq \delta$ для всех $\xi \in B$. При этом верно также неравенство $|\mu - \xi| \geq \delta$ для всех $\xi \in \sigma(T)$. Поскольку $\mu \notin \sigma(T)$, то $(\mu - T)^{-1}$ — ограниченный линейный оператор. Очевидно, что

$$\sigma((\mu - T)^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\mu - \lambda} : \lambda \in \sigma(T) \right\}.$$

В силу нормальности T из последнего равенства следует, что $\|(\mu - T)^{-1}\| \leq \delta^{-1}$. Значит, оператор $(\mu - T)^{-1}$ имеет доступную норму. Теперь из 6.1.7 (4) видно, что $(\mu - T)^{-1\#} = (\mu(I_E)^{\#} - T^{\#})^{-1} = (\mu - T^{\#})^{-1}$, поскольку $(I_E)^{\#} = I_{E^{\#}}$ — тождественный оператор на $E^{\#}$. Стало быть, $\mu \notin \sigma(T^{\#})$. $\triangleright$

6.1.11. *Пусть* $\dim(E) = N \in {}^*\mathbb{N}$ *и внутренний эрмитов эндоморфизм* $A : E \to E$ *определяется в некотором ортонормальном базисе матрицей* $(a_{kl})_{k,l=1}^{N}$, *которая удовлетворяет условию* $\sum_{k,l=1}^{N} |a_{kl}|^2 \ll +\infty$. *Тогда все собственные значения* A *доступны и кратность каждого собственного значения, не являющегося бесконечно малым, будет стандартным натуральным числом.*

$\triangleleft$ Это следует немедленно из равенства

$$\sum_{k=1}^{s} n_k |\lambda_k|^2 = \sum_{k,l=1}^{N} |a_{kl}|^2,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — полная система попарно различных собственных значений A с кратностями $n_1, \ldots, n_s$ соответственно. $\triangleright$

6.1.12. *Пусть* $A : E \to E$ *— эрмитов оператор и* $\lambda \in \mathbb{R}$ *— стандартное число. Предположим, что множество* $\mathscr{M}$ *собственных значений* A, *бесконечно близких к* λ, *является внутренним и стандартно-конечным, т. е.* $\mathscr{M} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, *где* $n \in \mathbb{N}$. *Допустим также, что кратность каждого* $\lambda_k \in \mathscr{M}$ *стандартна, и пусть* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *— полная ортонормальная система собственных векторов, соответствующих собственным значениям из* $\mathscr{M}$. *Если при этом* $f \in E^{\#}$ *— собственный вектор* $A^{\#}$, *соответствующий собственному значению* λ, *то* f *можно представить в виде линейной комбинации элементов* $\varphi_1^{\#}, \ldots, \varphi_m^{\#}$.

$\lhd$ Пусть H — это внутренняя линейная оболочка множества $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$. Так как m стандартно, видно, что подпространство $H^\#$ в $E^\#$ будет линейной оболочкой множества $\{\varphi_1^\#, \dots, \varphi_m^\#\}$. Обозначим символом $E_\lambda^\#$ собственное подпространство $A^\#$, соответствующее собственному значению λ. Тогда $H^\# \subset E_\lambda^\#$. Если $H^\# \ne E_\lambda^\#$, то $(H^\#)^\perp \cap E_\lambda^\# \ne 0$.

В силу 6.1.9 выполнено $H^{\#\perp} = (H^\perp)^\#$. По определению H — инвариантное подпространство для A. Следовательно, $H^\perp$ также инвариантное подпространство для A, а потому $(H^\perp)^\#$ — инвариантное подпространство для $A^\#$. Допустим, что $0 \ne f \in (H^\perp)^\# \cap E_\lambda^\#$. Тогда λ будет собственным значением ограничения $A^\#$ на $(H^\perp)^\#$, поэтому существует собственное значение γ оператора $A|_{H^\perp}$. Собственный вектор, соответствующий γ, ортогонален к H и, стало быть, ко всем φ_i. Получили противоречие. $\rhd$

6.1.13. Примечания.

(1) Нестандартная оболочка банахова пространства была введена Люксембургом [414]. Разновидностью нестандартной оболочки является ультрапроизведение банаховых пространств, введенное Дакуня-Кастелем и Кривиным [289]. О роли этих понятий в теории банаховых пространств и соответствующую библиографию см. в [332, 339, 342].

(2) Вопрос об аналитическом описании нестандартных оболочек, затронутый в конце пункта 6.1.4, наиболее полно изучен для случая классических банаховых пространств, см. [342]. В произвольной аксиоматической теории внешних множеств можно получать результаты только в стиле факта, отмеченного в 6.1.4. Однако при работе в конечном фрагменте универсума фон Неймана можно детализировать описания нестандартных оболочек. Так, например, если нестандартный универсум ω_0-насыщен (ограничение снизу) и при этом обладает свойством ω_0-изоморфизма (ограничение сверху), то нестандартная оболочка банаховой решетки L_p ([0,1]) изометрически изоморфна l_p-сумме k экземпляров пространства $L_p([0,1]^k)$, где $k := 2^{\omega_0}$. Подробное изложение этого факта и дальнейшие ссылки см. в [337, 342].

(3) Напомним, что некоторые свойства нормированного пространства являются «локальными» в том смысле, что они определяются устройством и расположением конечномерных подпространств изучаемого пространства.

Нестандартные оболочки обладают интересными локальными свойствами. Так, например, часто случается, что если какое-то свойство выполнено «приближенно» на конечномерных подпространствах, то это же свойство в нестандартной оболочке выполняется уже «точно». Примером может служить понятие финитной представимости, см. [282, 342]. Понятия финитной представимости (термин принадлежит Джеймсу) в теорию банаховых пространств ввел Дворецкий задолго до проникновения туда теоретико-модельной техники.

(4) Вопрос о том, когда банаховы пространства имеют изоморфные нестандартные оболочки, исследовал Хенсон [336]. Используя специальный язык первого порядка, он рассмотрел свойство аппроксимативной эквивалентности банаховых пространств, равносильное изометрической изоморфности их нестандартных оболочек [336]. По этому поводу см. также [488, 489].

(5) Предложения 6.1.7 и 6.1.8 установлены в [433]. Утверждения 6.1.9–6.1.12 взяты из [325]. Предложение 6.1.10, справедливое для нормального оператора в гиперконечномерном гильбертовом пространстве, не имеет места в более общих ситуациях (контрпримеры см. в [522]).

6.2. Дискретные приближения в банаховом пространстве

При исследовании линейных операторных уравнений в банаховом пространстве часто и успешно применяется метод дискретизации, состоящий в замене исходного уравнения приближенным уравнением в конечномерном пространстве. При этом возникает важный вопрос о предельном поведении спектров приближающих операторов. В текущем параграфе намечен инфинитезимальный подход к этому кругу вопросов.

6.2.1. Начнем с понятия дискретного приближения банахова пространства и линейного оператора.

Пусть X и X_n $(n \in \mathbb{N})$ — банаховы пространства, нормы которых обозначены символами $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_n$. Предположим, что найдутся некоторое плотное подпространство $Y \subset X$ и последовательность ограниченных линейных операторов (T_n) из Y в X_n, удовлетворяющие условию

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n(f)\|_n = \|f\| \quad (f \in Y)$.

В этой ситуации говорят, что последовательность $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ служит *дискретным приближением* пространства X или, более подробно, является *последовательностью дискретных приближений* к пространству X. Если $Y = X$, то дискретное приближение называют *сильным.* Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где $x_n \in X_n$, *дискретно сходится* к $f \in Y$, если $\|T_n f - x_n\|_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть даны дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ пространства X, линейный (возможно, неограниченный) оператор $A : X \to X$ и последовательность (A_n), где A_n — эндоморфизм X_n. Обозначим символом $DAp(A)$ подпространство Y, состоящее из всех $f \in Y$ таких, что $Af \in Y$ и

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n A f - A_n T_n f\|_n = 0$.

(Последнее, очевидно, означает, что $(A_n T_n f)$ дискретно сходится к Af.)

Мы будем называть множество $DAp(A)$ *областью приближения* оператора A последовательностью (A_n). Если $DAp(A)$ плотно в Y, то говорят, что последовательность операторов (A_n) дискретно сходится к оператору A. Если дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ является сильным и $\|T_n A - A_n T_n\|_n \to 0$ при $n \to \infty$, то говорят, что дискретная сходимость равномерна.

6.2.2. Дискретное приближение $((X_n, T'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ пространства X, где $T_n : Y' \to X$, называют эквивалентным дискретному приближению $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$, если пространство $Y \cap Y'$ плотно в X и для любого $f \in Y \cap Y'$ выполняется условие: $\|T_n(f) - T'_n(f)\|_n \to 0$ при $n \to \infty$. Очевидно, что, если последовательность операторов A_n дискретно сходится к оператору A относительно некоторого дискретного приближения пространств, то A_n дискретно сходится к A и относительно любого эквивалентного дискретного приближения пространств.

Скажем, что сильная дискретная аппроксимация $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *проективна*, если существуют сохраняющие норму вложения $\imath_n : X_n \to X$, такие, что при любом $n \in \mathbb{N}$ оператор $Q_n := \imath_n \circ T_n$ является проектором пространства X на подпространство $\imath_n(X_n)$ и выполняется следующее условие:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\|z\|_n = 1} (\inf\{\|x\| : T_n(x) = z\}) < +\infty.$$

Это условие выполняется, например, если все пространства X_n и пространство X гильбертовы, а Q_n — ортогональный проектор при любом n.

Ясно, что если последовательность операторов A_n дискретно сходится к оператору A относительно дискретного приближения $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$, то последовательность операторов (A'_n), где $A'_n := \imath_n A_n \imath_n^{-1} : \imath_n(X_n) \to \imath(X_n)$, дискретно сходится к оператору A относительно дискретного приближения $((\imath_n(X_n), P_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Следующий пример показывает, что существуют эквивалентные дискретные приближения, одно из которых является сильным, а другое нет.

Пример. Пусть $X := L_2(0,1)$, $Y := C^1(0,1)$, $X_n := \mathbb{C}^n$, причем скалярное произведение в X_n определено формулой:

$$\langle \alpha, \beta \rangle_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_k}.$$

Операторы T_n, определенные на Y, осуществляют вычисление таблиц функций в точках $\{\frac{k}{n} : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$, т. е. $T_n(f)_k = f(\frac{k}{n})$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Очевидно, что последовательность $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ есть дискретное приближение пространства X. При этом, ясно, что операторы T_n не являются ограниченными по L_2-норме и, значит, не продолжаются на все пространство X. Следовательно, это дискретное приближение не является сильным.

Рассмотрим теперь операторы $T'_n : X \to X_n$, которые действуют по формуле

$$T'_n(f)_k = \frac{1}{n} \int\limits_{k/n}^{k+1/n} f(x)dx.$$

6.2.3. Установим нестандартные критерии дискретного приближения банахова пространства X последовательностью (X_n, T_n), а также дискретной сходимости последовательности операторов $(A_n : X_n \to X_n)$ к оператору $A : X \to X$ в случае равномерной ограниченности последовательности $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и ограниченности оператора A. Напомним, что последовательность операторов называется *равномерно ограниченной*, если последовательность их норм ограничена в $\mathbb{R}$. В этом случае при любом бесконечно большом N оператор A_N очевидно является доступным.

Пусть Ξ — внутреннее банахово пространство и $T : {}^*Y \to \Xi$ — внутреннее линейное отображение (здесь, как и выше, Y — плотное подпространство X). Пару (Ξ, T) будем называть *гиперприближением* X, если для любого стандартного $f \in Y$ выполняется условие $\|T(f)\| \approx \|f\|$.

Доступный оператор $\Lambda : \Xi \to \Xi$ называется *гипераппроксимацией* оператора A, если

$$DAp(\Lambda) = \{f \in Y \ : \|TA(f) - \Lambda T(f)\| \approx 0\}$$

плотно в Y.

Отметим, что условие $f \in DAp(\Lambda)$ подразумевает не только то, что $f \in Y$, но также и то, что $A(f) \in Y$.

(1) *Если пара (Ξ, T) — гиперприближение пространства X, то оператор T определяет сохраняющее норму линейное вложение $\boldsymbol{t} : X \to \Xi^{\#}$, такое что $\boldsymbol{t}(f) = T(f)^{\#}$ для любого $f \in Y$. При этом если $\Lambda : \Xi \to \Xi$ — гипераппроксимация $A : X \to X$, то следующая диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A} & X \\ \downarrow{\boldsymbol{t}} & & \downarrow{\boldsymbol{t}} \\ \Xi^{\#} & \xrightarrow{\Lambda} & \Xi^{\#} \end{array}$$

коммутативна.

(2) *Последовательность $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ является дискретным приближением пространства X в том и только в том случае, когда при любом гипернатуральном $N \in N \setminus \mathbb{N}$ пара (X_N, T_N) является гиперприближением X. При этом равномерно ограниченная последовательность операторов A_n дискретно сходится к ограниченному оператору A тогда и только тогда, когда при любом гипернатуральном $N \in N \setminus \mathbb{N}$ оператор A_N является гипераппроксимацией A.*

$\lhd$ Легко видеть, что отображение $f \in Y \longmapsto T(f)^{\#} \in \Xi^{\#}$ есть линейное сохраняющее норму вложение Y в $\Xi^{\#}$. В силу плотности Y в X оно продолжается до линейного сохраняющего норму вложения $\boldsymbol{t} : X \to \Xi^{\#}$. Остальные утверждения этого предложения совсем очевидны. $\rhd$

Ниже для любого бесконечно большого $N \in N \setminus \mathbb{N}$ пространство $X_N^{\#}$ обозначено через $\mathscr{X}$, вместо $A_N^{\#}$ мы пишем $\mathscr{A}$, а оператор $\boldsymbol{t}$, построенный по T_N, будет обозначен символом τ.

6.2.4. Начиная с этого места, мы будем предполагать, что X — гильбертово пространство, $A : X \to X$ — некоторый нормальный оператор, $((X_n, T_N))_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность дискретных приближений к X, в которой все X_n — конечномерные евклидовы пространства, $(A_n : X_n \to X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность нормальных операторов, дискретно сходящаяся к оператору A.

Ниже техника гиперприближений применяется к исследованию вопроса о сходимости спектров операторов A_n к спектру оператора A в метрике Хаусдорфа. Напомним, что *расстояние Хаусдорфа* между двумя компактами K и L в метрическом пространстве M определяется по формуле

$$d_H(K, L) := \inf\{\varepsilon > 0 : K \subset L(\varepsilon), L \subset K(\varepsilon)\},$$

где $U(\varepsilon) := \{m \in M : \operatorname{dist}(m, U) < \varepsilon\}$ — обкатка множества U открытым шаром радиуса ε.

Известно, что d_H определяет метрику на множестве всех компактов в M. Легко проверяется также следующее утверждение.

Если в метрическом пространстве M все замкнутые шары компактны, то последовательность компактов $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в M сходится к компакту K в метрике Хаусдорфа в том и только в том случае, когда выполнены следующие два условия:

(1) *для любого $x \in K$ существует последовательность $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к x, такая что для всех $m \in \mathbb{N}$ $x_{n_m} \in K_{n_m}$;*

(2) *если последовательность $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$, где $x_{n_m} \in K_{n_m}$ для всех $m \in \mathbb{N}$, сходится к $x \in M$, то $x \in K$.*

Ниже будет показано, что если дискретная сходимость A_n к A равномерна, то последовательность спектров операторов A_n сходится к спектру оператора A. Следующий простой пример показывает, что в общем случае дискретной сходимости операторов A_n сходимость спектров, вообще говоря, не имеет места.

6.2.5. Пример. Пусть $X := l_2$, $X_n := \mathbb{C}^n$, а T_n — оператор проектирования на первые n компонент. Ясно, что $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность дискретных приближений X. Пусть λ_n — ограниченная последовательность в $\mathbb{C}$. Рассмотрим оператор $A : l_2 \to l_2$, который определяется следующим образом. Пусть $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2$.

Тогда $(A\alpha)_n := \lambda_n \cdot \alpha_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что в этом случае $\Lambda := \sigma(A) = \mathrm{cl}(\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\})$. Возьмем произвольную точку $\lambda \in \mathbb{C}$, для которой $\mathrm{dist}(\lambda, \Lambda) > 0$ и рассмотрим последовательность операторов $A_n : X_n \to X_n$ такую, что при любом $n \in \mathbb{N}$ будет

$$A_n((x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)) = (\lambda_1 \cdot x_1, \lambda_2 \cdot x_2, \dots, \lambda_{n-1} \cdot x_{n-1}, \lambda \cdot x_n).$$

Поскольку $A_n T_n(\alpha) - T_n A(\alpha) = (0, 0, \dots, 0, (\lambda - 1)\alpha_n)$, а $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, последовательность A_n дискретно сходится к A. С другой стороны, легко видеть, что $\sigma(A_n) \to \Lambda \cup \{\lambda\}$ при $n \to \infty$ в метрике Хаусдорфа.

6.2.6. Пусть Ξ — гиперконечномерное евклидово пространство, а Λ — нормальный оператор в Ξ. Согласно 6.1.10 $\sigma(\Lambda^{\#}) = \{{}^{\circ}\lambda \mid \lambda \in \sigma(\Lambda)\}$ и этот спектр является дискретным, т. е. совпадает с точечным спектром $\sigma_p(\Lambda^{\#})$ оператора $\Lambda^{\#}$ или, иначе говоря, состоит только из собственных векторов оператора $\Lambda^{\#}$.

Если Λ — гипераппроксимация нормального оператора A, то из коммутативности диаграммы 6.2.3 (1) немедленно следует, что $\sigma(A) \subseteq \sigma(\Lambda^{\#})$. Используя критерий 6.2.3 (2) дискретной сходимости операторов, легко получить, что первое из двух условий 6.2.4 сходимости в метрике Хаусдорфа для случая сходимости спектров дискретно сходящихся нормальных операторов выполняется всегда.

Если равномерно ограниченная последовательность нормальных конечномерных операторов $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дискретно сходится к нормальному оператору A, то для любого $\lambda \in \sigma(A)$ существует последовательность $(\lambda_{n_k} \in \sigma(A_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к λ.

$\lhd$ Пусть $\lambda \in \sigma(A)$. В силу критерия 6.2.3 (2) при любом $N \in {}^*N \setminus \mathbb{N}$ оператор A_N является гипераппроксимацией A. Следовательно, $\sigma(A) \subseteq \sigma(\mathscr{A})$ и в силу 6.1.10 существует $\lambda_N \in \sigma(A_N)$, такое что $\lambda_N \approx \lambda$. Таким образом при любом бесконечно большом N выполняется условие $\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(A_N)) \approx 0$. А это значит, что для любого стандартного $\varepsilon > 0$ множество $\{n \in {}^*\mathbb{N} : \mathrm{dist}(\lambda, \sigma(A_n) < \varepsilon\}$ содержит все бесконечно большие числа. Отсюда в силу 3.5.11(3) следует, что $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(A_n)) < \varepsilon)$, откуда немедленно следует доказываемое утверждение. $\rhd$

Как показывает пример 6.2.5, второе из условий 6.2.4 сходимости в метрике Хаусдорфа спектров дискретно сходящейся последовательности операторов выполняется не всегда даже в случае операторов Гильберта — Шмидта (достаточно взять в примере 6.2.5 последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, такую что $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 < \infty$).

6.2.7. Определение квазикомпактности приобретает естественную стандартную версию, поскольку условие в определении 6.2.6 выполняется для каждого бесконечно большого натурального N. Тогда обычные в нестандартном анализе рассуждения позволяют доказать следующее ниже предложение, справедливое для произвольных параметров.

Обозначим символом B_N единичный шар пространства X_N, сохранив символ $B_N(\varepsilon, x)$ за шаром пространства X_N с центром в точке x и радиуса ε.

Если $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — сильное дискретное приближение, то последовательность операторов (A_n) квазикомпактна в том и только в том случае, если справедлива следующая формула:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists^{\mathrm{fin}} B \subset X)(\exists n_0)(\forall N > n_0)\Big((A_N(B_N)) \subset \bigcup_{y\in B} B_N(\varepsilon, T_N y)\Big).$$

$\lhd$ $\leftarrow$: Зафиксируем произвольное стандартное $\varepsilon > 0$. По принципу переноса для любого бесконечно большого N имеет место включение:

$$A_N(B_N) \subset \bigcup_{y\in B} B_N(\varepsilon, T_N y).$$

Возьмем $x \in B_N$. Из указанного включения следует, что для любого стандартного $n \in \mathbb{N}$ существует стандартный элемент y_n из X такой, что $\|A_N x - T_N y_n\|_N < n^{-1}$. Так как $\|T_N y_n - T_N y_m\|_N \approx \|y_n - y_m\|$ для произвольных стандартных n и m, то $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность Коши в X. Следовательно, (y_n) сходится к некоторому стандартному элементу $y \in X$. Как видно, $\|A_N x - T_N y\| \approx 0$.

$\rightarrow$: Предположим, что проверяемая формула не выполняется. Переходя в ней к отрицаниям, получаем

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall^{\mathrm{fin}} B \subset X)(\forall n_0)(\exists N > n_0)$$
$$\Big((A_N(B_N)) \not\subset \bigcup_{y\in B} B_N(\varepsilon, T_N y)\Big).$$

Возьмем стандартное $\varepsilon_0 > 0$, удовлетворяющее последней формуле. Рассмотрим гиперконечное множество $B \subset {}^*X$ такое, что $X \subset B$. Применив принцип переноса к выписанной выше формуле, найдем такое бесконечно большое N, что

$$A_N(B_N) \not\subset \bigcup_{y\in B} B_N(\varepsilon, T_N y).$$

Итак, имеется x из B_N, расстояние от которого до любого элемента вида $T_N y$ со стандартным y, не меньше, чем стандартное число ε_0. Это доказывает, что для найденного N не выполняется условие определения квазикомпактности в 6.2.6. $\triangleright$

6.2.8. *Теорема.* *Пусть A — компактный эрмитов оператор в гильбертовом пространстве X, а $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — дискретное приближение X. Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — квазикомпактная последовательность эрмитовых операторов $A_n : X_n \to X_n$, дискретно сходящаяся к A. Тогда справедливы утверждения:*

(1) *спектр $\sigma(A)$ совпадает с множеством неизолированных предельных точек множества $\bigcup_n \sigma(A_n)$;*

(2) *если $0 \neq \lambda \in \sigma(A)$ и J — окрестность λ, не содержащая других точек спектра $\sigma(A)$, то λ — единственная неизолированная предельная точка множества $J \cap \bigcup_n \sigma(A_n)$;*

(3) *если в условиях (2) $M_n^\lambda := \sum_{\nu\in\sigma(A_n)\cap J} A_n^{(\nu)}$, то для достаточно больших n будет $\dim(M_n^\lambda) = \dim(A^{(\lambda)}) = s$, и при этом существует последовательность ортонормальных базисов $(f_1^n, \dots, f_s^n)$ в M_n^λ, дискретно сходящаяся к ортонормальному базису $(f_1, \dots, f_s)$ в $A^{(\lambda)}$.*

$\triangleleft$ Это стандартная переформулировка 6.2.4 и 6.2.5. $\triangleright$

Разумеется, приведенные рассуждения не проходят для неограниченного самосопряженного оператора A, так как в этом случае для последовательности (A_n), дискретно сходящейся к A, норма оператора A_N будет бесконечно большим числом, и возникают проблемы уже с определением $A_N^\#$ (см. [381]). Однако для этого случая можно использовать несколько измененные результаты о сильной резольвентной сходимости (ср., например, [200, теорема VIII.19], а также [314, теорема 5.7.6]). Отметим здесь же, что все используемые нами понятия и факты теории неограниченных операторов можно найти в [200, глава 8].

Если $\lambda \notin \sigma(A)$, то соответствующее значение резольвенты обозначим символом $R_\lambda(A) := (\lambda - A)^{-1} := (\lambda 1 - A)^{-1}$, где, как обычно, 1 обозначает тождественный оператор I_X на пространстве X, играющий роль единицы в алгебре эндоморфизмов X.

6.2.9. *Если A — самосопряженный оператор и область приближения $DAp(A)$ оператора A последовательностью (A_n) является существенной областью A, то для всякого λ такого,что $\lambda \notin \mathrm{cl}(\sigma(A) \cup \bigcup_n \sigma(A_n))$, последовательность $(R_\lambda(A_n))$ дискретно сходится к оператору $R_\lambda(A)$.*

$\lhd$ Сначала докажем требуемое для значений $\lambda := \pm i$, которые, как очевидно, удовлетворяют нашим предположениям. Рассмотрим лишь случай $\lambda := -i$; случай $\lambda := i$ разбирается совершенно аналогично. По определению нужно лишь обосновать равенство 6.2.1 (2) для $R_{-i}(A)$ и $R_{-i}(A_n)$ при некотором плотном подмножестве $Y \subset X$. Положим $Y := \{(A+i)\varphi : \varphi \in DAp(A)\}$. Тогда Y плотно в X, так как $DAp(A)$ — существенная область оператора A. Зафиксируем бесконечно большое натуральное число N. Тогда

$$((A+i)^{-1} - (A_N+i)^{-1})(A+i)\varphi = (A_N+i)^{-1}(A_N - A)\varphi.$$

Поскольку $\varphi \in DAp(A)$, то $(A_N - A)\varphi \approx 0$. Взяв подмножество B на вещественной оси $\mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, обозначим символом $\rho(\lambda, B)$ расстояние между λ и B на плоскости $\mathbb{C}$. Пусть $S := \mathrm{cl}(\sigma(A) \cup \bigcup_n \sigma(A_n))$. Если λ удовлетворяет условиям сформулированного предложения, то $\rho(\lambda, S) > 0$. В силу принципа переноса будет

$$\|(A_N+i)^{-1}\| = \rho(\lambda, \sigma(A_N))^{-1} \le \rho(\lambda, S)^{-1} \ll +\infty.$$

Таким образом, $R_{-i}(A_N)(A+i)\varphi \approx R_{-i}(A)(A+i)\varphi$, что доказывает дискретную сходимость $R_{-i}(A_n)$ к $R_{-i}(A)$.

Докажем теперь, что если утверждение предложения имеет место для некоторого λ_0, удовлетворяющего условию $\lambda \notin S$, то оно выполняется и для любого такого λ, что $|\lambda - \lambda_0| < \rho(\lambda_0, S)$. Понятно, что из этого факта вытекает требуемое, так как каждое $\lambda \notin S$ можно соединить или с i, или с $-i$ гладкой кривой, лежащей целиком в $\mathbb{C} - S$, следовательно, можно подобраться к λ из i или $-i$ конечным числом кругов радиуса меньше, чем $\rho(\lambda, S)$.

Функции $R_\lambda(A_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ и $R_\lambda(A)$ аналитичны в открытом круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \rho(\lambda_0, S)\}$ и разлагаются в следующие равномерно сходящиеся ряды:

(1) $R_\lambda(A) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^m R_{\lambda_0}^{m+1}(A)$,

(2) $R_\lambda(A_n) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^m R_{\lambda_0}^{m+1}(A_n)$.

Докажем, что для произвольного бесконечно большого числа N и любого стандартного элемента $f \in Y$ выполняется $T_N R_\lambda(A) f \approx R_\lambda(A_N) T_N f$. Так как последнее верно для λ_0, то для любого стандартного $k \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение

(3) $\sum\limits_{m=0}^{k} (\lambda - \lambda_0)^m T_N R_{\lambda_0}^{m+1}(A) f \approx \sum\limits_{m=0}^{k} (\lambda - \lambda_0)^m R_{\lambda_0}^{m+1}(A_N) T_N f$.

Возьмем произвольное стандартное $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (1) и (2) существует номер n_0 такой, что при $k > n_0$ будет

$$\left\| R_\lambda(A) f - \sum_{m=0}^{k} (\lambda - \lambda_0)^m R_{\lambda_0}^{m+1}(A) f \right\| < \varepsilon.$$

Обозначим буквой h функцию в левой части последнего неравенства. Так как h стандартна, то $\|T_N h\| \approx \|h\|$. Отсюда вытекает неравенство

(4) $\left\| T_N R_\lambda(A) f - \sum\limits_{m=0}^{k} (\lambda - \lambda_0)^m T_N R_{\lambda_0}^{m+1}(A) f \right\|_N \leq \varepsilon$.

Покажем, что сходимость рядов в (2) равномерна по n. Имеем

$$\|R_{\lambda_0}(A_n)\| = \max_{\nu} \{\nu : \nu \in \sigma(A_n)\} = \rho(\lambda_0, \sigma(A_n))^{-1} \leq \rho(\lambda_0, S)^{-1}.$$

Тем самым $q := |\lambda - \lambda_0| \cdot \|R_{\lambda_0}(A_n)\| < 1$, откуда выводим

$$\left\| \sum_{m=k+1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^m R_{\lambda_0}^{m+1}(A_n) \right\| \leq \frac{\rho(\lambda_0, S)^{-1} \cdot q^{k+1}}{1 - q} \to 0$$

при $k \to \infty$. Далее, так как число $\|T_N f\|_N$ доступно (вследствие соотношения $T_N f \approx f$), то найдется номер n_1, для которого

$$(5)\ \left\| R_\lambda(A_n)T_N f - \sum_{m=0}^{k} (\lambda-\lambda_0)^m R_{\lambda_0}^{m+1}(A_N)T_N f \right\|_N < \varepsilon$$

при всех $k > n_1$.

Как видно, для стандартного номера $k > \max\{n_0, n_1\}$ из (3), (4) и (5) получаем $\|T_N R_\lambda(A) f - R_\lambda(A_N)T_N f\|_N \leq 2\varepsilon$. Произвол в выборе стандартного $\varepsilon > 0$ приводит к требуемому. $\triangleright$

6.2.10. Следующее предложение является простым следствием установленного в предыдущем пункте факта.

Если в условиях предложения 6.2.9 *резольвенты самосопряженных операторов A_n компактны и для некоторого вещественного числа $\lambda \notin \mathrm{cl}(\sigma(A) \cup \bigcup_n \sigma(A_n))$ последовательность $(R_\lambda(A))$ квазикомпактна, то выполняются утверждения* 6.2.8 (1)–(3).

6.2.11. Если $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ служит сильным дискретным приближением и удовлетворяет условию 6.2.6 (1), то ввиду предложения 6.2.6 (2) квазикомпактность последовательности резольвент следует из ее равномерной сходимости. Достаточное условие равномерной сходимости резольвент дается следующим предложением (ср. [200, теорема 8.25]).

Допустим, что в условиях предложения 6.2.9 *сильное дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию* 6.2.6 (1) *и для некоторой существенной области $D \subset DAp(A)$ оператора A выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\varphi\in D, \|\varphi\|_A=1} \|(T_n A - A_n T_n)\varphi\|_n = 0,$$

где $\|\varphi\|_A := \|A\varphi\| + \|\varphi\|$. Тогда последовательность $(R_\lambda(A_n))$ сходится к $R_\lambda(A)$ равномерно.

6.2.12. Примечания.

(1) Материал, представленный в этом параграфе, взят из статьи С. Альбеверио, Е. И. Гордона и А. Ю. Хренникова [245]. Определения, данные в 6.2.1, являются специальными случаями понятия дискретной сходимости, восходящей к Штуммелю [494, 495]. Аспекты этого понятия обсуждаются в книге [456]. В частности, в [456, параграф 7.3] введено понятие *дискретной компактности*, которое в некоторых случаях эквивалентно квазикомпактности.

(2) Дискретное приближение при $Y = X$ используется также в [298], где пространства X_n функций на конечной сетке вложены в $L_2(\mathbb{R}^n)$ как подпространства ступенчатых функций, а в качестве линейных операторов T_n взяты ортопроекторы на эти подпространства. Заметим, что в этом случае $T_n f$ отличается от таблицы значений f даже для непрерывной функции f. Однако для гладкой функции f разность между $T_n f$ и таблицей значений f сходится к нулю. Возникающая при этом возможность рассматривать операторы A_n как операторы, действующие в X (в этом случае $X = L_2(\mathbb{R}^n)$), существенно упрощает исследование сходимости спектра. Ключевым при этом оказывается понятие *равномерной компактности* последовательности операторов (A_n), означающее относительную компактность множества $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n(U)$, где U — единичный шар в $L_2(\mathbb{R}^n)$, см. [298]. Это понятие было введено в [251].

(3) Мы рассмотрели здесь только случай самосопряженных операторов с дискретным спектром и компактными резольвентами. Однако представляется, что развиваемый подход может оказаться полезным и в более общей ситуации. Некоторые результаты о сходимости спектров операторов A_n, дискретно сходящихся к оператору A в случае банаховых пространств, но в предположении $Y = X$ (см. определения из 6.2.1) были получены Рабигером и Вольфом [454, 455], которые также использовали нестандартные методы. Для самосопряженных интегральных операторов на компактных группах такой подход использовал Е. И. Гордон в [325].

(4) В доказательстве 6.2.7 мы использовали $|X|^+$-насыщенность, т. е. соответствующий вариант принципа направленности. Легко видеть, что для сепарабельного X достаточно использовать ω_1-насыщенность нестандартного универсума.

(5) Понятие квазикомпактности из 6.2.6 стоит сравнить с понятием компактности последовательности (A_n), использованным в [298]. Как уже отмечалось в 6.2.6, в [298] предполагается существование сохраняющих норму вложений $\imath_n : X_n \to X$ и $T_n := \imath_n^{-1} \circ p_n$, где $p_n : X \to \imath_n(X_n)$ — ортопроектор. В этой ситуации оператор A_n можно отождествить с оператором $\bar{A}_n := \imath_n A_n T_n$, действующим в X. Согласно [298] последовательность (A_n) *компактна*, если множество $\bigcup_n \bar{A}_n(B)$, где B — единичный шар в X, относительно компактно. Легко видеть, что компактность последовательности (A_n) в смысле [298] влечет ее квазикомпактность. Действительно, если $x \in B_N$ для всех недоступных $N \in {}^*\mathbb{N}$, то $\imath_N(x) \in B$ и $\bar{A}_N \imath_N x = \imath_N A_N x \approx y$ для некоторого стандартного $y \in X$ ввиду компактности в смысле [298] и теоремы 4.3.6.

6.3. Меры Лёба

Одной из наиболее полезных конструкций инфинитезимального анализа является мера Лёба, нашедшая применение в ряде разделов функционального анализа, теории вероятностей и стохастическом моделировании, см. [5, 285]. В этом параграфе приводятся начальные сведения о мерах Лёба.

6.3.1. Пусть $(X, \mathscr{A}, \nu)$ — внутреннее пространство с конечно-аддитивной положительной мерой. Точнее, пусть $\mathscr{A}$ — внутренняя алгебра подмножеств внутреннего множества X и $\nu : \mathscr{A} \to {}^*\mathbb{R}$ — внутренняя конечно-аддитивная положительная функция. Это означает, в частности, что $\mathscr{A} \subset {}^*\mathscr{P}(X)$. Кроме того, для гиперконечного набора множеств $\{A_1, \dots, A_\Omega\}$, где $\Omega \in {}^*\mathbb{N}$, будет $\bigcup_{k=1}^{\Omega} A_k \in \mathscr{A}$, а если A_k попарно не пересекаются, то

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\Omega} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\Omega} \nu(A_k).$$

Объединение гиперконечной совокупности множеств определяется так же, как и сумма гиперконечного множества в 6.1.3. Если $f : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(X)$ — последовательность в $\mathscr{P}(X)$, то новая последовательность $g : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(X)$ возникает по рекурсии:

$$\mathrm{Seq}(f) \wedge \mathrm{Seq}(g) \wedge f(0) = g(0) \wedge (\forall k \in \mathbb{N})(g(k+1) = g(k) \cup f(k+1)).$$

Сокращенно эту формулу мы обозначим символом $\bigcup(f, g)$. Возьмем теперь гиперконечное множество $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$ и положим $\Omega := |\mathscr{A}_0|$. Зафиксируем какую-нибудь биекцию $f : \{0, \dots, \Omega - 1\} \to \mathscr{A}_0$ и продолжим ее до внутренней последовательности $f : {}^*\mathbb{N} \to \mathscr{A}$, считая f нулем при $n > \Omega - 1$. Определим последовательность $g : {}^*\mathbb{N} \to \mathscr{A}$ формулой $\bigcup(f, g)$. В силу принципа переноса $g(\Omega - 1)$ не зависит от выбора внутренней биекции f, стало быть, корректно следующее определение: $\bigcup_{A \in \mathscr{A}_0} A := g(\Omega - 1)$. В соответствии с принципом переноса заданное таким образом объединение гиперконечного множества обладает всеми свойствами обычного конечного объединения.

Рассмотрим внешнюю функцию

$$°\nu : A \mapsto °(\nu(A)) \in \mathbb{R}^{\bullet} \quad (A \in \mathscr{A}),$$

где, как обычно, $°(\nu(A))$ — стандартная часть $\nu(A)$, если $\nu(A)$ доступно и $°(\nu(A)) = +\infty$ в противном случае. Легко видеть, что функция $°\nu$ конечно-аддитивна.

6.3.2. Мера Лёба возникает как счетно-аддитивное продолжение $°\nu$ на внешнюю σ-алгебру $\sigma(\mathscr{A})$, порожденную алгеброй $\mathscr{A}$. Такое продолжение, как будет показано ниже в 6.3.4, выводится из теоремы Лебега — Каратеодори, но единственность продолжения требует несколько вспомогательных фактов, играющих техническую роль.

(1) *Пусть $\mathscr{A}_0$ — счетная подалгебра алгебры $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}_0$ — полная алгебра подмножеств X (т. е. полная подалгебра в $\mathscr{P}(X)$), порожденная $\mathscr{A}_0$. Если $S \subset X$ и для любого $A \in \mathscr{A}_0$ либо $S \subset A$, либо $S \cap A = \varnothing$, то для любого $B \in \mathscr{B}_0$ либо $S \subset B$, либо $S \cap B = \varnothing$.*

$\triangleleft$ Множество $P \subset X$ назовем отмеченным, если оно представимо в виде $P := \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, где $(B_n) \subset \mathscr{A}_0$ и для каждого множества $\mathscr{A}_0$ либо оно само, либо его дополнение совпадает с одним из B_k. Пусть $\mathscr{P}$ — совокупность всех отмеченных подмножеств X. Легко видеть, что множества из $\mathscr{P}$ попарно не пересекаются и $\bigcup \mathscr{P} = X$, т. е. $\mathscr{P}$ — разбиение множества X. Из определения отмеченного множества видно, что для $P \in \mathscr{P}$ и $A \in \mathscr{A}_0$ выполняется одно из соотношений $P \subset A$ и $P \cap A = \varnothing$. Следовательно, $A = \bigcup\{P \in \mathscr{P} : P \subset A\}$ для каждого $A \in \mathscr{A}_0$. Заметим далее, что алгебра $\mathscr{B}_0$ состоит в точности из множеств $B \subset X$ вида $B := \bigcup \mathscr{P}'$, где $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$.

Возьмем теперь такое множество $S \subset X$, что для каждого $A \in \mathscr{A}_0$ либо $S \subset A$, либо $S \cap A = \varnothing$. Тогда последовательность (B_k) всех элементов из $\mathscr{A}_0$, содержащих S, такова, что $P := \bigcap B_k$ входит в $\mathscr{P}$. Так как $S \subset P$, то для $B \in \mathscr{B}_0$ в силу уже доказанного возможны лишь два случая: либо $P \subset B$ и тогда $S \subset B$, либо $P \cap B = \varnothing$ и тогда $S \cap B = \varnothing$. $\triangleright$

Обозначим символом $c(\mathscr{A})$ совокупность всех множеств $S \subset X$, удовлетворяющих следующему условию: существует счетная подалгебра $\mathscr{A}_0$ алгебры $\mathscr{A}$ такая, что S содержится в полной алгебре подмножеств X, порожденной $\mathscr{A}_0$ (т. е. в полной подалгебре булеана

$\mathscr{P}(X)$). В этом случае говорят, что множество S порождается алгеброй $\mathscr{A}_0$. Следующее утверждение легко выводится из определений.

(2) *Множество $c(\mathscr{A})$ представляет собой σ-алгебру, причем $\sigma(\mathscr{A}) \subset c(\mathscr{A})$.*

6.3.3. *Для любого множества $S \in c(\mathscr{A})$ имеет место, и притом только одно из следующих утверждений:*

(1) *существует элемент $A \in \mathscr{A}$ такой, что $A \subset S$ и $\nu(A)$ — бесконечно большое число;*

(2) *существует последовательность $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ такая, что $S \subset \bigcup_k A_k$ и число $\nu(A_k)$ доступно для всех $k \in \mathbb{N}$.*

$\lhd$ Пусть множество $S \in c(\mathscr{A}_0)$ порождается счетной подалгеброй $\mathscr{A}_0$ алгебры $\mathscr{A}$. Положим $\mathscr{A}_0' := \{A \in \mathscr{A}_0 : |\nu(A)| \ll +\infty\}$. Если $S \subset \bigcup \mathscr{A}_0'$, то выполняется (2). В противном случае возьмем $p \in S - \bigcup \mathscr{A}_0'$. Рассмотрим счетное множество $\mathscr{A}_0'' := \{A \in \mathscr{A}_0 : p \in A\}$ и заметим, что оно замкнуто относительно конечных пересечений и состоит из множеств с бесконечно большой мерой. Пусть $A(n,B) := \{A \in \mathscr{A} : p \in A \subset B, \nu(A) \geq n\}$. В силу указанных свойств множества $\mathscr{A}_0''$ множество $\{A(n,B) : n \in \mathbb{N}, B \in \mathscr{A}_0''\}$ замкнуто относительно конечных пересечений. Согласно принципу насыщения существует множество $A \in \mathscr{A}$ такое, что $A \in A(n,B)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $B \in \mathscr{A}_0''$. Таким образом, $\nu(A)$ — бесконечно большое число, $p \in A$ и $A \subset B$ для всех $B \in \mathscr{A}_0''$. Допустим, что некоторое множество $C \in \mathscr{A}_0$ не содержит A. Тогда $p \notin C$ или $p \in X - C$, значит, $X - C \in \mathscr{A}_0''$ и поэтому $A \subset X - C$. Итак, для любого $C \in \mathscr{A}_0$ либо $A \subset C$, либо $A \cap C = \varnothing$. Так как S порождается алгеброй $\mathscr{A}_0$, то либо $A \subset S$, либо $A \cap S = \varnothing$ согласно 6.3.2 (1). Так как $p \in A \cap S$, то должно быть $A \subset S$, стало быть, выполняется (1).

Предположим, что выполнены оба условия (1) и (2). Тогда $A \subset \bigcup_k A_k$, причем $\nu(A)$ — бесконечно большое число, а величины $\nu(A_k)$ доступны. В силу принципа насыщения $A \subset A_1 \cup \ldots \cup A_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Это, однако, невозможно, так как приводит к противоречивому неравенству $\nu(A) \leq \nu(A_1) + \ldots + \nu(A_n)$. $\rhd$

6.3.4. *Теорема.* *Конечно-аддитивная мера ${}^\circ\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^\bullet$ обладает единственным счетно-аддитивным распространением λ на внешнюю σ-алгебру $\sigma(\mathscr{A})$, порожденную алгеброй $\mathscr{A}$. Более того, справедливы следующие утверждения:*

(1) $\lambda(B) = \inf\{{}^\circ\nu(A) : B \subset A, A \in \mathscr{A}\} \quad (B \in \sigma(\mathscr{A}))$;

(2) *если* $\lambda(B) < +\infty$ *для некоторого* $B \in \sigma(\mathscr{A})$, *то*

$$\lambda(B) = \sup\{{}^{\circ}\nu(A) : A \subset B, A \in \mathscr{A}\};$$

(3) *если* $\lambda(B) < +\infty$ *для некоторого* $B \in \sigma(\mathscr{A})$, *то существует* $A \in \mathscr{A}$ *такое, что* $\lambda(A \triangle B) = 0$;

(4) *для произвольного* $B \in \sigma(\mathscr{A})$ *либо существует* $A \in \mathscr{A}$ *такое, что* $A \subset B$ *и* ${}^{\circ}\nu(A) = +\infty$, *либо существует последовательность* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *множеств из* $\mathscr{A}$, *такая, что* $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *и* ${}^{\circ}\nu(A_n) < +\infty$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

$\triangleleft$ Существование меры λ следует из теоремы Лебега — Каратеодори о продолжении меры. Условие применимости этой теоремы выполняется тривиальным образом.

В самом деле, возьмем возрастающую последовательность множеств $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в $\mathscr{A}$ и предположим, что множество $A := \bigcup_k A_k$ содержится в $\mathscr{A}$. В силу принципа насыщения $A = A_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, следовательно, ${}^{\circ}\nu(A_k) \to {}^{\circ}\nu(A)$. Докажем теперь утверждения (1)–(3) и единственность продолжения.

Возьмем $B \in \sigma(\mathscr{A})$. Процедура продолжения Лебега — Каратеодори гарантирует, в частности, что для каждого $B \in \sigma(\mathscr{A})$ имеет место формула

$$\lambda(B) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ}\nu(A_k) : A_k \in \mathscr{A} (k \in \mathbb{N}), B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\}.$$

Следовательно, для любого $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ существует последовательность внутренних множеств $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, для которой $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ}\nu(A_k) < \lambda(B) + \varepsilon/2$. Так как $\nu(A_k) < {}^{\circ}\nu(A_k) + \varepsilon/2^{k+1}$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то для произвольного $n \in \mathbb{N}$ можно написать

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ}\nu(A_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^{k+1} < \lambda(B) + \varepsilon.$$

Достроим $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ до внутренней последовательности $(A_k)_{k\in{}^*\mathbb{N}}$, используя принцип продолжения 3.5.11 (1). Рассмотрим внутреннее множество $\{n \in {}^*\mathbb{N} : \nu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) < \lambda(B) + \varepsilon\}$. Так как это множество содержит все стандартные натуральные числа, то по принципу переполнения содержит и некоторое бесконечно большое гипернатуральное число Ω. Положим $A_\Omega := \bigcup_{k=1}^{\Omega} A_k$. Тогда по определению будет $B \subset A_\Omega$ и $\nu(A_\Omega) < \lambda(B) + \varepsilon$, значит, ${}^\circ\nu(A_\Omega) \leq \lambda(B) + \varepsilon$. Тем самым обосновано (1).

Допустим, что $\lambda(B) < +\infty$. В силу доказанного можно подобрать внутреннее множество $C \in \mathscr{A}$ так, что $B \subset C$ и $\nu(C)$ конечно. Тогда утверждение (2) получается применением (1) к множеству $C - B$. Далее, пусть $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность в $\mathscr{A}$, причем $A_k \subset B$ и $|\nu(A_k) - \lambda(B)| < 1/k$. Продолжим эту последовательность до внутренней возрастающей последовательности $(A_k)_{k\in{}^*\mathbb{N}}$ с теми же свойствами и в силу принципа переполненности подберем такое недоступное гипернатуральное число $\Omega \in {}^*\mathbb{N}$, что $|\nu(A_\Omega) - \lambda(B)| < 1/\Omega$. Тогда $\lambda(B) = {}^\circ\nu(A_\Omega)$ и легко видеть, что $\lambda(A_\Omega \triangle B) = 0$. Утверждение (4) вытекает непосредственно из 6.3.3.

Остается доказать единственность. Предположим, что λ_1 и λ_2 — два σ-аддитивных продолжения меры ${}^\circ\nu$ на $\sigma(\mathscr{A})$. Так как $\sigma(\mathscr{A}) \subset c(A)$, то к множеству $S \in \sigma(\mathscr{A})$ можно применить 6.3.3. Если выполнено 6.3.3 (1), то существует такое $A \in \mathscr{A}$, что $A \subset S$ и ${}^\circ\nu(A) = \infty$, поэтому $\lambda_\jmath(S) = \infty$ для $\jmath := 1, 2$. Если же выполняется 6.3.3 (2), то существует последовательность $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в $\mathscr{A}$ такая, что $S \subset \bigcup_k A_k$ и $\nu(A_k)$ доступно для каждого $k \in \mathbb{N}$. Можно считать без ограничения общности, что эта последовательность возрастает. По установленной уже формуле 6.3.4 (1)

$$\lambda_\jmath(S \cap A_k) = \inf\{{}^\circ\nu(A) : A \in \mathscr{A}, S \cap A_k \subset A \subset A_k\} \quad (\jmath := 1, 2).$$

Отсюда видно, в частности, что $\lambda_1(S \cap A_k) = \lambda(S \cap A_k)$ для $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $S = \bigcup_k (S \cap A_k)$ и последовательность $(S \cap A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ возрастает, то $\lambda_1(S) = \lambda_2(S)$. Тем самым λ_1 и λ_2 совпадают на $\sigma(\mathscr{A})$. $\triangleright$

6.3.5. Пусть $S(\mathscr{A})$ — пополнение $\sigma(\mathscr{A})$ относительно меры λ, а ν_L — продолжение λ на $S(\mathscr{A})$. Можно показать, что если $\nu_L(X) < +\infty$, то $B \in S(\mathscr{A})$ в том и только в том случае, когда

$$\sup\{{}^\circ\nu(A) : A \subset B, A \in \mathscr{A}\} = \inf\{{}^\circ\nu(A) : B \subset A, A \in \mathscr{A}\} = \nu_L(B).$$

Набор $(X, S(\mathscr{A}), \nu_L)$, представляющий собой пространство с σ-аддитивной мерой ν_L, называют *пространством Лёба* (для $(X, \mathscr{A}, \nu)$), а меру ν_L — *мерой Лёба* (отвечающей ν).

Функцию $f : X \to {}^*\overline{\mathbb{R}}$ называют *измеримой по Лёбу*, если она измерима относительно σ-алгебры $S(\mathscr{A})$. Внутреннюю функция $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ именуют $\mathscr{A}$*-измеримой*, если $\{x \in X : F(x) \leq t\} \in \mathscr{A}$ при всех $t \in {}^*\mathbb{R}$. Внутренняя $\mathscr{A}$-измеримая функция $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ — это *лифтинг* функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, если $f(x) = {}^\circ F(x)$ для ν_L-почти всех $x \in X$.

6.3.6. Теорема. *Функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима по Лёбу тогда и только тогда, когда f имеет лифтинг.*

$\lhd$ $\leftarrow$: Возьмем $\mathscr{A}$-измеримую внутреннюю функцию $F : X \to {}^*\mathbb{R}$. Для произвольного стандартного числа $r \in \mathbb{R}$ будет

$$\{x \in X : {}^\circ F(x) \leq r\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{x \in X : F(x) \leq r + 1/k\} \in \sigma(\mathscr{A}),$$

следовательно, функция ${}^\circ F$ измерима по Лёбу. Если $f(x) = {}^\circ F(x)$ ν_L-почти всюду, то f также измерима по Лёбу.

$\to$: Пусть теперь f измерима по Лёбу. Возьмем какую-нибудь нумерацию $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ множества всех стандартных рациональных чисел: $\mathbb{Q} = \{q_k : k \in \mathbb{N}\}$. Положим $B_k := \{x \in X : f(x) \leq q_k\}$. Подберем внутренние множества $A_k \in \mathscr{A}$ так, чтобы $\nu_L(A_k \triangle B_k) = 0$ и $A_k \subset A_l$ при $q_k \leq q_l$. Пользуясь вновь принципами продолжения и переполненности, найдем бесконечно большое натуральное число Ω такое, что $A_k \in \mathscr{A}$ и $q_k \leq q_l$ влечет $A_k \subset A_l$ при всех $k, l \leq \Omega$. Определим теперь внутреннюю $\mathscr{A}$-измеримую функцию $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ с гиперконечным множеством значений $\{q_1, \ldots, q_\Omega\}$ тем условием, что соотношения $F(x) \leq q_k$ и $x \in A_k$ равносильны. Точнее, если указанное гиперконечное множество перенумеровать в порядке возрастания $q_{k_1} < q_{k_2} < \ldots < q_{k_\Omega}$, то можно положить

$$F(x) := \begin{cases} q_{k_1}, & \text{если } x \in A_{k_1}, \\ q_{k_l}, & \text{если } x \in A_{k_l} - A_{k_{l-1}} \quad (1 < l \leq \Omega), \\ q_{k_\Omega + 1}, & \text{если } x \notin A_{k_\Omega}. \end{cases}$$

Как видно, для любого $k \in \mathbb{N}$ соотношения $F(x) \leq q_k$ и $f(x) \leq q_k$ равносильны при всех $x \notin D := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \triangle B_k$. Так как $\nu_L(D) = 0$, то ${}^\circ F(x) = f(x)$ для ν_L-почти всех $x \in X$. $\rhd$

6.3.7. Внутреннюю функцию F называют *простой*, если множество ее значений $\operatorname{im}(F)$ есть гиперконечное множество. Как видно из доказательства теоремы 6.3.6, всякая измеримая по Лёбу функция имеет лифтинг, являющийся простой функцией. Очевидно, простая внутренняя функция F является $\mathscr{A}$-измеримой тогда и только тогда, когда $F^{-1}(\{t\}) \in \mathscr{A}$ для любого $t \in {}^*\mathbb{R}$. В этом случае для F определен внутренний интеграл

$$\int\limits_X F\,d\nu = \sum_{t\in\operatorname{im}(F)} F(t)\nu(F^{-1}(\{t\})).$$

Если $A \in \mathscr{A}$, то, как обычно, $\int_A F\,d\nu = \int_X F \cdot \chi_A\,d\nu$, где χ_A — характеристическая функция множества A.

Обозначим $A_N := \{x \in X : |F(x)| \geq N\}$. Внутреннюю простую $\mathscr{A}$-измеримую функцию $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ называют *$\mathscr{S}$-интегрируемой*, если $\int_{A_N} F\,d\nu \approx 0$ для любого бесконечно большого N. Можно показать, что каждое из следующих условий равносильно $\mathscr{S}$-интегрируемости функции F:

(1) $\int_X F\,d\nu$ — это доступное гипердействительное число и $\int_A F\,d\nu \approx 0$, как только $A \in \mathscr{A}$ и $\nu(A) \approx 0$;

(2) $\int_X {}^\circ|F|\,d\nu_L = {}^\circ(\int_X |F|\,d\nu) < +\infty$.

Две следующие теоремы относятся к случаю пространств Лёба с конечной мерой: $\nu_L(X) < +\infty$.

6.3.8. ***Теорема.*** *Пусть $(X, \mathscr{A}, \nu)$ — внутреннее пространство с конечно-аддитивной мерой, а $(X, S(\mathscr{A}), \nu_L)$ — соответствующее пространство Лёба. Функция $f : X \to {}^*\overline{\mathbb{R}}$ будет ν_L-интегрируемой тогда и только тогда, когда f имеет $\mathscr{S}$-интегрируемый лифтинг $F : X \to {}^*\mathbb{R}$. В этом случае имеет место равенство*

$$\int\limits_X f\,d\nu_L = {}^\circ\Bigl(\int\limits_X F\,d\nu\Bigr).$$

$\lhd$ Покажем сначала, что если функция f ограничена, измерима по Лёбу и имеет ограниченный лифтинг F, то $\int_X f\,d\nu_L = {}^\circ\int_X F\,d\nu$. В самом деле, возьмем простую измеримую по Лёбу функцию g с конечным числом значений $\{r_1, \dots, r_n\}$, причем $g \leq f$. Согласно теореме 6.3.4 для множества $B_k := g^{-1}(r_k)$ можно подобрать такое

$A_k \in \mathscr{A}$, что $\nu_L(A_k \triangle B_k) = 0$. Функция G, равная r_k на A_k, служит лифтингом для g. Более того, $\int_X g\,d\nu_L = {}^\circ\!\int_X G\,d\nu$, так как в этом случае оба интеграла представляют собой конечные суммы, равные друг другу.

Если ограниченный лифтинг F_1 функции f удовлетворяет неравенству $G \le F_1$, то, с одной стороны, $\int_X G\,d\nu_L \le \int_X F_1\,d\nu$, а, с другой стороны, $|F(x) - F_1(x)| \le 1/n$ для ν_L-почти всех $x \in X$ и для любого стандартного $n \in \mathbb{N}$, поэтому $\int_X F\,d\nu \approx \int_X F_1\,d\nu$. Таким образом,

$$\int\limits_X g\,d\nu_L = {}^\circ\Big(\int\limits_X G\,d\nu\Big) \le {}^\circ\Big(\int\limits_X F_1\,d\nu)\Big) = {}^\circ\Big(\int\limits_X F\,d\nu\Big),$$

поэтому $\int_X f\,d\nu_L \le {}^\circ(\int_X F\,d\nu)$. Обратное неравенство получится, если заменить f на $-f$ и F на $-F$.

Предположим теперь, что функция f является ν_L-интегрируемой. Будем при этом считать, что $f \ge 0$, так как в общем случае можно воспользоваться представлением $f = f^+ - f^-$. Пусть F' — лифтинг функции f, существование которого гарантировано теоремой 6.3.6. Если $F_n := F' \wedge n$, то в силу уже доказанного будет

$${}^\circ\Big(\int\limits_X F_n\,d\nu\Big) = \int\limits_X (f \wedge n)\,d\nu_L \to \int\limits_X f\,d\nu_L.$$

Применив к последовательности $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ принципы продолжения и переполненности, найдем бесконечно большое натуральное число Ω, такое, что ${}^\circ(\int_X F_N\,d\nu) \approx \int_X f\,d\nu_L \to \int_X f\,d\nu_L$ для всех бесконечно больших $N \le \Omega$. Функция $F := F_\Omega$ служит $\mathscr{S}$-интегрируемым лифтингом функции f.

Наоборот, пусть задан $\mathscr{S}$-интегрируемый лифтинг F функции f. Используя принцип незаполненности, для произвольного $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ можно найти доступное натуральное число $n \in \mathbb{N}$ такое, что для доступного $m \ge n$ будет $\int_{F\ge m} F\,d\nu \le \varepsilon$. Вновь применив указанное выше утверждение для ограниченной функции, выводим

$$\int\limits_X (f \wedge n)\,d\nu_L \approx \int\limits_X (F \wedge n)\,d\nu \le \int\limits_X F\,d\nu \le$$
$$\le \int\limits_X (F \wedge n)\,d\nu + \varepsilon \approx \int\limits_X (f \wedge n)\,d\nu_L + \varepsilon.$$

Таким образом, число $^\circ(\int_X F\,d\nu)$ конечно и является пределом последовательности $\int_X (f \wedge n)\,d\nu$ при $n \to \infty$, что и требовалось. $\rhd$

6.3.9. Теорема. *Пусть $(X, \mathscr{A}, \nu)$ — внутреннее пространство с конечно-аддитивной мерой. Для любой внутренней простой $\mathscr{A}$-измеримой функции $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *F является $\mathscr{S}$-интегрируемой;*

(2) *$^\circ\int_X |F|\,d\nu < +\infty$ и $\nu(A) \approx 0$ влечет $\int_A |F|\,d\nu \approx 0$ для любого $A \in \mathscr{A}$;*

(3) *$\int_X {}^\circ|F|\,d\nu_L = {}^\circ\int_X |F|\,d\nu$.*

$\lhd$ Доказательство использует соображения, аналогичные уже приведенным, и не содержит никаких новых трудностей. $\rhd$

6.3.10. Предположим, что X — гиперконечное множество, $\mathscr{A} := \mathscr{P}(X)$ и ν — *считающая мера* с весом Δ, т. е. $\nu(A) := \Delta|A|$ при любом $A \in \mathscr{A}$, где $|A|$ — число элементов множества A и $\Delta \in {}^*\mathbb{R}+$.

Соответствующее пространство Лёба обозначают $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$, а меру ν_Δ называют *равномерной мерой Лёба.* В случае равномерных мер Лёба всякая внутренняя функция $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ является простой и $\mathscr{A}$-измеримой, причем $\int_A F\,d\nu = \Delta \sum_{x\in A} F(x)$ для любого $A \in \mathscr{A}$.

Мера Лёба ν_Δ конечна при условии, что число $\Delta \cdot |X|$ доступно. Если $\Delta = |X|^{-1}$, то пространство Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$ называют *каноническим* и обозначают (X, S, ν_L) или (X, S^X, ν_L^X). В случае конечной меры Лёба, если $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ является $\mathscr{S}$-интегрируемым лифтингом функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, то в силу теоремы 6.3.8

$$\int_X f\,d\nu_\Delta = {}^\circ\Big(\Delta \sum_{x\in X} F(x)\Big).$$

6.3.11. Докажем теперь обобщение теоремы 6.3.8 для случая пространств Лёба с бесконечной мерой ν_Δ.

Рассмотрим пространство Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$. Предположим, что множество $M \in S_\Delta$ удовлетворяет следующему условию: существует возрастающая последовательность внутренних множеств $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ и $\Delta \cdot |M_n| \ll +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

В этом случае символом S_Δ^M обозначаем σ-алгебру $\{A \cap M : A \in S_\Delta\}$ подмножеств множества M, а символом ν_Δ^M — ограничение ν_Δ на S_Δ^M.

Пространство $\Xi := (M, S_\Delta^M, \nu_\Delta^M)$ назовем *σ-конечным подпространством пространства Лёба* $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$. Будем считать также, что $\mathfrak{A} := {}^*\mathscr{P}(X)$ — это множество всех внутренних подмножеств X.

Внутреннюю функцию $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ называют *$\mathscr{S}_M$-интегрируемой*, если выполнены следующие условия:

(1) $\Delta \sum_{\xi \in X} |F(\xi)| \ll \infty$;

(2) $(\forall A \in \mathfrak{A})(\Delta \cdot |A| \approx 0 \to \Delta \cdot \sum_{\xi \in A} |F(\xi)| \approx 0)$;

(3) $(B \in \mathfrak{A} \wedge B \subset X - M) \to \Delta \cdot \sum_{\xi \in B} |F(\xi)| \approx 0$.

Если $X = M$, то M — внутреннее множество и из ω_1-насыщенности следует, что $X = M_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. В частности, $\nu_\Delta(X) < +\infty$ и (в силу 6.3.7) понятие $\mathscr{S}_M$-интегрируемости совпадает с понятием $\mathscr{S}$-интегрируемости.

Внутреннюю функцию $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ называют *лифтингом* функции $f : X \to {}^*\overline{\mathbb{R}}$, если $f(\xi) = {}^\circ F(\xi)$ для ν_Δ^M-почти всех $\xi \in M$.

6.3.12. Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathscr{L}$ обозначает внутреннее гиперконечномерное векторное пространство функций $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ с нормой $\|F\| := \Delta \cdot \sum_{\xi \in X} |F(\xi)|$. Если $A \in \mathfrak{A}$, то $\|F\|_A := \|F \cdot \chi_A\| := \Delta \sum_{\xi \in A} |F(\xi)|$, где χ_A — характеристическая функция множества A.

Напомним, что $\operatorname{ltd}(\mathscr{L})$ — внешнее подпространство доступных элементов пространства $\mathscr{L}$, составленное точками с доступными нормами, а $\mathscr{L}_0 \subset \operatorname{ltd}(\mathscr{L})$ — множество элементов с бесконечно малой нормой (см. 6.1.1). Нестандартная оболочка $\mathscr{L}^\# := \operatorname{ltd}(\mathscr{L})/\mathscr{L}_0$ представляет собой несепарабельное банахово пространство (если внутренняя мощность $|X|$ множества X — бесконечно большое число). Обозначим символом $\mathscr{S}(M)$ подпространство $\operatorname{ltd}(\mathscr{L})$, состоящее из $\mathscr{S}_M$-интегрируемых функций.

В этом разделе всегда фиксировано множество M, так что вместо $\mathscr{S}(M)$ и $\mathscr{S}_M$ будем писать $\mathscr{S}$, а вместо ν_Δ^M — просто ν_Δ. Наконец, запись $F \sim G$ означает, что $\|F - G\| \approx 0$.

(1) *Для произвольной функции $F \in \mathscr{L}$ из соотношения $\|F\| \approx 0$ следует, что $F(\xi) \approx 0$ для ν_Δ-почти всех ξ.*

$\triangleleft$ Предположим, что имеется такое множество $A \in S_\Delta$, что $\nu_\Delta(A) > 0$ и ${}^\circ F(\xi) \neq 0$ для всех $\xi \in A$. Покажем, что тогда некоторое внутреннее $B \in \mathfrak{A}$ удовлетворяет тем же самым условиям.

В самом деле, если $\nu_\Delta(A) \leq +\infty$, то по теореме 6.3.4 $\nu_\Delta(A) = \sup\{\nu_\Delta(B) : B \in \mathfrak{A},\ B \subset A\}$. Если $\nu_\Delta(A) = +\infty$, то по той же теореме либо существует внутреннее подмножество B множества A, для которого $\nu_\Delta(B) = +\infty$, либо можно подобрать последовательность (A_n) внутренних множеств так, чтобы $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ и $\nu_\Delta(A_n) < +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В последнем случае $\nu_\Delta(A \cap A_n) \to +\infty$, поэтому существует такой номер n, что $\nu_\Delta(A \cap A_n) > 0$, стало быть, вновь можно применить теорему 6.3.4.

Итак, для некоторого $B \in \mathfrak{A}$ выполняется $\nu_\Delta(B) > 0$. Так как $T := \{|F(\xi)| : \xi \in B\}$ — внутреннее множество, то $\alpha := {}^\circ(\inf T) > 0$ и ${}^\circ\|F\| \geq {}^\circ(\alpha\Delta|B|) = {}^\circ\alpha\nu_\Delta(B) > 0$. $\triangleright$

(2) *Если $F \in \mathscr{S}$ и $G \sim F$, то $G \in \mathscr{S}$.*

$\triangleleft$ Если A удовлетворяет одному из условий (2) и (3) определения из 6.3.11, то $\|F\|_A \approx 0$ и, поскольку $\|F - G\| \approx 0$, будет также $\|F - G\|_A \approx 0$. Таким образом, $\|G\|_A \approx 0$. $\triangleright$

Аналогичные соображения приводят к следующему утверждению.

(3) *Нестандартная оболочка $\mathscr{S}^\#$ представляет собой замкнутое подпространство банахова пространства $\mathscr{L}^\#$.*

6.3.13. *Теорема.* *Функция $f : X \to {}^*\overline{\mathbb{R}}$ будет ν_Δ^M-интегрируемой в том и только в том случае, если она имеет $\mathscr{S}_M$-интегрируемый лифтинг F. В этом случае имеет место равенство*

$$\int\limits_M f\, d\nu_\Delta^M = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{\xi \in X} F(\xi)\right).$$

$\triangleleft$ Ясно, что достаточно обосновать теорему для положительной функции f. В соответствии с этим предположим, что $f \in L_1(\nu_\Delta)$ и $f \geq 0$. Пусть $f_n := f \cdot \chi_{M_n}$. Последовательность (f_n) монотонно возрастает и сходится поточечно к интегрируемой функции f, следовательно,

(1) $\int\limits_M f_n\, d\nu_\Delta \to \int\limits_M f\, d\nu_\Delta$.

Но тогда верно также и предельное соотношение

(2) $\int\limits_M |f_n - f_m|\, d\nu_\Delta \to 0$ при $n, m \to +\infty$.

Носитель функции f_n содержится во внутреннем множестве M_n конечной меры, поэтому согласно теореме 6.3.8 существует $\mathscr{S}$-интегрируемый лифтинг F_n функции f_n, равный нулю вне M_n (ввиду условия 6.3.11 (3), $F_n(\xi) = 0$ при $\xi \in X - M_n$). Более того, имеет место равенство (см. 6.3.11)

(3) $\int\limits_M f_n\, d\nu_\Delta^M = {}^\circ\Big(\Delta \sum\limits_{\xi\in X} F_n(\xi)\Big)$.

Далее, установленное выше предельное соотношение (2) влечет, что ${}^\circ\|F_n - F_m\| \to 0$ при $m, n \to +\infty$. Тогда из предложения 6.3.12 (3) вытекает существование внутренней функции $F \in \mathscr{S}$ такой, что ${}^\circ\|F_n - F\| \to 0$. Как видно, ${}^\circ\|F_n\| \to {}^\circ\|F\|$. Предельный переход в (3) с учетом (1) приводит к тому, что (3) выполняется также для F и f. Остается показать, что $f(\xi) = {}^\circ F(\xi)$ для ν_Δ-почти всех ξ. Возьмем произвольное натуральное число $k > 0$. Понятно, что ${}^\circ\|F_n \cdot \chi_{M_k} - F \cdot \chi_{M_k}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Если $n > k$, то $M_n \supset M_k$, следовательно, $f_n \cdot \chi_{M_k} = f_k \cdot \chi_{M_k}$. Таким образом, ν_Δ-почти всюду $F_n \cdot \chi_{M_k} \approx F_k \cdot \chi_{M_k}$, и тогда ν_Δ-почти всюду $F_n \cdot \chi_{M_k} - F \cdot \chi_{M_k} \approx F_k \cdot \chi_{M_k} - F \cdot \chi_{M_k}$. Так как функции в последнем соотношении $\mathscr{S}$-интегрируемы и равны нулю вне множества M_k конечной меры, то ${}^\circ\|F_n\cdot\chi_{M_k} - F\cdot\chi_{M_k}\| = {}^\circ\|F_k\cdot\chi_{M_k} - F\cdot\chi_{M_k}\|$. Переходя в последнем равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим равенство ${}^\circ\|F_k \cdot \chi_{M_k} - F \cdot \chi_{M_k}\| = 0$, справедливое для всех k. Теперь из предложения 6.3.12 (1) выводим, что ν_Δ-почти всюду $F_k \cdot \chi_{M_k} \approx F \cdot \chi_{M_k}$. Итак, соотношение $f \cdot \chi_{M_k} \approx F \cdot \chi_{M_k}$ выполняется ν_Δ-почти всюду и, стало быть, $f \approx F|_M$ также ν_Δ-почти всюду, ибо $M = \bigcup_{k=0}^\infty M_k$.

Предположим теперь, что $F \in \mathscr{S}$ и $f : M \to \mathbb{R}$ таковы, что $f(\xi) = {}^\circ F(\xi)$ для почти всех $\xi \in M$. Покажем, что тогда $f \in L_1(\nu_\Delta)$ и для F и f выполняется равенство (3). Пусть $F_n := F \cdot \chi_{M_k}$. Тогда ν_Δ-почти всюду $f_n := f \cdot \chi_{M_k} \approx F_n$, значит, применима теорема 6.3.8, так как $\nu_\Delta(M_n)$ конечно. Тем самым справедливы соотношения

$$\int\limits_M |f_n|\, d\nu_\Delta = {}^\circ\|F_n\| \le {}^\circ\|F\|.$$

Поскольку последовательность $(|f_n|)$ монотонно возрастает и при этом сходится к $|f|$, то из теоремы Лебега о предельном переходе следует, что $f \in L_1(\nu_\Delta)$. В силу доказанного выше существует $\mathscr{S}$-интегрируемая внутренняя функция $G : X \to {}^*\mathbb{R}$, для которой выполняется равенство $\int_M |f_n|\, d\nu_\Delta = {}^\circ\|G\|$.

Чтобы доказать (3) для F и f, достаточно обосновать соотношение $\|F - G\| \approx 0$. Сначала заметим, что если $A \in \mathfrak{A}$ и $A \subset M$, то ввиду ω_1-насыщенности $A \subset M_n$ для некоторого номера n. Зафиксируем такое множество A и соответствующий ему номер n. Пусть $F_M := F \cdot \chi_M$. Тогда ν_Δ-почти всюду $f \approx G_M$ и ν_Δ-почти всюду $f \approx F_M$, следовательно, ν_Δ-почти всюду $F_{M_n} \approx G_{M_n}$. Но тогда $\|F - G\|_A \approx 0$, так как F и G являются $\mathscr{S}$-интегрируемыми.

Рассмотрим семейство формул $\Gamma_{m,n}(A) := \{A \in \mathfrak{A} \wedge M_n \subset A \wedge \|F - G\|_A \leq m^{-1}\}$. Для каждого натурального числа $N \in \mathbb{N}$ существует $A \in \mathfrak{A}$, для которого верна формула $\Gamma_{m,n}(A)$ при всех $n, m \leq N$. Следовательно, существует $A \in \mathfrak{A}$, для которого верны всех формулы $\Gamma_{m,n}(A)$. Но тогда $M \subset A$ и $\|F - G\|_A \approx 0$. Поскольку $F, G \in \mathscr{S}$, то будет $\|F - G\|_{X-A} \approx 0$. Следовательно, $\|F - G\| \approx 0$. $\rhd$

6.3.14. Пусть $p \in [1, +\infty)$, и рассмотрим внутреннее пространство $\mathscr{L}_p$, состоящее из функций $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ с нормой

$$\|F\|_p = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{\xi \in X} |F(\xi)|^p\right)^{1/p}.$$

Иногда применяются и более подробные обозначения для этого пространства и нормы в нем: $\mathscr{L}_{p,\Delta}^X$ и $\|\cdot\|_{p,\Delta}$. Для $F, G \in \mathscr{L}_p$ будем писать $F \underset{p}{\sim} G$, если $\|F - G\|_p \approx 0$. Пространство $\mathscr{L}_p^\#$ определяется так же, как и выше в параграфе 6.1. Для произвольного $A \in \mathfrak{A}$ выполняется $\|F\|_{p,A} = \|F \cdot \chi_A\|_p$. Обозначим символом $\mathscr{S}_p(M)$ подпространство $\mathscr{L}_p$, состоящее из функций $F \in \mathscr{L}_p$, для которых степень $|F|^p$ будет $\mathscr{S}_M$-интегрируемой. Для простоты будем писать $\mathscr{S}_p$, опуская M, когда это не ведет к путанице. Так как $\|F\|_{p,A} = \||F|^p\|_A$ для любой внутренней функции F и произвольного $A \in \mathfrak{A}$, то предложения 6.3.12 (1)–(3) остаются в силе, если заменить в них $\mathscr{L}$, $\mathscr{S}$ и $\|\cdot\|$ на $\mathscr{L}_p$, $\mathscr{S}_p$ и $\|\cdot\|_p$ соответственно.

Совершенно аналогичным образом вводятся комплексные пространства $\mathscr{L}_p$ и $\mathscr{S}_p$. Более того, если $F : X \to \mathbb{C}$ — внутренняя функция, то $F = \operatorname{Re} F + i \operatorname{Im} F$ и для каждого $A \in \mathfrak{A}$ будет

$$\|\operatorname{Re} F\|_{p,A}, \|\operatorname{Im} F\|_{p,A} \leq \|F\|_{p,A} \leq \|\operatorname{Re} F\|_{p,A} + \|\operatorname{Im} F\|_{p,A}.$$

Из этих неравенств следует, что $F \in \mathscr{L}_p\,(\mathscr{S}_p)$ в том и только в том случае, если $\operatorname{Re} F \in \mathscr{L}_p\,(\mathscr{S}_p)$ и $\operatorname{Im} F \in \mathscr{L}_p\,(\mathscr{S}_p)$.

Если $f : M \to \mathbb{F}$, где $\mathbb{F}$ — основное поле скаляров ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то $f \in L_p(\Xi)$ в том и только в том случае, если существует лифтинг $F : X \to {}^*\mathbb{F}$ функции f такой, что $F \in \mathscr{S}_p(M)$. Более того, $\|f\|_p = {}^\circ\|F\|_p$.

6.3.15. Примечания.

(1) Конструкция меры Лёба предложена в [406]. Материал, представленный в 6.3.1–6.3.10, хорошо известен, см. [5, 285]. Теорема 6.3.4 для случая конечной меры установлена Лёбом в [406]. Единственность в случае бесконечной меры, а также свойство 6.3.4 (4) установил Хенсон [338]; результаты 6.3.2 и 6.3.3 взяты из [338].

(2) Теорема 6.3.6 установлена Лёбом [406, 407]. Аналогичная характеризация имеется и для измеримых отображений со значениями в полном сепарабельном метрическом пространстве (см. [250, 406]). Данное в 6.3.7 определение $\mathscr{S}$-интегрируемости ввел Лёб [407]; ранее Андерсон рассмотрел в [249] эквивалентное условие 6.3.7 (1).

(3) Понятие σ-конечного подпространства пространства Лёба ввел Е. И. Гордон в [47]. В этой же работе установлена теорема 6.3.13. В изложении 6.3.11–6.3.14 мы следуем монографии [325].

6.4. Гиперприближение пространств с мерой

Цель настоящего параграфа — показать, что всякое стандартное пространство с σ-конечной мерой погружается в пространство Лёба подходящего гиперконечного пространства с равномерной мерой. Некоторые рассуждения ниже предполагают, что используемый нестандартный универсум удовлетворяет принципу идеализации Нельсона.

6.4.1. Сейчас мы займемся доказательством того, что для каждого пространства $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ с σ-конечной мерой μ можно построить пространство Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$ и его σ-конечное подпространство $(M, S_\Delta^M, \nu_\Delta^M)$ такие, что $X \subset {}^*\mathfrak{X}$ и для каждого $p \in [1, \infty)$ существует изометрическое вложение $\jmath_p : L_p(\mu) \to L_p(\nu_\Delta^M)$. Далее, для любой функции $f \in L_p(\mu)$ внутренняя функция $F := {}^*f|_X$ содержится в $\mathscr{S}_p(M)$ и служит лифтингом $\jmath_p(f)$. Отсюда вытекает, в частности, что для любого $f \in L_p(\mu)$ (точнее, для любого представителя класса f)

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f\,d\mu = {}^\circ\Bigg(\Delta \sum_{\xi \in X} {}^*f(\xi)\Bigg).$$

Пусть (Y, Σ, μ) — стандартное пространство с мерой. Элемент ξ из ${}^*Y$ называют *случайным*, если ξ не содержится ни в одном стандартном множестве нулевой меры. Итак, элемент $\xi \in {}^*Y$ случаен, если для любого стандартного $A \in \Sigma$ из $\mu(A) = 0$ следует $\xi \notin {}^*A$.

(1) *Почти все элементы ${}^*Y$ случайны. Точнее, существует внутреннее множество $B \in \Sigma$ такое, что $\mu({}^*Y - B) = 0$ и все элементы B случайны.*

$\lhd$ Пусть J — идеал множеств нулевой меры. По принципу идеализации существует гиперконечное множество $\mathscr{M} \subset {}^*J$ такое, что для любого стандартного $A \in J$ выполняется ${}^*A \in \mathscr{M}$. Пусть $X := \bigcup \mathscr{M}$. Тогда $X \in {}^*Y {}^*\mu(X) = 0$. Ясно, что если $\xi \in {}^*Y - X$, то ξ — случайный элемент, а $Y - X$ является множеством полной меры. $\rhd$

(2) *Предположим, что рассматриваемый нестандартный универсум удовлетворяет принципу направленности, а $(X, \mathscr{Y}, \mu)$ — стандартное пространство с мерой. Тогда существует такой элемент $\xi \in {}^*X$, что*

$$(\forall Y \in \mathscr{Y})(\mu(Y) = 0 \to \xi \in {}^*Y).$$

$\lhd$ Рассмотрим внутренний класс $\mathfrak{N} := \{Y \in \mathscr{Y} : {}^*\mu(Y) = 0\}$. Используя принцип направленности, можно показать, что найдется гиперконечное семейство $G := \{G_n : n < \lambda\}$, где $\lambda \in {}^*\mathbb{N}$, такое, что $G \subset \mathfrak{N}$ и ${}^*A \in \mathfrak{N} \leftrightarrow {}^*A \in G$. В силу принципа переноса $Y_0 := \bigcup\{G_n : n < \lambda\} \in {}^*\mathscr{Y}$. Следовательно, ${}^*\mu(Y_0) = 0$. Отсюда ${}^*\mu({}^*X - Y_0) = {}^*\mu({}^*X) = \mu(X)$, т. е. ${}^*X - Y_0 \neq \varnothing$ (предполагается, что $\mu(X) > 0$). Очевидно, любой элемент из ${}^*X - Y_0$ является искомым. $\rhd$

Понятие случайного элемента легко распространяется на случай τ-стандартного пространства с мерой.

Пусть τ — допустимый элемент и (Y, Σ, λ) — это τ-стандартное пространство с σ-конечной вероятностной мерой λ. Элемент $y \in Y$ назовем *τ-случайным*, если для любого τ-стандартного множества $A \in \Sigma$ из $\lambda(A) = 0$ вытекает $y \notin A$.

В частности, если число τ стандартно, т. е. (Y, Σ, λ) — стандартное вероятностное пространство, то τ-случайный элемент $y \in {}^*Y$ случаен. Разумеется, τ-случайные элементы определяются и в стандартном пространстве (Y, Σ, λ) для нестандартного τ. Для τ-стандартного пространства предложение (1) остается в силе.

(3) *Существует внутреннее множество $B \in \Sigma$ такое, что $\mu(^*Y - B) = 0$ и все элементы B являются τ-случайными.*

$\lhd$ Доказательство повторяет рассуждения из (1), однако вместо принципа идеализации следует применить релятивизированный принцип идеализации для τ-стандартных множеств. $\rhd$

6.4.2. Предположим, что (Y, Σ, λ) — произведение τ-стандартных вероятностных пространств $(Y_1, \Sigma_1, \lambda_1)$ и $(Y_2, \Sigma_2, \lambda_2)$. Легко видеть, что если $y = (y_1, y_2)$ — это τ-случайный элемент Y, то y_l — некоторый τ-стандартный элемент Y_l. Обратное неверно. Так, например, если $y_1 = y_2$ и мера диагонали $I_Y := \{(y, y) : y \in Y\}$ равна нулю, то элемент (y_1, y_2) не будет τ-случайным, даже если τ-случаен элемент y_1, так как (y_1, y_2) входит в τ-стандартное множество нулевой меры I_Y.

(1) *Если y_1 — это τ-случайный элемент Y_1, а y_2 — это (τ, y_1)-случайный элемент Y_2, то (y_1, y_2) будет τ-случайным элементом $Y = Y_1 \times Y_2$.*

$\lhd$ Пусть $A \subset Y_1 \times Y_2$ — такое τ-стандартное множество, что $\lambda(A) = 0$. Тогда для любого $z_1 \in Y_1$ множество $A_{z_1} := \{z_2 \in Y_2 : (z_1, z_2) \in A\}$ будет (τ, z_1)-стандартным. Обозначим $C := \{z_1 \in Y : \lambda_2(A_{z_1}) = 0\}$. Как видно, C — это τ-стандартное множество и $\lambda_1(C) = 1$ по теореме Фубини. По условию y_1 является τ-случайным элементом, поэтому $y_1 \in C$. Следовательно, $\lambda_2(A_{y_1}) = 0$ и $y_2 \notin A_{y_1}$, поскольку множество A_{y_1} будет (τ, y_1)-стандартным. Итак, $(y_1, y_2) \notin A$ и, стало быть, (y_1, y_2) — это τ-случайный элемент. $\rhd$

(2) Пусть (Y, Σ, λ) — некоторое τ-стандартное вероятностное пространство. Внутреннюю последовательность $(y_n)_{n \in {}^*\mathbb{Z}}$ называют *независимой последовательностью* τ-случайных элементов в Y, если она представляет собой τ-случайный элемент τ-стандартного пространства $(Y^{^*\mathbb{Z}}, \lambda^\infty)$, где λ^∞ — счетная степень меры λ.

6.4.3. Возьмем независимую последовательность $(y_n)_{n \in {}^*\mathbb{Z}}$ из τ-случайных элементов в Y. Нас будет интересовать представление

$$
\textbf{(1)}\quad \int\limits_Y f\, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(y_k)
$$

для τ-стандартной функции f.

(2) *Пусть (Y, Σ, λ) — вероятностное пространство, а λ^∞ — счетная степень меры λ на множестве $Y^{\mathbb{Z}}$. Для любой интегри-*

руемой функции $f : Y \to \mathbb{R}$ обозначим символом $\mathscr{A}_f$ множество тех последовательностей $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in Y^{\mathbb{Z}}$, для которых имеет место представление (1). *Тогда $\lambda^\infty(\mathscr{A}_f) = 1$.*

$\lhd$ Пусть $T : Y^{\mathbb{Z}} \to Y^{\mathbb{Z}}$ — оператор сдвига — *автоморфизм Бернулли*:

$$T((y_n)_{n\in\mathbb{Z}}) := (y'_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad y'_n := y_{n+1}.$$

Известно, что оператор T *эргодичен* (см. [99, глава 8, § 1, теорема 1]). Тем самым для каждой функции $\varphi \in L_1(\lambda^\infty)$ будет

$$\int\limits_{Y^{\mathbb{Z}}} \varphi\, d\lambda^\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k \overline{y})$$

для почти всех $\overline{y} \in Y^{\mathbb{Z}}$. Пусть отображение $\Pi_0 : Y^{\mathbb{Z}} \to Y$ задано формулой $\Pi_0((y_n)_{n\in\mathbb{Z}}) := y_0$. Из определения меры λ^∞ видно, что отображение Π_0 сохраняет меру, следовательно, $\int_{Y^{\mathbb{Z}}} \varphi\, d\lambda^\infty = \int_Y f\, d\lambda$, если $\varphi = f \circ \Pi_0$. Более того, $\varphi(T^k\overline{y}) = (f \circ \Pi_0)(T^k\overline{y}) = f(y_k)$, откуда и вытекает требуемое. $\rhd$

(3) *Теорема.* *Если $(y_n)_{n\in{}^*\mathbb{Z}}$ — независимая последовательность τ-случайных элементов в Y, то для любой τ-стандартной функции $f : Y \to {}^*\mathbb{R}$, входящей в $L_1(\lambda)$, выполняется* (1).

$\lhd$ Применив релятивизированный принцип переноса к предложению (2), заключаем, что τ-стандартное множество $\mathscr{A}_f$ имеет полную меру, следовательно, любая независимая последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ τ-стандартных элементов содержится в $\mathscr{A}_f$. Тем самым выполнено (1). $\rhd$

6.4.4. *Теорема.* *Если (Y, Σ, δ) — некоторое τ-стандартное пространство с конечной мерой δ, то существует внутреннее гиперконечное множество $Y_0 \subset Y$ такое, что для любой τ-стандартной интегрируемой функции $f : Y \to {}^*\mathbb{R}$ выполняется равенство*

$$\int\limits_Y f\, d\delta \overset{\tau}{\approx} \frac{\delta(Y)}{|Y_0|} \sum_{y\in Y_0} f(y).$$

$\lhd$ Отметим, прежде всего, что $\delta(Y)$ — это τ-стандартное гипердействительное число, не являющееся, вообще говоря, доступным, а конечность δ означает лишь справедливость соотношения

$\delta(Y) \neq \infty$. Заменим пространство (Y, Σ, δ) на вероятностное пространство (Y, Σ, λ), полагая $\lambda := \frac{1}{\delta(Y)}\delta$. Тогда между интегралами по δ и λ имеется очевидная связь:

$$\int\limits_Y f\, d\delta = \delta(Y) \int\limits_Y f\, d\lambda.$$

Пусть $\overline{y} := (y_n)_{n \in {}^*\mathbb{Z}}$ — независимая последовательность τ-случайных элементов из (Y, Σ, λ), а N — некоторое $(\tau, \overline{y})$-бесконечно большое гипернатуральное число. Тогда поскольку последовательность в правой части формулы 6.4.3 (1) $(\tau, \overline{y})$-стандартна, то, используя 4.6.4 (1), приходим к соотношению

$$\int\limits_Y f\, d\lambda \overset{(\tau,\overline{y})}{\approx} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(y_k).$$

Положим $Y_0 := \{y_0, \dots, y_{N-1}\}$. Остается воспользоваться отмеченной выше связью между интегралами по δ и λ и тем фактом, что соотношение $\alpha \overset{(\tau,\overline{y})}{\approx} \beta$ влечет $\alpha \overset{\tau}{\approx} \beta$ (см. 4.6.2). $\triangleright$

6.4.5. Рассмотрим вновь стандартное пространство $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ с σ-конечной мерой μ. Итак, существует возрастающая последовательность множеств $\mathfrak{X}_n \in \Omega$ такая, что $\mu(\mathfrak{X}_n) < +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\mathfrak{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{X}_n$. Пусть Ω_n обозначает σ-алгебру $\{A \cap \mathfrak{X}_n : A \in \Omega\}$, а μ_n — это сужение μ на Ω_n. Тогда для любой интегрируемой функции $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ будет

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\mathfrak{X}_n} f_n\, d\mu_n,$$

где $f_n := f|_{\mathfrak{X}_n}$.

Теорема. *Существуют внутреннее гиперконечное множество $X \subset {}^*\mathfrak{X}$ и гипердействительное число $\Delta \in {}^*\mathbb{R}$ такие, что*

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f\, d\mu = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{\xi \in X} {}^*f(\xi)\right)$$

для любой стандартной функции $f \in L_1(\mu)$.

$\triangleleft$ Пусть τ — бесконечно большое гипернатуральное число.

Положим $(Y, \Sigma, \delta) := ({}^*\mathfrak{X}_\tau, {}^*\Omega_\tau, {}^*\mu_\tau)$. Тогда (Y, Σ, δ) удовлетворяет условиям теоремы 6.4.4. Как видно, ${}^*f_\tau$ — это τ-стандартная интегрируемая функция на ${}^*\mathfrak{X}_\tau$. Так как $Y_0 \subset {}^*\mathfrak{X}_\tau$ (определение Y_0 см. в 6.4.4), то ${}^*f_\tau|_{Y_0} = {}^*f|_{Y_0}$. Заметим также, что из отмеченного перед формулировкой предельного соотношения получаем

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f\, d\mu = \overset{\circ}{\int\limits_{{}^*\mathfrak{X}_\tau}} {}^*f_\tau\, d\mu_\tau.$$

Требуемое вытекает теперь из последнего соотношения и теоремы 6.4.4, если положить $\Delta := \delta(Y)|Y_0|^{-1}$ и $X := Y_0$ и учесть, что $\int_{\mathfrak{X}} f\, d\mu$ — стандартное число. $\triangleright$

6.4.6. Ниже нам потребуются некоторые факты из теории нормированных булевых алгебр. Все эти сведения имеются в книге [29].

Пусть $\mathscr{B}$ — булева алгебра и m — строго положительная конечно-аддитивная мера на $\mathscr{B}$. Тогда $\mathscr{B}$ удовлетворяет *условию счетности антицепей* или, как еще говорят, имеет *счетный тип*; т. е. каждое подмножество $E \subset \mathscr{B}$, состоящее из попарно дизъюнктных элементов, не более чем счетно. Всякая σ-алгебра счетного типа является полной. Полную булеву алгебру со строго положительной счетно-аддитивной мерой называют *нормированной.*

Пусть $(\mathscr{B}_1, m_1)$ и $(\mathscr{B}_2, m_2)$ — нормированные булевы алгебры. Каждый гомоморфизм $\varphi : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$, сохраняющий меру, является *вполне аддитивным*, т. е. $\varphi(\sup E) = \sup \varphi(E)$ для любого $E \subset \mathscr{B}_1$. Отсюда вытекает, что $\varphi(\mathscr{B}_1)$ — правильная подалгебра $\mathscr{B}_2$, т. е. точные верхние границы произвольного множества $E \subset \varphi(\mathscr{B}_1)$ в алгебрах $\varphi(\mathscr{B}_1)$ и $\mathscr{B}_2$ совпадают.

Предположим теперь, что (Y, Σ, δ) — пространство с конечной мерой и $n(\Sigma) := \{c \in \Sigma : \delta(c) = 0\}$. Тогда $\overline{\Sigma} := \Sigma/n(\Sigma)$ — нормированная булева алгебра со строго положительной мерой $\overline{\delta}$ такой, что $\overline{\delta}([c]) = \delta(c)$, где $[c]$ — класс эквивалентности элемента $c \in \Sigma$ в $\overline{\Sigma}$. Нормированную алгебру $\overline{\Sigma}$ принято называть *лебеговской алгеброй* пространства (Y, Σ, δ). С каждой измеримой функцией $f : Y \to \mathbb{R}$ свяжем монотонно возрастающее, непрерывное справа семейство $(e^t_f)_{t \in \mathbb{R}}$ элементов $\overline{\Sigma}$, называемое *характеристикой* или *разложением единицы* для f и определяемое формулой $e^f_t := [\{y : f(y) \leq t\}]$. Заметим, что $\sup(e^f_t) = \mathbb{1}_{\mathscr{B}}$ и $\inf(e^f_t) = \mathbb{0}_{\mathscr{B}}$.

(1) *Измеримая функция f интегрируема в том и только в том случае, если интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} t\,d\overline{\delta}(e_f^t)$ сходится и*

$$\int\limits_Y f\,d\delta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t\,d\overline{\delta}(e_f^t).$$

$\triangleleft$ Это простой и хорошо известный факт, см., например, [29, глава VI, § 3]. $\triangleright$

(2) *Если (Y, Σ, δ) — стандартное пространство с конечной мерой, $Y_0 \subset {}^*Y$ удовлетворяет условиям теоремы* 6.4.4 (*со стандартным τ*), $\lambda := \delta(Y) \cdot |Y_0|^{-1}$ *и $(Y_0, S_\lambda, \nu_\lambda)$ — соответствующее пространство Лёба, то отображение $\psi : \overline{\Sigma} \to \overline{S}_\lambda$, определяемое формулой $\psi([c]) = [{}^*c \cap Y_n]$ $(c \in \Sigma)$, представляет собой сохраняющий меру мономорфизм.*

$\triangleleft$ Следует немедленно из теоремы 6.4.4, если применить указанную там формулу к характеристическим функциям множеств из Σ. $\triangleright$

(3) *Пусть выполнены условия предыдущего утверждения* 6.4.6 (2). *Предположим дополнительно, что $h \in L_1(\delta)$ и $H := {}^*h|_{Y_0}$, а функция $\widetilde{h} : Y_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ такова, что $\widetilde{h}(y) = {}^{\circ *}h(y)$ для всех $y \in Y_0$. Тогда $\widetilde{h} \in L_1(\nu_\lambda)$, $\int_Y h\,d\delta = \int_{Y_0} \widetilde{h}\,d\nu_\lambda$ и функция H будет $\mathscr{S}$-интегрируемой.*

$\triangleleft$ Для любого стандартного $t \in \mathbb{R}$ положим $C_t := \{y \in Y : h(y) \le t\}, c_t := [C_t] \in \overline{\Sigma}$, $E_t := \{y \in Y_0 : \widetilde{h}(y) \le t\}$ и $e_t := [E_t] \in \overline{S}_\lambda$. Тогда $(c_t)_{t\in\mathbb{R}}$ — разложение единицы функции h в $\overline{\Sigma}$ и $(e_t)_{t\in\mathbb{R}}$ — разложение единицы, соответствующее элементу $\widetilde{h}$. Так как мономорфизм $\psi : \overline{\Sigma} \to \overline{S}_\lambda$, определенный в (2), сохраняет точные границы, то, полагая $\widetilde{e}_t := \psi(c_t)$, получим, что $(\widetilde{e}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ — разложение единицы. Из принципа переноса видно, что $\widetilde{e}_t = \{y \in Y_0 : {}^*h(y) \le t\}$. Используя определение $\widetilde{h}$, мы получим $e_{t_1} < \widetilde{e}_{t_2}$ и $\widetilde{e}_{t_1} < e_{t_2}$ для любых стандартных $t_1 < t_2$. Отсюда и из непрерывности справа семейств $(e_t)_{t\in\mathbb{R}}$ и $(\widetilde{e}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ вытекает $e_t = \widetilde{e}_t$ для любого t. Теперь из (1) получаем первые два утверждения требуемого предложения, так как ψ сохраняет меру. Третье утверждение вытекает из 6.3.7 (1). $\triangleright$

6.4.7. Из 6.4.1 видно, что для любого стандартного $A \in \Omega$ выполняется формула

$$\mu(A) = {}^\circ(\Delta \cdot |X \cap {}^*A|).$$

(Здесь, как обычно, ${}^\circ t := +\infty$, если $t \in {}^*\mathbb{R}$ и $t \approx +\infty$.) Отсюда и из соотношения $\mu({}^*\mathfrak{X}_n) < +\infty$ вытекает, что тройка $\Xi = (M, S_\Delta^M, \nu_\Delta^M)$, где $M_n := X \cap {}^*\mathfrak{X}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, будет σ-конечным подпространством пространства Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$.

Теорема. *Пусть $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ — стандартное пространство с σ-конечной мерой, причем $\mathfrak{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}_n$ и $\mu(\mathfrak{X}_n) < +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $X \subset {}^*\mathfrak{X}$ и $\Delta \in {}^*\mathbb{R}$ удовлетворяют условиям теоремы 6.4.5. Положим $M_n := X \cap {}^*\mathfrak{X}_n$ и $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Тогда если для любого $p \in [1, +\infty)$ и произвольной $f \in L_p(\mu)$ внутренняя функция $F(f) := {}^*f|_X$ входит в $\mathscr{S}_p(M)$ и $\jmath_p(f) = {}^\circ F(f)$, то $\jmath_p : L_p(\mu) \to L_p(\nu_\Delta^M)$ — изометрическое вложение. В частности, если $f \in L_1(\mu)$, то*

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f\, d\mu = \int\limits_M \jmath_1(f)\, d\nu_\Delta^M.$$

$\lhd$ Достаточно провести доказательство при $p = 1$ и $f \geq 0$.

Рассмотрим пространство Лёба $(M_n, S_{\Delta_n}, \nu_{\Delta_n})$ с конечной мерой, где $\Delta_n = \mu(\mathfrak{X}_n) \cdot |M_n|^{-1} \approx \Delta \cdot |M_n| \cdot |M_n|^{-1} = \Delta$. При этом выполнены условия предложения 6.4.6 (3), если заменить в нем (Y, Σ, δ) на $(\mathfrak{X}_n, \Omega_n, \mu_n)$ и Y_0 на M_n.

Пусть $f_n := f \cdot \chi_{\mathfrak{X}_n} : \mathfrak{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ и $\overline{f}_n := f|_{\mathfrak{X}_n}$. В силу 6.4.6 (3) ${}^*f|_{M_n}$ служит $\mathscr{S}$-интегрируемым лифтингом функции ${}^\circ({}^*f|_{M_n})$ и выполняются равенства

$$\int\limits_{\mathfrak{X}_n} \overline{f}_n\, d\mu_n = \int\limits_{M_n} {}^\circ({}^*f|_{M_n})\, d\nu_{\Delta_n} =$$

$$= {}^\circ\!\left(\Delta_n \sum_{\xi\in M_n} {}^*\overline{f}_n(\xi)\right) = {}^\circ\!\left(\Delta_n \sum_{\xi\in X} {}^*f_n(\xi)\right).$$

Последнее равенство справедливо ввиду того, что $\frac{\Delta}{\Delta_n} \approx 1$ и ${}^*f_n(\xi) = 0$ при $\xi \in X - M_n$. Из сказанного следует также, что ${}^*f_n|_X$ — это $\mathscr{S}_M$-интегрируемый лифтинг функции $\jmath_1(f_n)$ и, стало быть, верно равенство $\int_{\mathfrak{X}} f_n\,d\mu = \int_M \jmath_1(f_n)\,d\nu_\Delta^M$. Поскольку последовательность $(\jmath_1(f_n))$ монотонно возрастает и сходится поточечно к $\jmath_1(f)$, то предельный переход в последнем равенстве приводит к выводу о том, что это же равенство справедливо для f и $\jmath_1(f) \in L_1(\nu_\Delta)$. По теореме 6.4.5 имеем

$$
{}^\circ\!\left(\Delta \sum_{\xi \in X} |{}^*f_n(\xi) - {}^*f(\xi)|\right) = \int_{\mathfrak{X}} |f_n - f|\,d\mu \to 0.
$$

Используя замкнутость $\mathscr{S}(M)^\#$ в $\mathscr{L}^\#$ (см. 6.3.12 (3)), заключаем теперь, что ${}^*f|_X$ входит в $\mathscr{S}(M)$ и, следовательно, служит $\mathscr{S}_M$-интегрируемым лифтингом функции $\jmath_1(f)$. $\triangleright$

6.4.8. Для многих конкретных пространств (X, Ω, μ) с σ-конечной мерой существуют вложения $L_p(\mu)$ в $L_p(\nu_\Delta^M)$, отличные от описанного выше вложения, связанного с σ-конечным подпространством $(M, S_\Delta^M, \nu_\Delta^M)$ подходящего пространства Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$. Большинство из них основаны на построении отображения $\varphi : M \to \mathfrak{X}$, сохраняющего меру. Такое отображение φ индуцирует для каждого $p \in [1, \infty)$ вложение $\jmath_p^\varphi : L_p(\mu) \to L_p(\nu_\Delta^M)$ по формуле $\jmath_p^\varphi(f) := f \circ \varphi$ $(f \in L_p(\mu))$. По теореме 6.3.13 и ее следствию 6.3.14 $\jmath_p^\varphi(f)$ имеет лифтинг $F \in \mathscr{S}_p(M)$, который мы называем лифтингом f. В частности, верно следующее утверждение.

(1) *Если $f \in L_1(\mu)$ и F — это $\mathscr{S}_M$-интегрируемый лифтинг функции f, то*

$$
\int_{\mathfrak{X}} f\,d\mu = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{\xi \in X} F(\xi)\right).
$$

Отметим также, что представляет интерес задача построения F при данном f. В предыдущих пунктах эта задача была решена весьма простым специальным образом, а именно: для подходящего гиперконечного множества $X \subset {}^*\mathfrak{X}$ выполняется

(2) $F = {}^*f|_X$ для всех $f \in L_1(\mu)$.

В общей ситуации равенство (2) не имеет места, даже если $X \subset {}^*\mathfrak{X}$. Ниже мы рассмотрим один вид вложения, для которого (2) выполняется для достаточно широкого класса интегрируемых функций. Сначала разберем хорошо известный пример.

(3) Пусть $\mathfrak{X} := [0,1]$ и μ — мера Лебега на $\mathfrak{X}$. Зафиксируем произвольное гипердействительное число $\Delta \approx 0$ и положим $N := [\Delta^{-1}]$ и $X := \{k\Delta : k = 1, \dots, N\}$. В этом случае пространство Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$ будет пространством с конечной мерой: $\nu_\Delta(X) = 1$, поэтому $M = X$. В качестве отображения $\varphi : X \to \mathfrak{X}$ возьмем st (напомним, что $\mathrm{st}(k\Delta) = {}^\circ(k\Delta)$). Можно показать, что множество $\mathscr{A} \subset [0,1]$ будет измеримым по Лебегу в том и только в том случае, если $\mathrm{st}^{-1}(\mathscr{A})$ измеримо по Лёбу и при этом $\mu(\mathscr{A}) = \nu_\Delta(\mathrm{st}^{-1}(\mathscr{A}))$. Не для всякой интегрируемой по Лебегу функции f выполняется равенство (2). В этом можно легко убедиться, если взять $\Delta \in {}^*\mathbb{Q}$ и рассмотреть функцию Дирихле. Однако если f интегрируема по Риману на $[0,1]$ и F определено как в (2), то выполняется (1) в силу 2.3.16. Покажем, что в этом случае $F := {}^*f|_X$ действительно является $\mathscr{S}$-интегрируемым лифтингом функции f.

Поскольку f ограничена, а внутренняя равномерная мера ν_Δ конечна, то F удовлетворяет условию 6.3.7 (1) и, следовательно, является $\mathscr{S}$-интегрируемой. Если $\mathscr{A}$ — множество точек разрыва функции f, то $\mu(\mathscr{A}) = 0$, так как f интегрируема по Риману. Если $k\Delta \in X - \mathrm{st}^{-1}(\mathscr{A})$, то f непрерывна в точке ${}^\circ(k\Delta)$, стало быть, ${}^*f(k\Delta) \approx f({}^\circ(k\Delta))$. Таким образом, ${}^\circ F(\xi) = f(\mathrm{st}(\xi))$ для почти всех $\xi \in X$, поэтому F служит лифтингом функции $f \circ \mathrm{st}$, а это означает, что F — лифтинг f.

6.4.9. Предположим теперь, что $\mathfrak{X}$ — сепарабельное локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, μ — борелевская мера на $\mathfrak{X}$, конечная на компактных множествах (μ будет регулярной из-за сепарабельности $\mathfrak{X}$) и Ω — пополнение борелевской σ-алгебры относительно меры μ. Предположим, далее, что $\mathfrak{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}_n$, где $\mathfrak{X}_n$ — компакт и $\mu(\mathfrak{X}_n) < +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathrm{nst}\,({}^*\mathfrak{X}) = \bigcup {}^*\mathfrak{X}_n$. Напомним, что отображение $\mathrm{st} : \mathrm{nst}\,({}^*\mathfrak{X}) \to \mathfrak{X}$ вводится формулой $\mathrm{st}(x) \approx x$ ($x \in \mathrm{nst}\,({}^*\mathfrak{X})$) (см. 4.3.4 и 4.3.6).

(1) Пусть X — гиперконечное множество, $\jmath : X \to {}^*\mathfrak{X}$ — внутреннее отображение, $\Delta \in {}^*\mathbb{R}$ и $M := \jmath^{-1}(\mathrm{nst}\,({}^*\mathfrak{X}))$.

Тройку $(X, \jmath, \Delta)$ назовем *гиперприближением* или *гиперконечной реализацией* пространства с мерой $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ при условии, что отображение $\varphi : (M, S_\Delta^M, \nu_\Delta^M) \to (\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$, определяемое как $\varphi := \mathrm{st} \circ \jmath|_M$, измеримо и сохраняет меру.

Заметим, что $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \jmath^{-1}({}^*\mathfrak{X}_n)$, поэтому в этой ситуации

$(M, S_\Delta^M, \nu_\Delta^M)$ представляет собой σ-конечное подпространство пространства Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$.

Ниже сформулируем одно достаточное условие, когда функция $F := {}^*f \circ \jmath$ будет $\mathscr{S}_M$-интегрируемым лифтингом f. Для этой цели введем следующее условие, означающее, что функция f достаточно быстро убывает на бесконечности:

$$\textbf{(2)}\ \ (\forall B \in {}^*\mathscr{P}(X))\Big(B \subset X - M \rightarrow \Delta \sum_{x \in B} |{}^*f(\jmath(x))| \approx 0\Big).$$

6.4.10. *Пусть $(X, \jmath, \Delta)$ — произвольное гиперприближение пространства $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$. Предположим, что функция $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ ограничена, μ-интегрируема, μ-почти всюду непрерывна и удовлетворяет условию 6.4.9 (2). Тогда функция $F := {}^*f \circ \jmath$ служит $\mathscr{S}_M$-интегрируемым лифтингом f и, следовательно,*

$$\int_{\mathfrak{X}} f\, d\mu = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{x \in X} {}^*f(\jmath(x))\right).$$

$\triangleleft$ Покажем сначала, что F — это $\mathscr{S}_M$-интегрируемая функция. Условие 6.3.11 (2) выполняется из-за ограниченности f, а 6.3.11 (3) следует из условия 6.4.9 (2). Чтобы проверить 6.3.11 (1), обозначим $M_n := \jmath^{-1}({}^*\mathfrak{X}_n)$ и заметим, что ${}^*f \circ \jmath|_{M_n}$ является $\mathscr{S}$-интегрируемой функцией. Это следует из ограниченности f и конечности $\nu_\Delta(M_n)$ (см. 6.3.7 (1)). Рассуждая так же, как и в конце 6.4.8 (3), приходим к выводу о том, что ${}^*f \circ \jmath|_{M_n}$ — лифтинг функции $f|_{\mathfrak{X}_n}$, поэтому согласно 6.4.6 (2) будет

$$\int_{\mathfrak{X}_n} |f|\, d\mu = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{x \in M_n} |{}^*f \circ \jmath|(x)\right) \leq \int_{\mathfrak{X}} |f|\, d\mu.$$

Отсюда вытекает существование стандартной константы C такой, что для любого внутреннего множества $\mathscr{D} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ выполняется $\Delta \sum_{x \in \mathscr{D}} |F|(x) < C$. Привлекая счетное насыщение нестандартного универсума, получаем справедливость последнего неравенства для некоторого внутреннего множества $\mathscr{D} \supset M$. Требование 6.3.11 (1) следует из условия 6.4.9 (2) для множества $B := X - \mathscr{D}$. Так как ${}^*f \circ \jmath|_{M_n}$ — лифтинг функции $f|_{\mathfrak{X}_n}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, то ${}^*f \circ \jmath$ — лифтинг функции f. $\triangleright$

Аналогичное утверждение, разумеется, имеет место для ограниченной μ-почти всюду непрерывной функции $f \in L_p(\mu)$, где $p \in [1, \infty)$.

6.4.11. Рассмотрим пример. Пусть Ω — это σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств на вещественной прямой $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$, а μ — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Выберем гипернатуральное число $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ и гипердействительное число $\Delta \in {}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$ так, чтобы $\Delta \approx 0$ и $N\Delta \approx +\infty$. Для удобства обозначений предположим, что $N = 2L + 1$, и рассмотрим гиперконечное множество $X := \{k\Delta : k = -L, \dots, L\}$. Пусть $\mathfrak{X}_n := [-n, n]$ и $\jmath : X \to {}^*\mathbb{R}$ — тождественное вложение. Тогда $M_n = X \cap {}^*[-n, n]$ и $M = X \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^*[-n, n]$.

(1) Нетрудно видеть, что условие 6.4.9 (2) можно записать в виде

$$(\forall k, l)\Bigg(|k| < |l| < L \wedge |k|\Delta \approx +\infty \to \Delta \sum_{n=k}^{l} |{}^*f(n\Delta)| \approx 0\Bigg).$$

(2) Это соотношение верно для любых L, если только $L\Delta \approx +\infty$, поэтому оно равносильно равенству

$$\lim_{\substack{\Delta\to 0\\ A\to\infty}} \Delta \sum_{|k|>\frac{A}{\Delta}} |f(k\Delta)| = 0.$$

(3) Для функций, абсолютно интегрируемых по Риману, последнее равносильно, в свою очередь, предельному соотношению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh).$$

Хорошо известно, что класс таких функций достаточно широк.

6.4.12. Примечания.

(1) Основные результаты этого параграфа, включая понятия σ-конечного подпространства пространства Лёба и $\mathscr{S}_M$-интегрируемости, принадлежат Е. И. Гордону [47, 325]. Значительная часть применений мер Лёба относится к теории вероятностей и в этой связи наибольшее внимание уделялось конечным мерам Лёба.

Конечные меры Радона, индуцированные мерами Лёба, а также отображение st изучались в [250] и других публикациях (см. обзор [285] и монографию [5]). Однако вопрос о том, когда $\jmath \circ {}^*f|_X$ служит лифтингом функции f, в этих источниках не рассматривался.

Другую конструкцию лифтинга на интервале $[0,1]$ можно найти в [285]. Изучение σ-конечных мер Лёба существенно для наших дальнейших целей, так как в следующей главе конструкция меры Лёба применяется к изучению меры Хаара на локально компактной абелевой группе, а такие меры обычно не являются конечными.

(2) Условие 6.4.9 (2) выполняется автоматически для функций с компактным носителем; оно также излишне для пространств с конечной мерой. Недостаток этого условия состоит в том, что оно формулируется в терминах, зависящих от гиперприближения, хотя иногда (см. 6.4.11) может быть переформулировано в стандартных терминах. Более того, часто гиперприближение можно выбрать так, что условие 6.4.9 (2) окажется излишним.

(3) Еще раз вернемся к примеру 6.4.11 и выберем L и Δ следующим образом. Зафиксируем бесконечно большое $\tau \in {}^*\mathbb{R}$ и возьмем $\Delta \overset{\tau}{\approx} 0$ и $L = \left[\frac{\tau}{\Delta}\right]$. Как и выше, тройка $(X, \jmath, \Delta)$ будет гиперприближением пространства с мерой $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$, где $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$, а Ω — это σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств и μ — мера Лебега. Предложение 4.6.13 показывает, что 6.4.10 выполняется для любой функции, абсолютно интегрируемой по Риману на $\mathbb{R}$ и непрерывной почти всюду. Если f — такая функция, то ${}^*f \circ \jmath$ будет $\mathscr{S}_M$-интегрируемой. Это можно без труда получить из $\mathscr{S}$-интегрируемости ${}^*f|_{{}^*[-n,n]} \circ \jmath$ при всех $n \in \mathbb{N}$, равенства из 6.4.10 и замкнутости $\mathscr{S}_M^{\#}$ в $\mathscr{L}^{\#}$ (см. доказательство теоремы 6.4.7).

(4) Соловей [480] (см. также [76]) ввел понятие случайного числа как числа, не принадлежащего никакому множеству нулевой меры, имеющему конструктивное описание в смысле Гёделя. Он удачно применил это понятие к доказательству того, что некоторые утверждения теории меры независимы от аксиом ZFC. В теории сложности А. Н. Колмогорова также встречается аналогичное понятие (принадлежащее Мартин-Лёфу [425]) случайной 0–1 последовательности как последовательности, не лежащей ни в одном множестве нулевой меры, имеющем конструктивное описание в смысле А. А. Маркова. Аналогичные понятия случайного элемента для $[0,1]$ с мерой Лебега и независимой последовательности случайных элементов были введены в [515], где была доказана в этой ситуации теорема 6.4.4. Доказательство использует закон больших чисел. Для стандартного пространства с конечной мерой теорема 6.4.4 была установлена в [335] с помощью совершенно иных соображений.

6.5. Гиперприближение интегральных операторов

В этом параграфе рассматривается вопрос о возможности приближения интегрального оператора гиперконечномерным оператором.

6.5.1. Напомним, что для гиперконечного множества X, стандартного $p \in [1, \infty]$ и $\Delta \in {}^*\mathbb{R}_+$ символом $\mathscr{L}^X_{p,\Delta}$ обозначается внутреннее пространство функций $F : X \to {}^*\mathbb{F}$ (где $\mathbb{F}$ — одно из полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с нормой

$$\|F\|_{p,\Delta} := {}^{\circ}\Bigg(\Delta \sum_{\xi \in X} |F(\xi)|^p\Bigg)^{1/p} \quad \big(F \in \mathscr{L}^X_{p,\Delta}\big)\,.$$

Это пространство гиперконечномерно и $\dim(\mathscr{L}^X_{p,\Delta}) = |X|$. Нестандартная оболочка $(\mathscr{L}^X_{p,\Delta})^{\#}$ — внешнее банахово пространство, несепарабельное при условии, что $|X|$ — бесконечное гипернатуральное число. Для $p = 2$ норма $\|F\|_{2,\Delta}$ порождается скалярным произведением $(F, G) = \Delta \sum_{\xi \in X} F(\xi)\overline{G}(\xi)$, следовательно, $(\mathscr{L}^X_{2,\Delta})^{\#}$ — несепарабельное гильбертово пространство. Как и выше, мы пишем $\mathscr{L}_p$ вместо $\mathscr{L}^X_{p,\Delta}$, если это не приводит к путанице.

Если $(M, S^M_\Delta, \nu^M_\Delta)$ — это σ-конечное подпространство пространства Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$, то $\mathscr{S}_p(M)^{\#}$ — замкнутое подпространство $\mathscr{L}^{\#}_p$ (см. 6.3.12 (3)). Из 6.3.14 видно, что это подпространство изоморфно $L_p(\nu^M_\Delta)$. Изоморфизм устанавливается путем сопоставления каждой функции $f \in L_p(\nu^M_\Delta)$ класса эквивалентности $F^{\#}$ ее лифтинга $F \in \mathscr{S}_p(M)$. На этом основании будем считать в дальнейшем, что $L_p(\nu^M_\Delta) \subset \mathscr{L}^{\#}_p$.

Предположим, что $(\mathfrak{X}_k, \Omega_k, \mu_k)$ для $k := 1, 2$ — стандартные пространства с σ-конечными мерами. Допустим также, что заданы два пространства Лёба $(X_k, S_{\Delta_k}, \nu_{\Delta_k})$, их σ-конечные подпространства $(M_k, S^{M_k}_{\Delta_k}, \nu^{M_k}_{\Delta_k})$ и вложения

$$\jmath^{M_k}_{p_k} : L_{p_k}(\mu_k) \to L_{p_k}(\nu^{M_k}_{\Delta_k}) \subset \mathscr{L}^{\#}_{p_k}$$

для некоторых $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$.

Пусть $\mathscr{A} : L_{p_1}(\mu_1) \to L_{p_2}(\mu_2)$ — ограниченный линейный оператор. Доступный внутренний оператор $A : \mathscr{L}_{p_1} \to \mathscr{L}_{p_2}$ называют *гиперприближением* или, более подробно, *гиперконечномерным* *приближением* оператора $\mathscr{A}$, если для каждого $f \in \mathscr{L}_{p_1}(\mu_1)$ выполняется $\|G - A(F)\|_{p_2,\Delta_2} \approx 0$, где $F \in \mathscr{L}_{p_1}$ — лифтинг f и $G \in \mathscr{L}_{p_2}$ — лифтинг $\mathscr{A}(f)$. В подобных случаях широко применяют термины типа «A гиперприближает $\mathscr{A}$».

Пусть, как и в 6.4.8, вложение $\jmath_p^M$ индуцируется некоторым внутренним отображением $\jmath : X \to {}^*\mathfrak{X}$ и лифтингом f служит функция ${}^*f \circ \jmath$, т. е. последнюю можно рассматривать как таблицу значений f в узлах, образующих гиперконечное множество $\jmath(X)$ (равенство из 6.4.10 показывает, что именно так и естественно поступать). В этом случае оператор A приближает $\mathscr{A}$, если он переводит таблицу функции f в вектор, бесконечно близкий к таблице образа $\mathscr{A}(f)$ функции f.

(1) *Внутренний оператор $A : \mathscr{L}_{p_1} \to \mathscr{L}_{p_2}$ гиперприближает оператор $\mathscr{A} : L_{p_1}(\mu_1) \to L_{p_2}(\mu_2)$ в том и только в том случае, если коммутативна диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc}
L_{p_1}(\mu_1) & \xrightarrow{\mathscr{A}} & L_{p_2}(\mu_2) \\
{\scriptstyle \jmath_{p_1}^{M_1}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \jmath_{p_2}^{M_2}} \\
\mathscr{L}_{p_1}^{\#} & \xrightarrow{A^{\#}} & \mathscr{L}_{p_2}^{\#}.
\end{array}$$

(2) *Допустим, что линейная оболочка множества $\mathfrak{M} \subset L_{p_1}(\mu_1)$ плотна в $L_{p_1}(\mu_1)$. Если оператор A гиперприближает оператор $\mathscr{A}$ на $\mathfrak{M}$, то A — гиперприближение $\mathscr{A}$.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$ обозначает линейную оболочку множества $\mathfrak{M}$. По условию диаграмма из (1) коммутативна, если заменить в ней $L_{p_1}(\mu_1)$ на $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$. Но тогда коммутативна и исходная диаграмма, ибо множество $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$ плотно в $L_{p_1}(\mu_1)$. $\triangleright$

6.5.2. Напомним, что оператор $\mathscr{A}_k : L_{p_1}(\mu_1) \to L_{p_2}(\mu_2)$ называют *интегральным*, если существует измеримая функция $k : \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \to \mathbb{F}$ такая, что для каждого $f \in L_{p_1}(\mu_1)$ значение $g := \mathscr{A}_k(f)$ представляет собой функцию, вычисляемую по формуле

$$g(s) = \int\limits_{\mathfrak{X}_1} k(s,t) f(t)\, d\mu_1(t).$$

При этом функцию $k(\cdot,\cdot)$ называют *ядром* интегрального оператора $\mathscr{A}_k$.

То обстоятельство, что $\mathscr{A}_k$ — интегральный оператор с ядром k, записывается короче в виде

$$\mathscr{A}_k(f)(s) = \int\limits_{\mathfrak{X}_1} k(s,t)f(t)\,d\mu_1(t) \quad (f \in L_{p_1}(\mu_1)).$$

Рассмотрим интегральный оператор $\mathscr{A}_k : L_{p_1}(\mu_1) \to L_{p_2}(\mu_2)$. Естественным образом возникает вопрос о том, можно ли построить гиперприближение оператора $\mathscr{A}$, используя лифтинг ядра k, если последний существует. Здесь следует иметь в виду, что, вообще говоря,

$$\Big(M_1 \times M_2, S_{\Delta_1}^{M_1} \otimes S_{\Delta_2}^{M_2}, \nu_{\Delta_1}^{M_1} \otimes \nu_{\Delta_2}^{M_2}\Big) \neq \Big(M_1 \times M_2, S_{\Delta_1\Delta_2}^{M_1 \times M_2}, \nu_{\Delta_1\Delta_2}^{M_1 \times M_2}\Big).$$

(Правая часть этого соотношения представляет собой σ-конечное подпространство пространства Лёба $(X_1 \times X_2, S_{\Delta_1\Delta_2}^{X_1 \times X_2}, \nu_{\Delta_1\Delta_2}^{X_1 \times X_2})$.)

Известно (см. [250]), что если M_1 и M_2 — пространства с конечными мерами Лёба (в этом случае можно считать M_1 и M_2 внутренними множествами), то $S_{\Delta_1}^{M_1} \otimes S_{\Delta_2}^{M_2} \subset S_{\Delta_1\Delta_2}^{M_1 \times M_2}$, причем тождественное вложение сохраняет меру.

Этот же результат остается в силе для σ-конечных подпространств пространств Лёба, так как σ-конечное подпространство является дизъюнктным объединением счетного семейства пространств Лёба с конечными мерами.

Таким образом, $L_r(\nu_{\Delta_1}^{M_1} \otimes \nu_{\Delta_2}^{M_2})$ вложено с сохранением нормы в $L_r(\nu_{\Delta_1\Delta_2}^{M_1 \times M_2})$ для каждого $r \in [1,\infty)$. Так как вложения $\jmath_r^{M_\imath} : L_r(\mu) \to L_r(\nu_{\Delta_\imath}^{M_\imath})$ для $\imath := 1,2$ индуцируют вложение $\jmath_r^{M_1 \times M_2} : L_r(\mu_1 \otimes \mu_2) \to L_r(\nu_{\Delta_1}^{M_1} \otimes \nu_{\Delta_2}^{M_2}) \subset L_r(\nu_{\Delta_1\Delta_2}^{M_1 \times M_2})$, то каждая функция $k \in L_r(\mu_1 \otimes \mu_2)$ имеет лифтинг $K \in \mathscr{S}_r(M_1 \times M_2)$.

Естественный интерес представляют в этой связи условия, при которых матрица K определяет гиперприближение A оператора $\mathscr{A}$. Ниже этот вопрос будут рассмотрен для операторов Гильберта — Шмидта.

До конца текущего параграфа зафиксируем следующие обозначения: $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ — пространство с σ-конечной мерой, $(M, S_\Delta^M, \nu_\Delta^M)$ символизирует σ-конечное подпространство пространства Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$ и, наконец, указано вложение $\jmath_2 : L_r(\mu) \to L_r(\nu_\Delta^M)$.

Интегральный оператор $\mathscr{A}_k : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ с ядром k называют *оператором Гильберта — Шмидта*, если $k \in L_2(\mu \otimes \mu)$. Хорошо известно, что для оператора Гильберта — Шмидта имеет место оценка

$$\|\mathscr{A}_k\| \leq \left(\int\limits_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}} |k|^2 \, d\mu \otimes d\mu \right)^{1/2}.$$

Для внутренней функции $K \in \mathscr{S}_2(M \times M)$ определим внутренний оператор $A_K : \mathscr{L}_2 \to \mathscr{L}_2$ формулой

$$A_K(F)(\xi) := \Delta \sum_{\eta \in X} K(\xi, \eta) F(\eta) \quad (F \in \mathscr{L}_2, \ \xi \in X).$$

Легко видеть, что для нормы оператора A_K справедливо следующее неравенство:

$$\|A_K\| \leq \left(\Delta^2 \sum_{\xi,\eta \in X} |K(\xi,\eta)|^2 \right)^{1/2}.$$

6.5.3. Теорема. *Если $\mathscr{A}_k : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — оператор Гильберта — Шмидта с ядром $k \in L_2(\mu \otimes \mu)$ и $K \in \mathscr{S}_2(M \times M)$ — лифтинг k (или, точнее, K — лифтинг функции $\jmath_2^{M\times M}(k) \in L_2(\nu_{\Delta^2}^{M\times M})$), то оператор $A_K : \mathscr{L}_2 \to \mathscr{L}_2$ служит гиперприближением оператора $\mathscr{A}_k$.*

$\triangleleft$ Вначале покажем, что множество тех k, для которых имеет место сформулированная теорема, замкнуто в $L_2(\mu \otimes \mu)$. Допустим, что требуемое верно для каждого $k_n \in L_2(\mu \otimes \mu)$ $(n \in \mathbb{N})$ и $\|k - k_n\|_{L_2(\mu\otimes\mu)} \to 0$ при $n \to \infty$. Так как $\mathscr{A}_k - \mathscr{A}_{k_n} = \mathscr{A}_{k-k_n}$ по определению оператора $\mathscr{A}_k$, то из указанной в 6.5.2 оценки для нормы оператора $\mathscr{A}_k$ выводим $\|\mathscr{A}_k - \mathscr{A}_{k_n}\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $K_n \in \mathscr{S}_2(M \times M)$ — лифтинг k_n и $K \in \mathscr{S}_2(M \times M)$ — лифтинг k. Тогда справедливы соотношения

$$\|A_K^\# - A_{K_n}^\#\| = {}^\circ\|A_K - A_{K_n}\| = {}^\circ\|A_{K-K_n}\| \leq$$
$$\leq {}^\circ\left(\Delta^2 \sum_{\xi,\eta\in X} |K(\xi,\eta) - K_n(\xi,\eta)|^2 \right)^{1/2} = \|k - k_n\|_{L_2(\mu\otimes\mu)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Воспользуемся теперь коммутативностью диаграммы 6.5.1 (2) для операторов $\mathscr{A}_{k_n}$ и A_{K_n}. Возьмем $f \in L_2(\mu)$. Тогда

$$\jmath_2(\mathscr{A}_k(f)) = \lim_{n\to\infty} \jmath_2(\mathscr{A}_{k_n}(f)) = \lim_{n\to\infty} A_{K_n}^\#(\jmath_2(f)) = A_K^\#(\jmath_2(f)).$$

Для завершения доказательства нужно показать, что требуемое верно для функций k вида $\varphi \otimes \psi$, где $\varphi \otimes \psi(s,t) := \varphi(s) \cdot \psi(t)$. Поскольку линейные комбинации таких функций плотны в $L_2(\mu \otimes \mu)$, то тем самым будет установлена сформулированная теорема ввиду предложения 6.5.1 (1).

Итак, пусть $k := \varphi \otimes \psi$, где $\varphi, \psi \in L_2(\mu)$. Пусть $\Phi, \Psi \in \mathscr{S}_2(M)$ — лифтинги φ и ψ соответственно. Предположим также, что $F \in \varphi_2(M)$ — лифтинг функции $f \in L_2(\mu)$ и $G \in \mathscr{S}_2(M)$ — лифтинг функции $\mathscr{A}_k(f)$. Как видно, $\eta \mapsto \Psi(\eta) \cdot F(\eta)$ будет лифтингом функции $t \mapsto \psi(t) \cdot f(t)$. Привлекая неравенство Коши — Буняковского и тот факт, что $\Psi, F \in \mathscr{S}_2(M)$, легко усмотреть вхождение $\Psi \cdot F \in \mathscr{S}(M)$, стало быть,

$$\alpha := \int\limits_{\mathfrak{X}} \psi(t) f(t)\, d\mu(t) \approx \sum_{\eta \in X} \Psi(\eta) F(\eta) =: \beta.$$

Лифтинг G функции $\mathscr{A}_k(f)$ совпадает с $\alpha \cdot \Phi$, поскольку $\mathscr{A}_k(f) = \alpha \cdot \varphi$. В то же время из определения оператора A_K вытекает равенство $A_K(F) = \beta \cdot \Phi$. Таким образом, $\|G - A_K(F)\|_2 = |\alpha - \beta| \cdot \|\Phi\|_2 \approx 0$, что и требовалось. $\rhd$

6.5.4. Из доказанной теоремы и из 6.4.7 вытекает следующее утверждение.

(1) *Каждый оператор Гильберта — Шмидта, действующий в пространстве $L_2(\mu)$ с σ-конечной мерой μ, обладает гиперприближением.*

Предположим, что $\mathfrak{X}$ — это сепарабельное локально компактное пространство, μ — борелевская мера на $\mathfrak{X}$, а Ω — пополнение σ-алгебры борелевских множеств относительно μ.

Пусть $(X, \jmath, \Delta)$ — произвольное гиперприближение пространства с мерой $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ (см. 6.4.9 (1)). Рассмотрим пространство $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ с топологией произведения. Тогда $\operatorname{nst}({}^*\mathfrak{X} \times {}^*\mathfrak{X}) = \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{X}) \times \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{X})$ и $\operatorname{st}((\xi, \eta)) = (\operatorname{st}(\xi), \operatorname{st}(\eta))$ для $\xi, \eta \in \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{X})$. Отсюда непосредственно вытекает, что $(X \times X, \jmath \otimes \jmath, \Delta^2)$ — гиперприближение пространства $(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}, \Omega \otimes \Omega, \mu \otimes \mu)$. Легко проверить, что

(2) Для ограниченной $\mu \otimes \mu$-почти всюду непрерывной функции $f : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ условие 6.4.9 (2) того, что функция f достаточно быстро убывает на бесконечности, равносильно следующему:

$$(\forall B \in {}^*\mathscr{P}(X))(B \subset X - M) \to$$
$$\to \Delta^2 \Biggl(\sum_{x\in B} \sum_{y\in X} |{}^*f(\jmath(x), \jmath(y))| + \sum_{x\in X} \sum_{y\in B} |{}^*f(\jmath(x), \jmath(y))| \Biggr) \approx 0.$$

(3) *Пусть $\mathfrak{X}$ — сепарабельное локально компактное топологическое пространство с борелевской мерой μ, пусть $(X, \jmath, \Delta)$ — гиперприближение пространства $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$. Тогда для любой ограниченной $\mu \otimes \mu$-почти всюду непрерывной функции $k \in L_2(\mu \otimes \mu)$, для которой $|k|^2$ удовлетворяет условию* (2), *оператор A_K, где $K := {}^*k|_{\jmath(X)\times\jmath(X)}$, представляет собой гиперприближение оператора $\mathscr{A}_k$.*

6.5.5. Дадим теперь простое достаточное условие, при котором функция $f : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет 6.5.4 (2).

(1) *Предположим, что функция $f : \mathfrak{X}^2 \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству*

$$|f(x, y)| \leq \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y) \quad (x, y \in \mathfrak{X}),$$

где φ_1 и φ_2 — некоторые ограниченные интегрируемые μ-почти всюду непрерывные функции, удовлетворяющие условию достаточно быстрого убывания на бесконечности 6.4.9 (2). *Тогда f удовлетворяет условию* 6.5.4 (2).

◁ По условию φ_1 and φ_2 удовлетворяют 6.4.9 (2) и 6.4.10. Таким образом, если $B \subset X - M$, то

$$\Delta^2 \sum_{x\in B} \sum_{y\in X} |{}^*f(\jmath(x), \jmath(y))| \leq$$
$$\leq \Delta \sum_{x\in B} {}^*\varphi_1(\jmath(x)) \Delta \sum_{y\in X} {}^*\varphi_2(\jmath(y)) \approx \int_{\mathfrak{X}} \varphi_2 \, d\mu \cdot \Delta \sum_{x\in B} {}^*\varphi_1(\jmath(x)) \approx 0,$$

что и требовалось. ▷

Установленное предложение равносильно следующему.

(2) *Пусть $k \in L_2(\mu \otimes \mu)$ — ограниченная почти всюду непрерывная функция, причем $|k|^2$ удовлетворяет* 6.5.4 (2) (*или неравенству из* (1)). *Тогда для любой ограниченной почти всюду непре-*

рывной функции $f \in L_2(\mu)$, достаточно быстро убывающей на бесконечности (см. 6.4.9 (2)), *справедливо соотношение:*

$$\Delta \sum_{x\in X} \left| \int_{{}^*\mathfrak{X}} {}^*k(\jmath(x), \eta)^*f(\eta)\, d\,{}^*\mu(\eta) - \Delta \sum_{y\in X} {}^*k(\jmath(x), \jmath(y))^*f(\jmath(y)) \right|^2 \approx 0.$$

6.5.6. В том частном случае, когда $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$ (см. 6.4.11), получаем следующее следствие.

(1) *Пусть $k \in L_2(\mathbb{R}^2)$ — некоторая ограниченная почти всюду непрерывная функция, для которой $|k|^2$ удовлетворяет неравенству из* 6.5.5 (1) *для некоторых абсолютно интегрируемых функций φ_1 и φ_2 на $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию* 6.4.11 (3) (*перефразирующему требование достаточного быстрого убывания на бесконечности*). *Допустим, что $\Delta \approx 0$ и $L \in {}^*\mathbb{N}$ таковы, что $L\Delta \approx +\infty$. Тогда для любой ограниченной почти всюду непрерывной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию* 6.4.11 (3), *имеет место соотношение*

$$\Delta \sum_{\alpha=-M}^{M} \left| \int_{-\infty}^{\infty} {}^*k(\alpha\Delta, y)^*f(y)\, dy - \Delta \sum_{\beta=-L}^{L} {}^*k(\alpha\Delta, \beta\Delta)^*f(\beta\Delta) \right|^2 \approx 0.$$

Если положить $X := \{k \in {}^*\mathbb{N} : |k| \leq L\}$, определить $\jmath : X \to {}^*\mathbb{R}$ правилом $\jmath(k) = k\Delta$ и задать функцию $K : X^2 \to {}^*\mathbb{R}$ формулой $K := {}^*k|_{\jmath(X)\times\jmath(X)}$, то соотношение из (1) равносильно тому, что A_K — гиперприближение оператора $\mathscr{A}_k$ (см. 6.5.5 (2)).

(2) *Если $\tau \approx +\infty$, $\Delta \overset{\tau}{\approx} 0$ и $L := \left[\frac{\tau}{\Delta}\right]$, то соотношение из* (1) *выполняется для любых ограниченных почти всюду непрерывных функций $k \in L_2(\mathbb{R}^2)$ и $f \in L_2(\mathbb{R})$.*

◁ Рассуждая аналогично тому, как это сделано в 4.6.13, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |k(x,y)|^2\, dx\, dy = {}^\circ\!\left(\Delta^2 \sum_{\alpha,\beta=-L}^{L} |{}^*k(\alpha\Delta, \beta\Delta)|^2\right).$$

Но тогда, как и выше, легко показать, что K входит в $\mathscr{S}_2(M \times M)$ и является лифтингом k, даже если $|k|^2$ не удовлетворяет 6.5.4 (2). ▷

Утверждения (1) и (2) остаются в силе, если вместо $\mathbb{R}$ рассмотреть $\mathbb{R}^n$ для произвольного $n \geq 1$ (в этом случае $k \in L_2(\mathbb{R}^{2n})$).

6.5.7. Рассмотрим теперь стандартные варианты некоторых полученных выше результатов. Естественный подход здесь состоит в применении алгоритма Нельсона.

В качестве примера рассмотрим предложение 6.5.4 (1). В соответствии с теоремой 6.4.7 можно считать, что $X \subset {}^*\mathfrak{X}$ и что лифтингом функции $f \in L_2(\mu)$, содержащимся в $\mathscr{S}_2(M)$, служит ${}^*f|_X$. Заметим, что для лифтинга $K : X^2 \to {}^*\mathbb{R}$ в $\mathscr{S}_2(M)$ функции $k \in L_2(\mu\otimes\mu)$ аналогичное равенство, вообще говоря, не имеет места, так как пара (X^2, Δ) может не удовлетворять заключению теоремы 6.4.5 для пространства $(\mathfrak{X}^2, \Omega\otimes\Omega, \mu\otimes\mu)$. Тем не менее такой лифтинг K существует ввиду замечаний из 6.5.2.

Пусть $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ — это пространство с σ-конечной мерой и $k \in L_2(\mu\otimes\mu)$. Тогда для любого конечного множества $\Phi \subset L_2(\mu)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $X \subset \mathfrak{X}$, $\Delta \in \mathbb{R}$ и $K : X^2 \to \mathbb{R}$, такие что

$$\Bigg|\iint\limits_{\mathfrak{X}^2} |k|^2\,d\mu - \Delta^2\sum_{x,y}|K(x,y)|^2\Bigg| < \varepsilon,$$

и для каждого $f \in \Phi$ выполняется

$$\Delta\sum_{x\in X}\Bigg|\int\limits_{\mathfrak{X}} k(x,\eta)f(\eta)\,d\mu(\eta) - \Delta\sum_{y\in X}K(x,y)f(y)\Bigg|^2 < \varepsilon.$$

$\lhd$ Предложение 6.5.4 (1) можно записать в следующем виде.

Пусть $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ — стандартное пространство с σ-конечной мерой. Возьмем стандартную функцию $k \in L_2(\mu\otimes\mu)$. Тогда

$$(\exists^{\mathrm{fin}} X \subset \mathfrak{X})(\exists\Delta \in \mathbb{R}_+)(\exists K : X^2 \to \mathbb{R})(\forall^{\mathrm{st}} f \in L_2(\mu))(\forall^{\mathrm{st}} 0 < \varepsilon \in \mathbb{R})$$
$$\Bigg(\Bigg|\iint\limits_{\mathfrak{X}^2} |k|^2\,d\mu\otimes\mu - \Delta^2\sum_{x,y\in X}|K(x,y)|^2\Bigg| < \varepsilon\ \wedge$$
$$\wedge\ \Delta\cdot\sum_{x\in X}\Bigg|\int\limits_{\mathfrak{X}} k(x,\eta)f(\eta)\,d\mu(\eta) - \Delta\sum_{y\in X}K(x,y)f(y)\Bigg|^2 < \varepsilon\Bigg).$$

Обозначим матрицу этой формулы символом $\mathscr{W}$ и применим к ней принцип идеализации. В результате получим эквивалентную формулу

$$(\forall^{\mathrm{st}}\Phi \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(L_2(\mu)))(\forall^{\mathrm{st}}\Xi \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+))(\exists^{\mathrm{fin}} X \subset \mathfrak{X})(\exists\Delta \in \mathbb{R}_+)$$
$$(\exists K : X^2 \to \mathbb{R})(\forall f \in \Phi)(\forall\varepsilon \in \Xi)\,\mathscr{W}.$$

Так как $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ и k стандартны, то можно применить принцип переноса и убрать индекс st над первыми двумя кванторами в последней формуле. Переход от Ξ к $\varepsilon := \min(\Xi)$ позволяет, как легко видеть, заменить второй квантор следующим: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)$. Значит, мы можем вовсе опустить последний квантор. $\triangleright$

Более тщательный анализ приведенного перевода показывает, что нестандартные X, Δ и K в 6.5.4 (1) зависят от элементов $L_2(\mu)$ и $L_2(\mu \otimes \mu)$, являющихся классами эквивалентности, а не от выбора конкретных представителей этих классов, а $k \in L_2(\mu \otimes \mu)$ в установленном предложении рассматривается как класс эквивалентности (т. е. X, Δ и K не зависят от выбора представителя из класса k). В то же время Φ в этом предложении представляет собой конечное множество функций, интегрируемых с квадратом.

Фактически предложение 6.5.7 не является полным аналогом 6.5.4 (1), так как первое неравенство в формулировке этого предложения лишь следствие того, что $K \in \mathscr{S}(M)$ служит лифтингом функции k. В утверждении «K из $\mathscr{S}(M)$ — это лифтинг функции k» участвуют внешние объекты, поэтому оно не формализуется на языке IST, но может иметь различные внутренние следствия, усиливающие 6.5.7.

6.5.8. Рассмотрим стандартный вариант предложения 6.5.6 (2). Обозначим символом $\mathscr{H}_m$ пространство ограниченных функций из $L_2(\mathbb{R}^m)$, непрерывных почти всюду относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^m$.

Для любых конечных множеств функций $\Phi \subset \mathscr{H}_1$ и $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}_2$ и произвольного $n \in \mathbb{N}$ существуют числа $L \in \mathbb{N}$ и $\Delta \in \mathbb{R}_+$ такие, что $L\Delta > n$, $\Delta < n^{-1}$ и

$$\Delta \sum_{\alpha=-L}^{L} \left| \int_{-\infty}^{\infty} k(\alpha\Delta, \eta) f(\eta)\, d\eta - \Delta \sum_{\beta=-L}^{L} k(\alpha\Delta, \beta\Delta) f(\beta\Delta) \right|^2 < \frac{1}{n}$$

для любых функций $f \in \Phi$ и $k \in \mathscr{K}$.

$\triangleleft$ Предложение 6.5.6 (2) можно переписать в виде:

$$(\exists L \in \mathbb{N})(\exists \Delta \in \mathbb{R}_+)\Bigg(L\Delta \approx +\infty \wedge \Delta \approx 0 \wedge (\forall^{\mathrm{st}} f \in \mathscr{H}_1)(\forall^{\mathrm{st}} k \in \mathscr{H}_2)$$

$$\Bigg(\Delta \sum_{\alpha=-M}^{M} \left| \int_{-\infty}^{\infty} {}^*k(\alpha\Delta, y) {}^*f(y)\, dy - \Delta \sum_{\beta=-L}^{L} {}^*k(\alpha\Delta, \beta\Delta) {}^*f(\beta\Delta) \right|^2 \approx 0 \Bigg)\Bigg).$$

Расшифровывая в этой формуле знак $\approx$, получим

$$(\exists L \in \mathbb{N})(\exists \Delta \in \mathbb{R}_+)(\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(\forall^{\mathrm{st}} f \in \mathscr{H}_1)(\forall^{\mathrm{st}} k \in \mathscr{H}_2)$$

$$\Bigg(L\Delta > n \wedge \Delta < n^{-1} \wedge \Bigg(\Delta \sum_{\alpha=-L}^{L} \Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(\alpha\Delta, \eta) f(\eta)\, d\eta -$$

$$-\Delta \sum_{\beta=-L}^{L} k(\alpha\Delta, \beta\Delta) f(\beta\Delta)\Big|^2 < \frac{1}{n}\Bigg)\Bigg).$$

Как и в предыдущем пункте, эту формулу легко можно записать без использования предиката st. $\triangleright$

6.5.9. Еще проще формулируется стандартный вариант предложения 6.5.6 (1). Обозначим символом $\widetilde{\mathscr{H}_1}$ множество функций $f \in \mathscr{H}_1$, для которых $|f|^2$ удовлетворяет условию 6.4.11 (2), а символом $\widetilde{\mathscr{H}_2}$ — множество функций $k \in \mathscr{H}_2$ таких, что $|k|^2$ удовлетворяет неравенству из 6.5.5 (1) для некоторых φ_1 и φ_2, для которых выполнено 6.4.11 (2). (Множество $\widetilde{\mathscr{H}_m}$ определяют аналогично.)

Для любых $f \in \widetilde{\mathscr{H}_1}$ и $k \in \widetilde{\mathscr{H}_2}$ имеет место равенство

$$\lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ L\Delta \to \infty}} \Delta \sum_{\alpha=-L}^{L} \Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(\alpha\Delta, \eta) f(\eta)\, d\eta - \Delta \sum_{\beta=-L}^{L} k(\alpha\Delta, \beta\Delta) f(\beta\Delta)\Big|^2 = 0.$$

$\triangleleft$ Соотношение из 6.5.6 (1) можно записать в IST в виде

$$(\forall L \in \mathbb{N})(\forall \Delta \in \mathbb{R}_+)\Bigg(L\Delta \approx +\infty \wedge \Delta \approx 0 \to (\forall^{\mathrm{st}} f \in \widetilde{\mathscr{H}_1})(\forall^{\mathrm{st}} k \in \widetilde{\mathscr{H}_2})$$

$$\Bigg(\Delta \sum_{\alpha=-L}^{L} \Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(\alpha\Delta, \eta) f(\eta)\, d\eta - \Delta \sum_{\beta=-L}^{L} k(\alpha\Delta, \beta\Delta) f(\beta\Delta)\Big|^2 \approx 0\Bigg)\Bigg).$$

Используя эквивалентность формул $a \approx 0$ и $(\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(|a| < 1/n)$ и правила логики предикатов, приходим к следующему предложению:

$$(\forall^{\mathrm{st}} f \in \widetilde{\mathscr{H}_1})(\forall^{\mathrm{st}} k \in \widetilde{\mathscr{H}_2})(\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(\forall L \in \mathbb{N})(\forall \Delta \in \mathbb{R}_+)$$
$$(L\Delta \approx +\infty \wedge \Delta \approx 0 \to \mathscr{W}),$$

где $\mathscr{W}$ обозначает неравенство из 6.5.5 (1).

Записывая предикаты $L\Delta \approx +\infty$ и $\Delta \approx 0$ в IST и используя принципы идеализации и переноса, получим предложение

$$
(\forall f \in \widetilde{\mathscr{H}_1})(\forall k \in \widetilde{\mathscr{H}_2})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists^{\mathrm{fin}} \mathscr{N} \subset \mathbb{N})(\forall L \in \mathbb{N})(\forall \Delta \in \mathbb{R}_+)
$$
$$
(\forall m \in \mathscr{N})((\Delta < 1/m \wedge L\Delta > m) \to \mathscr{W}),
$$

эквивалентное требуемому. $\triangleright$

6.5.10. Рассмотрим стандартный вариант определения гиперприближения для ограниченного линейного оператора $\mathscr{A} : L_p(\mathbb{R}) \to L_q(\mathbb{R})$, где $p, q \geq 1$. Обозначим символом $\widetilde{\mathscr{H}}^{(r)}$ пространство ограниченных почти всюду непрерывных функций $f \in L_r(\mathbb{R})$, для которых $|f|^2$ удовлетворяет условию 6.4.11 (2). Заметим, что $\widetilde{\mathscr{H}}^{(r)}$ плотно в $L_r(\mathbb{R})$ $(r \geq 1)$. Предположим также, что $\mathscr{A}$ удовлетворяет условию:

(1) Множество $\{f \in \widetilde{\mathscr{H}}^{(p)} : \mathscr{A}(f) \in \widetilde{\mathscr{H}}^{(q)}\}$ плотно в пространстве $L_p(\mathbb{R})$.

Пусть $\mathbf{T} := \{T_{L,\Delta} : L \in \mathbb{N}, \Delta \in \mathbb{R}_+\}$ — пучок матриц $T_{L,\Delta} := (t_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=-L}^{L}$, зависящий от двух параметров и равномерно ограниченный по норме. Как видно, каждая из матриц $T_{L,\Delta}$ имеет размерность $N \times N$, где $N := 2L + 1$.

(2) Мы будем говорить, что пучок $\mathbf{T}$ *приближает* ограниченный оператор $\mathscr{A} : L_p(\mathbb{R}) \to L_q(\mathbb{R})$, удовлетворяющий условию (1), в том и только в том случае, если для любой функции $f \in \widetilde{\mathscr{H}}^{(p)} \cap \mathscr{A}^{-1}(\widetilde{\mathscr{H}}^{(q)})$ справедливо соотношение

$$
\lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ L\Delta \to \infty}} \Delta \sum_{\alpha=-L}^{L} \left| \mathscr{A}(f)(\alpha\Delta) - \sum_{\beta=-L}^{L} t_{\alpha\beta} f(\beta\Delta) \right|^q = 0.
$$

(3) *Если пучок матриц* $\mathbf{T}$ *удовлетворяет условиям определения 6.5.10 (2), то* $\mathbf{T}$ *приближает ограниченный оператор* $\mathscr{A} : L_p(\mathbb{R}) \to L_q(\mathbb{R})$ *в том и только в том случае, если для любых* $L \in {}^*\mathbb{N}$ *и* $\Delta \in {}^*\mathbb{R}_+$ *таких, что* $\Delta \approx 0$ *и* $L\Delta \approx +\infty$*, оператор* ${}^*T_{L,\Delta} : \mathscr{L}_{\Delta,p}^X \to \mathscr{L}_{\Delta,q}^X$*, где* $X := \{-L, \dots, L\}$*, представляет собой гиперприближение оператора* $\mathscr{A}$*.*

$\triangleleft$ Немедленно следует из определения (1) и нестандартного критерия предела (см. 2.3.1). $\triangleright$

(4) *Предположим, что равенство из (2) выполняется для всех функций f из некоторого множества $\mathfrak{M} \subset \widetilde{\mathscr{H}}^{(p)} \cap \mathscr{A}^{-1}(\widetilde{\mathscr{H}}^{(q)})$, линейная оболочка которого плотна в $L_p(\mathbb{R})$. Тогда это же самое равенство выполняется и для всех функций $f \in \widetilde{\mathscr{H}}^{(p)} \cap \mathscr{A}^{-1}(\widetilde{\mathscr{H}}^{(q)})$.*

$\triangleleft$ Это вытекает из предложения 6.5.1 (1). $\triangleright$

6.5.11. Примечания.

(1) Результаты этого параграфа получены Е. И. Гордоном и опубликованы в [43, 325]. Наше изложение следует [325].

(2) Утверждение о том, что $\mathscr{A}$ допускает гиперприближение, выразимо в языке IST. Следовательно, с помощью алгоритма Нельсона можно получить эквивалентное предложение, сформулированное в стандартных математических терминах. В полной своей общности соответствующая формулировка весьма громоздка, но смысл ее состоит в том, что существует последовательность конечномерных нормированных пространств и операторов, действующих в этих пространствах, для которых существуют соответствующие последовательности конечных подмножеств (узлы таблиц в последовательных пространствах), последовательность множителей Δ таких, что таблица значений функции в каждом множестве узлов представляет собой вектор в соответствующем пространстве, интеграл функции приближается суммами значений функции в узлах с шагом Δ и значения конечномерного оператора на таблице значений функции f сходятся к таблице $\mathscr{A}(f)$, см. 6.5.10 (2).

(3) Результаты, аналогичные теореме 6.5.3 и ее приведенным выше следствиям, можно получить и для некоторых других классов интегральных операторов, налагая подходящие условия на функцию k, при которых интегральный оператор с ядром k ограниченно действует из L_p в L_q (см., например, [87]).

(4) Нестандартное определение гиперприближения (см. 6.5.1) является существенно более общим, чем определение 6.5.10 (2), даже в случае пространства $L_p(\mathbb{R})$, так как оно не предполагает, вообще говоря, существования стандартного семейства матриц, удовлетворяющих условиям определения 6.5.10 (2). Разница между этими определениями становится ясной при сравнении 6.5.8 и 6.5.9. Последнее можно усилить путем полного перевода предложения 6.5.6 (2) на стандартный язык с учетом соотношения $\Delta \overset{\mathcal{T}}{\approx} 0$. Однако такой перевод ведет к существенному усложнению формулировки.

(5) В дальнейшем нам потребуется ситуация, когда в процессе приближения оператора $\mathscr{A}$ таблица значений f дана с шагом Δ, в то время как таблица значений для $\mathscr{A}(f)$ составлена с шагом Δ_1. Разумеется, $\Delta_1 \to 0$ и $L\Delta_1 \to \infty$ (например, $\Delta_1 := ((2L+1)\Delta)^{-1}$). Общее определение из 6.5.10 охватывает и этот случай. Следовательно, после очевидных модификаций определения 6.4.9 (2) и предложений 6.5.10 (3, 4), последние два остаются справедливыми.

(6) Определение 6.4.9 (2) и предложения 6.5.10 (3, 4) допускают обобщение на случай, когда гиперприближение оператора $\mathscr{A} : L_p(\mu) \to L_q(\mu)$, где μ — некоторая σ-конечная мера на сепарабельном локально компактном топологическом пространстве $\mathfrak{X}$, строится на основе гиперприближения этого пространства (см. 6.5.4 (3)).

При этом необходимо дать стандартный вариант определения гиперприближения пространства с мерой как некоторого семейства X конечных множеств, отображений $\jmath : X \to \mathfrak{X}$ и чисел Δ, удовлетворяющих подходящим условиям. Как уже отмечалось, основные возникающие при этом трудности связаны с переводом условий 6.4.9 (2) и 6.5.4 (2) на стандартный язык.

Мы вернемся к подобным вопросам в следующей главе при рассмотрении проблемы гиперприближения общих локально компактных абелевых групп.

6.6. Дискретизация псевдоинтегральных операторов и случайные меры Лёба

Ниже нам потребуется более сильный вариант теоремы, сформулированной в 6.4.6. Именно, необходимо добиться, чтобы интеграл любой суммируемой функции приближался суммой по гиперконечному множеству с точностью до фиксированного бесконечно малого ε.

6.6.1. *Теорема.* *Пусть $(\mathscr{X}, \Omega, \mu)$ — стандартное пространство с σ-конечной мерой μ, а ε — положительное бесконечно малое гипердействительное число. Тогда найдутся внутреннее гиперконечное множество $X \subseteq {}^*\mathscr{X}$ и гипердействительное число $\Delta \in {}^*\mathbb{R}$ такие, что*

$$\left| \int\limits_{\mathscr{X}} f\, d\mu - \Delta \sum_{\xi \in X} {}^*f(\xi) \right| < \varepsilon$$

для любой $f \in L_1(\mu)$.

$\triangleleft$ Пусть k — некоторое ε-бесконечно большое натуральное число. Тогда $({}^*\mathscr{X}_k, {}^*\Omega_k, {}^*\mu_k)$ удовлетворяет условиям теоремы 6.4.4, т. е. найдется внутреннее гиперконечное множество $X \subseteq {}^*\mathscr{X}_k$ такое, что для любой k-стандартной интегрируемой функции $h : {}^*\mathscr{X}_k \to {}^*\mathbb{R}$ выражение

$$\int\limits_{{}^*\mathscr{X}_k} h\,d\mu_k - \frac{\mu_k({}^*\mathscr{X}_k)}{|X|}\sum_{\xi\in X} h(\xi)$$

станет k-бесконечно малым. В частности, если $f \in L_1(\mu)$, то ${}^*f_k$ будет k-стандартной интегрируемой функцией на ${}^*\mathscr{X}_k$, поэтому выражение

$$\int\limits_{{}^*\mathscr{X}_k} {}^*f_k\,d\mu_k - \frac{\mu_k({}^*\mathscr{X}_k)}{|X|}\sum_{\xi\in X} {}^*f_k(\xi)$$

будет k-бесконечно малой величиной, а следовательно, и ε-бесконечно малой величиной. Далее, из соотношения

$$\int\limits_{\mathscr{X}} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathscr{X}_n} f_n\,d\mu_n$$

вытекает, что разность $\int_{\mathscr{X}} f\,d\mu - \int_{{}^*\mathscr{X}_k} {}^*f_k\,d\mu_k$ будет ε-бесконечно малой. Поскольку ${}^*f_k|_X = {}^*f|_X$, то выражение

$$\int\limits_{\mathscr{X}} f\,d\mu - \frac{\mu_k({}^*\mathscr{X}_k)}{|X|}\sum_{\xi\in X} {}^*f_k(\xi)$$

будет ε-бесконечно малой величиной, а, следовательно, по модулю оно не превышает ε. $\triangleright$

6.6.2. В ситуации, описанной в теореме 6.6.1, мы будем говорить, что пара (X, Δ) *приближает меру* μ с точностью до ε.

Поскольку в доказательстве теоремы 6.6.1 были использованы только принципы переноса и насыщения, то стандартность может быть заменена на относительную стандартность. Точнее, если τ — фиксированное внутреннее множество, $(\mathscr{X}, \Omega, \mu)$ — это некоторое τ-стандартное пространство с σ-конечной мерой μ, а ε — положительное τ-бесконечно малое гипердействительное число, тогда найдутся внутреннее гиперконечное множество $X \subseteq {}^*\mathscr{X}$ и гипердействительное число $\Delta \in {}^*\mathbb{R}$ такие, что

$$\left| \int\limits_{{}^*\mathscr{X}} F\, d^*\mu - \Delta \sum_{\xi \in X} F(\xi) \right| < \varepsilon$$

для любой τ-стандартной интегрируемой функции F. В частности, утверждение верно для любого бесконечно малого ε.

6.6.3. Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное множество, $\mathscr{A}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств $\mathscr{X}$ и $(\lambda_y)_{y\in\mathscr{Y}}$ — семейство σ-конечных мер на $\mathscr{A}$. Семейство $(\lambda_y)_{y\in\mathscr{Y}}$ можно рассматривать как функцию $\lambda : \mathscr{A} \times \mathscr{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$ такую, что $\lambda_y(A) := \lambda(A, y)$ для $y \in \mathscr{Y}$ и $A \in \mathscr{A}$. Обозначим через $\mathscr{L}_1$ совокупность всех измеримых функций на $\mathscr{X}$, интегрируемых по всем мерам семейства $(\lambda_y)_{y\in\mathscr{Y}}$. Семейство $(\lambda_y)_{y\in\mathscr{Y}}$ порождает псевдоинтегральный оператор T на $\mathscr{L}_1$ следующим образом: пусть $f \in \mathscr{L}_1$, тогда Tf — функция из $\mathscr{Y}$ в $\mathbb{R}$, определенная как

$$(Tf)(y) = \int\limits_{\mathscr{X}} f\, d\lambda_y \quad (f \in \mathscr{L}_1).$$

Мы покажем в следующем пункте, что если функции представлять таблицами их значений на гиперконечном множестве, то псевдоинтегральный оператор можно приблизить с бесконечной точностью (т. е. с точностью до бесконечно малых) гиперконечной матрицей. Обозначим символом $\mathscr{F}(\mathscr{Y})$ пространство всех вещественных функций на $\mathscr{Y}$. Для гиперконечного набора $X := (x_1, \dots, x_n) \subseteq {}^*\mathscr{X}$ обозначим символом π_X «проектор» из $\mathscr{L}_1$ в ${}^*\mathbb{R}^n$, сопоставляющий функции $f \in \mathscr{L}_1$ таблицу значений $\big({}^*f(x_1), \dots, {}^*f(x_n)\big)$.

6.6.4. *Теорема.* *Существуют такие гиперконечные наборы* $X := (x_1, \dots, x_n) \subseteq {}^*\mathscr{X}$ *и* $Y := (y_1, \dots, y_m) \subseteq {}^*\mathscr{Y}$, *что* $\mathscr{Y} \subseteq Y$, *и для некоторой матрицы* $A = (a_{\imath\jmath})$ *размера* $n \times m$ *будет* $\pi_Y({}^*Tf) \approx A\pi_X({}^*f)$ *для каждой функции* $f \in \mathscr{L}_1$ *или, что то же самое,*

$$\int\limits_{{}^*\mathscr{X}} {}^*f\, d^*\lambda_{y_\imath} \approx \sum_{\jmath=1}^{n} a_{\imath\jmath}{}^*f(x_\jmath) \quad (\imath := 1, \dots, m).$$

Другими словами, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}_1(\mathscr{X}) & \xrightarrow{T} & \mathscr{F}(\mathscr{Y}) \\ {\scriptstyle \pi_X}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \pi_Y}\Big\downarrow \\ {}^*\mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & {}^*\mathbb{R}^m \end{array}$$

коммутативна с точностью до бесконечно малых.

$\lhd$ Зафиксируем произвольное бесконечно малое ε. Для любого $\lambda \in \mathscr{Y}$ теорема 6.6.1 обеспечивает существование гиперконечного набора $X(y)$ элементов ${}^*\mathscr{X}$ и положительного гипердействительного $\Delta(y)$ таких, что $|\int_{\mathscr{X}} f\,d\lambda_y - \Delta(y)\sum_{X(y)} f| \le \varepsilon$ для всякой $f \in \mathscr{L}_1$. Тем самым у нас имеются (внешние) функции

$$X : \mathscr{Y} \to \bigcup_{n \in {}^*\mathbb{N}} {}^*\mathscr{X}^n \quad \text{и} \quad \Delta : \mathscr{Y} \to {}^*\mathbb{R}.$$

Пользуясь принципом продолжения, мы можем считать эти функции заданными на ${}^*\mathscr{Y}$. Зафиксировав элементы $y \in {}^*\mathscr{Y}$ и $F \in {}^*\mathscr{L}_1$, мы будем говорить, что выполнено свойство $\Phi(y, F)$, если

$$\left| \int\limits_{{}^*\mathscr{X}} F\,d^*\lambda_y - \Delta(y) \sum_{X(y)} F \right| \le \varepsilon.$$

Для каждого $y \in \mathscr{Y}$ рассмотрим внутреннее множество $B_y := \{F \in {}^*\mathscr{L}_1 : \Phi(y, F)\}$. Заметим, что ${}^*f \in B_y$ для всех $f \in \mathscr{L}_1$ и $y \in \mathscr{Y}$. Далее, для любого конечного набора $(y_1, f_1), \dots, (y_k, f_k) \in \mathscr{Y} \times \mathscr{L}_1$ найдется внутреннее подмножество ${}^*\mathscr{L}_1$, содержащее все $f_\imath$ и содержащееся в каждом $B_{y_\imath}$ для $\imath := 1, \dots, k$. В качестве такого множества достаточно взять $B_{y_1} \cap \ldots \cap B_{y_k}$. Отсюда по принципу насыщения следует, что найдется внутреннее множество B такое, что $f \in B \subseteq F_y$ для всех $(y, f) \in \mathscr{Y} \times \mathscr{L}_1$. В частности, $\Phi(y, F)$ выполнено для всех $y \in \mathscr{Y}$ и всех $F \in \Phi$. Обозначим через Y_0 множество всех тех $y \in {}^*\mathscr{Y}$, для которых $\Phi(y, F)$ выполнено для каждого $F \in B$. Легко видеть, что Y_0 — внутреннее множество, содержащее $\mathscr{Y}$. С другой стороны, найдется внутреннее гиперконечное множество $Y_1 \subseteq {}^*\mathscr{Y}$, содержащее $\mathscr{Y}$. Положим $Y := Y_0 \cap Y_1$. Тогда Y — гиперконечное внутреннее подмножество ${}^*\mathscr{Y}$, содержащее $\mathscr{Y}$, и $\Phi(y, F)$ выполнено для всех $y \in Y$

и всех $F \in B$. В частности, $\Phi(y, {}^*f)$ выполнено для всех $y \in Y$ и всех $f \in \mathscr{L}_1$. Возьмем любое упорядочение $(y_1, \dots, y_m)$ набора Y. В качестве X возьмем конкатенацию наборов $X_{y_1}, \dots, X_{y_m}$, т. е. набор, образованный стоящими подряд элементами наборов $X_{y_1}, \dots, X_{y_m}$. Пусть $X := (x_1, \dots, x_n)$ и пусть элементы набора $X_{y_\imath}$ занимают в X позиции с $s_{\imath+1}$ по $s_{\imath+m}$. Определим «ступенчатую» матрицу A размера $m \times n$ следующим образом:

$$a_{\imath\jmath} := \begin{cases} \Delta_{y_\imath}, & \text{если } s_\imath < \jmath \le s_{\imath+1}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда для каждой $f \in \mathscr{L}_1$ и любого $\imath := 1, \dots, m$ будет

$$\left| \int\limits_{{}^*\mathscr{X}} {}^*f \, d^*\lambda_{y_\imath} - \sum_{\jmath=1}^{n} a_{\imath\jmath} {}^*f(x_\jmath) \right| = \left| \int\limits_{{}^*\mathscr{X}} {}^*f \, d^*\lambda_y - \Delta(y_\imath) \sum_{X(y_\imath)} {}^*f \right| \le \varepsilon,$$

т. е. $\int_{{}^*\mathscr{X}} {}^*f \, d^*\lambda_{y_\imath} \approx \sum_{\jmath=1}^{n} a_{\imath\jmath} {}^*f(x_\jmath)$. $\triangleright$

6.6.5. Рассмотрим теперь частный случай псевдоинтегрального оператора — интегральный оператор с ядром $K(x, y)$. Пусть в условиях теоремы 6.6.4 на σ-алгебре $\mathscr{A}$ задана фиксированная σ-конечная мера такая, что λ_y абсолютно непрерывна относительно μ для каждого $y \in \mathscr{Y}$ с плотностью $K_y := K(\cdot, y) \in \mathscr{L}_\infty(\mu)$. Тогда

$$(Tf)(y) = \int\limits_{\mathscr{X}} f \, d\lambda_y = \int\limits_{\mathscr{X}} f \cdot K_y \, d\mu.$$

В этом случае теорема 6.6.4 может быть несколько усилена. А именно, в качестве X может быть взят фиксированный набор, приближающий μ с точностью до ε (существование такого набора и веса Δ вытекает из теоремы 6.6.1), в качестве матрицы можно взять ядра на узлах дискретной решетки $X \times Y$ с весом Δ.

6.6.6. ***Теорема.*** *Пусть пара* (X, Δ) *приближает* μ. *Тогда существует конечный набор* $Y := (y_1, \dots, y_m) \subseteq {}^*\mathscr{Y}$, *причем* $\mathscr{Y} \subseteq Y$, *такой, что* $\pi_Y({}^*Tf) \approx A\pi_X({}^*f)$, *где* $a_{\imath\jmath} := \Delta \cdot K(x_\imath, y_\jmath)$.

$\triangleleft$ Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 6.6.4. Обозначим через $\Psi(y, F)$ внутреннюю формулу

$$\left| \int F \, d^*\lambda_y - \Delta \sum_X {}^*f \cdot {}^*K_y \right| \le \varepsilon.$$

Тогда для любой $f \in \mathscr{L}_1$ и любого $y \in \mathscr{Y}$ мы имеем

$$\left| \int\limits_{\mathscr{X}} f\, d\lambda_y - \Delta \sum_X {}^*f \cdot {}^*K_y \right| = \left| \int\limits_{\mathscr{X}} f K_y\, d\mu - \Delta \sum_X {}^*f \cdot {}^*K_y \right| \le \varepsilon,$$

т. е. $\Psi(y, {}^*f)$ выполнено для всех $y \in \mathscr{Y}$ и $f \in \mathscr{L}_1$.

Пусть $C_y := \{F \in \mathscr{L}_1 : \Psi(y, F)\}$. Тогда найдется внутреннее множество $C \subseteq {}^*\mathscr{L}_1$ такое, что $\Psi(y, F)$ выполнено для всех $y \in \mathscr{Y}$ и $F \in C$ и, кроме того, $\mathscr{L}_1 \subseteq C$. Найдется гиперконечный внутренний набор $Y := (y_1, \dots, y_m)$ такой, что $\mathscr{Y} \subseteq Y$ и $\Psi(y, {}^*f)$ для всех $y \in Y$ и $f \in \mathscr{L}_1$. Тогда

$$\int\limits_{{}^*\mathscr{X}} {}^*f\, d\lambda_{y_i} \approx \Delta \sum_X f \cdot K_{y_\imath} = \sum_{\jmath=1}^{n} a_{\imath\jmath} f(x_\jmath)$$

для каждого $\imath := 1, \dots, m$. $\triangleright$

6.6.7. Следует заметить, что из доказательства теорем 6.6.4 и 6.6.6 следует несколько более сильный результат, а именно, построенная в теоремах матрица A приближает оператор T с точностью до фиксированного бесконечно малого ε. Кроме того, поскольку построенный там гиперконечный набор Y содержит $\mathscr{Y}$, то значения стандартной функции g на $\mathscr{Y}$ вполне определены значениями ${}^*g$ на Y. Из этого следует, например, что проектор π_Y сохраняет супремум ограниченной стандартной функции на $\mathscr{Y}$, т. е. $\sup_{y \in \mathscr{Y}} g(y) = {}^\circ \max \pi_Y(g)$. С другой стороны, проектор π_X в теореме 6.6.6 сохраняет L_1-норму функции f из $\mathscr{L}_1$, т. е. $\int_{\mathscr{X}} f\, d\mu = {}^\circ(\Delta \sum_X {}^*f)$. Таким образом, если мы введем sup-норму на ${}^*\mathbb{R}^m$, то теорема 6.6.6 означает, что для каждой пары (X, Δ), приближающей меру μ с точностью до ε, найдется гиперконечный набор Y такой, что $\mathscr{Y} \subseteq Y \subseteq {}^*\mathscr{Y}$ и $\|\pi_Y({}^*Tf) - A\pi_X({}^*f)\| \le \varepsilon$ для каждой $f \in \mathscr{L}_1$.

Следующая теорема дополняет теорему 6.6.6. Как и в теореме 6.6.6, T — интегральный оператор из L_1 в $\mathscr{F}(\mathscr{Y})$ с ядром K, а $\varepsilon > 0$ — фиксированное бесконечно малое.

6.6.8. ***Теорема.*** *Для любого гиперконечного набора $Y \subseteq {}^*\mathscr{Y}$ найдется пара (X, Δ), приближающая меру μ и удовлетворяющая условию $\|\pi_Y({}^*Tf) - A\pi_X({}^*f)\| \le \varepsilon$ для каждой $f \in \mathscr{L}_1$ (матрица A определяется так же, как и в теореме* 6.6.4.)

$\triangleleft$ Пусть $Y := \{y_1, \dots, y_m\}$. Для любого $\imath := 1, \dots, m$ функция $K_{y_\imath}$ принадлежит множеству $\{K_{y_1}, \dots, K_{y_m}\}$ и, следовательно, Y-стандартна. Пространство $(\mathscr{X}, \mathscr{A}, \mu)$ стандартно, а значит, и Y-стандартно. Замечание 6.6.2 обеспечивает существование гиперконечного набора $X \subseteq {}^*\mathscr{X}$ и положительного гипердействительного числа Δ таких, что для любой Y-стандартной интегрируемой функции F выполнено

$$\left| \int\limits_{^*\mathscr{X}} F\, d^*\mu - \Delta \sum_X F \right| \leq \varepsilon.$$

Если $f \in \mathscr{L}_1$, то ${}^*f \cdot K_y$ — это Y-стандартная интегрируемая функция, поэтому

$$\left| \int\limits_{^*\mathscr{X}} {}^*f\, d^*\lambda_y - \Delta \sum_X f \cdot K_y \right| = \left| \int\limits_{^*\mathscr{X}} {}^*f \cdot K_y\, d^*\mu - \Delta \sum_X f \cdot K_y \right| \leq \varepsilon,$$

откуда и следует требуемое. $\triangleright$

6.6.9. Распространим теперь конструкцию Лёба на случайные меры. Напомним читателю определение случайной меры. Пусть X — произвольное множество, $\mathscr{A}$ — алгебра подмножеств X и пусть $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ — произвольное пространство с конечно-аддитивной мерой ν. Функцию $\lambda : \mathscr{A} \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ называют *случайной мерой* (*случайной конечно-аддитивной мерой*), если выполнены следующие два условия:

(1) Функция $\lambda_A := \lambda(A, \cdot) : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ является $\mathscr{B}$-измеримой для любого $A \in \mathscr{A}$;

(2) Функция $\lambda_y := \lambda(\cdot, y)$ является мерой (соответственно конечно-аддитивной мерой) на $\mathscr{A}$ для почти всех $y \in Y$.

Пусть, далее, $(X, \mathscr{A})$ и $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ — внутренние множества, а λ — внутренняя конечно-аддитивная случайная мера на $\mathscr{A} \times Y$. По определению, в Y найдется подмножество полной меры Y_0 такое, что λ_y является конечно-аддитивной мерой для всех $y \in Y_0$. Далее, пусть $(Y, \mathscr{B}_L, \nu_L)$ — пространство Лёба для $(Y, \mathscr{B}, \nu)$. Для каждого λ_y $(y \in Y_0)$ рассмотрим соответствующую меру Лёба $(\lambda_y)_L$. Заметим, что по определению меры Лёба область определения $(\lambda_y)_L$ содержит $\sigma(\mathscr{A})$. Определим функцию $\lambda^L : \sigma(\mathscr{A}) \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ следующим образом: положим $\lambda^L(A, y) := (\lambda_y)_L(A)$ для $A \in \sigma(\mathscr{A})$ и $y \in Y_0$; на $Y - Y_0$ доопределим λ^L произвольно.

6.6.10. *Теорема.* *Построенная выше функция λ^L является случайной мерой относительно пространств $(X, \sigma(\mathscr{A}))$ и $(Y, \mathscr{B}_L, \nu_L)$.*

$\triangleleft$ По определению $\lambda_y^L := (\lambda_y)_L$ является счетно-аддитивной мерой для ν_L-почти всех $y \in Y$. Достаточно показать, что λ_A^L является $\mathscr{B}_L$-измеримой для каждого $A \in \sigma(\mathscr{A})$. Обозначим через M множество таких $A \in \sigma(\mathscr{A})$, что λ_A^L является $\mathscr{B}_L$-измеримой функцией. Легко видеть, что $\mathscr{A} \subseteq M$. Действительно, для всякого $A \in \mathscr{A}$ мы имеем $\lambda_A^L(y) = \lambda_y^L(A) = {}^\circ\lambda_y(A) = {}^\circ\lambda_A(y)$ для любого $y \in Y_0$. Тем самым λ_A является лифтингом λ_A^L, и по теореме о лифтинге функция λ_A^L является $\mathscr{B}_L$-измеримой. Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — монотонная последовательность множеств из M и $A := \lim_{n\to\infty} A_n$. Тогда $A \in \sigma(\mathscr{A})$. В силу того, что $\lambda_y^L(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda_y^L(A_n)$ для любого $y \in Y_0$, мы заключаем, что функция λ_A^L является пределом последовательности $\mathscr{B}_L$-измеримых функций $(\lambda_{A_n}^L)$ п. в., следовательно, и сама является $\mathscr{B}_L$-измеримой. Тем самым M — монотонный класс. Так как любой монотонный класс вместе со всякой алгеброй содержит и порожденную ею σ-алгебру, мы заключаем, что $M = \sigma(\mathscr{A})$. $\triangleright$

6.6.11. Мы построили случайную меру Лёба на σ-алгебре $\sigma(\mathscr{A})$. Напомним, что, в конструкции скалярной меры Лёба, мера Лёба строится на σ-алгебре, порожденной исходной алгеброй, после чего продолжается на пополнение этой σ-алгебры. Как показывает следующий пример, в конструкции случайной меры Лёба переход к пополнению, вообще говоря, невозможен. Даже в случае, когда пополнения $\sigma(A)$ по всем мерам λ_y^L совпадают для всех $y \in Y$, продолжение λ^L на это пополнение может не быть случайной мерой.

Пусть Y — гиперконечное множество, ν — равномерная вероятностная мера на алгебре $\mathscr{B}$ всех внутренних подмножеств Y. Известно, что в этом случае $\mathscr{B}_L$ не совпадает со множеством всех подмножеств $\mathscr{P}(Y)$. Пусть N — это $\mathscr{B}_L$-неизмеримое подмножество Y. Положим $X := Y$ и $\mathscr{A} := \mathscr{B}$, и пусть для $y \in Y$ выполняется

$$\lambda(A, y) := \begin{cases} 1, & \text{если } y \in A, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что λ является случайной мерой относительно $(X, \mathscr{A})$ и $(Y, \mathscr{B}, \nu)$. Более того, для каждого $y \in Y$ соответствующая мера Лёба $(\lambda_y)_L$ определена на всем $\mathscr{P}(X)$. Тем самым функция λ^L может быть естественным образом продолжена на $\mathscr{P}(X) \times Y$, а именно, $\lambda^L(A, y) := (\lambda_y)_L(A)$. Однако на $\mathscr{P}(X) \times Y$ функция λ^L не является случайной мерой, поскольку $\lambda^L_N = \chi_N$ неизмерима относительно $\mathscr{B}_L$.

6.6.12. Далее мы покажем, что случайную меру можно интерпретировать как векторную меру, а построенное выше продолжение по Лёбу случайной меры является в определенном смысле продолжением по Лёбу векторной меры.

(1) Напомним, что нестандартная оболочка $V^\#$ внутреннего векторного пространства V — это фактор-пространство V_1/V_2, где $V_1 := \mathrm{ltd}(V)$ и $V_2 := \mu(V)$, см. 6.1.1.

Например, нестандартная оболочка нормированного пространства, с которой мы уже сталкивались, получается факторизацией подпространства допустимых векторов по подпространству векторов с бесконечно малыми нормами.

Пусть F — внутренняя конечно-аддитивная V-значная мера на внутреннем измеримом пространстве $(X, \mathscr{A})$, причем образ F лежит в V_1. Тогда функция $F^\# : \mathscr{A} \to V^\#$, определенная как $F^\#(A) := F(V)^\#$, является счетно-аддитивной мерой на $\mathscr{A}$. Естественно было бы назвать векторной мерой Лёба продолжение $F^\#$ на пополнение $\sigma(\mathscr{A})$. Однако, в отличие от скалярного случая, мы не можем гарантировать, что $F^\#$ продолжается на $\sigma(\mathscr{A})$. Мы покажем ниже, что когда F — векторная мера, соответствующая случайной мере, такое продолжение всегда существует.

(2) Пусть $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ — внутреннее пространство с мерой, а $(Y, \mathscr{B}_L, \nu_L)$ — соответствующее пространство Лёба. Обозначим через $L_0(\nu)$ пространство $\mathscr{B}$-измеримых функций из Y в ${}^*\overline{\mathbb{R}}$. Как обычно, мы будем отождествлять функции, равные ν-почти всюду. Рассмотрим в $L_0(\nu)$ внешние подпространства V_1 и V_2, состоящие соответственно из ν_L-почти всюду доступных и ν_L-почти всюду бесконечно малых функций. То есть $f \in V_1$ (соответственно $f \in V_2$), если найдется $U \in \mathscr{B}_L$ такое, что $\nu_L(Y - U) = 0$ и $f(y)$ доступно (соответственно бесконечно мало) для каждого $y \in U$. Это определение корректно, поскольку если $f \in V_1$ (соответственно $f \in V_2$) и $g(y) = f(y)$ для ν-почти всех y, то $g(y) = f(y)$ для ν_L-почти всех y, так что g тоже лежит в V_1 (соответственно в V_2). Назовем *нестандартной оболочкой* $L_0(\nu)^\#$ фактор-пространство V_1/V_2. Оболочку $L_0(\nu)^\#$ можно отождествить с пространством $L_0(\nu_L)$ функций из Y в $\overline{R}$, измеримых относительно $\mathscr{B}_L$. А именно, фактор-класс $f+V_2 \in V_1/V_2$ отображается в ${}^\circ f$, из теоремы о лифтинге следует, что это взаимно-однозначное линейное отображение. Таким образом, $L_0(\nu)^{\#} = L_0(\nu_L)$.

(3) Пусть, как и ранее, λ — внутренняя случайная мера относительно $(X, \mathscr{A})$ и $(Y, \mathscr{B}, \nu)$. Предположим также, что $\lambda(A, y)$ доступно для всех $A \in \mathscr{A}$ и почти всех $y \in Y$. Пусть λ^L — продолжение λ, как в теореме 6.6.10. Заметим, что обе эти меры можно рассматривать как векторные меры. А именно, определим векторные меры $\Lambda : \mathscr{A} \to L_0(\nu)$ и $\Lambda^L : \sigma(\mathscr{A}) \to L_0(\nu_L)$ по правилам $\Lambda(A) := \lambda_A$ и $\Lambda^L(A) := \lambda^L_A$.

6.6.13. *Теорема.* *Мера* $\Lambda^{\#}$ (*см.* 6.6.12 (1)) *определена корректно и допускает продолжение на* $\sigma(\mathscr{A})$; *т. е. существует векторная мера Лёба для* Λ. *Более того, продолжение* $\Lambda^{\#}$ *совпадает с* Λ^L *на* $\sigma(\mathscr{A})$.

$\lhd$ Из условия доступности $\lambda(A, y)$ для всех $A \in \mathscr{A}$ и почти всех $y \in Y$ следует, что для каждого $A \in \mathscr{A}$ функция $\Lambda(A) = \lambda_A$ лежит в V_1. Отсюда следует, что $\Lambda^{\#}$ определена на $\mathscr{A}$. С учетом отождествления, упомянутого в 6.6.12 (2), для каждого $A \in \mathscr{A}$ мы имеем

$$\Lambda^{\#}(A) = \Lambda(A)^{\#} = (\lambda_A)^{\#} = {}^\circ\lambda_A = \lambda^L_A = \Lambda^L(A) \text{ п. в.},$$

так что $\Lambda^{\#}$ совпадает с Λ^L на $\mathscr{A}$. Но поскольку мера Λ^L определена на $\sigma(A)$, мы заключаем, что Λ^L является продолжением $\Lambda^{\#}$ на $\sigma(\mathscr{A})$. $\rhd$

6.6.14. Примечания.

(1) Псевдоинтегральные операторы введены Арвесоном [256] в связи с изучением операторных алгебр в L^2. Далее они изучались Фахури [312] (операторы в L^1) и Кэлтоном [363] (операторы в L^p при $0 < p \leq 1$). Различные аспекты псевдоинтегральных операторов отражены в [229–231, 363–366, 482–486, 517–519]. Необходимые сведения о псевдоинтегральных операторах имеются в [387].

(2) Основные результаты этого параграфа получены В. Г. Троицким и опубликованы в [214].

Глава 7

Инфинитезимали в гармоническом анализе

В текущей главе изучается гиперприближение преобразования Фурье на локально компактной абелевой группе.

Вначале мы рассматриваем преобразование Фурье на вещественной прямой

$$\mathscr{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}).$$

В этом случае матрица дискретного преобразования Фурье применяется к таблице значений функции f в узлах $-L\Delta_1, \dots, L\Delta_1$. Полученный вектор мы сравниваем с таблицей значений функции $\mathscr{F}(f)$ в узлах $-L\Delta, \dots, L\Delta$.

При этом выясняются условия, при которых норма разности этих двух векторов стремится к нулю, как только $\Delta \to 0$, $\Delta_1 \to 0$ и $L\Delta, L\Delta_1 \to +\infty$ (или, что то же самое, эта норма является бесконечно малой, если $\Delta \approx 0$, $\Delta_1 \approx 0$ и $L\Delta, L\Delta_1 \approx +\infty$). Ответ зависит от соотношений между L, Δ и Δ_1.

Результаты, изложенные в 7.1 для преобразования Фурье на вещественной прямой, носят теоретико-групповой характер и допускают распространение на случай произвольной сепарабельной локально компактной абелевой группы.

Исходя из гиперприближения локально компактной абелевой группы, мы строим дискретное приближение гильбертова пространства квадратично-суммируемых функций на этой группе.

В заключение главы мы применяем все изложенные ранее конструкции к построению конечномерных приближений операторов на основе аппроксимации их символов, устанавливая попутно результаты о предельном поведении спектров для операторов Гильберта — Шмидта и операторов типа Шрёдингера.

7.1. Гиперприближение преобразования Фурье на прямой

Здесь посредством дискретного преобразования Фурье изучается возможность построения приближений для преобразования Фурье $\mathscr{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$.

7.1.1. Всюду в этом параграфе используются следующие обозначения: $X := \{k \in {}^*\mathbb{Z} : -L \le k \le L\}$ и $N := 2L+1$, где L — бесконечно большое число (т. е. $L \approx +\infty$); Δ и Δ' — строго положительные бесконечно малые числа ($0 < \Delta, \Delta' \approx 0$), причем $N\Delta$, $N\Delta' \approx +\infty$; функции $\jmath : X \to {}^*\mathbb{R}$ и $\jmath' : X \to {}^*\mathbb{R}$ вводятся равенствами $\jmath(k) := k\Delta$ и $\jmath'(k) := k\Delta'$. Тем самым $(X, \jmath, \Delta)$ и $(X, \jmath', \Delta')$ — гиперприближения пространства $(\mathbb{R}, \Omega, dx)$, где Ω — это σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств и dx — мера Лебега на прямой $\mathbb{R}$ (см. 6.4.9 (1)).

Рассмотрим гиперконечномерное пространство $\mathbb{C}^X$ с фиксированным базисом $\{E_k : k \in X\}$, где $E_k(m) := \delta_{km}$ для $k, m \in X$. Все внутренние линейные операторы, действующие в $\mathbb{C}^X$, задаются матрицами в этом базисе. В пространстве $\mathbb{C}^X$ вводится скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_\Delta$ (или $(\cdot,\cdot)_{\Delta'}$), определяемое соотношением $(E_k, E_m)_\Delta := \Delta\delta_{km}$ (соответственно $(E_k, E_m)_{\Delta'} := \Delta'\delta_{km}$). Символом $\mathscr{L}_{2\Delta}$ (или $\mathscr{L}_{2\Delta'}$) обозначают пространство $\mathbb{C}^X$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_\Delta$ (соответственно $(\cdot,\cdot)_{\Delta'}$).

Дискретным преобразованием Фурье называют оператор $\Phi : \mathbb{C}^X \to \mathbb{C}^X$, определяемый матрицей $(\exp(-2\pi i\alpha\beta/N))_{\alpha,\beta=-L}^{L}$. Ниже мы рассматриваем дискретное преобразование Фурье $\Phi_\Delta := \Delta\Phi : \mathscr{L}_{2\Delta} \to \mathscr{L}_{2\Delta'}$. Легко проверить, что

$$(\Phi_\Delta(F), \Phi_\Delta(G))_{\Delta'} = N\Delta\Delta'(F, G)_\Delta.$$

Тем самым $\|\Phi_\Delta\| = N\Delta\Delta'$ и, стало быть, определен ненулевой оператор $\Phi_\Delta^\# : \mathscr{L}_{2\Delta}^\# \to \mathscr{L}_{2\Delta'}^\#$ при условии, что $0 < N\Delta\Delta' < +\infty$.

В этом параграфе, если не оговорено противное, мы предполагаем, что $N\Delta\Delta' \approx 1$.

Случай точного равенства выделяют особо, используя обозначение $\widehat{\Delta} := (N\Delta)^{-1}$. При этом гиперприближение пространства $(\mathbb{R}, \Omega, dx)$ символизируют как $(X, \widehat{\jmath}, \widehat{\Delta})$.

Положим $M := \jmath^{-1}(\mathrm{nst}\,({}^*\mathbb{R}))$ и $\varphi := \mathrm{st} \circ \jmath|_M : M \to \mathbb{R}$. Тогда φ порождает отображение $\jmath_2 : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\nu_\Delta^M) \subset \mathscr{L}_{2,\Delta}^\#$.

Напомним, что если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то $\jmath_2(f) = F^\#$, где $F \in \mathscr{S}_2(M)$ — лифтинг функции $f \circ \varphi$ (называемый также лифтингом функции f). Более того, если функция f ограничена и непрерывна почти всюду, а $|f|^2$ удовлетворяет условиям 6.4.11 (2), то в качестве F можно взять вектор $X_\Delta(f)$ из $\mathbb{C}^X$, где $X_\Delta(f)_k := {}^*f(k\Delta)$ для $k \in X$ (см. 6.4.11).

Величины M', φ', $\jmath_2'$ и $X_{\Delta'}(f)$ (а также $\widehat{M}$, $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\jmath}_2$ и $X_{\widehat{\Delta}}(f)$) определяются аналогичным образом с помощью параметра Δ' (соответственно $\widehat{\Delta}$).

Наконец, символом $\mathscr{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ мы будем обозначать преобразование Фурье:

$$\mathscr{F}(f)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi ixy)\, dx.$$

7.1.2. Теорема. *Если $N\Delta\Delta' \approx 1$, то дискретное преобразование Фурье $\Phi_\Delta : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta'}$ является гиперприближением оператора $\mathscr{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$.*

$\lhd$ Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество характеристических функций всех отрезков вида $[0, a]$ и $[-a, 0]$, где $a > 0$. Тогда линейная оболочка $\mathfrak{M}$ плотна в $L_2(\mathbb{R})$ и можно воспользоваться 6.5.1 (2). Пусть $f := \chi_{[0,a]}$ и T — бесконечно большое натуральное число, такое что

$$(T-1)\Delta \le a < T\Delta.$$

В силу определения гиперприближения в 6.5.1 достаточно доказать, что

$$\Delta' \sum_{k=-L}^{L} \left| \Delta \sum_{n=0}^{T-1} \exp(-2\pi ink/N) - \int_0^a \exp(-2\pi ixk\Delta')\, dx \right|^2 \approx 0.$$

Ясно, что в последнем соотношении достаточно рассмотреть слагаемые под знаком суммы $\sum_{k=1}^{L}$. Более того, $\int_0^a$ можно заменить на $\int_0^{T\Delta}$, так как $N\Delta\Delta' \approx 1$ по условию и, следовательно,

$$\Delta' \sum_{k=-L}^{L} \left| \int\limits_a^{T\Delta} \exp(-2\pi i x k\Delta')\, dx \right|^2 \leq N\Delta^2\Delta' \approx \Delta \approx 0.$$

Таким образом, осуществив необходимые элементарные вычисления, мы видим, что нам требуется обосновать лишь соотношение

$$\Delta' \sum_{k=-L}^{L} |\Delta(1-\exp(-2\pi ikT/N))(1-\exp(-2\pi ik/N))^{-1}-$$
$$-(2\pi ik\Delta')^{-1}(1-\exp(-2\pi ikT\Delta\Delta'))|^2 \approx 0.$$

Заменив в этом соотношении Δ' на $\widehat{\Delta} := (N\Delta)^{-1}$, получим

$$\frac{\Delta}{N}\sum_{k=1}^{L} |1-\exp(-2\pi ikT/N)|^2|(1-\exp(-2\pi ik/N))^{-1} - N/(2\pi ik)|^2 \approx 0.$$

Возникшее соотношение очевидно. В самом деле, для каждого $k \in [1, L]$ будет $0 < 2\pi k/N < \pi$. Стало быть, функция $(1-\exp(-i\varphi))^{-1} - (i\varphi)^{-1}$ имеет конечный предел при $\varphi \to 0$ и, следовательно, ограничена на $[0, \pi]$. Из сказанного ясно, что искомое соотношение вытекает из приближенного равенства

$$\Delta' \sum_{k=1}^{L} |(2\pi ik\Delta')^{-1}(1-\exp(-2\pi ikT\Delta\Delta'))-$$
$$-N\Delta(2\pi ik)^{-1}(1-\exp(-2\pi ikT/N))|^2 \approx 0,$$

которое, в свою очередь, является следствием следующих двух формул:

$$\frac{1}{\Delta'}\sum_{k=1}^{L} k^{-2}|(N\Delta\Delta'-1)(1-\exp(2\pi ikT/N))|^2 \approx 0$$

и

$$\frac{1}{\Delta'}\sum_{k=1}^{L} k^{-2}|\exp(-2\pi ikT\Delta\Delta') - \exp(-2\pi ikT/N)|^2 \approx 0.$$

Докажем только первую формулу, так как вторая доказывается аналогично.

Пусть $\alpha := N\Delta\Delta' - 1 \approx 0$ и $\overline{a} := T\Delta \approx a$. Тогда нужная нам формула эквивалентна соотношению

$$\frac{\alpha^2}{\Delta'}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{\pi k\overline{a}}{N\Delta} \approx 0.$$

Если $\alpha^2 M\Delta' \approx 0$, то последнее соотношение немедленно вытекает из доступности $\overline{a}$ и неравенства $\sin^2 x \le x^2$. Если же $\alpha^2 M\Delta' \not\approx 0$, то полагаем $S := \left[\frac{1}{\alpha\Delta'}\right]$. В этом случае число $S\Delta'$ доступно, $\alpha^2 S\Delta' \approx 0$ и, стало быть, $S < M$. Отсюда выводим:

$$\frac{\alpha^2}{\Delta'}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{\pi k\overline{a}}{N\Delta} = \frac{\alpha^2}{\Delta'}\sum_{k=1}^{S}\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{\pi k\overline{a}}{N\Delta} + \frac{\alpha^2}{\Delta'}\sum_{k=S+1}^{L}\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{\pi k\overline{a}}{N\Delta}.$$

Первый член в правой части равенства бесконечно мал, так как $\alpha^2 S\Delta' \approx 0$. То же самое верно и для второго члена, поскольку

$$\frac{\alpha^2}{\Delta'}\sum_{k=S+1}^{L}\frac{1}{k^2} \le \frac{\alpha^2}{\Delta'}(S^{-1} - M^{-1}),$$

причем $S\Delta'$ и $M\Delta'$ — бесконечно большие числа. $\triangleright$

7.1.3. Рассмотрим два следствия доказанной теоремы.

(1) *Если $N\Delta\Delta' \approx 2\pi h$, где $h > 0$ — стандартная константа, то дискретное преобразование Фурье $\Phi_\Delta : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta'}$ является гиперприближением преобразования Фурье $\mathscr{F}_h : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, заданного формулой*

$$\mathscr{F}_h(f)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-ixy/h)\,dx.$$

$\triangleleft$ Для доказательства нужно перейти от функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ к функции φ, заданной соотношением $\varphi(t) := f(2\pi ht)$, и заменить Δ на $\Delta/2\pi h$. $\triangleright$

(2) *Предположим, что функции f и $\mathscr{F}(f)$ ограничены и непрерывны почти всюду, а функции $|f|^2$ и $|\mathscr{F}(f)|^2$ удовлетворяют условию*

$$\lim_{\substack{\Delta\to 0\\ A\to\infty}} \Delta \sum_{|k|>\frac{A}{\Delta}} \big|f(k\Delta)\big| = 0.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \Delta'_n \sum_{k=-n}^{n} \Bigg| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-2\pi i x k\Delta'_n)\,dx -$$

$$-\Delta_n \sum_{m=-n}^{n} f(m\Delta_n)\exp(-2\pi i k m/n)\Bigg|^2 = 0$$

для любых последовательностей (Δ_n) и (Δ'_n) таких, что $\Delta_n \to 0$, $\Delta'_n \to 0$ и $n\Delta_n \cdot \Delta'_n \to 1/2$ при $n \to \infty$.

$\triangleleft$ Это стандартный вариант теоремы 7.1.2, который немедленно вытекает из 6.5.10 (3) (см. также 6.5.11 (5)). $\triangleright$

(3) Сравним полученные выше результаты, относящиеся к гиперприближению преобразования Фурье, с аналогичными результатами о гиперприближении операторов Гильберта — Шмидта (см. 6.5).

Преобразование Фурье $\mathscr{F}$ — оператор с ограниченным аналитическим ядром $k_{\mathscr{F}}(x,y) := \exp(-2\pi i x y)$. Если рассматривается оператор Гильберта — Шмидта с ограниченным и почти всюду непрерывным ядром $k \in L_2(\mathbb{R}^2)$, для которого $|k|^2$ удовлетворяет условию из 6.5.5 (1) (т. е. $k \in \widetilde{\mathscr{H}_2}$), то оператор $A_k : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta}$ с матрицей $(\Delta^* k(\alpha\Delta, \beta\Delta))_{\alpha,\beta=-L}^{L}$ будет гиперприближением интегрального оператора с ядром k.

Дискретное преобразование Фурье Φ_Δ, рассматриваемое в качестве оператора из $\mathscr{L}_{2,\Delta}$ в $\mathscr{L}_{2,\Delta}$, станет гиперприближением преобразования Фурье $\mathscr{F}$, если потребовать, чтобы $N\Delta^2 = 1$ (или $N\Delta^2 \approx 1$), см. теорему 7.1.2. При этом матрица оператора Φ_Δ принимает вид

$$\mathscr{A}_k := \Delta \cdot k_{\mathscr{F}}(\alpha\Delta, \beta\Delta)_{\alpha,\beta=-L}^{L}.$$

Следующее предложение показывает, что при других соотношениях между N и Δ матрица $\mathscr{A}_k$ может перестать быть гиперприближением оператора $\mathscr{F}$.

7.1.4. *Если* $N\Delta^2 = 2$, *то оператор* $B : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta}$, *определяемый матрицей* $\mathscr{A}_k$, *не будет гиперприближением преобразования Фурье* $\mathscr{F}$.

$\lhd$ Матрицу оператора B можно записать в виде

$$(\Delta \exp(-4\pi inm/N))_{n,m=-L}^{L}.$$

Положим $f := \chi_{\left[0;\sqrt{3/2}\right]}$ и покажем, что выполняется неравенство

$$^\circ(\|B(X_\Delta(f)) - X_\Delta(\mathscr{F}(f))\|_\Delta) > 0.$$

Выберем бесконечно большое натуральное число T, для которого $(T-1)\Delta \le \sqrt{3/2} < T\Delta$. Элементарные преобразования показывают, что требуемое вытекает из неравенства

$$^\circ\Bigg(\Delta^3 \sum_{m=L-T}^{L} |1 - \exp(-4\pi imT/N)|^2 \times$$
$$\times |(1 - \exp(-4\pi im/N))^{-1} - N/(4\pi im)|^2\Bigg) > 0.$$

Так как $T/N \approx 0$, то можно без труда показать, что сумма под знаком стандартной части больше или равняется выражению

$$\left(\Delta^3 \sum_{m=L-T}^{L} \sin^2 \frac{2\pi mT}{N}\right)\left(\sin^2 \frac{2\pi m}{N}\right)^{-1}.$$

Покажем, что стандартная часть последнего числа строго положительна.

Как видно, $\sin^2(2\pi m/N)$ убывает по m при $L - T \le m \le L$. Пусть $S := [2T/3]$. Тогда для некоторых бесконечно малых γ и δ будет $\pi T - 3\pi/4\pi - \gamma \le 2\pi mT/N \le \pi T - \pi/2 - \delta$ при всех $M - T \le m \le M - S$, следовательно, $\sin^2(2\pi mT/N)$ возрастает на указанном интервале. Отсюда вытекает, что в рассматриваемой сумме члены с выделенными номерами возрастают. Далее, член с номером $m := L - T$ больше или равен $\mathscr{D} \cdot \Delta^{-2}$ при некотором стандартном $\mathscr{D} > 0$. Теперь ясно, что вся сумма больше или равняется положительному числу $\mathscr{D}(T - S)\Delta$. Последнее число не инфинитезималь. $\rhd$

7.1.5. Распространим теперь теорему 7.1.2 на некоторый класс обобщенных функций умеренного роста. Предположим, что $N := 2L+1$ и Δ удовлетворяет дополнительному условию $0 < {}^\circ(N\Delta^2) < +\infty$. Заметим, что это условие выполнено также для N и Δ', если $0 < {}^\circ(N\Delta\Delta') < +\infty$.

Прежде всего выясним, как сопоставить обобщенной функции элемент из ${}^*\mathbb{C}^X$. Для этой цели рассмотрим оператор $\mathscr{D}_d : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta}$, определяемый матрицей $((2\Delta)^{-1}d_{nk})_{n,k=-L}^L$, где

$$d_{nk} := \begin{cases} 1, & \text{если } k = n \dotplus 1, \\ -1, & \text{если } k = n \dot{-} 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В этом параграфе символы $\dotplus$ и $\dot{-}$ обозначают операции сложения и вычитания в аддитивной группе кольца ${}^*\mathbb{Z}/N{}^*\mathbb{Z}$ с основным множеством $\{-L,\dots,L\}$. Иными словами, если $G := \mathscr{D}_d F$, то $G(k) = (F(k+1) - F(k-1))(2\Delta)^{-1}$.

Ясно, что $\|\mathscr{D}_d\| \approx +\infty$, что не позволяет определить оператор $\mathscr{D}_d^\#$. Чтобы продвинуться дальше, приведем несколько вспомогательных утверждений.

(1) *Если $G^{(n)} = \mathscr{D}_d^n F$, то*

$$G^{(n)}(k) = \frac{1}{(2\Delta)^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} F(k \dotplus n \dot{-} 2r).$$

Более того, если $|k| \le L - n$, то в этом равенстве $\dotplus$ и $\dot{-}$ можно заменить на $+$ и $-$ соответственно.

(2) *Если $\Delta^{-2}F(\pm(L-t)) \approx 0$ для произвольных стандартных s и t, то $G^{(n)}(\pm(L-m)) \approx 0$ для стандартных n и m.*

(3) *Если $f \in S(\mathbb{R})$, то $\Delta^{-s*}f(\pm(L-t)\Delta) \approx 0$ для любых стандартных s и t.*

$\lhd$ Так как $L\Delta \approx +\infty$ и t стандартно, то $(L-t)\Delta \approx +\infty$. Учитывая также, что $f \in S(\mathbb{R})$, получим $[(L-t)\Delta]^{-s}\,{}^*f(\pm(L-t)\Delta) \approx 0$. Таким образом, $0 \approx \Delta^{-s}[(L-t)\Delta^2]^s\,{}^*f(\pm(L-t)\Delta)$. Остается использовать условие $0 < {}^\circ(N\Delta^2) < +\infty$. $\rhd$

(4) *Если f принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R})$ и n — стандартное натуральное число, то*

$$\|\mathscr{D}_d^n X_\Delta(f) - X_\Delta(f^{(n)})\|_{2,\Delta} \approx 0.$$

$\lhd$ В силу (2) и (3) будет

$$\Delta \sum_{|k|>L-n} |(\mathscr{D}_d^n X_\Delta(f))(k) - X_\Delta(f^{(n)})(k)|^2 \approx 0,$$

поэтому ввиду (1) достаточно показать, что

$$0 \approx S = \Delta \sum_{k=-L+n}^{L-n} \left| \frac{1}{(2\Delta)^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} {}^*f((k+n-2r)\Delta) - {}^*f^{(n)}(k\Delta) \right|^2.$$

По формуле Тейлора

$$f(k\Delta + (n-2r)\Delta) = \sum_{s=0}^{n} \frac{f^{(s)}(k\Delta)}{s!}(n-2r)^s \Delta^s +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi r)}{(n+1)!}(n-2r)^{n+1}\Delta^{n+1}.$$

Отсюда выводим

$$\frac{1}{(2\Delta)^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f((k+n-2r)\Delta) =$$
$$= \frac{1}{(2\Delta)^n} \sum_{s=0}^{n} \frac{f^{(s)}(k\Delta)}{s!} \Delta^s \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} (n-2r)^s +$$
$$+ \frac{\Delta}{2^n} \sum_{r=0}^{n} \frac{f^{(n+1)}(\xi r)}{(n+1)!} (n-2r)^{n+1}.$$

Используя легко проверяемую формулу

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r r^s \binom{n}{r} = \begin{cases} 0, & \text{если } s < n, \\ (-1)^n n!, & \text{если } s = n, \end{cases}$$

получаем, что первый член правой части полученной формулы равен $f^{(n)}(k\Delta)$. Модуль же второго члена ограничен сверху числом $B\Delta$ для некоторой стандартной константы B, поскольку $f^{(n+1)}$ ограничена на $\mathbb{R}$. Таким образом, $S \le \Delta \cdot 2(L-n)B^2\Delta^2$ и остается привлечь (1). $\rhd$

7.1.6. Определим последовательность $(\mathscr{L}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ внешних подпространств пространства $\mathscr{L}_{2,\Delta}$ следующими формулами:

$$\mathscr{L}^{(0)} := \left\{ F \in \mathscr{L}_{2,\Delta} : (\forall^{\mathrm{st}} a)(\exists^{\mathrm{st}} C)\left(\Delta \sum_{k=-[a/\Delta]}^{[a/\Delta]} |F(k)|^2 < C\right)\right\};$$

$$\mathscr{L}^{(n+1)} := \mathscr{D}_d(\mathscr{L}^{(n)});$$

$$\mathscr{L}^{(\sigma)} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{L}^{(n)}.$$

Пусть $F \in {}^*\mathbb{C}^X$ таков, что

$${}^\circ\!\left(\Delta \sum_{k=-L}^{L} F(k)^* f(k\Delta)\right) = {}^\circ(F, \overline{X_\Delta(f)}) < +\infty$$

для любой стандартной $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Определим линейный (но не обязательно непрерывный) функционал $\psi_F^\Delta : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ по формуле:

$$\psi_F^\Delta(f) := {}^\circ(F, X_\Delta(f))_\Delta.$$

Теорема. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) $\psi_F^\Delta \in (C_0^\infty(\mathbb{R}))'$ *для любого* $F \in \mathscr{L}^{(\sigma)}$;

(2) *если* $f \in (C_0^\infty(\mathbb{R}))'$ *и* $f = \varphi^{(k)}$ *для некоторой регулярной обобщенной функции* φ $(k \geq 0)$, *то существует* $F \in \mathscr{L}^{(\sigma)}$ *такой, что* $\psi_F^\Delta = f$;

(3) $\psi_{\mathscr{D}_d F}^\Delta = (\psi_F^\Delta)'$ *для любого* $F \in \mathscr{L}^{(\sigma)}$.

$\vartriangleleft$ Пусть $(F, G)_\Delta^A := \Delta \sum_{k=-A}^{A} F(k)\overline{G(k)}$ для произвольного $A \leq L$. Предположим, что $f, f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $f_n \to f$ в $C_0^\infty(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$. Тогда для подходящего стандартного числа $a > 0$ носители $\operatorname{supp}(f_n)$ и $\operatorname{supp}(f)$ содержатся в отрезке $[-a, a]$ и последовательность (f_n) сходится к f равномерно. Компактность носителей влечет доступность чисел $\|f_n\|_{L_2}$ и $\|f\|_{L_2}$, а также сходимость $\|f - f_n\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $A := [a/2]$. Тогда имеют место соотношения

$$\|f\|_{L_2} = {}^\circ\|X_\Delta(f)\|_{2,\Delta}^A, \quad \|f_n\|_{L_2} = {}^\circ\|X_\Delta(f_n)\|_{2,\Delta}^A,$$

$${}^\circ\|X_\Delta(f - f_n)\|_{2,\Delta}^A \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Если теперь $F \in \mathscr{L}^{(0)}$, то выполнены соотношения

$$|\psi_F^{\Delta}(f)| = |{}^{\circ}(F, \overline{X_{\Delta}(f)})_{\Delta}| = |{}^{\circ}(F, \overline{X_{\Delta}(f)})_{\Delta}^{A}| \leq {}^{\circ}\|F\|_{2,\Delta}^{A} \cdot {}^{\circ}\|X_{\Delta}(f)\|_{2,\Delta}^{A}.$$

Из определения $\mathscr{L}^{(0)}$ вытекает доступность ${}^{\circ}\|F\|_{2,\Delta}^{A}$ и, как установлено выше, число ${}^{\circ}\|X_{\Delta}(f)\|_{2,\Delta}^{A}$ также доступно. Таким образом, значение $\psi_F^{\Delta}(f)$ доступно для любого $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$. Аналогично доказывается, что $\psi_F^{\Delta}(f_n - f) \to 0$ при $n \to \infty$, стало быть, $\psi_F^{\Delta} \in (C_0^{\infty}(\mathbb{R}))'$.

Далее, заметим, что $(\mathscr{D}_d^n F, \overline{X_{\Delta}(f)}) = (-1)^n (F, \overline{\mathscr{D}_d^n X_{\Delta}(f)})$. Из 7.1.5 (4) вытекает равенство $\mathscr{D}_d^n X_{\Delta}(f) = X_{\Delta}(f^{(n)}) + T$, где $\|T\|_{2,\Delta} \approx 0$. Более того, $X_{\Delta}(f^{(n)})(k) = 0$ при $|k| > A$, поскольку $\operatorname{supp} f^{(n)} \subset [-a, a]$. Как видно из 7.1.5 (1), $\mathscr{D}_d^n X_{\Delta}(f)(k) = 0$ при $|k| > A + n$. Так как n стандартно, то мы заключаем, что $T(k) = 0$ при $|k| > [b/\Delta]$ для любых стандартных $b > a$. Таким образом, если $B = [b/\Delta]$, то $(F, T)_{\Delta} = (F, T)_{\Delta}^{B} \approx 0$, ибо $\|F\|_{2,\Delta}^{B}$ доступно и $\|T\|_{2,\Delta}^{B} = \|T\|_{2,\Delta} \approx 0$. Тем самым $(\mathscr{D}_d^n F, \overline{X_{\Delta}(f)}) \approx (-1)^n (F, \overline{X_{\Delta}(f^{(n)})})$. Но это означает справедливость равенства $\psi_{\mathscr{D}_d^n F}^{\Delta}(f) = \psi_F^{\Delta(n)}(f)$, доказывающего утверждения (1) и (3).

Для доказательства (2) нужно лишь заметить, что без ограничения общности можно предполагать функцию φ непрерывной и тогда $X_{\Delta}(\varphi) \in \mathscr{L}^{(0)}$. $\triangleright$

7.1.7. Пусть $\mathfrak{C}^{(0)} := \operatorname{ltd}(\mathscr{L}_{2,\Delta})$; $\mathfrak{C}^{(n+1)} := \mathscr{D}_d \mathfrak{C}^{(n)}$ и $\mathfrak{C}^{(\sigma)} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{C}^{(n)}$. Понятно, что $\mathfrak{C}^{(0)} \subset \mathscr{L}^{(0)}$, следовательно, $\mathfrak{C}^{(n)} \subset \mathscr{L}^{(n)}$ для всех n и, стало быть, $\mathfrak{C}^{(\sigma)} \subset \mathscr{L}^{(\sigma)}$. Следующие два предложения устанавливаются так же, как и предыдущая теорема:

(1) *Если $F \in \mathfrak{C}^{(\sigma)}$, то ψ_F^{Δ} — обобщенная функция умеренного роста.*

(2) *Если $f = \varphi^{(k)}$ и $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, то существует такой элемент $F \in \mathfrak{C}^{(\sigma)}$, что $f = \psi_F^{\Delta}$.*

Предположим теперь, что Δ' удовлетворяет условию $N\Delta\Delta' \approx 1$, и рассмотрим, как и выше, дискретное преобразование Фурье $\Phi_{\Delta} : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta'}$. Так как оператор Φ_{Δ} имеет доступную норму, то $\Phi_{\Delta}(\mathfrak{C}^{(0)}) = \operatorname{ltd}(\mathscr{L}_{2,\Delta'}) = \widehat{\mathfrak{C}}^{(0)}$ и $\Phi_{\Delta}^{-1}(\widehat{\mathfrak{C}}^{(0)}) = \mathfrak{C}^{(0)}$.

Положим $\mathscr{M}_d := \Phi_{\Delta} \mathscr{D}_d \Phi_{\Delta}^{-1} : \mathscr{L}_{2,\Delta'} \to \mathscr{L}_{2,\Delta'}$ и определим последовательность $(\widehat{\mathfrak{C}}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ внешних подпространств пространства

$\mathscr{L}_{2,\Delta'}$ формулой $\widehat{\mathfrak{C}}^{(n+1)} := \mathscr{M}_d(\widehat{\mathfrak{C}}^{(n)})$. Очевидно, что $\Phi_\Delta(\mathfrak{C}^{(n)}) = \widehat{\mathfrak{C}}^{(n)}$ и $\widehat{\mathfrak{C}}^{(\sigma)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathfrak{C}}^{(n)} = \Phi_\Delta \mathfrak{C}^{(\sigma)}$.

Прямой подсчет показывает, что оператор $\mathscr{M}_d$ порожден матрицей

$$\left(\frac{i}{\Delta}\sin\frac{2\pi\beta}{N}\delta_{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta=-L}^{L}.$$

Для произвольных $G \in \mathbb{C}^X$ и $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ величину $\psi_G^{\Delta'}(f)$ определяют так же, как и в 7.1.6, но с заменой Δ на Δ' и F на G.

7.1.8. *Для произвольной $f \in S(\mathbb{R})$ имеет место равенство*

$$^\circ\|\mathscr{M}_d^n(X_{\Delta'}(f)) - X_{\Delta'}(\mathscr{M}^n(f))\| = 0.$$

$\lhd$ Как видно из указанного в 7.1.7 выражения для матрицы оператора $\mathscr{M}_d$, нужно лишь обосновать соотношение

$$\Delta' \sum_{\beta=-L}^{L} \left|\left(\frac{1}{\Delta}\sin\frac{2\pi\beta}{N}\right)^n f(\beta\Delta') - (2\pi\beta\Delta')^n f(\beta\Delta')\right|^2 \approx 0.$$

Покажем сначала, что если $T < L$, но $T\Delta' \approx +\infty$, то

$$\mathscr{W} := \Delta' \sum_{|\beta|>T} |f(\beta\Delta')|^2 \cdot \frac{1}{\Delta^{2n}}\left|\left(\sin\frac{2\pi\beta}{N}\right)^n - (2\pi\beta\Delta\Delta')^n\right|^2 \approx 0.$$

В самом деле, привлекая условие $N\Delta\Delta' \approx 1$, мы можем подыскать стандартное число C так, чтобы

$$\left|\left(\sin\frac{2\pi\beta}{N}\right)^n - (2\pi\beta\Delta\Delta')^n\right|^2 =$$

$$= \left|\frac{\beta}{N}\right|^{2n}\left|\left(\frac{\beta}{N}\right)^{-n}\left(\sin\frac{2\pi\beta}{N}\right)^n - (2\pi N\Delta\Delta')^n\right|^2 \le C\left|\frac{\beta}{N}\right|^{2n}.$$

Отсюда получаем оценку для $\mathscr{W}$:

$$\mathscr{W} \le C_1\Delta' \sum_{|\beta|>T} |f(\beta\Delta')|^2 |\beta\Delta'|^{2n}.$$

Если $\varphi(x) := x^{2n}f(x)$, то $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, поскольку $f \in S(\mathbb{R})$. Более того, функция φ непрерывна, ограничена и удовлетворяет равенству из формулировки предложения. Тем самым внутренняя функция $G : X \to \mathbb{C}$, определяемая формулой $G(\beta) := {}^*f(\beta\Delta')(\beta\Delta')^n$, представляет собой лифтинг φ и $G \in \mathscr{S}_2(M)$. Отсюда выводим, что правая часть полученной выше оценки для $\mathscr{W}$ бесконечно мала и, стало быть, $\mathscr{W} \approx 0$.

В силу 4.6.11 найдется такое $a \approx +\infty$, что $N\Delta' \overset{a}{\approx} +\infty$ и $N\Delta\Delta' - 1 \overset{a}{\approx} 0$. Пусть $T := [a/\Delta']$. Тогда T удовлетворяет тем же условиям, что и выше, следовательно, ввиду ограниченности f достаточно показать, что

$$\mathscr{W}_1 := \Delta' \sum_{\beta=1}^{T} \left| \left(\frac{1}{\Delta} \sin \frac{2\pi\beta}{N} \right)^n - (2\pi\beta\Delta')^n \right|^2 \approx 0.$$

Если $1 \leq \beta \leq T$, то $0 < \beta/N < a/(N\Delta') \overset{a}{\approx} 0$. Тем самым будет

$$\left(\sin \frac{2\pi\beta}{N} \right) \left(\frac{2\pi\beta}{N} \right)^{-1} = 1 - \alpha_\beta,$$

где $\alpha_\beta \overset{a}{\approx} 0$. Отсюда $\Delta^{-n}\big(\sin \frac{2\pi\beta}{N}\big)^n = (1 - \alpha_\beta)(2\pi\beta\Delta')^n(N\Delta\Delta')^{-n}$. В силу выбора a выполняется $(N\Delta\Delta')^{-n} = 1 + \delta$ для некоторого $\delta \overset{a}{\approx} 0$. Наконец, $\Delta^{-n}\big(\sin \frac{2\pi\beta}{N}\big)^n = (1 + \gamma_\beta)(2\pi\beta\Delta')^n$, где $\gamma_\beta \overset{a}{\approx} 0$. Если $\gamma = \max\{|\gamma_\beta| : 1 \leq \beta \leq T\}$, то $\gamma \overset{a}{\approx} 0$, поэтому

$$\mathscr{W}_1 \leq \Delta'\gamma^2 \sum_{\beta=1}^{T} (2\pi\beta\Delta')^{2n} \leq \Delta'\gamma^2(2\pi)^n(T\Delta')^{2n} \leq (2\pi)^n\gamma^2 a^{2n}\Delta' \approx 0,$$

что и требовалось. $\triangleright$

7.1.9. *Теорема.* *Справедливы следующие утверждения:*

(1) $\psi_G^{\Delta'} \in (S(\mathbb{R}))'$ *для любого* $G \in \widehat{\mathfrak{C}}^{(\sigma)}$;

(2) $\mathscr{F}(\psi_F^{\Delta}) = \psi_{\Phi_\Delta(F)}^{\Delta'}$ *для любого* $F \in \mathfrak{C}^{(\sigma)}$.

$\triangleleft$ (1): Первое утверждение можно доказать так же, как и теорему из 7.1.6.

(2): Обозначим символом $\mathscr{D}$ оператор дифференцирования в $S(\mathbb{R})$, и пусть $\mathscr{M} := \mathscr{F}\mathscr{D}\mathscr{F}^{-1}$. Тогда $\mathscr{M}(f)(x) := 2\pi i x f(x)$. Второе утверждение достаточно обосновать для $F := \mathscr{D}_d^n G$, где $G \in \mathfrak{C}^{(\sigma)}$. Как видно, требуемое содержится в следующих выкладках:

$$
\begin{aligned}
\psi^{\Delta'}_{\Phi_\Delta(F)}(f) &= {}^\circ(\Phi_\Delta(\mathscr{D}_d^n G), \overline{X_{\Delta'}(f)}) = {}^\circ(\mathscr{D}_d^n G, \Phi_\Delta^{-1}(X_{\Delta'}(\overline{f}))) = \\
&= (-1)^n {}^\circ(G, \mathscr{D}_d^n \Phi_\Delta^{-1} X_{\Delta'}(\overline{f})) = \\
&= (-1)^n {}^\circ(G, \Phi_\Delta^{-1} \mathscr{M}_d X_{\Delta'}(\overline{f})) = \\
&= (-1)^n {}^\circ(G, \Phi_\Delta^{-1} X_{\Delta'}(\mathscr{M}^n(\overline{f}))) = \\
&= (-1)^n {}^\circ(G, X_{\Delta'}(\mathscr{F}^{-1}\mathscr{M}^n(\overline{f}))) = \\
&= (-1)^n {}^\circ(G, X_{\Delta}(\mathscr{D}^n\mathscr{F}^{-1}(\overline{f}))) = \\
&= (-1)^n {}^\circ(G, \mathscr{D}_d^n X_{\Delta}(\mathscr{F}^{-1}(\overline{f}))) = \\
&= {}^\circ(\mathscr{D}_d^n G, X_{\Delta}(\mathscr{F}^{-1}(\overline{f}))) = {}^\circ(F, X_{\Delta}(\mathscr{F}^{-1}(\overline{f}))) = \\
&= \psi_F^{\Delta}(\mathscr{F}^{-1}(\overline{f})) = (\mathscr{F}\psi_F^{\Delta})(f).
\end{aligned}
$$

Теорема доказана. ▷

7.1.10. Примечания.

(1) Условие $N\Delta\Delta' \approx 1$ из теоремы 7.1.2 возникает в другой ситуации в хорошо известной *теореме Котельникова,* утверждающей, что если спектр ограниченной функции f лежит в интервале $[-a, a]$, то f полностью определена своими значениями на множестве $\{n\lambda : -\infty < n < +\infty\}$, где $\lambda \leq (2a)^{-1}$, в соответствии с формулой

$$
f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\lambda)\frac{\sin 2\pi a(t - k\lambda)}{2\pi a(t - k\lambda)}\,.
$$

В нашем случае значения функции вычисляются в точках $k\Delta$, где $\Delta \approx 1/(N\Delta')$, и нетрудно видеть, что $N\Delta'$ — это в точности длина интервала, на котором рассматривается $\mathscr{F}(f)$.

(2) Условие $N\Delta\Delta' \approx 2\pi h$ из предложения 7.1.3 (1) тесно связано также с *принципом неопределенности* из квантовой механики. Рассмотрим однопараметрические группы унитарных операторов $U(u) := \exp(-iuP)$ и $V(v) := \exp(-ivQ)$, где Q и P — операторы координаты и импульса соответственно, т. е. Q — оператор умножения на независимую переменную и $P := \frac{h}{i}\frac{d}{dx}$, где $h > 0$ — фиксированное стандартное число, (*постоянная Планка*). Напомним, что $U(u)\varphi(x) = \varphi(x - uh)$, $V(v)\varphi(x) = \exp(-ivx)\varphi(x)$ и выполняется равенство

$$
U(u)V(v) = \exp(ihuv)V(v)U(u),
$$

которое по размышлению можно рассматривать как одну из форм соотношения неопределенности.

Введем гиперконечномерные операторы $U_d, V_d : \mathbb{C}^X \to \mathbb{C}^X$ так, что $(U_d F)(k) := F(k \dot{-} 1)$ и V_d — диагональная матрица

$$(\exp(-2\pi ink/N)\delta_{nk})_{n,k=-L}^{L}.$$

Легко проверить, что операторы U_d^r и V_d^m удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$U_d^r V_d^m = \exp(2\pi irm/N) V_d^m U_d^r \quad (r, m \in {}^*\mathbb{Z}/N^*\mathbb{Z}).$$

Если $\exp(2\pi irm/N) \approx \exp(\pi ihuv)$, то последнее соотношение превращается в указанное выше коммутационное соотношение для операторов U и V. Однако справедливость условия $\exp(2\pi irm/N) \approx \exp(\pi ihuv)$ требует определенной связи между величинами r, m, u и v; подробности см. в следующем предложении.

(3) *Если $r, m \in {}^*\mathbb{Z}/N^*\mathbb{Z}$ таковы, что $r\Delta \approx uh$ и $2\pi m\widehat{\Delta} \approx v$, где u и v — стандартные числа, то U_d^r и $V_d^m : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta}$ будут гиперприближениями операторов $U(u)$ и $V(v)$ соответственно.*

$\triangleleft$ В качестве множества $\mathfrak{M}$ из 6.5.1 (2) возьмем совокупность характеристических функций замкнутых интервалов. Как видно из определения, $U(u)(\chi_{[a,b]}) = \chi_{[a+uh,b+uh]}$. Заметим, что если $k\Delta$ и $m\Delta$ околостандартны, то $|k|, |m|, |k-m| < L$, поэтому $k \dot{-} m = k - m$ и $U_d^r(F)(k) = F(k-r)$. Понятно также, что для $f = \chi_{[a,b]}$ будет

$$X_\Delta(f)(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n\Delta \notin {}^*[a,b], \\ 1, & \text{если } n\Delta \in {}^*[a,b]. \end{cases}$$

Значит, в силу этого наблюдения,

$$U_d^r(X_\Delta(f))(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n\Delta \notin {}^*[a+r\Delta, b+r\Delta], \\ 1, & \text{если } n\Delta \in {}^*[a+r\Delta, b+r\Delta]. \end{cases}$$

Аналогично

$$X_\Delta(U(u)(f))(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n\Delta \notin {}^*[a+uh, b+uh], \\ 1, & \text{если } n\Delta \in {}^*[a+uh, b+uh]. \end{cases}$$

Теперь ясно, что

$$\Delta \sum_{k=-L}^{L} |U_d^r(X_\Delta(f))(n) - X_\Delta(U(u)(f))(n)|^2 = 2\Delta\bigl[|(uh - r\Delta)/\Delta|\bigr] \approx 0,$$

ибо $uh \approx r\Delta$.

Непосредственно проверяются равенства $V(v) = \mathscr{F}_h^{-1}U^{-1}(v)\mathscr{F}_h$ (см. 7.1.3 (1)) и $V_d = \Phi_\Delta^{-1}U_d^{-1}\Phi_\Delta$. Положим $\Delta_1 := 2\pi p\widehat{\Delta}$ и рассмотрим U_d^{-1} как оператор, действующий из $\mathscr{L}_{2,\Delta_1}$ в $\mathscr{L}_{2,\Delta_1}$.

В силу наших предположений $m\Delta_1 \approx vh$, а ввиду доказанного выше U_d^{-m} будет гиперприближением оператора $U^{-1}(v)$. Согласно 7.1.3 (1) оператор $\Phi_\Delta : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta_1}$ представляет собой гиперприближение оператора $\mathscr{F}_h$, т. е. $V_d^m := \Phi_\Delta^{-1}U_d^{-m}\Phi_\Delta$ — гиперприближение оператора $\mathscr{F}_h^{-1}U^{-1}(v)\mathscr{F}_h = V(v)$. $\triangleright$

(4) Теорема 7.1.9 может послужить основой для построения приближения преобразования Фурье обобщенных функций умеренного роста с помощью дискретного преобразования Фурье. К сожалению, такой подход оказывается успешным только для тех функций, которые являются производными функций из $L_2(\mathbb{R})$. В то же время этот класс может быть расширен, как показывает следующий пример.

Пусть $\varphi = 1$. Тогда φ — регулярная обобщенная функция и ввиду 7.1.8 $\varphi = \psi_F^\Delta$, где $F := X_\Delta(f)$, т. е. $F(k) = 1$ для всех $k \in X$. Так как $\mathscr{F}(1) = \delta$, то $\Phi_\Delta(F)(k) = N\Delta\delta_{k0}$. Таким образом, если $G := \Phi_\Delta(F)$, то $\psi_G^{\Delta'}(f) = {}^\circ(G, X_\Delta(f))_{\Delta'} = {}^\circ(N\Delta\Delta'{}^*f(0)) = f(0) = \delta(f)$, поэтому $\mathscr{F}(\psi_F) = \psi_{\Phi_\Delta(F)}^{\Delta'}$.

7.2. Нестандартная оболочка гиперконечной группы

Здесь изучается конструкция, сопоставляющая каждой гиперконечной группе некоторую локально компактную группу.

7.2.1. Рассмотрим аддитивную группу G кольца

$${}^*\mathbb{Z}/N{}^*\mathbb{Z} := \{-L, \dots, L\}$$

(см. 7.1.1). Ясно, что G — внутренняя гиперконечная абелева группа. Выделим в ней две внешние подгруппы $G_0 := \{k \in G : k\Delta \approx 0\}$ и $G_f := \{k \in G : {}^\circ|k\Delta| < +\infty\}$.

Очевидно, что G_0 и G_f можно представить в виде соответственно пересечения и объединения счетных семейств внутренних множеств:

$$G_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \jmath^{-1}({}^*(-n^{-1}, n^{-1})), \quad G_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \jmath^{-1}({}^*[-n, n]).$$

Далее, отображение $\mathrm{st} : G_f \to \mathbb{R}$ является эпиморфизмом и $\ker(\mathrm{st}) = G_0$, т. е. $\mathbb{R} \simeq G_f/G_0$.

Допустим, что внутреннее множество A совпадает с $\jmath^{-1}({}^*(a, b))$ для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathrm{st}(A) = [a, b]$. Определим внешнее множество $A^\circ := \{c \in A : c + G_0 \subset A\}$. Легко проверить, что $\mathrm{st}(A^\circ) = (a, b)$.

Аналогичным образом можно определить A° для любого внутреннего множества A. В этом случае без труда устанавливается, что множество $\mathrm{st}(A)$ замкнуто, а $\mathrm{st}(A^\circ)$ — открыто.

Тем самым семейство

$$\{\mathrm{st}(A^\circ) : A \text{ — внутреннее подмножество } G_f\}$$

образует базу топологии в $\mathbb{R}$. Выполняется также очевидное равенство ${}^\circ(\Delta \cdot |\jmath^{-1}({}^*[a, b])|) = b - a$. Отсюда видно, что $(G_f, S_\Delta^{G_f}, \nu_\Delta^{G_f})$ — это σ-конечное подпространство пространства Лёба $(G, S_\Delta, \nu_\Delta)$ (см. 6.3.11).

В этом случае $\nu_\Delta^{G_f}$ — инвариантная мера на G_f и, как видно из предыдущего равенства, отображение $\mathrm{st} : G_f \to \mathbb{R}$ сохраняет меру, если в качестве меры Хаара в $\mathbb{R}$ берется мера Лебега.

Пусть $\widehat{G}$ — группа характеров группы G. Тогда внутреннее отображение $n \mapsto \chi_n$, где $\chi_n(m) := \exp(2\pi i mn/N)$ для всех $n, m \in G$, будет изоморфизмом G в $\widehat{G}$. Это утверждение следует из принципа переноса, так как оно справедливо для каждого стандартного N.

Легко видеть, что характер $\chi_n : G \to {}^*\mathbb{C}$ индуцирует с помощью гомоморфизма st характер $\varkappa : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ в том и только в том случае, если $\chi_n|_{G_0} \approx 1$. Поэтому естественно выделить в $\widehat{G}$ внешнюю подгруппу $H_f := \{\chi \in \widehat{G} : \chi|_{G_0} \approx 1\}$ и определить мономорфизм $\widehat{\mathrm{st}} : H_f \to \widehat{\mathbb{R}}$ формулой $\widehat{\mathrm{st}}(\chi)(n) := {}^\circ\chi({}^\circ(n\Delta))$ для $n \in \mathbb{N}$ и $\chi \in \widehat{G}$. Далее, $\ker(\widehat{\mathrm{st}}) = H_0 := \{\chi \in H_f : \chi|_{G_f} \approx 1\}$ и очевидным образом $H_f/H_0 \subset \widehat{\mathbb{R}}$.

(1) Для любого $n \in G$ имеют место эквивалентности:

$$\chi_n \in H_f \leftrightarrow {}^\circ(|n \cdot \widehat{\Delta}|) < +\infty,$$
$$\chi_n \in H_0 \leftrightarrow n \cdot \widehat{\Delta} \approx 0,$$

где $\widehat{\Delta} := (N\Delta)^{-1}$.

$\lhd$ В самом деле, если число $n\widehat{\Delta}$ доступно, то справедливы соотношения:

$$\chi_n(m) = \exp(2\pi imn/N) = \exp(2\pi im\Delta \cdot n\widehat{\Delta}) \approx 1,$$

ибо $m\Delta \approx 0$.

Наоборот, предположим, что число $n\widehat{\Delta}$ недоступно. Пусть $m := [N/(2\pi)]$. Тогда будет $m\widehat{\Delta} \approx 0$. В этом случае $\chi_n(m) = \exp 2\pi\big(\frac{N}{2\pi}\big)\Delta \cdot \frac{n}{N\Delta} \approx -1$, так как $0 \leq \alpha < 1$. Получили противоречие.

Доказательство второй эквивалентности проводится аналогично. $\rhd$

Таким образом, группы $\widehat{G}_f$ и $\widehat{G}_0$ устроены так же, как и группы G_f и G_0. Стало быть, $\widehat{G}_f/\widehat{G}_0 \simeq \widehat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$.

Для произвольной локально компактной абелевой группы $\mathfrak{G}$ преобразование Фурье $\mathscr{F} : L_2(\mathfrak{G}) \to L_2(\widehat{\mathfrak{G}})$ определяется формулой $\mathscr{F}(f)(\chi) := (f, \widehat{\chi})$, поэтому, как легко видеть, теорема 7.1.2 имеет групповую интерпретацию. Приступим к рассмотрению общего случая.

Пусть G — внутренняя гиперконечная абелева группа и G_0 и G_f — две подгруппы G такие, что $G_0 \subset G_f$ и выполнены следующие условия:

(А) существует такая последовательность $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ внутренних множеств, что $A_n \subset G_f$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $G_0 = \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$;

(Б) существует такая последовательность $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ внутренних множеств, что $B_n \supset G_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $G_f = \bigcup\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Таким образом, подгруппы G_0 и G_f могут быть либо внутренними, либо внешними.

(2) *Если подгруппы G_0 и G_f группы G, где $G_0 \subset G_f$, удовлетворяют условиям* (А) *и* (Б), *то существует счетное семейство*

$(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *симметричных внутренних множество в* G *такое, что выполнены утверждения:*

(а) $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} C_n = G_0$;

(б) $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} C_n = G_f$;

(в) $C_n + C_n \subset C_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Если, сверх того, F — *внутреннее подмножество* G, *то*

(г) $F \subset G_f \leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})(F \subset C_n)$;

(д) $F \supseteq G_0 \leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})(F \supseteq C_n)$.

$\triangleleft$ Требуемое легко следует из принципа насыщения. $\triangleright$

Ниже мы будем работать с фиксированным счетным семейством $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющим условиям (2). Если $F \subset G_f$, то полагаем $\overset{\circ}{F} := \{g \in G_f : g + G_0 \subset F\}$. Следующее утверждение следует из (2).

(3) *Если* F — *внутреннее подмножество* G_f, *то* $(\forall g \in G)$ $(g \in \overset{\circ}{F} \leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{Z})(g + C_m \subset F))$.

Обозначим семейство всех внутренних множеств в G_f символом $\mathrm{In}(G_f)$ и положим $\mathrm{In}_0(G_f) := \{F \in \mathrm{In}(G_f) : G_0 \subset F\}$. Пусть $G^\# := G_f/G_0$ и $\jmath : G_f \to G^\#$ — канонический фактор-гомоморфизм. Если $g \in G_f$ и $A \subset G_f$, то вместо $\jmath(g)$ и $\jmath(A)$ будем писать $g^\#$ и $A^\#$ соответственно.

7.2.2. Теорема. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) *семейство* $\mathfrak{U} := \{\overset{\circ}{F}{}^\# : F \in \mathrm{In}(G_f)\}$ *образует базу окрестностей нуля некоторой равномерной топологии согласованной с групповой структурой на* $G^\#$ *и называемой ниже канонической;*

(2) *если* $F \in \mathrm{In}(G_f)$, *то множество* $F^\#$ *замкнуто;*

(3) *топологическая группа* $G^\#$ *полна.*

$\triangleleft$ (1): Как известно из общей теории топологических групп (см., например, [194]), семейство $\mathfrak{U}$ подмножеств абелевой группы $G^\#$ будет базой фильтра окрестностей нуля некоторой групповой топологии, как только выполнены следующие условия:

(а) $\bigcap\{U : U \in \mathfrak{U}\} = \{e\}$;

(б) $(\forall U, V \in \mathfrak{U}))(\exists W \in \mathfrak{U})(W \subset U \cap V)$;

(в) $(\forall U \in \mathfrak{U})(\exists V \in \mathfrak{U})(V - V \subset U)$;

(г) $(\forall U \in \mathfrak{U})(\forall \xi \in U)(\exists V \in \mathfrak{U})(V + \xi \subset U)$.

Проверим (а). Если $g^{\#} \in \bigcap\{\overset{\circ}{F}{}^{\#} : F \in \mathrm{In}_0(G_f)\}$, то для каждого $F \in \mathrm{In}_0(G_f)$ будет $((g + G_0) \cap \overset{\circ}{F} \neq \varnothing)$. Здесь используется тот факт, что $\jmath^{-1}(g^{\#}) = g + G_0$ и $\jmath^{-1}(\overset{\circ}{F}{}^{\#}) = \overset{\circ}{F} + G_0 = \overset{\circ}{F}$ (см. определение $\overset{\circ}{F}$). Следовательно, существует $g_1 \in G_0$, для которого $(g + g_1 + G_0 \subset F)$, т. е. $g \in F$. Тем самым $g \in \bigcap \mathrm{In}_0(G_f) = G_0$.

Условие (б) вытекает из включения $(F_1 \cap F_2)^{\circ\#} \subset \overset{\circ}{F}{}_1^{\#} \cap \overset{\circ}{F}{}_2^{\#}$, которое проверяется аналогично.

Проверим условие (в). Если $F \in \mathrm{In}_0(G_f)$, то в силу 7.2.1 (2) существует $n \in \mathbb{Z}$ такой, что $C_n + C_n + C_n \subset F$, значит, $C_n + C_n + G_0 \subset F$. Таким образом, $\overset{\circ}{C}_n + \overset{\circ}{C}_n \subset \overset{\circ}{F}$, следовательно, $(\overset{\circ}{C}_n + \overset{\circ}{C}_n)^{\#} = \overset{\circ}{C}{}_n^{\#} + \overset{\circ}{C}{}_n^{\#} \subset \overset{\circ}{F}{}^{\#}$. Так как множество C_n симметрично, то $\overset{\circ}{C}{}_n^{\#} = -\overset{\circ}{C}{}_n^{\#}$.

Условие (г) проверяется аналогично.

(2): Пусть $F \in \mathrm{In}(G_f)$. Покажем, что множество $F^{\#}$ замкнуто. Если $g^{\#} \notin F^{\#}$, то $(g + G_0) \cap F = \varnothing$, значит, $(g + C_n) \cap F = \varnothing$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. (Здесь использована ω^{+}-насыщенность.) Тем самым $(g + C_{n-1} + G_0) \cap F = \varnothing$ ввиду 7.2.1 (2), поэтому $(g^{\#} + C_{n-1}^{\#}) \cap F^{\#} = \varnothing$. Но тогда $(g^{\#} + \overset{\circ}{C}{}_{n-1}^{\#}) \cap F^{\#} = \varnothing$, так как $\overset{\circ}{C}_{n-1} \subset C_{n-1}$. Это доказывает, что множество $F^{\#}$ замкнуто, поскольку $\overset{\circ}{C}{}_{n-1}^{\#} \in \mathfrak{U}$.

(3): Как видно из 7.2.1 (2), каноническая топология на $G^{\#}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности. Поэтому нам достаточно установить только, что всякая последовательность Коши в $G^{\#}$ имеет предел.

Если $(g_n^{\#})_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность Коши в $G^{\#}$, то по определению для всякого $m \in \mathbb{Z}$ найдется $\nu(m) \in \mathbb{N}$ так, что для любых $n_1, n_2 > \nu(m)$ выполняется $g_{n_1}^{\#} - g_{n_2}^{\#} \in \overset{\circ}{C}{}_m^{\#}$. Рассмотрим счетное семейство

$$\Gamma := \{A_{m,n} : n > \nu(m),\ n, m \in \mathbb{N}\},$$

где

$$A_{m,n} := \{g : g_n - g \in C_{m+1}\},$$

и покажем, что Γ — центрированное семейство.

Пусть

$$S := \{A_{m_1,n_1}, \dots, A_{m_k,n_k}\},$$

и выберем $n > \max\{\nu(m_1), \dots, \nu(m_k)\}$. Тогда $g^{\#}_{n_\imath} - g^{\#}_n \in \overset{\circ}{C}{}^{\#}_{m_\imath}$, поэтому $g_{n_\imath} - g_n + g \in \overset{\circ}{C}_{m_\imath}$ для некоторого $g \in G_0$.

Итак, $g_{n_\imath} - g_n + g + G_0 \subset C_{m_\imath}$. Так как $g + G_0 = G_0$, то $g_{n_\imath} - g_n \in C_{m_\imath}$ $(\imath := 1, \dots, k)$, значит, $g_n \in \bigcap S$. Теперь из ω^+-насыщенности получаем существование элемента $g \in \bigcap \Gamma$. Учитывая включение $C_{m+1} \subset \overset{\circ}{C}_{m+2}$, очевидно вытекающее из 7.2.1 (2), выводим, что $g^{\#}_n \to g^{\#}$ при $n \to \infty$. $\triangleright$

Напомним, что внутреннее множество называют *стандартно-конечным* (см. 3.7.7), если его мощность — стандартное натуральное число. Условимся также символом $(*)$ обозначать следующее условие:

$$(\forall\, F_1, F_2 \in \mathrm{In}_0(G_f))(F_1 \subset F_2 \to (\exists\, B \subset F_2)(|B| \in \mathbb{N} \wedge F_1 + B \supseteq F_2)).$$

7.2.3. Теорема. *Справедливы утверждения:*

(1) *группа $G^{\#}$ с канонической топологией локально компактна и сепарабельна в том и только в том случае, если выполнено условие $(*)$;*

(2) *если выполнено условие $(*)$, то группа $G^{\#}$ компактна (дискретна) в том и только в том случае, если G_f (соответственно G_0) является внутренней подгруппой группы G.*

$\triangleleft$ (1): Предполагая справедливость условия $(*)$, покажем, что $G^{\#}$ локально компактна. Достаточно установить компактность $F^{\#}$ для любого $F \in \mathrm{In}_0(G_f)$. Замкнутость $F^{\#}$ была показана в 7.2.2. Докажем, что для любой окрестности U нуля в $G^{\#}$ существует конечное множество $\{v_1, \dots, v_k\} \subset F^{\#}$, для которого $\bigcup_{i=1}^k (v_i + U) \supset F^{\#}$. Согласно 7.2.1 (2) можно подобрать $n \in \mathbb{Z}$ так, чтобы $C_n \subset F$ и $\overset{\circ}{C}{}^{\#}_n \subset U$. Тогда $C_{n-1} \subset \overset{\circ}{C}_n$, так как $C_{n-1} + C_{n-1} \subset C_n$ и $G_0 \subset C_{n-1}$. Из условия $(*)$ вытекает существование конечного множества $B \subset F$, обеспечивающего включение $C_{n-1} + B \supset F$. Но тогда $\overset{\circ}{C}_n + B \supset F$ и $\overset{\circ}{C}{}^{\#}_n + B^{\#} \supset F^{\#}$. Множество $B^{\#}$ конечно, поскольку B стандартно-конечно. Сепарабельность группы $G^{\#}$ следует из ее метризуемости и соотношения $G^{\#} = \bigcup\{C^{\#}_n : n \in \mathbb{Z}\}$, так как каждое из множеств $C^{\#}_n$ компактно.

Наоборот, предположим, что $G^{\#}$ локально компактна и сепарабельна. Как видно, существует $n_0 \in \mathbb{Z}$ такой, что $C_n^{\#}$ компактно для всех $n \leq n_0$. Покажем компактность $F^{\#}$ для произвольного $F \in \mathrm{In}(G_f)$. Если $V := \overset{\circ}{C}{}^{\#}_{n_0-1}$, то $\bigcup\{g^{\#} + V : g \in G_f\} = G^{\#}$. Ввиду предположения о сепарабельности существует такая последовательность $\{g_n\}$, что $G^{\#} = \bigcup_n (g_n^{\#} + V)$, откуда

$$G_f = \bigcup_n (g_n + \overset{\circ}{C}_{n_0-1} + G_0) \subset \bigcup_n (g_n + C_{n_0}) \subset G_f.$$

Следовательно, $F \subset \bigcup_n (g_n + C_{n_0})$ и в силу ω_1-насыщенности существует конечное множество $\{n_1, \dots, n_k\}$ со свойством $F \subset \bigcup_{i=1}^k g_{n_i} + C_{n_0}$. Тем самым приходим к включению $F^{\#} \subset \bigcup_{i=1}^k g_{n_i} + C_{n_0}$, из которого вытекает компактность $F^{\#}$. Возьмем теперь $G_0 \subset F_1 \subset F_2$ и подберем $n \leq n_0$ так, чтобы $C_n \subset F_1$. Существуют $g_1, \dots, g_k$, для которых $g_1^{\#}, \dots, g_k^{\#} \in F_2^{\#}$ и $\bigcup_{i=1}^k g_i + \overset{\circ}{C}_{n-1} \supset F_2$. Пусть $h_1, \dots, h_k \in F_2$ и $h_i - g_i \in G_0$, т. е. $h_i + G_0 = g_i + G_0$. Тогда

$$F_2 + G_0 \subset \bigcup_{i=1}^k \big(g_i + \overset{\circ}{C}_{n-1} + G_0\big) \subset \bigcup_{i=1}^k (h_i + C_n) \subset \{h_1, \dots, h_k\} + F_1.$$

Полагая $B = \{h_1, \dots, h_k\}$, приходим к условию $(*)$.

(2): Пусть теперь группа $G^{\#}$ компактна. Для произвольного $F \in \mathrm{In}_0(G_f)$ подберем $g_1, \dots, g_k \in G_f$ так, чтобы

$$G^{\#} = \bigcup_{i=1}^k (g_i^{\#} + \overset{\circ}{F}{}^{\#}) = \left(\bigcup_{i=1}^k (g_i + \overset{\circ}{F})\right)^{\#} = \left(\bigcup_{i=1}^k (F + g_i)\right)^{\#} (\overset{\circ}{F} \subset F \subset G_f).$$

Множество $K := \bigcup_{i=1}^k (F + g_i) \subset G_f$ является внутренним. Ясно, что $K^{\#} = G^{\#}$, поэтому $G_f = K + G_0 \subset K + F \subset G_f$. Значит, $G_f = K + F$ также внутреннее множество.

Наоборот, пусть G_f — внутренняя подгруппа группы G. Покажем компактность $G^{\#}$, предполагая справедливость $(*)$. Достаточно установить следующее утверждение:

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\exists B \subset G_f)\left(|B| \in \mathbb{N} \wedge G^{\#} = \bigcup_{g \in B} \left(g^{\#} + \overset{\circ}{C}{}^{\#}_n\right)\right).$$

В силу 7.2.1 (2) $C_{n-1} \subset \overset{\circ}{C}_n$, а согласно условию $(*)$ существует стандартно-конечное множество B такое, что

$$G_f = B + C_{n-1} = B + \overset{\circ}{C}_n = \bigcup_{g \in B} \Big(g + \overset{\circ}{C}_n\Big).$$

Отсюда $G^{\#} = \bigcup_{g \in B}(g^{\#} + \overset{\circ}{C}{}_n^{\#})$. На этом мы завершаем доказательство, опуская простую проверку второй части утверждения (2). $\rhd$

Подчеркнем, что из доказанной теоремы 7.2.3 следует компактность $F^{\#}$ для любого $F \in \mathrm{In}(G_f)$.

7.2.4. Приведем несколько необходимых для дальнейшего вспомогательных фактов о введенных выше объектах.

(1) *Если* $F \subset G_f$, *то* $g + \overset{\circ}{F} = (g + F)^{\circ}$, $\jmath^{-1}(\jmath(\overset{\circ}{F})) = \overset{\circ}{F}$, $(g + \overset{\circ}{F})^{\#} = g^{\#} + \overset{\circ}{F}{}^{\#}$ *и* $\overset{\circ}{F}{}^{\#} = {}^{c}(G_f - F)^{\#}$, *где* ${}^{c}A$ *обозначает дополнение множества* A.

(2) *Если* $F \in \mathrm{In}(G_f)$, *то множество* $\overset{\circ}{F}{}^{\#}$ *открыто, а семейство* $\{\overset{\circ}{F}{}^{\#} : F \in \mathrm{In}(G_f)\}$ *образует базу канонической топологии на* $G^{\#}$.

Всюду ниже мы предполагаем, что выполнены условия теоремы 7.2.3.

(3) *Для любых* $F_1, F_2 \in \mathrm{In}_0(G_f)$ *выполняются соотношения* $0 < {}^{\circ}(|F_1|/|F_2|) < +\infty$.

$\lhd$ По теореме 7.2.3 существует стандартно-конечное множество B (т. е. $|B| \in \mathbb{N}$) такое, что $F_1 + B \supset F_1 \cup F_2 \supset F_2$. Тогда $|F_2| \le |F_1 + B| \le |F_1| \cdot |B|$. Значит, ${}^{\circ}(|F_2|/|F_1|) < +\infty$. Аналогично ${}^{\circ}(|F_1|/|F_2|) < +\infty$, что и требовалось. $\rhd$

(4) Гипердействительное число $\Delta \in {}^{*}\mathbb{R}_+$ называют *нормирующим множителем* тройки (G, G_0, G_f), если $0 < {}^{\circ}(\Delta \cdot |F|) < +\infty$ для каждого $F \in \mathrm{In}_0(G_f)$. Как видно из (3), число $\Delta := |F|^{-1} \in {}^{*}\mathbb{R}_+$ является нормирующим множителем для каждого $F \in \mathrm{In}_0(G_f)$. Таким образом, для любой тройки (G, G_0, G_f) существует нормализующий множитель, удовлетворяющий условиям теоремы 7.2.3. Ясно также, что если Δ — нормирующий множитель, то Δ' будет нормирующим множителем в том и только в том случае, если

$0 < {}^{\circ}\big(\frac{\Delta}{\Delta'}\big) < +\infty$. Кроме того, из (3) видно, что если Δ — нормирующий множитель для (G, G_0, G_f), то $(G_f, S_\Delta^{G_f}, \nu_\Delta^{G_f})$ — σ-конечное подпространство пространства Лёба $(G, S_\Delta, \nu_\Delta)$. Всюду ниже мы пишем просто S вместо $S_\Delta^{G_f}$ и ν_Δ вместо $\nu_\Delta^{G_f}$.

(5) *Для любых $A \in S$ и $g \in G_f$ выполняется $g + A \in S$ и $\nu_\Delta(g + A) = \nu_\Delta(A)$.*

$\lhd$ Очевидно. $\rhd$

(6) *Для каждого элемента B σ-алгебры борелевских множеств $\mathscr{B}$ группы $G^\#$ имеет место соотношение $\jmath^{-1}(B) \in S$.*

$\lhd$ В силу (1) достаточно показать, что $\jmath^{-1}((G_f - F)^\#) \in S$ для произвольного $F \in \mathrm{In}(G_f)$. Это утверждение вытекает из следующих равенств:

$$\jmath^{-1}((G_f - F)^\#) = G_f - F + G_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (C_n - F) + \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} C_m,$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (C_n - F) + \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} C_m = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (C_n - F + \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} C_m),$$

$$C_n - F + \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} C_m = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (C_n - F + C_m).$$

Обоснование последнего равенства использует ω^+-насыщенность нестандартного универсума. $\rhd$

Определим теперь меру μ_Δ на $\mathscr{B}$, полагая

$$\mu_\Delta(B) := \nu_\Delta(\jmath^{-1}(B)).$$

Непосредственно из (5) следует, что мера μ_Δ инвариантна. Она также регулярна ввиду сепарабельности $G^\#$. Таким образом, μ_Δ — мера Хаара на $G^\#$. Обозначим буквой L пополнение σ-алгебры $\mathscr{B}$ относительно μ_Δ. Продолжение μ_Δ на L будем обозначать тем же символом μ_Δ.

7.2.5. Теорема. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *множество $A \subset G^\#$ содержится в L в том и только в том случае, если $\jmath^{-1}(A) \in S$;*

(2) *$\mu_\Delta(B) = \nu_\Delta(\jmath^{-1}(B))$ для любого $B \in L$.*

$\lhd$ То, что для $A \in L$ выполняются соотношения $\jmath^{-1}(A) \in S$ и $\mu_\Delta(A) = \nu_\Delta(\jmath^{-1}(A))$, вытекает непосредственно из полноты меры Лёба ν_Δ. Поэтому достаточно доказать обратное утверждение для такого множества $A \subset G^\#$, что $\jmath^{-1}(A) \subset F \in \mathrm{In}_0(G_f)$. Пусть выполнено последнее включение и $\jmath^{-1}(A) \in S$. Чтобы доказать соотношения $A \in L$ и $\mu_\Delta(A) = \nu_\Delta(\jmath^{-1}(A))$, достаточно установить, что $\mu_{\mathrm{in}}(A) = \mu_{\mathrm{out}}(A) = \nu_\Delta(\jmath^{-1}(A))$, где $\mu_{\mathrm{in}}(A)$ и $\mu_{\mathrm{out}}(A)$ — внутренняя и внешняя меры (в смысле теории меры) Хаара множества A.

Так как $\nu_\Delta(F)$ — доступное гиперчисло, значит, $\nu_\Delta(\jmath^{-1}(A))$ также доступно. Поэтому для любого стандартного $\varepsilon > 0$ существует внутреннее множество $\mathscr{D} \subset \jmath^{-1}(A)$ такое, что справедливо соотношение $\nu_\Delta(\mathscr{D}) \geq \nu_\Delta(\jmath^{-1}(A)) - \varepsilon$. Теперь из включения $\mathscr{D}^\# \subset A$ и замкнутости множества $\mathscr{D}^\#$ выводим $\mu_{\mathrm{in}}(A) \geq \nu_\Delta(\jmath^{-1}(A))$.

Предположим, что $A \subset \overset{\circ}{H}{}^\#$ для некоторого $H \in \mathrm{In}_0(G_f)$ (в качестве H можно взять, например, $F + F$), и пусть $B := \overset{\circ}{H}{}^\# - A$. Тогда $\jmath^{-1}(B) = \overset{\circ}{H} - \jmath^{-1}(A)$ и $\nu_\Delta(\jmath^{-1}(A)) + \nu_\Delta(\jmath^{-1}(B)) = \nu_\Delta(\overset{\circ}{H}) = \mu_\Delta(\overset{\circ}{H}{}^\#)$, ибо $\jmath^{-1}(\overset{\circ}{H}{}^\#) = \overset{\circ}{H}$ в силу 7.2.4 (1). Отсюда следует, что $\mu_{\mathrm{in}}(A) + \mu_{\mathrm{in}}(B) \geq \mu_\Delta(\overset{\circ}{H}{}^\#)$. В то же время ввиду регулярности меры μ_Δ мы можем выписать следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
\mu_\Delta(\overset{\circ}{H}{}^\#) &= \sup\{\mu_\Delta(E) : E \subset \overset{\circ}{H}{}^\#,\ E \text{ замкнуто}\} \geq \\
&\geq \sup\{\mu_\Delta(C) + \mu_\Delta(\mathscr{D}) : C \subset A,\ \mathscr{D} \subset B, C, \mathscr{D} \text{ замкнуты}\} = \\
&= \sup\{\mu_\Delta(C) : C \subset A,\ C \text{ замкнуто}\} + \\
&+ \sup\{\mu_\Delta(\mathscr{D}) : \mathscr{D} \subset B,\ \mathscr{D} \text{ замкнуто}\} = \\
&= \mu_{\mathrm{in}}(A) + \mu_{\mathrm{in}}(B).
\end{aligned}
$$

Таким образом, $\mu_{\mathrm{in}}(A) + \mu_{\mathrm{in}}(B) = \mu_\Delta(\overset{\circ}{H}{}^\#)$. Если теперь $\varepsilon > 0$, то существует замкнутое множество $C \subset B$ такое, что $\mu_\Delta(C) \geq \mu_{\mathrm{in}}(B) - \varepsilon$, и поскольку A содержится в открытом множестве $\overset{\circ}{H}{}^\# - C$, то получаем

$$
\begin{gathered}
\mu_{\mathrm{out}}(A) \leq \mu_\Delta(\overset{\circ}{H}{}^\# - C) = \mu_\Delta(\overset{\circ}{H}{}^\#) - \mu_\Delta(C) \leq \\
\leq \mu_\Delta(\overset{\circ}{H}{}^\#) - \mu_{\mathrm{in}}(B) + \varepsilon = \mu_{\mathrm{in}}(A) + \varepsilon.
\end{gathered}
$$

Тем самым $\mu_{\mathrm{out}}(A) = \mu_{\mathrm{in}}(A)$. Из сказанного выше теперь без труда выводится $\mu_\Delta(A) = \nu_\Delta(\jmath^{-1}(A))$. $\rhd$

7.2.6. Теорема 7.2.5 показывает, что отображение $\jmath : G_f \to G^{\#}$ сохраняет меру. Если $f : G^{\#} \to \mathbb{R}$ является μ_Δ-измеримой функцией, то функция $f \circ \jmath : G_f \to \mathbb{R}$ также будет ν_Δ-измеримой. Ее лифтинг φ будем называть лифтингом f. Таким образом, внутренняя функция $\varphi : G \to {}^*\mathbb{R}$ будет лифтингом f, если $f(g^{\#}) = {}^\circ\varphi(g)$ для ν_Δ-почти всех $g \in G_f$.

Если $\varphi \in \mathscr{S}_p(G_f)$, то функцию φ мы будем называть $\mathscr{S}_p$-*интегрируемым лифтингом* f. Иногда употребляют и более точное выражение: φ — это $\mathscr{S}_{p,\Delta}$-*лифтинг* функции f.

Функция f входит в $L_p(\mu_\Delta)$, где $p \in [1, \infty]$, в том и только в том случае, если f имеет $\mathscr{S}_{p,\Delta}$-интегрируемый лифтинг $\varphi : G \to {}^*\mathbb{R}$. Более того,

$$\int\limits_{G^{\#}} f\, d\mu_\Delta = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{g\in G} \varphi(g)\right),$$

и для любого $p \in [1, \infty]$ имеет место равенство

$$\int\limits_{G^{\#}} |f|^p\, d\mu_\Delta = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{g\in G} |\varphi(g)|^p\right).$$

7.2.7. Пусть $G^\wedge := \widehat{G}$ — внутренняя группа характеров группы G. Гиперконечность G и принцип переноса влекут, что $G^\wedge$ изоморфна G. Стало быть, $G^\wedge$ — внутренняя гиперконечная абелева группа.

Следуя [194], будем представлять группу S^1 (ее несущее множество — единичная окружность) как интервал $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ со сложением по модулю 1. В S^1 возьмем счетную систему $\{\Lambda_k : k = 1, 2, \dots\}$ окрестностей нуля, где $\Lambda_k := (-\frac{1}{3k}, \frac{1}{3k})$. Ниже нам потребуется несколько вспомогательных фактов.

(1) *Если $\gamma \in \Lambda_1, 2\gamma \in \Lambda_1, \dots, k\gamma \in \Lambda_1$, то $\gamma \in \Lambda_k$.*

$\lhd$ Очевидно, см. [194]. $\rhd$

Введем две внешние подгруппы $H_0 \subset H_f$ группы $G^\wedge$, определяемые формулами

$$\alpha \in H_0 \leftrightarrow (\forall g \in G_f)(\alpha(g) \approx 0);$$
$$\alpha \in H_f \leftrightarrow (\forall g \in G_0)(\alpha(g) \approx 0).$$

Нам потребуется также счетное семейство $\{W(C_n, \Lambda_k) : n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$, где внутреннее множество $W(C_n, \Lambda_k) \subset G^\wedge$ вводится формулой

$$\alpha \in W(C_n, \Lambda_k) \leftrightarrow (\forall g \in C_n)(\alpha(g) \in \Lambda_k).$$

Аналогично определяют $W(F, \Lambda_k)$ для $F \in \mathrm{In}(G_f)$.

(2) *Имеют место представления* $H_0 = \bigcap_{n,k} W(C_n, \Lambda_k)$ *и* $H_f = \bigcup_n W(C_n, \Lambda_1)$.

$\lhd$ Первое равенство почти очевидно. Докажем второе равенство.

Пусть $\alpha \in W(C_n, \Lambda_1)$, а $m \in \mathbb{Z}$ таково, что $k \cdot C_m \subset C_n$. В этом случае если $g \in C_m$, то $\alpha(g), 2\alpha(g), \dots, k\alpha(g) \in \Lambda_1$ и, стало быть, $\alpha(g) \in \Lambda_k$ ввиду (1). Следовательно, $\alpha(g) \in \Lambda_k$ для всех k и $g \in G_0$, т. е. $\alpha(g) \approx 0$ и $\alpha \in H_f$.

Наоборот, пусть $\alpha \in H_f$. Предположим, что $\alpha \notin W(C_n, \Lambda_1)$ для всех n. Тогда для любого n существует $g \in C_n$ такой, что $(|\alpha(g)| \geq \frac{1}{3})$. Из ω_1-насыщенности вытекает существование $g \in G_0$ со свойством $(|\alpha(g)| \geq \frac{1}{3})$, что противоречит вхождению $\alpha \in H_f$. $\rhd$

Таким образом, тройка $(G^\wedge, H_0, H_f)$ удовлетворяет тем же условиям, что и (G, G_0, G_f), следовательно, мы можем определить каноническую топологию на группе $G^{\wedge\#} := H_f/H_0$. Из теоремы 7.2.3 видно, что $G^{\wedge\#}$ полна относительно соответствующей равномерности. Если $\alpha \in H_f$, то образ α в $G^{\wedge\#}$ при каноническом гомоморфизме обозначается символом $\alpha^\#$.

(3) *Пусть внутренняя функция* $f : G \to {}^*\mathbb{C}$ *такова, что* $f(g_1) \approx f(g_2)$ *как только* g_1, g_2 *и* $g_1 - g_2 \in G_0$, *и* ${}^\circ|f(g)| < +\infty$ *при* $g \in G_f$. *Тогда функция* $\widetilde{f} : G^\# \to \mathbb{C}$, *определяемая формулой* $\widetilde{f}(g^\#) := {}^\circ f(g)$ *для* $g \in G_f$, *будет равномерно непрерывной на* $G^\#$.

$\lhd$ Простое доказательство этого предложения опускается. $\rhd$

Определим теперь отображение $\psi : G^{\wedge\#} \to G^{\#\wedge}$, полагая

$$\psi(\alpha^\#)(g^\#) := {}^\circ(\alpha(g))$$

для произвольных $\alpha \in H_f$ и $g \in G_f$. Тот факт, что $\psi(\alpha^\#) \in G^{\#\wedge}$, следует из (3). Непосредственно устанавливается, что ψ — корректно определенный мономорфизм.

7.2.8. Теорема. *Отображение $\psi : G^{\wedge\#} \to \psi(G^{\wedge\#}) \subset G^{\#\wedge}$ является топологическим изоморфизмом.*

$\lhd$ Напомним (см., например, [194]), что топология на двойственной к $G^{\#}$ группе $G^{\#\wedge}$ задана базой окрестностей нуля, составленной множествами вида $\mathscr{W}(\mathscr{F}, \Lambda_k)$, где

$$\mathscr{W}(\mathscr{F}, \Lambda_k) := \{h \in G^{\#\wedge} : (\forall \xi \in \mathscr{F})(h(\xi) \in \Lambda_k)\},$$

причем $\mathscr{F}$ — компактное множество в $G^{\#}$ и $k \in \mathbb{N}$.

Легко видеть, что семейство $\{\mathscr{W}(C_n^{\#}, \Lambda_k) : n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ также будет базой окрестностей нуля в $G^{\#\wedge}$. Непрерывность ψ и ψ^{-1} вытекает из следующих легко проверяемых включений:

$$^{\circ}\psi(\overset{\circ}{W}(C_n, \Lambda_{k+1})) \subset \mathscr{W}(C_n^{\#}, \Lambda_k);$$
$$\psi^{-1}(\mathscr{W}(C_n^{\#}, \Lambda_{k+1})) \subset W(C_n, \Lambda_k)^{\#}.$$

Теорема доказана. $\rhd$

7.2.9. Отметим два следствия установленной теоремы 7.2.8.

(1) *Образ $\psi(G^{\wedge\#})$ отображения ψ представляет собой замкнутую подгруппу группы $G^{\#\wedge}$.*

$\lhd$ Доказательство следует из полноты $G^{\wedge\#}$ и равномерной непрерывности ψ. $\rhd$

(2) *Топологическая группа $G^{\#\wedge}$ локально компактна и сепарабельна.*

Гипотеза. *Если (G, G_0, G_f) удовлетворяет условиям теоремы* 7.2.3, *то отображение $\psi : G^{\wedge\#} \to G^{\#\wedge}$ будет топологическим изоморфизмом, т. е.*

$$\psi(G^{\wedge\#}) = G^{\#\wedge}.$$

7.2.10. Обозначим для краткости $H := G^{\wedge}$ и отождествим $H^{\#}$ с $\psi(H^{\#})$, полагая $h^{\#}(g^{\#}) := {}^{\circ}(h(g))$ для всех $h \in H_f$ и $g \in G_f$. Тогда $G^{\wedge\#} = H^{\#}$ и $H^{\#}$ — замкнутая подгруппа группы $G^{\#\wedge}$. Пусть

$$G_0' := \{g \in G : (\forall \alpha \in H_f)(\alpha(g) \approx 0)\};$$
$$G_f' := \{g \in G : (\forall \alpha \in H_0)(\alpha(g) \approx 0)\}.$$

Очевидно, что $G_0' \supset G_0$ и $G_f' \supset G_f$. Положим $G^{\#\prime} := G_f'/G_0'$.

(1) *Теорема.* *При указанных выше обозначениях имеет место эквивалентность*

$$H^{\#} = G^{\#\wedge} \leftrightarrow G'_0 \cap G_f = G_0.$$

$\triangleleft$ Так как $G = H^{\wedge}$, то можно применить теорему 7.2.8 и ее следствие 7.2.9 (1) к паре (G'_0, G'_f) и получить, что $G^{\#\prime}$ — замкнутая подгруппа группы $H^{\#\wedge}$. Но $H^{\#}$ также замкнутая подгруппа группы $G^{\#\wedge}$, поэтому из теоремы двойственности Понтрягина (см. [194]) выводим

$$H^{\#\wedge} = G^{\#} / \operatorname{Ann} H^{\#},$$

где $\operatorname{Ann}(H^{\#}) := \{\xi \in G^{\#} : (\forall h \in H^{\#})(h(\xi) = 0)\}$.

Канонический образ элемента $g \in G'_f$ в $G^{\#\prime}$ обозначим символом $g^{\#\prime}$. Так как $g^{\#\prime}$ — характер группы $H^{\#}$, то существует элемент $g_1 \in G_f$ такой, что $g^{\#\prime}(h^{\#}) = g_1^{\#}(h^{\#})$ для всех $h \in H_f$. Тем самым $h(g - g_1) \approx 0$ для всех $h \in H_f$, поэтому $g - g_1 \in G'_0$. Таким образом, $\forall g \in G'_f (\exists g_1 \in G_f)(g - g_1 \in G'_0)$, следовательно, $G^{\#\prime} = G_f / G_f \cap G'_0$.

Предположим теперь, что $G_f \cap G'_0 = G_0$. Тогда $G^{\#\prime} = G^{\#}$, значит, $\operatorname{Ann}(H^{\#}) = 0$ в силу равенства $H^{\#\wedge} = G^{\#} / \operatorname{Ann}(H^{\#})$, поэтому $H^{\#} = G^{\#\wedge}$.

Наоборот, допустим, что $H^{\#} = G^{\#\wedge}$, т. е. $H^{\#\wedge} = G^{\#\wedge\wedge}$ и тем самым $H^{\#\wedge} = G^{\#}$. Тогда $\operatorname{Ann}(H^{\#}) = 0$. Если в то же время $g \in G'_0 \cap G_f - G_0$, то $g^{\#} \in \operatorname{Ann}(H^{\#})$ и $g^{\#} \neq 0$. Получено противоречие. $\triangleright$

(2) *Имеет место равенство* $G^{\#\prime} = H^{\#\wedge}$.

$\triangleleft$ Так как $G_f \subset G'_f$, то группа $H'_0 = \{h \in H : (\forall g \in G'_f)(h(g) \approx 0)\}$ содержится в H_0. Остается применить (1). $\triangleright$

7.2.11. Пусть, как обычно, S^1 — единичная окружность. Пусть, далее, $\chi : G \to {}^*S^1$ — внутренний характер группы G такой, что $\chi|_{G_0} \approx 0$. Тогда существует характер $\widetilde{\chi} : G^{\#} \to S^1$ такой, что $\widetilde{\chi}(g^{\#}) = {}^{\circ}\chi(g)$ для всех $g \in G_f$. Заметим, что равенство $G^{\#\wedge} = G^{\wedge\#}$ означает, что каждый характер $h : G^{\#} \to S^1$ имеет вид $\widetilde{\chi}$. Выведем некоторые достаточные условия, при которых такое равенство справедливо. Начнем с одного вспомогательного предложения.

(1) *Если K — внутренняя гиперконечная абелева группа и $\chi : K \to S^1$ — внутренний характер K, причем $\chi(g) \approx 1$ для всех $g \in K$, то $\chi \equiv 1$.*

◁ Пусть $|K| = N$. Тогда $\chi(g)^N = 1$, т. е. имеет место равенство $\chi(g) = \exp(2\pi i m_X(g)/N)$.

Очевидно, что отображение $m_X : G \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ — групповой гомоморфизм. Поэтому $m_X(G)$ представляет собой циклическую подгруппу группы $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Следовательно, существует число d, которое делится на N, и при этом $Nm_X(G) = \{kd : 0 \le k < N/d\}$.

Если N/d — четное число, то, полагая $k = N/2d$, мы получим $\exp(2\pi ikd/N) = \exp \pi i = -1$, что противоречит условию предложения. Если же величина N/d нечетна, то полагаем $k = (N/d - 1)/2$. В этом случае $\exp(2\pi ikd/N) = -\exp(-\pi id/N) \approx -1$ при условии $d/N \approx 0$. Если $d/N \not\approx 0$, то N/d — некоторое стандартное число, скажем, m и $\exp(2\pi ikd/N) = -\exp(-\pi i/m) \not\approx 1$ при $m \ne 1$. Итак, $N = d$. Можно заключить, что $m_X(G) = 0$, т. е. $X \equiv 1$. ▷

(2) *Если группа $G^{\#}$ дискретна или компактна, то имеет место равенство $G^{\#\wedge} = G^{\wedge\#}$.*

◁ Пусть $G^{\#}$ — дискретная группа. Тогда ввиду второй части теоремы 7.2.3 G_0 будет внутренней подгруппой группы G. Согласно (1) $H_f = \{h \in G^{\wedge} : (\forall g \in G_0)(h(g) = 0)\}$. Значит, H_f — внутренняя подгруппа группы $H := G^{\wedge}$. При этом $G_0' := \{g \in G : (\forall h \in H_f)\,(h(g) = 0)\}$ будет внутренней подгруппой группы G. Далее, $H_f = \operatorname{Ann}(G_0)$ и $G_0' = \operatorname{Ann}(H_f)$. По теореме о двойственности аннуляторов в силу принципа переноса имеем $G_0 = G_0'$. Случай компактной группы $G^{\#}$ (т. е. G_f — внутренняя группа) рассматривается в следующем параграфе. ▷

(3) *Если существует подгруппа $K \in \operatorname{In}_0(G_f)$, то имеет место равенство $G^{\#\wedge} = G^{\wedge\#}$.*

◁ Прежде всего заметим, что тройки (G_0, K, G) и (K, G_f, G) удовлетворяют всем условиям теоремы 7.2.3. В силу этой теоремы $K^{\#} := K/G_0$ — компактная подгруппа группы $G^{\#}$, а G_f/K — дискретная группа. Тем самым к этим группам можно применить (2). Покажем, что $G_0' \cap G_f = G_0$. Если это не так, то существует элемент $g_0 \in G_0' \cap G_f - G_0$, для которого возможны два случая:

(a): $g_0 \in K$: В этом случае согласно (2) существует внутренний характер $\chi : K \to {}^*S^1$ такой, что $\chi|_{G_0} \approx 0$ и $\chi(g_0) \not\approx 0$. Согласно принципу переноса χ можно продолжить до внутреннего характера $\varkappa \in H_f$. Как видно, $\varkappa(g_0) \not\approx 0$, что противоречит включению $g_0 \in G_0'$.

(б): $g_0 \notin K$: Вновь в соответствии с (1) существует внутренний характер $h : G \to {}^*S^1$ такой, что $h|_K \approx 1$ и $h(g_0) \not\approx 1$. Таким образом, $h \in H_f$, что опять противоречит включению $g_0 \in G_0'$. В обоих случаях используется тот факт, что характеры локально компактной абелевой группы разделяют точки. $\triangleright$

В дальнейшем мы оперируем с тройкой групп (G, G_0, G_f), устроенных так, как описано в преамбуле к теореме 7.2.3.

7.2.12. *Теорема.* *Группа $G^\#$ содержит компактную и открытую подгруппу в том и только в том случае, если существует внутренняя подгруппа K из $\mathrm{In}_0(G_f)$. Более того, $K^\#$ будет компактной и открытой подгруппой группы $G^\#$.*

$\triangleleft$ Если $K \in \mathrm{In}_0(G_f)$, то $K + G_0 = K$, откуда следует открытость множества $K^\#$. Компактность $K^\#$ была установлена в 7.2.3. Очевидно, что если K — подгруппа G, то $K^\#$ — подгруппа $G^\#$.

Наоборот, допустим теперь, что имеется компактная и открытая подгруппа $U \subset G^\#$. Покажем, что $\jmath^{-1}(U)$ — внутреннее множество. Рассмотрим множество $F \in \mathrm{In}_0(G_f)$, удовлетворяющее условию $F^\# \subset U$. Можно, например, взять C_{n-1} в качестве F, если $\overset{\circ}{C}{}_n^\# \subset U$ (см. 7.2.1 (2)), ибо такое C_n существует из-за открытости U. Так как U компактно, то существуют $g_1^\#, \dots, g_n^\# \in U$ такие, что $U = \bigcup_{i=1}^n (g_i^\# + \overset{\circ}{F}{}^\#)$. Тогда имеет место равенство $U = \bigcup_{i=1}^n (g_i^\# + F^\#)$, поскольку U — подгруппа и $F^\# \subset U$. Итак, $\jmath^{-1}(U) = (\bigcup_{i=1}^n g_i + \overset{\circ}{F}) \subset \bigcup_{i=1}^n g_i + F \subset \jmath^{-1}(U)$, что и требовалось. $\triangleright$

7.2.13. Пусть Δ — это нормирующий множитель для тройки (G, G_0, G_f), см. 7.2.4 (4). Как и в 7.1.1, положим $\widehat{\Delta} := (\Delta \cdot |G|)^{-1}$. Напомним, что $\mathscr{L}_{2,\Delta}(G)$ — внутреннее гиперконечномерное пространство в ${}^*\mathbb{C}^G$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_\Delta := \Delta \sum_{g \in G} \varphi(g)\overline{\psi(g)}$$

для внутренних $\varphi, \psi \in {}^*\mathbb{C}^G$. Аналогично определено пространство $\mathscr{L}_{2,\widehat{\Delta}}(\widehat{G})$.

Дискретное преобразование Фурье $\Phi_\Delta^G : \mathscr{L}_{2,\Delta}(G) \to \mathscr{L}_{2,\widehat{\Delta}}(\widehat{G})$ определяют формулой

$$\Phi_\Delta^G(\varphi)(\chi) := (\varphi, \chi)_\Delta \quad (\varphi \in \mathscr{L}_{2,\Delta}(G),\ \chi \in \widehat{G}).$$

Нетрудно проверить, что дискретное преобразование Фурье Φ_Δ^G сохраняет скалярное произведение.

Тройку групп (G, G_0, G_f) называют *допустимой,* если выполнены следующие условия:

(1) $G^{\#\wedge} = G^{\wedge\#}$;

(2) $\widehat{\Delta}$ — нормирующий множитель тройки $(\widehat{G}, H_0, H_f)$ из 7.2.7;

(3) Φ_Δ^G — это гиперприближение преобразования Фурье $\mathscr{F}_\Delta^{G^\#} : L_2(\mu_\Delta) \to L_2(\mu_{\widehat{\Delta}})$, определяемого формулой

$$\mathscr{F}_\Delta^{G^\#}(f)(\varkappa) := \int f(g)\overline{\varkappa(g)}\,d\mu(g) \quad (\varkappa \in G^{\#\wedge}).$$

Из теоремы 7.1.2 видно, что тройка (G, G_0, G_f), рассмотренная в 7.1.1, является допустимой.

7.2.14. Теорема. *Если существует подгруппа* $K \in \mathrm{In}_0(G_f)$, *то* (G, G_0, G_f) *— допустимая тройка.*

$\lhd$ Сначала покажем, что $\widehat{\Delta}$ — нормирующий множитель для $\widehat{G}$. С этой целью рассмотрим подгруппу $K^\perp := \{\chi \in \widehat{G} : \chi|_K = 1\}$. Из 7.2.11 (1) вытекает, что $H_0 \subset K^\perp \subset H_f$. Поэтому достаточно обосновать неравенства $0 < {}^\circ(\widehat{\Delta} \cdot |K^\perp|) < +\infty$. Заметим, что $\widehat{K} = \widehat{G}/K^\perp$ (см. 7.2.4 (3)). Следовательно, $|K^\perp| = |\widehat{G}|/|\widehat{K}| = |G|/|K|$, так что $\widehat{\Delta} \cdot |K^\perp| = (\Delta \cdot |K|)^{-1}$. В то же время $0 < {}^\circ(\Delta \cdot |K|) < +\infty$, поскольку Δ — нормирующий множитель для тройки (G, G_0, G_f) и $K \in \mathrm{In}_0(G_f)$.

Как нам известно из теоремы 7.2.12, $K^\#$ — компактная и открытая подгруппа группы $G^\#$, поэтому $G^\#/K^\#$ — дискретная счетная группа ввиду сепарабельности $G^\#$. Пусть $\{\xi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — полная система представителей классов смежности группы $G^\#/K^\#$ и $\varkappa \in K^{\#\wedge}$. Зададим функцию $f_{k\varkappa} : G^\# \to \mathbb{C}$, полагая для каждого $\eta \in G^\#$ по определению

$$f_{k\varkappa}(\eta) := \begin{cases} 0, & \text{если } \eta \notin \xi_k + K^\#, \\ \varkappa(\eta - \xi_k), & \text{если } \eta \in \xi_k + K^\#. \end{cases}$$

Пусть

$$\mathfrak{M} := \{f_{k\varkappa} : k \in \mathbb{N},\ \varkappa \in K^{\#\wedge}\}.$$

Так как линейные комбинации характеров плотны в $L_2(K^\#)$ и $L_2(G^\#) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} L_2(\xi_k + K^\#)$, то линейная оболочка множества $\mathfrak{M}$ плотна в $L_2(G^\#)$ и можно применить 6.5.1 (2).

Пусть последовательность $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в G_f такова, что $x_k^\# = \xi_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Выберем $\varkappa_0 \in K^{\#\wedge}$ и характер $\chi_0 \in \widehat{K}$ так, чтобы $\chi_0|_{G_0} \approx 1$ и $\widetilde{\chi}_0 = \varkappa_0$ (см. теорему 7.2.11 (2)). Определим внутреннюю функцию $\varphi_{k\chi_0} : G \to {}^*\mathbb{C}$, полагая

$$\varphi_{k\chi_0}(y) := \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin x_k + K, \\ \chi_0(y - x_k), & \text{если } y \in x_k + K \end{cases}$$

для каждого $y \in G$.

Из равенства $K + G_0 = K$ легко выводится, что ${}^\circ\varphi_{k\chi_0}(y) = f_{k\varkappa_0}(y^\#)$ для всех $y \in G_f$. Значит, $\varphi_{i\chi_0}$ — лифтинг функции $f_{k\varkappa_0}$. Так как функция $\varphi_{k\chi_0}$ ограничена и ее носитель содержится во внутреннем множестве $x_k + K \subset G_f$, то $\varphi_{k\chi_0} \in \mathscr{S}_{2,\Delta}(G)$. Как видно из предложения 6.5.1 (2), достаточно показать, что $\Phi_\Delta^G(\varphi_{k\chi_0})$ является $\mathscr{S}_{2,\widehat{\Delta}}$-интегрируемым лифтингом функции $\mathscr{F}_\Delta^{G^\#}(f_{k\varkappa_0})$. Прямым подсчетом устанавливается, что для любых $\varkappa \in G^{\#\wedge}$ и $\chi \in G^\wedge$ выполняются равенства:

$$\mathscr{F}_\Delta^{G^\#}(f_{k\varkappa_0})(\varkappa) = \begin{cases} \overline{\varkappa(\xi_k)} \cdot \mu_\Delta(K^\#), & \text{если } \varkappa|K^\# = \varkappa_0, \\ 0, & \text{если } \varkappa|K^\# \neq \varkappa_0; \end{cases}$$

$$\Phi_\Delta^G(\varphi_{k\chi_0})(\chi) = \begin{cases} \overline{\chi(x_k)} \cdot \Delta|K|, & \text{если } \chi|K = \chi_0, \\ 0, & \text{если } \chi|K \neq \chi_0. \end{cases}$$

Так как $\jmath^{-1}(K^\#) = K$, то $\mu_\Delta(K^\#) = {}^\circ(\Delta \cdot |K|)$. Если $\varkappa := \widetilde{\chi}$, то очевидным образом выполняется $\varkappa|K^\# = \varkappa_0 \leftrightarrow \chi|K = \chi_0$ (см. 7.2.11 (1)).

Теперь ясно, что ${}^\circ\Phi_\Delta^G(\varphi_{k\chi_0}) = \mathscr{F}_\Delta^{G^\#}(f_{k\varkappa_0})(\widetilde{\varkappa})$ и $\Phi_\Delta^G(\varphi_{k\chi})$ — лифтинг $\mathscr{F}_\Delta^{G^\#}(f_{k\varkappa})$, ибо $\widetilde{\chi}$ совпадает с $\chi^\#$.

Внутренняя функция $\Phi_\Delta^G(\varphi_{k\chi_0})$ ограничена и ее носитель содержится во внутреннем множестве $\{\chi \in G^\wedge : \chi|_K = \chi_0\} \subset H_f$, стало быть, $\Phi_\Delta^G(\varphi_{k\chi_0}) \in \mathscr{S}_{2,\widehat{\Delta}}(H_f)$. $\triangleright$

7.3. Случай компактной нестандартной оболочки

Этот параграф посвящен изучению таких G, что нестандартная оболочка $G^\#$ — компактная группа.

7.3.1. Пусть G — внутренняя гиперконечная группа. Рассмотрим подгруппу G_0 группы G, которая представляет собой пересечение счетного множества внутренних подмножеств и обладает следующим свойством: для любого внутреннего множества F, удовлетворяющего соотношению $G_0 \subset F \subset G$, существует стандартно-конечное множество $B \subset G$ такое, что $F + B = G$. В этом случае группа $G^{\#}$ компактна согласно теореме 7.2.3.

Внутреннюю функцию $\varphi : G \to {}^*\mathbb{C}$ называют *S-непрерывной*, если для любых $g_1, g_2 \in G$ из $g_1 - g_2 \in G_0$ следует $\varphi(g_1) \approx \varphi(g_2)$.

Согласно 7.2.7 (3), если S-непрерывная функция $\varphi : G \to {}^*\mathbb{C}$ *доступна поточечно* (последнее означает, что ${}^\circ|\varphi(g)| < +\infty$ для всех $g \in G$), то функция $\widetilde{\varphi} : G^{\#} \to \mathbb{C}$, определяемая формулой $\widetilde{\varphi}(g^{\#}) = {}^\circ\varphi(g)$ для всех $g \in G$, будет непрерывной. Ниже (см. 7.3.4) мы покажем, что всякая непрерывная функция из $G^{\#}$ в $\mathbb{C}$ может быть представлена в таком виде, но для этого необходимы два вспомогательных факта.

Обозначим символом $CS(G)$ множество всех поточечно доступных S-непрерывных внутренних функций $\varphi : G \to {}^*\mathbb{C}$. Понятно, что $CS(G)$ — внешняя подалгебра внутренней алгебры ${}^*\mathbb{C}^G$.

Положим $\mathfrak{G} := \{\widetilde{\varphi} : \varphi \in CS(G)\}$. Как видно, $\mathfrak{G}$ — подалгебра алгебры $C(G^{\#})$. Следующий результат представляет собой «дискретную» версию теоремы Урысона.

7.3.2. *Если $x, y \in G$ и $x - y \notin G_0$, то существует элемент $\varphi \in CS(G)$, для которого $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(y) = 1$.*

$\triangleleft$ Из ω^+-насыщенности нестандартного универсума следует, что $y \notin x + C_k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ (см. 7.2.1 (2)). Пусть $V_0 := C_k$ и $V_n := C_{k-n}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность симметричных внутренних множеств такая, что $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$. В силу ω^+-насыщенности существует внутренняя последовательность $(B_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ симметричных подмножеств группы G, для которой $B_{n+1} + B_{n+1} \subset B_n$ для всех $n \in {}^*\mathbb{N}$ и $B_k = V_k$ для всех стандартных $k \in \mathbb{N}$.

Возьмем фиксированное бесконечное $N \in {}^*\mathbb{N}$. Пусть $0 \le m < n \le N$ и положим $V_{m,n} := B_{m+1} + \ldots + B_n$. Индукцией по n из включения $B_{n+1} + B_{n+1} \subset B_n$ легко выводится, что $V_{m,n} + B_n \subset B_m$. Рассмотрим теперь рациональные числа

$$r = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n}, \quad a_\imath \in \{0, 1\}.$$

Для произвольного числа $a \in \{0, 1\}$ положим

$$B^a := \begin{cases} B, & \text{если } a = 1, \\ 0, & \text{если } a = 0. \end{cases}$$

Пусть $W_r := B_1^{a_1} + B_2^{a_2} + \ldots + B_n^{a_n}$. Тогда $W_r \subset B_1 + B_2 + \ldots + B_n = V_{0N} \subset B_0 = V_0 = C_k$, следовательно, $y \notin x + B_0$ и, значит, $y \notin x + W_r$. Легко проверить, что $W_r \subset W_{r'}$ при $r < r'$. Определим внутреннюю функцию $\varphi : G \to {}^*\mathbb{R}$, полагая $\varphi(g) := \min\{r : g \in x + W_r\}$. Если $g \notin W_r + x$ для каждого рационального r указанного выше вида, то $\varphi(g) = 1$ и, в частности, $\varphi(y) = 1$. Так как $x \in x + 0$, то $\varphi(x) = 0$. Покажем теперь, что для любого $k \in [0, N]$ выполняется $|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, если только $u - v \in B_k$. Отсюда вытекает S-непрерывность φ, поскольку $u - v \in G_0$ влечет $u - v \in B_k$ для каждого стандартного k. Так как множество B_k симметрично, то можно предположить, что $\varphi(u) < \varphi(v)$, и доказать, что $\varphi(v) - \varphi(u) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Заметим также, что $\varphi(u) < 1$, ибо $\max \varphi = 1$. Пусть $q \in \{1, 2, \ldots, 2^k\}$, где $k \leq N$, таково, что $\frac{q-1}{2^k} \leq \varphi(u) < \frac{q}{2^k}$. Если $q = 2^k$ или $q = 2^k - 1$, то $1 - \varphi(u) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ и $\varphi(v) - \varphi(u) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, поскольку $\varphi(v) \leq 1$.

Допустим теперь, что $q < 2^{k-1} - 1$ и $r = \frac{q}{2^k}$. Тогда $\varphi(u) < r$ или, что то же в силу определения φ, $u \in W_r + x$. Но $v - u \in B_k$, поэтому будет $v \in W_r + B_k + x$. В нашем случае $r = \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_k}{2^k}$, где $a_m \in \{0, 1\}$, причем существует m, для которого $a_m = 0$, ибо $q < 2^k - 1$. Выберем наибольший номер m с указанным свойством. Тогда с учетом включения $B_s + B_s \subset B_{s-1}$ можно написать

$$W_r + B_k = B_1^{a_1} + \ldots + B_{m+1}^{a_{m+1}} + \ldots + B_k^{a_k} + B_k \subset B_1^{a_1} + \ldots + B_{m-1}^{a_{m-1}} + B_m.$$

В то же время $r' := r + \frac{1}{2^k} = \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^k}$. Таким образом, $W_r + B_k = W_{r'}$, значит, $v \in W_{r'} + x$ и $\varphi(v) \leq r + \frac{1}{2^k}$. Наконец, $r - \frac{1}{2^k} \leq \varphi(u) < \varphi(v) \leq r + \frac{1}{2^k}$ и, стало быть, $\varphi(v) - \varphi(u) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. $\triangleright$

7.3.3. *Подалгебра $\mathfrak{G}$ равномерно плотна в $C(G^\#)$.*

$\triangleleft$ Прежде всего заметим, что для каждого $\psi \in CS(G)$ очевидным образом выполняется

$$\sup\{\widetilde{\psi}(\xi) : \xi \in G^\#\} = {}^\circ\max\{\psi(g) : g \in G\}.$$

Таким образом, если последовательность $\{\widetilde{\varphi}_n\}$ сходится в $C(G^{\#})$ к некоторой функции f, то ${}^{\circ}\max\{|\varphi_n(g) - \varphi_m(g)| : g \in G\} \to 0$ при $n, m \to \infty$. Поэтому существует стандартная функция N такая, что

$$\max\left\{|\varphi_{n_1}(g) - \varphi_{n_2}(g)| : g \in G\right\} < \frac{1}{m}$$

для всех $n_1, n_2 > N(m)$. Рассмотрим семейство внутренних множеств

$$\big\{\{\varphi : \max\{|\varphi_n(g) - \varphi(g)| : g \in G\} < 1/m\} : n > N(m)\big\}.$$

В силу выбора функции N любое конечное подсемейство указанного семейства имеет непустое пересечение.

Привлекая ω^+-насыщенность нестандартного универсума, найдем внутреннюю функцию $\varphi : G \to {}^*\mathbb{C}$ такую, что

$${}^{\circ}\max\{|\varphi_n(g) - \varphi(g)| : g \in G\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поточечная доступность и S-непрерывность функции φ устанавливаются без труда. Итак, $\widetilde{\varphi}_n \to \widetilde{\varphi}$ при $n \to \infty$, поэтому $\widetilde{\varphi} = f$. ▷

7.3.4. *Теорема.* *Каждая непрерывная функция $f : G^{\#} \to \mathbb{C}$ представима в виде $f = \widetilde{\varphi}$ для некоторой S-непрерывной поточечно доступной функции $\varphi : G \to {}^*\mathbb{C}$.*

◁ Для доказательства теоремы достаточно показать, что алгебра $\mathfrak{G}$ равномерно замкнута и разделяет точки $G^{\#}$. Первое утверждение содержится в 7.3.3, а второе без труда выводится из 7.3.2.

В самом деле, допустим, что $\xi, \eta \in G^{\#}$ и $\xi \neq \eta$. Если $\xi = x^{\#}$ и $\eta = y^{\#}$, то $x - y \notin G_0$ и в силу 7.3.2 существует $\varphi \in CS(G)$, для которой $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(y) = 1$. Но тогда $\widetilde{\varphi}(\xi) = 0$, в то время как $\widetilde{\varphi}(\eta) = 1$. ▷

7.3.5. Рассмотрим несколько вспомогательных утверждений.

(1) *Если теорема 7.3.4 применима к каждой тройке групп (G', G'_0, G'_f) и (G'', G''_0, G''_f), то это же самое верно и для тройки $(G' \times G'', G'_0 \times G''_0, G'_f \times G''_f)$. Более того, группа $(G' \times G'')^{\#}$ топологически изоморфна группе $G'^{\#} \times G''^{\#}$.*

◁ Тривиальное доказательство опускается. ▷

Из этого предложения следует, что если в рассматриваемом случае $G_f = G$, то группа $(G\times G)^\# := (G\times G)/(G_0\times G_0)$ будет топологически изоморфна группе $G^\#\times G^\# := (G/G_0)\times(G/G_0)$.

(2) *Пусть $K : G^{\#2}\to\mathbb{C}$ — это непрерывная функция и $K := \widetilde{k}$, где внутренняя функция $k : G\times G\to{}^*\mathbb{C}$ является S-непрерывной. Для произвольного $g\in G$ определим функцию $K_{g^\#} : G^\#\to\mathbb{C}$ формулой $K_{g^\#}(\cdot) := K(g^\#,\cdot)$. Пусть внутренняя функция $k_g : G\to{}^*\mathbb{C}$ задана формулой $k_g(\cdot) := k(g,\cdot)$. Тогда k_g будет S-непрерывной и $K_{g^\#} = \widetilde{k}_g$.*

$\lhd$ Очевидно. $\rhd$

(3) *Если $f : G^\#\to\mathbb{C}$ — непрерывная четная функция, то существует внутренняя S-непрерывная четная функция φ такая, что $f = \widetilde{\varphi}$. Если, сверх того, функции $K : G^{\#2}\to\mathbb{C}$ и $k : G^2\to{}^*\mathbb{C}$ определены формулами $K(\xi,\eta) = f(\xi-\eta)$ и $k(g_1,g_2) = \varphi(g_1-g_2)$ соответственно, то $K = \widetilde{k}$.*

$\lhd$ Если $f = \widetilde{\psi}$, где $\psi : G\to{}^*\mathbb{C}$ — внутренняя S-непрерывная функция, то следует положить $\varphi(g) := \frac{1}{2}(\psi(g)+\psi(-g))$. $\rhd$

7.3.6. Перейдем теперь к изучению взаимосвязи между интегральными уравнениями на группе $G^\#$ и соответствующими системами линейных алгебраических уравнений на группе G.

Напомним, что раз топологическая группа $G^\#$ компактна, то мера Хаара μ конечна и можно предположить, что $\mu(G^\#) = 1$. Эта мера связана с равномерной мерой Лёба на G с весом $\Delta := |G|^{-1}$. Из определения лифтинга измеримой функции $f : G^\#\to\mathbb{C}$ (см. 7.2.5 и 7.2.6) следует, что если $f = \widetilde{\varphi}$ для некоторой поточечно доступной S-непрерывной функции φ, то φ будет лифтингом f. Более того, $\varphi\in\mathscr{S}_p(G)$ для любого $p\in[1,\infty)$.

В рассматриваемом случае $\Delta = |G|^{-1}$ вместо $\mathscr{L}_{2,\Delta}(G)$ мы будем писать $\mathscr{L}_2(G)$. Зафиксируем в $\mathscr{L}_2(G)$ канонический ортонормальный базис $(e_h)_{h\in G}$, где $e_h(g) := |G|^{1/2}\delta_{hg}$, и рассмотрим уравнения вида

$$\textbf{(1)}\quad \varphi(g) = \lambda\cdot|G|^{-1}\sum_{h\in G} k(g,h)\varphi(h),$$

где k — поточечно доступная симметричная внутренняя функция.

Те λ, для которых указанное уравнение имеет ненулевое решение, будем называть *собственными значениями* уравнения (1), а решения, им соответствующие, — *собственными функциями* уравнения (1), отвечающими собственному значению λ. Таким образом, собственные значения (1) представляют собой обратные величины ненулевых собственных значений оператора A, определяемого в каноническом ортонормальном базисе матрицей $(a_{gh})_{g,h\in G}$ со следующими элементами $a_{gh} := |G|^{-1}k(g,h)$.

Рассмотрим также соответствующее интегральное уравнение на группе $G^{\#}$:

$$\textbf{(2)}\quad f(\xi) = \gamma \int\limits_{G^{\#}} \widetilde{k}(\xi,\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta),$$

где γ — стандартное число.

7.3.7. *Предположим, что $k : G^2 \to {}^*\mathbb{C}$ — внутренняя поточечно доступная S-непрерывная функция, $\varphi : G \to {}^*\mathbb{C}$ — внутренняя поточечно доступная функция и внутренняя функция $\psi : G \to {}^*\mathbb{C}$ задана формулой*

$$\psi(g) := |G|^{-1} \sum_{h\in G} k(g,h)\varphi(h) \quad (g \in G).$$

Тогда ψ поточечно доступна и S-непрерывна. Более того, если φ является S-непрерывной функцией, то имеет место представление

$$\widetilde{\psi}(\xi) = \int\limits_{G^{\#}} \widetilde{\varphi}(\eta)\widetilde{k}(\xi,\eta)\, d\mu(\eta) \quad (\xi \in G^{\#}).$$

$\lhd$ Функция ψ поточечно доступна потому, что таковы k и φ. Ввиду 7.3.5 (3) и S-непрерывности k будет $k(g_1,h) - k(g_2,h) \approx 0$ для всех $h \in G$, если только $g_1 - g_2 \in G_0$. Иными словами, существует $\alpha \approx 0$ такое, что $|k(g_1,h) - k(g_2,h)| \le \alpha$ для всех $h \in G$. Пусть $C > 0$ — стандартное число, для которого $|\varphi(h)| \le C$ при всех $h \in G$. Тогда $|\psi(g_1) - \psi(g_2)| \le C\alpha \approx 0$, откуда немедленно следует S-непрерывность ψ. Второе утверждение следует из теоремы 6.5.3. $\rhd$

7.3.8. Приведем теперь несколько полезных свойств собственных значений уравнения 7.3.6 (1).

(1) *Уравнение* 7.3.6 (1) *не имеет бесконечно малых собственных значений. Если λ — доступное собственное значение этого уравнения и R_λ — подпространство собственных функций, отвечающих λ, то* $\dim(R_\lambda) \in \mathbb{N}$, *т. е.* $\dim(R_\lambda)$ *— стандартное число.*

$\lhd$ Из поточечной доступности k следует, что $^\circ\sum_{g,h\in G}|a_{gh}|^2 < +\infty$. Тем самым A удовлетворяет условиям предложения 6.1.11, откуда и следует требуемое. $\rhd$

Ниже предполагается, что поточечно симметричная внутренняя функция k из 7.3.6 (1) S-непрерывна.

(2) *Если λ — доступное собственное значение, то для каждой собственной $\varphi \in R_\lambda$ существует S-непрерывная поточечно доступная функция, кратная φ.*

$\lhd$ Если $\varphi \in R_\lambda$ и $\varphi \neq 0$, то функция $\varphi_1 := \varphi/\max\{|\varphi(g)| : g \in G\}$ ограничена и $\varphi_1 \in R_\lambda$. Остается применить 7.3.7. $\rhd$

Если $\varphi \in \mathscr{L}_2(G)$, то

$$\|\varphi\|^2 = |G|^{-1}\sum_{g\in G}|\varphi(g)|^2$$

и, кроме того, $\|\varphi\|_\infty = \max\{|\varphi(g)| : g \in G\}$. Стало быть, $\|\varphi\| \le \|\varphi\|_\infty$. Тем не менее справедливо утверждение.

(3) *Если φ — собственная функция уравнения* 7.3.6 (1), *принадлежащая доступному собственному значению λ, и $\|\varphi\| = 1$, то φ будет S-непрерывной.*

$\lhd$ Пусть $\varphi_1 := C\varphi$ такая S-непрерывная собственная функция уравнения 7.3.6 (1), что $\|\varphi_1\|_\infty = 1$ (см. (2)). Тогда $\|\widetilde{\varphi}\|_\infty = 1$ и, следовательно, $\int_{G^\#}|\widetilde{\varphi}_1|^2\,d\mu > 0$. Однако φ_1 — лифтинг функции $\widetilde{\varphi}_1$ и $^\circ\|\varphi_1\|^2 = \int_{G^\#}|\widetilde{\varphi}_1|^2\,d\mu$ ввиду поточечной доступности этих функций и 7.2.6. Итак, $0 < {}^\circ\|\varphi_1\| < +\infty$. Теперь функция $\varphi_2 = \varphi_1/\|\varphi_1\|$ будет S-непрерывной и поточечно доступной, причем $\|\varphi_2\| = 1$. Так как $\varphi_2 = C_1\varphi$, $\|\varphi\| = 1$ и $C_1 > 0$, то приходим к равенству $C_1 = 1$. Значит, $\varphi_2 = \varphi$. $\rhd$

Утверждение последнего предложения остается в силе для любой собственной функции φ с ненулевой доступной нормой: $0 < {}^\circ\|\varphi\| < +\infty$.

7.3.9. *Пусть непрерывная функция $f : G^\# \to \mathbb{C}$ является решением интегрального уравнения* 7.3.6 (2), *где γ — стандартное число, $\gamma \neq 0$.*

Тогда существует стандартное натуральное число n, собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ уравнения 7.3.5 (1) и S-непрерывные доступные собственные функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ такие, что $\lambda_\imath \approx \gamma$ и $\varphi_\imath \in R_{\lambda_\imath}$ для всех $\imath := 1, \dots, n$, причем f будет линейной комбинацией $\widetilde{\varphi}_1, \dots, \widetilde{\varphi}_n$.

$\triangleleft$ Согласно теореме 6.5.3 (см. также предложение 7.3.7) описанный выше оператор A с матрицей $a_{gh} := |G|^{-1/2}k(g,h)$ в каноническом ортонормальном базисе пространства $\mathscr{L}_2(G)$ будет гиперприближением интегрального оператора $\mathscr{A}$ с ядром $\widetilde{k} : G^{\#2} \to \mathbb{C}$. Это означает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L_2(G^\#) & \xrightarrow{\mathscr{A}} & L_2(G^\#) \\ {\scriptstyle \jmath_2}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \jmath_2} \\ \mathscr{L}_2(G)^\# & \xrightarrow{A} & \mathscr{L}_2(G)^\# \end{array}$$

коммутативна.

Напомним, что отображение $\jmath_2$ сопоставляет каждой функции $f \in L_2(G^\#)$ класс эквивалентности ее $\mathscr{S}_2(G)$-лифтинга, т. е. $\mathscr{S}_2(G)$-лифтинг функции $f \circ \jmath$, где $\jmath : G \to G^\#$ — фактор-гомоморфизм.

Из диаграммы видно, что $\jmath_2(f)$ — это собственный вектор $A^\#$, принадлежащий собственному значению γ^{-1}. В соответствии с 6.1.10 существует число $\lambda^{-1} \approx \gamma^{-1}$, являющееся собственным значением A. В силу 7.3.8 (3) каждая нормированная собственная функция φ оператора A, принадлежащая λ^{-1}, будет S-непрерывной ($0 < {}^\circ|\lambda^{-1}| < +\infty$), причем $\widetilde{\varphi}$ будет собственной функцией $\mathscr{A}$, принадлежащей γ^{-1} ввиду 7.3.7.

Оператор $\mathscr{A}$ компактен, поэтому собственное значение γ^{-1} этого оператора имеет конечную кратность. Следовательно, существует лишь стандартно-конечное число собственных значений оператора A, которые бесконечно близки к γ^{-1}, причем каждое из них имеет стандартно-конечную кратность. Тем самым выполнены условия 6.1.12.

Значит, для некоторого стандартного n существуют $\lambda_1, \dots, \lambda_n \approx \gamma^{-1}$ и ортонормальный набор $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathscr{L}_2(G)$ такие, что $\varphi_k \in R_{\lambda_k^{-1}}$ для каждого $k \leq n$ и $\jmath_2(f) = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k^\#$. Функция φ_k является S-непрерывной, поэтому φ_k служит $\mathscr{S}_2(G)$-лифтингом $\widetilde{\varphi}_k$, следовательно, $\varphi_k^\# = \jmath_2(\widetilde{\varphi}_k)$ и мы приходим к соотношению $f = \sum_{k=1}^n C_k \widetilde{\varphi}_k$, равносильному требуемому утверждению. $\triangleright$

В заключение параграфа рассмотрим общий вид неприводимых унитарных представлений группы $G^\#$. Пусть V — внутреннее гильбертово пространство. Унитарное представление T группы G в пространстве V (т. е. гомоморфизм T группы G в пространство $B(V)$

ограниченных эндоморфизмов V, для которого $T(g)$ — унитарный оператор для любого $g \in G$) будем называть S-*непрерывным*, если $\|T(g)-I_V\| \approx 0$ для всех $g \in G_0$ (здесь I_V — тождественный оператор в V). Представление $T : G \to B(V)$ назовем *гиперпредставлением*, если внутреннее гильбертово пространство V конечномерно, т. е. если $\dim(V) = n \in {}^*\mathbb{N}$.

Ниже рассматриваются только гиперпредставления. Если размерность $\dim(V)$ — стандартное число, то каждое неприводимое S-непрерывное унитарное представление $T : G \to {}^*B(V)$ определяет непрерывное представление $\widetilde{T}$ группы $G^\#$ по формуле $\widetilde{T}(g^\#) := {}^\circ T(g)$. Такое представление будет, разумеется, унитарным. Более того, характер $\varkappa$ представления $\widetilde{T}$ может быть представлен в виде $\widetilde{\chi}$, где χ — характер представления T. Таким образом, $\|\varkappa\| = {}^\circ\|\chi\| = 1$, поскольку представление T неприводимо. Отсюда видно, что $\widetilde{T}$ — неприводимое представление. Оказывается, что верно и обратное утверждение. Точнее, имеет место следующий факт, частным случаем которого является теорема 7.2.11 (2) для коммутативных групп.

7.3.10. *Теорема.* *Произвольное S-непрерывное гиперконечномерное неприводимое унитарное представление T группы G порождает неприводимое унитарное представление $\widetilde{T}$ группы $G^\#$ по формуле $\widetilde{T}(g^\#) := {}^\circ T(g)$ для $g \in G$. Наоборот, всякое неприводимое унитарное представление группы $G^\#$ имеет вид $\widetilde{T}$ для некоторого S-непрерывного неприводимого унитарного представления T группы G.*

$\lhd$ Для проверки первой части теоремы нужно только показать, что каждое S-непрерывное неприводимое унитарное представление имеет стандартную размерность. Последний факт устанавливается в 7.3.11. Справедливость этой теоремы следует из 7.3.12 ввиду хорошо известных свойств неприводимых унитарных представлений компактной группы, см., например, [181, глава 6, § 32]. $\rhd$

7.3.11. *Каждое S-непрерывное неприводимое унитарное представление группы G имеет стандартную размерность.*

$\lhd$ Для фиксированного вектора $\xi \in V$ рассмотрим полуторалинейную форму

$$\varphi_\xi(\eta, \zeta) := |G|^{-1} \cdot \sum_{g \in G} (T(g)\xi, \eta) \cdot \overline{(T(g)\xi, \zeta)}.$$

Пусть $B_\xi : V \to V$ — линейный оператор, определяемый формулой $\varphi_\xi(\eta, \zeta) := (B_\xi \eta, \zeta)$.

Простой подсчет показывает, что оператор B_ξ коммутирует с каждым оператором вида $T(g)$. Следовательно, по лемме Шура $B_\xi = \alpha(\xi) \cdot I$, где $\alpha(\xi) \in {}^*\mathbb{C}$.

Итак, $\varphi_\xi(\eta, \zeta) = \alpha(\xi)(\eta, \zeta)$. Полагая $\eta := \zeta$, получаем $\varphi_\xi(\zeta, \zeta) = \alpha(\xi) \cdot \|\zeta\|^2 = \alpha(\zeta) \cdot \|\xi\|^2$. Отсюда следует существование такого $D \in {}^*\mathbb{R}$, что $\alpha(\xi) = D \cdot \|\xi\|^2$ для любого $\xi \in V$. Пусть вектор ξ имеет единичную норму. Тогда $\varphi_\xi(\xi, \xi) = \alpha(\xi) = D$. Таким образом, для любого вектора $\xi \in V$ с единичной нормой будет

$$D = |G|^{-1} \cdot \sum_{g \in G} |(T(g)\xi, \xi)|^2.$$

Покажем, что ${}^\circ D > 0$. Рассмотрим внутреннюю функцию $\psi : G \to {}^*\mathbb{R}$, определяемую формулой $\psi(g) = |(T(g)\xi, \xi)|^2$. Легко проверить, что эта функция S-непрерывна. Следовательно, $\|\widetilde{\psi}\|^2 = {}^\circ\|\psi\|^2 = D$, где в левой части имеется в виду норма в $L_2(G^\#)$. Из определения ψ видно, что $\psi(e) = 1$, где e — единица группы G. Но тогда $\widetilde{\psi}(e^\#) = 1$ и, поскольку функция $\widetilde{\psi}$ непрерывна, верно также неравенство $\|\psi\| > 0$, что и требовалось.

Пусть теперь $\theta_1, \dots, \theta_n \in V$ — произвольный ортонормальный базис. Тогда

$$|G|^{-1} \cdot \sum_{g \in G} |(T(g)\theta_k, \theta_1)|^2 = \varphi_{\theta_k}(\theta_1, \theta_1) = \alpha(\theta_k) \cdot \|\theta_1\|^2 = D.$$

Так как оператор $T(g)$ унитарен, система $\{T(g)\theta_k : k := 1, \dots, n\}$ образует ортонормальный базис, т. е. выполняются равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} |(T(g)\theta_k, \theta_1)|^2 = \|\theta_1\|^2 = 1.$$

Просуммировав последнее равенство по g и умножив на $|G|^{-1}$, мы получим в силу предыдущего, что $n \cdot D = 1$. Стандартность n следует теперь из неравенства ${}^\circ D > 1$. $\triangleright$

7.3.12. *Множество всех линейных комбинаций функций вида $\widetilde{\psi}$, где $\psi(g)$ — матричный элемент некоторого S-непрерывного неприводимого унитарного представления группы G, плотно в $C(G^\#)$.*

$\triangleleft$ В доказательстве теоремы 32 из [194] установлено, что пространство линейных комбинаций собственных функций всех интегральных уравнений с ядрами вида $f(x-y)$, где $f : G^{\#} \to \mathbb{C}$ — непрерывная четная функция, плотно в $C(G^{\#})$. Отсюда, привлекая 7.3.5 (3) и 7.3.9, выводим, что пространство линейных комбинаций функций вида $\widetilde{\varphi}$, где φ — это S-непрерывная собственная функция уравнения вида 7.3.6 (1) с $0 < {}^{\circ}|\lambda| < +\infty$ и $k(g,h) := f(g-h)$ для некоторой S-непрерывной четной функции $f : G \to {}^*\mathbb{C}$, плотно в $C(G^{\#})$.

По существу оставшаяся часть доказательства повторяет доказательство теоремы 32 из [194] и приводится здесь ради полноты. Ниже мы предполагаем, что $k(g,h) := f(g-h)$ для некоторой непрерывной четной функции $f : G^{\#} \to \mathbb{C}$. Согласно 7.3.8 (1) размерность R_λ — стандартное число. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ составляют полную ортонормальную систему собственных значений уравнения 7.3.6 (1), которые можно выбрать S-непрерывными. Очевидно, если $\varphi(g) \in R_\lambda$, то $\varphi(a+g) \in R_\lambda$ для каждого $a \in G$. Тем самым $\varphi_1(a+g), \dots, \varphi_n(a+g)$ также составляют полную ортонормальную систему собственных функций уравнения 7.3.6 (1). Следовательно, существует унитарная матрица $U(a) := (u_{kl}(a))_{k,l=1}^n$ такая, что

$$\varphi_k(a+g) = \sum_{l=1}^n u_{kl}(a)\varphi_l(g).$$

Покажем, что $\{U(a) : a \in G\}$ — представление группы G. Действительно, $u_{kl}(a+b) = \sum_{k=1}^n u_{kl}(a)u_{kl}(b)$. Из ортонормальности системы $\{\varphi_k : k = 1, \dots, n\}$ видно, что

$$u_{kl}(a) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \varphi_k(a+g)\varphi_l(g).$$

Учитывая последнее равенство, а также доступность и S-непрерывность функций φ_i, заключаем, что $u_{ij}(a)$ также S-непрерывны. Так как $U(\cdot)$ — унитарное представление группы G, то существует унитарная матрица V такая, что $U(a) = VX(a)V^{-1}$ для всех $a \in G$, где

$$X(a) := \begin{pmatrix} T_1(a) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_n(a) \end{pmatrix},$$

причем T_k — неприводимое унитарное представление группы G для $k := 1, \dots, n$. Так как $X(a) = V^{-1}U(a)V$, то все матричные элементы представлений T_k будут стандартно-конечными линейными комбинациями S-непрерывных функций, так что представления T_k сами являются S-непрерывными. Аналогично, u_{kl} являются стандартно-конечными линейными комбинациями матричных элементов T_k с доступными коэффициентами. Полагая $g := 0$ в указанном выше выражении для $\varphi_k(a+g)$, получим, что φ_k будет стандартно-конечной линейной комбинацией функций u_{kl} с доступными коэффициентами, следовательно, и некоторых матричных элементов ψ_k представления T_k. Ясно, что если $\varphi_k = \sum_{l=1}^n C_l \cdot \psi_l$, то $\widetilde{\varphi}_k = \sum_{l=1}^n {}^\circ(C_l) \cdot \widetilde{\psi}_l$. $\triangleright$

7.3.13. Примечания.

(1) По теореме 7.2.3 группа $G^\#$ компактна в том и только в том случае, если G_f — внутренняя подгруппа группы G. Поэтому можно предположить без ограничения общности, что $G_f = G$. В силу 7.2.11 достаточно доказать, что всякий характер $\varkappa \in G^{\#\wedge}$ имеет вид $\widetilde{\chi}$ для некоторого $\chi \in G^\wedge$, удовлетворяющего условию $\chi|_{G_0} \approx 1$ (см. 7.2.7 (3)). Последнее утверждение легко следует из полноты системы характеров вида $\widetilde{\chi}$. Полнота, в свою очередь, устанавливается посредством некоторой модификации доказательства теоремы Петера — Вейля о полноте системы характеров неприводимых представлений компактной группы (см. [194]).

(2) Отметим, что все рассмотрения этого параграфа, за исключением результатов, относящихся к группе характеров, остаются в силе, если G — внутренняя гиперконечная некоммутативная группа, а внешние подгруппы $G_0 \subset G_f$, удовлетворяющие условиям (А) и (Б) из 7.2.1, являются нормальными подгруппами G.

(3) Доказательство предложения 7.3.11 аналогично доказательству теоремы 22.13 из [225], утверждающей, что всякое неприводимое представление компактной группы конечномерно. Вместе с тем рассматриваемая в 7.3.11 ситуация несколько проще, так как здесь мы работаем с гиперконечными группами, с которыми во многих отношениях можно обращаться как с конечными группами.

7.4. Гиперприближение локально компактных абелевых групп

В этом параграфе рассматривается проблема *гиперприближения* топологической группы — центральная тема текущей главы.

Все основные результаты относятся к случаю локально компактных абелевых групп.

7.4.1. Напомним, что если $\mathfrak{G}$ — топологическая группа, то монада нуля $\mu_{\mathfrak{G}}(0)$ и множество околостандартных элементов $\operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})$ определены формулами:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathfrak{G}}(0) &:= \bigcap\{{}^*U : 0 \in U,\, U \subset \mathfrak{G},\, U \text{ открыто}\},\\ \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G}) &:= \{\xi \in {}^*\mathfrak{G} : (\exists \eta \in \mathfrak{G})(\xi \approx \eta)\},\end{aligned}$$

где $\xi_1 \overset{\mathfrak{G}}{\approx} \xi_2 := \xi_1 \approx \xi_2$ означает, что $\xi_1 - \xi_2 \in \mu_{\mathfrak{G}}(0)$.

Отображение $\operatorname{st} : \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G}) \to \mathfrak{G}$, очевидным образом определяемое правилом $\operatorname{st}(\xi) \approx \xi$ для $\xi \in \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})$, будет эпиморфизмом с ядром $\mu_{\mathfrak{G}}(0)$, так что $\mathfrak{G} \simeq \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})/\mu_{\mathfrak{G}}(0)$. Будем писать $\mu(0)$ и $\xi_1 \approx \xi_2$ вместо $\mu_{\mathfrak{G}}(0)$ и $\xi_1 \overset{\mathfrak{G}}{\approx} \xi_2$ соответственно, ибо это не приводит к путанице. Дадим теперь основное определение.

Пусть $\mathfrak{G}$ — стандартная топологическая группа, G — внутренняя гиперконечная группа и $\jmath : G \to {}^*\mathfrak{G}$ — внутреннее отображение. Пару $(G, \jmath)$ называют *гиперприближением* группы $\mathfrak{G}$, если выполнены следующие условия:

(1) для любого $\xi \in \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})$ существует $g \in G$, для которого $\jmath(g) \approx \xi$;

(2) если $g_1, g_2 \in \jmath^{-1}(\operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G}))$, то $\jmath(g_1 + g_2) \approx \jmath(g_1) + \jmath(g_2)$;

(3) если $g \in \jmath^{-1}(\operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G}))$, то $\jmath(-g) \approx -\jmath(g)$;

(4) $\jmath(0) = 0$.

Можно было бы взять четвертое условие в виде $\jmath(0) \approx 0$, однако если изменить отображение так, чтобы выполнялось точное равенство, то условия (1)–(3) останутся в силе.

Подчеркнем, что в данном определении ни сама группа, ни ее гиперприближение не предполагаются коммутативными, хотя мы и используем знаки $+$ и 0 для обозначения групповой операции и нейтрального элемента. Однако если группа коммутативна, то и приближающая ее гиперконечная группа по определению коммутативна.

Обозначим $G_f := \jmath^{-1}(\operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G}))$, $G_0 := \jmath^{-1}(\mu(0))$ и $\widetilde{\jmath} := \operatorname{st} \circ \jmath|_{G_f}$. Тогда условия (1)–(4) равносильны требованию о том, что $\widetilde{\jmath} : G_f \to \mathfrak{G}$ — эпиморфизм с ядром $\ker(\widetilde{\jmath}) = G_0$. Изоморфизм между $G^\# := G_f/G_0$ и $\mathfrak{G}$, индуцированный эпиморфизмом $\widetilde{\jmath}$, будем обозначать символом $\overline{\jmath}$, а фактор-гомоморфизм из G_f на $G^\#$ — символом $\#$.

7.4.2. Гиперприближение $(G, \jmath)$ локально компактной абелевой группы $\mathfrak{G}$ называют *хорошим* при условии, что соответствующая тройка (G, G_0, G_f) будет допустимой в смысле определения из 7.2.13.

В качестве важного примера хорошего гиперприближения рассмотрим аддитивную группу $G := \{-L, \dots, L\}$ кольца ${}^*\mathbb{Z}/N{}^*\mathbb{Z}$, где $N := 2L+1$ — бесконечно большое гипернатуральное число, $\Delta \approx 0$ — бесконечно малое положительное число, причем $N\Delta \approx +\infty$. Рассмотрим отображение $\jmath : G \to {}^*\mathbb{R}$, определяемое формулой $\jmath(k) := k\Delta$ для $k \in G$. Очевидно, что $(G, \jmath)$ — гиперприближение аддитивной группы поля $\mathbb{R}$. Эквивалентности 7.2.1 (1) и теорема 7.1.2 показывают, что $(G, \jmath)$ — хорошее гиперприближение.

7.4.3. *Если $\mathfrak{G}$ — сепарабельная локально компактная группа, а $(G, \jmath)$ — ее гиперприближение, то тройка (G, G_0, G_f) удовлетворяет условиям теоремы* 7.2.3. *Более того, $\overline{\jmath} : G^\# \to \mathfrak{G}$ — топологический изоморфизм.*

$\lhd$ Ввиду предположений о локальной компактности и сепарабельности можно считать, что $\mathfrak{G} = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$, где каждое U_n — открытое относительно компактное множество. Отсюда легко усмотреть, что $G_f = \bigcup_{n=1}^\infty \jmath^{-1}({}^*U_n)$. Совершенно аналогично, если $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — счетная база относительно компактных окрестностей нуля группы $\mathfrak{G}$, то $G_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \jmath^{-1}({}^*V_n)$. Таким образом, G_f и G_0 представимы соответственно в виде счетного объединения и счетного пересечения внутренних множеств. Значит, на группе $G^\#$ определена каноническая топология согласно теореме 7.2.2. Выполнение условий теоремы 7.2.3 обеспечено локальной компактностью группы $G^\#$. Остается показать, что $\overline{\jmath}$ и $\overline{\jmath}^{-1}$ непрерывны в нуле.

Для данной окрестности нуля $V \subset \mathfrak{G}$ подберем относительно компактную окрестность нуля V^1 так, чтобы $V^1 \subset V$, и рассмотрим внутреннее множество $F := \jmath^{-1}({}^*V^1)$. Как видно, $G_0 \subset F$, так что $\overset{\circ}{F^\#}$ — окрестность нуля в $G^\#$. Непрерывность $\overline{\jmath}$ в нуле следует теперь из легко проверяемого соотношения $\overline{\jmath}(\overset{\circ}{F^\#}) \subset V^1 \subset V$.

Возьмем окрестность нуля в $G^\#$ вида $\overset{\circ}{F^\#}$, где F — внутреннее подмножество группы G_f, содержащее G_0.

Так как $G_0 = \bigcap\{\jmath^{-1}({}^*U) : U$ — окрестность нуля в $\mathfrak{G}\}$, то из ω^+-насыщенности нестандартного универсума выводим существование относительно компактной окрестности нуля U в $\mathfrak{G}$ такой, что

$\jmath^{-1}({}^*U) \subset F$. Пусть окрестность нуля $V \subset \mathfrak{G}$ удовлетворяет условию $V + V + V \subset U$. Используя очевидное включение $V \subset V + V$, получаем $\jmath^{-1}({}^*V) + \jmath^{-1}({}^*V) \subset \jmath^{-1}({}^*U)$. Из этого включения вытекает, что если $\xi \in V$ и $\overline{\jmath}^{-1}(\xi) = g^{\#}$ (или, что то же, $\jmath(g) \approx \xi$), то $g \in \overset{\circ}{F}$. Значит, $\overline{\jmath}^{-1}(V) \subset \overset{\circ}{F}{}^{\#}$. $\triangleright$

7.4.4. Теорема. *Сепарабельная локально компактная абелева группа, содержащая компактную и открытую подгруппу, допускает хорошее гиперприближение.*

$\triangleleft$ Из 7.2.12 и 7.2.14 видно, что в условиях сформулированной теоремы всякое гиперприближение будет хорошим, поэтому нужно лишь доказать существование какого-либо гиперприближения.

(1) Пусть G — сепарабельная локально компактная абелева группа и U — ее компактная и открытая подгруппа. Обозначим символом $\mathscr{D}$ фактор-группу $\mathfrak{G}/U$ и рассмотрим короткую точную последовательность $U \subset \mathfrak{G} \xrightarrow{\pi} \mathscr{D}$, где π — фактор-гомоморфизм. В силу ω^+-насыщенности нестандартного универсума и счетности $\mathscr{D}$ существует гиперконечное множество $T \subset {}^*\mathscr{D}$, для которого $\mathscr{D} \subset T$. Обозначим символом ${}^*\mathscr{D}(T)$ внутреннюю подгруппу группы ${}^*\mathscr{D}$, порожденную множеством T, и пусть $\mathscr{H} := {}^*\pi^{-1}({}^*\mathscr{D}(T))$. Тогда коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\ \subset\ } & \mathfrak{G} & \xrightarrow{\ \pi\ } & \mathscr{D} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\big\downarrow \\ U & \xrightarrow{\ \subset\ } & \mathscr{H} & \xrightarrow{\ \varepsilon\ } & {}^*\mathscr{D}(T)\,, \end{array}$$

где $\varepsilon = {}^*\pi|_{{}^*\mathscr{H}}$ — внутреннее отображение и нижняя сторона диаграммы представляет собой короткую точную последовательность.

Напомним, что конечно-порожденная абелева группа разлагается в прямую сумму свободной подгруппы и конечной подгруппы (см. [153; § 10, теорема 8]). Применив к этому утверждению принцип переноса, получим ${}^*\mathscr{D}(T) = \mathscr{D}_1 \oplus \mathscr{D}_2$, где $\mathscr{D}_1$ — гиперконечная абелева группа и $\mathscr{D}_2$ — свободная (в нестандартном универсуме) абелева группа с гиперконечным множеством образующих. Полагая $\mathscr{H}_\imath := \varepsilon^{-1}(\mathscr{D}_\imath)$ для $\imath := 1, 2$, получим, что $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ и $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 = {}^*U$. Кроме того, будут точными последовательности ${}^*U \subset \mathscr{H}_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} \mathscr{D}_1$; и ${}^*U \subset \mathscr{H}_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} \mathscr{D}_2$, где $\varepsilon_\imath := \varepsilon|_{\mathscr{H}_\imath}$ для $\imath := 1, 2$.

Рассмотрим указанные точные последовательности несколько более подробно. Сначала займемся первой из них. Применим принцип переноса к теореме ван Кампена (см. [225, глава 2, теорема 9.5]). Тогда для любой бесконечно малой окрестности нуля V (т. е. такой, что $V \subset \mu(0)$), содержащейся в ${}^*U$, подберем гипернатуральное число k, гиперконечную группу R и непрерывный эпиморфизм $\varphi : {}^*U \to {}^*S^k \oplus R$ такие, что $\ker(\varphi) \subset V$. Здесь S — единичная окружность.

(2) Пусть R — это нормальная подгруппа группы L и фактор-группа L/R изоморфна группе H. В этой ситуации говорят, что L — *расширение* подгруппы R посредством H, и пишут $\mathrm{Ext}(H,R) = L$.

Сказанное выше означает, что $\mathscr{H}_1$ является расширением ${}^*U$ посредством $\mathscr{D}_1$. Но так как φ — эпиморфизм, то существует расширение L группы ${}^*S^k \oplus R$ посредством $\mathscr{D}_1$, так что можно подыскать внутреннюю группу L и внутренний гомоморфизм $\gamma : \mathscr{H}_1 \to L$, для которых коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc}
{}^*U & \xrightarrow{\ \subset\ } & \mathscr{H}_1 & \xrightarrow{\ \varepsilon_1\ } & \mathscr{D}_1 \\
\varphi\downarrow & & \downarrow\gamma & & \downarrow\mathrm{id} \\
{}^*S^k \oplus R & \xrightarrow{\ \varkappa\ } & L & \xrightarrow{\ \delta\ } & \mathscr{D}_1,
\end{array}$$

причем нижняя сторона диаграммы является короткой точной последовательностью. Из коммутативности диаграммы также ясно, что γ — эпиморфизм. Из легко проверяемого равенства $\mathrm{Ext}(\mathscr{D}_1, S^k \oplus R) = \mathrm{Ext}(\mathscr{D}_1, S^k) \oplus \mathrm{Ext}(\mathscr{D}_1, R)$ вытекает существование двух коротких точных последовательностей ${}^*S^k \overset{\varkappa_1}{\to} L_1 \overset{\delta_1}{\to} \mathscr{D}_1$ и $R \overset{\varkappa_2}{\to} L_2 \overset{\delta_2}{\to} \mathscr{D}_1$, из которых нижняя строка указанной диаграммы получается (с точностью до изоморфизма) следующим образом: $L := \{(l_1, l_2) \in L_1 \oplus L_2 : \delta_1(l_1) = \delta_2(l_2)\}$, $\varkappa := (\varkappa_1, \varkappa_2)$, $\delta(l_1, l_2) := \delta_1(l_1) = \delta_2(l_2)$. Поскольку ${}^*S^k$ — делимая группа, то первая из двух указанных точных последовательностей расщепляется, т. е. существует мономорфизм $\chi : \mathscr{D}_1 \to L_1$, который будет правым обратным к δ_1.

Группа L_2 гиперконечна ввиду гиперконечности групп R и $\mathscr{D}_1$. Заметим, что непрерывный эпиморфизм φ компактных групп является открытым отображением, следовательно, $\varphi(V)$ будет окрестностью нуля в ${}^*S^k \oplus R$, так что $\varphi(V) \cap {}^*S^k$ — окрестность нуля в ${}^*S^k$. Так как единичная окружность S при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ содержит конечную подгруппу, которая служит ε-сетью, то существует гиперконечная подгруппа $F \subset {}^*S^k$ такая, что $F + (\varphi(V) \cap {}^*S^k) = {}^*S^k$. Рассмотрим гиперконечную подгруппу $M \subset L$, определяемую формулой

$$M := \{(\varkappa_1(f) + \chi(d), l) : f \in F,\ d \in \mathscr{D}_1,\ l \in L_2,\ \delta_2(l) = d\}.$$

Поскольку γ — эпиморфизм, то $\gamma^{-1}(m) \neq \varnothing$ для всех $m \in M$. Из каждого множества $\gamma^{-1}(m)$ выберем по одному элементу g_m так, чтобы получилось внутреннее отображение, и положим $G_1 := \{g_m : m \in M\}$. Операцию $+_1$ определяют формулой $g_{m_1} +_1 g_{m_2} := g_{m_1+m_2}$. Тем самым $\gamma(g_{m_1} +_1 g_{m_2}) = \gamma(g_{m_1}) + \gamma(g_{m_2}) = m_1 + m_2$. Очевидно, что $(G_1, +_1)$ — гиперконечная абелева группа. Нам потребуются некоторые свойства этой группы.

(3) *Для любых $m, m_1, m_2 \in M$ имеют место соотношения $g_{m_1} +_1 g_{m_2} \approx g_{m_1} + g_{m_2}$ и $-_1 g_m \approx -g_m$.*

$\vartriangleleft$ Поскольку $\gamma(g_{m_1} +_1 g_{m_2}) = \gamma(g_{m_1}) + \gamma(g_{m_2})$, то коммутативность диаграммы из (2) влечет справедливость равенства $\varepsilon_1(g_{m_1} +_1 g_{m_2} - g_{m_1} - g_{m_2}) = 0$, так что $g_{m_1} +_1 g_{m_2} - g_{m_1} - g_{m_2} \in {}^*U$. Используя левый квадрат этой же диаграммы и тот факт, что $\varkappa$ — мономорфизм, приходим к равенству $\varphi(g_{m_1} +_1 g_{m_2} - g_{m_1} - g_{m_2}) = 0$. Последнее можно записать в эквивалентной форме $g_{m_1} +_1 g_{m_2} - g_{m_1} - g_{m_2} \in V \subset \mu(0)$, что и доказывает первое из требуемых соотношений. Второе соотношение доказывается аналогично. $\vartriangleright$

(4) *Для любого $h \in \mathscr{H}_1$ существует $g \in G_1$ такой, что $g \approx h$.*

$\vartriangleleft$ Возьмем произвольный элемент $h \in \mathscr{H}_1$. Привлекая строение группы L и указанное в (2) расщепление точной последовательности ${}^*S^k \xrightarrow{\varkappa_1} L_1 \xrightarrow{\delta_1} \mathscr{D}_1$, получим $\gamma(h) = (\varkappa_1(s) + \chi(d), l)$, где $l \in L_2$ и $\delta_2(l) = d$. Ввиду равенства $F + (\varphi(V) \cap {}^*S^k) = {}^*S^k$ можно подобрать $f \in F$ так, чтобы $s - f \in \varphi(V) \cap {}^*S^k$. Но тогда $m = (\varkappa_1(f) + \chi(d), l) \in M$. Покажем справедливость соотношения $g_m \approx h$. Заметим, что $\varepsilon_1(h) = \varepsilon_1(g_m) = d$ и, стало быть, $l - g_m \in {}^*U$. Более того, $\gamma(l) - \gamma(g_m) = (\varkappa_1(f - s), 0) = \varkappa((f - s, 0)) = \varkappa\varphi(l - g_m)$. Тем самым $\varphi(l - g_m) = (f - s, 0) \in \varphi(V) \cap {}^*S^k \subset \varphi(V)$. Но тогда будет $l - g_m \in \varphi^{-1}(\varphi(V)) = V + \ker(\varphi) \subset V + V \subset \mu(0)$. $\vartriangleright$

(5) *Группа $G_U := {}^*U \cap G_1$ представляет собой подгруппу G_1. Пара $(G_U, \hookrightarrow)$, где $\hookrightarrow$ — тождественное вложение G_U в ${}^*U$, будет гиперприближением группы U.*

$\triangleleft$ Доказательство следует из (3), (4) и того, что U — компактная и открытая подгруппа группы $\mathfrak{G}$. $\triangleright$

(6) Переходим к изучению точной последовательности ${}^*U \hookrightarrow \mathscr{H}_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} \mathscr{D}_2$, см. (1).

Пусть $\nu_\imath : {}^*\mathscr{D}(T) \to \mathscr{D}_\imath$ — фактор-гомоморфизм. Выберем гипернатуральное число m так, чтобы $(\nu_2(T) - \nu_2(T)) \cap m\mathscr{D}_2 = 0$. Чтобы установить существование такого m, осталось применить принцип переноса к следующему вполне очевидному утверждению: «Если P — конечное подмножество свободной конечно-порожденной абелевой группы H, то существует натуральное число m такое, что $P \cap mH \subset 0$».

Пусть $Q := \mathscr{D}_2/m\mathscr{D}_2$. Тогда Q — гиперконечная абелева группа. Фактор-гомоморфизм из $\mathscr{D}_2$ на Q обозначим буквой λ. По построению $\nu_2(T)$ инъективно. Осуществим внутренний выбор одного элемента d_q из каждого множества $\lambda^{-1}(q)$ при $q \in Q$ таким образом, что если $\lambda^{-1}(q) \cap \nu_2(T) \neq \varnothing$, то $d_q \in \nu_2(T)$ (здесь такой элемент d_q единствен, так как λ — инъективное отображение на $\nu_2(T)$). Пусть $G_3 := \{d_q : q \in Q\}$. Определим операцию $+_3$ на G_3 правилом $d_{q_1} +_3 d_{q_2} := d_{q_1+q_2}$. Таким образом, $\lambda(d_{q_1} +_3 d_{q_2}) = \lambda(d_{q_1}) + \lambda(d_{q_2})$.

(7) *Для любого $d \in \mathscr{D}$ найдется $q \in Q$ такой, что $\nu_2(d) = d_q$. Если $d_{q_1}, d_{q_2} \in \nu_2(\mathscr{D})$, то $d_{q_1} +_3 d_{q_2} = d_{q_1} + d_{q_2}$.*

В правой части последнего равенства знак $+$ обозначает операцию сложения в группе $\mathscr{D}_2$; множество $\nu_2(\mathscr{D})$, вообще говоря, — внешняя подгруппа группы $\mathscr{D}_2$.

$\triangleleft$ Первое утверждение следует из определения d_q и включения $\nu_2(\mathscr{D}) \subset \nu_2(T)$. Если $d_{q_1}, d_{q_2} \in \nu_2(\mathscr{D})$, то $d_{q_1} + d_{q_2} \in \nu_2(\mathscr{D})$. Пусть $d_{q_1} + d_{q_2} = d_{q_3}$. Поскольку λ — гомоморфизм, то $q_3 = \lambda(d_{q_1} + d_{q_2}) = \lambda(d_{q_1}) + \lambda(d_{q_2}) = q_1 + q_2$. В то же время $\lambda(d_{q_1} +_3 d_{q_2}) = \lambda(d_{q_1}) + \lambda(d_{q_2}) = q_1 + q_2 = q_3$. Таким образом, $\lambda^{-1}(q_3) \cap \nu_2(T) = \{d_{q_1} + d_{q_2}\}$ и, следовательно, $d_{q_3} = d_{q_1} + d_{q_2} = d_{q_1} +_3 d_{q_2}$. $\triangleright$

(8) Ограничение групповой операции $+_1$ на подгруппу G_U обозначим символом $+_U$. Так как $\mathscr{D}_2$ — свободная абелева группа, то последовательность ${}^*U \subset \mathscr{H}_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} \mathscr{D}_2$ расщепляется, т. е. существует мономорфизм $\mu_2 : \mathscr{D}_2 \to \mathscr{H}_2$ — правое обратное отображение к ε_2. Рассмотрим множество $G_2 := \{g + \mu(d_q) : g \in G_U, q \in Q\}$ и введем операцию $+_2$ в G_2 правилом $(g_1 + \mu(d_{q_1})) +_2 (g_2 + \mu(d_{q_2})) := g_1 +_U g_2 + m(d_{q_1} +_3 d_{q_2})$. Учитывая соотношения $\mathscr{H}_2 = {}^*U \oplus \mu_2(\mathscr{D}_2)$ и $G_U \subset {}^*U$, легко получить, что $(G_2, +_2)$ — гиперконечная абелева группа, причем $G_2 \cap {}^*U = G_U$.

(9) *Пусть $\mathfrak{G} = G_1 \times G_2$. Определим $\jmath : G \to {}^*\mathfrak{G}$ формулой $\jmath((g_1, g_2)) := g_1 + g_2$. Тогда $(G, \jmath)$ — гиперприближение группы $\mathfrak{G}$.*

◁ Возьмем $\xi \in \mathfrak{G}$. В силу соотношения (см. (1)) $\mathfrak{G} \subset \mathscr{H} = \mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ имеет место представление $\xi = h_1 + h_2$, где $h_1 \in \mathscr{H}_1$ и $h_2 \in \mathscr{H}_2$. Отсюда, согласно коммутативной диаграмме из (1), $d := \pi(\xi) = \varepsilon_1(h_1) + \varepsilon_2(h_2)$. Таким образом, $\varepsilon_2(h_2) = \nu_2(d) \in \nu_2(\mathscr{D})$, поскольку $d \in \mathscr{D}$. В соответствии с (7) $\nu_2(d) = d_q$, поэтому существует $g \in {}^*U$, для которого $h_2 = g + \mu(d_q)$. В силу предложения (5) G_U приближает ${}^*U$, но так как U компактна, то найдется $g_0 \in G_U$ такой, что $g_0 \approx g$. Тогда $g_2 = g_0 + \mu(d_q) \approx g + \mu(d_q) = h_2$ и $g_2 \in G_2$. Согласно (3) существует $g_1 \in G_1$, удовлетворяющий соотношению $g_1 \approx h_1$, следовательно, $g_1 + g_2 \approx h_1 + h_2 = \xi$. Это устанавливает первое условие из определения гиперприближения (см. 7.4.1 (1)). Так как четвертое условие очевидно, то остается обосновать условия 7.4.1 (2) и 7.4.1 (3).

Предположим, что $g_1 + g_2 \approx \xi \in \mathfrak{G}$ и $g_1' + g_2' \approx \xi' \in \mathfrak{G}$, где $g_1, g_1' \in G_1$ и $g_2, g_2' \in G_2$. Нужно показать справедливость соотношения $g_1 +_1 g_1' + g_2 +_2 g_2' \approx \xi + \xi'$. Как видно из (3), $g_1 +_1 g_1' \approx g_1 + g_1'$. Следовательно, достаточно обосновать, что $g_2 +_2 g_2' \approx g_2 + g_2'$. Положим $d := \pi(\xi)$. Так как $g_1 + g_2 \approx \xi$, то $g_1 + g_2 - \xi \in {}^*U$ и, стало быть, $\varepsilon(g_1 + g_2) = d$ (см. диаграмму из (1)). Из включения $g_\imath \in \mathscr{H}_\imath$ вытекает $\varepsilon_2(g_2) = \nu_2(d) \in \nu_2(\mathscr{D})$. Аналогично $\varepsilon_2(g_2') = \nu_2(d_2') \in \nu_2(\mathscr{D})$, где $d' := \pi(\xi')$. Из этих равенств мы немедленно выводим $g_2 = \widetilde{g} + \mu(\nu_2(d))$ и $g_2' = \widetilde{g}' + \mu(\nu_2(d'))$. Тогда ввиду (7) будет $g_2 +_2 g_2' = \widetilde{g} +_U \widetilde{g}' + \mu(\nu_2(d) + \nu_2(d')) = \widetilde{g} +_U \widetilde{g}' + \mu(\nu_2(d)) + \mu(\nu_2(d'))$. Но согласно (5) $\widetilde{g} +_U \widetilde{g}' \approx \widetilde{g} + \widetilde{g}'$, что и доказывает 7.4.1 (2).

Условие 7.4.1 (3) устанавливается совершенно аналогично. ▷

Тем самым доказательство теоремы 7.4.4 завершено. ▷

7.4.5. *Теорема.* *Сепарабельная локально компактная абелева группа допускает хорошее гиперприближение.*

◁ Известно, что локально компактная абелева группа может быть представлена в виде прямого произведения $\mathbb{R}^m$ для некоторого $m \geq 0$ и группы, имеющей компактную и открытую подгруппу (см., например, [54, глава 2, § 10.3, теорема 1]). В то же время очевидно, что если сепарабельные локально компактные абелевы группы $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ допускают хорошие гиперприближения, то $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ также допускает хорошее гиперприближение. Остается привлечь теорему 7.4.4 и пример из 7.4.2. $\triangleright$

7.4.6. Пусть $(G, \jmath)$ — гиперприближение группы $\mathfrak{G}$. Если $U \subset \mathfrak{G}$ — некоторая окрестность нуля с компактным замыканием, то $G_0 \subset \jmath^{-1}({}^*U) \subset G_f$, так что $\Delta := |\jmath^{-1}({}^*U)|^{-1}$ будет нормирующим множителем тройки (G, G_0, G_f) (см. определение 7.2.4 (4)). Внешние подгруппы G_0 и G_f, определяемые гиперприближением $(G, \jmath)$ группы $\mathfrak{G}$, определяют, в свою очередь, внешние подгруппы $H_0, H_f \subset \widehat{G}$ (определения см. в 7.2.7).

Если $(G, \jmath)$ — гиперприближение группы $\mathfrak{G}$, то представляется естественным приближать двойственную группу $\widehat{\mathfrak{G}}$ посредством группы $\widehat{G}$. Если $(\widehat{G}, \imath)$ — гиперприближение $\widehat{\mathfrak{G}}$, то $\widehat{G}_f = \imath^{-1}(\mathrm{nst}\,({}^*\widehat{\mathfrak{G}}))$ и $\widehat{G}_0 = \imath^{-1}\mu_{\widehat{\mathfrak{G}}}(\mathbf{1})$. Здесь $\mathbf{1}$ — нейтральный элемент группы $\widehat{\mathfrak{G}}$, т. е. характер, тождественно равный 1.

Пусть $(G, \jmath)$ и $(\widehat{G}, \imath)$ — гиперприближения сепарабельных локально компактных абелевых групп $\mathfrak{G}$ и $\widehat{\mathfrak{G}}$ соответственно. Будем говорить, что $(\widehat{G}, \imath)$ *двойственна* к $(G, \jmath)$, если выполнены следующие условия:

(1) $H_0 \subset \widehat{G}_0$;

(2) $\imath(h)(\jmath(g)) \approx h(g)$ для всех $h \in \widehat{G}_f$ и $g \in G_f$.

Заметим, что если группа $\mathfrak{G}$ компактна, то $G_f = G$ и первое условие из сформулированного определения выполняется автоматически ввиду 7.2.11 (1).

Мера Лёба ν_Δ на G индуцирует меру Хаара μ_Δ на $G^\#$. Топологический изоморфизм $\overline{\jmath}$ преобразует меру μ_Δ в меру Хаара $\overline{\mu}_\Delta$ на $\mathfrak{G}$. Очевидно, что любая мера Хаара на $\mathfrak{G}$ имеет такой вид.

Если $f : \mathfrak{G} \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, то лифтинг функции $f \circ \overline{\jmath}$ мы будем называть *лифтингом* f (см. 7.2.6).

7.4.7. *Пусть* $(G, \jmath)$ *— гиперприближение некоторой сепарабельной локально компактной абелевой группы* $\mathfrak{G}$ *и* Δ *— нормирующий* *множитель тройки* (G, G_0, G_f). *Пусть* $p \in [1, \infty)$ — *стандартное число и* $f : \mathfrak{G} \to \mathbb{C}$. *Тогда* $f \in L_p(\mathfrak{G})$ *в том и только в том случае, когда* f *имеет* $\mathscr{S}_{p,\Delta}$*-интегрируемый лифтинг. Если* $p = 1$ *и* $\varphi : G \to {}^*\mathbb{C}$ — *это* $\mathscr{S}_{1,\Delta}$*-интегрируемый лифтинг* f, *то*

$$\int f \, d\overline{\mu}_\Delta = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{g \in G} \varphi(g)\right).$$

$\lhd$ Это просто переформулировка предложения 7.2.6. $\rhd$

Как видно из определения 6.4.9 (1), тройка $(G, \jmath, \Delta)$ будет гиперпредставлением пространства $(\mathfrak{G}, \mu_\Delta)$, и предложение 6.4.10 станет выглядеть следующим образом.

7.4.8. *Если в предположениях* 7.4.7 *функция* $f \in L_1(\mathfrak{G})$ *ограничена, непрерывна почти всюду относительно меры Хаара и удовлетворяет условию*

$$(\forall B \in {}^*\mathscr{P}(G))\left(B \subset G - G_f \ \to \ \Delta \sum_{g \in G} |{}^*f(\jmath(g))| \approx 0\right),$$

то функция $\varphi := {}^*f \circ \jmath$ *будет* $\mathscr{S}_{1,\Delta}$*-интегрируемым лифтингом функции* f *и*

$$\int f \, d\mu_\Delta = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{g \in G} {}^*f(\jmath(g))\right).$$

7.4.9. *Пусть* $\chi \in {}^*\widehat{\mathfrak{G}}$ *и* $\varkappa \in \widehat{\mathfrak{G}}$. *Тогда* $\chi \overset{\widehat{\mathfrak{G}}}{\approx} \varkappa$ *в том и только в том случае, если* $\chi(\xi) \approx \varkappa(\xi)$ *для всех* $\xi \in \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})$.

$\lhd$ Пусть $\chi \approx {}^*\varkappa$. Если $\xi \in \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})$, то $\xi \approx \eta \in \mathfrak{G}$. Если u — относительно компактная окрестность точки η в $\mathfrak{G}$, то $\xi \in \overline{u}$. По предположению для любого стандартного k будет $(\chi - {}^*\varkappa \in {}^*\mathscr{W}(\overline{u}, \Lambda_k))$ (см. доказательство теоремы 7.2.8), но это и означает, что $\chi(\xi) \approx {}^*\varkappa(\xi)$.

Наоборот, допустим, что $\chi(\xi) \approx {}^*\varkappa(\xi)$ для всех $\xi \in \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})$. В этом случае для компактного подмножества F группы $\mathfrak{G}$ будет ${}^*F \subset \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})$, следовательно, $(\chi(\xi) \approx {}^*\varkappa(\xi))$ для всех $\xi \in {}^*F$. Таким образом, $\chi - {}^*\varkappa \in {}^*\mathscr{W}(F, \Lambda_k)$ для каждого стандартного k. $\rhd$

7.4.10. *Теорема.* *Пусть $(G, \jmath)$ — хорошее гиперприближение сепарабельной локально компактной абелевой группы $\mathfrak{G}$, а $(\widehat{G}, \imath)$ — двойственное к нему гиперприближение группы $\widehat{\mathfrak{G}}$. Пусть Δ — нормирующий множитель тройки (G, G_0, G_f), определяемой $(G, \jmath)$. Тогда справедливы утверждения:*

(1) *$(|G| \cdot \Delta)^{-1}$ — это нормирующий множитель тройки $(\widehat{G}, \widehat{G}_0, \widehat{G}_f)$, определяемой $(\widehat{G}, \imath)$;*

(2) *если $\mathscr{F} : L_2(\mathfrak{G}, \overline{\mu}_\Delta) \to L_2(\widehat{\mathfrak{G}}, \overline{\mu}_{\widehat{\Delta}})$ — преобразование Фурье, то $\mathscr{F}$ сохраняет скалярное произведение;*

(3) *дискретное преобразование Фурье $\Phi^G_\Delta : \mathscr{L}_{2,\Delta}(G) \to \mathscr{L}_{2,\widehat{\Delta}}(\widehat{G})$ будет гиперприближением $\mathscr{F}$.*

$\lhd$ (1): Покажем сначала, что $H_0 = \widehat{G}_0$ и $H_f = \widehat{G}_f$. Если $h \in \widehat{G}_0$, то $\imath(h) \approx \mathbf{1}$, значит, в силу 7.4.9 $\imath(h)(\xi) \approx 1$ для всех $\xi \in \mathrm{nst}\,({}^*\mathfrak{G})$. Отсюда $\imath(h)(\jmath(g)) \approx 1$ для всех $g \in G_f$, поэтому $h(g) \approx 1$ согласно 7.4.6 (2), следовательно, $h \in H_0$. Тем самым $\widehat{G}_0 \subset H_0$, а обратное включение совпадает с 7.4.6 (1).

Включение $\widehat{G}_f \subset H_f$ — это тривиальное следствие из 7.2.6 (2) и 7.4.9. Обратное включение доказывается несколько сложнее.

Возьмем $h \in H_f$ и заметим, что $\widetilde{h} \in G^{\#\wedge}$ (напомним, что $\widetilde{h}(g^\#) = {}^\circ h(g)$). Если отображение $\overline{\imath}$ определяют по $\imath$ так же, как $\overline{\jmath}$ по $\jmath$, то $\overline{\imath} : \widehat{G}^\# \to \widehat{\mathfrak{G}}$ — топологический изоморфизм в силу 7.4.3.

Пусть $\varkappa := \widetilde{h} \circ \overline{\jmath}^{-1} \in \widehat{\mathfrak{G}}$. Так как $\widehat{G}^\# = \widehat{G}_f / \widehat{G}_0$, то существует $h_1 \in \widehat{G}_f$, для которого $\overline{\imath}(h_1^\#) = \widetilde{h} \circ \overline{\jmath}^{-1}$. Если $g \in G_f$, то $\overline{\imath}(h_1^\#)(\overline{\jmath}(g^\#)) = \mathrm{st}\,\imath(h_1)(\mathrm{st}\,\jmath(g)) \approx \imath(h_1)\jmath(g) \approx h_1(g)$ в силу 7.4.6 (2).

В то же время $\overline{\imath}(h_1^\#)(\overline{\jmath}(g^\#)) = \widetilde{h}\overline{\jmath}^{-1}(\overline{\jmath}(g^\#)) = \widetilde{h}(g^\#) \approx h(g)$. Итак, $h(g) \approx h_1(g)$ для любых $g \in G_f$. Это означает, что $h \cdot \overline{h}_1 \in H_0 = \widehat{G}_0 \subset \widehat{G}_f$. Поскольку $h_1 \in \widehat{G}_f$, то $h \in \widehat{G}_f$, что и доказывает второе из требуемых равенств.

Первое утверждение теоремы следует теперь из того, что гиперприближение $(G, \jmath)$ предполагается хорошим.

(2): Второе утверждение следует непосредственно из третьего.

(3): Обозначим символом

$$\gamma : L_2(G^\#, \mu) \to \mathscr{L}_{2,\Delta}(G)^\#$$

вложение, индуцированное фактор-гомоморфизмом $\# : G_f \to G^\#$. Точнее, γ сопоставляет функции $f \in L_2(G^\#, \mu_\Delta)$ класс $\mathscr{L}_{2,\Delta}(G_f)$-лифтинга функции f, т. е. функции $f \circ \#$ в $\mathscr{L}_{2,\Delta}(G)^\#$.

Аналогично, обозначим символом

$$\widetilde{\gamma} : L_2(G^{\#\wedge}, \mu_{\widehat{\Delta}}) \to \mathscr{L}_{2,\widehat{\Delta}}(\widehat{G})^{\#}$$

вложение, индуцированное фактор-гомоморфизмом $\widehat{\#} : \widehat{G}_f \to \widehat{G}^{\#}$. Так как $(G, \jmath)$ — хорошее гиперприближение, то равенства, установленные выше при доказательстве (1), показывают, что $\widehat{G}^{\#}$ канонически изоморфна $G^{\#\wedge}$, причем изоморфизм устанавливается путем сопоставления характера $\widetilde{h}$ элементу $h^{\#} \in G^{\#\wedge}$, где $h \in \widehat{G}_f = H_f$. Более того, учитывая определение допустимой тройки из 7.2.13, легко усмотреть коммутативность диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
L_2(G^{\#}, \mu_{\Delta}) & \xrightarrow{\mathscr{F}_{\Delta}^{G^{\#}}} & L_2(G^{\#\wedge}, \mu_{\widehat{\Delta}}^{\#}) \\
{\scriptstyle\gamma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\widehat{\gamma}} \\
\mathscr{L}_{2,\Delta}(G)^{\#} & \xrightarrow{(\Phi_{\Delta}^{G})^{\#}} & \mathscr{L}_{2,\widehat{\Delta}}(\widehat{G})^{\#}.
\end{array}$$

Топологические изоморфизмы $\overline{\jmath}$ и $\overline{\imath}$ переносят меры μ_{Δ} на $G^{\#}$ и $\mu_{\widehat{\Delta}}$ на $G^{\#\wedge}$ в меры $\overline{\mu}_{\Delta}$ на $\mathfrak{G}$ и $\overline{\mu}_{\widehat{\Delta}}$ на $\widehat{\mathfrak{G}}$ соответственно. Иначе говоря, имеются изоморфизмы $\jmath_* : L_2(\mathfrak{G}, \overline{\mu}_{\Delta}) \to L_2(G^{\#}, \mu_{\Delta})$ и $\imath_* : L_2(\widehat{\mathfrak{G}}, \overline{\mu}_{\widehat{\Delta}}) \to L_2(\widehat{G}^{\#}, \mu_{\widehat{\Delta}})$, определяемые правилами $\jmath_*(f) := f \circ \jmath$ и $\imath_*(\varphi) := \varphi \circ \imath$. Более того, диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
L_2(\mathfrak{G}, \overline{\mu}_{\Delta}) & \xrightarrow{\mathscr{F}} & L_2(\widehat{\mathfrak{G}}, \overline{\mu}_{\widehat{\Delta}}) \\
{\scriptstyle\jmath_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i_*} \\
L_2(G^{\#}, \mu_{\Delta}) & \xrightarrow{\mathscr{F}_{\Delta}^{G^{\#}}} & L_2(G^{\#\wedge}, \mu_{\widehat{\Delta}})
\end{array}$$

коммутативна.

Непосредственно из определений видно, что $\gamma \circ \jmath_*(f)$ — класс $\mathscr{S}_{2,\Delta}$-лифтинга функции f, т. е. $\gamma \circ \jmath_*(f) = \jmath_{2,\Delta}(f)$. Аналогично, $\widehat{\gamma} \circ \imath_* = \jmath_{2,\widehat{\Delta}}$, причем $\jmath_{2,\Delta}$ и $\jmath_{2,\widehat{\Delta}}$ индуцированы $\jmath$ и $\imath$ соответственно. Теперь из предыдущих двух диаграмм вытекает коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
L_2(\mathfrak{G}, \overline{\mu}_{\Delta}) & \xrightarrow{\mathscr{F}} & L_2(\widehat{\mathfrak{G}}, \overline{\mu}_{\widehat{\Delta}}) \\
{\scriptstyle\jmath_{2,\Delta}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\jmath_{2,\widehat{\Delta}}} \\
\mathscr{L}_{2,\Delta}(G^{\#}, \mu_{\Delta}) & \xrightarrow{(\Phi_{\Delta}^{G})^{\#}} & \mathscr{L}_{2,\widehat{\Delta}}(G^{\#\wedge}).
\end{array}$$

Это и доказывает (3). $\triangleright$

7.4.11. Заметим, что пара $(G,\jmath)$ из определения 7.4.1 является нестандартным объектом, поэтому алгоритм Нельсона нельзя напрямую применить к предложениям вида «$(G,\jmath)$ — гиперприближение группы $\mathfrak{G}$», так как он применяется лишь к предложениям, содержащим стандартные параметры. Чтобы обойти эту трудность, дадим следующее определение.

Стандартную последовательность $((G_n,\jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$, где G_n — конечная абелева группа, а $\jmath_n$ — отображение из G_n в $\mathfrak{G}$ для каждого $n\in\mathbb{N}$, назовем *приближающей последовательностью* сепарабельной локально компактной абелевой группы $\mathfrak{G}$, если $(G_N,\jmath_N)$ — гиперприближение группы $\mathfrak{G}$ для всех $N\approx+\infty$.

Пусть $((\widehat{G}_n,\widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность для группы $\widehat{\mathfrak{G}}$. Эту последовательность будем называть *двойственной* к $((G_n,\jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$, если гиперприближение $(\widehat{G}_N,\widehat{\jmath}_N)$ двойственно к гиперприближению $(G_N,\jmath_N)$ для любого $N\approx+\infty$.

Функцию $f:\mathfrak{G}\to\mathbb{C}$ называют *быстро убывающей* относительно приближающей последовательности $((G_n,\jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ группы $\mathfrak{G}$, если для любой относительно компактной окрестности нуля $U\subset\mathfrak{G}$ и любого бесконечного $N\in{}^*\mathbb{N}$ выполнено условие (см. 7.4.8)

$$(\forall B\in{}^*\mathscr{P}(G))\Bigl(B\subset G-G_f\ \to\ \Delta\sum_{g\in G}|{}^*f(\jmath(g))|\approx 0\Bigr),$$

где $\Delta:=|\jmath_N^{-1}({}^*U)|\cdot|G_n|^{-1}$.

К этим определениям уже можно применить алгоритм Нельсона. Подчеркнем, что далеко не каждое гиперприближение можно получить из какой-либо приближающей последовательности, особенно если нестандартный универсум ${}^*V(\mathbb{R})$ не является ультрастепенью $V(\mathbb{R})$ относительно некоторого ультрафильтра на $\mathbb{N}$. Тем не менее внимательный анализ доказательства теоремы 7.4.4 показывает, что для любой сепарабельной локально компактной абелевой группы существует приближающая последовательность.

В следующих ниже предложениях $\mathscr{K}$ (соответственно $\widehat{\mathscr{K}}$) обозначает семейство всех компактных подмножеств группы $\mathfrak{G}$ (соответственно группы $\widehat{\mathfrak{G}}$), а $\mathbf{T}_0$ и $\widehat{\mathbf{T}}_0$ — базы относительно компактных окрестностей нейтрального элемента в $\mathfrak{G}$ и $\widehat{\mathfrak{G}}$ соответственно.

7.4.12. *Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ заданы конечная абелева группа G_n и отображение $\jmath_n : G_n \to \mathfrak{G}$, где $\mathfrak{G}$ — сепарабельная локально компактная абелева группа. Пусть $\mathbf{T}_0$ — база относительно компактных окрестностей нуля в $\mathfrak{G}$. Тогда последовательность $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ будет приближающей для $\mathfrak{G}$ в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:*

(1) $(\forall \xi \in \mathfrak{G})(\forall U \in \mathbf{T}_0)(\exists f \in \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)$ $(\xi - \jmath_n(f_n) \in U)$;

(2) $(\forall K \subset \mathscr{K})(\forall U \in \mathbf{T}_0)(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n > m)(\forall g, h \in G_n)$ $((\jmath_n(g), \jmath_n(h) \in K \to (\jmath_n(g+h) - \jmath_n(g) - \jmath_n(h) \in U) \wedge$ $(\jmath_n(g) + \jmath_n(-g) \in U))$.

$\lhd$ Доказывается простым применением алгоритма Нельсона с учетом того факта, что $\operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G}) = \bigcup\{{}^*K : K \subset \mathfrak{G}$ — компакт$\}$. $\rhd$

7.4.13. *Пусть $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность сепарабельной локально компактной абелевой группы $\mathfrak{G}$. Тогда имеют место утверждения:*

(1) *функция $f : \mathfrak{G} \to \mathbb{C}$ быстро убывает относительно этой последовательности в том и только в том случае, если*
$(\forall U \in \mathbf{T}_0)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\exists K \in \mathscr{K})(\forall n > n_0)$ $(\forall B \subset \jmath_n^{-1}(\mathfrak{G} - K))\frac{1}{|\jmath_n^{-1}(U)|}\sum_{g\in B}|f(\jmath_n(g))| < \varepsilon$;

(2) *для любой меры Хаара μ на $\mathfrak{G}$ существует окрестность $U \in \mathbf{T}_0$ такая, что выполнено равенство*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\jmath_n^{-1}(U)|} \sum_{g\in G_n} |f(\jmath_n(g))|$$

для любой μ-почти всюду непрерывной ограниченной функции $f : \mathfrak{G} \to \mathbb{C}$, быстро убывающей относительно $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

$\lhd$ Первое утверждение выводится непосредственным применением алгоритма Нельсона к определению быстро убывающей функции, а второе — к предложению 7.4.8. $\rhd$

7.4.14. *Пусть последовательности $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ и $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ те же, что и в 7.4.11. Тогда $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ двойственна к $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ в том и только в том случае, если выполнены следующие два условия:*

(1) $(\forall V \in \widehat{\mathbf{T}}_0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\exists K \in \mathscr{K})(\exists \varepsilon > 0)$
$(\forall n > n_0)(\forall \chi \in \widehat{G}_n)(\forall g \in \jmath_n^{-1}(K)(|\chi(g) - 1| < \varepsilon \to \widehat{\jmath}_n(\chi) \in V)$;

(2) $(\forall K \in \mathscr{K})(\forall L \in \widehat{\mathscr{K}})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)$
$(\forall g \in \jmath_n^{-1}(K))(\forall \chi \in \widehat{\jmath}_n^{-1}(L)(|\widehat{\jmath}_n(\chi)(\jmath_n(g)) - \chi(g)| < \varepsilon)$.

◁ Доказывается применением алгоритма Нельсона к определению двойственного гиперприближения, см. 7.4.6. ▷

7.4.15. *Пусть $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность сепарабельной локально компактной абелевой группы $\mathfrak{G}$, а $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — двойственная к ней приближающая последовательность для $\widehat{\mathfrak{G}}$. Пусть μ — мера Хаара на $\mathfrak{G}$ и $\mathscr{F} : L_2(\mathfrak{G}) \to L_2(\widehat{\mathfrak{G}})$ — преобразование Фурье. Предположим, что $U \in \mathbf{T}_0$ соответствует μ в силу предложения* 7.4.13 (2). *Тогда если f и $|\mathscr{F}(f)|$ ограничены и почти всюду непрерывны относительно меры Хаара, а $|f|^2$ и $|\mathscr{F}(f)|^2$ быстро убывают относительно рассматриваемых приближающих последовательностей, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\jmath_n^{-1}(U)|}{|G_n|} \sum_{\chi\in\widehat{G}_n} \Bigg| \int_{\mathfrak{G}} f(\xi)\widehat{\jmath}_n(\chi)(\xi)\, d\mu(\xi) - \\ - \frac{1}{|\jmath_n^{-1}(U)|} \sum_{g\in G_n} f(\jmath_n(g))\chi(g) \Bigg|^2 = 0.$$

◁ Для доказательства нужно применить алгоритм Нельсона к теореме 7.4.10. ▷

7.4.16. Примечания.

(1) Результаты этого параграфа получены Е. И. Гордоном, см. [43, 45, 46, 325].

(2) Если группа $\mathfrak{G}$ компактна, то $G_f = G$, и каждое стандартно-конечномерное S-непрерывное унитарное представление G определяет (как это было указано в предыдущем параграфе) унитарное представление $\widetilde{T}$ группы $G^{\#}$ той же самой размерности. Из этого представления можно сконструировать эквивалентное ему представление $\widetilde{T} \circ \bar{\jmath}$ группы $\mathfrak{G}$. Теорема 7.3.10 показывает, что если $\mathfrak{G}$ имеет гиперприближение $(G, \jmath)$, то всякое ее неприводимое унитарное представление имеет такой же вид для некоторого S-непрерывного неприводимого унитарного представления T группы G.

(3) Основные результаты данного параграфа относятся к сепарабельным локально компактным абелевым группам. Однако в большинстве случаев предположение о сепарабельности можно опустить, если вместо ω^+-насыщенности нестандартного универсума потребовать его λ^+-насыщенность, где λ — вес группы $\mathfrak{G}$ (= наименьший кардинал из мощностей баз топологии $\mathfrak{G}$).

(4) Двойственное приближение группы характеров можно построить непосредственно в случае единичной окружности и дискретной группы. Это обстоятельство и тщательный анализ доказательства теоремы 7.4.4 показывают, что всякая сепарабельная локально компактная абелева группа, содержащая компактную и открытую подгруппу, допускает двойственную пару гиперприближений. Но тогда это верно и для всех сепарабельных локально компактных абелевых групп, так как для $\mathbb{R}$ двойственная пара гиперприближений может быть построена непосредственно (см. параграф 7.1).

(5) Если $|f|^2$ удовлетворяет условиям 7.4.8, а $|\mathscr{F}(f)|^2$ удовлетворяет тем же условиям с заменой $\mathfrak{G}, G, \Delta, G_f$ на $\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{G}, \widehat{\Delta}, \widehat{G}_f$ соответственно, то третье утверждение теоремы 7.4.10 эквивалентно соотношению

$$(\Delta|G|)^{-1} \sum_{h \in \widehat{G}} |\mathscr{F}(f)(i(h)) - \Phi_\Delta({}^*f \circ \jmath)(h)|^2 \approx 0,$$

которое более детально можно записать в виде:

$$(\Delta|G|)^{-1} \sum_{h \in \widehat{G}} \left| \int\limits_{{}^*\mathfrak{G}} {}^*f(\xi) \cdot \overline{i(h)(\xi)}\, d\mu_\Delta(\xi) - \Delta \sum_{g \in G} {}^*f(\jmath(g)) \cdot \overline{h(g)} \right|^2 \approx 0.$$

7.5. Примеры гиперприближений

Здесь мы рассмотрим гиперприближения аддитивной группы поля $\mathbb{R}$, единичной окружности, проконечных абелевых групп, аддитивной группы τ-адических целых, τ-адического соленоида, аддитивной группы поля p-адических чисел.

7.5.1. В качестве первого примера рассмотрим хорошее гиперприближение аддитивной группы поля $\mathbb{R}$, указанное в 7.4.2.

В этом примере $G := \{-L, \dots, L\}$ — аддитивная группа кольца ${}^*\mathbb{Z}/N{}^*\mathbb{Z}$, где $N := 2L + 1$, $N\Delta \approx +\infty$, $\Delta \approx 0$ и $\jmath : G \to {}^*\mathbb{R}$ определено формулой $\jmath(k) := k\Delta$. В этом случае двойственная группа $\widehat{G}$

изоморфна G. Изоморфизм осуществляется сопоставлением каждому $n \in G$ характера χ_n, где $\chi_n(m) := \exp(2\pi inm/N)$. Группа $\widehat{\mathbb{R}}$ изоморфна $\mathbb{R}$, причем изоморфизм можно осуществить, сопоставляя каждому $t \in \mathbb{R}$ характер $\varkappa_t$ по формуле $\varkappa_t(x) := \exp(2\pi itx)$.

Двойственное гиперприближение $(\widehat{G}, \imath)$ определено равенством $\imath(n) := \frac{n}{N\Delta}$ или, точнее, $\imath(\chi_n)(x) := \exp(\frac{2\pi in}{N\Delta}x)$.

Из 7.2.1 (1) видно, что выполнено 7.4.1 (1). Условие 7.4.1 (2) почти очевидно. В самом деле, $\jmath(m) = m\Delta \approx x$ и $\imath(m) = \frac{m}{N\Delta} \approx t$, так что $\exp(2\pi itx) = \exp 2\pi i\imath(m)(\jmath(n)) \approx \exp(2\pi imn/N)$. Соответствующее гиперприближение преобразования Фурье изучалось на протяжении всего параграфа 7.1.

7.5.2. Рассмотрим теперь гиперприближение для случая единичной окружности S (она же S^1), которую, как и выше, удобно представлять в виде интервала $[-1/2, 1/2)$. Групповая операция $+_S$ — сложение по модулю 1. Двойственная группа $\widehat{S}$ изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$. Изоморфизм может быть осуществлен сопоставлением каждому $n \in \mathbb{Z}$ характера $\varkappa_n(x) := \exp(2\pi inx)$.

Пусть G та же группа $\{-L, \dots, L\}$, что и в 7.5.1, где $N := 2L + 1 \approx +\infty$, и определим отображение $\jmath : G \to {}^*S$ формулой $\jmath(m) := m/N$ для $m \in G$. Отображение $\imath : \widehat{G} \to {}^*\mathbb{Z}$ определено на двойственном гиперприближении $(\widehat{G}, \imath)$ правилом $\imath(n) := n$ или, точнее, $\imath(\chi_n) := \varkappa_n$, где характер χ_n определен как в 7.5.1. Так как группа $\mathbb{Z}$ дискретна, то $\widehat{G}_0 = 0$ и $\widehat{G}_f = \mathbb{Z}$. Ввиду компактности окружности S в проверке нуждается лишь условие 7.4.1 (2), которое столь же просто, как и в 7.5.1.

Применив теорему 7.4.10 к рассматриваемому случаю, получим следующий факт.

(1) *Пусть функция $f : [-1/2, 1/2) \to \mathbb{C}$ интегрируема по Риману. Тогда для бесконечно большого гипернатурального числа $N := 2L + 1$ выполняется*

$$\sum_{n=-L}^{L} \Bigl| \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \exp(-2\pi inx)\, dx - \frac{1}{N} \sum_{m=-L}^{L} f(m/N) \exp(-2\pi imn/N) \Bigr|^2 \approx 0.$$

Посредством подходящей замены переменной из этого предложения выводится следующее утверждение.

(2) *Для любой интегрируемой по Риману функции f, заданной на $[-l, l]$, будет*

$$\sum_{n=-L}^{L} \Big| \int_{-l}^{l} f(x) \exp(\pi i n x / l)\, dx - \Delta \sum_{m=-L}^{L} f(m\Delta) \exp(-2\pi i m n / N) \Big|^2 \approx 0,$$

как только N и Δ таковы, что $N = 2L + 1 \approx +\infty$ и $^{\circ}(N\Delta) = 2l$.

7.5.3. В следующих двух пунктах построим гиперприближение проконечных абелевых групп. Рассмотрим стандартную последовательность $((K_n, \varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$, где K_n — конечная абелева группа, а $\varphi_n : K_{n+1} \to K_n$ — эпиморфизм для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пусть (K, ψ) — *проективный предел* указанной последовательности, обозначаемый $\varprojlim (K_n, \varphi_n)$. Это означает, что существуют группа K и последовательность эпиморфизмов $\psi := (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где $\psi_n : K \to K_n$ таковы, что $\varphi_n \circ \psi_{n+1} = \psi_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Топология в (K, ψ) индуцируется из $\prod_n K_n$. Для фиксированного $N \approx +\infty$ положим $G := {}^*K_N$. Тогда ${}^*\psi_N : K \to {}^*K_N = G$ — эпиморфизм.

(1) *Пусть внутреннее отображение* (*вообще говоря, не гомоморфизм*) $\jmath : G \to {}^*K$ *служит правым обратным к* ${}^*\psi_N$ *и* $\jmath(0) = 0$. *Тогда пара* $(G, \jmath)$ *будет гиперприближением группы* K.

$\lhd$ По определению топологии в K имеет место следующее описание бесконечной близости в ${}^*K$:

$$(\forall \alpha, \beta \in {}^*K)(\alpha \overset{K}{\approx} \beta \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} n)({}^*\psi_n(\alpha) = {}^*\psi_n(\beta))).$$

Группа K компактна, поэтому имеет место 7.4.1 (1) и достаточно обосновать 7.4.1 (2) и 7.4.1 (3), ибо 7.4.1 (4) выполнено по определению. Для $n > m$ определим гомоморфизм $\varphi_{nm} : K_n \to K_m$ формулой $\varphi_{nm} := \varphi_{n-1} \circ \ldots \circ \varphi_m$. Тогда $\varphi_{n,n-1} = \varphi_{n-1}$ и $\varphi_{nm} \circ \psi_n = \psi_m$, следовательно, для любого стандартного $n \in \mathbb{N}$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} {}^*\psi_n(\jmath(a+b)) &= {}^*\varphi_{Nn} \circ {}^*\psi_N(\jmath(a+b)) = \\ &= {}^*\varphi_{Nn}(a+b) = {}^*\varphi_{Nn}(a) + {}^*\varphi_{Nn}(b). \end{aligned}$$

Аналогично

$${}^*\psi_n(\jmath(a) + \jmath(b)) = {}^*\psi_n(\jmath(a)) + {}^*\psi_n(\jmath(b)) = {}^*\varphi_{Nn}(a) + {}^*\varphi_{Nn}(b),$$

что и доказывает 7.4.1 (2) в силу указанного выше описания бесконечной близости в ${}^*K$. Похожие соображения приводят к 7.4.1 (3). $\rhd$

(2) *Если выполнены условия предложения* (1), *то*

$$G_0 = \{a \in G : (\forall^{\mathrm{st}} n)({}^*\varphi_{Nn}(a) = 0)\},$$

где $\varphi_{nm} : K_n \to K_m$. *Более того,* $K \simeq G/G_0 = G^{\#}$.

7.5.4. Если $(K, \psi) := \varprojlim (K_n, \varphi_n)$, то двойственная группа $\widehat{K}$ имеет вид $\varprojlim(\widehat{K}_n, \widehat{\varphi}_n)$, где $\widehat{\varphi}_n : \widehat{K}_n \to \widehat{K}_{n+1}$ определено формулой $\widehat{\varphi}_n(\chi) := \chi \circ \varphi_n$ $(\chi \in \widehat{K}_n)$. Вложения $\widehat{\psi}_n : \widehat{K}_n \to \widehat{K}$ определяются аналогично. Из этих определений видно, что если для $n > m$ ввести $\widehat{\varphi}_{nm} : \widehat{K}_m \to \widehat{K}_n$ формулой $\widehat{\varphi}_{nm}(\chi) := \chi \circ \varphi_{nm}$ $(\chi \in \widehat{K}_n)$, то выполняются равенства $\widehat{\varphi}_{nm} = \widehat{\varphi}_m \circ \ldots \circ \widehat{\varphi}_{n-1}$ и $\widehat{\psi}_m = \widehat{\psi}_n \circ \widehat{\varphi}_{nm}$.

(1) *Если гиперприближение* $(G, \jmath)$ *группы* K *определено как в* 7.5.3 (1) *(т. е.* $G := K_N$ *и* $\jmath : G \to {}^*K$ *— правое обратное отображение к* ${}^*\psi_N$*), то* $(\widehat{K}, \widehat{\psi}_N)$ *— гиперприближение группы* $\widehat{K}$*, двойственное к* $(G, \jmath)$.

◁ Прежде всего заметим, что условия 7.4.1 (2)–(4) выполнены автоматически, так как $\widehat{\psi}_N$ — гомоморфизм. Поскольку $\widehat{K}$ — индуктивный предел последовательности групп $(\widehat{K}_n)$, то $\widehat{K} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, где $A_n := \{\chi \circ \psi_n : \chi \in \widehat{K}_n\}$. По принципу переноса ${}^*\widehat{K} = \bigcup_{n\in{}^*\mathbb{N}} A_n$. Но $\widehat{K}_n$ — стандартное конечное множество, поэтому ${}^*A_n = \{\chi \circ {}^*\psi_n : \chi \in \widehat{K}_n\}$. Таким образом, каждый стандартный элемент $\varkappa \in {}^*\widehat{K}$ имеет вид $\varkappa = \chi \circ {}^*\psi_n$ для некоторых стандартных n и $\chi \in \widehat{K}_N$. Отсюда ${}^*\widehat{\varphi}_{nM}(\chi) \in \widehat{K}_n$ и $\widehat{\psi}_N({}^*\widehat{\varphi}_{nN}(\chi)) = \varkappa$. Тем самым обосновано условие 7.4.1 (1). Условие 7.4.6 (1) выполнено автоматически ввиду компактности K. Если $\chi \in \widehat{K}_n$, то ${}^*\widehat{\psi}_N(\chi)(\jmath(a)) = \chi({}^*\psi_N(\jmath(a))) = \chi(a)$, следовательно, 7.4.6 (2) также верно. ▷

(2) *Если в условиях* 7.5.3 (1) *и* (1) *функция* $f : K \to \mathbb{C}$ *ограничена и непрерывна почти всюду относительно меры Хаара, то*

$$\sum_{\chi\in\widehat{K}_N} \left| \int\limits_{{}^*K} f(\alpha)\overline{\chi(\psi_N(\alpha))}\, d^*\mu_K(\alpha) - |K_N|^{-1} \sum_{a\in K_N} f(\jmath(a))\overline{\chi(a)} \right|^2 \approx 0,$$

где μ_K *— мера Хаара на* K*, для которой* $\mu_K(K) = 1$.

◁ Следует из 7.4.10 и 7.4.16 (5). ▷

7.5.5. Применим результаты предыдущего пункта к построению гиперприближения кольца τ-адических целых Δ_τ (см. [54, 225]). Символ $a \mid b$ обозначает тот факт, что b делит a без остатка. Пусть, кроме того, $\mathrm{rem}(a, b)$ — остаток от деления a на b.

Пусть $\tau := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — стандартная последовательность натуральных чисел такая, что $a_n > 1$ и $a_n \mid a_{n+1}$. Обозначим символом A_n кольцо $\mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}$, которое в нашем случае рассматривается как кольцо наименьших положительных вычетов по модулю a_n, т. е. $A_n := \{0, 1, \dots, a_n - 1\}$. Пусть $\varphi_n : A_{n+1} \to A_n$ — эпиморфизм, который сопоставляет элементу $a \in A_{n+1}$ остаток при делении a на a_n, т. е. $\varphi_n(a) := \mathrm{rem}(a, a_n)$. Кольцо $\Delta_\tau := \varprojlim(A_{n+1}, \varphi_n)$ называют *кольцом τ-адических целых.*

Определим вложение $\nu : \mathbb{Z} \to \Delta_\tau$, полагая $\nu(a)_n := \mathrm{rem}(a, a_n)$ для всех $a \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{Z}$. Тогда последовательность $\nu(a)$ содержится в $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ и $\varphi_n(\nu(a)_{n+1}) = \nu(a)_n$, стало быть, $\nu(a) \in \Delta_\tau$. Легко проверить, что множество $\nu(\mathbb{Z})$ плотно в Δ_τ. Пусть $\jmath_n := \nu|_{A_n} : A_n \to \Delta_\tau$. Тогда $\jmath_n$ — правое обратное к отображению $\psi_n : \Delta_\tau \to A_n$. В самом деле, если $\xi := (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta_\tau$, то $\psi_n(\xi) = \xi$. Принимая во внимание, что $\mathrm{rem}(a, a_n) = a$ для $a \in A_n$, получаем $\psi_n(\nu(a)) = a$.

Если $N \approx +\infty$, то пара $({}^*A_N, {}^*\jmath_N)$ представляет собой гиперприближение кольца Δ_τ. Более того, группа Δ_τ топологически изоморфна ${}^*A_N/G_0$, где

$$G_0 := \{a \in {}^*A_N : (\forall^{\mathrm{st}} n)\,(a_n \mid a)\}.$$

$\lhd$ Следует из 7.5.3 (1, 2). $\rhd$

7.5.6. Опишем теперь двойственную группу $\widehat{\Delta}_\tau$ (см. [225]).

Пусть $\mathbb{Q}^{(\tau)} := \{\frac{m}{a_n} : m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\}$. Так как $a_n \mid a_m$ при $n \le m$, то $\mathbb{Q}^{(\tau)}$ — подгруппа аддитивной группы $\mathbb{Q}$. Очевидно, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}^{(\tau)}$. Пусть $\mathbb{Z}^{(\tau)} := \mathbb{Q}^{(\tau)}/\mathbb{Z}$. Известно при этом, что $\widehat{\Delta}_\tau \simeq \mathbb{Z}^{(\tau)}$. Для описания этого изоморфизма нужно ввести некоторые обозначения. Если $\xi := (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta_\tau$, то пишем $\xi_n := \mathrm{rem}(\xi, a_n)$. Это обозначение согласуется с тем случаем, когда $\xi = \nu(a)$ для некоторого $a \in \mathbb{Z}$, т. е. $\mathrm{rem}(a, a_n) = \mathrm{rem}(\nu(a), a_n)$. Ниже $\nu(a)$ отождествляется с a и, значит, предполагается, что $\mathbb{Z} \subset \Delta_\tau$. Тогда для некоторого $\eta \in \Delta_\tau$ выполняется равенство $\xi = \eta a_n + \mathrm{rem}(\xi, a_n)$. Пусть $\{\xi/a_n\} = (\mathrm{rem}(\xi, a_n))/a_n \in \mathbb{Q}^{(\tau)}$. Тогда легко проверить формулы $\{C\xi/a_n\} \equiv$

$C\{\xi/a_n\}$ (mod $\mathbb{Z}$) и $\{\xi/a_n + \eta\} = \{\xi/a_n\}$, где $C \in \mathbb{Z}$ и $\eta \in \Delta_\tau$. Если теперь (C/a_n) — класс элемента $C/a_n \in \mathbb{Q}^{(\tau)}$ в $\mathbb{Z}^{(\tau)}$, то характер $\chi_{(C/a_n)} \in \widehat{\Delta}_\tau$ задан формулой

$$\chi_{(C/a_n)}(\xi) := \exp(2\pi i\{\xi/a_n\}) \quad (\xi \in \Delta_\tau).$$

Опишем вложение $\widehat{\psi}_n : \widehat{A}_n \to \widehat{\Delta}_\tau$. В рассматриваемом случае $\widehat{A}_n$ и A_n изоморфны. Изоморфизм можно осуществить, сопоставляя каждому m характер $\chi_m \in \widehat{A}_n$ по правилу $\chi_m(a) := \exp(2\pi ima/a_n)$ для $a \in A_n$.

Следовательно,

$$\widehat{\psi}_n(\chi_m)(\xi) = \chi_m(\psi_n(\xi)) = \chi_n(\mathrm{rem}(\xi, a_n)) =$$
$$= \exp(2\pi im\,\mathrm{rem}(\xi, a_n)/a_n) = \exp(2\pi i\{m\xi/a_n\}).$$

После подходящего отождествления мы можем предположить, что $\widehat{\psi}_n : A_n \to \mathbb{Z}^{(\tau)}$ задан формулой $\widehat{\psi}_n(m) = (m/a_n)$.

Для произвольного $N \approx +\infty$ пара $({}^*A_N, {}^*\widehat{\psi}_N)$ служит гиперприближением группы $\widehat{\Delta}_\tau$, двойственным к $({}^*A_N, {}^*\jmath_N)$.

$\lhd$ Следует из 7.4.10. $\rhd$

(1) *Если $N \approx +\infty$ и стандартная ограниченная функция $f : \Delta_\tau \to \mathbb{C}$ непрерывна почти всюду относительно меры Хаара μ_τ, где $\mu_\tau(\Delta_\tau) = 1$, то*

$$\sum_{k=0}^{{}^*a_N-1} \Bigg| \int\limits_{{}^*\Delta_\tau} {}^*f(\xi)\exp(-2\pi i\{k\xi/{}^*a_N\})\,d\mu_\tau(\xi) -$$
$$- a_N^{-1} \sum_{n=0}^{{}^*a_N-1} {}^*f(n)\exp(-2\pi ikn/{}^*a_N)\Bigg|^2 \approx 0.$$

$\lhd$ Следует из 7.4.4 (5). $\rhd$

7.5.7. Два следующих пункта посвящены построению гиперприближения *τ-адического соленоида*. Напомним (см. [54, 225]), что τ-адический соленоид Σ_τ представляется в виде $[0,1) \times \Delta_\tau$, где групповая операция $+_\tau$ определяется соотношением

$$(x, \xi) +_\tau (y, \eta) = (\{x + y\}, \xi + \eta + [x + y]),$$

а $[a]$ и $\{a\}$ — *целая* и *дробная части* числа a. Топологию в Σ_τ задают системой $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ окрестностей нуля, причем

$$V_n := \{(x,\xi) : 0 \leq x < 1/a_n,\ (\forall k \leq n)\,(\mathrm{rem}(x,a_k) = 0)\}\cup$$
$$\cup\{(x,\xi) : 1 - 1/a_n < x < 1,\ (\forall k \leq n)\,(\mathrm{rem}(x+1,a_k) = 0)\}$$

(напомним, что $\tau := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$).

Из сказанного нетрудно усмотреть следующее описание бесконечно малых элементов в Σ_τ.

(1) *Если* $(x,\xi) \in {}^*\Sigma_\tau$, *то имеет место эквивалентность*

$$(x,\xi) \overset{\Sigma_\tau}{\approx} 0 \leftrightarrow x \approx 0 \wedge \xi \overset{\Delta_\tau}{\approx} 0 \vee x \approx 1 \wedge \xi + 1 \overset{\Delta_\tau}{\approx} 0.$$

Зафиксируем некоторое $N \approx +\infty$, положим $G := {}^*\mathbb{Z}/{}^*a_N^2\,{}^*\mathbb{Z} = \{0,1,\dots,{}^*a_N^2 - 1\}$ и введем отображение $\jmath : G \to \Sigma_\tau$ формулой

$$\jmath(a) = (\{a/a_N\},[a/a_N]) \quad (a \in G).$$

Как и выше, предполагаем, что $\mathbb{Z} \subset \Delta_\tau$. Заметим, что при этом $[a/a_N] < a_N$.

(2) *Пара* $(G,\jmath)$ *служит гиперприближением* τ*-адического соленоида* Σ_τ.

$\lhd$ Так как $a +_G b \equiv a + b \pmod{a_N^2}$, то $a +_G b \equiv a + b \pmod{a_N}$. Следовательно,

$$\{(a +_G b)/a_N\} = (\mathrm{rem}(a +_G b, a_N))/a_N =$$
$$= (\mathrm{rem}(a + b, a_N))/a_N = \{\{a/a_N\} + \{b/a_N\}\}.$$

Покажем, что $[(a +_G b)/a_N] \overset{\Delta_\tau}{\approx} [(a + b)/a_N] = [a/a_N] + [b/a_N] + [\{a/a_N\} + \{b/a_N\}]$. Отсюда в силу (1) $\jmath(a +_G b) \overset{\Sigma_\tau}{\approx} \jmath(a) + \jmath(b)$.

Пусть $a := q(a)a_N + r(a)$ и $b := q(b)a_N + r(b)$, т. е. $q(a) = [a/a_N]$ и $q(b) = [b/a_N]$. Пусть $a + b := q(a + b)a_N + r(a + b)$. Если $q(a + b) = sa_N + r$, то $a + b = sa_N^2 + ra_N + r(a + b)$ и $ra_N + r(a + b) \leq (a_N - 1)a_N + a_N - 1 = a_N^2 - 1$. Таким образом, $a +_G b = \mathrm{rem}((a + b), a_N^2) = ra_N + r(a + b)$, откуда $q(a +_G b) = r$, поэтому $q(a + b) \equiv q(a +_G b) \pmod{a_N}$. Поскольку $a_n \mid a_N$ для всех стандартных n, то $q(a + b) \approx q(a +_G b)$.

Для обоснования соотношения $\jmath(-_G a) \approx \jmath(a)$ нужно лишь представить a в виде $a = qa_N + r$, использовать равенство $-_G a = a_N^2 - a$ и рассмотреть два случая: $r = 0$ и $r \neq 0$.

Для доказательства того, что $(G, \jmath)$ — это гиперприближение группы Σ_τ, остается показать (см. 7.4.1), что для любой пары $(x, \xi) \in \Sigma_\tau$ существует такой $a \in G$, что $\jmath(a) \approx (x, \xi)$. Выберем $r < a_N$ так, чтобы $r/a_N \leq x < (r+1)/a_N$, и положим $q := \mathrm{rem}({}^*x, a_N)$. Тогда $q < a_N$ и мы приходим к требуемому при $a := qa_N + r$. ▷

Согласно 7.5.5 и (1) $\Sigma_\tau \simeq G/G_0$, где

$$G_0 = \big\{a \in G : \{a/a_N\} \approx 0 \wedge [a/a_N] \overset{\Delta_\tau}{\approx} 0 \vee$$
$$\vee \{a/a_N\} \approx 1 \wedge [a/a_N] + 1 \overset{\Delta_\tau}{\approx} 0\big\}.$$

Можно получить более обозримое описание G_0.

(3) *Имеет место представление*

$$G_0 = \{a \in G : (\forall^{\mathrm{st}} n)(\exp(2\pi i a/(a_N a_n))) \approx 1\}.$$

◁ Пусть $\exp(2\pi i a/(a_N a_n)) \approx 1$ для любого стандартного n.

Тогда для любого стандартного n существует такой элемент $k \in \mathbb{Z}$, что $(a/(a_N a_n) \approx k)$. Если $a = qa_N + r$, то $a/(a_N a_n) = (q + r/a_N)/a_n \approx k \in {}^*\mathbb{Z}$. Так как a_n стандартно, то $q + r/a_N \approx ka_n \in {}^*\mathbb{Z}$, где $q \in {}^*\mathbb{Z}$ и $0 \leq r/a_N < 1$, следовательно, возможны лишь два случая $r/a_N \approx 0$ и $r/a_N \approx 1$.

В первом случае $q \approx ka_n$ и $q = ka_n$, поскольку оба этих числа целые. Но тогда $r/a_N \approx 0$ и $q \overset{\Delta_\tau}{\approx} 0$, стало быть, $a \in G_0$. Во втором случае при $q \not\equiv -1 \pmod{a_n}$ будет $q + 1 = ta_n + s$, где $0 < s < a_n$, поэтому $q + r/a_N = s - 1 + ta_n + r/a_N \approx s + ta_n \approx ka_n$. Тем самым приходим к соотношению $s/a_n + t \approx k$, невозможному при $s \neq 0$. Итак, $q \equiv -1 \pmod{a_n}$ и вновь $a \in G_0$.

Наоборот, предположим, что $a \in G_0$ и $a = qa_N + r$. Необходимо рассмотреть два случая: (а) $r/a_N \approx 0$, $q \overset{\Delta_\tau}{\approx} 0$; (б) $r/a_N \approx 1$, $q \overset{\Delta_\tau}{\approx} 0$. В первом случае $\exp(2\pi i a/(a_N a_n)) = \exp(2\pi i(a/a_n + r/(a_N a_n))) = \exp(2\pi i a/(a_N a_n)) \approx 1$, ибо $q/a_n \in {}^*\mathbb{Z}$. Второй случай рассматривается аналогично. ▷

(4) *Пусть τ — стандартная последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ натуральных чисел, причем $a_n > 1$ и $a_n \mid a_{n+1}$. Пусть, далее, $G :=$*

$\{0, 1, \dots, a_N^2 - 1\}$ — аддитивная группа кольца ${}^*\mathbb{Z}/a_N^2\,{}^*\mathbb{Z}$ и $G_0 := \{a \in G : (\forall^{\mathrm{st}} n)(\exp(2\pi i a/(a_N a_n)) \approx 1\}$. Тогда τ-адический соленоид Σ_τ топологически изоморфен группе $G^\# := G/G_0$.

7.5.8. Займемся теперь построением двойственного гиперприближения группы $\widehat{\Sigma}_\tau$. Известно, что $\widehat{\Sigma}_\tau \simeq \mathbb{Q}^{(\tau)} := \{m/a_n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Изоморфизм можно осуществить, сопоставляя каждому $\alpha = m/a_n \in \mathbb{Q}^{(\tau)}$ характер $\varkappa_\alpha \in \widehat{\Sigma}_\tau$ по формуле:

$$\varkappa_\alpha(x, \xi) = \exp(2\pi i \alpha(x + \mathrm{rem}(\xi, a_n))) \quad (x \in [0,1],\ \xi \in \Delta_\tau)$$

(см. [54, 225]). Как и в случае произвольной конечной группы, $\widehat{G} \simeq G$, причем изоморфизм осуществляется сопоставлением каждому $b \in G$ характера χ_b по формуле $\chi_b(a) := \exp(2\pi i ab/a_N^2)$ для всех $a \in G$. В качестве двойственного к гиперприближению группы Σ_τ, построенному в предыдущем пункте, рассмотрим пару $(G, \imath)$, где $\imath : G \to {}^*\mathbb{Q}^{(\tau)}$ определяется формулой $\imath(b) := b/a_N$. Точнее, отображение $\imath : \widehat{G} \to \widehat{\Sigma}_\tau$ каждому $\chi_b \in \widehat{G}$ сопоставляет характер $\varkappa_{b/a_n} \in {}^*\widehat{\Sigma}_\tau$, причем группу G мы представляем в виде наименьших по абсолютной величине наименьших вычетов, т. е. $G = \{-\frac{1}{2}a_N^2, \dots, \frac{1}{2}a_N^2 - 1\}$.

Проверка условий 7.4.1 (1–4) тривиальна. В 7.4.6 (1, 2) вновь нужно лишь проверить второе условие, причем здесь мы даже получим точное равенство. В самом деле, если $a \in G$ и $a := qa_N + r$, то $[a/a_N] = q < a_N$, т. е. $\mathrm{rem}([a/a_N], a_N) = [a/a_N] = q$. Теперь $\varkappa_{\imath(b)}(\jmath(a)) = \exp(2\pi i (b/a_N)(r/a_N + q)) = \exp(2\pi i ab/a_N^2) = \chi_b(a)$.

Пусть $f : \Sigma_\tau \to \mathbb{C}$ — ограниченная функция, непрерывная почти всюду относительно меры Хаара μ_{Σ_τ} причем $\mu_{\Sigma_\tau}(\Sigma_\tau) = 1$. Для любого $N \approx +\infty$ справедливы формулы

$$(1)\quad \int_{\Sigma_\tau} f\, d\mu_\tau = {}^\circ\Big(\frac{1}{a_N^2}\sum_{k=0}^{a_N^2-1} f(\{k/a_N\}, [k/a_N])\Big);$$

$$(2)\quad \sum_{m=-a_N^2/2}^{a_N^2/2-1} \Big| \int_{\Sigma_\tau} f(x,\xi)\exp(-2\pi i(m/a_N)(x + \mathrm{rem}(\xi, a_N)))d\mu_{\Sigma_\tau} - $$
$$-\frac{1}{a_N^2}\sum_{k=0}^{a_N^2-1} f(\{k/a_N\}, [k/a_N])\exp(-2\pi i km/a_N^2)\Big|^2 \approx 0.$$

◁ Следует из 7.4.10 и 7.4.16 (5). ▷

7.5.9. Сейчас мы займемся построением гиперприближения аддитивной группы поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, где p — стандартное простое число.

Пусть фиксированы M и N, причем $M, N, N-M \approx +\infty$. В качестве гиперконечной абелевой группы G рассмотрим аддитивную группу кольца ${}^*\mathbb{Z}/p^N\,{}^*\mathbb{Z}$, которое будем представлять как систему наименьших положительных вычетов $G := \{0, 1, \dots, p^N - 1\}$. Определим также отображение $\jmath : G \to {}^*\mathbb{Q}_p$, полагая $\jmath(n) := n/p^M \in {}^*\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ для $n \in G$.

(1) *Если $n \in G$, то справедлива эквивалентность*

$$\jmath(n) \in \operatorname{nst}({}^*\mathbb{Q}_p) \ \leftrightarrow\ (\exists^{\mathrm{st}} k \in \mathbb{N})\,(p^{M-k} \mid n).$$

Если при этом

$$n = a_{-k}p^{M-k} + a_{-k+1}p^{M-k+1} + \ldots + a_{N-M-1}p^{N-1},$$

где $0 \le a_i < p$, то

$$\widetilde{\jmath}(n) = \operatorname{st}(\jmath(n)) = \sum_{i:=l}^{\infty} a_i p^i.$$

(*Напомним, что* $\widetilde{\jmath} := \operatorname{st} \circ \jmath|_{G_f}$, *см.* 7.4.1.)

$\lhd$ Если $p^{M-k} \mid n$, то n имеет указанный в формулировке вид, поэтому требуемое следует из бесконечности числа $N - M - 1$. Наоборот, предположим, что $np^{-M} \approx \xi \in \mathbb{Q}_p$ и $|\xi|_p = p^k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Так как $|np^{-M} - \xi|_p \approx 0$, то существует бесконечное $b \in {}^*\mathbb{N}$ такое, что $np^{-M} - \xi = p^b\varepsilon_1$, где ε_1 — единица кольца ${}^*\mathbb{Z}_p$. По условию $\xi = p^{-k}\varepsilon_2$, где ε_2 — единица кольца $\mathbb{Z}_p$. Отсюда следует, что $n = p^{M-k}\varepsilon_2 + p^{M+b}\varepsilon_1$. Из стандартности k вытекает $M - k < M + b$ и, значит, $p^{M-k} \mid n$ в ${}^*\mathbb{Z}_p$, но тогда и в $\mathbb{Z}$. $\rhd$

(2) *Пара $(G, \jmath)$ служит гиперприближением аддитивной группы $\mathbb{Q}_p^+$ поля $\mathbb{Q}_p$. Более того,*

$$G_f = \{n \in G : (\exists^{\mathrm{st}} k)(p^{M-k} \mid n)\},$$
$$G_0 = \{n \in G : (\forall^{\mathrm{st}} k)(p^{M+k} \mid n)\}.$$

$\lhd$ Требуемые равенства вытекают из (1). Для обоснования условий 7.4.1 (1–4) достаточно показать, что $\widetilde{\jmath} : G_f \to \mathbb{Q}_p$ — эпиморфизм.

Обозначим символом $\oplus$ групповую операцию в G. Пусть $n = n_1 \oplus n_2$ или, что то же, $n_1 + n_2 = n + tp^M$. Тогда $|n_1 p^{-M} + n_2 p^{-M} - np^{-M}|_p \le p^{N-M}$, следовательно, $\widetilde{\jmath}(n_1 + n_2) = \widetilde{\jmath}(n_1 \oplus n_2)$ ввиду бесконечности $N - M$. Поскольку $\mathrm{st} : \mathrm{nst}\,({}^*\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Q}_p$ — гомоморфизм, то получаем $\widetilde{\jmath}(n_1 + n_2) = \widetilde{\jmath}(n_1) + \widetilde{\jmath}(n_2)$. Тем самым $\widetilde{\jmath}$ — гомоморфизм. Для обоснования сюръективности $\widetilde{\jmath}$ заметим, что если $\xi = \sum_{l=-k}^{\infty} a_l p^l$, то, определив n как в формулировке предложения (1), получим $\jmath(n) \approx \xi$. $\rhd$

(3) *Имеет место изоморфизм топологических групп* $\mathbb{Q}_p^+ \simeq G_f/G_0 = G^\#$.

Пусть $G^{(0)} := \{n \in G : p^M \mid n\}$. Тогда $G^{(0)}$ — внутренняя подгруппа группы G такая, что $G_0 \subset G^{(0)} \subset G_f$. Так как $|G^{(0)}| = p^{N-M}$, то число $\Delta := p^{M-N}$ можно взять в качестве нормирующего множителя тройки (G, G_0, G_f).

(4) *Имеет место равенство* $\widetilde{\jmath}(G^{(0)}) = \mathbb{Z}_p$. *Более того, нормирующий множитель* $\Delta = p^{M-N}$ *индуцирует на* $\mathbb{Q}_p$ *меру Хаара* $\overline{\mu}_\Delta$, *для которой* $\overline{\mu}_\Delta(\mathbb{Z}_p) = 1$ (*эту меру ниже обозначаем символом* μ_p).

7.5.10. Выведем теперь стандартный эквивалент условия существования $\mathscr{S}_{1,\Delta}$-интегрируемого лифтинга из 7.4.8.

(1) *Функция* $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ *удовлетворяет условию* (*см.* 7.4.8)

$$(\forall B \in {}^*\mathscr{P}(G)) \left(B \subset G - G_f \ \to \ \Delta \sum_{g \in G} |{}^*f(\jmath(g))| \approx 0 \right)$$

в том и только в том случае, если

$$\lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{p^n} \sum_{\substack{0 \le k < p^{m+n+l} \\ p^l \nmid k}} |f(k/p^{m+l})| = 0$$

равномерно по l.

$\lhd$ Если $B \subset G - G_f$, то для каждого $n \in B$ и для каждого стандартного k будет $p^{M-k} \nmid L$. Это равносильно условию $p^{M-L} \nmid n$ для некоторого бесконечного L. Таким образом, $B \subset G - B_f$ в том и только в том случае, когда $B \subset B_L := \{n : p^{M-L} \nmid n\}$. Как видно, B_L — внутреннее множество для любого бесконечного L. Следовательно, условие предложения можно переформулировать следующим образом: для любых бесконечных $L < M < N$ таких, что $N - M$ также бесконечно, выполняется

$$\frac{1}{p^{N-M}} \sum_{\substack{0 \le k < p^N \\ p^{M-L} \nmid k}} |{}^*f(k/p^M)| \approx 0.$$

Обозначив $n := N - M$, $m := L$ и $l := M - L$, мы приходим к утверждению о том, что для любых бесконечных m и n и для любого l верно

$$\frac{1}{p^n} \sum_{\substack{0 \le k < p^{m+n+l} \\ p^l \nmid k}} |{}^*f(k/p^{m+l})| \approx 0.$$

Последнее равносильно требуемому. $\rhd$

(2) *Если ограниченная и непрерывная почти всюду относительно меры Хаара функция $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ удовлетворяет заключению предложения* (1), *то f интегрируема и*

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} f \, d\mu_p = {}^\circ\!\left(\frac{1}{p^{N-M}} \sum_{0 \le k < p^N} {}^*f(k/p^M)\right),$$

или же в стандартных терминах

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} f \, d\mu_p = \lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{p^n} \sum_{0 \le k < p^{m+n}} {}^*f(k/p^m).$$

7.5.11. Займемся теперь двойственным гиперприближением $\widehat{\mathbb{Q}}_p^+$. Напомним, что $\widehat{\mathbb{Q}}_p^+ \simeq \mathbb{Q}_p^+$. Изоморфизм осуществляется сопоставлением каждому $\xi \in \mathbb{Q}_p^+$ характера $\varkappa_\xi(\eta) := \exp(2\pi i \{\xi\eta\})$, где $\{\zeta\}$ — дробная часть p-адического числа ζ. Отождествляя $\widehat{\mathbb{Q}}_p^+$ и $\mathbb{Q}_p^+$ указанным способом, рассмотрим гиперприближение $(G, \widehat{\jmath})$ группы $\mathbb{Q}_p$, определяемое формулой $\widehat{\jmath}(n) := n/p^{N-M}$ для $n \in G$.

(1) *Пара $(G, \widehat{\jmath})$ служит гиперприближением группы $\widehat{\mathbb{Q}}_p^+$, двойственным к $(G, \jmath)$.*

◁ Из 7.5.9 (2) видно, что $(G, \widehat{\jmath})$ — действительно гиперприближение. Проверим, что $(G, \widehat{\jmath})$ двойственно к $(G, \jmath)$ (см. 7.4.6). Условие 7.4.6 (2) проверяется просто:

$$\varkappa_{\jmath(m)}(\widehat{\jmath}(n)) = \exp(2\pi i\{\widehat{\jmath}(n)\jmath(m)\}) = \exp(2\pi i\{nm/p^N\}) =$$
$$= \exp(2\pi i nm/p^N) = \chi_m(n).$$

Для обоснования условия 7.4.6 (1) достаточно показать справедливость формулы

$$(\forall m)(((\exists^{\mathrm{st}} k)(p^{M-k} \mid m) \to \exp(2\pi i mn/p^N) \approx 1) \to$$
$$\to (\forall^{\mathrm{st}} k)\,(p^{N-M+k} \mid n)).$$

Если эта формула неверна, то существует k, для которого выполнены соотношения $n = qp^{N-M+k} + r$ и $0 < r < p^{N-M+k}$. Возможны два случая.

(1): $^\circ(r/p^{N-M+k}) = 0$. Пусть $a := [p^{N-M+k}/(2r)]$ и $m := ap^{M-k}$ (очевидно, $m < p^N$). Тогда

$$\exp(2\pi i mn/p^N) =$$
$$= \exp(2\pi i[p^{N-M+k}/(2r)](r/p^{N-M+k})) \approx \exp(\pi i) = -1,$$

что невозможно.

(2): $^\circ(r/p^{N-M+k}) = \alpha$, $0 < \alpha \le 1$. Полагая $m := p^{M-k-1}$, выводим, что $\exp(2\pi i mn/p^N) \approx \exp(2\pi i\alpha/p) \ne 1$, и получаем противоречие. ▷

(2) *Рассмотрим преобразование Фурье* $\mathscr{F} : L_2(\mathbb{Q}_p) \to L_2(\mathbb{Q}_p)$, *где*

$$\mathscr{F}(f)(\xi) := \int\limits_{\mathbb{Q}_p} f(\eta)\exp(-2\pi i\{\xi\eta\})\,d\mu_p(\eta).$$

Пусть $f \in L_2(\mathbb{Q}_p)$ *такова, что* $|f|^2$ *и* $|\mathscr{F}(f)|^2$ *ограничены, непрерывны почти всюду и удовлетворяют условию из* 7.5.10 (1). *Тогда*

$$\frac{1}{p^M}\sum_{k=0}^{p^N-1}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{Q}_p} f(\eta)\exp(-2\pi i\{\eta k/p^{N-M}\})\,d\mu_p(\eta) -$$
$$-\frac{1}{p^{N-M}}\sum_{n=0}^{p^N-1} f(n/p^M)\exp(-2\pi i kn/p^N)\Bigg|^2 \approx 0,$$

если только $N, M, N-M \approx +\infty$.

◁ Следует из 7.4.10 и 7.4.16 (5). ▷

7.5.12. Обобщением поля p-адических чисел служит кольцо $\mathbb{Q}_\alpha$ α-адических чисел, где $\alpha = \{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$ — двусторонняя бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что $a_n \mid a_{n+1}$ при $n \geq 0$ и $a_{n+1} \mid a_n$ при $n < 0$. Кольцо $\mathbb{Q}_\alpha$ детально рассмотрено в [54, глава 2, § 3.7]. В [225] показано, что группа $\widehat{\mathbb{Q}}_\alpha^+$ изоморфна $\mathbb{Q}_{\widehat{\alpha}}^+$, где $\widehat{\alpha}(n) := \alpha(-n)$.

Пусть $M, N \approx +\infty$, а $G := \{0, 1, \dots, {}^*a_M {}^*a_N - 1\}$ — аддитивная группа кольца ${}^*\mathbb{Z}/{}^*(a_M a_N){}^*\mathbb{Z}$. Предположим, что отображения $\jmath : G \to \mathbb{Q}_\alpha^+$ и $\widehat{\jmath} : G \to \mathbb{Q}_{\widehat{\alpha}}^+$ определены формулами $\jmath(a) := a a_{-M}^{-1}$ и $\widehat{\jmath}(a) := a a_N^{-1}$ для $a \in G$.

Тогда пара $(G, \jmath)$ будет гиперприближением группы $\mathbb{Q}_\alpha^+$, а пара $(\widehat{G}, \widehat{\jmath})$ — двойственным гиперприближением группы $\mathbb{Q}_{\widehat{\alpha}}^+$. Более того,

$$
\begin{aligned}
G_f &:= \{a \in G : (\exists^{\mathrm{st}} k \in \mathbb{Z})(a_{-M} a_k^{\operatorname{sgn} k} \mid a)\}, \\
G_0 &:= \{a \in G : (\forall^{\mathrm{st}} k \in \mathbb{Z})(a_{-M} a_k^{\operatorname{sgn} k} \mid a)\},
\end{aligned}
$$

причем $\Delta = a_N^{-1}$ — нормирующий множитель тройки (G, G_0, G_f). Аналогичные соотношения верны и для $\widehat{G}_f$, $\widehat{G}_0$, и для нормирующего множителя $\widehat{\Delta} = a_{-M}^{-1}$ тройки $(G, \widehat{G}_0, \widehat{G}_f)$.

$\lhd$ Доказательство повторяет рассуждения из 7.5.9–7.5.11. $\rhd$

7.5.13. Примечания.

(1) Гиперприближение на единичной окружности (см. 7.5.2) весьма подробно изучалось Люксембургом в [415], однако само понятие гиперприближения не было введено. В [415] получено, в частности, предложение 7.5.2 (2) для непрерывных функций. В этой же работе имеется много интересных приложений инфинитезимального анализа к теории рядов Фурье. Однако возможности разработанного там подхода были ограничены отсутствием теории меры Лёба, а также тем, что свойство насыщения моделей в то время мало использовалось в инфинитезимальном анализе.

(2) Предложения 7.5.3 (1, 2) остаются в силе и в том случае, когда K_n — кольцо. В этом случае K и G также будут кольцами, а отображение из G в ${}^*K$ будет «почти гомоморфизмом», т. е. помимо уже доказанных свойств справедливо равенство $\jmath(ab) \approx \jmath(a)\jmath(b)$ для всех a, b. Более того, объект G_0, определенный в 7.5.3 (2), будет двусторонним идеалом.

(3) Предложение 7.4.8 показывает, что для функции f, удовлетворяющей условиям 7.5.6 (1), будет

$$\int\limits_{\Delta_\tau} f(\xi)\, d\mu_\tau(\xi) = {}^\circ\!\left(\frac{1}{a_N} \sum_{n=0}^{{}^*a_N-1} {}^*f(n)\right),$$

что эквивалентно стандартному равенству

$$\int\limits_{\Delta_\tau} f(\xi)\, d\mu_\tau(\xi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{a_N} \sum_{n=0}^{a_N-1} f(n).$$

(4) Для непрерывной функции имеет место более сильное равенство

$$\int\limits_{\Delta_\tau} f(\xi)\, d\mu_\tau(\xi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n).$$

Это следует из строгой эргодичности сдвига на 1 в Δ_τ, которая следует, в свою очередь, из того, что $\chi(1) \neq 1$ для любого нетривиального характера $\chi \in \widetilde{\Delta}_\tau$ (см. [99, глава 4, § 1, теорема 1]).

Для последовательности $\tau := \{(n+1)! : n \in \mathbb{N}\}$ указанное равенство было получено ранее в работах по аналитической теории чисел для несколько более широкого класса функций, включающего все функции из 7.5.6 (1) (см., например, [195]). Этот результат показывает, что условия ограниченности и непрерывности почти всюду не являются необходимыми для функции f, чтобы ${}^*f \circ \jmath$ была лифтингом f (здесь f определена на компактной абелевой группе $\mathfrak{G}$ и $(G, \jmath)$ — гиперприближение группы $\mathfrak{G}$).

(5) Если в качестве τ взять последовательность $(p^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, то Δ_τ — кольцо $\mathbb{Z}_p$ p-адических целых. Следовательно (см. 7.5.5), $\mathbb{Z}_p \simeq K_p/K_{p_0}$, где

$$K_p := {}^*\mathbb{Z}/p^{N\,*}\mathbb{Z},$$
$$K_{p_0} := \{a \in K_p : (\forall^{\mathrm{st}} n)(p^n \mid a)\},$$

а $N \approx +\infty$ — некоторое бесконечно большое натуральное число.

(6) Весьма важную роль в теории чисел играет кольцо

$$\Delta := \Delta_{\{(n+1)!\ :\ n\in\mathbb{N}\}},$$

которое иногда называют *кольцом полиадических целых.* Из 7.5.5 вытекает, что $\Delta \simeq K/K_0$, где

$$K := {}^*\mathbb{Z}/N!{}^*\mathbb{Z},$$
$$K_0 := \{a \in K : (\forall^{\mathrm{st}} n)(n \mid a)\}$$

и $N \approx +\infty$.

Используя гиперприближение, можно дать простое доказательство того, что $\Delta \simeq \prod_{p\in P} \mathbb{Z}_p$, где P — множество всех простых чисел (см. [325]).

(7) Легко видеть, что, в отличие от случая $\mathbb{Z}_p$, отображение, построенное в 7.5.11, не приближает умножение в $\mathbb{Q}_p$.

Действительно, пусть $m, n \in G$ представимы в виде $m := p^{M-1}$ и $n := p^{M+1}$. Тогда $\jmath(m) = p^{-1}$ и $\jmath(n) = p$ и, значит, $\jmath(m)\jmath(n) = 1$. Возможны два случая. Если $2M \leq N$, то $\jmath(mn) = p^M \approx 0$. Если же $2M > N$, то, поскольку речь идет об умножении в $\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}$, получим $mn = p^{M-(N-M)}$. Поэтому $mn \notin G_f$, ибо $N - M$ является бесконечно большим числом.

Аналогично доказывается, что ни при каком Δ гиперприближение аддитивной группы поля $\mathbb{R}$ из 7.5.1 не будет приближать умножение в $\mathbb{R}$.

(8) А. М. Вершик и Е. И. Гордон [26] доказали аппроксимируемость нильпотентных групп Ли, алгебры Ли которых допускают базис с рациональными структурными константами, и подробно изучили класс дискретных групп, аппроксимируемых конечными группами.

В [26] поставлен также вопрос об аппроксимируемости простых классических групп Ли, в частности, группы $SO(3)$. Отрицательный ответ на этот вопрос получили М. А. Алексеев, Л. Ю. Глебский и Е. И. Гордон в работе [4], где доказано, что компактная группа Ли G аппроксимируема конечными группами в том и только в том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная подгруппа H группы G, которая служит ε-сетью в G относительно какой-нибудь метрики, определяющей топологию G. В [4] также дано дано определение аппроксимируемости коммутативных нормируемых алгебр Хопфа конечномерными биалгебрами и доказано, что компактная группа приближается конечными группами в том и только в том случае, если ее коммутативная алгебра Хопфа приближается конечномерными коммутативными алгебрами Хопфа.

7.6. Дискретное приближение функциональных пространств на локально компактной абелевой группе

Используя результаты параграфа 7.4, можно осуществить дискретное приближение функционального гильбертова пространства на локально компактной абелевой группе.

Всюду ниже основная локально компактная группа обозначается буквой G, а двойственная группа — символом $\widehat{G}$.

7.6.1. Пусть ρ — некоторая (лево)инвариантная метрика на G. В этом случае определение приближающей последовательности из 7.4.11 имеет следующий вид.

Последовательность $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ конечных групп G_n и отображений $\jmath_n : G_n \to G$ называют *приближающей* для G, если для любого $\varepsilon > 0$ и произвольного компакта $K \subset G$ существует $N > 0$ такой, что для всех $n > N$ выполнены условия:

(1) $\jmath_n(G_n)$ представляет собой ε-сеть для K;

(2) если $\circ_n$ — умножение в G_n, то $\rho(\jmath_n(g_1 \circ_n g_2^{\pm 1}), \jmath_n(g_1) \cdot \jmath_n(g_2)^{\pm 1}) < \varepsilon$ для любых $g_1, g_2 \in \jmath_n^{-1}(K)$;

(3) $\jmath_n(e_n) = e$, где e_n и e — единицы в группах G_n и G соответственно.

Локально компактную группу, которая обладает приближающей последовательностью, называют *аппроксимируемой.*

Напомним, если μ — мера Хаара на G, а $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность для G, то любая ограниченная μ-почти всюду непрерывная быстро убывающая функция $f : G \to \mathbb{C}$ суммируема и имеет место равенство

$$\int\limits_G f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \Delta_n \sum_{g\in G_n} f(\jmath_n(g)),$$

где $\Delta_n := \frac{\mu(U)}{|\jmath_n^{-1}(U)|}$ (см. предложение 7.4.13 (1), в котором выбрана такая компактная окрестность нуля U, что $\mu(U) = 1$). Последовательность чисел (Δ_n) будем называть *нормирующим множителем* приближающей последовательности $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

В качестве нормирующего множителя можно взять любую другую последовательность (Δ'_n), эквивалентную (Δ_n). Для компактной группы G полагаем $\Delta_n := |G_n|^{-1}$, а для дискретной группы G считаем, что $\Delta_n := 1$.

Рассмотрим двойственную пару приближающих последовательностей $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ и $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ для группы G, см. 7.4.14. Если (Δ_n) — нормирующий множитель для $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (относительно μ), то $(\widehat{\Delta}_n)$, где $\widehat{\Delta}_n := (|G_n| \cdot \Delta_n)^{-1}$, — нормирующий множитель для $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (относительно меры Хаара $\widehat{\mu}$). Заметим, что для конечной абелевой группы G_n двойственная группа $\widehat{G}_n$ изоморфна G_n, поэтому $|G_n| = |\widehat{G}_n|$.

Преобразование Фурье $\mathscr{F}_n : L_2(G_n) \to L_2(\widehat{G}_n)$ вводится формулой

$$\mathscr{F}_n(\varphi)(\chi) := \Delta_n \cdot \sum_{g\in G_n} \varphi(g)\overline{\chi(g)},$$

а обратное преобразование Фурье $\mathscr{F}_n^{-1}$ имеет вид

$$\mathscr{F}_n^{-1}(\psi)(g) = \widehat{\Delta}_n \cdot \sum_{\chi\in\widehat{G}_n} \psi(\chi)\chi(g).$$

Для преобразования Фурье функции f мы будем использовать также символ $\widehat{f}$.

Для $p \geq 1$ обозначим через $\mathscr{S}_p(G)$ пространство функций $f : G \to \mathbb{C}$ таких, что функция $|f|^p$ ограничена, μ-почти всюду непрерывна и быстро убывает. Для $f \in \mathscr{S}_2(G)$ положим $T_n f := f \circ \jmath_n : G_n \to \mathscr{C}$ и $\widehat{T}_n \widehat{f} := \widehat{f} \circ \widehat{\jmath}_n : \widehat{G}_n \to \mathscr{C}$. (Итак, $T_n f$ — таблица значений функции f в точках $\jmath_n(G_n)$, а $\widehat{T}_n \widehat{f}$ — таблица значений функции $\widehat{f}$ в точках $\widehat{\jmath}_n(\widehat{G}_n)$.) Тогда согласно 7.4.15 имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\Delta}_n \cdot \sum_{\chi\in\widehat{G}_n} |\widehat{T}_n \widehat{f}(\chi) - \mathscr{F}_n(T_n f)(\chi)|^2 = 0.$$

7.6.2. Ниже под $L_p(G_n)$ и $L_p(\widehat{G}_n)$ мы понимаем пространства $\mathbb{C}^{G_n}$ и $\mathbb{C}^{\widehat{G}_n}$, снабженные соответственно нормами

$$\|\varphi\|_n^{(p)} := \left(\Delta_n \sum_{g\in G_n} |\varphi(g)|^p\right)^{1/p}, \quad \|\psi\|_n^{(p)} := \left(\widehat{\Delta}_n \sum_{\chi\in\widehat{G}_n} |\psi(\chi)|^p\right)^{1/p}.$$

При $p = 2$ эти пространства обозначаются через X_n и $\widehat{X}_n$, причем нижний индекс у норм опускается. Аналогично, полагаем $X := L_2(G)$ и $\widehat{X} := L_2(\widehat{G})$.

Наконец, пусть Y (соответственно $\widehat{Y}$) — некоторое плотное в X подпространство $\mathscr{S}_2(G)$ (соответственно плотное в $\widehat{X}$ подпространство $\mathscr{S}_2(\widehat{G})$). При этом всегда имеется в виду фиксированная двойственная пара приближающих последовательностей $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ и $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Последовательности $((L_p(G_n), T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $((L_p(\widehat{G}_n), \widehat{T}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *служат дискретными приближениями пространств* $L_p(\mu)$ *и* $L_p(\widehat{\mu})$ *соответственно.*

$\lhd$ Этот факт следует непосредственно из 7.4.10 и 7.4.13 (2). $\rhd$

7.6.3. Далее мы ограничимся рассмотрением групп с компактной и открытой подгруппой. Начнем с дискретной группы G. В этом случае $X = l_2(G)$ и определение приближающей последовательности существенно упрощается.

Если G *— дискретная группа и* $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *— приближающая последовательность* (см. 7.4.11 и 7.4.12), *то имеют место утверждения:*

(1) $\varinjlim \jmath_n(G_n) = G$;

(2) $(\forall a, b \in G)(\exists n_0 \in \mathscr{N})(\forall n > n_0)(\forall g, h \in G_n)$
$(\jmath_n(g) = a,\ \jmath_n(h) = b \to \jmath_n(g \circ_n h^{\pm 1}) = a \cdot b^{\pm 1})$;

(3) $\jmath_n(e_n) = e$.

Так как для дискретной группы интеграл по мере Хаара совпадает с суммой значений функций, то можно написать условие суммируемости

(4) $(\forall f \in l_1(G))(\forall \varepsilon > 0)(\exists^{\mathrm{fin}} K \subset G)\Big(\sum\limits_{\xi \in G-K} |f(\xi)| < \varepsilon\Big)$.

Из (1) без труда выводится, что имеет место утверждение

(5) $(\forall^{\mathrm{fin}} K \subset G)(\exists n_0 \in \mathscr{N})(\forall n > n_0)(\jmath_n(G_n)) \supset K$.

Подмножество дискретной группы компактно лишь в том случае, когда оно конечно, следовательно, для нормирующего множителя будет $\Delta_n = 1$. Из (4) и (5) видно, что всякая суммируемая функция является быстро убывающей. Тем самым $Y = X$, значит, дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ будет сильным. Нетрудно построить сохраняющее норму вложение $\imath_n : X_n \to X$, служащее правым обратным к T_n и удовлетворяющее условию

$$\sup_n \sup_{\|z\|=1} (\inf\{\|x\|_n : T_n x = z\}) < +\infty.$$

В самом деле, такое вложение можно определить формулой

$$\imath_n(\varphi)(\xi) := \begin{cases} \varphi(g), & \xi = \jmath_n(g), \\ 0, & \xi \notin \jmath_n(G_n). \end{cases}$$

7.6.4. Рассмотрим теперь общий случай локально компактной абелевой группы G с компактной и открытой подгруппой K. Положим $L := G/K$. Тогда L — дискретная группа и $\widehat{L} \subset \widehat{G}$, ибо $\widehat{L} = \{p \in \widehat{G} : p|_K = 1\}$. Пусть μ — мера Хаара на G такая, что $\mu(K) = 1$. Тогда двойственная мера Хаара $\widehat{\mu}$ на $\widehat{G}$ удовлетворяет условию $\widehat{\mu}(\widehat{L}) = 1$. Дискретная группа $\widehat{K}$ изоморфна $\widehat{G}/\widehat{L}$. Пусть $\{a_l : l \in L\}$ — полная система попарно различных представителей смежных классов из G/K и $\{p_h : h \in \widehat{K}\}$ — полная система попарно различных представителей смежных классов из $\widehat{G}/\widehat{L}$. Заметим, что $p_h(k) = h(k)$ при $k \in K$.

(1) Если $a \in G$ и $p \in \widehat{G}$, то существует единственная четверка элементов $l \in L$, $k \in K$, $h \in \widehat{K}$ и $s \in \widehat{L}$ такая, что

$$a = a_l + k, \quad p = p_h + s, \quad p(a) = p_h(a_l) \cdot s(l) \cdot h(k).$$

Пусть $\varphi \in L_2(G)$ и $l \in L$. Обозначим символом φ_l такую функцию из $L_2(K)$, что $\varphi_l(k) = \varphi(a_l + k)$. Тогда, очевидно, $\|\varphi\|^2 = \sum_{l \in L} \|\varphi_l\|^2$. Используя преобразование Фурье на компактной группе K, приходим к представлению $\varphi_l(k) = \sum_{h \in \widehat{K}} c_{lh} h(k)$. Соответствие $\varphi \leftrightarrow (c_{lh})_{l \in L, h \in \widehat{K}}$, обозначаемое ниже символом $\imath$, является унитарным изоморфизмом гильбертовых пространств $L_2(G)$ и $l_2(L \times \widehat{K})$, где

$$l_2(L \times \widehat{K}) := \Big\{ (c_{lh})_{l \in L, h \in \widehat{K}} : \sum_{l \in L, h \in \widehat{K}} |c_{lh}|^2 < +\infty \Big\}.$$

Понятно, что изоморфизм $\imath$ зависит от выбора системы представителей $\{a_l : l \in L\}$ для G/K.

Аналогично, для любых функции $\psi \in L_2(\widehat{G})$ и характера $h \in \widehat{K}$ определим функцию $\psi_h \in L_2(\widehat{L})$ соотношением $\psi_h(s) := \psi(p_h + s)$. Тогда $\psi_h(s) = \sum_{l \in L} d_{lh} s(l)$ и соответствие $\psi \leftrightarrow (d_{lh})_{l \in L, h \in \widehat{K}}$, обозначаемое символом $\widehat{\imath}$, вновь будет унитарным изоморфизмом гильбертовых пространств $L_2(\widehat{L})$ и $l_2(L \times \widehat{K})$. И опять этот изоморфизм зависит от выбора полной системы представителей смежных классов $\{p_h : h \in \widehat{K}\}$ из $\widehat{G}/\widehat{L}$. Итак, для $\psi \in L_2(\widehat{G})$ имеет место представление

$$\psi(p_h + s) = \sum_{l \in L} d_{hl} s(l).$$

Рассмотрим $\varphi \in L_2(G)$ и в преобразование Фурье

$$\widehat{\varphi}(p) = \int\limits_G \varphi(g)\overline{p(g)}\, d\mu(g)$$

подставим отмеченное в 7.6.4 (1) выражение для $p(a)$. Тогда

$$\widehat{\varphi}(p_h + s) = \sum_{l \in L} \int\limits_K \varphi_l(k)\overline{p_h(a_l) \cdot s(l) \cdot h(k)}\, d\mu(k).$$

Учитывая равенства $\int\limits_K \varphi_l(k)\overline{h(k)}\, d\mu(k) = c_{lh}$ и $\overline{s(l)} = s(-l)$, отсюда получаем

$$\widehat{\varphi}(p_h + s) = \sum_{l \in L} \overline{p_h(a_{-l})} c_{-lh} s(l).$$

Сравнивая эту формулу с полученным выше представлением для $\psi(p_h + s)$, приходим к следующему заключению.

(2) *Преобразование Фурье $\mathscr{F} : L_2(G) \to L_2(\widehat{G})$ эквивалентно унитарному оператору в $l_2(L \times \widehat{K})$, определяемому матрицей*

$$f(h, l, h', l') = \overline{p_{h'}(l')} \cdot \delta_{h,h'} \delta_{-l,l'}.$$

Обозначим символом D_{test} подпространство функций $\varphi \in L_2(G)$ таких, что φ и $\widehat{\varphi}$ имеют компактные носители, и пусть $\widehat{D}_{test}$ — подпространство $L_2(\widehat{G})$, определяемое тем же самым условием. Очевидно, что $\mathscr{F}(D_{test}) = \widehat{D}_{test}$.

7.6.5. *Пусть $\varphi \in L_2(G), \imath(f) = (c_{lh})_{l \in L, h \in \widehat{K}}$ и $\widehat{\imath}(\widehat{f}) = (d_{lh})_{l \in L, h \in \widehat{K}}$. Тогда $\varphi \in D_{test}$ в том и только в том случае, если существуют конечные множества $A \subset L$ и $B \subset \widehat{K}$, для которых $c_{lh} = 0$ при $(l, h) \notin A \times B$. В этом случае существуют также конечные множества $R \subset L$ и $S \subset \widehat{K}$ такие, что $d_{lh} = 0$ при $(l, h) \notin R \times S$.*

$\lhd$ Это утверждение следует из того, что матрица $f(h,l,h',l')$ имеет лишь по одному ненулевому элементу в каждой строке и каждом столбце. $\rhd$

Пусть $((G_n,\jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ и $((\widehat{G}_n,\widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — двойственная пара приближающих последовательностей для G.

7.6.6. *Существует такой номер $n_0\in\mathbb{N}$, что для всех $n>n_0$ множества $K_n:=\jmath_n^{-1}(K)$ и $\widehat{L}_n:=\widehat{\jmath}_n^{-1}(\widehat{L})$ — подгруппы групп G_n и $\widehat{G}_n$ соответственно, последовательности $((K_n,\jmath_n|_{K_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ и $((\widehat{L}_n,\widehat{\jmath}_n|_{\widehat{L}_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающие последовательности для K и $\widehat{L}$ соответственно и $\widehat{L}_n$ — двойственная группа для $L_n:=G_n/K_n$.*

$\lhd$ Возьмем фиксированное число $N\approx+\infty$. Нужно доказать, что $K_N:=\jmath_N^{-1}({}^*K)$ — подгруппа группы G_N. Пусть $\jmath_N(a)\in{}^*K$ и $\jmath_N(b)\in{}^*K$. Тогда $\jmath_N(a\pm b)\approx\jmath_N(a)\pm\jmath_N(b)\in{}^*K$, значит, $\jmath_N(a\pm b)\in{}^*K$, так как K — компактная и открытая подгруппа. Тем самым K_N — подгруппа и, далее, $(K_N,\jmath_N|_{K_N})$ очевидным образом удовлетворяет условиям 7.4.1 (1,2). Это доказывает, что $((K_n,\jmath_n|_{K_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность для K, см. 7.4.11. Доказательство для двойственной приближающей последовательности аналогично.

Остается показать, что группа $\widehat{L}_N$ двойственна к $L_N:=G_N/K_N$. Это означает справедливость эквивалентности

$$\widehat{\jmath}_N(\kappa)\in{}^*\widehat{L}\leftrightarrow\kappa|_{K_N}\equiv 1$$

для всех $\kappa\in\widehat{G}_N$. Если $\widehat{\jmath}_N(\kappa)\in{}^*\widehat{L}$, то $\widehat{\jmath}_N(\kappa)|_{{}^*K}\equiv 1$. Отсюда $1=\widehat{\jmath}_N(\kappa)(\jmath_N(g))\approx\kappa(g)$ при $g\in K_N$. Заметим, что κ и g околостандартны ввиду компактности $\widehat{L}$ и K. Итак, $\kappa|_{K_N}\approx 1$ и согласно 7.2.11 (1) $\kappa|_{K_N}\equiv 1$.

Пусть теперь $\kappa|_{K_N}\equiv 1$. Тогда $\kappa(g)=1$ для всех $g\in G_N$, удовлетворяющих условию $\jmath_N(g)\approx 0$. Отсюда, так же как и в доказательстве 7.4.10, выводим $\widehat{\jmath}_N(\kappa)\in\operatorname{nst}{}^*\widehat{G}$. Пусть $k\in{}^*K$. Тогда существует $g\in K_N$ такой, что $\jmath_N(g)\approx k$. Таким образом, $\widehat{\jmath}_N(\kappa)(k)\approx\widehat{\jmath}_N(\kappa)(\jmath_N(g))\approx\kappa(g)=1$. Следовательно, $\jmath_N(\kappa)|_{{}^*K}\approx 1$. Так как группа $\widehat{K}$ дискретна, то $\jmath_N(\kappa)|_{{}^*K}\equiv 1$. $\rhd$

7.6.7. Всюду ниже K_n и $\widehat{L}_n$ — подгруппы соответственно групп G_n и $\widehat{G}_n$ для каждого $n\in\mathbb{N}$. Скажем, что приближающая последовательность $((L_n, \jmath'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ дискретной группы L *совместима* с приближающей последовательностью $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$, если для любого конечного множества $B \subset L$ существует такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любых $n > n_0$, $\lambda \in L_n$ из $\jmath'_n(\lambda) = l \in B$ вытекает $\jmath_n^{-1}(l) = \lambda$.

Можно дать следующее эквивалентное определение.

Приближающая последовательность $((L_n, \jmath'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ для дискретной группы L совместима с приближающей последовательностью $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ в том и только в том случае, если для любого $N \approx +\infty$ и для любого стандартного $l \in L$ выполняется эквивалентность $\jmath'_N(\lambda) = l \leftrightarrow \jmath_N^{-1}(l) = \lambda$ при всех $\lambda \in L_N$.

Приближающая последовательность $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ группы $\widehat{G}$ является двойственной к некоторой приближающей последовательности $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ группы G в том и только в том случае, если для любого $N \approx +\infty$ выполнены условия:

(1) *если $\chi \in \widehat{G}_N$ обладает тем свойством, что $\chi(g) \approx 1$ для всех $g \in \jmath_n^{-1}(\mathrm{nst}\ {}^*G)$, то $\widehat{\jmath}_N(\chi) \approx 0$;*

(2) *если $\jmath_N(g) \in \mathrm{nst}\ {}^*G$ и $\widehat{\jmath}_N(\chi) \in \mathrm{nst}\ {}^*\widehat{G}$, то $\widehat{\jmath}_N(\chi)(\jmath_N(g)) \approx \chi(g)$.*

$\lhd$ Это следует непосредственно из 7.4.6 и 7.4.11. $\rhd$

7.6.8. *Приближающая последовательность $((L_n, \jmath'_n))_{n\in\mathbb{N}}$, двойственная к приближающей последовательности $((\widehat{L}_n, \widehat{\jmath}_n|_{\widehat{L}_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ для группы $\widehat{L}$, совместима с $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$.*

Аппроксимирующая последовательность $((\widehat{K}_n, \widehat{\jmath}'_n))_{n\in\mathbb{N}}$, двойственная к приближающей последовательности $((K_n, \jmath_n|_{K_n}))_{n\in\mathbb{N}}$, совместима с приближающей последовательностью $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (напомним, что $\widehat{K}_n := \widehat{G}_n/\widehat{L}_n$).

$\lhd$ Возьмем $\lambda \in L_N$ и $\jmath'_N(\lambda) = l \in L$. По определению двойственной приближающей последовательности из 7.6.7 $\widehat{\jmath}_N(\kappa)(l) \approx \kappa(\lambda)$ при $\kappa \in \widehat{L}_N$. Нужно доказать соотношение $\jmath_N^{-1}(l) = \lambda$. Заметим, что существует лишь один элемент $\lambda' \in G_N$, для которого $\jmath_N(\lambda') = l$. В самом деле, если $\jmath_N(\lambda') = \jmath_N(\lambda'') = l$, то $\jmath_N(a-b) \approx \jmath_N(a) - \jmath_N(b) \in {}^*K$ для $a \in \lambda'$ и $b \in \lambda''$. Так как K — компактная и открытая подгруппа, то $\jmath_N(a-b) \in K$, следовательно, $a - b \in K_N$ и $\lambda' = \lambda''$. Как видно, $\kappa(\lambda) \approx \kappa(\lambda')$ для всех $\kappa \in \widehat{L}_N$ и так же, как и в доказательстве теоремы 7.4.10, получаем равенство $\lambda' = \lambda$. $\rhd$

7.6.9. *Пусть $\{a_l : l \in L\}$ — полная система попарно различных представителей смежных классов фактор-группы G/K. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и конечного множества $B \subset L$ при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ существует полная система $\{\alpha_\lambda : \lambda \in L_n\}$ попарно различных представителей смежных классов фактор-группы G_n/K_n такая, что $\rho(a_{\jmath'_n(\lambda)}, \alpha_\lambda) < \varepsilon$ для всех $\lambda \in {\jmath'}_n^{-1}(B)$. Здесь $((L_n, \jmath'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность для L, совместимая с $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$.*

$\lhd$ Ясно, что данное предложение имеет следующую нестандартную формулировку.

Пусть $\{a_l : l \in L\}$ — полная система попарно различных представителей смежных классов фактор-группы G/K. Тогда для каждого $N \approx +\infty$ существует полная система $\{\alpha_\lambda : \lambda \in L_N\}$ из попарно различных представителей смежных классов фактор-группы G_N/K_N и такая, что $\jmath_N(\alpha_\lambda) \approx a_l$ для всех $\lambda \in {\jmath'}_N^{-1}(L)$, где ${\jmath'}_N(\lambda) = l$.

Пусть $R := \jmath_N^{-1}({}^*\{a_l : l \in L\}) \subset G_N$. Определим внутреннее отношение эквивалентности $\sim$ на R формулой $g \sim h \leftrightarrow g - h \in K_N$ и положим $R' := R/\sim$. Введем также внутреннее множество $S \subset R'$ так, что $S := \{r \in R' : |r| = 1\}$ и положим $S' := \bigcup S$. Тогда $\jmath_N^{-1}(a_l) \in S'$ для любого стандартного $l \in L$.

Пусть $S'' := \{\lambda \in L_N : (\exists g \in S')\,(g \in \lambda)\}$ и T — полная система попарно различных представителей смежных классов из множества $L - S''$. Тогда, очевидно, $S' \cap T = \varnothing$ и $S' \cup T$ — полная система попарно различных представителей смежных классов из L_N. $\rhd$

7.6.10. Пример. Пусть G — аддитивная группа поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Выберем две последовательности целых чисел $r, s \to \infty$, и пусть $n := r + s$. Пусть, далее, G_n — аддитивная группа кольца $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} := \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ (такое представление кольца существенно для наших рассмотрений). Определим $\jmath_n : G_n \to \mathbb{Q}_p$ формулой $\jmath_n(k) := \frac{k}{p^r}$. Тогда $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность для G, см. 7.5.9.

Двойственная группа $\widehat{G} := \widehat{\mathbb{Q}}_p$ изоморфна $\mathbb{Q}_p$: произвольный характер $\mathbb{Q}_p$ имеет вид $\chi_\xi(\eta) = \exp(2\pi i\{\xi\eta\})$ для $\xi \in \mathbb{Q}_p$, причем $\xi \mapsto \chi_\xi$ — топологический изоморфизм. Таким образом, мы можем отождествить $\mathbb{Q}_p$ и $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ и рассматривать двойственную приближающую последовательность как некоторую приближающую последовательность для $\mathbb{Q}_p$. Отождествим также G_n с $\widehat{G}_n$. Тогда двойственную приближающую последовательность $((G_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ задают формулой $\widehat{\jmath}_n(m) := \frac{m}{p^s}$, см. 7.5.10.

В качестве компактной и открытой подгруппы K группы G возьмем аддитивную группу кольца p-адических целых $\mathbb{Z}_p$. Тогда $K_n := \jmath_n^{-1}(K) = p^r G_n := \{k \cdot p^r : k := 0, 1, \dots, p^s - 1\}$.

Чтобы определить фактор-группу $L := G/K$, обозначим символом $\mathbb{Q}^{(p)}$ аддитивную группу рациональных чисел вида $\frac{m}{p^l}$, где $l > 0$. Как видно, L изоморфна группе $\mathbb{Q}^{(p)}/\mathbb{Z}$. Фактор-группа $L_n := G_n/K_n$ будет изоморфна $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} := \{0, 1, \dots, p^r - 1\}$. Определим вложение $\jmath'_n : L_n \to L$ формулой $\jmath'_n(t) := \frac{t}{p^r}$. Легко проверить, что $((L_n, \jmath'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность для L, совместимая с приближающей последовательностью $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Множества $\{\frac{k}{p^l} : k < p^l,\, k|p\}$ и $\{0, 1, \dots, p^r - 1\}$ будут полными системами попарно различных представителей смежных классов из фактор-групп G/K и $L_n := G_n/K_n$ соответственно, удовлетворяющими предложению 7.6.9. Простое доказательство этого факта опускается.

В соответствии с нашими отождествлениями будет $\widehat{L} = \mathbb{Z}_p = K$ и $\widehat{K} = L$. Таким образом,

$$\widehat{L}_n = \{0, 1, \dots, p^r - 1\} \simeq \{k \cdot p^s : k = 0, 1, \dots, p^r - 1\};$$
$$\widehat{K}_n = \{0, 1, \dots, p^s - 1\}.$$

Если при этом $\widehat{\jmath}'_n : \widehat{K}_n \to L$ определяется формулой $\widehat{\jmath'}_n(u) := \frac{u}{p^s}$, то $((\widehat{K}_n, \widehat{\jmath'}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность фактор-группы $\widehat{G}/\widehat{L} := \widehat{K} = L$, совместимая с приближающей последовательностью $((G_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Множество $\{0, 1, \dots, p^s - 1\}$ представляет собой полную систему попарно различных представителей смежных классов из фактор-группы $\widehat{K}_n = G_n/\widehat{L}_n$, удовлетворяющей 7.6.9 для этой приближающей последовательности.

(1) *Матрица преобразования Фурье в рассматриваемом случае* (см. 7.6.4 (2)) *имеет вид*

$$f((m, l), (u, v), (m', l'), (u', v')) =$$
$$= \exp\left(-\frac{2\pi i m' u'}{p^{l'+v'}}\right) \delta_{(m,l),(m',l')} \delta_{(p^v - u, v),(u',v')}.$$

$\triangleleft$ Пусть $\Gamma_p := \{(m, l) : m|p,\ 0 \le m < p^l\}$. Тогда по очевидным соображениям $l_2(L \times \widehat{K})$ мы можем отождествить с $l_2(\Gamma_p^2)$ и, используя справедливое в $\mathbb{Q}^{(p)}$ равенство $\frac{u}{p^v} = \frac{p^v - u}{p^v}$, приходим к требуемому. $\triangleright$

Аналогичные соображения применимы и к конечному преобразованию Фурье $\mathscr{F}_n : L_2(G_n) \to L_2(\widehat{G}_n)$. Точнее, имеет место утверждение.

(2) *Матрица* 7.6.4 (2) *для конечного преобразования Фурье $\mathscr{F}_n$ имеет вид*

$$f(l, v, l', v') = \exp\left(-\frac{2\pi i l' v'}{p^n}\right) \delta_{p^r - l, l'} \delta_{v v'}.$$

$\triangleleft$ Отождествим $L_2(G_n)$ с $l_2(L_n \times \widehat{K}_n)$ по формуле

$$\varphi(l + kp^r) := \sum_{h=0}^{p^s - 1} c_{lh} \exp \frac{2\pi i k h}{p^s}$$
$$(\varphi \in L_2(G_n),\ 0 \le l < p^r - 1,\ 0 \le k < p^s - 1)$$

и отождествим $L_2(\widehat{G}_n)$ с $l_2(L_n \times \widehat{K}_n)$ по формуле

$$\psi(v + tp^s) := \sum_{l=0}^{p^r - 1} d_{lv} \exp \frac{2\pi i t l}{p^r}$$
$$(\psi \in L_2(\widehat{G}_n),\ 0 \le v < p^s - 1,\ 0 \le t < p^r - 1).$$

Тогда имеет место цепочка равенств

$$\mathscr{F}_n(\varphi) = \widehat{\varphi}(v + tp^s) = \frac{1}{p^s} \sum_{u=0}^{p^n - 1} \varphi(u) \exp\left(-\frac{2\pi i u (v + tp^s)}{p^n}\right) =$$
$$= \frac{1}{p^s} \sum_{l=0}^{p^r - 1} \sum_{k=0}^{p^s - 1} \sum_{h=0}^{p^s - 1} c_{lh} \exp \frac{2\pi i k h}{p^s} \exp\left(-\frac{2\pi i (l + kp^r)(v + tp^s)}{p^n}\right) =$$
$$= \sum_{l=0}^{p^r - 1} c_{lv} \exp\left(-\frac{2\pi i l v}{p^n}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i l t}{p^r}\right),$$

откуда следует требуемое. $\triangleright$

7.6.11. Обычно дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ не является сильным, но его можно несколько изменить, чтобы оно стало сильным. В этом пункте мы построим сильное дискретное приближение $((X_n, S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ пространства X, удовлетворяющее условию 6.2.6 (1) и соотношению $\|T_n f - S_n f\|_n \to 0$, справедливому для всех f из некоторого плотного подмножества Y. Очевидно, что в этом случае дискретное приближение S_n определяет то же самое вложение $\boldsymbol{t} : X \to \mathscr{X}$, что и дискретное приближение T_n.

Сильное дискретное приближение для случая $\mathbb{R}^n$ было построено в [298]. Здесь мы рассмотрим только группу с компактной и открытой подгруппой. Как было отмечено в 7.6.3, если G — дискретная группа, то дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ будет сильным и выполнено 6.2.6 (1).

(1) Пусть группа G компактна. В этом случае нормирующий множитель имеет вид $\Delta_n := |G_n|^{-1}$. В этой ситуации дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ может не быть сильным. Плотное подпространство $Y \subseteq X$ состоит из ограниченных почти всюду непрерывных функций и, как легко проверить, оператор T_n не может быть продолжен на все X в общем случае. Определим $S_n : X \to X_n$ следующей формулой:

$$S_n(f)(g) := \sum_{\chi\in\widehat{G}_n} \widehat{f}(\widehat{\jmath}_n(\chi))\chi(g).$$

(2) Пусть теперь G — некоторая локально компактная абелева группа с компактной и открытой подгруппой K. Пусть, далее, $L := G/K$, а $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — двойственная пара приближающих последовательностей для G.

Предположим, что K_n удовлетворяет условиям предложения 7.6.6, $L_n := G_n/K_n$ и $((L_n, \jmath'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность для L, совместимая с $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Зафиксируем полную систему $\{a_l : l \in L\}$ попарно различных представителей смежных классов из L. Переходя к подпоследовательностям, если необходимо, мы можем предположить в силу 7.6.9, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует полная система $\{\alpha_\lambda : \lambda \in L_n\}$ попарно различных представителей смежных классов из L_n такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \jmath_n(\alpha_{\jmath'^{-1}_n(l)}) = a_l \quad (l \in L).$$

Обозначим символом S'_n оператор из $L_2(K)$ в $L_2(K_n)$, определяемый как в (1). Оператор $S_n : X \to X_n$ введем формулой

$$S_n\varphi(\alpha_\lambda + \xi) := S'_n\varphi_{\jmath'_n(\lambda)}(\xi) \quad (\xi \in K_n,\ \lambda \in L_n).$$

Здесь, как и выше, $\varphi_l(k) := \varphi(a_l + k)$.

7.6.12. *В случае, когда группа компактна, последовательность* $((X_n, S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *представляет собой сильное дискретное приближение* X, *для которого* $\|T_n f - S_n f\|_n \to 0$ *при всех* $f \in Y$ *и выполнено условие* 6.2.6 (1).

$\lhd$ Поскольку $\{\chi(g) : \chi \in \widehat{G}_n\}$ — ортонормальный базис в X_n, то будет $\|S_n(f)\|^2 = \sum_{\chi\in\widehat{G}_n} |\widehat{f}(\widehat{\jmath}_n(\chi))|^2$. Группа $\widehat{G}_n$ дискретна, поэтому дискретное приближение $((\widehat{X}_n, \widehat{T}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ пространства $\widehat{X}$ будет сильным. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\chi\in\widehat{G}_n} |\widehat{f}(\widehat{\jmath}_n(\chi))|^2 = \|\widehat{f}\|^2 = \|f\|^2,$$

следовательно, $\|S_n(f)\| \to \|f\|$.

Если $f \in Y$, то, применив теорему 7.4.15 к обратному преобразованию Фурье, получим $\|T_n(f) - \mathscr{F}_n^{-1}\widehat{T}_n\widehat{f}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Но тогда по определению обратного преобразования Фурье $\mathscr{F}_n^{-1}\widehat{T}_n\widehat{f} = S_n(f)$.

Чтобы показать справедливость условия 6.2.6 (1) для дискретного приближения $((X_n, S_n))_{n\in\mathbb{N}}$, определим вложение $\imath_n : X_n \to X$ правилом

$$\imath_n(\varphi)(\xi) := \sum_{\chi\in\widehat{G}_n} \mathscr{F}_n(\varphi)(\chi)\widehat{\jmath}_n(\chi)(\xi).$$

Тогда $\imath_n(X_n) = \{\sum_{\chi\in\widehat{G}_n} c_\chi\widehat{\jmath}_n(\chi)\}$. При этом для всех $f \in \imath_n(X_n)$ легко проверяется равенство $\imath_n(S_n(f)) = f$ Отсюда видно, что если $p_n : X \to \imath_n(X_n)$ — ортопроектор, то $S_n = \imath_n^{-1} \circ p_n$, что и устанавливает 6.2.6 (1). $\rhd$

7.6.13. *В случае локально компактной группы с компактной и открытой подгруппой последовательность* $((X_n, S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *представляет собой сильное дискретное приближение* X, *для которого выполнено условие* 6.2.6 (1). *Более того,* $\|T_n\varphi - S_n\varphi\|_n \to 0$ *при* $n \to \infty$ *для всех* $\varphi \in \mathscr{S}_2(G)$.

$\lhd$ Как мы видели выше, соответствие $\varphi \leftrightarrow \{\varphi_l : l \in L\}$ — это унитарный изоморфизм между гильбертовыми пространствами X и $\prod_{l\in L} X^{(l)}$, где каждое $X^{(l)}$ совпадает с $L_2(K)$. Аналогично, соответствие $\psi \leftrightarrow \{\psi_\lambda : \lambda \in L_n\}$, где $\psi_\lambda(\xi) := \psi(\alpha_\lambda + \xi)$, осуществляет унитарный изоморфизм гильбертовых пространств X_n и $\prod_{l\in L} X_n^{(\lambda)}$, где каждое $X_n^{(\lambda)}$ совпадает с $L_2(K_n)$. Отождествляя унитарно изоморфные гильбертовы пространства, получим

$$S_n\left(\{\varphi_l : l \in L\}\right) = \left\{S'_n \varphi_{\jmath_n(\lambda)} : \lambda \in L_n\right\}.$$

Отсюда вытекает первая часть требуемого утверждения, так как S'_n удовлетворяет 7.6.12.

Докажем вторую часть. Сначала предположим, что φ — непрерывная функция с компактным носителем. Тогда существует стандартное конечное множество $A \subset L$ такое, что для всех $k \in K$ верно $\varphi(a_l + k) = 0$, если только $l \notin A$. Зафиксируем $N \approx +\infty$. Нужно лишь установить, что $\|T_N\varphi - S_N\varphi\| \approx 0$. Пусть $\{\alpha_\lambda : \lambda \in L_N\}$ — полная система попарно различных представителей смежных классов из L_N, удовлетворяющая нестандартной версии предложения 7.6.9. Тогда для любого $g \in K_N$ будет $T_N\varphi(\alpha_\lambda + g) = \varphi \circ \jmath_N(\alpha_\lambda + g) \neq 0$ в том и только в том случае, когда $\jmath'_N(\lambda) \in A$.

Если $\jmath'_N(\lambda) = l \in A$, то, учитывая определение гиперприближения (см. 7.4.1 (2)) и соотношение $\jmath_N(\alpha_\lambda) \approx a_l$, можно написать $T_N\varphi(\alpha_\lambda + g) = \varphi(\jmath_N(\alpha_\lambda + g)) \approx \varphi(\jmath_N(\alpha_\lambda) + \jmath_N(g)) \approx \varphi(a_l + \jmath_M(g)) = T_N\varphi_l(g)$.

Здесь использовано также и то, что непрерывная функция φ с компактным носителем равномерно непрерывна, стало быть, даже для нестандартных α и β соотношение $\alpha \approx \beta$ влечет $\varphi(\alpha) \approx \varphi(\beta)$ (см. 2.3.12). Теперь определение S_n из 7.6.11 (2) дает $S_N\varphi(\alpha_\lambda + g) = S'_N\varphi_l(g)$.

Если $\jmath'_N(\lambda) = l \in A$, то согласно 7.6.12 $T_N\varphi_l \approx S'_n\varphi_l$, а если $\jmath'_N(\lambda) = l \notin A$, то $\varphi_l = 0$ и тем самым $S'_N\varphi_l = 0$. Так как мощность A стандартно-конечна, то $\|T_N\varphi - S_N\varphi\|_N \approx 0$.

Пусть φ — произвольная функция из $\mathscr{S}_2(G)$. Зафиксируем произвольное стандартное число $\varepsilon > 0$. Тогда существует непрерывная функция ψ с компактным носителем такая, что $\|\varphi - \psi\| < \varepsilon$. Из определения дискретного приближения следует $\|T_N(\varphi) - T_N(\psi)\|_N = \|T_N(\varphi - \psi)\|_N \approx \|\varphi - \psi\|$.

По той же самой причине $\|S_N(\varphi) - S_N(\psi)\|_N \approx \|\varphi - \psi\|$, следовательно, $\|T_N(\varphi) - T_N(\psi)\|_N + \|S_N(\varphi) - S_N(\psi)\|_N < 2\varepsilon$. Далее, $\|T_N\varphi - S_N\varphi\|_N \leq \|T_N(\varphi) - T_N(\psi)\|_N + \|T_N(\psi) - S_N(\psi)\|_N + \|S_N(\varphi) - S_N(\psi)\|_N < 5\varepsilon$, поскольку $\|T_N(\psi) - S_N(\psi)\|_N \approx 0$. Так как стандартное $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\|T_N\varphi - S_N\varphi\|_N \approx 0$. $\rhd$

Аналогично можно ввести отображение $\widehat{S}_n : L_2(\widehat{G}) \to L_2(G_n)$, удовлетворяющее доказанному предложению.

Пусть $\{\pi_\nu : \nu \in \widehat{K}_n\}$ — полная система попарно различных представителей смежных классов из $\widehat{G}_n/\widehat{L}_n$, удовлетворяющая условиям 7.6.9 для приближающей последовательности $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$, а $\widehat{S}'_n : L_2(\widehat{L}) \to L_2(\widehat{L}_n)$ — оператор, удовлетворяющий 7.6.11 для приближающей последовательности $((\widehat{L}_n, \widehat{\jmath}_n|_{\widehat{L}_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ группы $\widehat{L}$. Тогда $\widehat{S}_n\psi(\pi_\nu + \eta) = \widehat{S}'_n\psi_{\widehat{\jmath'_n}(\nu)}(\eta)$ для всех $\nu \in \widehat{K}_n$ и $\eta \in \widehat{L}_n$.

7.6.14. Вернемся к примеру 7.6.10. Для почти всюду непрерывной функции $\varphi \in L_2(\mathbb{Q}_p)$ справедлива цепочка равенств

$$(T_n\varphi)(\jmath + kp^r) = \varphi(\jmath_n(\jmath + kp^r)) = \varphi(\frac{\jmath}{p^r} + k) =$$
$$= \varphi_{(l,m)}(k) = \sum_{(u,v)\in\Gamma_p} c_{(l,m)(u,v)} \exp\frac{2\pi iku}{p^v}.$$

Здесь $(l,m) \in \Gamma_p$ и $l/p^m = \jmath/p^r$.

Чтобы подсчитать $S_n\varphi$, заметим, что в нашем случае $L = \widehat{\mathbb{Z}}_p$, поэтому $\widehat{\jmath'_n} : \widehat{K}_n \to L$ — двойственное к $\jmath_n|_{K_n}$ приближение. Используя 7.6.11 (1), получим

$$S_n\varphi(j + kp^r) = S'_n\varphi_{\jmath'_n(j)}(\jmath_n(kp^r)) = S'_n\varphi_{(l,m)}(k) =$$
$$= \sum_{w\in\widehat{K}_n} c_{(l,m)\widehat{\jmath'_n}(w)} \exp\frac{2\pi iwk}{p^s} = \sum_{v\leq s}\sum_{(u,v)\in\Gamma_p} c_{(l,m)(u,v)} \exp\frac{2\pi iku}{p^v}.$$

Если $\varphi \in D_{test}$ (см. предложение 7.6.5), а r, s удовлетворяют соотношениям $m > r$, $v > s$, $c_{(l,m)(u,v)} = 0$, $n = r + s$, то указанные выше выражения для S_n и T_n дают $S_n\varphi = T_n\varphi$.

Сравнив 7.6.10 (1) и 7.6.10 (2) с выражением для S_n, получаем $\widehat{S}_n(\widehat{f}) = F_n(S_nf)$ для любого $f \in L_2(\mathbb{Q}_p)$, и если $f \in D_{test}$, то $\widehat{T}_n(\widehat{f}) = F_n(T_nf)$. Поскольку D_{test} плотно в X, то тем самым установлена теорема 7.4.15 для рассматриваемого случая.

7.6.15. Для $N \approx +\infty$ определим пространство $\mathscr{X} := X_N^{\#}$ и оператор $\boldsymbol{t} : X \to \mathscr{X}$ как в 6.2.3. Здесь $X_N := L_2(G_N)$ и $X := L_2(G)$ (см. 7.6.2). Предложение 6.2.4 показывает, что для $\varphi \in X_N^{(b)}$ важно знать, при каких условиях $\varphi^{\#} \in \boldsymbol{t}X$.

Говорят, что элемент $\varphi \in X_N^{(b)}$ *проксистандартен*, и пишут $\varphi \in \operatorname{proxy}(X_N^{(b)})$, если существует элемент $f \in X$ такой, что $\varphi^{\#} = \boldsymbol{t}(f)$. Будем использовать обозначения:

$$H(G_N) := G_N - \jmath_N^{-1}(\operatorname{proxy}({}^*G)), \quad H(\widehat{G}_N) := G_N - \widehat{\jmath}_N^{-1}(\operatorname{proxy}({}^*\widehat{G})),$$
$$H(L_N) := L_N - {\jmath'}_N^{-1}(L), \quad H(\widehat{K}_N) := \widehat{K}_N - \widehat{\jmath'}_N^{-1}(\widehat{K}).$$

Теорема. *Элемент $\varphi \in X_N^{(b)}$ является проксистандартным в том и только в том случае, если выполнены следующие два условия:*

(1) $\Delta_N \sum_{g\in B} |\varphi(g)|^2 \approx 0$ *для любого внутреннего множества $B \subset H(G_N)$;*

(2) $\widehat{\Delta}_N \sum_{\chi\in C} |\mathscr{F}_N(\varphi)(\chi)|^2 \approx 0$ *для любого внутреннего множества $C \subset H(\widehat{G}_N)$.*

$\triangleleft$ $\to$: Пусть $\varphi := \boldsymbol{t}(f)$. Так как D_{test} плотно в X, то можно предположить, что для каждого стандартного $\varepsilon > 0$ существует $\psi \in D_{test}$ такой, что

$$\Delta_N \sum_{g\in G_N} |\varphi(g) - \psi(\jmath_N(g))|^2 < \varepsilon.$$

Преобразование Фурье сохраняет норму, а по теореме 7.4.10 $\widehat{\psi} \circ \widehat{\jmath}_N \approx \mathscr{F}_N(\psi \circ \jmath_N)$, поэтому верно

$$\widehat{\Delta}_N \sum_{\chi\in\widehat{G}_N} |\mathscr{F}_N(\varphi)(\chi) - \widehat{\psi}(\widehat{\jmath}_N(\chi))|^2 < \varepsilon.$$

Разумеется, те же оценки справедливы, если суммирование ведется по некоторым внутренним подмножествам множеств G_N и $\widehat{G}_N$ соответственно. Функции ψ и $\widehat{\psi}$ имеют компактные носители, поэтому ${}^*\operatorname{supp}\psi \subset \operatorname{proxy}({}^*G)$ и ${}^*\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset \operatorname{proxy}({}^*\widehat{G})$. Следовательно, для произвольных внутренних множеств $B \subset H(G_N)$ и $C \subset H(\widehat{G}_N)$ будет $\psi \circ \jmath_N|_B = 0$ и $\widehat{\psi} \circ \jmath_N|_C = 0$. Теперь из наших оценок вытекает, что

$$\Delta_N \sum_{g\in B} |\varphi(g)|^2 < \varepsilon, \quad \widehat{\Delta}_N \sum_{\chi\in C} |\mathscr{F}_N(\varphi)(\chi)|^2 < \varepsilon.$$

Поскольку стандартное число $\varepsilon > 0$ произвольно, то необходимость обоснована.

$\leftarrow$: Пусть φ удовлетворяет условиям (1) и (2). Зафиксируем полные системы $\{\alpha_\lambda : \lambda \in L_N\}$ и $\{\pi_\nu : \nu \in \widehat{K}_N\}$ попарно различных представителей смежных классов из групп L_N и $\widehat{G}_N/\widehat{L}_N$ соответственно, которые удовлетворяют нестандартной версии предложения 7.6.9 (см. доказательства предложений 7.6.8 и 7.6.9). Для $\lambda \in L_N$ и $k \in K_N$ выполняется

$$\varphi(\alpha_\lambda + k) = \sum_{\nu \in \widehat{K}_N} \sigma_{\lambda,\nu}\nu(k).$$

Для завершения доказательства необходимы два вспомогательных факта.

(A) Для любых внутренних $P \subset H(L_N)$ и $Q \subset H(\widehat{K}_N)$

$$\sum_{\lambda \in P} \sum_{\nu \in \widehat{K}_N} |\sigma_{\lambda\nu}|^2 \approx 0, \quad \sum_{\nu \in Q} \sum_{\lambda \in L_N} |\sigma_{\lambda,\nu}|^2 \approx 0.$$

$\lhd$ Заметим, что в рассматриваемом случае нормирующие множители имеют вид $\Delta_N := |K_N|^{-1}$ и $\widehat{\Delta}_N := |L_N|^{-1}$, см. 7.6.1 (в качестве K берем относительно компактную открытую окрестность нуля в G). Возьмем внутреннее множество $P \subset H(L_N)$. Тогда $B = P + K_N \subset H(G_N)$. Учитывая, что $\{\nu(k) : \nu \in K_N\}$ — ортонормальный базис в $L_2(K_N)$, из условия (A) мы выводим:

$$0 \approx |K_N|^{-1} \sum_{g \in B} |\varphi(g)|^2 = |K_N|^{-1} \sum_{\lambda \in P} \sum_{k \in K_N} |\varphi(\alpha_\lambda + k)|^2 =$$

$$= |K_N|^{-1} \sum_{\lambda \in P} \sum_{k \in K_N} \Big| \sum_{\nu \in \widehat{K}_N} \sigma_{\lambda\nu}\nu(k)\Big|^2 = \sum_{\lambda \in P} \sum_{\nu \in \widehat{K}_N} |\sigma_{\lambda\nu}|^2.$$

Аналогично, для $\nu \in \widehat{K}_N$ и $\gamma \in \widehat{L}_N$ верно

$$\mathscr{F}_N(\varphi)(\pi_\nu + \gamma) = \sum_{\lambda \in \widehat{L}_N} \widehat{\sigma}_{\lambda,\nu}\gamma(\lambda).$$

Следовательно, для внутреннего множества $Q \subset H(\widehat{K}_N)$ выполняется

$$\sum_{\nu \in Q} \sum_{\lambda \in L_N} |\widehat{\sigma}_{\lambda,\nu}|^2 \approx 0.$$

Повторив вычисления, приводящие к формуле 7.6.4 (2), для преобразования Фурье $\mathscr{F}_N$ получим $\widehat{\sigma}_{\lambda,\nu} = \overline{\pi_\nu(\alpha_\lambda)}\sigma_{-\lambda\nu}$. Стало быть, $|\widehat{\sigma}_{\lambda,\nu}| = |\sigma_{-\lambda\nu}|$, откуда немедленно вытекает второе из требуемых равенств. $\rhd$

Группы L и K счетны ввиду сепарабельности группы G. Поэтому существуют возрастающие последовательности конечных подмножеств $A'_m \subset L$ и $B'_m \subset \widehat{K}$ такие, что $L = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A'_m$ и $\widehat{K} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B'_m$. Положим $A_m := {\jmath'}_N^{-1}(A'_m)$ и $B_m := \widehat{\jmath'}_N^{-1}(B'_m)$. Определим последовательность $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset X_N$ формулой

$$\varphi_m(\alpha_\lambda + k) := \begin{cases} \sum\limits_{\nu\in B_m} \sigma_{\lambda\nu}\nu(k), & \text{если } \lambda \in A_m, \\ 0, & \text{если } \lambda \notin A_m. \end{cases}$$

(Б) Установим, что в $\mathscr{X}$ выполняется $\varphi^{\#} = \lim\limits_{m\to\infty} \varphi^{\#}_m$.

$\lhd$ Достаточно проверить, что для любого стандартного $\varepsilon > 0$ существует стандартное натуральное число m_0 такое, что $\|\varphi - \varphi_m\| < \varepsilon$ для всех $m > m_0$. Аналогично тому, как это делается для $L_2(G)$, можно без труда показать, что соответствие $\varphi \leftrightarrow \{\sigma_{\lambda,\nu} : \lambda \in L_N, \nu \in \widehat{K}_N\}$ представляет собой унитарный изоморфизм между гильбертовыми пространствами $L_2(G_N)$ и $l_2(L_N \times \widehat{K}_N)$. Таким образом,

$$\|\varphi - \varphi_m\|^2 = \sum_{(\lambda,\nu)\in L_N\times\widehat{K}_N - A_m\times B_m} |\sigma_{\lambda\nu}|^2.$$

Легко видеть, что $L \subset A'_M \subset {}^*L$ и $\widehat{K} \subset B'_M \subset {}^*\widehat{K}$ для каждого $M \approx +\infty$. Нетрудно заметить, что $P := L_N - A_M \subset H(L_N)$ и $Q := \widehat{K}_N - B_M \subset H(\widehat{K}_N)$. Если взять $S \subset L_N \times \widehat{K}_N - A_M \times B_M$, то

$$\sum_{(\lambda,\nu)\in S} |\sigma_{\lambda\nu}|^2 \leq \sum_{(\lambda,\nu)\in P\times\widehat{K}_N} |\sigma_{\lambda\nu}|^2 + \sum_{(\lambda,\nu)\in L_N\times Q} |\sigma_{\lambda\nu}|^2.$$

Обе суммы в правой части этого неравенства бесконечно малы в силу (А), поэтому $\|\varphi - \varphi_M\|^2 \approx 0$. Введем внутреннее множество $C := \{m \in {}^*\mathbb{N} : \|\varphi - \varphi_m\| < \varepsilon\}$. Как было только что установлено, C содержит все бесконечные гипернатуральные числа M. По принципу незаполненности 3.5.11 (2), существует стандартное натуральное число m_0 такое, что в C содержатся все $m > m_0$, что и требовалось. $\rhd$

Так как число $\|\varphi\|$ доступно, то $\sum_{\lambda\in\widehat{L}_N}|\sigma_{\lambda\nu}|^2$ — доступное число, поэтому каждое $\sigma_{\lambda\nu}$ также доступно. Для $l\in L$ и $h\in\widehat{K}$ положим $c_{lh}:={}^\circ\sigma_{\jmath'^{-1}_N(l)\widehat{\jmath'}^{-1}_N(k)}$ и определим $f_m\in D_{test}$ для $m\in\mathbb{N}$ формулой

$$f_m(a_l+\xi):=\begin{cases}\sum\limits_{h\in B'_m}c_{lh}h(\xi), & \text{если } l\in A'_m,\\ 0, & \text{если } l\notin A'_m.\end{cases}$$

Тогда из предложений 7.6.9 и 7.6.12 выводим

$$S_N(f_m)(\alpha_\lambda+k)=\begin{cases}\sum\limits_{\nu\in B_m}c_{\jmath_N(\lambda)\widehat{\jmath'}_N(\nu)}\nu(k), & \text{если } \lambda\in A_m,\\ 0, & \text{если } \lambda\notin A_m,\end{cases}$$

и $S_N(f_m)\approx T_N(f_m)$. Таким образом, $S_N(f_m)^\#=\boldsymbol{t}(f_m)$. В то же время

$$\|S_N(f_m)-\varphi_m\|^2=\sum_{\lambda\in A_m}\sum_{\nu\in B_m}|\sigma_{\lambda\nu}-c_{\jmath_N(\lambda)\widehat{\jmath'}_N(\nu)}|^2.$$

Эта величина бесконечно мала, так как $\sigma_{\lambda\nu}\approx c_{\jmath_N(\lambda)\widehat{\jmath'}_N(\nu)}$ и мощность множества $A_m\times B_m$ стандартно-конечна. Теперь из (Б) вытекает $\varphi^\#=\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{t}(f_m)$. Значит, $\varphi^\#\in\boldsymbol{t}(X)$. $\triangleright$

7.6.16. Примечания.

(1) Результаты этого параграфа взяты из работы С. Альбеверио, Е. И. Гордона и А. Ю. Хренникова [245].

(2) В связи с 7.6.10 (2) отметим, что известный алгоритм Кули — Тьюки для быстрого преобразования Фурье основан в точности на тех же вычислениях, см. [260].

(3) Аналогичные примеру 7.6.10 рассмотрения возможны и для каждой из групп $\mathbb{Q}_{\boldsymbol{a}}$, где $\boldsymbol{a}:=(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — произвольная последовательность положительных целых чисел (см. определения в [225], где эти группы обозначены символом $\Omega_{\boldsymbol{a}}$). Двойственная пара приближающих последовательностей для $\mathbb{Q}_{\boldsymbol{a}}$ описана во введении к книге [325]. Хорошо известно (см., например, [54]), что всякая вполне несвязная локально компактная абелева группа изоморфна группе $\mathbb{Q}_{\boldsymbol{a}}$ для подходящей последовательности $\boldsymbol{a}$.

(4) Теорема 7.4.15 вместе с конструкцией сильного дискретного приближения и предложением 7.6.12 влечет теорему 6.1 из [297] о приближении локально компактных абелевых групп конечными группами в смысле систем Вейля для случая групп с компактной и открытой подгруппой. Чтобы вывести теорему 6.1 из [297] из теоремы 7.4.15 в случае группы $\mathbb{R}^n$, необходимо использовать сильное дискретное приближение $L_2(\mathbb{R}^n)$, введенное в [298].

7.7. Гиперприближение псевдодифференциальных операторов

В этом параграфе займемся гиперприближением псевдодифференциальных операторов на локально компактной абелевой группе с компактной и открытой подгруппой.

7.7.1. Пусть G — локально компактная абелева группа, а $\widehat{G}$ — двойственная группа.

(1) Для достаточно хорошей функции $f : G \times \widehat{G} \to \mathbb{C}$ можно определить линейный оператор (возможно, неограниченный) $A_f : L_2(G) \to L_2(G)$ по формуле

$$A_f\psi(x) := \int\limits_{\widehat{G}} f(x,\chi)\widehat{\psi}(\chi)\chi(x)d\widehat{\mu}(\chi) \quad (\psi \in L_2(G)).$$

При этом говорят, что A_f — *псевдодифференциальный оператор с символом* f.

(2) Приближающий оператор (или приближение с номером n) $A_f^{(n)} : \mathbb{C}^{(G_n)} \to \mathbb{C}^{(G_n)}$ для A_f определяется формулой

$$A_f^{(n)}\varphi(x) := \widehat{\Delta}_n \sum_{\chi \in \widehat{G}_n} f(\jmath_n(x), \widehat{\jmath}_n(\chi))\mathscr{F}_n(\varphi)(\chi)\chi(x) \quad (\varphi \in X_n, x \in G_n).$$

Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь случая группы G с компактной и открытой подгруппой K. Как и выше, $L := G/K$, причем фиксированы полные системы $\{a_l : l \in L\}$ и $\{p_h : h \in \widehat{K}\}$ попарно различных представителей смежных классов L и $\widehat{K} := \widehat{G}/\widehat{L}$.

(3) Очевидно, что отображения $(\jmath_n, \widehat{\jmath}_n) : G_n \times \widehat{G}_n \to G \times \widehat{G}$ задают приближающую последовательность для $G \times \widehat{G}$. Обозначим символом $S_n^{(2)} : L_2(G_n \times \widehat{G}_n) \to L_2(G \times \widehat{G})$ отображение, определенное в предложении 7.6.13 для этой приближающей последовательности. Таким образом, $((L_2(G_n \times \widehat{G}_n), S_n^{(2)}))_{n\in\mathbb{N}}$ — сильное дискретное приближение пространства $L_2(G \times \widehat{G})$ и можно определить еще один приближающий оператор для A_f формулой:

$$B_f^{(n)}\varphi(x) := \widehat{\Delta}_n \sum_{\chi \in \widehat{G}_n} (S_n^{(2)} f)(x, \chi)\mathscr{F}_n(\varphi)(\chi)\chi(x).$$

7.7.2. *Оператор A_f будет оператором Гильберта — Шмидта в том и только в том случае, если $f \in L_2(G \times \widehat{G})$. В этом случае имеет место оценка*

$$\|A_f\| \leq \iint\limits_{G\times\widehat{G}} |f(x,\chi)|^2 \, d\mu \otimes \widehat{\mu}(x,\chi).$$

$\lhd$ Сформулированное утверждение хорошо известно в классической теории псевдодифференциальных операторов (см., например, [9]) и почти очевидно в нашем случае.

Доказательство легко следует из того наблюдения, что ядро оператора A_f имеет вид $K(x,y) := (\mathscr{F}_{\widehat{G}} f)(x, x-y)$, где $\mathscr{F}_{\widehat{G}}$ — преобразование Фурье по второй переменной, поэтому $\|K(x,y)\|_{L_2(G^2)} = \|f(x,\chi)\|_{L_2(G\times\widehat{G})}$. $\rhd$

7.7.3. Теорема. *Если A_f является оператором Гильберта — Шмидта, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *последовательность $(B_f^{(n)})$, введенная в 7.7.1 (3), равномерно ограничена, т. е.*

$$(\exists n_0)(\forall n > n_0)\Big(|B_n\| \leq \|f(x,\chi)\|_{L_2(G\times\widehat{G})}\Big);$$

(2) *последовательность $(B_f^{(n)})$ дискретно сходится к элементу A_f относительно сильного дискретного приближения $((X_n, S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ из 7.6.13 и эта сходимость равномерная;*

(3) *если* $f \in \mathscr{S}_2(G \times \widehat{G})$ (*обозначение см.* в 7.6.1), *то* $\|A_n - B_n\| \to 0$, *следовательно, утверждения* (1) *и* (2) *выполняются также и для последовательности* $(A_f^{(n)})$.

$\lhd$ Доказательство разобьем на несколько шагов.

(а): Зафиксируем $N \approx +\infty$. Очевидно, что $\|B_n\| \leq \|S_n^{(2)} f\|_n$ для любого $n \in {}^*\mathbb{N}$. Здесь использовано, в частности, то, что $\|\mathscr{F}_n\| = 1$ и $|\chi(x)| = 1$. По определению дискретного приближения $\|S_N^{(2)} f\|_N \approx \|f\|$. Если $f \in \mathscr{S}_2(G \times \widehat{G})$, то $\|S_N^{(2)} f - T_N f\|_N \approx 0$. Это доказывает утверждения (1) и (3), стало быть, остается установить (2).

(б): *Если* $\imath$ *и* $\widehat{\imath}$ *обозначают указанные в* 7.6.4 (1) *унитарные изоморфизмы соответственно между* $L_2(G)$ *и* $l_2(L \times \widehat{K})$ *и между* $L_2(\widehat{G})$ *и* $l_2(L \times \widehat{K})$, *то* A_f, *рассматриваемый как оператор в* $l_2(L \times \widehat{K})$, *имеет вид*

$$(\imath A_f \varphi)(l, h) = \sum_{h', l'} (\widetilde{\imath} f)(l, h', l + l', h - h') p_{h'}(a_l)(\widehat{\imath}\widehat{\varphi})(l', h').$$

$\lhd$ В самом деле, в указанных обозначениях для $\varphi \in L_2(G)$ будет

$$\widehat{\varphi}(p_h s) = \sum_{l \in L} (\widehat{\imath}\widehat{\varphi})(l, h) s(l),$$

$$A_f \varphi(a_l + k) = \sum_{h \in \widehat{K}} (\imath A_f \varphi)(l, h) h(k).$$

Аналогично

$$f(a_l + k, p_h + s) = \sum_{h' \in \widehat{K}} \sum_{l' \in L} (\widetilde{\imath} f)(l, h, l', h') s(\bar{l'}) h'(k),$$

где $\widetilde{\imath} f := (\imath \otimes \widehat{\imath}) f$. Теперь простые вычисления, использующие 7.6.4 (1) и 7.7.1 (1), приводят к требуемому. $\rhd$

(в): *Зафиксируем полные системы попарно различных представителей смежных классов* $\{\alpha_\lambda : \lambda \in L_N\}$ *и* $\{\pi_\nu : \nu \in \widehat{K_N}\}$, *удовлетворяющие нестандартной формулировке предложения* 7.6.9 (*см. доказательство этого предложения*). *Тогда имеет место представление*

$$(\imath B_f^{(N)} \varphi)(\lambda, \nu) = \sum_{\nu', \lambda'} (\widetilde{\imath} f)(\jmath'_N(\lambda), \widehat{\jmath}'_N(\nu'), \jmath'_N(\lambda + \lambda'), \widehat{\jmath}'_N(\nu - \nu')) \times$$
$$\times p \imath_{\nu'}(\alpha_\lambda)(\widehat{\imath}_N F_N(\varphi))(\lambda', \nu').$$

$\lhd$ В самом деле, очевидно, что $K \times \widehat{L}$ — компактная и открытая подгруппа группы $G \times \widehat{G}$, причем $L \times \widehat{K} = G \times \widehat{G}/K \times \widehat{L}$ и семейство $\{(a_l, p_h) : l \in L, h \in \widehat{K}\}$ представляет собой полную систему попарно различных представителей смежных классов. Более того, семейство $\{(\alpha_\lambda, \pi_\nu) : \lambda \in L_N, \nu \in \widehat{K}_N\}$ — полная система попарно различных представителей смежных классов из группы $L_N \times \widehat{K}_N = G_N \times \widehat{G}_N/K_N \times \widehat{L}_N$, удовлетворяющая нестандартной версии предложения 7.6.9. Легко понять, что тогда

$$S_N^{(2)} f(\alpha_\lambda + \xi, \pi_\nu + \eta) =$$
$$= \sum_{\lambda' \in L_N} \sum_{\nu' \in \widehat{K}_N} (\widetilde{\imath} f)(\jmath'_N(\lambda), \widehat{\jmath'}_N(\nu), \jmath'_N(\lambda')\widehat{\jmath'}_N(\nu'))\overline{\eta(\lambda')}\nu'(\xi),$$

где $((L_N, \jmath'_N))_{n\in\mathbb{N}}$ — некоторая приближающая последовательность для L, совместимая с $((G_N, \jmath_N))_{n\in\mathbb{N}}$ (определение см. в 7.6.7), а $((\widehat{K}_N, \widehat{\jmath'}_N))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность для $\widehat{K}$, двойственная к последовательности $((K_N, \jmath_N|_{K_N}))_{n\in\mathbb{N}}$, приближающей группу K.

Как и выше, унитарные изоморфизмы $\imath_N : L_2(G_N) \to l_2(L_N \times \widehat{K}_N)$ и $\widehat{\imath}_N : L_2(\widehat{G}_N) \to l_2(L_N \times \widehat{K}_N)$ определены формулами

$$\varphi(\alpha_\lambda + \xi) := \sum_{\nu \in \widehat{K}_N} (\imath_N \varphi)(\lambda, \nu)\nu(\xi),$$
$$\psi(\pi_\nu + \eta) := \sum_{\lambda \in L_N} (\widehat{\imath}_N \psi)(\lambda, \nu)\eta(\lambda).$$

Теперь так же, как и в (б) получаем требуемое представление. $\rhd$

(г): *Для любого* $\psi \in L_2(G)$ *верно* $\|\imath_N B_f^{(N)} S_N\psi - \imath_N S_N A_f \psi\| \approx 0$.

$\lhd$ Вначале проведем некоторые необходимые вычисления. Непосредственно из определений видно, что

(г$_1$) $(\imath_N S_N \psi)(\lambda, \nu) = (\imath\psi)(\jmath'_N(\lambda), \widehat{\jmath'}_N(\nu))$.

Из 7.6.4 (2) вытекает формула

(г$_2$) $\widehat{\imath\psi}(\jmath'_N(\lambda), \widehat{\jmath'}_N(\nu)) = \imath\psi(-\jmath'_N(la), \widehat{\jmath'}_N(\nu))\overline{p_{\widehat{\jmath'}_N(\nu)}(a_{-\jmath'_N(\lambda)})}$.

Аналогичные вычисления с использованием (г$_1$) приводят к равенству

(г$_3$) $(\widehat{\imath}_N \mathscr{F}_N(S_N\psi))(\lambda, \nu) = (\imath\psi)(\jmath'_N(-\lambda), \widehat{\jmath'}_N(\nu))\overline{\pi_\nu(\alpha_{-\lambda})}$.

Далее, из (б), (г$_1$), (в) и (г$_3$) выводим следующие две формулы:

(г$_4$) $\imath_N S_N A_f\psi)(\lambda,\nu) = \sum_{l',h'}(\widetilde{\imath} f)(\jmath'_N(\lambda), h', \jmath'_N(\lambda)+$
$+l', \widehat{\jmath'}_N\ (\nu) - h')p_{h'}(a_{\jmath'_N(\lambda)})\widehat{\imath\psi}(l',h')$;

(г$_5$) $(\imath B_f^{(N)} S_N\psi)(\lambda,\nu) =$
$= \sum_{\nu',\lambda'}(\widetilde{\imath} f)(\jmath'_N(\lambda), \widehat{\jmath'}_N(\nu'), \jmath'_N(\lambda+\lambda'), \widehat{\jmath'}_N(\nu-\nu'))\pi_{\nu'}(\alpha_\lambda)$
$(\imath\psi)(\jmath'_N(-\lambda'), \widehat{\jmath'}_N(\nu'))\overline{\pi_{\nu'}(\alpha_{-\lambda'})}$.

Предположим теперь, что $f \in D^{(2)}_{test}$. Это означает существование стандартных конечных множеств $A \subset L$ и $B \subset \widehat{K}$ таких, что $(\widetilde{\imath} f)(l,h,l',h') = 0$, как только $(l,h,l',h') \notin (A\times B)^2$. Пространство $D^{(2)}_{test}$ плотно в $L_2(G\times\widehat{G})$. Выберем стандартные конечные множества A_1, B_1, для которых $(A-A)\cup A \subset A_1 \subset L$ и $(B-B)\cup B \subset B_1 \subset \widehat{K}$. Пусть $C := \jmath'^{-1}_N(A_1)$ и $D := \widehat{\jmath'}^{-1}_N(B_1)$. Тогда из (г$_4$) видно, что $(\imath_N S_N A_f\psi)(\lambda,\nu) = 0$ при $(\lambda,\nu) \notin C\times D$, следовательно, область изменения переменных l и h' можно ограничить множествами A_1 и B_1 соответственно. Так как конечные множества A_1 и B_1 стандартны, то в силу 7.6.3 будет $\jmath'_N(\alpha\pm\alpha') = \jmath'_N(\alpha)\pm\jmath'_N(\alpha')$ и $\widehat{\jmath'}_N(\beta\pm\beta') = \widehat{\jmath'}_N(\beta)\pm\widehat{\jmath'}_N(\beta')$ для $\alpha,\alpha'\in C$ и $\beta,\beta'\in D$. Эти замечания вместе с (б) показывают, что (г$_4$) можно переписать в виде

(г$_6$) $(\imath_N S_N A_f\psi)(\lambda,\nu) =$
$= \sum_{\lambda'\in C}\sum_{\nu'\in D}(\widetilde{\imath} f)(\jmath'_N(\lambda), \widehat{\jmath'}_N(\nu'), \jmath'_N(\lambda+\lambda'), \widehat{\jmath'}_N(\nu-\nu'))\times$
$\times(\imath\psi)(-\jmath'_N(\lambda), \widehat{\jmath'}_N(\nu))p_{\widehat{\jmath'}_N(\nu')}(a_{\jmath'_N(\lambda)})\overline{p_{\widehat{\jmath'}_N(\nu')}(a_{-\jmath'_N(\lambda')})}$.

По той же самой причине можно предположить, что переменные λ' и ν' в сумме в правой части (г$_5$) пробегают множества C и D соответственно и $(\imath B_f^{(N)} S_N\psi)(\lambda,\nu) = 0$ при $(\lambda,\nu)\notin C\times D$.

Сравнив теперь (г$_4$) и (г$_6$), видим, что члены под знаком суммы различаются коэффициентами $\pi_{\nu'}(\alpha_\lambda)\overline{\pi_{\nu'}(\alpha_{-\lambda'})}$ в (г$_5$) и

$$p_{\widehat{\jmath'}_N(\nu')}(a_{\jmath'_N(\lambda)})\overline{p_{\widehat{\jmath'}_N(\nu')}(a_{-\jmath'_N(\lambda')})}$$

в (г$_6$). Однако эти коэффициенты бесконечно близки в силу нестандартной версии предложения 7.6.9. Таким образом, левые части равенств (г$_5$) и (г$_6$) бесконечно близки, ибо суммы в правых частях имеют лишь стандартное число ненулевых членов. Отсюда вытекает (г), а вместе с тем и второе утверждение теоремы для $f \in D^{(2)}_{test}$. $\triangleright$

Общий случай получается из следующего вспомогательного утверждения.

(д): *Если* 7.7.3 (2) *выполняется для всех* A_f, *где* f *пробегает некоторое плотное подмножество* $Y \subset L_2(G \times \widehat{G})$, *то оно выполняется для всех* $f \in L_2(G \times \widehat{G})$.

$\lhd$ Нужно доказать, что $\|S_N A_f - B_f^{(N)} S_N\| \approx 0$. Зафиксируем произвольное стандартное $\varepsilon > 0$ и выберем $\psi \in Y$ так, чтобы $\|f - \psi\| < \varepsilon$. Тогда

$$\|S_N A_f - B_f^{(N)} S_N\| \le \|S_N A_f - S_N A_\psi\| +$$
$$+ \|S_N A_\psi - B_\psi^{(N)} S_N\| + \|B_\psi^{(N)} S_N - B_f^{(N)} S_N\|.$$

Далее, $\|S_N A_\psi - B_\psi^{(N)} S_N\| \approx 0$ по условию. В силу 6.2.2 величина $\|S_N\|$ доступна, поэтому

$$\|S_N A_f - S_N A_\psi\| \le {}^\circ\|S_N\| \cdot \|A_{f-\psi}\| \le {}^\circ\|S_N\| \cdot \|f - \psi\| \le {}^\circ\|S_N\|\varepsilon,$$
$$\|B_\psi^{(N)} S_N - B_f^{(N)} S_N\| \le \|B_{\psi-f}^{(N)}\|^\circ \|S_N\| \le {}^\circ\|S_N\| \cdot \|f - \psi\| \le {}^\circ\|S_N\|\varepsilon.$$

Произвол в выборе $\varepsilon > 0$ завершает доказательство. $\rhd$

Тем самым мы завершили доказательство теоремы. $\rhd$

7.7.4. *Если* A_f *— это эрмитов оператор Гильберта — Шмидта, то справедливы утверждения:*

(1) *спектр* $\sigma(A_f)$ *совпадает с множеством неизолированных предельных точек множества* $\bigcup_n \sigma(B_f^{(n)})$;

(2) *если* $0 \ne \lambda \in \sigma(A_f)$ *и* J *— окрестность* λ, *не содержащая других точек множества* $\sigma(A_f)$, *то* λ *— единственная неизолированная предельная точка множества* $J \cap \bigcup_n \sigma(B_f^{(n)})$.

$\lhd$ Вытекает из 7.7.3 и 6.2.8, а также 6.2.3 (1) и 7.6.13. $\rhd$

7.7.5. Операторы $A_f^{(n)}$ и $B_f^{(n)}$ могут не быть эрмитовыми, даже если оператор A_f самосопряжен, так что оставшаяся часть теоремы 6.2.8 в рассматриваемом случае будет формулироваться следующим образом.

Если выполнены условия предложения 7.7.4 *и, сверх того,* A_f *самосопряжен и последовательность из эрмитовых операторов* $C^{(n)} : X_n \to X_n$ *такова, что* $\|B_f^{(n)} - C^{(n)}\|_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то имеют место утверждения:*

(1) *если* $M_n^\lambda = \sum_{\nu\in\sigma(C^{(n)})\cap J} C^{(n)^{(\nu)}}$ *(см.* 7.7.4 (2)), *то* $\dim(M_n^\lambda) = \dim(A_f{}^{(\lambda)}) = s$ *для достаточно больших* n *и существует последовательность ортонормальных базисов* $(f_1^n, \dots, f_s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *в* M_n^λ, *дискретно сходящаяся к ортонормальному базису* $(f_1, \dots, f_s)$ *в* $A_f{}^{(\lambda)}$ *относительно дискретного приближения* $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$;

(2) *если в условиях (1)* $f_1, \dots, f_s \in \mathscr{S}_2(G)$, *то последовательность ортонормальных базисов* $((f_1^n, \dots, f_s^n))_{n\in\mathbb{N}}$ *дискретно сходится к* $(f_1, \dots, f_s)$ *относительно дискретного приближения* $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

7.7.6. Рассмотрим теперь операторы типа Шрёдингера. Пусть функция $f : G \times \widehat{G} \to \mathbb{C}$ имеет вид

$$f(x, \chi) := a(x) + b(\chi) \quad (x \in G,\ \chi \in \widehat{G}).$$

Если в этом выражении $a(x) \geq 0$ и $a(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то оператор A_f называют *оператором типа Шрёдингера.*

До конца параграфа $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ — вещественные почти всюду непрерывные локально ограниченные функции на G и $\widehat{G}$ соответственно, причем $a(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ и $b(\chi) \to \infty$ при $\chi \to \infty$. Рассматриваемая группа G и ее приближающая последовательность удовлетворяют всем предположениям пункта 7.7.5.

Легко видеть, что определение оператора A_f из 7.7.1 (1) в рассматриваемом случае дает

$$A_f\psi(x) = a(x) \cdot \psi(x) + \check{b} * \psi(x),$$

где $*$ — свертка в $L_1(G)$ и $\check{b}$ — обратное преобразование Фурье функции b, которое рассматривается здесь как распределение на $\widehat{G}$.

Аналогично, дискретное приближение 7.7.1 (2) удовлетворяет в этом случае формуле

$$A_f^{(n)}\varphi(x) = a(\jmath_n(x)) \cdot \varphi(x) + \mathscr{F}_n^{(-1)}(b \circ \widehat{\jmath}_n) * \varphi(x).$$

При наших предположениях оператор типа Шрёдингера для абелевой группы с компактной и открытой подгруппой имеет дискретный спектр, состоящий из вещественных собственных значений

$$\alpha_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \ldots \to \infty; \quad k \to \infty,$$

причем кратность каждого собственного значения конечна. Такое утверждение можно установить аналогично [28], где оно доказано для группы $\mathbb{Q}_p$. Также легко понять, что в рассматриваемой ситуации операторы $A_f^{(n)}$ самосопряжены.

7.7.7. Теорема. *Пусть A_f — оператор типа Шрёдингера, причем a и b удовлетворяют указанным в 7.7.6 условиям, а область приближения A_f последовательностью $(A_f^{(n)})$ из 7.7.1 (2) является существенной областью A_f. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *спектр $\sigma(A_f)$ совпадает с множеством неизолированных предельных точек множества $\bigcup_n \sigma(A_f^{(n)})$;*

(2) *если J — окрестность λ, не содержащая других точек из $\sigma(A_f)$, то λ — единственная неизолированная предельная точка множества $J \cap \bigcup_n \sigma(A_f^{(n)})$;*

(3) *если в условиях (2) $M_n^\lambda = \sum_{\nu \in \sigma(A_f^{(n)}) \cap J} {A_f^{(n)}}^{(\nu)}$, то $\dim(M_n^\lambda) = \dim({A_f}^{(\lambda)}) = s$ для всех достаточно больших n и существует последовательность из ортонормальных базисов $(f_1^n, \dots, f_s^n)$ в M_n^λ, которая дискретно сходится к ортонормальному базису $(f_1, \dots, f_s)$ в пространстве ${A_f}^{(\lambda)}$ относительно дискретного приближения $((X_n, S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (и, кроме того, относительно дискретного приближения $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$, если все собственные функции A_f входят в $\mathscr{S}(G)$).*

$\triangleleft$ Без ограничения общности можно предположить,что функции a и b положительны. Тогда операторы A_f и $A_f^{(n)}$ положительны, $-1 \notin \mathrm{cl}(\sigma(A_f) \cup \bigcup_n \sigma(A_f^{(n)})$ и ввиду предложения 6.2.10 достаточно показать квазикомпактность последовательности $(R_{-1}(A_f^{(n)}))$. Итак, для любых $N \approx +\infty$ и $\psi \in X_n$ нужно доказать, что если число $\|(A_f^{(N)} + I)\psi\|_N$ доступно, то ψ удовлетворяет условиям теоремы 7.6.15. Так как $\|R_{-1}(A_f^{(N)})\| \leq 1$, то число $\|\psi\|_N$ доступно, поэтому доступно и $((A_f^{(N)} + I)\psi, \psi)$. Однако

$$((A_f^{(N)} + I)\psi, \psi) = (a \cdot \psi, \psi) + (\mathscr{F}_N^{(-1)}(b) * \psi, \psi) + (\psi, \psi),$$
$$(\mathscr{F}_N^{(-1)}(b) * \psi, \psi) = (b \cdot \mathscr{F}_N(\psi), \mathscr{F}_N(\psi)),$$

следовательно, числа $(a \cdot \psi, \psi)$ и $(b \cdot F_N(\psi), F_N(\psi))$ доступны. Предположим теперь, что первое условие теоремы 7.6.15 не выполняется. Тогда существуют внутреннее множество $B \subset H(G_N)$ и стандартное число $c > 0$ такие, что $\Delta_N \sum_{x\in B} |\psi(x)|^2 > c$. Так как $a(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то найдется $L \approx \infty$, для которого $a(x) > L$ при всех $x \in B$. Из сказанного вытекает, что

$$(a \cdot \psi, \psi) \geq \Delta_N \sum_{x\in B} a(x)|\psi(x)|^2 \geq Lc,$$

что противоречит доступности $(a \cdot \psi, \psi)$. Второе условие теоремы 7.6.15 устанавливается аналогичными рассуждениями. $\triangleright$

Опишем один класс операторов типа Шрёдингера, удовлетворяющих условиям установленной теоремы. Будем пользоваться унитарными изоморфизмами $\imath$ и $\widehat{\imath}$, определенными в ходе доказательства теоремы 7.7.3. Несмотря на то, что $a \notin L_2(G)$ и $b \notin L_2(\widehat{G})$, будем обозначать символами $\imath a$ и $\widehat{\imath} b$ функции из $l_2(L \times \widehat{K})$, удовлетворяющие равенствам:

$$a(a_l + k) = \sum_{h\in\widehat{K}} (\imath a)(l, h)h(k);$$

$$b(p_h + s) = \sum_{l\in L} (\widehat{\imath} b)(l, h)s(l).$$

7.7.8. *Пусть A_f — оператор типа Шрёдингера, функции a и b удовлетворяют указанным выше предположениям и, сверх того, множества $S(l) := \{h \in \widehat{K} : (\imath a)(l, h) \neq 0\}$ и $T(h) := \{l \in L : (\widehat{\imath} b)(l, h) \neq 0\}$ конечны для любых $l \in L$ и $h \in \widehat{K}$. Тогда D_{test} — существенная область A_f, которая служит областью приближения A_f последовательностью $(A_f^{(n)})$.*

$\triangleleft$ Напомним, что пространство D_{test} состоит из таких функций $\varphi \in L_2(G)$, что φ и $\widehat{\varphi}$ имеют компактные носители. Это означает существование конечных множеств $A[\varphi] \subset L$ и $B[\varphi] \subset \widehat{K}$ таких, что $(\imath\varphi)(l, h) = 0$ при $(l, h) \notin A[\varphi] \times B[\varphi]$. Далее, простые вычисления с применением 7.6.4 (2) дают

$$(1)\ (\imath A_f\varphi)(l, h) = \sum_{h'\in B[\varphi]} (\imath a)(l, h' - h) \cdot (\imath\varphi)(l, h')+$$
$$+ \sum_{l'\in A[\varphi]} (\widehat{\imath} b)(l - l', h) \cdot (\imath\varphi)(l', h) \cdot p_h(a_{-l}) \cdot \overline{p_h(a_{l'})}.$$

Из этой формулы видно, что $A_f\varphi \in D_{test}$ и, кроме того,

$$A[A_f\varphi] \subset A[\varphi] \cup \Big(A[\varphi] + \bigcup_{h\in B[\varphi]} T(h)\Big) = A'[\varphi];$$
$$B[A_f\varphi] \subset B[\varphi] \cup \Big(B[\varphi] - \bigcup_{l\in A[\varphi]} S(l)\Big) = B'[\varphi].$$

Если $\varphi \in D(A_f)$, то функция $\imath A_f\varphi$ удовлетворяет формуле (1) при $A[\varphi] = L$ и $B[\varphi] = \widehat{K}$. Для конечных множеств $A \subset L$ и $B \subset \widehat{K}$ обозначим символом $P(A,B)$ ортопроектор в $L_2(G)$ на подпространство функций φ, для которых $A[\varphi] \subset A$ и $B[\varphi] \subset B$. Тогда из (1) легко усмотреть, что $P(A,B)A_f\varphi = A_f P(A',B')\varphi$, где

$$A' := A \cup \Big(A - \bigcup_{h\in B} T(h)\Big), \quad B' := B \cup \Big(B + \bigcup_{l\in A} S(l)\Big).$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ мы можем найти конечные множества $A \subset L$ и $B \subset \widehat{K}$, для которых $\|P(A,B)\varphi - \varphi\| < \varepsilon$ и $\|P(A,B)A_f\varphi - A_f\varphi\| < \varepsilon$. Так как $A \subset A'$ и $B \subset B'$, то будет $\|P(A',B')\varphi - \varphi\| < \varepsilon$. Таким образом, если $\psi := P(A',B')\varphi$, то $\psi \in D_{test}$ и, кроме того, $\|\varphi - \psi\| < \varepsilon$ и $\|A_f\varphi - A_f\psi\| < \varepsilon$. Тем самым доказано, что D_{test} — существенная область A_f.

Остается показать, что $S_N(A_f\psi) \approx A_f^{(N)} S_N\psi$ для $N \approx +\infty$ и произвольного стандартного $\psi \in D_{test}$. С этой целью удобно переписать определения A_f и $A_f^{(n)}$ из 7.7.6 в виде:

$$A_f\psi(x) = a(x)\cdot\psi(x) + \mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi})(x),$$
$$A_f^{(N)}\varphi(x) = a(\jmath_N(x))\cdot\varphi(x) + \mathscr{F}_N^{-1}(b\cdot\mathscr{F}_N\varphi)(x).$$

Для носителей ψ и $\widehat{\psi}$ имеют место очевидные соотношения:

$$\operatorname{supp}\psi \subset \bigcup_{l\in A[\psi]} a_l + K = C, \quad \operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset \bigcup_{h\in B[\psi]} p_h + \widehat{L} = D.$$

Из формул 7.7.3 (г$_1$), (г$_2$) вытекает

(2) $\operatorname{supp} S_N\psi \subset \bigcup\{\alpha_\lambda + K_N : \lambda \in \jmath'^{-1}_N(A[\psi])\} = C_N,$

$$\operatorname{supp}\mathscr{F}_N S_N\psi \subset \bigcup\{\pi_\nu + \widehat{L}_N : \nu \in \widehat{\jmath'}_N^{-1}(B[\psi])\} = D_N.$$

Однако $S_N A_f\psi = S_N(a\cdot\psi) + S_N\mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi})$ и

$$A_f^{(N)} S_N\psi = a\circ\jmath_N\cdot S_N\psi + \mathscr{F}_N^{-1}(b\circ\widehat{\jmath}_N\cdot\mathscr{F}_N S_N\psi).$$

Так как ψ имеет компактный носитель, то $a\cdot\psi$ входит в подпространство Y, фигурирующее в 7.6.12, поэтому $S_N(a\cdot\psi)\approx T_N(a\cdot\psi) = a\circ\jmath_N\cdot\psi\circ\jmath_N$. Далее, поскольку a ограничена на C, то

$$\|a\circ\jmath_N\cdot S_N\psi - a\circ\jmath_N\cdot\psi\circ\jmath_N\|_N^2 =$$
$$= \Delta_N\sum_{x\in C_N}|a(\jmath_N(x))(S_N\psi(x)-\psi(\jmath_N(x))|^2\approx 0.$$

Таким образом, $S_N(a\cdot\psi)\approx a\circ\jmath_N\cdot S_N\psi$, и остается доказать, что $S_N\mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi})\approx\mathscr{F}_N^{-1}(b\circ\widehat{\jmath}_N\cdot\mathscr{F}_N S_N\psi)$.

Так как $A_f\psi\in D_{test}\subset Y$ и, как только что было установлено, $a\cdot\psi\in Y$, выполняется $\mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi})\in Y$, следовательно, $S_N\mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi})\approx T_N\mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi}) = \mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi})\circ\jmath_N$. Верно также, что $\mathscr{F}_N S_N\psi\approx\mathscr{F}_N T_N\psi\approx\widehat{\psi}\circ\widehat{\jmath}_N$, ибо $S_N\psi\approx T_N\psi$ и $\mathscr{F}_N$ ограничен. Как видно, $\operatorname{supp}\widehat{\psi}\circ\widehat{\jmath}_N\subset D_N$. Наконец, используя (2) и ограниченность b на D, получаем $b\circ\widehat{\jmath}_N\cdot\mathscr{F}_N S_N\psi\approx b\circ\widehat{\jmath}_N\cdot\widehat{\psi}\circ\widehat{\jmath}_N$, откуда выводим $\mathscr{F}_N^{-1}(b\circ\widehat{\jmath}_N\cdot\mathscr{F}_N S_N\psi)\approx\mathscr{F}_N^{-1}(b\circ\widehat{\jmath}_N\cdot\widehat{\psi}\circ\widehat{\jmath}_N)\approx\mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi})\circ\jmath_N$. $\rhd$

7.7.9. Вернемся к примеру 7.6.10, где $G=\mathbb{Q}_p$ и $\widehat{G}=\mathbb{Q}_p$ с точностью до изоморфизма. В [28] рассмотрен оператор типа Шрёдингера с символом вида

$$f(x,\chi)| := a(|x|_p) + b(|\chi|_p).$$

Если $a(|x|_p)\to\infty$ при $x\to\infty$ и $b(|\chi|_p)\to\infty$ при $\chi\to\infty$, то такие операторы удовлетворяют условиям предложения 7.7.8, так как функции a и b постоянны на смежных классах $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, стало быть, множества $S(l)$ и $T(h)$ из 7.7.8 содержат по одной точке. Используя двойственную пару приближающих последовательностей для $\mathbb{Q}_p$, описанную в 7.6.10, можно для этого случая без труда выписать приближения $A_f^{(n)}$, определенные в 7.7.6. Именно, для $n=r+s$ будет

$$A_f^{(n)}\varphi(k) = a(p^r|k|_p) + \frac{1}{p^n}\sum_{j,m=0}^{n-1} b(p^s|m|_p)\varphi(k-j)\exp\frac{2\pi ijm}{n}.$$

7.7.10. Понятие символа Вейля можно обобщить на случай локально компактной абелевой группы G, если в ней определено деление на два. Это означает, что для каждого $x \in G$ существует $y \in G$, для которого $y + y = x$ и соотношение $y + y = 0$ влечет $y = 0$ для любого $y \in G$. При этом элемент y будем обозначать символом $\frac{1}{2}y := y/2$ и предполагать, что оператор $x \mapsto \frac{1}{2}x$ непрерывен в G. Заметим, что если G допускает деление на два, то $\widehat{G}$ также допускает деление на два: $\frac{1}{2}\chi(x) := \chi(\frac{1}{2}x)$.

Оператор W_f с символом Вейля $f : G \times \widehat{G} \to \mathbb{C}$ определяется формулой

$$W_f := \iint\limits_{G\times\widehat{G}} \widetilde{f}(y,\gamma) U_y V_\gamma \overline{\gamma y/2}\, d\mu \otimes \widehat{\mu}(y,\gamma),$$

где

$$\widetilde{f}(y,\gamma) := \iint\limits_{G\times\widehat{G}} f(x,\chi)\overline{\chi}(\gamma)\overline{\gamma}(x)\, d\mu \otimes \widehat{\mu}(x,\chi).$$

Легко видеть, что этот оператор симметричен тогда и только тогда, когда функция f вещественна. Если f имеет вид $a(x) + b(\chi)$, то $A_f = W_f$.

Без труда можно вычислить ядро $K_f(x,y)$ оператора W_f. Обозначим символом $f^{(2)}(x,y)$ обратное преобразование Фурье $f(\cdot,\cdot)$ относительно второй переменной, т. е. $f^{(2)}(x,y) := \int_{\widehat{G}} f(x,\chi)\chi(y) d\widehat{\mu}(\chi)$. Тогда $K_f(x,y) = f^{(2)}(\frac{x+y}{2}, y - x)$.

В том случае, когда группы G_n из нашей приближающей последовательности $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ также допускают деление на два, то мы будем говорить, что деление на два в G приближается последовательностью $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ при условии, что

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall K \in \mathscr{K})(\exists N > 0)(\forall n > N)(\forall g \in \jmath_N^{(-1)}(K))$$
$$\rho(\jmath_n(g/2), \jmath_n(x)/2) < \varepsilon.$$

Легко видеть, что если p — нечетное простое число, то деление на два в $\mathbb{Q}_p$ приближается последовательностью, описанной в 7.6.10.

Если деление на два допускает приближение, то можно определить последовательность приближений $W_f^{(n)}$ следующим образом. Введем функцию $f_n : G_n \times \widehat{G}_n \to \mathbb{C}$ формулой

$$f_n(g,\kappa) := f(\jmath_n(g), \widehat{\jmath}_n(\kappa)),$$

и пусть $\widehat{f_n}$ — дискретное преобразование Фурье функции f_n, т. е.

$$\widehat{f_n}(h,\chi) := \frac{1}{|G_n|}\sum_{g,\kappa} f_n(g,\kappa)\overline{\chi(g)\kappa(h)}.$$

Тогда

$$W_f^{(n)} := \frac{1}{|G_n|}\sum_{h,\chi} \widehat{f_n}(h,\chi)U_h V_\chi \overline{\chi(h/2)},$$

где $(U_h\varphi)(g) := \varphi(g+h)$ и $(V_\chi\varphi)(g) := \chi(g)\cdot\varphi(g)$.

Пусть $f_n^{(2)}$ обозначает обратное преобразование Фурье функции f_n по второй переменной, т. е.

$$f_n^{(2)}(g,s) := \widehat{\Delta}_n \sum_{\kappa} f_n(g,\kappa)\kappa(s).$$

Тогда

$$(W_f^{(n)}\varphi)(s) = \Delta_n \sum_{g} f_n^{(2)}\left(\frac{s+g}{2}, g-s\right)\varphi(g).$$

7.7.11. *Если $f \in \mathscr{S}_2(G\times\widehat{G})$, то последовательность $(W_f^{(n)})$ дискретно сходится к W_f относительно сильной дискретной приближающей последовательности $((X_n,S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ из 7.6.13 и эта сходимость равномерная.*

$\lhd$ Доказательство аналогично рассуждениям из 7.7.3. $\rhd$

Следствия 7.7.4 и 7.7.5 также применимы в рассматриваемом случае. Более того, утверждение из 7.7.5 выполняется для последовательности $(W_f^{(n)})$, так как эти операторы эрмитовы, ибо функция f_n вещественна.

7.7.12. Примечания.

(1) Обычно псевдодифференциальный оператор A_f с символом f вводится формулой

$$A_f := \int\int_{G\times\widehat{G}} \widetilde{f}(h,\xi)V_h U_\xi d\widehat{\mu}(h)d\mu(\xi),$$

где $\widetilde{f} = \mathscr{F}_G\otimes\mathscr{F}_{\widehat{G}}(f)$. Простые вычисления, использующие формулу $\int_{\widehat{G}}\chi(\xi)d\widehat{\mu}(\chi) = \delta(\xi)$, где $\int_G \varphi(\xi)\delta(\xi)d\mu(\xi) = \varphi(0)$, хорошо известную в теории распределений на локально компактных абелевых группах, показывают, что при $\psi \in L_2(G)$ значение $A_f\psi$ можно вычислять по формуле, указанной в 7.7.1. Несложно дать строгое обоснование таким вычислениям, однако в этом нет никакой необходимости для целей данного параграфа, поэтому мы пользуемся определением, данным в 7.7.1.

(2) Сходные вычисления приводят к аналогичной формуле для приближающих операторов:

$$A_f^{(n)} = \frac{1}{|G_n|} \sum_{g\in G_n, \chi \in \widehat{G}_n} \widetilde{f}_n(\gamma\chi, g) X(g, \chi),$$

где $\widetilde{f}_n := \mathscr{F}_{G_n} \otimes \mathscr{F}_{\widehat{G}_n}(f_n)$ и $f_n(g,\chi) := f(\jmath_n(g), \widehat{\jmath}_n(\chi))$.

(3) Заметим, что в случае $G = \mathbb{R}$ символ, введенный в (1), не является символом Вейля (симметричным символом) оператора, а служит так называемым *qp-символом*. Относительно qp-символов операторов в пространствах $L_2(\mathbb{Q}_p^n)$ см. [28]. Взаимосвязь между qp-символами операторов A и A^* непроста, а условия на символ f, при которых A_f самосопряжен, весьма сложны, причем они не влекут самосопряженности $A_f^{(n)}$ или $B_f^{(n)}$ для самосопряженного A_f. В теории псевдодифференциальных операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$ рассматриваются также симметрические символы или символы Вейля. Оператор W_f с символом Вейля f самосопряжен в том и только в том случае, если f — вещественная функция [9].

(4) Материал этого параграфа взят из статьи С. Альбеверио, Е. И. Гордона и А. Ю. Хренникова [245].

Глава 8

Упражнения и нерешённые задачи

В этом разделе собраны как несложные упражнения и задачи учебного характера, так и возможные темы серьезного исследования, предназначенные, главным образом, для студентов-дипломников и аспирантов. Некоторые вопросы нуждаются в творческой переработке с целью дальнейшего уточнения и детализации. Отбор задач в значительной мере случаен и осуществлен in statu nascendi.

Отметим, что основу изложения составляют задачи из [121–124, 389, 391, 392].

8.1. Нестандартные оболочки и меры Лёба

8.1.1. Понятие нестандартной оболочки, введенное в работах Люксембурга, — предмет интенсивного изучения.

Накоплено великое множество интересных результатов о строении нестандартных оболочек банаховых и топологических векторных пространств (см. [287, 351, 352, 493]). Однако остаются неясными взаимосвязи разнообразных конструкций и понятий из теории банаховых пространств с понятием нестандартной оболочки. Отсутствуют также детальные описания нестандартной оболочки многих встречающихся в анализе функциональных пространств и пространств операторов. Ниже приведем несколько формулировок. Символом $X^{\#}$, как обычно, обозначается нестандартная оболочка нормированного пространства X, т. е. фактор-пространство внешнего пространства доступных элементов $\mathrm{ltd}(X)$ по монаде фильтра окрестностей нуля $\mu(X)$ топологии пространства X, см. 6.1.1. Нужные сведения из функционального анализа имеются в [63, 87, 191, 296].

Задача 1. *При каких условиях на* X *пространство* $X^{\#}$ *обладает свойством Крейна — Мильмана?*

Близкий круг задач, связанных с теоремой Крейна — Мильмана и ее обобщениями на K-пространства, см. в [123].

Задача 2. *При каких условиях на* X *пространство* $X^{\#}$ *обладает свойством Радона — Никодима?*

Задача 3. *Изучить различные геометрические свойства нестандартной оболочки: гладкость, равномерную выпуклость, асплундовость и т. д.*

Задача 4. *Что представляет из себя послойная нестандартная оболочка непрерывного (измеримого) банахова расслоения? То же для соответствующего пространства непрерывных (измеримых) сечений.*

Задача 5. *Описать нестандартные оболочки различных классов ограниченных операторов: операторов Радона — Никодима, радонифицирующих, порядково суммирующих, p-абсолютно суммирующих и тому подобных операторов.*

8.1.2. В векторном пространстве $M(\nu)$ классов эквивалентности измеримых функций на пространстве $(\Omega, \mathscr{B}, \nu)$ с конечной мерой имеется метрика:

$$\rho(f,g) := \int\limits_{\Omega} \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\nu.$$

Снабженное топологией этой метрики пространство $M(\nu)$ становится топологическим векторным пространством.

Рассмотрим нестандартную оболочку $M(\nu)^{\#} := \operatorname{ltd}(M(\nu))/\mu_\rho(0)$, где $\mu_\rho(0) := \{f \in M(\nu) : \rho(f,0) \approx 0\}$, $\operatorname{ltd}(M(\nu)) := \{f \in M(\nu) : \varepsilon f \in \mu_\rho(0)$ при $\varepsilon \approx 0\}$. Пусть $(\Omega, \mathscr{B}_L, \nu_L)$ — соответствующее пространство Лёба. Тогда пространства $M(\nu)^{\#}$ и $M(\nu_L)$ изометричны.

Задача 6. *Как обстоит дело в случае пространства измеримых по Бохнеру вектор-функций* $M(\nu, X)$*? То же для вектор-функций, измеримых по Гельфанду или Петтису.*

Пусть E — порядковый идеал в $M(\nu)$, т. е. E — подпространство $M(\nu)$ и для $f \in M(\nu)$ и $g \in E$ из неравенства $|f| \leq |g|$ следует $f \in E$. Обозначим через $E(X)$ пространство тех $f \in M(\nu, X)$, для которых функция $v(f) : t \mapsto \|f(t)\|$ $(t \in Q)$ входит в E (эквивалентные функции отождествляются). Если E — банахова решетка, то $E(X)$ — банахово пространство в смешанной норме $|||f||| = \|v(f)\|_E$.

Задача 7. *Описать нестандартную оболочку $E(X)$.*

8.1.3. Предположим, что (X, Σ, μ) — пространство с конечной мерой. Рассмотрим такое гиперконечное множество $M \subset {}^*X$, что $\mu(A) = |A \cap M|/|M|$. Пусть (M, S_L, ν_L) — соответствующее пространство Лёба.

Задача 8. *Верно ли, что при соответствующем вложении $\varphi : \Sigma/\mu \to S_L/\nu_L$ правильная подалгебра $\varphi(\Sigma/\mu)$ выделится сомножителем? Если это так, то описать внутренние множества, соответствующие другому сомножителю (так сказать, «чисто нестандартные» элементы S_L/ν_L).*

Задача 9. *Та же задача для вложения отрезка с мерой Лебега в пространство Лёба.*

Задача 10. *Та же задача для пространств из приведенных ниже задач 70 и 71.*

8.1.4. Пусть $(X, \mathscr{A}, \lambda)$ и $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ — стандартные пространства с конечными мерами. Функцию $\mu : \mathscr{A} \times Y \to \mathbb{R}$ называют *случайной мерой*, если

(1) для любого элемента $A \in \mathscr{A}$ функция $\mu(A, \cdot)$ является $\mathscr{B}$-измеримой;

(2) для ν-почти всех $y \in Y$ функция $\mu(\cdot, y)$ является положительной конечной мерой на $\mathscr{A}$.

Задача 11. *Дать понятие случайной меры Лёба μ_L так, чтобы она оказалась случайной мерой для пары $(X, \mathscr{A}_L, \lambda_L)$, $(Y, \mathscr{B}_L, \nu_L)$.*

Задача 12. *Какова связь между интегральными операторами $\int f(x)\, d\mu(x, \cdot)$ и $\int f(x)\, d\mu_L(x, \cdot)$? Что является аналогом S-интегрируемости в данном случае?*

Вариант решения задач 11 и 12, полученный В. Г. Троицким [214], представлен в параграфе 6.6.

Задача 13. *Дать понятие меры Лёба со значениями в векторной решетке (без топологии). При этом случайная мера Лёба из задачи 11 должна быть согласована с понятием меры Лёба для векторной меры $A \mapsto \mu(A, \cdot)$.*

8.1.5. Следующие три задачи навеяны работой [254] и относятся к теории пространств дифференцируемых функций (см. [51, 52, 58, 165, 166]).

Задача 14. *Развить нелинейную теорию потенциала на основе меры Лебега — Лёба.*

Задача 15. *Развить нестандартную теорию емкости.*

Задача 16. *Ввести и исследовать пространства дифференциальных форм на основе меры Лебега — Лёба (см.* [51, 52]*).*

8.2. Гиперприближения и спектры

8.2.1. В главе 7 мы видели, что у каждой локально компактной абелевой группы имеются гиперприближения, которые сохраняются при переходе к двойственным группам, причем преобразование Фурье приближается своим дискретным аналогом. В этой связи интересно исследовать случай некоммутативных групп. Возникает новый класс «гипераппроксимируемых» локально компактных групп. По-видимому, этот класс включает аменабельные группы, однако полное его описание неизвестно.

Задача 17. *Для локально компактной (не обязательно абелевой) группы G построить гиперприближения ограниченных эндоморфизмов $L_2(G)$.*

8.2.2. Используя приближения локально компактных абелевых групп, можно строить гиперприближения псевдодифференциальных операторов в гильбертовом пространстве функций на локально компактной абелевой группе. Для операторов типа Шрёдингера и операторов Гильберта — Шмидта, в случае специального класса групп, это было проделано в [26]. Другой подход развит в [454, 455, 521].

Этот подход является более общим, так как он не ограничивается пространствами функций на локально компактной группе. В то же время первый подход приводит к более детализированным результатам. Взаимодействие указанных подходов также представляется плодотворным. Возникает интересная задача перенесения полученных результатов на другие псевдодифференциальные операторы и построения аналогичных приближений для операторов в функциональных пространствах на других аппроксимируемых группах.

Следующая группа задач состоит в исследовании предельного поведения спектров и собственных значений конечномерных приближений псевдодифференциального оператора на локально компактной абелевой группе.

Задача 18. *Изучить предельное поведение спектров и собственных значений конечномерных приближений оператора типа Шрёдингера с положительным потенциалом, возрастающим на бесконечности.*

Задача 19. *Исследовать ту же задачу для оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом.*

Задача 20. *Изучить связь между гиперприближениями локально компактной абелевой группы и ее боровской компактификацией.*

Задача 21. *Построить приближения оператора типа Шрёдингера с почти периодическим потенциалом на основе задачи 20 и исследовать их сходимость.*

Задача 22. *Изучить предельное поведение спектров приближающих операторов в краевой задаче для оператора Шрёдингера в прямоугольной области конечномерного пространства.*

8.2.3. Теперь приведем группу задач, относящихся к построению приближений операторов в функциональных пространствах на некоммутативной локально компактной группе и сходимости таких приближений.

Задача 23. *Изучить приближение неприводимых представлений группы Гейзенберга посредством представлений приближающих ее конечных групп.*

Задача 24. *Рассматривая гильбертово пространство функций на группе Гейзенберга, построить приближения операторов, содержащихся в алгебре, порожденной операторами умножения на матричные элементы неприводимых представлений и сдвигами.*

Задача 25. *Изучить тот же вопрос, что и в задаче 24 для других аппроксимируемых нильпотентных групп и некоторых матричных групп над локальными полями.*

Задача 26. *Исследовать проблему аппроксимируемости простых групп Ли.*

Задача 27. *Изучить метод суммирования расходящихся рядов на группе, основанной на гиперприближении.*

Задача 28. *Исследовать связь между нестандартными методами суммирования расходящихся рядов с нестандартными расширениями не всюду определенных операторов.*

8.2.4. Гиперприближение оператора в функциональном пространстве на локально компактной группе не обязательно определяется гиперприближением этой группы. Более того, если область определения оператора — пространство функций, определенных не на группе, то такой метод гиперприближений вообще неприменим. Однако, используя ту или иную структуру области определения оператора, можно строить иные приближения гиперконечномерными операторами. Приведем несколько задач в этом направлении (задачи 30 и 31 сформулированы с участием В. Т. Плиева).

Задача 29. *Развить теорию определителей Фредгольма на основе подходящих гиперприближений.*

Задача 30. *Доказать теорему Лидского о совпадении матричного и спектрального следов ядерных операторов с помощью техники гиперприближений.*

Задача 31. *Применить нестандартные методы дискретизации к изучению спектральных свойств операторных пучков. В частности, получить обобщения теоремы Келдыша о полноте производных цепочек операторных пучков (см.* [93]*).*

Задача 32. *Построить какое-либо разумное гиперприближение преобразования Радона* [221] *в духе* [43, 45, 46, 325] *(см. главу 7).*

Задача 33. *Применить возможные гиперприближения преобразования Радона к анализу дискретных схем сканирования в компьютерной томографии* [182].

8.3. Комбинирование нестандартных методов

8.3.1. Мыслимы различные способы комбинирования нестандартных методов: можно строить инфинитезимальные конструкции в булевозначном универсуме или же искать булевозначные интерпретации в рамках теории внутренних и внешних множеств (см. [122, 391], а также параграфы 4.8–4.11). Однако на этих путях возникают серьезные сложности и не всегда ясно, как их обойти. В то же время последовательное применение нестандартных методов часто приводит к успеху, как, например, в [140, 390, 392, 393].

Задача 34. *Развить комбинированную технику, унифицирующую последовательное применение нестандартных методов.*

Задача 35. *Развить булевозначный вариант меры Лёба и соответствующую теорию интеграла. Изучить возникающий при этом класс операторов. В частности, построить теорию меры Лёба со значениями в пространстве Канторовича.*

Задача 36. *Построить булевозначную интерпретацию нестандартной оболочки. Изучить соответствующую конструкцию «спущенной» нестандартной оболочки.*

Задача 37. *Используя различные нестандартные методы, построить комбинированный принцип переноса с конечномерных нормированных алгебр на подходящие классы банаховых алгебр.*

Задача 38. *Используя комбинированную технику «скаляризации-дискретизации», получить гиперприближения представлений локально компактных групп в гильбертовом пространстве.*

8.3.2. Замена логической части ZF законами интуиционистской логики (см. [317, 326, 500]) приводит к интуиционистской теории множеств $\mathrm{ZF_I}$. Модели $\mathrm{ZF_I}$ также можно строить по той же схеме, что и булевозначные модели, см. [121, 125]. Именно, если Ω — полная гейтингова решетка, то универсум $\mathbb{V}^{(\Omega)}$ станет гейтинговозначной моделью теории $\mathrm{ZF_I}$, если определить соответствующие функции истинности $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ и $[\![\cdot = \cdot]\!]$ из $\mathbb{V}^{(\Omega)} \times \mathbb{V}^{(\Omega)}$ в $\mathbb{V}^{(\Omega)}$. Подробности см. в [317, 326, 500, 501]. Другие варианты моделирования интуиционистской теории множеств дают топосы и категории пучков, см. [38, 61, 220].

Задача 39. *Исследовать числовые системы в гейтинговозначных моделях и соответствующие им алгебраические структуры, см.* [38, 61, 220].

Задача 40. *Исследовать классические банаховы пространства в гейтинговозначных моделях, см.* [275].

Задача 41. *Приводит ли к какой-нибудь содержательной теории гильбертовых модулей интерпретация теории гильбертовых пространств в гейтинговозначной модели?*

8.3.3. *Пусть X и Y — нормированные пространства, X_0 — подпространство X и T_0 — ограниченный линейный оператор из X_0 в Y. Для любого $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ существует продолжение T оператора T_0 на все X с сохранением линейности и ограниченности, такое что $\|T\| \leq (1+\varepsilon)\|T_0\|$.*

В конструктивной математике теорема Хана — Банаха не выполняется. Однако устанавливается (см. [271]), что сформулированное утверждение верно для функционалов ($Y = \mathbb{R}$). Следовательно, данное утверждение для функционалов выполняется в гейтинговозначной модели.

Это же утверждение верно также и в классическом смысле (т. е. в универсуме фон Неймана) для компактных операторов, принимающих свои значения в пространстве $C(Q)$ непрерывных функций на компакте Q (см. [401]).

Задача 42. *Является ли схожесть упомянутых двух теорем о продолжении функционалов и операторов следствием какого-нибудь принципа переноса для гейтинговозначных моделей?*

Задача 43. *Для каких объектов и задач функционального анализа и теории операторов существует эффективный принцип переноса, использующий технику гейтинговозначных моделей? Топосов? Пучков?* (*Ср.* [318] *и сборник* [346].)

8.3.4. Пусть B — (квантовая) логика (см. [125]). Если определить функции $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ и $[\![\cdot = \cdot]\!]$ по аналогии с булевым случаем и ввести соответствующие оценки истинности формул, то в универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$ истинными окажутся аксиомы ZF_2–ZF_6 и AC. Таким образом, в $\mathbb{V}^{(B)}$ можно развивать теорию множеств. В частности, вещественные числа внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ будут соответствовать наблюдаемым в математической модели квантово-механической системы (см. [499]).

В [499] показано, что если B — квантовая логика (см. [125]), то универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ служит моделью для определенной квантовой теории множеств. Изучение квантовых теорий как логических систем, построение квантовой теории множеств и развитие соответствующей квантовой математики — интересная и актуальная проблематика, но в этом направлении сделано немного. Адекватные математические средства и правильные ориентиры намечаются, возможно, в теории алгебр фон Неймана и выросших из нее различных «некоммутативных» направлений (некоммутативная теория вероятностей, некоммутативное интегрирование и т. п.).

Задача 44. *Возможен ли какой-нибудь вариант принципа переноса из теории интеграла (меры) в некоммутативную теорию интеграла (меры) на основе модели $\mathbb{V}^{(B)}$ для квантовой теории множеств?*

Задача 45. *Построить некоммутативную теорию меры Лёба, т. е. применить конструкцию меры Лёба к мере, определенной на квантовой логике.*

Задача 46. *Построить теорию некоммутативного векторного (центрозначного) интегрирования на алгебре фон Неймана (AW^*-алгебре) и соответствующие пространства измеримых и интегрируемых элементов, используя метод булевозначных реализаций.*

Задача 47. *Какие свойства квантовых комплексных чисел (т. е. комплексных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ для квантовой логики B) соответствуют содержательным свойствам алгебр фон Неймана (AW^*-алгебр)?*

8.3.5. Пусть E — векторная решетка. Оператор T из E в произвольное векторное пространство F называют *ортогонально аддитивным*, если $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in E$ таких, что $x_1 \perp x_2$ (т. е. $x_1 \wedge x_2 = 0$). Множество всех ортогонально аддитивных порядково ограниченных операторов из E в F обозначают символом $\mathscr{U}(E, F)$; элементы $\mathscr{U}(E, F)$ называют *абстрактными операторами Урысона* (см. [426]).

Пусть F — пространство Канторовича. В [426] установлено, что пространство $\mathscr{U}(E, F)$ станет пространством Канторовича, если задать в $\mathscr{U}(E, F)$ порядок следующим образом: $S \geq 0$ тогда и только тогда, когда $S(x) \geq 0$ для всех $x \in E$, а $S_1 \geq S_2$ означает $S_1 - S_2 \geq 0$.

Ортогонально аддитивный эндоморфизм некоторого пространства Канторовича, перестановочный со всеми порядковыми проекторами, назовем *абстрактным оператором Немыцкого*.

Задача 48. *Применить метод «скаляризации-дискретизации» к нелинейным интегральным операторам Урысона, а также к их абстрактным аналогам — ограниченным ортогонально аддитивным операторам.*

Задача 49. *Дать булевозначную интерпретацию ортогонально аддитивного функционала и изучить соответствующий класс нелинейных операторов.*

Задача 50. *На основе задачи 49 описать компоненту, порожденную положительным ортогонально аддитивным оператором.*

Задача 51. *Дать булевозначную реализацию абстрактного оператора Немыцкого и получить его функциональное представление.*

8.3.6. Следующая задача по виду относится к выпуклому анализу. Однако она отражает принципиальную трудность, связанную с неоднозначностью операции стандартной части и других инфинитезимальных конструкций внутри булевозначного универсума.

Задача 52. *Пусть E — стандартное пространство Канторовича. Изучить субдифференциал ∂p оператора p, определенного формулой $p(e) := \inf{}^*\{f \in E : f \geq e\}$ для $e \in E$.*

8.4. Выпуклый анализ и экстремальные задачи

8.4.1. Начнем с задач о крайних точках.

Задача 53. *Изучить точки, бесконечно близкие к крайним того или иного субдифференциала.*

Задача 54. *Выяснить булевозначный статус о-крайних точек субдифференциалов* [126].

Задача 55. *Описать внешние эквивалентности, сохраняемые преобразованием Юнга — Фенхеля (см.* [126]*).*

8.4.2. Пусть (Q, Σ, μ) — пространство с мерой, X — банахово пространство, а E — банахова решетка. Обозначим буквой Y некоторое пространство измеримых вектор-функций $u : Q \to X$. Эквивалентные функции отождествляются. Допустим, что отображение $f : Q \times X \to E \cup \{+\infty\}$ выпукло по второй переменной $x \in X$ при почти всех $t \in Q$, а суперпозиция $t \mapsto f\bigl(t, u(t)\bigr)$ измерима при всех $u \in Y$. Тогда можно определить интегральный оператор I_f на Y формулой

$$I_f(u) := \int\limits_Q f\bigl(t, u(t)\bigr)\, d\mu(t) \quad (u \in Y).$$

При этом считается $I_f(u) := +\infty$ в том случае, когда вектор-функция $f\bigl(\cdot, u(\cdot)\bigr)$ не суммируема. Очевидно, что оператор $I_f : Y \mapsto E \cup \{+\infty\}$ выпуклый. В выпуклом анализе значительное внимание уделяется изучению операторов указанного вида.

В частности, рассматриваются вопросы о строении субдифференциала $\partial I_f(u_0)$ и преобразования Юнга — Фенхеля $(I_f)^*$. Общие свойства выпуклых операторов см. в [126, 148], а интегральных выпуклых функционалов $(E = \mathbb{R})$ — в [148, 241, 278].

В соответствии с результатами параграфов 6.3 и 6.4 для интегрального функционала I_f получаем представление

$$I_f(u) = {}^{\circ}\!\left(\Delta \sum_{k=1}^{N} f\bigl(t_k, u(t_k)\bigr)\right) \quad (u \in Y).$$

Задача 56. *Изучить выпуклый интегральный функционал I_f, используя указанное выше представление. В частности, вывести формулы для вычисления субдифференциала $\partial I_f(u_0)$.*

Задача 57. *Изучить выпуклые и невыпуклые интегранты и соответствующие нелинейные интегральные функционалы методом инфинитезимальной дискретизации.*

8.4.3. При изучении функционалов типа I_f часто используют различные теоремы о селекторах. Приведем точные формулировки двух результатов (см. [148, 241, 278]).

Пусть Q — топологическое (соответственно измеримое) пространство, X — банахово пространство. Соответствие $\Gamma \subset Q \times X$ называют *полунепрерывным снизу* (соответственно *измеримым*), если

$\Gamma^{-1}(G)$ открыто (соответственно измеримо) для каждого открытого $G \subset X$. Отображение $\gamma : \mathrm{dom}(f) \to X$ называют *селектором* Γ, если $\gamma(q) \in \Gamma(q)$ для всех $q \in \mathrm{dom}(\Gamma)$.

Теорема Майкла. *Пусть Q паракомпактно, соответствие Γ полунепрерывно снизу и для каждого $q \in Q$ множество $\Gamma(q)$ непусто, выпукло и замкнуто. Тогда существует непрерывный селектор соответствия Γ.*

Теорема Рохлина — Куратовского — Рыль-Нардзевского. *Пусть Q — измеримое пространство, X — польское (= полное сепарабельное метрическое) пространство и $\Gamma \subset Q \times X$ — измеримое соответствие, причем $\Gamma(q)$ замкнуто при всех $q \in Q$. Тогда существует измеримый селектор соответствия Γ.*

Задача 58. *Провести дискретизацию паракомпактного топологического пространства и дать нестандартное доказательство теоремы Майкла.*

Задача 59. *Разработать нестандартный подход к задаче о существовании измеримого селектора и, в частности, дать нестандартное доказательство теоремы Рохлина — Куратовского — Рыль-Нардзевского.*

8.4.4. Следующие задачи связаны с концепцией инфинитезимального оптимума (см. параграф 5.7). Соответствующие понятия из выпуклого анализа см. в [126, 241].

Задача 60. *Развить концепцию инфинитезимального решения для задач оптимального управления и вариационного исчисления.*

Задача 61. *Построить нестандартное расширение нелинейной абстрактной экстремальной задачи с операторными ограничениями и изучить инфинитезимальный оптимум.*

Задача 62. *Применить инфинитезимальный анализ к релаксации невыпуклых вариационных задач.*

Задача 63. *Построить субдифференциальное исчисление для функций на булевых алгебрах и изучить экстремальные задачи оптимального выбора элемента булевой алгебры.*

8.5. Разное

В этом параграфе собраны несколько групп задач, относящихся к различным разделам математики.

8.5.1. Относительная стандартность.

Задача 64. *Используя ломаные Эйлера с шагом, бесконечно малым относительно бесконечно малого параметра ε в уравнении Ван дер Поля, дать непосредственное доказательство существования «уток», не использующее замены переменных (переход к плоскости Льенара) (см. [70]).*

Рассмотрим еще одно определение относительной стандартности:

$$x : \mathrm{s}t : y \iff (\exists^{\mathrm{st}} f)(x = f(y)).$$

При таком определении оказывается, что существует натуральное число $n : \mathrm{s}t : y$, для которого имеются меньшие натуральные числа, но нестандартные относительно y. Таким образом, построена модель инфинитезимального анализа, в которой стандартный натуральный ряд «дырявый», однако принцип переноса и импликация $\to$ в принципе идеализации сохраняются.

Задача 65. *Построить какую-либо разумную аксиоматику такой версии инфинитезимального анализа.*

Предположим, что y — допустимое множество и (X, Σ, μ) является y-стандартным пространством с σ-аддитивной мерой μ. Элемент $x \in X$ назовем *y-случайным*, если для любого y-стандартного множества $A \in \Sigma$, такого, что $\mu(A) = 0$, выполнено $x \notin A$.

Из 6.4.2 (1) вытекает следующее утверждение:

Если (X_1, Σ_1, μ_1) и (X_2, Σ_2, μ_2) — стандартные пространства с конечными мерами, ξ_1 является случайным элементом X_1, а ξ_2 является ξ_1-случайным элементом X_2, то (ξ_1, ξ_2) является случайным элементом в произведении пространств $X_1 \times X_2$.

Задача 66. *Верно ли утверждение, обратное к приведенному?*

Задача 67. *Изучить свойства «размерной» («неоднородной») числовой прямой.*

Задача 68. *Можно ли оправдать физические манипуляции с дробными размерностями?*

8.5.2. Топология и меры Радона. Предположим, что X — внутреннее гиперконечное множество, $\mathscr{R} \subset X^2$ — отношение эквивалентности, представимое в виде пересечения подходящего семейства мощности κ внутренних множеств, где κ — некоторый кардинал. Нестандартный универсум мы будем предполагать κ^+-насыщенным (как обычно, κ^+ — наименьший кардинал, больший, чем κ). В множестве $X^\# := X/\mathscr{R}$ определим топологию, приняв $\{F^\# : F \subset X,$ F — внутреннее$\}$ за базу замкнутых множеств. Тогда топологическое пространство $X^\#$ компактно в том и только в том случае, если для любого внутреннего $A \supset \mathscr{R}$ найдется стандартно-конечное множество $K \subset X$ такое, что $X = A(K)$, где $A(K) := \{y \in X : (x, y) \in A$ для некоторого $x \in K\}$. При этом любой компакт может быть получен таким образом.

Задача 69. *Описать в этих терминах связные, односвязные, вполне несвязные и экстремально несвязные компакты.*

Задача 70. *Всякая ли мера Радона на $X^\#$ индуцируется некоторой мерой Лёба на X? Иными словами, верно ли, что для любой меры Радона μ на $X^\#$ найдется такая мера Лёба ν_L на X, что множество $A \subset X^\#$ является μ-измеримым тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(A)$ будет ν_L-измеримым (здесь $\pi : X \to X^\#$ — естественная проекция), причем $\mu(A) = \nu_L(\pi^{-1}(A))$.*

Известно, что для любого компакта $\mathscr{X}$ найдутся внутреннее гиперконечное множество X и внутреннее отображение $\Phi : X \to {}^*\mathscr{X}$ такие, что

$$(\forall^{\mathrm{st}} \xi \in {}^*\mathscr{X})(\exists x \in \mathscr{X})(\Phi(x) \approx \xi),$$

и если $\mathscr{R} := \{(x, y) : \Phi(x) \approx \Phi(y)\}$, то $X/\mathscr{R}$ гомеоморфно ${}^*\mathscr{X}$.

Задача 71. *Верно ли, что для любой меры Радона μ на $\mathscr{X}$ найдутся такое Φ, удовлетворяющее предыдущим условиям (или для любого такого Φ), и такая мера Лёба ν_L на X (индуцированная внутренней функцией $\nu : X \to {}^*\mathbb{R}$ — мерой на атомах), что для любой ограниченной почти всюду непрерывной функции f*

$$\int\limits_{\mathscr{X}} f \, d\mu = {}^\circ\Big(\sum_{x \in X} {}^*f\big(\Phi(x)\big)\nu(x)\Big)?$$

Задача 72. *Описать в терминах свойств $\mathscr{R}$ другие топологические свойства $X^\#$ (регулярность, локальную компактность и т. д.).*

Какие еще пространства можно получить указанным выше способом?

Задача 73. *Изучить монады, рассмотрев их как внешние отношения предпорядка (= квазиравномерные пространства).*

8.5.3. Теория целых функций.

Задача 74. *Описать класс нестандартных многочленов, тени которых являются целыми функциями; целыми функциями конечной степени σ.*

Напомним, что если f — внутренняя функция из ${}^*X$ в ${}^*\mathbb{R}$ такая, что значение $f({}^*x)$ доступно для $x \in X$, то *тень* или *стандартная часть* f — это функция ${}^\circ f$ из X в $\mathbb{R}$, определяемая правилом $({}^\circ f)(x) := {}^\circ(f({}^*x))$ для $x \in X$.

Задача 75. *Дать интерпретацию теоремы Винера — Пэли* [203] *в терминах задачи 74.*

Задача 76. *Дать нестандартные доказательства теоремы Котельникова и других интерполяционных теорем для целых функций* [147, 224].

Задача 77. *Используя разложение многочленов на множители, получить теоремы о разложении целых функций в бесконечное произведение (аналогично эйлеровскому разложению для синуса)* [77, 414].

8.5.4. Эргодическая теория. Эта серия задач (78–83) предложена А. Г. Качуровским (см. [124]).

Пусть N — бесконечно большое натуральное число. Числовую последовательность $x[N]$, как известно, называют *микросходящейся*, если для некоторого числа $(\overline{x})$ выполняется $x_M \approx (\overline{x})$ при всех бесконечно больших $M \leq N$. Пусть последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в обычном смысле. Следующие три случая определяют три типа сходимости:

(1) *Белая сходимость*: для любого бесконечно большого N последовательность начального участка $x[N]$ микросходится.

(2) *Цветная сходимость*: существуют такие два бесконечно больших натуральных числа N и M, что последовательность $x[N]$ является микросходящейся, а последовательность $x[M]$ — нет.

(3) *Черная сходимость*: для любого бесконечно большого натурального числа N последовательность $x[N]$ не является микросходящейся.

Статистическая эргодическая теорема Неймана. *Пусть U — это изометрический оператор в комплексном гильбертовом пространстве H, а H_U — подпространство инвариантных относительно U элементов H, т. е. $H_U := \{f \in H : Uf = f\}$, P_U — ортопроектор H_U. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U^k f - P_U f \right\|_H = 0$$

для любого $f \in H$.

Следствие. *Пусть (Ω, λ) — пространство с (конечной) мерой, T — его автоморфизм, $f \in L_2(\Omega)$. В этом случае последовательность $(\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(T^k x)\})_{n=0}^{\infty}$ сходится по норме $L_2(\Omega)$.*

Символом $\hat{L}_1(\Omega)$ обозначается внешнее множество таких элементов $f \in L_1(\Omega)$, что $\|f\|_1 \ll \infty$ и для всех $E \subset \Omega$ из $\lambda(E) \approx 0$ следует $\int_E f\, d\lambda \approx 0$. Введем также обозначение $\hat{L}_2(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) : f^2 \in \hat{L}_1(\Omega)\}$. О следующем результате см. в [91], а также [73, 74].

Теорема об ограниченной флуктуации. *Для любого элемента из $\widehat{L}_2(\Omega)$ соответствующая последовательность средних имеет ограниченную флуктуацию (и, следовательно, сходимость такой последовательности либо белая, либо цветная, т. е. нечерная).*

Задача 78. *Указать другие (возможно более слабые) достаточные признаки ограниченности флуктуации (и нечерной сходимости) последовательности средних.*

Задача 79. *Найти необходимые признаки для ограниченности флуктуации и нечерной сходимости, возможно более близкие к достаточному (указанному в формулировке теоремы об ограниченной флуктуации или получаемому при решении задачи 78).*

Задача 80. *Вопрос задачи 78 для статистической эргодической теоремы Неймана.*

Задача 81. *Вопрос задачи 79 для статистической эргодической теоремы Неймана и задачи 80.*

Задача 82. *Вопрос задачи 79 для эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина.*

Задача 83. *Вопрос задачи 79 для эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина и задачи 82.*

8.5.5. Приведем еще несколько задач, не попавших ни в один из предыдущих разделов.

Задача 84. *Сформулировать признаки околостандартности и предстандартности элементов классических банаховых пространств.*

Задача 85. *Построить теорию борнологических пространств, основываясь на монаде борнологии* [348].

Задача 86. *Сформулировать признаки сравнения для конечных сумм с бесконечно большим числом слагаемых.*

Задача 87. *Построить схемы гиперприближения общих алгебраических систем (булевозначных систем).*

Пусть X — банахово пространство, а B — полная булева алгебра. Обозначим через $B[X]$ пополнение внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ метрического пространства $X^{\wedge}$ — стандартного имени X.

Задача 88. *Для каких банаховых пространств X и булевых алгебр B внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ имеет место соотношение $B[X'] = B[X]'$?*

Приложение

Здесь мы эскизно изложим способ построения булевозначных моделей теории множеств. Полное изложение имеется в [88, 128, 503].

П.1. Пусть B — фиксированная полная булева алгебра. *Булевозначной интерпретацией* n-местного предиката P на классе X называют отображение $R : X^n \to B$. Предположим, что $\mathscr{L}$ — язык первого порядка с предикатами $P_0, P_1, \dots, P_n$, а $R_0, R_1, \dots, R_n$ — фиксированные булевозначные интерпретации этих предикатов на класс X.

Для формулы $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ языка $\mathscr{L}$ и $x_1, \dots, x_m \in X$ обычной рекурсией по длине φ определяют элемент $[\![\, \varphi(x_1, \dots, x_m) \,]\!]$ из B, называемый *оценкой истинности* φ.

Для атомных формул полагают

$$[\![\, P_k(x_1, \dots, x_m) \,]\!] := R_k(x_1, \dots, x_m).$$

На шагах индукции применяют правила:

$$[\![\, \varphi \vee \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \vee [\![\, \psi \,]\!],$$

$$[\![\, \varphi \wedge \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \wedge [\![\, \psi \,]\!],$$

$$[\![\, \varphi \to \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \Rightarrow [\![\, \psi \,]\!],$$

$$[\![\, \neg\varphi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!]^*,$$

$$[\![\, (\forall x)\, \varphi \,]\!] := \bigwedge_{x \in X} [\![\, \varphi(x) \,]\!],$$

$$[\![\, (\exists x)\, \varphi \,]\!] := \bigvee_{x \in X} [\![\, \varphi(x) \,]\!],$$

где в правых частях равенств знаки $\vee, \wedge, \Rightarrow, (\,\cdot\,)^*, \bigwedge, \bigvee$ обозначают булевы операции в B, причем $a \Rightarrow b := a^* \vee b$.

П.2. Говорят, что утверждение $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, где $x_1, \dots, x_m \in X$, а $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ — формула, *истинно* (верно, справедливо и т. п.) в алгебраической системе $\mathbb{X} := (X, R_0, \dots, R_n)$, и используют запись $\mathbb{X} \models \varphi(x_1, \dots, x_m)$, если $[\![\varphi(x_1, \dots, x_m)]\!] = \mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ — наибольший элемент полной булевой алгебры B.

Все логически истинные утверждения верны в $\mathbb{X}$. Если предикат P_0 есть равенство, то требуют, чтобы в B-системе $\mathbb{X} := (X, =, R_1, \dots, R_n)$ выполнялись аксиомы равенства. При выполнении этого требования в B-системе $\mathbb{X}$ будут справедливы все логически истинные предложения логики первого порядка с равенством, выразимые в языке $\mathscr{L} := \{=, P_1, \dots, P_n\}$.

П.3. Рассмотрим теперь булевозначную интерпретацию языка теории множеств Цермело — Френкеля с аксиомой выбора на классе X. Напомним, что язык этой теории $\mathscr{L} := \{=, \in\}$ есть язык первого порядка с двумя двуместными предикатами $=$ и $\in$. Интерпретации этих предикатов обозначим через $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ соответственно. Таким образом, $[\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!] : X \times X \to B$, причем

$$[\![= (x, y)]\!] = [\![x = y]\!], \quad [\![\in (x, y)]\!] = [\![x \in y]\!] \quad (x, y \in X).$$

Наша ближайшая цель — это охарактеризовать B-системы $\mathbb{X} := (X, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$, являющиеся моделями теории ZFC, т. е. такие, что $\mathbb{X} \models \mathrm{ZFC}$. Последнее равносильно тому, что в $\mathbb{X}$ выполняются все аксиомы ZFC. Так, например, согласно правилам П.1 справедливость аксиомы экстенсиональности П.4 (1) означает, что для любых $x, y \in X$ верно

$$[\![x = y]\!] = \bigwedge_{z \in X} ([\![z \in x]\!] \Leftrightarrow [\![z \in y]\!]),$$

где $a \Leftrightarrow b := (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ для $a, b \in B$.

П.4. B-систему $\mathbb{X}$ называют отделимой, если для любых элементов $x, y \in X$ соотношение $[\![x = y]\!] = \mathbb{1}$ влечет $x = y$. Произвольную B-систему $\mathbb{X}$ можно преобразовать в отделимую путем факторизации по отношению эквивалентности $\sim := \{(x, y) \in X^2 : [\![x = y]\!] = \mathbb{1}\}$ (фактор-класс вводится с помощью хорошо известного приема Фреге — Рассела — Скотта, см. [121]).

Говорят, что B-система $\mathbb{X}$ изоморфна $\mathbb{X}' := (X', [\![\cdot = \cdot]\!]', [\![\cdot \in \cdot]\!]')$, если существует биекция $\beta : X \to X'$, для которой $[\![x = y]\!] = [\![\beta x = \beta y]\!]$ и $[\![x \in y]\!] = [\![\beta x \in \beta y]\!]$ при всех $x, y \in X$.

П.5. *Теорема.* *Существует единственная с точностью до изоморфизма B-система $\mathbb{X}$, удовлетворяющая следующим требованиям:*

(1) $\mathbb{X}$ — *отделимая B-система* (см. П.4)*;*

(2) *аксиомы равенства истинны в $\mathbb{X}$;*

(3) *аксиомы экстенсиональности* П.4 (1) *и фундирования* П.4 (5) *истинны в* $\mathbb{X}$ (см. П.3)*;*

(4) *если функция $f : \mathrm{dom}(f) \to B$ такова, что $\mathrm{dom}(f) \in \mathbb{V}$ и $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{X}$, то существует $x \in \mathbb{X}$ такой, что*

$$[\![\, y \in x \,]\!] = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(f)} f(z) \wedge [\![\, z = y \,]\!] \quad (y \in \mathbb{X});$$

(5) *если $x \in \mathbb{X}$, то существует функция $f : \mathrm{dom}(f) \to B$ такая, что $\mathrm{dom}(f) \in \mathbb{V}$, $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{X}$, и выполнено равенство из (4) для каждого $y \in \mathbb{X}$.*

П.6. B-систему, удовлетворяющую требованиям П.5 (1–5), называют *булевозначной моделью* теории множеств и обозначают символом $\mathbb{V}^{(B)} := (\mathbb{V}^{(B)}, [\![\, \cdot = \cdot \,]\!], [\![\, \cdot \in \cdot \,]\!])$. Класс $\mathbb{V}^{(B)}$ именуют также *булевозначным универсумом.* Основные свойства $\mathbb{V}^{(B)}$ выражены в следующих принципах.

(1) ***Принцип переноса.*** *Каждая теорема теории множеств* ZFC *истинна в $\mathbb{V}^{(B)}$; символически $\mathbb{V}^{(B)} \models$* ZFC.

(2) ***Принцип перемешивания.*** *Если $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы в B, $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство элементов $\mathbb{V}^{(B)}$, то существует единственный элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $b_\xi \leq [\![\, x = x_\xi \,]\!]$ для всех $\xi \in \Xi$.*

Элемент x называют *перемешиванием семейства $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$* и обозначают $\mathrm{mix}_{\xi \in \Xi}\, b_\xi x_\xi$.

(3) ***Принцип максимума.*** *Для любой формулы $\varphi(u)$ теории* ZFC *(возможно, с константами из $\mathbb{V}^{(B)}$) существует элемент $x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что*

$$[\![\, (\exists u)\varphi(u) \,]\!] = [\![\, \varphi(x_0) \,]\!].$$

Отсюда, в частности, следует, что если $[\![\, (\exists! x)\, \varphi(x) \,]\!] = \mathbb{1}$, то существует, и притом единственный, элемент x_0 из $\mathbb{V}^{(B)}$, для которого выполняется $[\![\, \varphi(x_0)]\!] = \mathbb{1}$.

П.7. *Существует единственное отображение* $x \mapsto x^{\wedge}$ *из* $\mathbb{V}$ *в* $\mathbb{V}^{(B)}$, *удовлетворяющее требованиям:*

(1) $x = y \leftrightarrow [\![x^{\wedge} = y^{\wedge}]\!] = \mathbb{1}$;
$x \in y \leftrightarrow [\![x^{\wedge} \in y^{\wedge}]\!] = \mathbb{1} \quad (x, y \in \mathbb{V})$,

(2) $[\![z \in y^{\wedge}]\!] = \bigvee_{x \in y} [\![x^{\wedge} = z]\!] \quad (z \in \mathbb{V}^{(B)},\ y \in \mathbb{V})$.

Это отображение называют *каноническим вложением* универсума всех множеств в булевозначный универсум.

(3) ***Ограниченный принцип переноса.*** *Пусть формула* $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ *ограничена, т. е. в ее построении все кванторы имеют вид* $(\forall u)(u \in v \to \dots)$ *и* $(\exists u)(u \in v \wedge \dots)$, *или же в сокращенной записи* $(\forall u \in v)$ *и* $(\exists u \in v)$. *Тогда для произвольных* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ *выполняется*

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_1^{\wedge}, \dots, x_n^{\wedge}).$$

П.8. Для элемента $X \in \mathbb{V}^{(B)}$ его *спуск* $X{\downarrow}$ задают правилом $X{\downarrow} := \{x \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![x \in X]\!] = \mathbb{1}\}$. Множество $X{\downarrow}$ является *циклическим*, т. е. выдерживает всевозможные перемешивания своих элементов.

П.9. *Пусть* F *— соответствие из* X *в* Y *внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$, *т. е. выполнено* $X, Y, F \in \mathbb{V}^{(B)}$ *и* $[\![F \subset X \times Y]\!] = [\![F \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}$. *Существует, и притом единственное, соответствие* $F{\downarrow}$ *из* $X{\downarrow}$ *в* $Y{\downarrow}$ *такое, что для любого множества* $A \subset X{\downarrow}$ *внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *будет* $F(A){\downarrow} = F{\downarrow}(A{\downarrow})$. *При этом* $[\![F$ *— отображение из* X *в* $Y]\!] = \mathbb{1}$ *в том и только в том случае, если* $F{\downarrow}$ *— отображение из* $X{\downarrow}$ *в* $Y{\downarrow}$.

В частности, отображение $f : Z^{\wedge} \to Y$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, где $Z \in \mathbb{V}$, определяет единственную функцию $f{\downarrow} : Z \to Y{\downarrow}$, удовлетворяющую условию $f{\downarrow}(z) = f(z^{\wedge})$ для всех $z \in Z$.

П.10. Пусть $X \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$. Определим функцию $f : \mathrm{dom}(f) \to B$ формулами: $\mathrm{dom}(f) = X$ и $\mathrm{im}(f) = \{\mathbb{1}\}$. Согласно П.5 (4) существует элемент $X{\uparrow} \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![y \in X]\!] = \bigvee_{x \in X} [\![x = y]\!] \quad (y \in \mathbb{V}^{(B)}).$$

Элемент $X{\uparrow}$ (единственный в силу аксиомы экстенсиональности) называют *подъемом* X. При этом справедливы формулы:

(1) $Y{\downarrow}{\uparrow} = Y \quad (Y \in \mathbb{V}^{(B)})$,

(2) $X{\uparrow}{\downarrow} = \operatorname{mix}(X) \quad (X \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)}))$,

где $\operatorname{mix}(X)$ — множество всех перемешиваний вида $\operatorname{mix} b_\xi x_\xi$, $(x_\xi) \subset X$, а (b_ξ) — разбиение единицы в B.

П.11. *Пусть $X, Y \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$ и F — соответствие из X в Y. Равносильны утверждения:*

(1) *существует, и притом единственное, соответствие $F{\uparrow}$ из $X{\uparrow}$ в $Y{\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ такое, что имеет место равенство $\operatorname{dom}(F{\uparrow}) = \operatorname{dom}(F){\uparrow}$ и для каждого подмножества A множества $\operatorname{dom}(F)$ выполнено*

$$F{\uparrow}(A{\uparrow}) = F(A){\uparrow};$$

(2) *соответствие F экстенсионально, т. е.*

$$y_1 \in F(x_1) \to [\![x_1 = x_2]\!] \leq \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![y_1 = y_2]\!].$$

Соответствие F будет отображением из X в Y в том и только в том случае, если $[\![F{\uparrow} : X{\uparrow} \to Y{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$.

В частности, отображение $f : Z \to Y{\downarrow}$ порождает функцию $f{\uparrow} : Z^{\wedge} \to Y$ такую, что $f{\uparrow}(x^{\wedge}) = f(x)$ для всех $x \in Z$.

П.12. Предположим, что на непустом множестве X задана B-*структура*, т. е. определено отображение $d : X \times X \to B$, удовлетворяющее «аксиомам метрики»:

(1) $d(x, y) = \mathbb{0} \leftrightarrow x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) \vee d(z, y)$.

Тогда существуют элемент $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$ и инъекция $\iota : X \to X' := \mathscr{X}{\downarrow}$ такие, что $d(x, y) = [\![\iota(x) \neq \iota(y)]\!]$ и любой элемент $x' \in X'$ имеет представление $x' = \operatorname{mix} b_\xi \iota x_\xi$, где $(x_\xi) \subset X$, а (b_ξ) — разбиение единицы в B. Этот факт позволяет рассматривать множества с B-структурой как подмножества $\mathbb{V}^{(B)}$ и оперировать с ними с помощью описанных выше правил.

П.13. Примечания.

Г. Такеути назвал булевозначным анализом раздел функционального анализа, который использует одноименные модели теории множеств. В последнее время этот термин трактуют расширительно, включая в него методы, основанные на одновременном использовании двух различных булевозначных моделей теории множеств.

Стоит подчеркнуть, что создание булевозначных моделей не было связано с теорией векторных решеток. Необходимые для этого языковые и технические средства окончательно сформировались в рамках математической логики уже к 1960 г. Однако все еще не было той генеральной идеи, которая впоследствии привела к бурному прогрессу в теории моделей.

Такая идея пришла с открытием П. Дж. Коэна, установившего в 1963 г. абсолютную неразрешимость (в точном математическом смысле) классической континуум-проблемы. Именно в связи с осмыслением метода форсинга Коэна возникли булевозначные модели теории множеств, создание которых принято связывать с именами П. Вопенки, Д. Скотта, Р. Соловея (см. [30, 88, 121, 503]).

Подробно этот материал представлен в [120, 121, 125, 503]. Изложенные приемы в разных вариантах широко используются в исследованиях по теории булевозначных моделей. Техника спусков и подъемов наиболее приспособлена к задачам анализа. Погружение множеств с булевой структурой в булевозначный универсум использует метод Соловея — Тенненбаума, предложенный ими ранее для погружения полных булевых алгебр [481].

Литература

1. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.

2. Александров А. Д. Общий взгляд на математику // Математика, ее содержание, методы и значение.—М.: Изд-во АН СССР, 1956.—Т. 1.—С. 5–78.

3. Александров А. Д. Проблемы науки и позиция ученого.—Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1988.—512 с.

4. Алексеев М. А., Глебский Л. Ю., Гордон Е. И. Об аппроксимациях групп, групповых действий и алгебр Хопфа // Теория представления, динамические системы, комбинаторика и алгебра. Методы. 3 / Записки научн. семин. С.-Петербург. отдел. мат. ин-та Стеклова (ПОМИ) 256.—1999.—С. 224–262.

5. Альбеверио С., Фенстад Й., Хёэг-Крон Р., Линдстрём Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике.—М.: Мир, 1990.—616 с.

6. Андреев П. В. О принципе стандартизации в теории ограниченных множеств // Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, мат., мех.—1997.—№ 1.—С. 68–70.

7. Андреев П. В., Гордон Е. И. Нестандартная теория классов // Владикавказский мат. журн. — 1999. — Т. 1, № 4. — С. 2–16.

8. Архимед. Сочинения.—М.: Физматгиз, 1962.—639 с.

9. Березин Ф. А., Шубин М. А. Уравнение Шрёдингера. — М.: Изд-во МГУ, 1983.—392 с.

10. Беркли Дж. Сочинения.—М.: Мысль, 2000.—556 с.

11. Биркгоф Г. Теория решеток.—М.: Наука, 1984.—566 с.

12. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко А. Г. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики.—М.: Наука, 1983.—328 с.

13. Боголюбов А. Н. «Читайте, читайте Эйлера: он учитель всех нас» // Наука в СССР.—1984.—№ 6.—С. 98–104.

14. Борель Э. Вероятность и достоверность.—М.: Физматгиз, 1961. —119 с.

15. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.— М.: Мир, 1982.—511 с.

16. Бурбаки Н. Теория множеств.—М.: Мир, 1965.—455 с.

17. Бухвалов А. В. Порядково ограниченные операторы в векторных решетках и пространствах измеримых функций // Итоги науки и техники. Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1988.—Т. 26.—С. 3–63.

18. Бухвалов А. В., Векслер А. И., Гейлер В. А. Нормированные решетки // Итоги науки и техники. Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1980.—Т. 18.—С. 125–184.

19. Бухвалов А. В., Векслер А. И., Лозановский Г. Я. Банаховы решетки — некоторые банаховы аспекты теории // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, вып. 2.—С. 137–183.

20. Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М. Векторные решетки и интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1991.—214 с.

21. Ван Хао, Мак-Нотон Р. Аксиоматические системы теории множеств.—М.: Изд-во иностр. лит., 1963.—54 с.

22. Векслер А. И. О новой конструкции дедекиндова пополнения векторных структур и l-групп с делением // Сиб. мат. журн.—1969.—Т. 10, № 6.—С. 70–73.

23. Векслер А. И. Банаховы циклические пространства и банаховы структуры // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 213, № 4. — С. 770–773.

24. Векслер А. И., Гейлер В. А. О порядковой и дизъюнктной полноте линейных полуупорядоченных пространств // Сиб. мат. журн.—1972.—Т. 13, № 1.—С. 43–51.

25. Векслер А. И., Гордон Е. И. Нестандартное расширение не всюду определенных положительных операторов // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 4.—С. 720–727.

26. Вершик А. М., Гордон Е. И. Группы, локально вложимые в класс конечных групп // Алгебра и анализ. — 1997. — № 1. — С. 72–86.

27. Виленкин Н. Командор «Лузитании» // Знание — сила. — 1984.—№ 1.—С. 27–29.

28. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. p-Адический анализ и математическая физика.—М.: Наука, 1994.—352 с.

29. Владимиров Д. А. Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.—318 с.

30. Вольтер Стихи и проза.—М.: Изд. «Московский рабочий», 1997.—382 с.

31. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств. —М.: Мир, 1983.—150 с.

32. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.—407 с.

33. Выгодский М. Я. Основы исчисления бесконечно малых.—М.; Л.: ГТТИ, 1933.—464 с.

34. Гёдель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 8, вып. 1.—С. 96–149.

35. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики.—М.: Наука, 1979.—558 с.

36. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ.—М.: Наука, 1969.—475 с.

37. Гоббс Т. Избранные произведения. Т. 1.—М.: Мысль, 1965.—583 с.

38. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики.—М.: Мир, 1983.—488 с.

39. Гордон Е. И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 237, № 4.—С. 773–775.

40. Гордон Е. И. K-пространства в булевозначных моделях теории множеств // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 258, № 4.—С. 777–780.

41. Гордон Е. И. К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 5.—С. 55–65.

42. Гордон Е. И. Рационально полные полупервичные коммутативные кольца в булевозначных моделях теории множеств.—Горький: ВИНИТИ, № 3286-83Деп, 1983.—35 с.

43. Гордон Е. И. Нестандартные конечномерные аналоги операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$// Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 2.—С. 45–59.

44. Гордон Е. И. Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Э. Нельсона // Сиб. мат. журн.—1989. —Т. 30, № 1.—С. 89–95.

45. Гордон Е. И. Гиперконечные аппроксимации локально компактных абелевых групп // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 314, № 5.—С. 1044–1047.

46. Гордон Е. И. Нестандартный анализ и компактные абелевы группы // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 2.—С. 26–40.

47. Гордон Е. И. О мерах Лёба // Известия вузов.—1991.—№ 2.—С. 25–33.

48. Гордон Е. И. Элементы булевозначного анализа. Учебное пособие.—Горький: Горьковск. ун-т, 1991.

49. Гордон Е. И., Любецкий В. А. Некоторые применения нестандартного анализа в теории булевозначных мер // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 256, № 5.—С. 1037–1041.

50. Гордон Е. И., Морозов С. Ф. Булевозначные модели теории множеств.—Горький: Горьковск. ун-т, 1982.—72 с.

51. Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А. О формуле Кюннета для L_p-когомологий искривленных произведений // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 5.—С. 29–42.

52. Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А. Об аппроксимации точных и замкнутых дифференциальных форм финитными // Сиб. мат. журн.—1992.—Т. 33, № 2.—С. 49–65.

53. Гретцер Г. Общая теория решеток.—М.: Мир, 1982.—454 с.

54. Гурарий В. П. Групповые методы коммутативного гармонического анализа// Итоги науки и техники: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.—М.: ВИНИТИ, 1988.—Т. 25.—С. 5–311.

55. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.— Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.—С. 63–211.

56. Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартный анализ и векторные решетки. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2005.—x+400 с.

57. Девис М. Прикладной нестандартный анализ. — М.: Мир, 1980. — 236 с.

58. Деллашери К. Емкости и случайные процессы. — М.: Мир, 1972. —192 с.

59. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация.—М.: Наука, 1981.—384 с.

60. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы гладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.—М.: Наука, 1990.— 431 с.

61. Джонстон П. Т. Теория топосов.—М.: Наука, 1986.—438 с.

62. Диксмье Ж. C^*-алгебры и их представления. — М.: Наука, 1974.—399 с.

63. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств.—Киев: Вища школа, 1980.—215 с.

64. Драгалин А. Г. Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ.—М.: Едиториал, 2003.—543 с.

65. Емельянов Э. Ю. Инвариантные гомоморфизмы нестандартного расширения булевых алгебр и векторных решеток // Сиб. мат. журн.—1997.—Т. 38, № 2.—С. 286–296.

66. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика.—М.: Наука, 1987.—320 с.

67. Есенин-Вольпин А. С. Анализ потенциальной осуществимости // Логические исследования.—М.: Изд-во АН СССР, 1959.—С. 218–262.

68. Ермолаева Н. С. Третье письмо Н. Н. Лузина М. Я. Выгодскому и несостоявшееся издание математической энциклопедии // Историко-математические исследования.—М.: Наука, 1999.—Вторая серия, вып. 3(38).—С. 92–99.

69. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 165 с.

70. Звонкин А. К., Шубин М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.—1984.—Т. 39, вып. 2.—С. 77–127.

71. Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д. Фрактали, подобие, промежуточная асимптотика // Успехи физ. наук.—1985.—Т. 146, № 3.—С. 493–506.

72. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 1.—М.: Наука, 1981.—543 с.

73. Иванов В. В. Геометрические свойства монотонных функций и вероятности случайных колебаний//Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37, № 1.—С. 117–150.

74. Иванов В. В. Колебания средних в эргодической теореме// Докл. РАН.—1996.—Т. 347, № 6.—С. 736–738.

75. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ.—М.: Наука, 1979.—719 с.

76. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.—М.: Мир, 1973.—150 с.

77. Кановей В. Г. О корректности эйлерова метода разложения синуса в бесконечное произведение // Успехи мат. наук.—1988.—Т. 43, вып. 4.—С. 57–81.

78. Кановей В. Г. Неразрешимые гипотезы в теории внутренних множеств Нельсона // Успехи мат. наук.—1991.—Т. 46, вып. 6.—С. 3–50.

79. Кант И. Сочинения. Т. 3.—М.: Мысль, 1964.—799 с.

80. Кантор Г. Труды по теории множеств.—М.: Наука, 1985.—430 с.

81. Канторович Л. В. О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР.—1935.—Т. 4, № 1–2.—С. 11–14.

82. Канторович Л. В. К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 1, № 7.—С. 271–274.

83. Канторович Л. В. О некоторых классах линейных операций // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 3, № 1.—С. 9–13.

84. Канторович Л. В. Об одном классе функциональных уравнений // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 4, № 5.—С. 211–216.

85. Канторович Л. В. Общие формы некоторых классов линейных операций // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 3, № 9.—С. 101–106.

86. Канторович Л. В. О функциональных уравнениях // Труды ЛГУ.—1937.—Т. 3, № 7.—С. 17–33.

87. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.

88. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.

89. Карно Л. Размышления о метафизике бесконечно малых.—М.-Л.: ОНТИ, 1936.—325 с.

90. Качуровский А. Г. Ограниченность флуктуации средних в статистической эргодической теореме // Оптимизация.—1990.—Вып. 48(65).—С. 71–77.

91. Качуровский А. Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи мат. наук.—1996.—Т. 51, вып. 4.—С. 73–124.

92. Кейслер Г., Чен Ч. Теория моделей.—М.: Мир, 1977.—614 с.

93. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов // Успехи мат. наук.—1971.—Т. 26, вып. 4.—С. 15–41.

94. Клини С. Математическая логика.—М.: Мир, 1973.—480 с.

95. Колесников Е. В., Кусраев А. Г., Малюгин С. А. О мажорируемых операторах.—Новосибирск, 1988.—32 с. (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 26).

96. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика.—М.: Мир, 1969.—417 с.

97. Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика. Дополнительные главы.—М.: Изд-во Московск. ун-та, 1984.—119 с.

98. Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы.—М.: Наука, 1984.—320 с.

99. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.—М.: Наука, 1980.—383 с.

100. Король А. М., Чилин В. И. Измеримые операторы в булевозначной модели теории множеств // Докл. АН УзССР.—1989.— № 3.—С. 7–9.

101. Коэн П. Дж. Теория моделей и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1973.—347 с.

102. Коэн П. Дж. Об основании теории множеств // Успехи мат. наук.—1974.—Т. 29, вып. 5.—С. 169–176.

103. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений.—М.: Физматгиз, 1962.—396 с.

104. Кузьмина И. С. Лузитания и ее создатель // Наука в СССР.—1985.—№ 1.—С. 107–110.

105. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления.—М.: Наука, 1967.—Т. 1.—804 с.

106. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов.—М.: Просвещение, 1967.—665 с.

107. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств.—М.: Мир, 1970.—416 с.

108. Кусраев А. Г. Субдифференциалы негладких операторов и необходимые условия экстремума // Оптимизация/Ин-т математики СО АН СССР.—Новосибирск, 1980.—Вып. 24.—С. 75–117.

109. Кусраев А. Г. Об одном общем методе субдифференцирования // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 257, № 4.—С. 822–826.

110. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 267, № 5.—С. 1049–1052.

111. Кусраев А. Г. Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1312–1316.

112. Кусраев А. Г. О субдифференциалах композиции множеств и функций // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 2.—С. 116–127.

113. Кусраев А. Г. О субдифференциале суммы // Сиб. мат. журн. —1984.—Т. 25, № 4.—С. 107–110.

114. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.— Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.

115. Кусраев А. Г. Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии в «целом» и математическому анализу. — Новосибирск: Наука, 1987.— С. 84–123.

116. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ и JB-алгебры // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 1.—С. 124–134.

117. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.—С. 212–292.

118. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ инволютивных банаховых алгебр.—Владикавказ: Изд-во Северо-Осетинского ун-та, 1996.—96 с.

119. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Анализ субдифференциалов с помощью булевозначных моделей // Докл. АН СССР.— 1982.—Т. 265, № 5.—С. 1061–1064.

120. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Записки по булевозначному анализу.—Новосибирск: Новосибирск. ун-т, 1984.—80 с.

121. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.—344 с.; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.—435 p.

122. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. О комбинировании нестандартных методов // Сиб. мат. журн.—1990.—Т. 31, № 5.— С. 111–119.

123. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Теорема Крейна — Мильмана и пространства Канторовича // Оптимизация.— 1992.— № 51 (68).—С. 5–18.

124. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. 55 нерешенных задач из нестандартного анализа.—Новосибирск: Изд-во НГУ, 1993.—16 с.

125. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Булевозначный анализ. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.—398 с.

126. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. 1, 2.—Новосибирск: Изд-во Института математики, 2002–2003.—viii+372 с.; viii+413 с.; Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1995.—398 p.

127. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Об инфинитезимально оптимальных траекториях // Сиб. мат. журн.—2004.—Т. 45, № 1.—С. 164–170.

128. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ. — М.: Наука, 2005.—526 с.

129. Кутателадзе С. С. Инфинитезимальные касательные конусы // Сиб. мат. журн.—1985.—Т. 27, № 6.—С. 67–76.

130. Кутателадзе С. С. Микропределы, микросуммы и теплицевы матрицы // Оптимизация.—1985.—Вып. 35.—С. 16–23.

131. Кутателадзе С. С. Нестандартный анализ касательных конусов // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 284, № 3.—С. 525–527.

132. Кутателадзе С. С. Вариант нестандартного выпуклого программирования // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. 27, № 4. —С. 84–92.

133. Кутателадзе С. С. Основы нестандартного математического анализа.—Новосибирск: Изд-во НГУ.—Ч. 1: Наивное обоснование инфинитезимальных методов.—1986.—44 с.; Ч. 2: Теоретико-множественное обоснование нестандартного анализа. — 1986.—34 с.; Ч. 3: Монады в общей топологии.—1986.—34 с.

134. Кутателадзе С. С. О нестандартных методах в субдифференциальном исчислении // Дифференциальные уравнения с частными производными.—Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986.—С. 116–120.

135. Кутателадзе С. С. Циклические монады и их применения // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 1.—С. 100–110.

136. Кутателадзе С. С. Инфинитезимали и исчисление касательных // Исследования по геометрии «в целом» и математическому анализу.—Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.—С. 123–135.

137. Кутателадзе С. С. О топологических понятиях, близких к непрерывности // Сиб. мат. журн. — 1987. — Т. 28, № 1. — С. 143–147.

138. Кутателадзе С. С. Эпипроизводные, определяемые набором инфинитезималей // Сиб. мат. журн. — 1987. — Т. 28, № 4. — С. 140–144.

139. Кутателадзе С. С. Монады ультрафильтров и экстенсиональных фильтров // Сиб. мат. журн. — 1989. — Т. 30, № 1. — С. 129–133.

140. Кутателадзе С. С. Об осколках положительных операторов // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 5.—С. 111–119.

141. Кутателадзе С. С. Установки нестандартного анализа // Современные проблемы анализа и геометрии.—Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.—С. 153–182 (Труды Ин-та математики СО АН СССР. Т. 14).

142. Кутателадзе С. С. Формализмы нестандартного анализа.— Новосибирск: Новосибирск. ун-т, 1999.—52 с.

143. Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2006.—x+354 с.

144. Лаврентьев М. А. Николай Николаевич Лузин // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 29, вып. 5.—С. 177–182.

145. Лаврентьев М. А. Наука. Технический прогресс. Кадры. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.—287 с.

146. Ламбек И. Кольца и модули.—М.: Мир, 1971.—279 с.

147. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.—632 с.

148. Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике.—М.: Наука, 1985.—352 с.

149. Леге Ж.-М. Наука, техника и мир // Наука и жизнь.—1986.— № 11.—С. 3–11.

150. Лейбниц Г. В. Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, вып. 1. — С. 166–173.

151. Лейбниц Г. В. Сочинения. Т. 1.—М.: Мысль, 1983.—688 с.

152. Лейбниц Г. В. Сочинения. Т. 2.—М.: Мысль, 1984.—736 с.

153. Ленг С. Алгебра.—М.: Мир, 1968.—564 с.

154. Лузин Н. Н. Современное состояние теории функций действительного переменного // Труды Всероссийского съезда математиков в Москве 27 апреля–4 мая 1927 г.—М.-Л.: Главнаука, 1928.—С. 11–32.

155. Лузин Н. Н. Теория функций действительного переменного.— М.: Учпедгиз, 1940.—302 с.

156. Лузин Н. Н. Собрание сочинений.—М.: Изд-во АН СССР, 1959. —Т. 3.—507 с.

157. Лузин Н. Н. Дифференциальное исчисление.—М.: Высш. шк., 1961.—477 с.

158. Лузин Н. Н. — выдающийся математик и педагог // Вестн. АН СССР.—1984.—№ 11.—С. 95–102.

159. Любецкий В. А. О некоторых алгебраических вопросах нестандартного анализа // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 280, № 1.—С. 38–41.

160. Любецкий В. А., Гордон Е. И. Булевы расширения равномерных структур // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам.—М.: Наука, 1983.—С. 82–153.

161. Любецкий В. А., Гордон Е. И. Вложение пучков в гейтинговозначный универсум и теоремы переноса // Докл. АН СССР. —1983.—Т. 268, № 4.—С. 794–798.

162. Лянце В. Э. Возможно ли игнорировать нестандартный анализ // Общая теория граничных задач.—Киев: Наук. думка, 1983.—С. 108–112.

163. Лянце В. Э. О нестандартном анализе // Математика сегодня. —Киев: Вища школа, 1986.—С. 26–44.

164. Лянце В. Э., Кудрик Т. С. О функциях дискретного переменного // Математика сегодня.—Киев: Вища школа, 1987.—19 с.

165. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. — Л.: ЛГУ, 1985. — 416 с.

166. Мазья В. Г., Хавин В. П. Нелинейная теория потенциала // Успехи мат. наук.—1972.—Т. 27, вып. 6.—С. 67–138.

167. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.

168. Малыхин В. И. Новые моменты в общей топологии, связанные с форсингом // Успехи мат. наук. — 1988. — Т. 43, вып. 4. — С. 83–94.

169. Малыхин В. И., Пономарев В. И. Общая топология (теоретико-множественное направление) // Алгебра. Топология. Геометрия.—М.: ВИНИТИ, 1975.—Т. 13.—С. 149–229.

170. Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое.—М.: Сов. радио, 1979.—168 с.

171. Медведев Ф. А. Канторовская теория множеств и теология // Историко-математические исследования.—М.: Наука, 1985.—Вып. 29. —С. 209–240.

172. Медведев Ф. А. Нестандартный анализ и история классического анализа // Закономерности развития современной математики.—М.: Наука, 1987.—С. 75–84.

173. Мендельсон Э. Введение в математическую логику.—М.: Наука, 1971.—320 с.

174. Мерфи Дж. C^*-алгебры и теория операторов.—М.: Факториал, 1997.—332 с.

175. Молчанов В. А. Одномерный математический анализ в нестандартном изложении. — Саратов: СГПИ им. К. А. Федина, 1989.—80 с.

176. Молчанов В. А. О применении повторных нестандартных расширений в топологии // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 3.—С. 64–71.

177. Молчанов В. А. Введение в нестандартный анализ.—Саратов: СГПИ им. К. А. Федина, 1990.—89 с.

178. Молчанов В. А. Нестандартные сходимости в пространствах отображений.—Саратов: СГПИ им. К. А. Федина, 1991.—96 с.

179. Мостовский А. Конструктивные множества и их приложения. —М.: Мир, 1973.—256 с.

180. Наймарк М. А. Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968. — 664 с.

181. Наймарк М. А. Теория представления групп. — М.: Наука, 1976. — 560 с.

182. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии.—М.: Мир, 1990.—288 с.

183. Начала Евклида. Книги VII–X. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949. — 511 с.

184. фон Нейман Дж. Избранные труды по функциональному анализу. Т. 1, 2.—М.: Наука, 1987.—376 с.+370 с.

185. Нельсон Э. Радикально элементарная теория вероятностей. — Новосибирск: Изд-во Института математики им. С. Л. Соболева, 1995.—120 с.

186. Непейвода Н. Н. Прикладная логика.—Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000.—491 с.

187. Новиков П. С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической.—М.: Наука, 1977.—328 с.

188. Ньютон И. Математические работы.—М.; Л.: ОНТИ, 1937.—452 с.

189. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ.—М.: Мир, 1988.—510 с.

190. Перэр И. Общая теория бесконечно малых // Сиб. мат. журн. —1990.—Т. 31, № 3.—С. 103–124.

191. Пич А. Операторные идеалы.—М.: Мир, 1982.—536 с.

192. Понтрягин Л. С. Анализ бесконечно малых.—М.: Наука, 1980. —256 с.

193. Понтрягин Л. С. Математический анализ для школьников.—М.: Наука, 1980.—88 с.

194. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы.—М.: Наука, 1984.—520 с.

195. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел.—М.: Наука, 1971.—416 с.

196. Проблемы Гильберта.—М.: Наука, 1969.—240 с.

197. Расева Е., Сикорский Р. Метаматематика математики.—М.: Наука, 1972.—592 с.

198. Ревуженко А. Ф. Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ.—Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000.—430 с.

199. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. Ч. I, кн. 1.—Новосибирск: Изд-во Института математики, 1999.—454 с.

200. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики.—М.: Мир, 1977–1982.—Т. 1: Функциональный анализ. —1977.—357 с. Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. — 1978.—395 с. Т. 3: Теория рассеяния.—1982.—443 с. Т. 4: Анализ операторов.—1982.—428 с.

201. Рисс Ф., Сёкефальви–Надь Б. Лекции по функциональному анализу.—М.: Мир, 1979.—587 с.

202. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры.—М.: Наука, 1967.—376 с.

203. Рудин У. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1975.—449 с.

204. Рузавин Г. И. Философские проблемы оснований математики. —М.: Наука, 1983.—302 с.

205. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И. Упорядоченные алгебры.—Ташкент: Фан, 1983.

206. Севери Ф. Итальянская алгебраическая геометрия, ее строгость, методы и проблемы // Математика.—1959.—Т. 3, № 1.—С. 111–141.

207. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике.—М.: Мир, 1990.—240 с.

208. Секст Эмпирик. Сочинения.—М.: Мысль, 1976.—Т. 1.—399 с.

209. Сикорский Р. Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—376 с.

210. Соболев В. И. О полуупорядоченной мере множеств, измеримых функциях и некоторых абстрактных интегралах // Докл. АН СССР.—1953.—Т. 91, № 1.—С. 23–26.

211. Соловьёв Ю. П., Троицкий Е. В. C^*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии.—М.: Факториал, 1996.—352 с.

212. Строян К. Д. Инфинитезимальный анализ кривых и поверхностей // Справочная книга по математической логике. Ч. 1.—М.: Наука, 1982.—С. 199–234.

213. Треногин В. А. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1980.—496 с.

214. Троицкий В. Г. Нестандартная дискретизация и продолжение по Лёбу семейства мер // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 3.—С. 190–198.

215. Успенский В. А. Семь размышлений на темы философии математики // Закономерности развития современной математики. —М.: Наука, 1987.—С. 106–155.

216. Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ.—М.: Наука, 1987.—128 с.

217. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977.—688 с.

218. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств.—М.: Мир, 1966.—555 с.

219. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы.—М.: Мир, 1965.—342 с.

220. Фурман М. П. Логика топосов // Справочная книга по математической логике. Ч. 4.—М.: Наука, 1983.—С. 241–277.

221. Хелгасон С. Преобразование Радона.—М.: Мир, 1983.— 152 с.

222. Хрбачек К. Заметки о нестандартной теории классов // Фунд. и прикл. мат.—2005.—Т. 11, вып. 5.—С. 233–255.

223. Хрестоматия по истории математики. — М.: Просвещение, 1977.—234 с.

224. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике.—М.: Наука, 1971.—408 с.

225. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. —М.: Наука, 1975.—664 с.

226. Царенко М. Ш., Шульгейфер Е. Ф. Основы теории категорий. —М.: Наука, 1974.—256 с.

227. Чёрч А. Введение в математическую логику. — М.: Изд-во иностр. лит., 1965.—488 с.

228. Чилин В. И. Частично упорядоченные бэровские инволютивные алгебры // Современные проблемы математики. Новейшие достижения.—М.: ВИНИТИ, 1985.—Т. 27.—С. 99–128.

229. Шамаев И. И. О разложении и представлении регулярных операторов // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 2.— С. 192–202.

230. Шамаев И. И. Оператор, дизъюнктный решеточным гомоморфизмам, операторам Магарам и интегральным операторам // Оптимизация.—1990.— Вып. 46.— С. 154–159.

231. Шамаев И. И. Топологические методы в теории регулярных операторов в пространствах Канторовича (Докт. дис.). — Якутск, 1994.

232. Шварц Л. Анализ. Т. 1.—М.: Мир, 1972.—824 с.

233. Шенфильд Дж. Р. Математическая логика.—М.: Наука, 1975. —520 с.

234. Шенфильд Дж. Р. Аксиомы теории множеств // Справочная книга по математической логике. Ч. 2.—М.: Наука, 1982.— С. 9–34.

235. Шотаев Г. Н. О билинейных операторах в решеточно нормированных пространствах // Оптимизация.—1986.—Вып. 37.— С. 38–50.

236. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. Т. 1. — М.: ОНТИ, 1936.—352 с.

237. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. — Л.: Гостехиздат, 1949.—580 с.

238. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 1.—М.: Гостехиздат, 1950.—415 с.

239. Эклоф П. Теория ультрапроизведений для алгебраистов // Справочная книга по математической логике. Ч. 1.— М.: Наука, 1982.—С. 109–140.

240. Энгелер Э. Метаматематика элементарной математики.—М.: Мир, 1987.—127 с.

241. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. —М.: Мир, 1979.

242. Юшкевич А. П. Лейбниц и основание исчисления бесконечно малых // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 3, вып. 1.—С. 150–164.

243. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.—М.: Мир, 1974.—488 с.

244. Aksoy A. G. and Khamsi M. A. Nonstandard Methods in Fixed Point Theory.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1990.—139 p.

245. Albeverio S., Gordon E. I., and Khrennikov A. Yu. Finite dimensional approximations of operators in the Hilbert spaces of functions on locally compact abelian groups // Acta Appl. Math.— 2000.—V. 64, No. 1.—P. 33–73.

246. Albeverio S., Luxemburg W. A. J., and Wolff M. .P. H. (eds.) Advances in Analysis, Probability and Mathematical Physics: Contributions of Nonstandard Analysis.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.—x+ 251 p.

247. Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Locally Solid Riesz Spaces.—New York etc.: Academic Press, 1978.

248. Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Positive Operators.—New York: Academic Press, 1985.—367 p.

249. Anderson R. M. A nonstandard representation of Brownian motion and Itô integration // Israel J. Math. Soc. — 1976. — V. 25. — P. 15–46.

250. Anderson R. M. Star-finite representations of measure spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1982.—V. 271.—P. 667–687.

251. Anselone P. M. Collectively Compact Operator Approximation Theory and Applications to Integral Equations. — Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1971.

252. Arens R. F. and Kaplansky I. Topological representation of algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1948. — V. 63, No. 3. — P. 457–481.

253. Arkeryd L. Nonstandard analysis // Amer. Math. Monthly.—2005.—V. 112, No. 12.—P. 926–928.

254. Arkeryd L. and Bergh J. Some properties of Loeb–Sobolev spaces // J. London Math. Soc.—1986.—V. 34, No. 2.—P. 317–334.

255. Arkeryd L. O., Cutland N. J., and Henson C. W. (eds.) Nonstandard Analysis. Theory and Applications.—Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1997.—380 p.

256. Arveson W. Operator algebras and invariant subspaces// Ann. of Math.—1974.—V. 100, No. 2.—P. 433–532.

257. Arveson W. An Invitation to C^*-Algebras.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1976.—106 p.

258. Attouch H. Variational Convergence for Functions and Operators. —Boston etc.: Pitman, 1984.

259. Aubin J.-P. and Frankowska H. Set-Valued Analysis. — Boston: Birkhäuser, 1990.

260. Auslander L. and Tolimieri R. Is computing with finite Fourier transform pure or applied mathematics? // Bull. Amer. Math. Soc.—1979.—V. 1, No. 6.—P. 847–897.

261. Bagarello F. Nonstandard variational calculus with applications to classical mechanics. I: An existence criterion// Internat. J. Theoret. Phys.—1999.—V. 38, No. 5.—P. 1569–1592.

262. Bagarello F. Nonstandard variational calculus with applications to classical mechanics. II: The inverse problem and more // Internat. J. Theoret. Phys.—1999.—V. 38, No. 5.—P. 1593–1615.

263. Ballard D. Foundational Aspects of "Non" Standard Mathematics. —Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.—135 p.

264. Bell J. L. Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—New York etc.: Clarendon Press, 1985.—xx+165 p.

265. Bell J. L. and Slomson A. B. Models and Ultraproducts: an Introduction.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1969.—ix+322 p.

266. Benci V. and Di Nasso M. Alpha-theory: an elementary axiomatics for nonstandard analysis // Exposition. Math.—2003.—V. 21, No. 4.—P. 355–386.

267. Benci V. and Di Nasso M. A ring homomorphism is enough to get nonstandard analysis // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.—2003.—V. 10, No. 4.—P. 481–490.

268. Benci V., Forti M., Di Nasso M. The eightfold path to nonstandard analysis // Nonstandard Methods and Applications in Mathematics. —Wellesley, MA: A. K. Peters; Urbana, IL, 2006.—P. 3–44 (Lecture Notes in Logic; 25).

269. Berberian S. K. Baer $*$-Rings.—Berlin: Springer-Verlag, 1972.—xii+296 p.

270. Bigard A., Keimel K., and Wolfenstein S. Groupes et Anneaux Réticulés, —Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977.—xi+334 p. (Lecture Notes in Math.; 608).

271. Bishop E. and Bridges D. Constructive Analysis. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1985.—xii+477 p.

272. Blumenthal L. M. Theory and Applications of Distance Geometry. —Oxford: Clarendon Press, 1953.—xi+347 p.

273. Boole G. An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.—New York: Dover, 1957.—xi+424 p.

274. Boole G. Selected Manuscripts on Logic and Its Philosophy.—Basel: Birkhäuser-Verlag, 1997.—xiv+236 p. (Science Networks. Historical Studies; 20).

275. Burden C. W. and Mulvey C. J. Banach spaces in categories of sheaves // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., University of Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 169–196.

276. Canjar R. M. Complete Boolean ultraproducts // J. Symbolic Logic.—1987.—V. 52, No. 2.—P. 530–542.

277. Capinski M. and Cutland N. J. Nonstandard Methods for Stochastic Fluid Mechanics.—Singapore etc.: World Scientific Publishers, 1995.—xii+227 p. (Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences; 27).

278. Castaing C. and Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977.—278 p. (Lecture Notes in Math.; 580).

279. Ciesielski K. Set Theory for the Working Mathematician. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997.—xi+236 p.

280. Clarke F. H. Generalized gradients and applications // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—V. 205, No. 2.—P. 247–262.

281. Clarke F. H. Optimization and Nonsmooth Analysis.—Wiley: New York, 1983.

282. Cozart D. and Moore L. C. Jr. The nonstandard hull of a normed Riesz space // Duke Math. J.—1974.—V. 41.—P. 263–275.

283. Cristiant C. Der Beitrag Gödels für die Rechfertigung der Leibnizschen Idee von der Infinitesimalen // Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II.—1983.—Bd 192, No. 1–3.—S. 25–43.

284. Curtis T. Nonstandard Methods in the Calculus of Variations.—London: Pitman, 1993.—94 p. (Pitman Research Notes in Mathematics; 297).

285. Cutland N. J. Nonstandard measure theory and its applications // Bull. London Math. Soc.—1983.—V. 15, No. 6.—P. 530–589.

286. Cutland N. J. Infinitesimal methods in control theory, deterministic and stochastic // Acta Appl. Math.—1986.—V. 5, No. 2.—P. 105–137.

287. Cutland N. J. (ed.) Nonstandard Analysis and Its Applications.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.—xiii+346 p.

288. Cutland N. J., Di Nasso M., and Ross D. A. (eds.) Nonstandard Methods and Applications in Mathematics. —Wellesley, MA: A. K. Peters; Urbana, IL, 2006.— ix+248 p. (Lecture Notes in Logic; 25).

289. Dacunha-Castelle D. and Krivine J.-L. Applications des ultraproduits a l'etude des espaces et des algebres de Banach // Studia Math.—1972.—V. 41.—P. 315–334.

290. Dales H. and Woodin W. An Introduction to Independence for Analysts. — Cambridge: Cambridge University Press, 1987. — viii+242 p.

291. Dauben J. W. Abraham Robinson. The Creation of Nonstandard Analysis, a Personal and Mathematical Odyssey. — Princeton: Princeton University Press, 1995.— xix+559 p.

292. Dauben J. W. Mathematics, ideology, and the politics of infinitesimals: Mathematical logic and nonstandard analysis in modern China // Hist. Philos. Logic.—2003.—V. 24, No. 4.—P. 327–363.

293. Day M. Normed Linear Spaces.—New York; Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.—viii+211 p.

294. Diener F. and Diener M. Les applications de l'analyse non standard // Recherche.—1989.—V. 20, No. 1.—P. 68–83.

295. Diener F. and Diener M. (eds.) Nonstandard Analysis in Practice. —Berlin etc.: Springer-Verlag, 1995.—xiv+250 p.

296. Diestel J. and Uhl J. J. Vector Measures.—Providence, RI: Amer. Math. Soc, 1977.—xiii+322 p. (Math. Surveys; 15).

297. Digernes T., Husstad E., and Varadarajan V. Finite approximations of Weyl systems // Math. Scand.—1999.—V. 84.—P. 261–283.

298. Digernes T., Varadarajan V., and Varadhan S. Finite approximations to quantum systems // Rev. Math. Phys.—1994.—V. 6, No. 4.—P. 621–648.

299. Di Nasso M. and Forti M. Topological and nonstandard extensions // Monatsh. Math.—2005.—V. 144, No. 2.—P. 89–112.

300. Di Nasso M. and Hrbacek K. Combinatorial principles in nonstandard analysis // Ann. Pure Appl. Logic.—2003.—V. 119, No. 1–3. —P. 265–293.

301. Dinculeanu N. Vector Measures.—Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.—432 p.

302. Dixmier J. C^*-Algebras.—Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland, 1977.—xiii+492 p.

303. Dixmier J. Les Algebres d'Operateurs dans l'Espace Hilbertien (Algebres de von Neumann). — Paris: Gauthier–Villars, 1996. — x+367 p.

304. Dolecki S. A general theory of necessary optimality conditions // J. Math. Anal. Appl.—1980.—V. 78, No. 12.—P. 267–308.

305. Dolecki S. Tangency and differentiation: marginal functions // Adv. in Appl. Math.—1990.—V. 11.—P. 388–411.

306. Dragalin A. G. An explicit Boolean-valued model for nonstandard arithmetic // Publ. Math. Debrecen.—1993.—V. 42, No. 3–4.— P. 369–389.

307. Dunford N. and Schwartz J. T. Linear Operators. Vol. 1: General Theory.—New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.—xiv+858 p.

308. Dunford N. and Schwartz J. T. Linear Operators. Vol. 2: Spectral Theory. Selfadjoint Operators in Hilbert Space.—New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.—P. i–x, 859–1923 and 1–7.

309. Dunford N. and Schwartz J. T. Linear Operators. Vol. 3: Spectral Operators.—New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.—P. i–xx and 1925–2592.

310. Ehrlich Ph. The rise of non-Archimedean mathematics and the roots of a misconception. I. The emergence of non-Archimedean systems of magnitudes // Arch. Hist. Exact Sci.—2006.—V. 60, No. 1.—P. 1–121

311. Ellis D. Geometry in abstract distance spaces // Publ. Math. Debrecen.— 1951.—V. 2.—P. 1–25.

312. Fakhoury H. Représentations d'opérateurs à valeurs dans $L^1(X, \Sigma, \mu)$ // Math. Ann.—1979.—V. 240, No. 3.—P. 203–212.

313. Farkas E. and Szabo M. On the plausibility of nonstandard proofs in analysis // Dialectica.—1974.—V. 38, No. 4.—P. 297–310.

314. Fattorini H. O. The Cauchy Problem.—Addison-Wesley, 1983.

315. Fliess M. Analyse non standard du bruit // C. R. Math. Acad. Sci. Paris.—2006.—V. 342, No. 10.—P. 797–802.

316. Forti M., Di Nasso M., and Benci V. Hausdorff nonstandard extensions // Bol. Soc. Parana. Mat. (3).—2002.—V. 20, No. 1–2.— P. 9–20.

317. Fourman M. P. and Scott D. S. Sheaves and logic // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 302–401.

318. Fourman M. P., Mulvey C. J., and Scott D. S. (eds.) Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.

319. Fuller R. V. Relations among continuous and various noncontinuous functions // Pacific J. Math. — 1968. — V. 25, No. 3. — P. 495–509.

320. Gandy R. O. Limitations to mathematical knowledge // Logic Colloquium-80. — New York; London: North-Holland, 1982. — P. 129–146.

321. Georgescu G. and Voiculescu I. Eastern model theory for Boolean-valued theories // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1985.— No. 31.—P. 79–88.

322. Giordano P. Infinitesimal differential geometry// Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.).—2004.—V. 73, No. 2.—P. 235–278.

323. Gödel K. What is Cantor's continuum problem // Amer. Math. Monthly.—1947.—V. 54, No. 9.—P. 515–525.

324. Goldblatt R. Lectures on the Hyperreals: An Introduction to Nonstandard Analysis.—New York etc.: Springer-Verlag, 1998.—303 p.

325. Gordon E. I. Nonstandard Methods in Commutative Harmonic Analysis.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997.—xiv+166 p.

326. Grayson R. J. Heyting-valued models for intuitionistic set theory // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 402–414.

327. Hallet M. Cantorian Set Theory and Limitation of Size.—Oxford: Clarendon Press, 1984.—xix+343 p.

328. Halmos P. R. Lectures on Boolean Algebras.—Toronto; New York; London: Van Nostrand, 1963.—147 p.

329. Hanshe-Olsen H. and Störmer E. Jordan Operator Algebras.—Boston etc.: Pitman Publ. Inc., 1984.

330. Harnik V. Infinitesimals from Leibniz to Robinson time—to bring them back to school // Math. Intelligencer.—1986.—V. 8, No. 2.—P. 41–47.

331. Hatcher W. Calculus is algebra // Amer. Math. Monthly.—1989.—V. 89, No. 6.—P. 362–370.

332. Heinrich S. Ultraproducts of L_1-predual spaces // Fund. Math.—1981.—V. 113, No. 3.—P. 221–234.

333. Henle J. M. Second-order non-nonstandard analysis // Studia Logica.—2003.—V. 74, No. 3.—P. 399–426.

334. Henle J. M. and Kleinberg E. M. Infinitesimal Calculus.—Cambridge; London: Alpine Press, 1979.—135 p.

335. Henson C. W. On the nonstandard representation of measures // Trans. Amer. Math. Soc.—1972.—V. 172, No. 2.—P. 437–446.

336. Henson C. W. When do two Banach spaces have isometically isomorphic nonstandard hulls? // Israel J. Math.—1975.—V. 22.—P. 57–67.

337. Henson C. W. Nonstandard hulls of Banach spaces // Israel J. Math.—1976.—V. 25.—P. 108–114.

338. Henson C. W. Unbounded Loeb measures // Proc. Amer. Math. Soc.—1979.—V. 74, No. 1.—P. 143–150.

339. Henson C. W. Infinitesimals in functional analysis //Nonstandard Analysis and Its Applications.—Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 1988.—P. 140–181.

340. Henson C. W. and Keisler H. J. On the strength of nonstandard analysis // J. Symbolic Logic.—1986.—V. 51, No. 2.—P. 377–386.

341. Henson C. W. and Moore L. C. Jr. Nonstandard hulls of the classical Banach spaces // Duke Math. J.—1974.—V. 41, No. 2.—P. 277–284.

342. Henson C. W. and Moore L. C. Jr. Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces // Nonstandard Analysis. Recent Developments.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1983. — P. 27–112 (Lecture Notes in Math.; 983).

343. Henson C. W., Kaufmann M., and Keisler H. J. The strength of nonstandard methods in arithmetic // J. Symbolic Logic.—1984.—V. 49, No. 34.—P. 1039–1057.

344. Hermann R. Supernear functions // Math. Japon.—1986.—V. 31, No. 2.—P. 320.

345. Hiriart-Urruty J.-B. Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces // Math. Oper. Res.—1979.—V. 4, No. 1.—P. 79–97.

346. Hofmann K. H. and Keimel K. Sheaf theoretical concepts in analysis: bundles and sheaves of Banach spaces, Banach $C(X)$-modules // Applications of Sheaves.—Berlin: Springer-Verlag, 1979. — P. 415–441.

347. Hofstedter D. R. Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.—New York: Vintage Books, 1980.—778 p.

348. Hogbe-Nlend H. Théorie des Bornologie et Applications.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.—168 p.

349. Hrbaček K. Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fund. Math.—1978.—V. 98, No. 1.—P. 1–24.

350. Hrbaček K. Nonstandard set theory // Amer. Math. Monthly.—1979.—V. 86, No. 8.—P. 659–677.

351. Hurd A. E. (ed.) Nonstandard Analysis. Recent Developments.—Berlin: Springer-Verlag, 1983.—213 p.

352. Hurd A. E. and Loeb H. An Introduction to Nonstandard Analysis. —Orlando etc.: Academic Press, 1985.—232 p.

353. Ionescu Tulcea A. and Ionescu Tulcea C. Topics in the Theory of Lifting.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1969.—190 p.

354. Jaffe A. Ordering the universe: the role of mathematics // SIAM Rev.—1984.—V. 26, No. 4.—P. 473–500.

355. Jarnik V. Bolzano and the Foundations of Mathematical Analysis. —Prague: Society of Czechosl. Math. Phys., 1981.—89 p.

356. Jech T. J. The Axiom of Choice.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1973.—xi+202 p.

357. Jech T. J. Set Theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1997. — xiv +634 p.

358. Jesseph D. M. Leibniz on the foundations of the calculus: The question of the reality of infinitesimal magnitudes // Perspectives on Science.—1998.—V. 6, No. 1–2.—P. 6–40.

359. de Jonge E. and van Rooij A. C. M. Introduction to Riesz Spaces.—Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977.

360. Jordan P., von Neumann J., and Wigner E. On an algebraic generalization of the quantum mechanic formalism // Ann. Math.—1944.—V. 35.—P. 29–64.

361. Kadison R. V. and Ringrose J. R. Fundamentals of the Theory of Operator Algebras.—Vol. 1, 2.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997.—xv+398 p.; xxi+399–1074 p. Vol. 3, 4.—Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 1991–1992.—xiv+273 p.; xiv+275–859 p.

362. Kalina M. On the ergodic theorem within nonstandard models // Tatra Mt. Math. Publ.—1997.—V. 10.—P. 87–93.

363. Kalton N. J. The endomorphisms of L_p $(0 \leq p \leq 1)$// Indiana Univ. Math. J.—1978.—V. 27, No. 3.—P. 353–381.

364. Kalton N. J. Linear operators on L_p for $0 < p < 1$// Trans. Amer. Math. Soc.—1980.—V. 259, No. 2.—P. 319–355.

365. Kalton N. J. Representation of operators between function spaces // Indiana Univ. Math. J.—1984.—V. 33, No. 5.—P. 639–665.

366. Kalton N. J. Endomorphisms of symmetric function spaces// Indiana Univ. Math. J.—1985.—V. 34, No. 2.—P. 225–247.

367. Kamo S. Nonstandard natural number systems and nonstandard models // J. Symbolic Logic.—1987.—V. 46, No. 2.—P. 365–376.

368. Kanovei V. and Reeken M. Internal approach to external sets and universes // Studia Logica, part 1: 1995.—V. 55.—P. 227–235; part II: 1995.—V. 55.—P. 347–376; part III: 1996.—V. 56.—P. 293–322.

369. Kanovei V. and Reeken M. Mathematics in a nonstandard world. I // Math. Japon.—1997.— V. 45, No. 2.— P. 369–408.

370. Kanovei V. and Reeken M. A nonstandard proof of the Jordan curve theorem // Real Anal. Exchange.—1998.—V. 24, No. 1.—P. 161–169.

371. Kanovei V. and Reeken M. Extending standard models of ZFC to models of nonstandard set theories // Studia Logica.—2000.—V. 64, No. 1.—P. 37–59.

372. Kanovei V. and Reeken M. Nonstandard Analysis, Axiomatically.—Berlin: Springer-Verlag, 2004.—xvi+408 p. (Springer Monogr. in Math.).

373. Kaplansky I. Projections in Banach algebras // Ann. of Math. (2). —1951.—V. 53.—P. 235–249.

374. Kawai T. Axiom systems of nonstandard set theory // Logic Symposia, Proc. Conf. Hakone 1979, 1980.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1981.—P. 57–65.

375. Kawebuta Sh. A "non-standard" approach to the field equations in the functional form // Osaka J. Math.—1986.—V. 23, No. 1.—P. 55–67.

376. Keisler H. J. Elementary Calculus: An Approach Using Infinitesimals.—Boston, Mass.: Prindle, Weber, and Schmidt, 1976.—71 p.

377. Keisler H. J. An infinitesimal approach to stochastic analysis // Mem. Amer. Math. Soc.—1984.—V. 48.—184 p.

378. Kleiner I. History of the infinitely small and the infinitely large in calculus // Educational Studies in Mathematics.—2001.—V. 48.—P. 137–174.

379. Kline M., Mathematical Thought From Ancient to Modern Times, Oxford University Press, Oxford (1972).

380. Kopperman R. Model Theory and Its Applications.—Boston: Allyn and Bacon, 1972.—333 p.

381. Kreisel G. Observations of popular discussions on foundations // Axiomatic Set Theory. Proc. Symposia in Pure Math.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1971.—V. 1.—P. 183–190.

382. Krupa A. On various generalizations of the notion of an $\mathscr{F}$-power to the case of unbounded operators // Bull. Polish Acad. Sci. Math.—1990.—V. 38.—P. 159–166.

383. Kudryk T. S. and Lyantse V. E. Operator-valued charges on finite sets // Mat. Stud.—1997.—V. 7, No. 2.—P. 145–156.

384. Kudryk T. S., Lyantse V. E., and Chujko G. I. Nearstandardness of finite sets// Mat. Stud.—1993.—V. 2.—P. 25–34.

385. Kudryk T. S., Lyantse V. E., and Chujko G. I. Nearstandard operators// Mat. Stud.—1994.—V. 3.—P. 29–40.

386. Kudryk T., Lyantse W., and Neves V. Nonstandard universe based on internal set theory // Kadets V. (ed.) et al. Functional Analysis and Its Applications. V. 197.—Amsterdam: Elsevier, 2004.—P. 155–166.

387. Kuribayashi Y. Fourier transform using nonstandard analysis // RIMS Kokyuroku.—1996.—V. 975.—P. 132-144.

388. Kusraev A. G. Dominated Operators.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.—405 p.

389. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods for Kantorovich spaces // Siberian Adv. Math.—1992.—V. 2, No. 2. —P. 114–152.

390. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods in geometric functional analysis // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.—1992.—V. 151.—P. 91–105.

391. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Boolean-valued introduction to the theory of vector lattices // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.—1995.—V. 163.—P. 103–126.

392. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods in functional analysis // Interaction Between Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability Theory.—New York: Marcel Dekker Inc., 1995.—P. 301–306.

393. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. On combined nonstandard methods in the theory of positive operators // Mat. Stud.—1997.—V. 7, No. 1.—C. 33–40.

394. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. On combined nonstandard methods in functional analysis // Владикавказ. мат. журн.—2000.—T. 2. No. 1.—P. 3–9.

395. Kutateladze S. S. Credenda of nonstandard analysis // Siberian Adv. Math.— 1991.—V.1, No. 1.—P. 109–137.

396. Kutateladze S. S. Nonstandard tools for convex analysis//Math. Japon.—1996.—V. 43, No. 2.—P. 391–410.

397. Lacey H. E. The Isometric Theory of Classical Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—x+270 p.

398. Langwitz D. Nicht-standard-mathematik, begründel durch eine Verallgemeinerung der Körpererweiterung // Exposition. Math.—1983.—V. 1.—P. 307–333.

399. Larsen R. Banach Algebras, an Introduction.—New York: Dekker, 1973.—xi+345 p.

400. Laugwitz D. Omega-calculus as a generalization of field extension; an alternative approach to nonstandard analysis // Hurd A. E. (ed.) Nonstandard Analysis, Recent Developments. — Berlin: Springer-Verlag, 1983.—P. 120–133 (Lecture Notes in Math.; 983).

401. Levy A. Basic Set Theory.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—xiv+391 p.

402. Lindenstrauss J. Extension of compact operators // Mem. Amer. Math. Soc.—1964.—V. 48.—112 p.

403. Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 1: Sequence Spaces. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977. — xiii+188 p.

404. Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 2: Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—x+243 p.

405. Liu S.-C. A proof-theoretic approach to nonstandard analysis with emphasis on distinguishing between constructive and non-constructive results // Keisler H. J.; Kunen K. (eds.) The Kleene Symposium.—Amsterdam: North-Holland, 1980.—P. 391–414.

406. Locher J. L. (ed.) The World of M. C. Escher.—New York: Abradale Press, 1988.

407. Loeb P. A. Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications to probability theory // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—V. 211.—P. 113–122.

408. Loeb P. A. An introduction to nonstandard analysis and hyperfinite probability theory // Bharucha–Reid A. T. (ed.) Probabilistic Analysis and Related Topics. V. 2.—New York: Academic Press, 1979.—P. 105–142.

409. Loeb P. and Wolff M. P. H. (eds.) Nonstandard Analysis for the Working Mathematician.—Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 2000.—336 p.

410. Lowen R. Mathematics and fuzziness // Fuzzy Sets Theory and Applications (Louvain-la-Neuve, 1985), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., 177.—Dordrecht; Boston: Reidel, 1986.—P. 3–38.

411. Loewen P. D. Optimal Control via Nonsmooth Analysis.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993.—ix+153 p.

412. Lutz R. and Albuquerque L. G. Modern infinitesimals as a tool to match intuitive and formal reasoning in analysis // Synthese.—2003.—V. 134, No. 1–2.—P. 325–351.

413. Lutz R. and Gose M. Nonstandard Analysis. A Practical Quide with Applications. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1981. — 261 p. (Lecture Notes in Math.; 881).

414. Luxemburg W. A. J. (ed.) Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability.—New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1969.—307 p.

415. Luxemburg W. A. J. A general theory of monads // Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability.—New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1969.—P. 18–86.

416. Luxemburg W. A. J. A nonstandard approach to Fourier analysis // Contributions to Nonstandard Analysis.—Amsterdam: North-Holland, 1972.—P. 16–39.

417. Luxemburg W. A. J. and Robinson A. (eds.) Contribution to Non-Standard Analysis.—Amsterdam: North-Holland, 1972.—289 p.

418. Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 1.—Amsterdam; London: North-Holland, 1971.—514 p.

419. Lyantse V. E. Nearstandardness on a finite set // Dissertationes Math.—1997.—V. 369.—63 p.

420. Lyantse W. and Kudryk T. Introduction to Nonstandard Analysis. —Lviv: VNTL Publishers, 1997.—253 p.

421. Lyantse V. E. and Yavorskyj Yu. M. Nonstandard Sturm–Liouville difference operator//Mat. Stud.—1998.—V. 10, No. 1.—P. 54–68.

422. Lyantse V. E. and Yavorskyj Yu. M. Nonstandard Sturm–Liouville difference operator. II // Mat. Stud. — 1999. — V. 11, No. 1. — P. 71–82.

423. Macintyre A. Nonstandard analysis and cohomology// Nonstandard Methods and Applications in Mathematics. —Wellesley, MA: A. K. Peters; Urbana, IL, 2006.—P. 174–191 (Lecture Notes in Logic; 25).

424. Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician. — New York: Springer-Verlag, 1971.—ix+262 p.

425. Marinakis K. The infinitely small in space and in time // Trans. Hellenic Inst. Appl. Sci.—1970.—No. 8.—62 p.

426. Martin–Löf P. The definition of random sequences // Inform. and Control.—1966.—V. 9.—P. 602–619.

427. Mazon J. M. and Segura de León S. Order bounded orthogonally additive operators // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. —1990.—V.35, No. 4,—P. 329–354.

428. McCarty D. Ch. David Hilbert and Paul du Bois-Reymond: limits and ideals // Link G. (ed.) One Hundred Years of Russell's Paradox. — Berlin: de Gruyter, 2004. — Vol. 6. — P. 517–532 (de Gruyter Series in Logic and Its Applications; 6).

429. Mckee T. Monadic characterizable in nonstandard topology // Z. Math. Logik.—1940.—V. 26, No. 5.—P. 395–397.

430. Melter R. Boolean valued rings and Boolean metric spaces // Arch. Math.—1964.—No. 15.—P. 354–363.

431. Mochover M. and Hirschfeld J. Lectures on Non-Standard Analysis. —Berlin etc.: Springer-Verlag, 1969.—79 p. (Lecture Notes in Math.; 94).

432. Molchanov I. S. Set-valued estimators for mean bodies related to Boolean models // Statistics 28.—1996.—No. 1.—P. 43–56.

433. Monk J. D. and Bonnet R. (eds.) Handbook of Boolean Algebras. Vol. 1–3.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1989.

434. Moore L. C. Jr. Hyperfinite extensions of bounded operators on a separable Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc.—1976.—V. 218.—P. 285–295.

435. Namba K. Formal systems and Boolean valued combinatorics // Southeast Asian Conference on Logic (Singapore, 1981).—Amsterdam; New York: North-Holland, 1983.—P. 115–132 (Stud. Logic Found. Math.; 111).

436. Nelson E. Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc.—1977.—V. 83, No. 6.—P. 1165–1198.

437. Nelson E. Radically Elementary Probability Theory.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1987.—98 p.

438. Nelson E. The syntax of nonstandard analysis // Ann. Pure Appl. Logic.—1988.—V. 38, No. 2.—P. 123–134.

439. Neubrunn I., Riećan B., and Riecanou Z. An elementary approach to some applications of nonstandard analysis // Rend. Circl. Math. Palermo.—1984.—No. 3.—P. 197–200.

440. von Neumann J. Collected Works. Vol. 1: Logic, Theory of Sets and Quantum Mechanics. — Oxford etc.: Pergamon Press, 1961. — 654 p.

441. von Neumann J. Collected Works. Vol. 3: Rings of Operators. — New York; Oxford; London; Paris: Pergamon Press, 1961. — ix+574 p.

442. von Neumann J. Collected Works. Vol. 4: Continuous Geometry and Other Topics.—Oxford; London; New York; Paris: Pergamon Press, 1962.—x+516 p.

443. Neves V. Nonstandard calculus of variations // J. Math. Sci. (N.Y.).—2004.—V. 120, No. 1.—P. 940–954.

444. Nishimura H. Boolean valued and Stone algebra valued measure theories // Math. Logic Quart.—1994.—V. 40, No. 1.—P. 69–75.

445. Nitta T. and Okada D. Infinitesimal Fourier transformation for the space of functionals // Matsushita Y. (ed.) et al. Topics in Almost

Hermitian Geometry and Related Fields.—Hackensack, NJ: World Scientific Publishing Co., 2005.—P. 190–207.

446. Osswald H. Malliavin calculus in abstract Wiener space using infinitesimals // Adv. Math.—2003.—V. 176, No. 1.—P. 1–37.

447. Pasarescu A. Nonstandard algebraic methods in the study of analytic spaces. (Romanian) Applied Sciences. Monographs, 2.—Bucharest, Geometry Balkan Press, 2003.—vii+125 p.

448. Pedersen G. K. Analysis Now. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1995.—277 p.

449. Penot J.-P. Compact nets, filters and relations // J. Math. Anal. Appl.—1983.—V. 93, No. 2.—P. 400–417.

450. Péraire Y. Une nouvelle théorie des infinitesimaux// C. R. Acad. Aci. Paris Ser. I.—1985.—V. 301, No. 5.—P. 157–159.

451. Péraire Y. Théorie relative des ensembles internes//Osaka J. Math. —1992.—V. 29, No. 2.—P. 267–297.

452. Péraire Y. Some extensions of the principles of idealization transfer and choice in the relative internal set theory // Arch. Math. Logic.—1995.—V. 34.—P. 269–277.

453. Ponstein J. Nonstandard Analysis.—Groningen: SOM, Research School Systems, Organisation and Management.—147 p. Available electronically at http://som.rug.nl/bestanden/ponstein.pdf.

454. Raab A. An approach to nonstandard quantum mechanics // J. Math. Phys.—2004.—V. 45, No. 12.—P. 4791–4809.

455. Raebiger F. and Wolff M. P. H. On the approximation of positive operators and the behaviour of the spectra of the approximants // Integral Equations Operator Theory.—1997.—V. 28.—P. 72–86.

456. Raebiger F. and Wolff M. P. H. Spectral and asymptotic properties of dominated operators // J. Austral. Math. Soc. (Series A).—1997.—V. 63.— P. 16–31.

457. Reinhardt H.-J. Analysis of Approximation Methods for Differential and Integral Equations.—New York; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verlag, 1985.—xi+398 p.

458. Render H. Nonstandard methods of completing quasi-uniform spaces // Topology Appl.—1995.—V. 62, No. 2.—P. 101–125.

459. Repicky M. Cardinal characteristics of the real line and Boolean-valued models // Comment. Math. Univ. Carolin.—1992.—V. 33, No. 1.—P. 184.

460. Rickart Ch. General Theory of Banach Algebras.—Princeton: Van Nostrand, 1960.—xi+394 p.

461. Robert A. Analyse Non-Standard.—Kingston: Queen's University Press, 1984.—119 p.

462. Robert A. One approache naive de l'analyse non-standard // Dialectica. —1984.—V. 38.—P. 287–290.

463. Robert A. M. Nonstandard Analysis.—Mineola, NY: Dover Publications, Inc., 2003.—xx+156 p.

464. Robinson A. The metaphysics of the calculus // Problems in the Philosophy of Mathematics.—Amsterdam: North-Holland, 1967. —V. 1.—P. 28–46.

465. Robinson A. Non-Standard Analysis.—Princeton: Princeton University Press, 1996.—293 p.

466. Rockafellar R. T. The Theory of Subgradients and Its Applications to Problems of Optimization: Convex and Nonconvex Functions.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1981.

467. Rockafellar R. T. and Wets R. J.-B. Variational Analysis.—Birkhäuser: Springer-Verlag, 1998.—xiii+733 p.

468. Rosser J. B. Logic for Mathematicians.—New York etc.: McGraw-Hill voon Company, Inc., 1953.—530 p.

469. Rosser J. B. Simplified Independence Proofs. Boolean Valued Models of Set Theory.—New York; London: Academic Press, 1969. —xv+217 p.

470. Rubio J. E. Optimization and Nonstandard Analysis.—New York; London: Marcel Dekker, 1994.—376 p. (Pure and Applied Mathematics; 184).

471. Sakai S. C^*-Algebras and W^*-Algebras.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.—256 p.

472. Salbany S. and Todorov T. Nonstandard analysis in topology: nonstandard and standard compactifications // J. Symbolic Logic.—2000.—V. 65, No. 4.—P. 1836–1840.

473. Saracino D. and Weispfenning V. On algebraic curves over commutative regular rings // Model Theory and Algebra (a Memorial Tribute to Abraham Robinson).—New York etc.: Springer-Verlag, 1969 (Lecture Notes in Math.; 498).

474. Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—376 p.

475. Schröder J. Das Iterationsverfahren bei allgemeinierem Abshtandsbegriff // Math. Z.—1956.—Bd 66.—S. 111–116.

476. Schwarz H.-U. Banach Lattices and Operators.—Leipzig: Teubner, 1984.—208 p.

477. Schwinger J. Unitary operator bases. The special canonical group // Proc. Natl. Acad. Sci. USA.—1960.—V. 46.—P. 570–579, 1401–1405.

478. Sikorskiĭ M. R. Some applications of Boolean-valued models to study operators on polynormed spaces // Sov. Math.—1989.—V. 33, No. 2.—P. 106–110.

479. Smith K. Commutative regular rings and Boolean-valued fields // J. Symbolic Logic.—1984.—V. 49, No. 1.—P. 281–297.

480. Smithson R. Subcontinuity for multifunctions // Pacific J. Math. —1975.—V. 61, No. 4.—P. 283–288.

481. Solovay R. M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. of Math. (2).—1970.—V. 92, No. 2.—P. 1–56.

482. Solovay R. and Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math. — 1972. — V. 94, No. 2. — P. 201–245.

483. Sourour A. R. Operators with absolutely bounded matrices // Math. Z. —1978.—V. 162, No. 2.—P. 183–187.

484. Sourour A. R. The isometries of $L^p(\Omega, X)$ // J. Funct. Anal.—1978.—V. 30, No. 2.—P. 276–285.

485. Sourour A. R. A note on integral operators // Acta Sci. Math.—1979.—V. 41, No. 43.—P. 375–379.

486. Sourour A. R. Pseudo-integral operators // Trans. Amer. Math. Soc.—1979.—V. 253.—P. 339–363.

487. Sourour A. R. Characterization and order properties of pseudo-integral operators // Pacific J. Math. — 1982. — V. 99, No. 1. — P. 145–158.

488. Sousa Pinto J. Infinitesimal Methods of Mathematical Analysis (Translated from the Portugese original and with a preface by R. F. Hoskins).—Horwood Publishing Limited: Chichester, 2004.—viii+256 p.

489. Stern J. Some applications of model theory in Banach space theory // Ann. Math. Logic.—1976.—V. 9, No. 1.—P. 49–121.

490. Stern J. The problem of envelopes for Banach spaces // Israel J. Math.—1976.—V. 24, No. 1.—P. 1–15.

491. Stewart I. Frog and Mouse revisited // Math. Intelligencer.—1986.—V. 8, No. 4.—P. 78–82.

492. Stroyan K. D. Infinitesimal calculus in locally convex spaces. I // Trans. Amer. Math. Soc.—1978.—V. 240.—P. 363–384; Locally convex infinitesimal calculus. II // J. Funct. Anal.—1983.—V. 53, No. 1.—P. 1–15.

493. Stroyan K. D. and Bayod J. M. Foundations of Infinitesimal Stochastic Analysis.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1986.—478 p.

494. Stroyan K. D. and Luxemburg W. A. J. Introduction to the Theory of Infinitesimals.—New York etc.: Academic Press, 1976.—326 p.

495. Stummel F. Diskrete Konvergenz Linearer Operatoren. I // Math. Ann.—1970.—V. 190.—P. 45–92.

496. Stummel F. Diskrete Konvergenz Linearer Operatoren. II // Math. Z.—1971.—V. 120.—P. 231–264.

497. Sunder V. S. An Invitation to Von Neumann Algebras.—New York etc.: Springer-Verlag, 1987.—171 p.

498. Tacon D. G. Nonstandard extensions of transformations between Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1980.—V. 260, No. 1.—P. 147–158.

499. Takeuti G. Two Applications of Logic to Mathematics.—Tokyo; Princeton: Iwanami and Princeton Univ. Press, 1978.—137 p.

500. Takeuti G. Quantum set theory // Current Issues in Quantum Logic (Erice, 1979).—New York; London: Plenum Press, 1981. — P. 303–322.

501. Takeuti G. and Titani S. Heyting-valued universes of intuitionistic set theory // Logic Symposia, Hakone 1979, 1980 (Hakone, 1979/1980).—Berlin and New York: Springer-Verlag, 1981.— P. 189–306 (Lecture Notes in Math.; 891).

502. Takeuti G. and Titani S. Globalization of intuitionistic set theory // Ann. Pure Appl. Logic.—1987.—V. 33, No. 2.—P. 195–211.

503. Takeuti G. and Zaring W. M. Introduction to Axiomatic Set Theory.—New York etc.: Springer-Verlag, 1971.—348 p.

504. Takeuti G. and Zaring W. M. Axiomatic Set Theory.—New York: Springer-Verlag, 1973.—238 p.

505. Tall D. The calculus of Leibniz—an alternative modern approach // Math. Intelligencer.—1979/80.—V. 2, No. 1.—P. 54–60.

506. Tanaka K. and Yamazaki T. A nonstandard construction of Haar measure and weak Koenig's lemma // J. Symbolic Logic.—2000.— V. 65, No. 1.—P. 173-186.

507. Thayer F. J. Nonstandard analysis of graphs // Houston J. Math.— 2003.—V. 29, No. 2.—P. 403–436 (electronic).

508. Thibault L. Epidifferentielles de fonctions vectorielles // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. — 1980. — V. 290, No. 2. — P. A87–A90.

509. Thibault L. Subdifferentials of nonconvex vector-valued mappings // J. Math. Anal. Appl.—1982.—V. 86, No. 2.

510. Van de Berg I. Nonstandard Asymptotic Analysis.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1987.—187 p.

511. van der Hoeven J. On the computation of limsups//J. Pure Appl. Algebra.—1997.—V. 117–118.—P. 381–394.

512. Vopěnka P. General theory of $\bigtriangledown$-models // Comment. Math. Univ. Carolin.—1967.—V. 7, No. 1.—P. 147–170.

513. Ward D. E. Convex subcones on the contingent cone in nonsmooth calculus and optimization // Trans. Amer. Math. Soc.—1987.—V. 302, No. 2.—P. 661–682.

514. Ward D. E. The quantification tangent cones // Canad. J. Math.—1988.—V. 40, No. 3.—P. 666–694.

515. Ward D. E. Corrigendum to “Convex subcones of the contingent cone in nonsmooth calculus and optimization” // Trans. Amer. Math. Soc.—1989.—V. 311, No. 1.—P. 429–431.

516. Wattenberg F. Nonstandard measure theory: Avoiding pathological sets // Trans. Amer. Math. Soc.—1979.—V. 250.—P. 357–368.

517. Weil A. Euler // Amer. Math. Monthly.—1984.—V. 91, No. 9.—P. 537–542.

518. Weis L. Decompositions of positive operators and some of their applications// Functional Analysis: Survey and Recent Results. Vol. 3: Proc. 3rd Conf., Paderborn, 24–29 May, 1983.—Amsterdam.—1984.—P. 95–115.

519. Weis L. On the representation of order continuous operators by random measures// Trans. Amer. Math. Soc.—1984.—V. 285, No. 2.—P. 535–563.

520. Weis L. The range of an operator in $C(X)$ and its representing stochastic kernel// Arch. Math.—1986,—V. 46.—P. 171–178.

521. Westfall R. Never at Rest. A Bibliography of Isaak Newton.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982.—908 p.

522. Wolff M. P. H. An introduction to nonstandard functional analysis // Arkeryd L. O.; Cutland N. J.; Henson C. W. (eds.) Nonstandard Analysis, Theory and Applications.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.—P. 121–151.

523. Wolff M. P. H. On the approximation of operators and the convergence of the spectra of approximants // Operator Theory: Advances and Applications.—1998.—V. 103.—P. 279–283.

524. Wright J. D. M. Vector lattice measures on locally compact spaces // Math. Z.—1971.—V. 120, No. 3.—P. 193–203.

525. Yamashita H. Nonstandard methods in quantum field theory. I: A hyperfinite formalism of scalar fields // Internat. J. Theoret. Phys.—2002.—V. 41, No. 3.—P. 511–527.

526. Yessenin-Volpin A. S. The ultra intuitionistic criticism and the traditional program for foundations of mathematics // Intuitionism and Proof Theory.—Amsterdam; London: North-Holland, 1970.—P. 3–45.

527. Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 2.— Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—xi+720 p.

528. Zaanen A. C. Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1997.—312 p.

529. Zemanian A. H. Graphs and Networks. Transfinite and Nonstandard.—Boston, MA: Birkhauser Boston, Inc., 2004.—xiv+202 p.

530. Zhang Jin-wen. A unified treatment of fuzzy set theory and Boolean valued set theory fuzzy set structures and normal fuzzy set structures // J. Math. Anal. Appl. — 1980. — V. 76, No. 1. — P. 297–301.

531. Zivaljevic R. Infinitesimals, microsimplexes and elementary homology theory // Amer. Math. Monthly.—1986.—V. 93, No. 7.—P. 540–544.

Указатель обозначений

Предметный указатель

Гордон Евгений Израилевич
Кусраев Анатолий Георгиевич
Кутателадзе Семён Самсонович

Инфинитезимальный анализ
Серия «Нестандартные методы анализа»

Ответственный редактор
академик *Ю. Г. Решетняк*

Редактор серии
С. С. Кутателадзе

Редактор издательства *И. И. Кожанова*

Издание подготовлено с использованием макро-пакета $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX,
the American Mathematical Society'sTEX macro system.

Подписано в печать 16.10.06. Формат $60 \times 84\ {}^1/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 31. Уч.-изд. л. 30. Тираж 200 экз. Заказ № 125.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
пр. Академика Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск