РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК • СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. СОБОЛЕВА

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

Е.И. ГОРДОН, А.Г. КУСРАЕВ
С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ЧАСТЬ I

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

Нестандартные методы анализа

Е. И. Гордон, А. Г. Кусраев,
С. С. Кутателадзе

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
ЧАСТЬ 1

Новосибирск
Издательство Института математики
2001

УДК 517.11+517.98
ББК 22.16
Г68

Гордон Е. И., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Инфинитезимальный анализ. Ч. 1. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001. — x+315 с. — (Нестандартные методы анализа).

ISBN 5–86134–095–1 (ч. 1)
ISBN 5–86134–096–X.

Инфинитезимальный анализ — один из наиболее разработанных разделов, составляющих нестандартные методы анализа. В его рамках получили строгое обоснование метод неделимых и монадология, восходящие к глубокой древности. В монографии подробно излагаются теоретико-множественные формализмы, позволяющие использовать актуальные бесконечно большие и бесконечно малые величины. Детально изучаются приложения инфинитезимальных методов в топологии, теории меры, оптимизации и гармоническом анализе.

Книга издана в двух частях, составляющих единое целое, и ориентирована на широкий круг читателей, интересующихся современным состоянием и приложениями классического анализа бесконечных.

Библиогр.: 528.

Ответственный редактор
академик *Ю. Г. Решетняк*

Редактор серии
С. С. Кутателадзе

Издание осуществлено при финансовой поддержке:
Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ, коды проектов 94–01–00001, 94–01–00529-а, 97–01–00001),
Международного научного фонда (ISF, коды проектов NYU000, NYU300),
Международной Соросовской образовательной программы (ISSEP, коды проектов 385_р, р98–1358).

$\text{Г}\frac{1602080000\text{–}04}{\text{Я}82(03)\text{–}01}$ Без объявл.

ISBN 5–86134–095–1 (ч. 1)
ISBN 5–86134–096–X

Содержание

От редактора серии

Нестандартные методы анализа в современном понимании состоят в привлечении двух различных — «стандартной» и «нестандартной» — моделей теории множеств для исследования конкретных математических объектов и проблем. Такие методы получили существенное развитие во второй половине XX века и сформировались в несколько направлений.

Первое из названных направлений вслед за его основоположником А. Робинсоном часто называют запоминающимся, хотя и отчасти эпатажным, термином — *нестандартный анализ* (теперь чаще говорят о классическом или робинсоновском нестандартном анализе). Робинсоновский нестандартный анализ характеризуется широким использованием давно известных в практике естествознания, но долгое время запрещенных в математике XX века концепций, связанных с представлениями об актуальных бесконечно больших и актуальных бесконечно малых величинах. В этой связи сейчас за ним закрепилось наименование *инфинитезимальный анализ*, выразительно напоминающее о классическом анализе бесконечно малых.

Инфинитезимальный анализ бурно развивается и уже внес капитальные изменения в систему общематематических представлений. Прежде всего это связано с тем, что в нем предложено новое понимание метода неделимых, восходящего к глубокой древности, и осуществлен синтез подходов к дифференциальному и интегральному исчислению, предложенных его основоположниками. В наши дни инфинитезимальный анализ находит широкое распространение и проникает во все разделы современной математики. Наибольшие изменения происходят в этой связи в негладком анализе, в теории вероятностей и теории меры, в качественной теории дифференциальных уравнений и в математической экономике.

Второе направление — *булевозначный анализ* — характеризуется широким использованием таких терминов, как спуски и подъемы, циклические оболочки и миксинги, B-множества и изображения объектов в моделях. Развитие этого направления, становление которого связано со знаменитыми работами П. Дж. Коэна по гипотезе континуума, привело к принципиально новым идеям и результатам в ряде направлений функционального анализа, прежде всего в теории пространств Канторовича, в теории алгебр фон Неймана, в выпуклом анализе и теории векторных мер.

В монографии [119], изданной в 1990 году Сибирским отделением издательства «Наука» и переизданной в 1994 году издательством Kluwer Academic Publishers на английском языке, впервые с единых методологических позиций были рассмотрены оба указанных выше направления, составляющих ядро современных нестандартных методов анализа.

Читательский интерес и стремительное развитие самой дисциплины поставили задачу отразить современное состояние дел, изложив новые темы и результаты. При работе над реализацией проекта выяснилось, что остаться в прежних рамках одной книги уже невозможно. В этой связи в 1999 году было принято решение о подготовке серии монографий под общим названием «Нестандартные методы анализа», каждая из которых трактует различные аспекты этого математического направления.

В названной серии уже вышли две книги [56, 124], опубликованные практически одновременно с их переводами на английский язык. Монография [124] посвящена булевозначному анализу, а книга [56] трактует приложения нестандартных методов к теории векторных решеток.

Настоящее издание посвящено инфинитезимальному анализу и состоит из двух частей единой монографии. Наряду с систематическим изложением соответствующего формального аппарата, большое место в книге уделено приложениям к топологии, оптимизации и гармоническому анализу.

Введение

Идея инфинитезимали — актуальной бесконечно малой величины — восходит к эпохе античности. В наше время после примерно полувекового перерыва инфинитезимальным понятиям уделяется все большее внимание внутри современной математики. Бесконечно большие и бесконечно малые числа, математические атомы — «неделимые» монады — все чаще фигурируют в различных публикациях, входят в математическую практику. Поворотный пункт в развитии инфинитезимальных концепций связан с выдающимся достижением А. Робинсона — созданием нестандартного анализа.

Около полувека нестандартный анализ рассматривали как довольно тонкую и даже экзотическую логическую технику, предназначенную для обоснования метода актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел. Считалось также, что эта техника имеет ограниченную сферу применимости и в любом случае принципиально не может привести к серьезному пересмотру общематематических представлений. В конце 70-х годов после опубликования теории внутренних множеств Э. Нельсона (и несколько позже теорий внешних множеств К. Хрбачека и Т. Каваи) взгляды на место и роль нестандартного анализа коренным образом обогатились и видоизменились.

В свете новых открытий нестандартные элементы стало возможно рассматривать не как «мнимые, глухие, идеальные сущности», добавляемые к обычным множествам из соображений формального удобства, а как неотъемлемые части любых привычных математических объектов. Возникла установка, состоящая в том, что каждое множество образовано стандартными и нестандартными элементами. В свою очередь, стандартные множества формируют своеобразную реперную сетку, плотно расположенную в совокупности всех предметов изучения математики.

При этом обнаружилось, что фигурирующие в нестандартном математическом анализе объекты — монады фильтров, стандартные части чисел и векторов, тени операторов и т. п. — составляют «канторовские» множества, не попадающие ни на одну из канонизированных картин, рисуемых известными формальными теориями множеств.

Универсум фон Неймана не исчерпывает мир классической математики — вот одно из очевидных следствий новых воззрений. Таким образом, традиционные взгляды на нестандартный анализ стали нуждаться, по меньшей мере, в ревизии, потребовали переосмысления инфинитезимальных концепций.

Важным достоинством возникших путей стал аксиоматический подход, дающий возможность овладеть аппаратом нестандартного математического анализа без предварительного изучения техники ультрапроизведений, булевозначных моделей или их аналогов. Выдвинутые аксиомы просты в обращении и отчетливо мотивируются на содержательном уровне в рамках привычной для анализа «наивной» теоретико-множественной установки. В то же время они существенно расширяют круг математических объектов, создают возможности развития нового формального аппарата, позволяют значительно уменьшить опасные разрывы между представлениями, методическими установками и уровнями строгости, принятыми в математике и ее приложениях к естественным и социальным наукам.

Иначе говоря, аксиоматическое теоретико-множественное обоснование нестандартного математического анализа имеет общенаучное значение.

В 1947 г. К. Гёдель отметил: «Могут существовать аксиомы, столь богатые проверяемыми следствиями, проливающие такой яркий свет на всю дисциплину и доставляющие настолько сильные методы решения задач (даже, насколько это возможно, решающие их в каком-либо конструктивистском смысле), что совершенно безотносительно к их внутренней необходимости эти аксиомы придется принять хотя бы в том же смысле, в каком принимают любую основательную физическую теорию» [310, с. 521]. Предсказание К. Гёделя сбывается на наших глазах.

Цель настоящего сочинения — сделать более доступными появившиеся пути в нестандартный анализ.

Для достижения этой цели мы начинаем с изложения содержательных качественных представлений о стандартных и нестандартных объектах, об аппарате нестандартного анализа на «наивном» уровне строгости, абсолютно достаточном для эффективных применений без апелляции к логическим формализмам.

Затем приводится краткий и в то же время достаточно полный справочный материал, относящийся к современным аксиоматическим построениям нестандартного анализа в рамках канторовской установки. При этом мы сочли возможным значительное место уделить идейной и исторической стороне дела, что определило специфику изложения.

Собранные в первой и второй главах исторические сведения, качественные мотивировки принципов нестандартного анализа и обсуждение их простейших следствий для дифференциального и интегрального исчисления составляют «наивное» обоснование инфинитезимального анализа. Формальные детали соответствующего аппарата нестандартной теории множеств собраны в третьей главе.

Веским доводом в пользу известной концентричности изложения служат замечательные слова Н. Н. Лузина: «Математический анализ вовсе не есть совершенно законченная наука, как иногда склонны себе его представлять, с раз навсегда найденными принципами, из которых только остается извлекать дальнейшие следствия... Математический анализ ничем не отличается от всякой другой науки и имеет свой ход идей, движущийся не только поступательно, но и кругообразно, с возвращением к группе прежних идей, правда всегда в новом освещении» [151, с. 389].

В четвертой и пятой главах представлены инфинитезимальные методы в общей топологии и субдифференциальном исчислении.

Шестая глава посвящена проблемам аппроксимации бесконечномерных банаховых пространств и операторов в них конечномерными пространствами и матрицами. Разумеется, размерность аппроксимирующего пространства является здесь бесконечно большим числом.

Близким по проблематике является и материал седьмой главы, относящейся к гармоническому анализу на группах. Здесь подробно излагается нестандартная техника аппроксимации локально компактных групп и соответствующих преобразований Фурье.

Выбор именно этих тем из многообразия современных приложений нестандартного анализа определен во многом личными предпочтениями авторов.

В заключительной восьмой главе собраны упражнения, полезные для закрепления материала, а также сформулированы и открытые вопросы, трудность которых варьируется от нулевой до бесконечно большой.

Мы не захотели ограничивать себя двухэлементной булевой алгеброй и кое-где привлекаем общие булевозначные модели. Для удобства читателя необходимый минимум сведений о последних собран в приложении.

При завершении работы над рукописью по предложению издательства мы приняли решение о публикации книги в двух частях. Деление было осуществлено механически объявлением шестой главы началом второй части книги. Каждая из частей снабжена собственными указателями и содержит общие для всего издания введение и список литературы.

Предлагаемое читателю сочинение отчасти служит отчетом о работе над проблемами, занимавшими авторов в течение последней четверти двадцатого века. Мы с удовлетворением вспоминаем трудности и радости нашей многолетней совместной работы и теплого дружеского общения. Возможно, они также были проявлениями приятных следствий нестандартного анализа...

Глава 1

Экскурс в историю математического анализа

Идеи дифференциального и интегрального исчисления восходят к глубокой древности и связаны с наиболее фундаментальными математическими концепциями. Сколь-либо детальное изложение истории становления представлений о математических объектах, о процессах вычисления и измерения, определяющих нынешние взгляды на инфинитезимали, требует специальных сочинений, выходящих за рамки наших возможностей и намерений. Ситуация существенно осложнена тем, что математическая история подвержена широко известным негативным процессам, возникающим при постоянных попытках апологии тех или иных современных воззрений. Формирование аппарата математического анализа, в частности, далеко не всегда излагается достаточно полно и бесстрастно. Односторонние взгляды на сущность дифференциала и интеграла, гипертрофирование роли понятия предела, предание анафеме актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел получили в течение пятидесяти лет двадцатого века столь широкое распространение, что не позволяют игнорировать их существование.

Стало трюизмом воззрение, что «сами основания анализа были долго окружены таинственностью вследствие нежелания признать за понятием предела исключительного права быть источником новых методов» [104, с. 562]. Между тем, как справедливо отметил Л. С. Понтрягин: «Исторически интегральное и дифференциальное исчисление были уже хорошо развитыми областями математики до того, как появилась теория пределов. Последняя возникла как некоторая надстройка над существовавшей уже теорией. Многие физики считают, что так называемое строгое определение производных и интегралов вовсе не нужно для хорошего понимания дифференциального и интегрального исчисления. Я разделяю их точку зрения» [188, с. 64–65].

В связи с изложенным мы сочли необходимым в доступной нам краткой форме ознакомить читателя с некоторыми поворотными моментами в истории анализа и с положениями, высказанными классиками в процессе формирования современных взглядов. Отбор соответствующих фрагментов с неизбежностью субъективен. Надеемся, что тем не менее он достаточен для формирования критического отношения к односторонним искаженным картинам становления инфинитезимальных методов.

1.1. Г. В. Лейбниц и И. Ньютон

Дифференциальное и интегральное исчисление имеет давнее название «анализ бесконечно малых». Именно так был озаглавлен первый учебник математического анализа, вышедший в свет в 1696 г. Этот учебник был составлен Г. Лопиталем в результате контактов с И. Бернулли (старшим), одним из выдающихся последователей Г. В. Лейбница.

Научное наследие, творчество и взаимоотношения основоположников математического анализа Г. В. Лейбница и И. Ньютона подвергнуты детальному, можно сказать, скрупулезному изучению.

Стремление восстановить ход мысли гениальных людей, выявить пути, приведшие к открытию новых истин, оправдано и закономерно. Однако никогда не следует забывать имеющихся принципиальных различий между черновиками и набросками, частными письмами к коллегам и сочинениями, специально предназначенными для более широкого распространения. В этой связи необходимо прежде всего обратиться к «официальным» изложениям интересующих нас представлений Г. В. Лейбница и И. Ньютона о бесконечно малых.

Первой опубликованной работой по дифференциальному исчислению является статья Г. В. Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления» (см. [145]). Эта работа вышла в свет в лейпцигском журнале «Acta Eruditorum» триста лет назад в 1684 г. Лейбниц дает следующее определение дифференциала. Рассматривая кривую YY и отрезок касательной, проведенной в фиксированной точке кривой Y, отвечающей выбранной координате X на оси AX, и обозначая D точку пересечения касательной с указанной осью, он пишет: «Назовем произвольно взятую прямую dx, а другой отрезок, относящийся к dx так, как... y ...относится к XD, назовем... dy или же разностью (differentia) ...y...». К этому прилагается рисунок, существенные детали которого (с учетом письменных разъяснений Лейбница) воспроизводятся здесь (рис. 1).

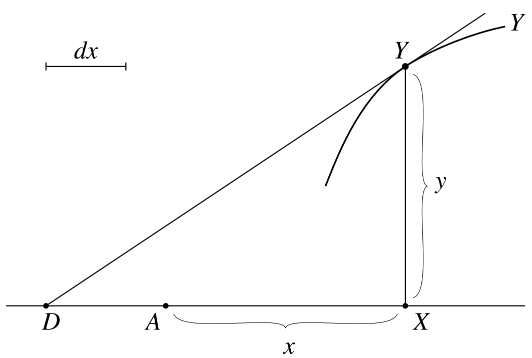


Рис. 1

Итак, по Лейбницу для функции $x \mapsto y(x)$ в точке x при произвольном dx мы имеем

$$dy := \frac{YX}{XD}dx.$$

Иначе говоря, дифференциал определен как соответствующее линейное отображение, т. е. тем способом, над которым подпишется большинство теперешних специалистов.

Г. В. Лейбниц — серьезный мыслитель, считавший, что «изобретение силлогистической формы есть одно из прекраснейших и даже важнейших открытий человеческого духа. Это своего рода *универсальная математика*, все значение которой еще недостаточно понято. Можно сказать, что в ней содержится искусство непогрешимости...» [147, с. 492–493]. Безусловно понимая, что описание и обоснование изложенного им алгоритма дифференциального исчисления (так Г. В. Лейбниц называл правила дифференцирования) требует уточнения понятия касательной, он разъясняет: «...найти касательную — значит провести прямую, соединяющую две точки кривой, расстояние между которыми бесконечно мало, или же провести продолженную сторону бесконечноугольного многоугольника, который для нас равнозначен кривой». Иначе говоря, Г. В. Лейбниц базирует свое исчисление на апелляции к устройству кривых «в малом».

На статут бесконечно малых в те времена имелись практически две точки зрения. В силу первой, по-видимому, более близкой Г. В. Лейбницу, бесконечно малое число мыслилось как меньшее любого «могущего быть заданным количества». Актуально существующие «неделимые» элементы, составляющие величины и фигуры — вот образы, сопутствующие приведенной концепции бесконечной малости. Для Г. В. Лейбница неоспоримо суждение о существовании «простых субстанций, входящих в состав сложных» — *монад.* «Эти-то монады и суть истинные атомы природы, одним словом, элементы вещей» [146, с. 413].

Для другого родоначальника анализа И. Ньютона бесконечно малые были связаны с представлениями об исчезающих количествах [183, 217]. Неопределенные величины он рассматривал «не как состоящие из крайне малых частей, но как описываемые непрерывным движением», «...как возрастающие или убывающие в непрерывном движении, т. е. как притекающие или утекающие». Знаменитый «метод первых и последних отношений» в классическом трактате «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) имеет следующую формулировку:

«Количества, а также отношения количеств, которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приблизятся друг к другу ближе, нежели на любую заданную разность, будут напоследок равны» [217, с. 101].

Проводя идеи, которые сейчас прочно ассоциируются с теорией пределов, И. Ньютон проявлял свойственную настоящим ученым проницательность, предусмотрительность и мудрость, оценивая конкурирующие воззрения. Он писал: «...построение анализа посредством конечных величин и исследование первых или последних отношений нарождающихся или исчезающих конечных величин согласно с геометрией древних, и я желал обнаружить, что в методе флюксий нет необходимости вводить в геометрию бесконечно малые фигуры.

Можно, правда, провести анализ на каких угодно фигурах, и конечных и бесконечно малых, которые представляют себе подобными исчезающим, так же как и на фигурах, которые в методах *неделимых* обычно считаются бесконечно малыми, но только при этом следует действовать с должной осторожностью» [183, с. 169].

Столь же гибких, глубоко диалектических взглядов придерживался Г. В. Лейбниц. В своем известном письме к П. Вариньону от 2 февраля 1702 г. [217], подчеркивая, что «...нет нужды ставить математический анализ в зависимость от метафизических споров», он указывает на единство противоположных представлений об объектах нового аппарата: «...если какой-либо противник желает возражать против наших утверждений, то из нашего исчисления следует, что ошибка будет меньше, чем любая ошибка, какую он сможет указать, ибо в нашей власти взять несравнимо малое достаточно малым для этой цели, поскольку такую величину всегда можно взять сколь угодно малой. Быть может, Вы, сударь, это и имеете в виду, говоря о неисчерпаемом, и в этом, без сомнения, состоит строгое доказательство применяемого нами исчисления бесконечно малых... Также можно сказать, что бесконечные и бесконечно малые обоснованы так, что в геометрии и даже в природе все происходит, как если бы они представляли собой совершенные реальности. Об этом свидетельствует не только наш геометрический анализ трансцендентных, но еще мой закон непрерывности, в силу которого допустимо рассматривать покой как бесконечно малое движение (т. е. как равносильный роду своей противоположности), и совпадение — как бесконечно малое расстояние, и равенство — как последнее из неравенств и т. д.».

Близкие положения высказывал Г. В. Лейбниц в следующем отрывке, выделенный конец которого часто цитируют в сочинениях по нестандартному анализу, следуя примеру А. Робинсона [454, с. 260–261]: «...нет необходимости понимать здесь бесконечное в строгом смысле слова, но лишь в том смысле, в каком в оптике говорят, что солнечные лучи исходят из бесконечно удаленной точки и потому считаются параллельными.

И когда имеются различные порядки бесконечного или бесконечно малых, то понимаются они в том же смысле, в каком земной шар считают точкой по сравнению с расстоянием до неподвижных звезд, а шарик в наших руках — точкой по сравнению с полудиаметром земного шара, так что расстояние от неподвижных звезд является бесконечно бесконечным или бесконечностью бесконечности по отношению к диаметру шарика.

Дело в том, что вместо бесконечного или бесконечно малого берут настолько большие и настолько малые величины, насколько это нужно, чтобы ошибка оказалась менее данной ошибки и, таким образом, *отличие от стиля Архимеда состоит лишь в выражениях, которые в нашем методе являются более прямыми и более пригодны для искусства изобретения*» [145, с. 190].

1.2. Л. Эйлер

Восемнадцатое столетие в истории математического анализа по праву называют веком Л. Эйлера. Каждый, кто ознакомится с его сочинениями, будет потрясен виртуозной техникой, глубоким проникновением в суть дела. Можно вспомнить, что замечательный ученый-инженер А. Н. Крылов с восторгом видел в знаменитой *формуле Эйлера* — $e^{i\pi} = -1$ — символ единства всей математики, отмечая, что «в ней -1 — представляет арифметику, i — алгебру, π — геометрию и e — анализ».

Для Л. Эйлера характерен многосторонний, как сейчас говорят «системный», подход к исследованию математических задач — он широко использует весь разработанный к тому времени аппарат. Существенно подчеркнуть постоянное, эффективное и эффектное применение инфинитезимальных концепций и, прежде всего, актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел. Л. Эйлер достаточно подробно разъяснил методические основы своих представлений, названных «исчислением нулей». Имеется склонность искать (отличные от имеющихся) пятна на солнце и (аналогичные) слабости гениев. Долгие годы Л. Эйлеру инкриминировали «неверное» обращение с расходящимися рядами, пока не были поняты его взгляды. Сейчас кое-кто употребляет оборот «Эйлер в вопросе о расходящихся рядах стоял на вполне современной точке зрения...» Правильнее обернуть эту фразу и сказать, что современные математики, наконец, доросли до идей Эйлера. Как станет видно из дальнейшего (см. 2.2, 2.3), мнение, что «...мы не сможем восторгаться тем способом, которым Эйлер обосновывает анализ, вводя нули различных порядков» столь же самонадеянно, как и суждение о том, что «гиганты науки, главным образом, Эйлер и Лагранж, дали неверное обоснование анализа». Эйлер, и это сто́ит признать безоговорочно и навсегда, владел анализом и ведал, что творил.

1.3. Дж. Беркли

Идеи анализа в их общей форме оказали заметное воздействие на характер мировоззренческих представлений XVIII века.

Отражением глубины проникновения понятий бесконечно больших и бесконечно малых количеств в культурную среду того времени служат, в частности, вышедшие в 1726 г. из-под пера Дж. Свифта «Путешествия Лемюэля Гулливера...» (Лилипутия и Бробдингнег) и знаменитый «Микромегас 1752», написанный ярким, язвительным мыслителем Ф.-М. Аруэ — Вольтером. Интересно, что А. Робинсон к своему классическому сочинению [454] в качестве эпиграфа избрал начало следующей речи Микромегаса:

«Теперь я вижу яснее, чем когда-либо, что ни о чем нельзя судить по его видимой величине. О боже, даровавший разум существам, столь ничтожных размеров! Бесконечно малое равно перед лицом твоим бесконечно большому; если только возможны существа, еще меньшие чем эти, то и они могут обладать разумом, превосходящим ум тех великолепных творений твоих, виденных мною на небе, одна ступня которых покрыла бы эту планету» [30, с. 154].

Представляется серьезным то воздействие на развитие математического анализа, которое оказало выступление в 1734 г. крупного деятеля церкви и теолога, епископа Дж. Беркли с памфлетом «Аналитик, или Рассуждение, адресованное неверующему математику, где исследуется, являются ли предмет, принципы и заключения современного анализа более отчетливо познаваемыми и с очевидностью выводимыми, чем религиозные таинства и положения веры» [10, с. 361–408]. Клерикальная направленность сочинений Дж. Беркли сочетается с афористичностью, тонкостью наблюдений и убийственной точностью выражений. «...Ошибка может породить истину, хотя не может породить науку» [10, с. 377] — вот лейтмотив его критики анализа. Вызов Беркли [10, с. 377]: «У меня нет разногласий с вами относительно ваших выводов, они у меня есть только относительно вашей логики и метода. Как вы проводите доказательство? С какими предметами вы хорошо знакомы и ясно ли вы их себе представляете? На основе каких принципов вы действуете, насколько они правильны и как вы их применяете?» — был адресован всему естествознанию.

Сочинение Дж. Беркли, завершенное 67 острыми вопросами, оспаривающими научность методов анализа того времени, не могло быть оставлено без ответа наиболее передовыми представителями научной мысли XVIII века — энциклопедистами.

1.4. Ж. Д'Аламбер и Л. Карно

Поворотный пункт в истории формирования основных понятий анализа связан с идеями и деятельностью Ж. Д'Аламбера. Один из организаторов и ведущих авторов бессмертного шедевра просветительской мысли «Энциклопедии или толкового словаря наук, искусств и ремесел» в статье «Дифференциал» заявил: «Ньютон никогда не считал дифференциальное исчисление исчислением бесконечно малых, а видел в нем метод первых и последних отношений» [217, с. 157]. Д'Аламбер стал первым математиком, объявившим себя обладателем доказательства, что бесконечно малые «на самом деле не существуют ни в природе, ни в допущениях геометров» (из статьи «Бесконечно малое» 1759 г.). Позиция Ж. Д'Аламбера, отраженная «Энциклопедией...», в немалой степени способствовала оформлению в конце XVIII века представления о бесконечно малой как о величине, стремящейся к нулю. По-видимому, в этой связи следует упомянуть работу Л. Карно «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых», в которой отмечено «...понятие бесконечно малого количества не менее ясно, чем понятие предела, потому что оно есть не что иное, как разность этого предела и количества, последним значением которого он является».

1.5. Б. Больцано, О. Коши и К. Вейерштрасс

XIX век стал веком обоснования анализа с помощью теории пределов. Выдающийся вклад в этот процесс внесли Б. Больцано, О. Коши и К. Вейерштрасс. Достижения названных ученых отражены в любом традиционном курсе дифференциального и интегрального исчисления. Новый канон строгости, выдвинутый Б. Больцано, данное О. Коши определение бесконечно малого количества как переменной с нулевым пределом, наконец, ε-δ-техника К. Вейерштрасса составляют неотъемлемую часть математических воззрений, став частью современной культуры. Стоит особо отметить (см. [217]), что, давая словесную характеристику непрерывности, О. Коши и К. Вейерштрасс прибегают к практически тождественным выражениям:

> «бесконечно малое приращение переменной порождает всегда бесконечно малое приращение самой функции»
>
> О. Коши;

«бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции»

К. Вейерштрасс.

Указанное совпадение подчеркивает достойную уважения потребность связать новые представления с позициями великих предшественников.

Размышляя о значении пересмотра аналитических воззрений, происходившего в XIX веке, следует иметь в виду сделанное в этой связи важное наблюдение Ф. Севери [201, с. 113]: «Этот пересмотр, который приобрел в наши дни относительную завершенность, не имеет, однако, той определенной ценности, в которую верят многие ученые. В самом деле, строгость сама по себе есть функция совокупности знаний в каждый исторический период, соответствующий способу научной обработки истины».

1.6. Н. Н. Лузин

Начало XX века в математике отмечено дальнейшим ростом недоверия к концепции актуальных бесконечных величин. Эта тенденция особенно усилилась в связи с переустройством математики на основе теоретико-множественной установки, завоевавшей себе в 30-е годы прочные ключевые позиции.

Н. Н. Лузин в первом издании Большой Советской Энциклопедии в 1934 г. писал: «Что же касается постоянного бесконечно малого количества, отличного от нуля, то современный математический анализ, не отрицая формальной возможности определить идею постоянного бесконечно малого (например, как соответствующего отрезка „неархимедовой“ геометрии), рассматривает эту идею как совершенно бесплодную, так как ввести такое бесконечно малое в исчисление оказывается невозможным» [151, с. 293–294].

В те годы в России известным событием стал выход в свет учебника М. Я. Выгодского «Основы исчисления бесконечно малых», вызвавший серьезную и острую критику. М. Я. Выгодский старался сохранить концепцию инфинитезималей, апеллируя к исторической практике. Он, в частности, отмечал: «Если бы дело шло только о создании логического аппарата, который работал бы сам по себе, то, устранив из рассмотрения бесконечно малые величины и изгнав дифференциалы из математики, можно было бы праздновать победу над теми затруднениями, которые доставляли столько хлопот математикам и философам в течение двух веков. Но исчисление бесконечно малых возникло из потребностей практики, и с течением времени его связь с естествознанием и техникой (а в позднейшее время и с социальными науками) все более и более укреплялась и становилась все более и более плодотворной. Между тем полное изгнание бесконечно малых величин сделало бы эту связь если не невозможной, то чрезвычайно затруднительной» [33, с. 160].

Характеризуя учебник М. Я. Выгодского, Н. Н. Лузин в 40-е годы писал: «Этот курс внутренне цельный и освещенный большой идеей, которой он остается верным, не укладывается в рамки современного этапа математического анализа, длящегося 150 лет, и в настоящее время приходящего к своему завершению» [151, с. 398].

На отношении Н. Н. Лузина к бесконечно малым сто́ит остановиться особо, как на важном свидетельстве того, обычно скрытого, драматизма, которым наполнена история каждой глубокой идеи, волнующей людей. Н. Н. Лузин отличался редкой способностью проникать в ядро самых изощренных математических проблем и, можно сказать, владел замечательным даром предвидения [139, 140, 153]. Идея актуальных бесконечно малых при этом была чрезвычайно близка ему психологически. Он подчеркивал: «...мысль о них никогда не могла быть успешно изгнана из сознания. Имеются, очевидно, какие-то глубоко скрытые причины, еще до сих пор не выясненные полностью, которые заставляют наш ум быть расположенным всерьез считаться с ними» [151, с. 396].

В одном из писем к М. Я. Выгодскому, Н. Н. Лузин предсказывал:« Я всегда готов в свою очередь защищать то в Ваших теориях, что я считаю „от истины“. Ваша критика Анализа правдива и *верна*. Но напрасно Вы только оправдываете актуально-малые только педагогическими соображениями. Наука, конечно, если не вернется вполне и совершенно к ним, то во всяком случае, актуально малые будут совершенно реабилитированы с полной научной точки зрения, как своего рода „математические кванты“».

В другом месте с подлинной скорбью Н. Н. Лузин отмечал: «Когда ум начинает свое знакомство с анализом, словом, когда для него весна, он начинает именно с актуально малых, которые можно назвать „элементами“ количества.

Но постепенно, шаг за шагом, по мере накопления у него знаний, теорий, пресыщения к абстракции, усталости, ум начинает забывать свои первоначальные стремления, улыбаться их „ребячеству“. Короче говоря, когда приходит осень ума, он дает себя убедить в единственности правильного обоснования при помощи пределов» [27].

Последнюю точку зрения Н. Н. Лузин энергично развивал в учебнике «Дифференциальное исчисление», указывая, что «для правильного понимания самой *сути дела* учащийся должен хорошо усвоить, что бесконечно малое *по самому своему определению* есть всегда *переменная* величина и что поэтому никакое постоянное число, как бы мало оно ни было, *никогда* не есть бесконечно малое. Учащийся должен остерегаться пользоваться сравнениями или уподоблениями вроде, например, следующего: „Один сантиметр есть величина бесконечно малая по сравнению с диаметром солнца“. Эта фраза совершенно неправильна. Обе величины — и сантиметр и диаметр солнца — суть величины постоянные и, значит, *конечные*, только, разумеется, одна значительно меньше другой. Притом и сантиметр вовсе не представится маленькой величиной, если мы, например, сравним его с „толщиной волоса“, а для движущегося микроба сантиметр явится пространством колоссальной величины. Чтобы избавиться от всяких рискованных сравнений и субъективных случайных уподоблений, учащийся твердо *должен помнить, что никакая постоянная величина не является бесконечно малой, так же как никакое число, как бы мало оно ни было.*

Поэтому, в сущности говоря, было бы гораздо правильнее употреблять не термин „бесконечно малое“, но термин „бесконечно умаляющееся“ как более ярко выражающий *идею переменности*» [152, с. 61].

1.7. А. Робинсон

Седьмое (посмертное) издание названного учебника Н. Н. Лузина увидело свет в том же 1961 г., в котором А. Робинсон опубликовал свой «Нестандартный анализ», содержащий современное обоснование метода актуальных бесконечно малых. А. Робинсон опирался на локальную теорему А. И. Мальцева, выделяя ее как результат «основополагающего значения для нашей теории» [454, с. 13] и прямо ссылаясь на работу А. И. Мальцева, относящуюся к 1936 г. Открытие А. Робинсона разъясняет идеи родоначальников дифференциального и интегрального исчисления, дает новое подтверждение диалектического характера развития математики.

Глава 2

Наивные основы инфинитезимальных методов

Долгие годы несправедливой борьбы с актуальными бесконечно большими и бесконечно малыми величинами не прошли бесследно, породив обычные в таких случаях негативные последствия, в частности, массу предрассудков по отношению к понятиям и конструкциям, связанным с инфинитезималями.

Один из них весьма широко распространен и состоит во мнении о сложности овладения аппаратом нестандартного анализа. При этом подчеркивается, что последний опирается на продвинутые разделы современной формализованной теории множеств и математической логики.

На самом же деле наличие упомянутой связи, являясь безусловным и неоспоримым фактом, ни в коей мере не затрудняет ни понимания, ни методов работы с инфинитезималями.

Цель текущей главы — обосновать высказанное положение с помощью изложения методологии нестандартного анализа на уровне строгости, принятом в нынешней системе математического образования, базирующемся на представлениях наивной теоретико-множественной установки, восходящей к Г. Кантору.

Помимо разъяснения смысла концепций нестандартной теории множеств и принимаемых в ней принципов переноса, идеализации и стандартизации, определенное место мы уделяем проведению параллелей излагаемых достаточно свежих представлений о простейших объектах математического анализа с подходами классиков. Тем самым нам хотелось подтвердить преемственность в развитии идей дифференциального и интегрального исчисления, по-новому освещаемую нестандартным анализом.

2.1. Понятие множества в нестандартном анализе

В этом параграфе мы приведем фрагмент обоснования нестандартных методов, близкий по уровню строгости к принятому при знакомстве с началами математического анализа.

2.1.1. Нынешние курсы математического анализа часто строятся на понятии множества.

2.1.2. Примеры.

(1) *Л. Шварц «Анализ»*: «Множеством называется совокупность некоторых объектов.

Примеры: Множество учащихся одного выпуска,
множество точек плоскости,
множество невырожденных поверхностей
2-го порядка в трехмерном пространстве,
множество $\mathbb{N}$ неотрицательных целых чисел,
множество $\mathbb{Z}$ произвольных целых чисел,
множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел,
множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел,
множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел» [226, с. 9].

(2) *В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов «Математический анализ»*:

«...при изучении вещественных чисел важным понятием являлось понятие множества. Подчеркнем, что множество мы рассматривали как начальное понятие, неопределенное через другие.

В этом параграфе мы будем изучать множества произвольной природы или, как говорят, абстрактные множества. Это означает, что объекты, составляющие данное множество, или, как говорят, элементы данного множества уже не обязаны быть обязательно вещественными числами. Элементами абстрактного множества могут быть, например, функции, буквы алфавита, фигуры на плоскости и т. д.» [73, с. 69].

(3) *Ю. Г. Решетняк «Курс математического анализа»*.

«Для нас множество будет одним из первичных математических понятий, не выражаемым через другие математические понятия.

Обычно, говоря слово „множество“, мы будем под этим понимать совокупность объектов произвольного рода, рассматриваемую как единое целое. Вместе с термином множество будут употребляться и его синонимы типа набор, система, совокупность и т. п. Например, можно говорить о множестве решений некоторого уравнения, о коллекции картин, хранящихся в музее, совокупности точек круга и т. д.

Объекты, составляющие то или иное множество, называются его *элементами*.

Множество считается заданным, если для любого объекта можно установить, является он элементом данного множества или нет». [194, с. 12].

(4) *В. А. Зорич «Математический анализ»*:

«Основные предпосылки канторовской (или, как условно говорят, „наивной“) теории множеств сводятся к следующему:

1° множество может состоять из любых различных объектов;

2° множество однозначно определяется набором составляющих его объектов;

3° любое свойство определяет множество тех объектов, которые этим свойством обладают.

Если x — объект, P — свойство, $P(x)$ — обозначение того, что x обладает свойством P, то через $\{x : P(x)\}$ обозначают весь класс объектов, обладающих свойством P.

Объекты, составляющие класс или множество, называют *элементами* класса или множества.

Слова „класс“, „семейство“, „совокупность“, „набор“ в наивной теории множеств употребляют как синонимы термина „множество“.

Следующие примеры демонстрируют применение этой терминологии:

множество букв „а“ в слове „я“;
множество жен Адама;
набор из десяти цифр;
семейство бобовых;
множество песчинок на Земле;
совокупность точек плоскости, равноудаленных от двух данных ее точек;
семейство множеств;
множество всех множеств.

Различие в степени определенности задания множеств наводит на мысль, что множество — не такое уж простое и безобидное понятие.

И в самом деле, например, понятие множества всех множеств просто противоречиво [70, с. 17–18].

2.1.3. Нестандартный анализ, или, более полно, нестандартный математический анализ, является разделом математического анализа. В этой связи становится очевидным, что в нем принимаются изложенные взгляды на множества. Иными словами, в *нестандартном анализе предполагаются множествами те и только те совокупности, которыми оперирует классическая — «стандартная» — теория.* Стоит подчеркнуть, что справедлива и переформулировка приведенного утверждения: нестандартный анализ не считает множествами те и только те совокупности, которые не признает в качестве множеств обычная математика. В то же время *нестандартный анализ связан с уточненными воззрениями на множества*, т. е., как иногда говорят, строится в рамках нестандартной теории множеств.

2.1.4. В основе наивной теории множеств лежат классические представления Г. Кантора: «*Множество есть многое, мыслимое нами как единое*» и множество — это «*соединение в некое целое определенных хорошо различимых объектов нашего созерцания или нашего мышления*» [78, с. 173]. Общеизвестно, что подобные концепции чересчур широки. Это обстоятельство обходится известной детализацией различий множеств и немножеств. Например, для обозначения неприемлемых — «слишком больших» — совокупностей множеств применяется термин «класс». При этом подразумевается, что класс не обязан быть множеством. Иными словами, при формализации понятий наивной теории множеств более полно и тщательно регламентируются процедуры, позволяющие вводить то или иное «канторовское» множество в математический обиход. Все допущенные в математику множества совершенно равноправны. Само собой, отсюда никак не следует, что все множества равны или не имеют отличий. Просто множества однотипны, обладают общим статусом — они элементы «класса всех множеств».

2.1.5. Решающий новый момент, главная посылка, формирующая нестандартную теорию множеств, чрезвычайно проста. Она заключена в том, что *множества бывают разные*: *стандартные и* *нестандартные.* Поэтому правильнее говорить не о нестандартной теории множеств, а о теории множеств, стандартных и нестандартных. Интуитивное представление, выделяемое фразой: «*множество A стандартно*», состоит в том, что A ясно и отчетливо описано, стало «артефактом» познавательной деятельности людей. Понятием стандартности проводится разграничительная линия между объектами, определяемыми явными математическими конструкциями, например, с помощью теорем существования и единственности, — их называют стандартными множествами, и объектами, возникающими в процессе исследования неявным, косвенным образом — нестандартными множествами.

Прямыми недвусмысленными способами заданы такие числа, как π, e, $\sin 81$, четко описаны множества натуральных и вещественных чисел. Названные объекты являются стандартными. В свою очередь, произвольное «абстрактное» вещественное число в рамках теоретико-множественной установки возникает косвенным образом, вводится как элемент ранее указанного множества всех вещественных чисел.

Подобный способ введения объектов в рассмотрение чрезвычайно распространен: вектор — это элемент векторного пространства, фильтр — множество подмножеств данного множества, обладающее к тому же известными свойствами и т. п. Значит, среди вещественных чисел есть стандартные и нестандартные, существуют стандартные и нестандартные векторы и фильтры и, вообще, имеются стандартные и нестандартные множества.

Разберем пример множества песчинок на Земле. Как указал Архимед в своем классическом сочинении «Псаммит»: «...среди чисел, которые получили от нас название и опубликованы в написанной к Зевксиппу книге, некоторые превосходят не только число песчинок в объеме, равном заполненной, как мы сказали, Земле, но даже в объеме, равном миру» [8, с. 358]. Значит, число песчинок на Земле — конкретное натуральное число. Однако дать непосредственное определение этого числа, назвать именно это число практически невозможно. Последовательный перебор песчинок, очевидно, неосуществим. Следовательно, количество песчинок на Земле выражается «*недоступным*», «*неосуществимым*», — нестандартным — натуральным числом и соответственно множество песчинок нестандартно.

Разумеется, приведенные *взгляды на различия стандартных и* *нестандартных множеств имеют вспомогательное значение* для овладения правилами оперирования с ними. Стоит провести аналогию с положением в геометрии, где интуитивные наглядные представления о пространственных формах помогают выработать навыки использования аксиом, составляющих, в конечном счете, строгие определения точек, прямых, плоскостей и т. п. Следуя А. Д. Александрову, необходимо отметить, что «аксиомы сами по себе нуждаются в содержательном обосновании, они лишь суммируют другой материал и дают начало логическому построению теории» [3, с. 51]. В связи с этим формальному введению аксиом нестандартной теории множеств необходимо предпослать их качественное обсуждение.

Как мы уже знаем, нестандартная теория множеств начинается с фиксации первичного наблюдения: множества бывают разные — стандартные и нестандартные. Помимо этого принимаются следующие постулаты (или, более точно, варианты следующих постулатов).

2.1.6. *Принцип переноса:* *обычное математическое утверждение, доказывающее существование некоторого множества, задает одновременно и стандартное множество.*

Иными словами, теоремы существования и единственности, принятые в классической математике, считаются вполне явными определениями математических объектов. Эквивалентная переформулировка приведенного принципа, разъясняющая смысл его названия, гласит: *для того чтобы доказать какое-либо утверждение обо всех множествах, достаточно доказать его только для стандартных множеств.* Интуитивным обоснованием принципа переноса служит тот бесспорный факт, что суждения, относящиеся к произвольным множествам, мы выносим, оперируя только с уже реально описанными — со стандартными — множествами.

Размышления над смыслом принципа переноса показывают, что в нем речь идет о двух аспектах представлений о стандартных объектах. Первый заключен в том, что *новые стандартные объекты возникают из уже имеющихся с помощью описаний типа теорем существования и единственности*, т. е. постулируется допустимость *рекурсии.* Это обстоятельство можно выразить заключением, что в стандартном непустом множестве имеется стандартный элемент и что объект, конструируемый или определяемый единственным образом из уже имеющихся стандартных элементов, сам стандартен.

Второй аспект представлений о стандартности, выраженный принципом переноса, неразрывно связан с первым и означает *представительность мира стандартных объектов в универсуме всех изучаемых множеств.* Можно сказать, что постулируется возможность *индукции* — познаваемость идеальных конструкций с помощью изучения реально доступных стандартных объектов.

2.1.7. *Принцип идеализации:* *в каждом бесконечном множестве имеется нестандартный элемент.*

Адекватность приведенного положения общим представлениям о бесконечности несомненна. Принцип идеализации в дальнейшем часто дается в более сильных формах, отражающих концепцию неисчерпаемого разнообразия идеальных объектов. Например, иногда принимают, что *все стандартные множества являются элементами некоторого конечного множества.* Число элементов такого «универсального» множества колоссально и, что важнее всего, «недоступно» — нестандартно. Поэтому не может вызывать удивление нестандартность самого универсального множества.

Полезно подчеркнуть, что при работе с изложенными первыми двумя постулатами (как, впрочем, и везде) необходимо проявлять осторожность. Так, в силу принципа переноса стандартное множество определяется своими стандартными элементами однозначно в среде сородичей — стандартных множеств. Однако рассматриваемое множество не сводится, вообще говоря, к принадлежащим ему стандартным элементам. Могут существовать другие, нестандартные множества, содержащие в себе весь запас стандартных элементов исходного множества и не имеющие никаких иных стандартных элементов. Еще одно достойное упоминания обстоятельство заключается в том, что, как и в обычной теории множеств, *понятие «утверждение» следует применять осмотрительно.* В принципе переноса речь должна идти об обычных математических предложениях, не апеллирующих к новому, описанному на содержательном уровне свойству множеств — быть или не быть стандартными. В противном случае, исходя из того, что все стандартные множества стандартны, мы сделали бы вывод о стандартности произвольного множества. Последнее заключение противоречит принципу идеализации. Итак, констатация того, что некоторое множество стандартно, — это не обычное утверждение.

2.1.8. *Принцип стандартизации:* *каждое стандартное множество и любое свойство определяют новое стандартное множество — подмножество исходного множества, стандартные элементы которого обладают названным свойством.*

Подробнее говоря, пусть A — это рассматриваемое стандартное множество и P — какое-либо свойство. Принцип стандартизации утверждает, что имеется стандартное множество, обозначаемое обычно ${}^*\{x \in A : P(x)\}$ и удовлетворяющее соотношению $y \in {}^*\{x \in A : P(x)\} \leftrightarrow y \in \{x \in A : P(x)\}$ для всякого стандартного y.

Множество ${}^*\{x \in A : P(x)\}$ часто называют *стандартизацией*, опуская указания на параметры, участвующие в его определении. Интуитивное обоснование принципа стандартизации состоит в том, что, имея в наличии явные описания математических объектов, мы можем оперировать составленными из них по тем или иным законам новыми вполне конкретными множествами.

Стандартизация дополняет общепринятый метод выделения подмножеств с помощью отбора элементов с наперед заданным свойством. При обдумывании принципа стандартизации полезно обратить внимание на то, что в нем ничего не говорится о нестандартных элементах возникающего множества. Это неслучайно, такие элементы могут обладать, а могут и не обладать рассматриваемым свойством. Стоит здесь же подчеркнуть, что принцип стандартизации нужно применять с должной осмотрительностью. Попытка самовольно стандартизовать «универсальное» множество, содержащее все стандартные множества, приводит к немедленному противоречию.

2.1.9. Приведенные постулаты кладутся в основу аксиоматических изложений нестандартной теории множеств. Мы обсудим их детально несколько позже, а пока можно, не отклоняясь от В. А. Зорича, заявить: «В целом любая из существующих аксиоматик такова, что она, с одной стороны, избавляет от известных противоречий наивной теории, а с другой — обеспечивает свободу оперирования с конкретными множествами, возникающими в различных отделах математики и в первую очередь именно в математическом анализе, понимаемом в широком смысле слова» [70, с. 18–19].

2.2. Простейшие свойства стандартных и нестандартных вещественных чисел

Перейдем к знакомству с новыми свойствами классической числовой прямой, изучать которые позволяют принципы нестандартного анализа.

2.2.1. Для множества A условимся писать $a \in {}^{\circ}A$ вместо выражения: «a — стандартный элемент A».

2.2.2. *Имеют место утверждения:*

(1) *справедлив принцип индукции по стандартным натуральным числам, т. е. если A — множество, для которого $1 \in A$ и при $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ верно $n \in A \to n+1 \in A$, то A содержит все стандартные натуральные числа: ${}^{\circ}\mathbb{N} \subset A$;*

(2) *конечное, т. е. не допускающее взаимнооднозначного отображения на собственное подмножество, множество, составленное из стандартных элементов, стандартно;*

(3) *стандартное конечное множество имеет только стандартные элементы;*

(4) *если множество имеет только стандартные элементы, то оно конечно;*

(5) *для бесконечного (= не являющегося конечным, ср. (2)) стандартного множества A совокупность ${}^{\circ}A$ — не множество.*

$\lhd$ (1): Используя принцип стандартизации, образуем следующее (стандартное) подмножество натурального ряда: $B := {}^{*}\{n \in \mathbb{N} : n \notin A\}$. Допустим, что $B \neq \varnothing$. Тогда у B имеется наименьший стандартный (в силу принципа переноса) элемент m. По условию $m \neq 1$ (ибо $1 \in A$). Кроме того, $m \notin A$ и, стало быть, $m - 1 \notin A$. По принципу переноса $m - 1 \in {}^{\circ}\mathbb{N}$, т. е. $m - 1 \in B$. Получим противоречивое неравенство $m - 1 \geq m$. Итак, $B = \varnothing$, т. е. $(\forall\, n \in {}^{\circ}\mathbb{N})(n \in A)$. Это и означает включение ${}^{\circ}\mathbb{N} \subset A$.

(2): Очевидное следствие принципа переноса.

(3): Одноэлементное стандартное множество имеет единственный (а потому стандартный) элемент. Число элементов конечного стандартного множества A стандартно. Кроме того, $A = (A - \{a\}) \cup$

$\{a\}$ для каждого $a \in A$. Учитывая, что число элементов $A - \{a\}$ также стандартно, мы можем применить принцип индукции (1).

(4): Непосредственное следствие принципа идеализации.

(5): Допустим, что ${}^\circ A$ — множество. На основании (4) заключаем: ${}^\circ A$ конечно. В силу (2) ${}^\circ A$ — стандартное множество. По принципу переноса $A = A^\circ$ и, стало быть, A конечно. Это противоречие. $\rhd$

2.2.3. *Натуральное число N нестандартно (= неосуществимо) в том и только в том случае, если N больше любого стандартного натурального числа. Символически:*

$$N \in \mathbb{N} - {}^\circ\mathbb{N} \leftrightarrow (\forall\, n \in {}^\circ\mathbb{N})(N > n).$$

$\lhd$ Достаточно заметить, что, например, в силу 2.2.2 для стандартного числа n из условия $n > N$ вытекает, что N доступно: $N \in {}^\circ\mathbb{N}$. $\rhd$

2.2.4. В связи с 2.2.3 нестандартные натуральные числа называют *актуальными бесконечно большими* или *недоступными*. Используя традиционную вольность речи, говорят о *бесконечных* числах.

Вопреки следующему распространенному суждению: «Эйлер довольно легкомысленно утверждал, что $1/0$ — бесконечность, хотя и не счел нужным определить, что такое бесконечность, а лишь ввел для нее обозначение ∞», на самом деле Л. Эйлер прямо указывал [231, с. 89]: «...бесконечное число и число, большее всякого могущего быть заданным, — это синонимы».

Недоступность натурального числа N выражают символом $N \approx \infty$ или, более полно, $N \approx +\infty$. Иногда пишут также $N \sim +\infty$.

Стоит подчеркнуть, что использование атрибута «бесконечное» для недоступного числа N может вызвать некоторое недоумение. В самом деле, проводя последовательно теоретико-множественную точку зрения, мы видим, что соответствующее множество N конечно в теоретико-множественном смысле (ср. 2.2.2 (2)). Недоступность N не должна ассоциироваться с бесконечностью N как множества. В действительности N — конечное множество, число элементов которого нестандартно. Именно этот смысл вкладывается (в рамках теоретико-множественной установки) в понятие актуального бесконечно большого натурального числа N.

2.2.5. *Имеют место утверждения:*

(1) $N \approx +\infty,\ M \approx +\infty \to N + M \approx +\infty,\ NM \approx +\infty$;

(2) $N \approx +\infty,\ n \in {}^{\circ}\mathbb{N} \to N + n \approx +\infty,\ N - n \approx +\infty,\ nN \approx +\infty$;

(3) *для каждого* $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ *верно*

$$N \approx +\infty \leftrightarrow N^n \approx +\infty;$$

(4) *у любого недоступного составного натурального числа имеются недоступные делители;*

(5) $N \approx +\infty,\ M \geq N \to M \approx +\infty$;

(6) *«... если* $\frac{1}{0}$ *обозначает бесконечно большое число, то так как* $\frac{2}{0}$ *есть, несомненно, удвоенное* $\frac{1}{0}$, *ясно, что число, хотя бы и бесконечно большое, может стать еще в два или несколько раз больше» (Л. Эйлер [230, с. 620]);*

(7) *пусть* t *— вещественное положительное число. Целая часть* t *недоступна в том и только в том случае, если недоступно* t, *т. е.* t *больше любого стандартного вещественного числа;*

(8) *пусть* $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *— строго возрастающая стандартная функция. Тогда для* $N \in \mathbb{N}$ *верно*

$$N \approx +\infty \leftrightarrow \psi(N) \approx +\infty.$$

$\triangleleft$ Докажем только (7) и (8), так как прочие утверждения проверяются более просто.

(7): Если целая часть s числа t недоступна и $(\exists\, r \in {}^{\circ}\mathbb{R})\ t \leq r$, то $t \leq n$ для некоторого $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$. Значит, будет $n + 2 \leq s \leq t \leq n$, что нелепо. Итак, $t \approx +\infty$. Если же $t \approx +\infty$, то $s + 1 \geq t$, где s — целая часть t. Значит, $s + 1 \approx +\infty$. В силу 2.2.5(2) отсюда вытекает, что $s \approx +\infty$.

(8): Пусть сначала $\psi(N) \approx +\infty$ и $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$. Тогда число $\psi(n)$ доступно, т. е. $\psi(n) \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ и, стало быть, $\psi(N) > \psi(n)$. В силу строгой монотонности ψ выводим: $N > n$, т. е. $N \approx +\infty$.

Допустим теперь, что $N \approx +\infty$. Тогда для $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ будет $N > n$ и, следовательно, $\psi(N) > \psi(n) \geq n$. Окончательно $\psi(N) \approx +\infty$. $\triangleright$

2.2.6. Пусть $\overline{\mathbb{R}}$ — *расширенная числовая прямая*, т. е. $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, где $+\infty$, $-\infty$ — присоединенные к $\mathbb{R}$ наибольший и наименьший элементы. Множество $\infty := \{+\infty, -\infty\}$ удобно называть (символической) *потенциальной бесконечностью* и соответственно говорить об элементе $+\infty$ (или $-\infty$) как о положительной или отрицательной (символической) бесконечности.

Число $t \in \mathbb{R}$ называют *доступным*, если найдется стандартное число $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$, для которого $|t| \leq n$. Условие доступности t из $\mathbb{R}$ символически записывают как $t \in \mathrm{ltd}(\mathbb{R})$ или $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$. Элементы из $\mathbb{R}$, не являющиеся доступными, называют *недоступными* или *актуальными бесконечными числами*. Пишут $t \approx +\infty$ для $t \notin {}^{\approx}\mathbb{R}$ и $t > 0$. По аналогии понимают записи $t \approx -\infty$ и $t \approx \infty$. Часто используют условное соглашение $t \approx +\infty \leftrightarrow t \in \mu(+\infty)$ и словесные обороты типа «число лежит в *монаде* бесконечно удаленной точки (в монаде плюс-бесконечности)».

Число $t \in \mathbb{R}$ называют *бесконечно малым* или, более полно, *актуальным бесконечно малым*, если для всякого $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ верно $|t| \leq 1/n$. При этом пишут $t \approx 0$ или $t \in \mu(\mathbb{R})$ и говорят, что t лежит в *монаде* нуля. (Символ $\mu(\mathbb{R})$ используют наряду с обозначением $\mu(0)$, подчеркивая очевидную связь с единственной отделимой векторной топологией на $\mathbb{R}$.) Бесконечно малые называют также *инфинитезималями*, реже используют неудачный термин *дифференциалы*.

Если $x \leq y$ и разность между x и y не бесконечно мала, то пишут $x \ll y$. Поскольку $t \in {}^{\approx}\mathbb{R} \leftrightarrow (\forall N \approx +\infty)(|t| \ll N)$, доступность $t \in \mathbb{R}$ записывают также и формулой $|t| \ll +\infty$.

2.2.7. Термин *монада* ($M\acute{o}\nu\alpha\zeta$) восходит к глубокой древности и традиционно без достаточных оснований переводится как единица. По первому определению книги седьмой «Начал» Евклида монада — «есть ⟨то⟩, через что каждое из существующих считается единым» [178, с. 9].

Приведем здесь некоторые качественные разъяснения представлений об устройстве монад, высказанные Секстом Эмпириком:

«...Пифагор говорил, что началом сущего является монада, по причастности к которой каждое из сущего называется одним» [203, с. 361];

«...точка устроена по типу монады, ведь, как монада есть нечто неделимое, так и точка, и, как монада есть некое начало в числах, так и точка есть некое начало в линиях» [203, с. 364];

«...единое, поскольку оно есть единое, неделимо, и монада, поскольку она есть монада, не делится. Или если она делится на много частей, она становится совокупностью многих монад, а уже не [просто] монадою» [203, с. 367].

Изучением монад, их статуса и строения в полном объеме мы займемся несколько позже. Начнем же с рассмотрения элементарных свойств инфинитезималей или, что эквивалентно, монады бесконечно малых.

2.2.8. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) $s \approx 0,\ t \approx 0 \to s + t \approx 0$;

(2) $t \approx 0,\ s \in {}^{\approx}\mathbb{R} \to st \approx 0$;

(3) $z \approx 0 \leftrightarrow 1/z \approx \infty$ *(при* $z \neq 0$*):*

«... если z становится количеством, меньшим любого могущего быть заданным количества, т. е. бесконечно малым, то значение дроби $\frac{1}{z}$ должно быть бóльшим, чем любое могущее быть заданным количество, т. е. бесконечно большим количеством» (Л. Эйлер [231, с. 93]);

(4) $(t \approx 0$ *и* t *стандартно*$) \to t = 0$.

$\lhd$ (1) Пусть $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$. Ясно, что $|s| \leq (2n)^{-1}$ и $|t| \leq (2n)^{-1}$. Отсюда $|s + t| \leq |s| + |t| \leq (2n)^{-1} + (2n)^{-1} = n^{-1}$, т. е. число $s + t$ бесконечно мало.

(2) Пусть $s \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ и $s \neq 0$ (иначе нечего доказывать). Возьмем $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$. Привлекая условие, видим, что $|s| \leq m$ для некоторого $m \in {}^{\circ}\mathbb{N}$. Итак, $|t| \leq (nm)^{-1}$. Отсюда $|st| \leq |s|\,|t| \leq m(nm)^{-1} = n^{-1}$, т. е. $st \approx 0$.

(3) Пусть z — конечное ненулевое число, т. е. $0 < |z| \leq |n|$, где $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$. Ясно, что $|1/z| \geq 1/n$, т. е. $1/z$ не является бесконечно малым числом. Наоборот, если $z \approx \infty$, то для всякого конечного n будет $|z| \geq n$, откуда и вытекает: $z^{-1} \approx 0$.

(4) Имеем $|t| \leq 2^{-1}|t|$, как только t стандартно. Последнее невозможно при $|t| > 0$. Значит, $t = 0$. $\rhd$

2.2.9. *Монада* $\mu(\mathbb{R})$ *— это не множество.*

$\lhd$ Допустим противное. Тогда $\mu(\mathbb{R})$ — подмножество $\mathbb{R}$. Для каждого $t > 0$, $t \in {}^{\circ}\mathbb{R}$ будет $t \geq \mu(\mathbb{R})$. Значит, $t \geq s := \sup \mu(\mathbb{R})$. Ясно, что число s бесконечно малое. Кроме того, $2s \geq s \to s = 0$. Но это противоречит наличию нестандартных (актуальных) бесконечно малых чисел. $\triangleright$

2.2.10. При работе с вещественными числами удобно выделять различные случаи их взаимного расположения.

Для $s, t, r \in \mathbb{R}$ пишут $s =_r t$ или $s \approx t(\mathrm{mod}\ r)$, если $(s-t)/r \approx 0$ (здесь $r \neq 0$). Числа s и t при этом называют *r-близкими*, или *бесконечно близкими по модулю r*. В случае $r = 1$ пишут просто $s \approx t$ и говорят о *бесконечной близости s и t*.

Родоначальники анализа бесконечно малых часто не отличали числа, бесконечно близкие к определенному числу, от самого этого числа. Такое положение Л. Эйлер выражал словами: «...бесконечно малое количество есть точно нуль» [231, с. 92]. В этой связи вместо символа $x \approx y$ для $x \in \mathbb{R}$, $y \in {}^{\circ}\mathbb{R}$ раньше применяли запись $x = y$. Г. В. Лейбниц отмечал в этой связи: «я считаю равными не только те величины, разность которых есть совершенное ничто, но и те, разность которых несравненно мала» [145, с. 188], подчеркивал в другом месте, что «...ошибка неуказуема и не может быть дана посредством какого бы то ни было построения» [236, с. 195].

Для $s, t \in \mathbb{R}$ пишут $s = O(t)$ при $s/t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$; если $s = O(t)$ и $t = O(s)$, то говорят, что s и t имеют *один и тот же порядок*; если $s/t \approx 0$, то пишут $s = o(t)$ и говорят, что s имеет *больший порядок малости* чем t; наконец, если $s - t = o(t)$ и $s - t = o(s)$, то s и t называют *эквивалентными* и пишут $s \cong t$.

Излагая свои взгляды о природе малых высших порядков, Г. В. Лейбниц писал: «Я бы хотел прибавить еще одно замечание, чтобы прекратить все споры о реальности разностей любого порядка, а именно, что их всегда можно изобразить обыкновенными пропорциональными им прямыми отрезками... Я уже объяснил, как изображать обыкновенными прямыми отрезками разности первого порядка, когда впервые изложил начала этого исчисления в Acta за октябрь 1684 г.» (см. [236, с. 188–190], ср. 1.1).

2.2.11. *Для $s, t \in \mathbb{R}$ введем естественные сокращения:*

$$s \in O := O(t) \leftrightarrow s = O(t); \quad s \in o := o(t) \leftrightarrow s = o(t).$$

Выполняются правила Э. Ландау:

$$O + O \subset O; \quad O + o \subset O; \quad o + o \subset o;$$
$$Oo \subset o; \quad OO \subset O; \quad oo \subset o.$$

$\lhd$ Проверим для определенности соотношение $O + o \subset O$. Итак, пусть $s = O(t)$ и $r = o(t)$. Тогда $s/t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ и $r/t \approx 0$. Таким образом, $(s + r)/t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$, т. е. $s + r = O(t)$. $\rhd$

2.2.12. *Для чисел $s, t \in \mathbb{R}$ равносильны утверждения:*

(1) *s и t эквивалентны;*

(2) *$s - t = o(t)$ или $t - s = o(s)$;*

(3) *$s/t \approx 1$ или $t/s \approx 1$;*

(4) *$s/t \approx 1$ и $t/s \approx 1$.*

$\lhd$ Ясно, что (1) $\to$ (2). Если, к примеру, $t - s = o(s)$, то выполняется $(t - s)/s \approx 0$, т. е. $t/s - 1 \approx 0$. Отсюда для $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \in {}^{\circ}\mathbb{R}$ имеем $1 - \varepsilon \leq t/s \leq 1 + \varepsilon$. Значит, $(1 - \varepsilon)^{-1} \geq s/t \geq (1 + \varepsilon)^{-1}$ и $\varepsilon/(1 - \varepsilon) \geq s/t - 1 \geq \varepsilon/(1 + \varepsilon)$, т. е. $s/t \approx 1$. Итак, (2) $\to$ (3) $\to$ (4). Импликация (4) $\to$ (1) бесспорна. $\rhd$

2.2.13. *Пусть $N \in \mathbb{N}$, а α_k, $\beta_k \in o(1)$ — бесконечно малые и $\alpha_k \cong \beta_k$ для $k := 1, \dots, N$. Справедливы утверждения:*

(1) *$\sum_{k=1}^N \alpha_k \cong \sum_{k=1}^N \beta_k$ при α_k, $\beta_k \geq 0$;*

(2) *если $\sum_{k=1}^N |\alpha_k| = O(1)$ т. е. если названная сумма доступна), то*

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \approx \sum_{k=1}^N \beta_k.$$

$\lhd$ Для доказательства заметим, что в силу 2.2.12 $-\varepsilon\alpha_k + \alpha_k \leq \beta_k \leq \alpha_k + \varepsilon\alpha_k$ при каждом стандартном $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает (1). Кроме того, если $t := \sum_{k=1}^N |\alpha_k| \in {}^{\approx}\mathbb{R}$, то

$$\left|\sum_{k=1}^N (\alpha_k - \beta_k)\right| \leq \sum_{k=1}^N |\alpha_k - \beta_k| \leq \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k=1}^N |\alpha_k| \leq \varepsilon,$$

как только стандартное $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ таково, что $|t| \leq n$. $\rhd$

2.2.14. *Существует такое натуральное число N, что для каждого стандартного числа t из $\mathbb{R}$ произведение Nt бесконечно близко к какому-то натуральному числу.*

$\lhd$ Возьмем конечное подмножество $\{x_1, \dots, x_n\}$ в $\mathbb{R}$, содержащее все стандартные вещественные числа, и какое-нибудь бесконечно малое положительное число $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \approx 0$. В теории чисел устанавливается следующая теорема — «принцип Дирихле для наборов»: при любом $\varepsilon > 0$ и произвольных $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ имеется такое целое число $N \in \mathbb{N}$, что числа $Nx_1, \dots, Nx_n$ отличаются от целых не более чем на ε. Остается применить эту теорему к указанным параметрам. $\triangleright$

2.2.15. Полезно специально подчеркнуть, что бесконечную близость (как и эквивалентность) чисел нельзя назвать подмножеством произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. В самом деле, в противном случае множеством оказался бы образ элемента нуль при этом отношении, т. е. монада $\mu(\mathbb{R})$. Однако, как мы установили, монада $\mu(\mathbb{R})$ множеством не является. Здесь же стоит подчеркнуть, что монада $\mu(\mathbb{R})$ *неделима* в следующем точном смысле: для каждого стандартного n верно: $n^{-1}\mu(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R})$.

При продумывании роли монады $\mu(\mathbb{R})$ в построении системы целых чисел поучительно обратиться к определению 2 цитированной книги седьмой «Начал» Евклида: «Число же — множество, составленное из монад» [178, с. 9]. Аналогично, вся «нестандартная» расширенная числовая прямая $\overline{\mathbb{R}}$ и, что наиболее нетривиально, ее доступная часть ${}^{\approx}\mathbb{R}$ представляют собой наборы монад, размещенных в стандартных точках. Более строгая формулировка этого утверждения основывается на следующем фундаментальном факте, доказательство которого существенно опирается на принцип стандартизации.

2.2.16. *Для произвольного доступного числа существует и притом единственное бесконечно близкое к нему стандартное число.*

$\triangleleft$ По принципу стандартизации при данном $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ можно организовать стандартное множество $A := {}^*\{a \in \mathbb{R} : a \leq t\}$. Ясно, что $A \neq \varnothing$ и $A \leq n$, где стандартное число $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ таково, что $-n \leq t \leq n$. В самом деле, для каждого стандартного $a \in A$ будет $a \leq t \leq n$. По принципу переноса заключаем: $A \leq n$. В силу полноты $\mathbb{R}$ имеется $s := \sup A \in \mathbb{R}$. Очевидно, s — стандартное число. Покажем, что $s \approx t$. В противном случае при некотором стандартном $\varepsilon > 0$ будет $|s - t| > \varepsilon$. Если $s \geq t$, то получится $s \geq t + \varepsilon$, т. е. $s \geq a + \varepsilon$ для каждого стандартного $a \in A$. Но тогда было бы $s \geq s + \varepsilon$, что неверно. Оставшаяся возможность $s < t$ приводит к противоречию столь же скоро. В самом деле, было бы $t > s + \varepsilon$ и вновь $s \geq s + \varepsilon$. $\triangleright$

2.2.17. Стандартное число, являющееся бесконечно близким к доступному числу $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$, называют *стандартной частью* или *тенью* числа t и обозначают $\operatorname{st}(t)$ или ${}^{\circ}t$. Для удобства полагают также

$^\circ t = \mathrm{st}(t) = +\infty$, если $t \approx +\infty$, и соответственно $^\circ t = \mathrm{st}(t) = -\infty$ при $t \approx -\infty$ (при этом, конечно же, считают, что $+\infty \approx +\infty$ и $-\infty \approx -\infty$). Таким образом, каждому (стандартному) $t \in \overline{\mathbb{R}}$ отнесена его монада $\mu(t)$, т. е. элементы s из $\mathbb{R}$, для которых $s \approx t$.

Значит, расширенную прямую в нестандартном анализе нужно представлять себе в связи со схемой, указанной на рис. 2. Выделяя стандартное число $^\circ t$ на оси $\mathbb{R}$, мы рисуем жирную точку — монаду $\mu(^\circ t)$ — «неделимое, точное изображение $^\circ t$». Если направить сильный микроскоп в район точки t, то в окуляре мы усидим расплывшееся облачко с неясными краями, представляющее образ $\mu(t)$. При выборе объектива с еще большей степенью увеличения наблюдаемый нами кусочек «точки-монады» детализируется, станет крупнее и частично выйдет из поля зрения. При этом всякий раз мы имеем дело с одним и тем же стандартным вещественным числом, которое, если угодно, описано приведенным процессом «изучения микроструктуры физической прямой».

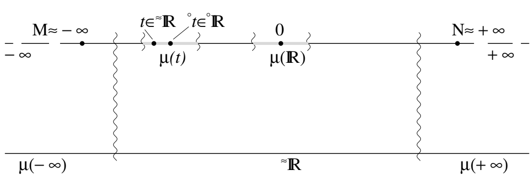


Рис. 2

2.2.18. *Справедливы утверждения:*

(1) *для $s \in \mathbb{R}$, $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ выполняется*

$$\mathrm{st}(s+t) = \mathrm{st}(s) + \mathrm{st}(t); \quad \mathrm{st}(st) = \mathrm{st}(s)\,\mathrm{st}(t);$$

(2) *если $s, t \in \mathbb{R}$ и $s \le t$, то $^\circ s \le {}^\circ t$;*

(3) *для произвольных элементов $s, t \in \overline{\mathbb{R}}$ выполнены соотношения:*

$$(\exists\, t' \approx t)(t' \ge s) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow {}^\circ s \le {}^\circ t \leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0, \varepsilon \in {}^\circ\mathbb{R})(s \le {}^\circ t + \varepsilon);$$

$$(\forall\, t' \approx t)(t' \ge s) \leftrightarrow {}^\circ s < t \quad ({}^\circ t \in {}^\circ\mathbb{R});$$

(4) *переход от вещественного числа к его стандартной части не является множеством (и, в частности, функцией).*

$\triangleleft$ (1): Установим, например, мультипликативность перехода к стандартной части. Имеем: $s \approx \mathrm{st}(s) \to ts \approx t\,\mathrm{st}(s)$. Помимо того, $t \approx \mathrm{st}(t) \to \mathrm{st}(s)t \approx \mathrm{st}(t)\,\mathrm{st}(s)$. Окончательно $st \approx \mathrm{st}(s)\,\mathrm{st}(t)$. Осталось понять, что произведение стандартных чисел стандартно.

(2): Пусть $s < t$ (иначе все и так ясно). Если $s \approx t$, то $\mathrm{st}(s) = \mathrm{st}(t)$. В противном случае монады $\mu(s)$ и $\mu(t)$ не пересекаются. Отсюда следует: ${}^\circ s < {}^\circ t$.

(3): В начальной эквивалентности правая импликация очевидна, а противоположная обеспечена тем, что при $s \leq {}^\circ t$ будет $s \leq {}^\circ t + s - {}^\circ s$. Кроме того, $s < t + \varepsilon \to \mathrm{st}(s) \leq \mathrm{st}(t) + \mathrm{st}(\varepsilon) = {}^\circ t + \varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in {}^\circ\mathbb{R}$. По принципу переноса это означает, что и при произвольном положительном ε будет ${}^\circ s \leq {}^\circ t + \varepsilon$ и, стало быть, ${}^\circ s \leq {}^\circ t$. В свою очередь, если ${}^\circ s < {}^\circ t$, то, учитывая, что монады $\mu^\circ(s)$ и $\mu({}^\circ t)$ не пересекаются, выводим: $s < {}^\circ t + \varepsilon$ для всякого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in {}^\circ\mathbb{R}$.

Для проверки стрелки вправо в нижней эквивалентности заметим, что s не лежит в монаде $\mu(t)$ числа t. Значит, вся монада s лежит левее монады t, т. е. $\mu(s) < \mu(t)$. Следовательно, ${}^\circ s < {}^\circ t$. Наконец, для установления оставшейся импликации заметим, что при ${}^\circ s = -\infty$ будет $\mu(t) > {}^\circ s$, ибо $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$. Если же ${}^\circ s \in {}^\circ\mathbb{R}$, то $\mu({}^\circ s) < {}^\circ t$. Поэтому для $t' \approx t$ выполнено: $t' \geq s$.

(4): Если бы закон $t \mapsto \mathrm{st}(t)$ был множеством, то множеством была бы монада $\mu(\mathbb{R})$ (ибо $t \in \mu(\mathbb{R}) \leftrightarrow {}^\circ t = 0$). Осталось учесть 2.2.9. $\triangleright$

2.3. Начальные понятия математического анализа на прямой

Обсудим теперь фундаментальные понятия, связанные с дифференциальным и интегральным исчислением функций одной вещественной переменной.

2.3.1. *Нестандартные критерии пределов.* *Для произвольной стандартной последовательности (a_n) и любого стандартного числа $a \in \mathbb{R}$ имеют место утверждения:*

(1) *число a — частичный предел (a_n) в том и только в том случае, если для некоторого бесконечно большого N выполнено $a = {}^\circ a_N$;*

(2) *число a — предел (a_n) в том и только в том случае, если для всех бесконечно больших номеров N член*

a_N бесконечно близок к a, т. е.

$$a = \lim a_n \leftrightarrow (\forall N \approx +\infty)(a_N \approx a).$$

$\lhd$ Приведенные утверждения проверяются вполне аналогично. Поэтому установим лишь одно из них, например (2). Итак, пусть $a_n \to a$ и для определенности будем считать, что $a \in \mathbb{R}$ (случаи $a = +\infty$ или $a = -\infty$ разбираются по той же схеме). По условию для произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ и некоторого $n \in \mathbb{N}$ будет $|a_N - a| \leq \varepsilon$, как только $N \in \mathbb{N}$ и $n \leq N$. Значит, для стандартного $\varepsilon > 0$ найдется стандартное n с тем же свойством в силу принципа переноса. Каждое бесконечно большое N мажорирует найденное n, т. е. $|a_N - a| \leq \varepsilon$. В силу произвольности ε это означает, что $a_N \approx a$.

Пусть, в свою очередь, известно, что для всех $N \approx +\infty$ верно ${}^\circ a_N = a$. Будем для определенности и разнообразия считать, что $a := -\infty$. Возьмем произвольное стандартное число $n \in {}^\circ\mathbb{N}$. Ясно, что для всех $N \geq M$, где M — какое-либо бесконечно большое число, будет $a_N \leq -n$. Итак, для каждого стандартного n мы доказали «нечто» (именно, «нечто»: $= (\exists\, M)(\forall\, N \geq M)(a_N \leq -n)$). По принципу переноса это «нечто» верно для всякого $n \in \mathbb{N}$. Последнее, как всем известно, и означает, что $a_n \to -\infty$. $\rhd$

2.3.2. Подчеркнем достоинства найденных критериев. Мы увидели, что частичные пределы стандартной последовательности — это в точности те доступные числа, которые отвечают бесконечно большим номерам. Иначе говоря, частичный предел представляет собой «наблюдаемое» значение некоторого бесконечно далекого члена последовательности. Приведенные утверждения имеют ясное интуитивное обоснование и чрезвычайно резко отличаются от обычных определений частичного предела как числа, к которому стремится некоторая подпоследовательность исходной последовательности, или как такого элемента прямой, что всякий интервал, его содержащий, пересекается с любым остатком — «хвостом» — рассматриваемой последовательности.

Поучительно ознакомиться с разъяснением понятия частичного предела [обобщенной] последовательности, которым Н. Н. Лузин сопроводил формулировку общепринятого определения (см. [150, с. 98–99]): «Читателю эта формулировка, без сомнения, в начале покажется громоздкой и отвлеченной. Но чувство неясности исчезнет, если читатель призовет на память привычное ему понятие „переменного“ и „времени“. В самом деле, чего хочет добиться данная формулировка, если ее перевести на язык „переменного“ и „времени“? Для того, чтобы понять это, рассмотрим переменное x, которое „пробегает“ данную числовую последовательность M, переходя от предшествующих чисел к последующим ... данная формулировка на языке переменного и времени означает, что ([частичным]) *пределом* числовой последовательности M называется такое число a, от которого переменное x окончательно отделиться не может, так как „по временам“ величина переменного x делается сколь угодно „близкой“ к a».

В нестандартном анализе, прибегая к тем же образам, мы можем сказать еще нагляднее и яснее: «если переменная x в какой-нибудь бесконечно далекий момент времени бесконечно мало отличается от a, то a есть [частичный] предел M».

Переходя к обсуждению нестандартного критерия предела последовательности, обратимся к следующим указаниям Р. Куранта:

«**Мотивировка точного определения предела.** Не следует удивляться, что тот, кто в первый раз слышит отвлеченное определение предела последовательности, не сразу его вполне поймет. Определение предела как бы заводит игру между двумя лицами A и B: A требует, чтобы постоянная величина a могла быть приближенно представлена величиной a_n таким образом, чтобы отклонение было меньше заданной им, A, произвольной грани $\varepsilon = \varepsilon_1$. B выполняет это требование тем, что доказывает существование такого целого числа $N = N_1$, что все a_n, начиная с элемента a_N, удовлетворяют требованию ε_1. Тогда A хочет задать новую, меньшую грань $\varepsilon = \varepsilon_2$, B со своей стороны выполняет это требование тем, что находит новое целое число $N = N_2$ (быть может, много большее), и т. д. Если B в состоянии всегда удовлетворить требования A, какую бы малую грань A ни задавал, тогда мы имеем ту ситуацию, которая выражается символом $a_n \to a$.

Существует, без сомнения, психологическая трудность в овладении этим точным определением предельного перехода. Наше наглядное представление внушает „динамическую“ идею предельного перехода как результата движения: мы „пробегаем“ последовательность чисел $1, 2, 3, \dots, n \dots$ и наблюдаем при этом поведение последовательности a_n. У нас такое ощущение, что при этом „пробегании“ приближение должно быть доступно наблюдению. Но эта „естественная" установка не допускает точной математической формулировки. Для того чтобы прийти к точному определению, необходимо обратить порядок рассмотрения: вместо того, чтобы сперва следить за аргументом n и затем рассматривать связанную с ним зависимую переменную a_n, мы основываем наше определение на шагах, которые допускают последующую *проверку* утверждения $a_n \to a$. При таком исследовании приходится сначала выбирать сколь угодно малый интервал, окружающий a, а затем проверять, возможно ли выполнить это условие, выбирая независимую переменную n достаточно большой. Так-то мы приходим к точному определению предела, присваивая выражениям „сколь угодно малая грань" и „достаточно большое n" символические имена ε и N» [103, с. 66–67].

Разумеется, что признак, сформулированный в 2.3.1 (2): «если для всех бесконечно больших N общий член a_N невозможно отличить от стандартного числа a, то a объявляется (и является на самом деле) пределом (a_n)» — удачно схватывает динамическую идею предельного перехода.

Следует всегда помнить при этом, что нестандартный критерий предела применим только к стандартным последовательностям и не верен, вообще говоря, для нестандартных — плохо описанных — последовательностей. Так, если $a_n := N/n$, где $N \approx +\infty$, то $a_n \to 0$ и в то же время $a_N = 1$. Другими словами, критерий 2.3.1 дополняет современные представления о пределе, а не отвергает или отменяет их. Более точно, определяя предел только для стандартных последовательностей, мы тем самым автоматически формируем стандартное множество всех сходящихся последовательностей с помощью принципа стандартизации. Иначе говоря, привычное ε-N-определение и непривычное определение с актуальными бесконечно большими и бесконечно малыми теснейшим образом взаимосвязаны, находятся в неразрывном единстве.

Полезно особо подчеркнуть, что в приложениях (в физике, в частности) приходится сталкиваться с реальными, явно описанными, т. е. стандартными последовательностями. Кроме того, в подобных ситуациях «бесконечно большое» имеет точный (физический) смысл — прямо указывается горизонт — граница, за которой числа объявлены неразличимыми. Учитывая также, что проблемы существования равным образом решаются на практике из содержательных соображений (если нет физической скорости, ее не стоит и искать), возникает задача опознания заведомо имеющегося предела стандартной последовательности. Нестандартный анализ дает простой рецепт: «Возьмите общий член вашей последовательности с каким-нибудь (все равно каким) бесконечно большим номером; определяемое (с точностью до малых) этим членом число и есть искомый предел». В этой связи становится более понятной обоснованность методов родоначальников дифференциального и интегрального исчисления, которые искали ответы на вопросы о точных значениях конкретных «стандартных» объектов: площадей фигур, уравнений касательных к «именным» кривым, интегралов явно выписанных аналитических выражений и т. п.

2.3.3. Важным новым вкладом нестандартного анализа является формирование понятия предела *конечной последовательности* $a[N] := (a_1, \dots, a_N)$, где N — бесконечно большое натуральное число. Интуитивная идея, положенная в основу следующего определения, хорошо отражает практические приемы нахождения числовых характеристик необозримых дискретных совокупностей — термодинамических параметров объемов жидкости или газа, оценок спроса населения и т. п.

2.3.4. Число a называют *микропределом* или *околопредельным значением* последовательности $a[N]$, если для всех бесконечно больших M, меньших N, будет $a_M \approx a$. При этом говорят также, что $a[N]$ *почти сходится* к a. В случае, когда a — доступное число, стандартную часть ${}^\circ a$ называют пределом (или S-*пределом*) последовательности $a[N]$ и пишут ${}^\circ a = {}^{\approx}\lim a[N]$ или ${}^\circ a = S\text{-}\lim_{n \le N} a_n$. Итак,

$$
{}^\circ a = {}^{\approx}\lim a[N] \leftrightarrow a \in {}^{\approx}\mathbb{R} \wedge (\forall\, M \approx +\infty, M \le N)(a_M \approx a).
$$

2.3.5. *Пусть* (a_n) — *стандартная последовательность,* $N \approx +\infty$ *и* $a \in {}^{\approx}\mathbb{R}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) a — *микропредел* $a[N]$*;*

(2) *последовательность* (a_n) *сходится к* ${}^\circ a$.

$\triangleleft$ Импликация (2) $\to$ (1) содержится в 2.3.1(2). Для доказательства (1) $\to$ (2) возьмем произвольное стандартное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество

$$
A := \{m \in \mathbb{N} : (\forall\, n)(m \le n \le N) \to |a_n - {}^\circ a| \le \varepsilon\}.
$$

Множество A непусто, ибо $N \in A$. Значит, A содержит наименьший элемент m. Если $m \approx +\infty$, то $m-1 \approx +\infty$ и по условию $m-1 \in A$. Таким образом, m стандартно. Кроме того, если $n \geq m$ и n стандартно, то $n \leq N$ и $|a_n - {}^\circ a| \leq \varepsilon$. Итак, $(\forall\, \varepsilon \in {}^\circ\mathbb{R}, \varepsilon > 0)$ $(\exists\, m \in {}^\circ\mathbb{N})$ $(\forall\, n \in {}^\circ\mathbb{N})$ $n \geq m \to |a_n - {}^\circ a| \leq \varepsilon$. По принципу переноса заключаем: (a_n) сходится к ${}^\circ a$. $\rhd$

2.3.6. Установленный признак дает точное обоснование *принципа заданного горизонта*, состоящего в том, что в конкретных исследованиях указывают «физическое» или «экономическое» актуальное бесконечно большое число, служащее как мерилом представительности исследуемой совокупности, так и естественной границей сверху.

2.3.7. Примеры.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

$\lhd$ Возьмем бесконечно большое i. Имеем ${}^\circ\left(\frac{i-1}{i}\right) = {}^\circ\left(1 - \frac{1}{i}\right) = 1$. Подробнее говоря (Л. Эйлер): «Так как i есть число бесконечно большое, то $\frac{i-1}{i} = 1$; действительно, ясно, что чем большее число подставим вместо i, тем ближе значение $\frac{i-1}{i}$ будет подходить к единице; если i станет больше всякого заданного числа, то дробь $\frac{i-1}{i}$ станет равна единице» [230, с. 116]. $\rhd$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

$\lhd$ Для каждого бесконечно большого N имеем $2^N = (1+1)^N \geq N(N-1)/2$, т. е. $0 \leq N/2^N \leq 2/(N-1) \approx 0$. Итак, $N/2^N \approx 0$. $\rhd$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2\pi n!e) = 0$.

$\lhd$ Для каждого натурального n выполнено

$$0 < e - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(k+1)!}.$$

Отсюда для бесконечно большого N выводим

$$0 \leq N!\left(e - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}\right) \leq \frac{3N!}{(N+1)!} = \frac{3}{N+1} \approx 0.$$

Пусть $x := 2\pi N!e$ и $y := 2\pi N!\sum_{k=1}^N 1/k!$. Тогда $x \approx y$. При этом $\sin y = 0$. Ясно, что

$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right| \le |x-y|,$$

т. е. $\sin x \approx \sin y = 0$. $\triangleright$

(4) *Пусть (a_n) такова, что последовательности (a_{2n}), (a_{2n+1}) и (a_{3n}) сходятся. Тогда (a_n) сходится.*

$\triangleleft$ Можно считать, что (a_n) — стандартная последовательность. Для бесконечно большого N будет $2N \approx +\infty$, $2N+1 \approx +\infty$ и $3N \approx +\infty$, т. е. $a_{2N} \approx a$, $a_{2N+1} \approx b$, $a_{3N} \approx c$ для некоторых стандартных чисел a, b, c. В частности, $a_{6N} \approx a \approx c$ и $a_{6N+1} \approx b \approx c$. Значит, $a = b = c$, что и нужно. $\triangleright$

(5) *Пусть (a_n) сходится к нулю, тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = 0.$$

$\triangleleft$ В силу принципа переноса можно считать, что последовательность (a_n) стандартна. Возьмем $N \approx +\infty$. Пусть M есть целая часть $\sqrt{N}$. Ясно, что M — бесконечно большое число. При этом для каждого стандартного $n \in {}^\circ\mathbb{N}$ будет $|a_N| \le n^{-1}$, стало быть,

$$s_N := \left|\frac{a_1 + \ldots + a_N}{N}\right| \le \left|\frac{a_1 + \ldots + a_M}{N}\right| + \left|\frac{a_{M+1} + \ldots + a_N}{N}\right| \le$$
$$\le \frac{M}{N}\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n| + \frac{1}{n}\frac{N-M-1}{N}.$$

Поскольку $1/N \approx 0$ и $\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n| \in {}^\circ\mathbb{R}$, выводим, что число s_N бесконечно мало. $\triangleright$

(6) *Существует банахов предел, т. е. такой непрерывный линейный функционал l на пространстве $l_\infty := l_\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$, что для каждой последовательности $a := (a_n)$ из l_∞ верно*:

$$(\exists \lim a_n) \to l(a) = \lim a_n;$$
$$\liminf a_n \le l(a) \le \limsup a_n;$$
$$('a)(n) := a_{n+1} \to l(a) = l('a).$$

$\triangleleft$ Для доказательства этого утверждения возьмем какое-нибудь бесконечно большое натуральное число N. Для каждой стандартной последовательности $a = (a_k)$ из l_∞ величина

$$f(a) := \frac{1}{N} \sum_{k=N}^{2N-1} a_k$$

доступна. В самом деле, в силу стандартности a величина $\|a\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ стандартна. Кроме того,

$$|f(a)| \leq \frac{1}{N} \sum_{k=N}^{2N-1} |a_k| \leq \frac{1}{N} \sum_{k=N}^{2N-1} \|a\|_\infty \leq \|a\|_\infty.$$

Учитывая стандартность множества $l_\infty \times \mathbb{R}$, рассмотрим теперь стандартизацию

$$l := {}^*\{(a,t) \in l_\infty \times \mathbb{R} : t = {}^\circ f(a)\}.$$

Докажем, что l — искомый объект. Прежде всего, установим, что l — функция. Надо показать, что

$$(\forall\, a \in l_\infty)(\forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R})((a,t_1) \in l \wedge (a,t_2) \in l \to t_1 = t_2).$$

Достаточно проверить это свойство для стандартных a, t_1, t_2 в силу принципа переноса. Но в таком случае по определению стандартизации $t_1 = {}^\circ f(a)$ и $t_2 = {}^\circ f(a)$. Осталось вспомнить (см. 2.2.16), что стандартная часть единственна. Линейность l проверяется таким же рассуждением. Столь же ясно, что $a \geq 0 \to l(a) \geq 0$, т. е. l положителен.

Пусть a — сходящаяся к $\bar{a}$ стандартная последовательность. Тогда для каждого стандартного $\varepsilon > 0$ в силу 2.3.1(2) выполнено $|a_N - \bar{a}| \leq \varepsilon, \dots, |a_{2N-1} - \bar{a}| \leq \varepsilon$, ибо все a_M при $M \geq N$ бесконечно близки к $\bar{a}$. Отсюда

$$|f(a) - \bar{a}| = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=N}^{2N-1} (a_k - \bar{a}) \right| \leq \varepsilon,$$

т. е. $\bar{a} = {}^\circ f(a)$. Найденное свойство вместе с положительностью l обеспечивают искомые оценки.

Осталось установить инвариантность построенного функционала относительно сдвигов: $l('a) = l(a)$ для всех $a \in l_\infty$. Вновь можно считать, что последовательность a стандартна. В этом случае элемент $'a$ также стандартен и, следовательно,

$$l('a) = {}^\circ\left(\frac{1}{N}\sum_{k=N}^{2N-1} a_{k+1}\right) = \operatorname{st}\left(N^{-1}(a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{2N})\right) =$$

$$= \operatorname{st}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=N}^{2N-1} a_k + \frac{1}{N}a_{2N} - \frac{1}{N}a_N\right) = {}^\circ\big(f(a) + N^{-1}a_{2N} - N^{-1}a_N\big) =$$

$$= {}^\circ f(a) + (N^{-1}a_{2N}) - {}^\circ(N^{-1}a_N) = {}^\circ f(a) = l(a).$$

Здесь мы учли доступность чисел a_{2N}/N и a_N/N и 2.2.18. $\rhd$

2.3.8. *Нестандартный критерий непрерывности.* *Пусть f — стандартная числовая функция и x — стандартная точка ее области определения* $\operatorname{dom}(f)$. *Эквивалентны утверждения:*

(1) *f непрерывна в точке x;*

(2) *f переводит точки, бесконечно близкие к x, в точки, бесконечно близкие к $f(x)$, т. е.*

$$x' \approx x,\ x' \in \operatorname{dom}(f) \to f(x') \approx f(x).$$

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Заметим прежде всего, что $\operatorname{dom}(f)$ — стандартное множество, и возьмем стандартное число $\varepsilon > 0$. Найдется $\delta > 0$ такое, что при $|x' - x| \le \delta$ и $x' \in \operatorname{dom}(f)$ будет $|f(x') - f(x)| \le \varepsilon$. В силу принципа переноса имеется и стандартное δ с тем же свойством. Если $x' \approx x$ и $x' \in \operatorname{dom}(f)$, то, конечно, $|x' - x| \le \delta$ (ибо $\delta \in {}^\circ\mathbb{R}$) и, стало быть, $|f(x) - f(x')| \le \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon \in {}^\circ\mathbb{R}$ это означает, что $f(x') \approx f(x)$.

(2) $\to$ (1): Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Нам нужно подыскать δ, фигурирующее в «ε-δ-определении». По принципу переноса достаточно найти такое δ лишь для стандартного ε. В последнем же случае в качестве δ можно взять любое актуальное бесконечно малое положительное число. $\rhd$

2.3.9. В связи с 2.3.8 (2) функцию $f : \operatorname{dom}(f) \to \mathbb{R}$ называют *микронепрерывной в точке* x из $\operatorname{dom}(f)$, если при $x' \in \operatorname{dom}(f)$ и $x' \approx x$ будет $f(x') \approx f(x)$.

2.3.10. При обсуждении найденного нестандартного критерия, состоящего в том, что «непрерывность и микронепрерывность для стандартных функций в стандартной точке совпадают», можно повторить аргументацию, приведенную в 2.3.2. Стоит подчеркнуть, следуя Р. Куранту, что «как и в случае предела последовательности, определение Коши покоится, так сказать, на обращении интуитивно приемлемого порядка, в каком хотелось бы рассматривать переменные. Вместо того, чтобы рассматривать сперва независимую, а затем зависимую переменную, мы сначала направляем свое внимание „на границу точности“ ε для зависимой переменной, а потом пытаемся ограничить соответствующую „арену“ δ для независимой переменной» [103, с. 73]. Нестандартный критерий освобождает нас от неприятного обращения кванторов для всех доступных нам — стандартных — функций и точек. В то же время ε-δ-определение в полном объеме лишь косвенно восстанавливается через микронепрерывность в точке с помощью процедуры стандартизации. Так что вновь, как и следовало ожидать, стандартный и нестандартный подходы демонстрируют свое непростое — подлинное — единство. Интересным приобретением является новое математическое свойство — микронепрерывность функции в точке. Понять микронепрерывность в большем объеме помогают следующие утверждения.

2.3.11. Примеры.

(1) *Функция $x \mapsto x^2$ не является микронепрерывной в каждой бесконечно большой точке $t \in \mathbb{R}$.*

$\lhd$ В самом деле, $t+t^{-1} \approx t$ и в то же время $(t+t^{-1})^2 - t^2 \approx 2$. $\rhd$

(2) *Пусть δ — строго положительное бесконечно малое число. Рассмотрим функцию $x \mapsto \delta \sin(x^{-1})$, доопределяемую в нуле нулем. Эта функция разрывна в нуле и микронепрерывна в нуле.*

$\lhd$ Достаточно заметить, что $\sin x \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ для $x \in \mathbb{R}$, и сослаться на свойства бесконечно малых чисел 2.2.8. $\rhd$

2.3.12. ***Нестандартный критерий равномерной непрерывности.*** *Для стандартной числовой функции f, определенной на стандартном множестве $\mathrm{dom}(f)$, справедливы утверждения:*

(1) *f микронепрерывна, т. е. f микронепрерывна в каждой точке из $\mathrm{dom}(f)$ — символически:*

$$(\forall\, x, x' \in \mathrm{dom}(f))(x' \approx x \to f(x') \approx f(x));$$

(2) *f равномерно непрерывна.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Пусть $\varepsilon > 0$ — стандартное число и $\delta > 0$ бесконечно мало. Ясно, что при $|x - x'| \le \delta$ будет $x \approx x'$. Значит,

$$(\forall\, \varepsilon \in {}^\circ\mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x, x' \in \mathrm{dom}(f))$$
$$(|x - x'| \le \delta \to |f(x) - f(x')| \le \varepsilon).$$

Привлекая принцип переноса, убеждаемся в равномерной непрерывности f.

(2) $\to$ (1): В силу принципа переноса для каждого стандартного $\varepsilon > 0$ и некоторого стандартного $\delta > 0$ будет $|x - x'| \le \delta \to |f(x) - f(x')| \le \varepsilon$ при любых $x, x' \in \mathrm{dom}(f)$. Замечая, что $x \approx x' \to |x-x'| \le \delta$, приходим к требуемому. $\rhd$

2.3.13. *Нестандартный критерий производной.* *Пусть f — стандартная функция, определенная в стандартной окрестности стандартной точки x из ${}^\circ\mathbb{R}$. Эквивалентны утверждения:*

(1) *f дифференцируема в точке x и $f'(x) = t$;*

(2) *для каждого ненулевого бесконечно малого числа h выполнено*

$$t = \mathrm{st}((f(x+h) - f(x))/h).$$

$\lhd$ Требуемое есть прямое следствие 2.3.8. $\rhd$

2.3.14. *Пусть y — стандартная функция, определенная в окрестности стандартной точки x и дифференцируемая в этой точке. Пусть, далее, dx — произвольное ненулевое бесконечно малое число. Обозначим (следуя Г. В. Лейбницу) символом dy дифференциал функции y в точке x, примененный к элементу dx. Тогда*

$$dy \approx y(x+dx) - y(x), \quad \frac{dy}{dx} = y'(x).$$

$\lhd$ По определению Г. В. Лейбница, с учетом 2.3.9, имеем

$$dy = y'(x)dx, \quad y'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{y(x+dx) - y(x)}{dx}\right).$$

Значит,

$$dy \approx \frac{y(x+dx) - y(x)}{dx} dx = y(x+dx) - y(x),$$

что доказывает первую часть утверждения. Вторая часть — следствие 2.3.10. $\rhd$

2.3.15. Приведенные в 2.3.13 и 2.3.14 нестандартные толкования роли бесконечно малых при определении производных, дифференциалов и приращений дополняют указания Л. Эйлера:

«В дифференциальном исчислении я уже отметил, что задачу разыскания дифференциалов нужно понимать не в абсолютном, а в относительном смысле; это значит, что если y есть некоторая функция от x, то нужно определить не столько сам ее дифференциал, сколько его отношение к дифференциалу dx. Действительно, так как все дифференциалы сами по себе равны нулю, то какова бы ни была функция y количества x, всегда $dy = 0$; таким образом, в абсолютном смысле здесь чего-нибудь большего нельзя и искать. Правильная же постановка вопроса такова: x получает бесконечно малое, т. е. исчезающее [= evanescens — актуальное число, которое „есть точно нуль“] приращение dx; требуется определить, как относится к dx приращение, которое вследствие этого получает функция y. Правда, оба приращения $= 0$, однако между ними существует определенное отношение, которое и находится должным образом в дифференциальном исчислении. Так, если $y = x^2$, то, как доказывается в дифференциальном исчислении, $\frac{dy}{dx} = 2x$, и это отношение приращений верно лишь в том случае, если приращение dx, которым порождается dy, считать равным нулю. Тем не менее после того, как сделано это предостережение об истинном понятии дифференциала, допустимо пользоваться и общепринятыми выражениями, в которых о дифференциалах говорится как бы в абсолютном смысле, лишь бы мысленно всегда иметь в виду истину. Так мы вправе сказать: если $y = x^2$, то $dy = 2xdx$. Правда, если бы кто-либо сказал, что $dy = 3xdx$ или что $dy = 4xdx$, то и это не будет ложным, ибо также и эти равенства имеют место вследствие того, что $dx = 0$ и $dy = 0$. Но лишь первое равенство согласуется с истинным соотношением $\frac{dy}{dx} = 2x$» [232, с. 9].

Полезно отметить, что Л. Эйлер употребляет знак $=$ там, где мы пишем $\approx$ (см. 2.2.10). Кроме того, следует подчеркнуть, что он ищет дифференциал, который считает имеющимся, работая с конкретными (дифференцируемыми) функциями. В этой связи вполне правомочно использовать для нахождения дифференциала любое — как угодно подобранное — бесконечно малое dx.

Итак, для Л. Эйлера с полным основанием дифференциал dy (вычисляемый при бесконечно малом dx) «есть точно нуль», дифференциал dy есть точно приращение — «абсолютный дифференциал» и в то же время дифференциал dy — «четвертый пропорциональный» при бесконечно малых приращениях, т. е. в наших обозначениях:

$$^\circ dy = 0, \quad ^\circ(dy - (y(x + dx) - y(x))) = 0;$$
$$^\circ\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y(x + dx) - y(x)}{dx}\right) = 0.$$

Проведенный анализ показывает корректность представлений и методов Л. Эйлера при работе с явно заданными — стандартными — объектами (функцией y и точкой x) в существеннейшем предположении бесконечной малости dx.

В свете изложенного необходимо с должной критичностью подойти к оценке следующих указаний Р. Куранта: «...если мы хотим постигнуть сущность дифференциального исчисления, то должны остерегаться того, чтобы смотреть на производную как на частное двух действительно существующих (актуальных) „бесконечно малых величин“. Дело обстоит так, что мы всегда должны сперва образовать отношение приращений $\Delta y/\Delta x$, где разность Δx не равна нулю. Затем следует представить себе, что путем преобразования этого отношения или каким-либо другим путем совершен переход к пределу. Но ни в коем случае нельзя представлять себе, что *сперва* совершает какой-то переход от Δx к бесконечно малой величине dx, которая все же отлична от нуля, и от Δy к dy и затем делим эти „бесконечно малые“ друг на друга. Такой взгляд на производную совершенно несовместим с требованием математической ясности понятий, да и вообще не имеет смысла» [103, с. 126–128]. Чрезмерная жесткость последней фразы лишь отчасти смягчается дальнейшим разъяснением: «Физик, биолог, техник или всякий другой, кому приходится практически иметь дело с этими понятиями, имеет поэтому право, в пределах требуемой точности, отождествить производную с отношением приращений...

...„физически бесконечно малые“ величины имеют точный смысл. Это, безусловно, конечные, отличные от нуля величины, только выбранные в рассматриваемом вопросе достаточно малыми, например меньше какой-то доли длины волны или меньше расстояния двух электронов в атоме и т. п., вообще меньше некоторой желательной степени точности» [103, с. 135].

2.3.16. *Нестандартное представление интеграла Римана.* *Пусть* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — *стандартная непрерывная функция и* $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_N < x_{N+1} = b$ — *разбиение* $[a,b]$, *причем* $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ *и* $x_k \approx x_{k+1}$ *для* $k := 1, \ldots, N$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = {}^{\circ}\Bigl(\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)\Bigr).$$

$\lhd$ Следует заметить, прежде всего, что N бесконечно велико, и воспользоваться как определением интеграла, так и нестандартными критериями предела 2.3.1 и равномерной непрерывности f 2.3.12. $\rhd$

2.3.17. *Основной принцип интегрального исчисления.* *«...Возможно при вычислении суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых [одного знака] откидывать от каждого слагаемого бесконечно малую высшего порядка».*

$\lhd$ Пусть имеется сумма ${}^{\circ}\sum_{k=1}^{N} \alpha_k = t$, где $\alpha_k \approx 0$. По условию заданы $\beta_k := \alpha_k - o(\alpha_k)$. В силу 2.2.13 (2) выводим $\beta_k \cong \alpha_k$ и, стало быть,

$$t = {}^{\circ}\Bigl(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k\Bigr) = {}^{\circ}\Bigl(\sum_{k=1}^{N} \beta_k\Bigr).$$

Это и требовалось. $\rhd$

2.3.18. Приведенные утверждения дают формальное обоснование представления интеграла в виде конечной суммы бесконечно малых элементов, т. е. оправдывают идущее из глубокой древности понимание интегрирования как своеобразного процесса суммирования. Полезно в этой связи привести здесь определение интеграла («с переменным верхним пределом»), данное Л. Эйлером:

«Интегрирование обычно определяется так. Говорят, что это есть суммирование всех значений дифференциального выражения $X dx$, если переменному x придавать последовательно все отличающиеся друг от друга на разность dx значения, начиная с некоторого данного значения вплоть до x, разность же эту считать бесконечно малой... Из изложенного же метода, во всяком случае, ясно, что интегрирование можно получить из суммирования с любой точностью; точно же его нельзя совершить иначе, как положив, что разности являются бесконечно малыми, т. е. нулями» [232, с. 163].

Стоит вновь подчеркнуть, что для поиска интеграла стандартной непрерывной функции в силу приведенных выше фактов следует найти точное значение (= стандартную часть) всего одной конечной суммы бесконечно большого числа малых слагаемых, в которой можно отбрасывать малые высших порядков. Для нестандартных функций этот прием, вообще говоря, не действует. Иначе говоря, как и в предыдущих случаях, мы обнаруживаем, что нестандартные представления об объектах математического анализа дополняют, уточняют и развивают (но ни в коей мере не отменяют) свои классические аналоги.

2.3.19. Отмеченные обстоятельства свидетельствуют, что нестандартный анализ в его теперешних формах — прямой наследник исчисления бесконечно малых. Именно поэтому сейчас все большее распространение получает термин «*инфинитезимальный анализ*».

Последний значительно точнее отражает суть дела, чем несколько экстравагантное название «нестандартный анализ», довольно часто вызывающее в конечном счете оправданное раздражение.

Стоит обратить особое внимание на то, что концепция актуальных бесконечно больших и бесконечно малых величин за последние триста лет никогда не исчезала из арсенала рабочих средств естествознания, а лишь отсутствовала в математике в течение примерно тридцати лет. Это позволяет нам не останавливаться подробнее на значении нестандартных методов.

Глава 3

Теоретико-множественные формализмы нестандартного анализа

Проведенное нами на содержательном «наивном» уровне обсуждение различий между стандартным — осуществимым и нестандартным — косвенным способами задания объектов позволило вложить согласующийся с интуицией смысл в понятия актуальных бесконечно большого и бесконечно малого чисел. В качестве замечательного приобретения удалось глубже освоить способы рассуждения, принятые при оформлении математического анализа.

В то же время уже в простейших примерах мы сталкиваемся с серьезными трудностями. Прежде всего, остается неясным способ различения стандартных объектов от нестандартных, что заставляет считаться с возможностью неправильного применения принципов нестандартного анализа. Растущую тревогу вызывает появление объектов, сформированных по виду вполне приемлемыми математическими конструкциями, за которыми без противоречий не удается признать статуса «наивных» множеств. Здесь стоит назвать всевозможные монады, совокупности стандартных элементов, объекты $\approx$, ${}^{\approx}\mathbb{R}$, O, o и т. д.

Еще более неприятно, что «математический закон» $x \mapsto {}^{\circ}x$, действующий из $\overline{\mathbb{R}}$ в $\overline{\mathbb{R}}$, не является функцией. Дело в том, что понятие функции сформировано в математике задолго до появления теоретико-множественной установки. Так, еще в 1755 г. Л. Эйлер писал: «Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменениям, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других. Итак, ... все количества, которые как-либо зависят от x, т. е. определяются им, называются его функциями» [231, с. 38].

Динамическая идея преобразования одних объектов в другие не охватывается полностью господствующим сейчас «стационарным» теоретико-множественным представлением о функции как о множестве. Последнее «является формальной теоретико-множественной моделью интуитивной идеи функции — *моделью*, которая охватывает лишь один аспект этой идеи, а не все ее значение в целом» [38, с. 32].

Напомним в этой связи, что при $s, t \in [0, 1]$ выполнено:

$$^\circ(s+t) = {}^\circ s + {}^\circ t, \quad {}^\circ 0 = 0, \quad {}^\circ 1 = 1$$

и, кроме того, $^\circ t = 0$ в некотором подынтервале $t \in [0, h]$, где h — строго положительное число (любое актуальное бесконечно малое).

Наличие такой «числовой функции» вопиёт о противоречии или, деликатно говоря, свидетельствует наличие антимоний.

Названные обстоятельства требуют немедленного и явного уточнения используемых нами концепций и средств, указания фундамента, на котором они строятся.

Нестандартный анализ, как мы уже отмечали, получает обоснование в рамках теоретико-множественной установки. Точнее говоря, оказывается, что развитые выше представления «наивной» нестандартной теории множеств могут быть поставлены на те же (и, значит, столь же прочные) основы, на которых покоится канторовская теория или, что более строго, «приближающие ее снизу» аксиоматические теории множеств.

Для того чтобы яснее осознать связи математического анализа и теории множеств, стоит сопоставить следующие высказывания:

> «...анализ... есть сама наука о бесконечном».
>
> Г. В. Лейбниц

> «...математический анализ является просто наукой о бесконечном. Это старое его определение идет через века...»
>
> Н. Н. Лузин

> «МНОЖЕСТВ ТЕОРИЯ, раздел математики, в котором изучаются общие свойства множеств, преимущественно бесконечных».
>
> Большой энциклопедический словарь

Следовательно, самим понятием «бесконечность» анализ накрепко связан с теорией множеств. В то же время никогда не нужно забывать, что классические работы Г. Кантора появились спустя двести лет после открытия математического анализа.

Подведение теоретико-множественного обоснования под математику можно сравнить с используемым в современном строительстве методом монтажа зданий, начиная с верхних этажей «от чердака к подвалу». Интересно при этом подметить, что фундамент здания закладывается заранее. Ровно так же исходный фундамент математического анализа заложен практической деятельностью людей.

Нынешняя математика в своей существеннейшей части опирается на теорию множеств. Более точно, под основные этажи современной математики подведена теоретико-множественная база. Что дальше — это покажет будущее. А сейчас мы можем только констатировать продолжение процесса построения математического здания — процесса, готовящего грядущие перемены.

Доказательными свидетельствами ускоренного развития являются обострение ситуации, столкновение мнений, ожесточение борьбы идей. Некоторой иллюстрацией происходящей на наших глазах поляризации установок служит следующая (весьма далекая от полноты) подборка.

Pro

«После начального периода недоверия началось триумфальное шествие созданной теории множеств во всех областях математики. Ее влияние на математику нашего века ясно видно в выборе современных проблем и в тех методах, которыми эти проблемы решаются. Применение теории множеств является повсеместным».

К. Куратовский,
А. Мостовский [105, с. 7]

Contra

«... утверждают, что теория множеств важна для научно-технического прогресса и является новейшим достижением математики. В действительности теория множеств не имеет ничего общего с научно-техническим прогрессом и не является новейшим достижением математики».

Л. С. Понтрягин [187, с. 6]

«Одним из творений Георга Кантора является теория множеств, элементы которой в наше время преподаются в старших классах средней школы и даже ранее. Это еще одна область математики, о которой думали, что она не будет иметь ни малейшего практического применения. Каким это было заблуждением. Элементы теории множеств сейчас в ходу даже у авторов детективных историй.

Хорошо известна связь теории множеств с составлением программ для вычислительных машин, а последние обслуживают несметное количество практических проектов».

Л. Янг [237, с. 154]

«Математика, основанная на канторовской теории множеств, превратилась в математику канторовской теории множеств... Современная математика изучает, таким образом, конструкцию, отношение которой к реальному миру по меньшей мере проблематично... Это ставит под сомнение роль математики как научного и полезного метода. Математика может быть сведена к простой игре, происходящей в некотором специфическом искусственном мире. Это не опасность для математики в будущем, а непосредственный кризис современной математики».

П. Вопенка [31, с. 14]

Заключая предварительное обсуждение, следует подчеркнуть, что только теперь, развеяв иллюзию возможности окончательного «абсолютного» обоснования нестандартного анализа (как и всей математики) на теоретико-множественной основе, мы можем приступить к реализации этого проекта.

3.1. Язык теории множеств

Аксиоматические теории множеств точно регламентируют корректные способы формирования множеств. Образно говоря, аксиоматики описывают миры — универсумы — множеств, которые призваны служить адекватными отображениями наших интуитивных представлений о «канторовом рае» — универсуме наивной теории множеств. Интересующие нас аксиоматики строятся и изучаются как формальные теории. Необходимо специально отметить, что, несмотря на свою очевидную ограниченность (математика не сводится к синтаксису своих текстов) и во многом благодаря ей (вычленение семиотических аспектов эксплицирует проблему смысла), формальный подход доказал свою исключительную плодотворность (теоремы Гёделя, независимость континуум-гипотезы и аксиомы выбора, булевозначный анализ и т. п.).

Стержнем формальной теории является ее язык. Точное описание и изучение последнего по необходимости производится средствами некоторого, вообще говоря, другого языка, который принято называть метаязыком. Обычно в качестве метаязыка употребляются определенным образом ограниченные и регламентированные фрагменты естественных языков, обогащенные разными техническими терминами. Средства, допускаемые в метаязык, важны с точки зрения метаматематики. Учитывая, что нас интересуют не метаматематические, а прикладные теоретико-модельные аспекты формальной теории множеств, мы не предъявляем к метаязыку чрезмерно жесткие требования. В частности, в дальнейшем широко используются общепринятые выразительные средства и уровень строгости обычной — содержательной — математики.

3.1.1. Аксиоматическая теория множеств — *формальная система.* Составляющими такой системы являются алфавит, формулы, аксиомы и правила вывода.

В качестве *алфавита* рассматривают фиксированный набор A символов произвольной природы — канторовское множество. Конечные строки элементов A называют выражениями, иногда — текстами.

Если каким-либо способом (предписаниями, алгоритмами и т. п.) выделено некоторое множество «правильно составленных» выражений $\Phi(A)$, то говорят, что задан *язык с алфавитом* A. При этом выделенные выражения называют формулами. После этого фиксируют некоторые конечные или бесконечные совокупности формул, именуемые *аксиомами*, а также явно описывают допускаемые *правила вывода* — отношения в $\Phi(A)$. Формулы, получаемые из аксиом за конечное число шагов с помощью указанных правил вывода, называют *теоремами.* Часто используют (и мы будем поступать также) более вольный и удобный способ выражения. Именно, говорят, что теоремы формальной системы составляют наименьшее множество формул, содержащее все аксиомы и замкнутое относительно правил вывода.

3.1.2. Нас будет интересовать специальный тип формального языка — *язык* первого порядка (с равенством) исчисления предикатов (с равенством). *Сигнатурой* σ называют тройку (F, P, a), где F и P — некоторые множества, называемые множеством символов операций и множеством символов предикатов соответственно, а a — отображение $F \cup P$ в множество натуральных чисел. Говорят, что $u \in F \cup P$ есть *n-арный* или *n-местный символ*, если $a(u) = n$. *Алфавит* языка первого порядка сигнатуры σ состоит из следующих символов:

- **(1)** *множество символов* сигнатуры σ, т. е. множество $F \cup P$;
- **(2)** *множество переменных*: строчные или прописные латинские буквы, возможно, с индексами;
- **(3)** *пропозициональные связки*: $\wedge$ — конъюнкция, $\vee$ — дизъюнкция, $\to$ — импликация, $\neg$ — отрицание;
- **(4)** *кванторы*: $\forall$ — квантор общности и $\exists$ — квантор существования;
- **(5)** *символ равенства* $=$;
- **(6)** *вспомогательные символы*: (— открывающая скобка,) — закрывающая скобка, , — запятая.

3.1.3. В языке теории множеств выделяют формулы и термы.

(1) *Термы* сигнатуры σ составляют наименьшее множество выражений языка (той же сигнатуры), удовлетворяющее условиям:

- **(а)** всякая переменная есть терм;
- **(б)** всякий нульместный символ операции есть терм;
- **(в)** если $f \in F$, $a(f) = n$ и $t_1, \dots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ — терм.

(2) *Атомные* или *атомарные формулы сигнатуры* σ — это выражения вида

$$t_1 = t_2, \quad p(y_1, \dots, y_n), \quad q,$$

где $t_1, t_2, y_1, \dots, y_n$ — термы сигнатуры σ, p — некоторый n-местный предикатный символ и q — нульместный предикатный символ.

(3) *Формулы сигнатуры* σ составляют наименьшее множество выражений, удовлетворяющее условиям:

- **(а)** атомные формулы сигнатуры σ являются формулами сигнатуры σ;
- **(б)** если φ и ψ — формулы сигнатуры σ, то $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$ — также формулы сигнатуры σ;
- **(в)** если φ — формула сигнатуры σ, а x — переменная, то $(\forall x)\,\varphi$, $(\exists x)\,\varphi$ — также формулы сигнатуры σ.

Вхождение переменной x в формулу φ *связано* в φ или входит в область действия квантора, если x входит в подформулу φ вида $(\forall x)\,\psi$ или $(\exists x)\,\psi$. В противном случае вхождение x свободно в φ. Говорят, что x *свободно* (связано) в φ, если существует свободное (связанное) вхождение x в φ. При желании подчеркнуть, что в формуле φ свободными являются переменные $x_1, \ldots, x_n$, мы пишем $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ или просто $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Слова «предложение» и «утверждение» неформально трактуют как синонимы слова «формула». Формулу без свободных переменных называют *высказыванием.* Говоря об истинности или ложности формулы φ, имеют в виду *универсальное замыкание* формулы φ, которое получается навешиванием квантора всеобщности на каждую свободную переменную формулы φ. Обратите внимание, что квантификация допустима лишь по отношению к переменным. Слова «первый порядок» подчеркивают именно эту синтаксическую особенность рассматриваемого языка.

3.1.4. *Язык теории множеств* — язык первого порядка, сигнатура которого содержит лишь один бинарный предикатный символ $\in$ и не имеет прочих предикатных или функциональных символов. Таким образом, теория множеств — это простой пример *теории первого порядка.* Обычно пишут $x \in y$ вместо $\in (x, y)$ и говорят, что x — *элемент* или *член* y. В этой связи говорят также о *принадлежности* или *членстве* множеств. Таким образом, формулы теории множеств суть формальные тексты, составленные из атомных формул вида $x \in y$ и $x = y$ посредством пропозициональных связок и кванторов.

Теория множеств, точнее говоря, та теория множеств, которую мы излагаем в настоящей книге, строится на основе законов классической логики. Иными словами, в ней действуют обычные логические аксиомы и правила вывода исчисления предикатов, которые можно найти почти в любом руководстве по математической логике (см., например, [65, 92, 227]). Отметим здесь же, что используемое в книге исчисление предикатов часто именуется *классическим*, *узким* или *исчислением первого порядка.*

Помимо этого принимается некоторое количество нелогических или специальных аксиом, отражающих содержательные представления о множествах или классах. Варьируя в разумных пределах специальные аксиомы, получают различные по своим выразительным возможностям аксиоматические системы для теории множеств. В этой главе описаны наиболее употребительные теории множеств.

3.1.5. Одной из важнейших функций метаязыка является введение новых сокращающих символов и установление соответствующих синтаксических правил. Дело в том, что формализация даже несложных фрагментов содержательной математики приводит к громоздким текстам, запись и прочтение которых проблематичны по физическим и психологическим причинам. Это обстоятельство вынуждает вводить большое количество сокращений и, по сути дела, просто строить более удобный сокращенный вариант исходного символического языка. При этом необходимым требованием является принципиальная возможность однозначного перевода сокращенного изложения на формализованный язык. В соответствии с нашими планами мы не будем останавливаться подробно на способах введения сокращений, точных описаний, функциональных выражений и т. п. Например, в дальнейшем, как и ранее, мы применяем *символ присваивания* $:=$, не вдаваясь в сопутствующие тонкости.

3.1.6. Приведем примеры сокращения некоторых формальных текстов языка теории множеств. Словесные толкования этих текстов апеллируют к интуитивным наивным представлениям о множествах. Прежде всего отметим следующие общепринятые сокращения:

$$\begin{gathered}(\exists!\, x)\, \varphi(x) := (\exists\, x)\, \varphi(x) \wedge (\forall\, x)(\forall\, y)(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \to x = y);\\ (\exists\, x \in y)\, \varphi := (\exists\, x)(x \in y \wedge \varphi);\\ (\forall\, x \in y)\, \varphi := (\forall\, x)(x \in y \to \varphi),\end{gathered}$$

где φ — некоторая формула. Полагают также $x \neq y := \neg(x = y)$ и $x \notin y := \neg(x \in y)$. Для простейших теоретико-множественных операций приняты обычные соглашения:

$$\begin{gathered}x \subset y := (\forall\, z)(z \in x \to z \in y);\\ u = \bigcup x := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (\exists\, y \in x) z \in y);\\ u = \bigcap x := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (\forall\, y \in x) z \in y);\\ u = y - x := y \setminus x := (\forall\, z)(z \in u \leftrightarrow (z \in y \wedge z \notin x)).\end{gathered}$$

Если φ — формула, то совокупность $\mathscr{P}_\varphi(x)$ всех подмножеств x, удовлетворяющих условию φ, описывается выражением $(z \in \mathscr{P}_\varphi(x)) \leftrightarrow (z \subset x \wedge \varphi(z))$. В частности, если $\operatorname{fin}(y)$ означает свойство множества y быть конечным, $\mathscr{P}_{\operatorname{fin}}(x)$ — это совокупность всех конечных подмножеств x.

Пустое множество $\varnothing$ не содержит элементов, так что

$$u = \varnothing := (\forall\, x)(x \in u \leftrightarrow x \neq x).$$

В приведенных выше текстах использован весьма употребительный прием сокращения — пропуск части скобок.

3.1.7. Утверждение о том, что x есть *неупорядоченная пара* элементов y и z, формализуется так: $(\forall\, u)(u \in x \leftrightarrow u = y \vee u = z)$. При этом полагают $\{y, z\} := x$. Отметим, что фигурные скобки отсутствуют в исходном алфавите и, стало быть, суть метасимволы.

Упорядоченная пара и *упорядоченная n-ка* вводятся приемом Куратовского:

$$(x, y) := \langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\};$$
$$(x_1, \dots, x_n) := \langle x_1, \dots, x_n\rangle := \langle\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle,$$

где $\{x\} := \{x, x\}$. Обратим внимание на возникающую перегруженность круглых скобок. Это обстоятельство неизбежно и не должно восприниматься как повод для обязательного введения новых символов. Отметим также, что говоря об упорядоченных парах и n-ках, прилагательные обычно опускают.

С помощью заключенных соглашений можно придать формальный смысл предложению «X — *декартово произведение* $Y \times Z$». Именно, по определению считают: $X := \{(y, z) : y \in Y, z \in Z\}$.

3.1.8. Рассмотрим утверждения:

(1) $\mathrm{Rel}\,(X)$;

(2) $Y = \mathrm{dom}(X)$;

(3) $Z = \mathrm{im}(X)$.

Соответствующие формальные тексты имеют вид

(1′) $(\forall\, u)(u \in X \to (\exists\, v)(\exists\, w)u = (v, w))$;

(2′) $(\forall\, u)(u \in Y \leftrightarrow (\exists\, v)(\exists\, w)w = (u, v) \wedge w \in X)$;

(3′) $(\forall\, u)(u \in Z \leftrightarrow (\exists\, v)(\exists\, w)w = (v, u) \wedge w \in X)$.

Таким образом, в (1)–(3) речь идет о том, что элементами X служат упорядоченные пары, причем Y — *область определения* X, а Z — *это область значений* X. При этом X иногда называют *абстрактным отношением.*

Однозначность X, или сокращенно $\mathrm{Un}\,(X)$, выражается формулой

$$\mathrm{Un}\,(X) := (\forall\, u)(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)((u, v_1) \in X \wedge (u, v_2) \in X \to v_1 = v_2).$$

Полагают $\mathrm{Fnc}\,(X) := \mathrm{Func}\,(X) := \mathrm{Un}\,(X) \wedge \mathrm{Rel}\,(X)$. Если выполнено $\mathrm{Fnc}\,(X)$, то по очевидным причинам X часто именуют *функцией* или даже *класс-функцией.* При этом для выражения $(u, v) \in X$ приняты записи $v = X(u)$, $X : u \mapsto v$ и т. п. Далее, фраза F — *отображение* или *функция* из X в Y означает, что $F \subset X \times Y$, при этом $\mathrm{Fnc}\,(F)$ и область определения F совпадает с X:

$$F : X \to Y := F \subset X \times Y \wedge \mathrm{Fnc}\,(F) \wedge \mathrm{dom}(F) = X.$$

Термин *класс-функция* также применяют для F при желании подчеркнуть, что F — это класс. *Ограничение* X на U есть по определению $X \cap (U \times \mathrm{im}(X))$. Его обозначают $X \restriction U$, $X|U$ или $X|_U$.

Если существует и притом единственное z, для которого $(y, z) \in X$, то полагают $X\text{`}y := z$. В остальных случаях считают $X\text{`}y := \varnothing$. Наконец, по определению $X\text{``}y := \mathrm{im}(X \restriction y)$. Вместо $X\text{``}\{x\}$ пишут $X(x)$ или даже Xx, если это не приводит к недоразумениям.

Стоит подчеркнуть, что здесь и в дальнейшем мы придерживаемся свободной точки зрения на введение и сокращение скобок. Иначе говоря, их появление и ликвидация, как правило, управляются соображениями удобства, а также требованиями к уровню формализации текущего фрагмента текста.

Абстрактные отношения достойны особого внимания. Приведем уместные подробности.

Соответствием из множества X в множество Y называют упорядоченную тройку $\Phi := (F, X, Y)$, где F — некоторое подмножество произведения $X \times Y$. Отметим, что для F выполнено $\mathrm{Rel}\,(F)$. Часто говорят, что F — *график* X — область отправления и Y — область прибытия соответствия Φ. При этом пишут $\mathrm{Gr}(\Phi) = F$. Напомним, что *отношением* или *бинарным отношением* на X называют соответствие, у которого область отправления и область прибытия есть X.

Образом множества $A \subset X$ *относительно соответствия* Φ называется проекция на Y множества $(A \times Y) \cap F$, обозначаемая символом $\Phi(A)$ или даже $F(A)$. Итак,

$$\Phi(A) := F(A) := \{y \in Y : (\exists\, x \in A)((x, y) \in F)\}.$$

Задание соответствия Φ равносильно указанию отображения

$$\widetilde{\Phi} : x \mapsto \Phi(\{x\}) \in \mathscr{P}(Y) \quad (x \in X),$$

где $\mathscr{P}(Y)$ — совокупность всех подмножеств множества Y. На этом основании соответствие Φ иногда отождествляется с отображением $\widetilde{\Phi}$. Более того, часто не различают отображение $\widetilde{\Phi}$, соответствие Φ и график Φ, используя одну и ту же букву для их обозначения. Пишут также $\Phi(x)$ вместо $\Phi(\{x\})$.

Область определения соответствия Φ — это область определения его графика F. Иначе говоря,

$$\operatorname{dom}(\Phi) := \{x \in X : \Phi(x) \neq \varnothing\}.$$

Аналогично, область значений или образ соответствия — это образ его графика.

3.1.9. Предположим, что X и Y — абстрактные отношения, т. е. $\operatorname{Rel}(X)$ и $\operatorname{Rel}(Y)$. Можно организовать *суперпозицию* (или *композицию*) X и Y, обозначаемую символом $Y \circ X$, собирая в единое целое в точности те упорядоченные пары (x, z), для которых $(x, y) \in X$ и $(y, z) \in Y$ при подходящем y:

$$(\forall u)(u \in Y \circ X \leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\exists z)(x, y) \in X \wedge (y, z) \in Y \wedge u = (x, z)).$$

Имея абстрактное отношение X, определяют обратное абстрактное отношение X^{-1} по правилу:

$$(\forall u)(u \in X^{-1} \leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(x, y) \in X \wedge u = (y, x)).$$

Символом I_X обозначается *тождественное отношение* на X, т. е.

$$(\forall u)(u \in I_X \leftrightarrow (\exists x)(x \in X \wedge u = (x, x))).$$

Детализируем сказанное для соответствий.

Итак, пусть $\Phi := (F, X, Y)$ — это соответствие из X в Y. Положим $F^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in F\}$. Соответствие $\Phi^{-1} := (F^{-1}, Y, X)$ называют *обратным* для Φ. Рассмотрим еще одно соответствие $\Psi := (G, Y, Z)$, и пусть H — образ множества $(F \times Z) \cap (X \times G)$ при отображении $(x, y, z) \mapsto (x, z)$. Ясно, что

$$H = \{(x, z) \in X \times Z : (\exists y \in Y)((x, y) \in F \wedge (y, z) \in G)\},$$

т. е. H совпадает с суперпозицией $G \circ F$ графиков G и F. Соответствие $\Psi \circ \Phi := (G \circ F, X, Z)$ называют *композицией соответствий* Φ и Ψ. Справедливы следующие очевидные равенства:

$$(\Psi \circ \Phi)^{-1} = \Phi^{-1} \circ \Psi^{-1}, \quad \Theta \circ (\Psi \circ \Phi) = (\Theta \circ \Psi) \circ \Phi.$$

Остановимся еще на одном понятии, связанном с соответствиями. Рассмотрим соответствие $\Phi := (F, X, Y)$. *Полярой* $\pi_\Phi(A)$ *множества* $A \subset X$ *относительно соответствия* Φ называется совокупность таких $y \in Y$, что $A \times \{y\} \subset F$. Таким образом,

$$\pi_\Phi(A) := \pi_F(A) := \{y \in Y : (\forall\, x \in A)((x, y) \in F)\}.$$

Если соответствие Φ фиксировано, то для простоты пишут $\pi(A)$ вместо $\pi_\Phi(A)$ и $\pi^{-1}(A)$ вместо $\pi_{\Phi^{-1}}(A)$.

Простейшие свойства поляр таковы:

(1) если $A \subset B \subset X$, то $\pi(A) \supset \pi(B)$;

(2) для любого $A \subset X$ выполнены включения

$$A \subset \pi^{-1}(\pi(A)); \quad A \times \pi(A) \subset F;$$

(3) если $A \times B \subset F$, то $B \subset \pi(A)$ и $A \subset \pi^{-1}(B)$;

(4) если $(A_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — это непустое семейство подмножеств множества X, то $\pi(\bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi) = \bigcap_{\xi \in \Xi} \pi(A_\xi)$;

(5) если $A \subset X$ и $B \subset Y$, то $\pi(A) = \pi(\pi^{-1}(\pi(A)))$ и $\pi^{-1}(B) = \pi^{-1}(\pi(\pi^{-1}(B)))$.

3.1.10. В случае $\mathrm{Rel}\,(X) \wedge ((X \cap Y^2) \circ (X \cap Y^2) \subset X)$ говорят, что X — *транзитивное* отношение на Y. Если $\mathrm{Rel}\,(X) \wedge (I_Y \subset X)$, то X называют *рефлексивным* (на Y). Если $X \cap Y^2 = X^{-1} \cap Y^2$, то X называют *симметричным* (на Y). Наконец, при $\mathrm{Rel}\,(X) \wedge ((X \cap X^{-1}) \cap Y^2 \subset I_Y)$ используют термин «X — *антисимметричное* отношение на Y». Здесь, конечно же, использовано стандартное сокращение: $Y^2 := Y \times Y$.

Рефлексивное и транзитивное отношение называют *предпорядком* (или отношением предпорядка). Антисимметричный предпорядок — это *порядок*. Симметричный предпорядок — это *эквивалентность*. Используют и другую стандартную в данной ситуации терминологию. Напомним, в частности, что порядок X на Y называют *линейным*, а само Y — *цепью* (относительно X), если $Y^2 \subset X \cup X^{-1}$. Если всякое непустое подмножество множества Y имеет наименьший (относительно порядка X) элемент, то говорят, что X *вполне упорядочивает* Y или что Y *вполне упорядочено* (подразумеваемым порядком X).

3.1.11. Кванторы называют *ограниченными*, если они входят в текст в виде $(\forall x \in y)$ или $(\exists x \in y)$. Существует классификация формул теории множеств (и вообще любой теории первого порядка), основанная на характере использования ограниченных и неограниченных (т. е. не являющихся ограниченными) кванторов. В дальнейшем особую роль будут играть два класса формул — ограниченные формулы, называемые иначе Σ_0-*формулами,* а также Σ_1-формулы. Говорят, что формула φ *ограничена*, если всякий квантор присутствует в φ в виде $(\forall x \in y)$ или $(\exists x \in y)$. Формулу φ относят к классу Σ_1 или называют Σ_1-*формулой*, если φ строится из атомных формул и их отрицаний с помощью только логических операций $\wedge$, $\vee$, $(\forall x \in y)$ и $(\exists x)$. Ясно, что всякая ограниченная формула попадает в класс Σ_1. Однако не всякая Σ_1-формула ограничена и существуют формулы, не содержащиеся в классе Σ_1. Рассмотрим соответствующие примеры. Начнем с ограниченных формул.

3.1.12. Запись $z = \{x, y\}$ эквивалентна ограниченной формуле

$$x \in z \wedge y \in z \wedge (\forall u \in z)(u = x \vee u = y).$$

Отсюда видно, что упорядоченная пара вводится ограниченной формулой. То же самое можно сказать и о декартовом произведении, так как $Z = X \times Y$ можно записать в виде

$$((\forall z \in Z)(\exists x \in X)(\exists y \in Y)(z = (x, y)))\wedge$$
$$\wedge((\forall x \in X)(\forall y \in Y)(\exists z \in Z)(z = (x, y))).$$

Еще одну ограниченную формулу доставляет понятие «отображение F из X в Y». Действительно, из сказанного выше следует, что $F \subset X \times Y$ — ограниченная формула, а кроме того, выражения $\mathrm{dom}(F) = X$ и $\mathrm{Un}\,(F)$, эквивалентные соответственно формулам

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(\exists z \in F)(z = (x, y)),$$
$$(\forall z_1 \in F)(\forall z_2 \in F)(\forall x \in X)(\forall y_1 \in Y)(\forall y_2 \in Y)$$
$$z_1 = (x, y_1) \wedge z_2 = (x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2,$$

также являются ограниченными формулами.

3.1.13. Утверждение «множества x и y *равномощны*», означающее, что «существует биекция между x и y» или, символически, $\mathrm{Equip}(x, y)$, записывается Σ_1-формулой:

$$(\exists\, f)(f : x \to y \wedge \mathrm{im}(f) = y \wedge \mathrm{Un}\,(f^{-1})).$$

Однако это обстоятельство не выражается ограниченной формулой. Еще одну Σ_1-формулу дает понятие абстрактного отношения:

$$\mathrm{Rel}\,(X) := (\forall\, u \in X)(\exists\, v)(\exists\, w)(u = (v, w)).$$

Следующая формула, утверждающая, что множество y не равномощно никакому своему элементу, в класс Σ_1 не входит:

$$(\forall\, x \in y)\, \neg \mathrm{Equip}(x, y).$$

3.1.14. Примечания.

(1) Разумеется, варьировать можно не только специальные аксиомы теории первого порядка, но и ее логическую часть, т. е. логические аксиомы и правила вывода. Получающиеся при этом множества теорем могут существенно отличаться друг от друга. Так, например, удаляя из аксиом исчисления высказываний закон исключенного третьего, получают интуиционистское исчисление высказываний. Аналогично строится интуиционистское исчисление предикатов (см. [38, 61]).

(2) Современная формальная логика сформировалась в ходе долгого и трудного развития философской и математической мысли.

Классическое исчисление предикатов восходит к аристотелевой силлогистике. Происхождение интуиционистской логики связано с другими философскими идеями. В разные эпохи для разных целей изобретались логические системы, существенно отличные от обеих названных систем. Так, древняя индийская логика имела три типа отрицаний: чего-то никогда не было и не может быть; что-то было, но сейчас отсутствует; что-то сейчас есть, но скоро исчезнет.

(3) Как видно из 3.1.6 и 3.1.7, сокращения могут участвовать в формулах, в сокращениях, в сокращениях в сокращениях и т. п. Изобретение и введение символов во многом являются искусством и, как всякое искусство, не могут быть формализованы полностью. Тем не менее систематизация и кодификация правил определения сокращений необходимы как с теоретической, так и с практической точек зрения. Некоторые такие системы правил (точные описания, введение функциональных букв и т. п.) можно найти в [35, 92, 221].

3.2. Аксиоматика Цермело — Френкеля

Как уже отмечалось в 3.1.4, аксиомы теории множеств включают в себя общелогические аксиомы теорий первого порядка, фиксирующие классические правила логического вывода. Ниже перечисляются специальные аксиомы теории множеств ZF_1–ZF_6 и AC. Если принять в качестве специальных аксиом ZF_1–ZF_6, то возникающую аксиоматическую систему называют системой или *теорией множеств Цермело — Френкеля* и обозначают ZF. При добавлении к ZF аксиомы выбора AC возникает более широкая теория, которую по-прежнему именуют теорией Цермело — Френкеля, но обозначают символом ZFC. Отметим, что параллельные словесные формулировки аксиом мотивируются канторовскими представлениями о множествах.

3.2.1. При изучении ZFC часто используют термины *свойство* и *класс*. Уточним их формальный статус. Рассмотрим формулу $\varphi = \varphi(x)$, построенную в рамках ZFC (символически: $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$). Вместо текста $\varphi(y)$ пишут $y \in \{x : \varphi(x)\}$. Таким образом, действует так называемая *схема Чёрча* для классификации

$$y \in \{x : \varphi(x)\} := \varphi(y).$$

Встречая запись $y \in \{x : \varphi(x)\}$, на языке ZFC говорят, что y обладает свойством φ, или y лежит в классе $\{x : \varphi(x)\}$. В этом смысле свойство, формула и класс в ZFC подразумевают одно и то же. Схемой Чёрча мы фактически уже пользовались в 3.1.6 и 3.1.7. При работе с ZFC удобны и другие широко распространенные сокращения, в частности,

$$\mathbf{U} := \{x : x = x\} \text{ — } \textit{универсум} \text{ или } \textit{класс всех множеств};$$
$$\{x : \varphi(x)\} \in \mathbf{U} := (\exists\, z)(\forall\, y)\, \varphi(y) \leftrightarrow y \in z;$$
$$\{x : \varphi(x), \psi(x)\} := \{x : \varphi(x)\} \cap \{x : \psi(x)\};$$
$$x \cup y := \cup\{x, y\}, \quad x \cap y \cap z := \cap\{x, y, z\} \ldots .$$

Перейдем теперь к формулировкам специальных аксиом ZFC.

3.2.2. ***Аксиома экстенсиональности*** $\mathbf{ZF_1}$**:**
два множества равны в том (и только в том) случае, если они состоят из одних и тех же элементов:

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y.$$

Отметим, что вторую эквивалентность без изменения объема аксиомы можно заменить на $\to$, ибо обратная импликация является теоремой исчисления предикатов.

3.2.3. *Аксиома объединения* $\mathbf{ZF_2}$:
объединение множества множеств — также множество:

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(\exists\, u)(u \in z \wedge z \in x) \leftrightarrow z \in y.$$

Используя сокращения, аксиому ZF_2 переписывают в виде

$$(\forall\, x) \bigcup x \in \mathbf{U}.$$

3.2.4. *Аксиома степени* $\mathbf{ZF_3}$:
все подмножества данного множества составляют некоторое множество, т. е.

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(z \in y \leftrightarrow (\forall\, u)(u \in z \to u \in x)),$$

или в краткой записи

$$(\forall\, x)\mathscr{P}(x) \in \mathbf{U}.$$

3.2.5. *Аксиома подстановки* $\mathbf{ZF_4^{\varphi}}$:
произвольный взаимнооднозначный образ множества — снова множество:

$$\begin{gathered}(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)(\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \to y = z) \to \\ \to (\forall\, a)(\exists\, b)((\exists\, s \in a)(\exists\, t)\, \varphi(s,t) \leftrightarrow t \in b).\end{gathered}$$

В несколько сокращенной записи:

$$\begin{gathered}(\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)(\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \to y = z) \to \\ \to (\forall\, a)(\{v : (\exists\, u \in a)\, \varphi(u,v)\} \in \mathbf{U}).\end{gathered}$$

Здесь φ — формула ZFC, не содержащая свободных вхождений a. Отметим, что ZF_4^{φ} является схемой для бесконечного набора аксиом, так как для каждой подходящей $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ формулируется своя аксиома. Тем не менее для краткости и единообразия говорят просто об аксиоме подстановки, имея в виду отмеченную ее особенность.

Сформулируем полезные следствия ZF_4^{φ}.

3.2.6. Пусть $\psi = \psi(z)$ — формула ZFC. Тогда для любого множества x можно составить его подмножество, отбирая элементы x со свойством ψ, т. е.

$$(\forall\, x)\{z \in x : \psi(x)\} \in \mathbf{U}.$$

Это утверждение — аксиома ZF_4^{φ}, где в качестве φ фигурирует формула $\psi(u) \wedge (u = v)$. Приведенное положение часто именуют *аксиомами выделения* или *аксиомами свертывания*.

3.2.7. Применяя аксиому ZF_4^{φ} для формулы

$$\varphi(u, v) := (u = \varnothing \to v = x) \wedge (u \neq \varnothing \to v = y)$$

и множества $a := \mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$, мы убеждаемся в том, что неупорядоченная пара $\{x, y\}$ двух множеств (ср. 3.1.7) — снова множество. Последнее утверждение часто именуют *аксиомой неупорядоченной пары*.

3.2.8. *Аксиома бесконечности* $\mathbf{ZF_5}$:
существует по крайней мере одно бесконечное множество:

$$(\exists\, x)(\varnothing \in x \wedge (\forall\, y)(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)).$$

Тем самым существует такое множество x, что $\varnothing \in x$, $\{\varnothing\} \in x$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in x$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \in x$ и т. д. Внимательный читатель заметит некоторую щель между формальной и неформальной формулировками аксиомы бесконечности. Бдительный читатель может заподозрить злоупотребление термином «бесконечность». На самом деле, аксиома бесконечности относится к основополагающим доктринам канторианства. В этой связи некоторое таинство здесь неизбежно и должно приветствоваться.

3.2.9. *Аксиома фундирования* $\mathbf{ZF_6}$:
всякое непустое множество имеет непересекающийся со всем множеством элемент

$$(\forall\, x)(x \neq \varnothing \to (\exists\, y)(y \in x \wedge y \cap x = \varnothing)).$$

Применив аксиому ZF_6 к одноэлементному множеству $x := \{y\}$, получим $y \notin y$. Несколько забегая вперед, отметим, что по аналогичной причине (на этот раз нужно взять $x := \{x_1, \ldots, x_n\}$) не существуют бесконечно убывающие $\in$-последовательности $x_1 \ni x_2 \ni \ldots \ni x_n \ni \ldots$.

3.2.10. *Аксиома выбора* AC:
произведение непустого множества непустых множеств не пусто:

$$(\forall\, x)(\exists\, f)(\mathrm{Fnc}\,(f) \wedge x \subset \mathrm{dom}(f)) \wedge (\forall\, y \in x)\, y \neq \varnothing \to f(y) \in y.$$

Функцию f в описанной ситуации называют *выбирающей* для x.

Известно большое количество утверждений, эквивалентных аксиоме выбора в рамках рассматриваемой нами теории, см. [348]. Приведем формулировки двух наиболее популярных из них.

Теорема Цермело (принцип полного упорядочения)**.** *Всякое множество может быть вполне упорядочено.*

Лемма Куратовского — Цорна (принцип максимальности)**.** *Пусть M — (частично) упорядоченное множество, в котором любое линейное упорядоченное множество имеет верхнюю границу. Тогда любой элемент M мажорируется некоторым максимальным элементом.*

3.2.11. На основе приведенной аксиоматики складывается точное представление о классе всех множеств как об «универсуме фон Неймана».

Исходным объектом построения мыслится пустое множество. Элементарный шаг введения новых множеств из уже построенных состоит в формировании объединения множеств подмножеств имеющихся множеств. Трансфинитное повторение таких шагов исчерпывает класс всех множеств.

Классы (в «платонистском» стиле) можно мыслить как внешние объекты по отношению к элементам универсума фон Неймана. Класс в этом понимании есть совокупность множеств, удовлетворяющих теоретико-множественному свойству, описываемому формулой теории Цермело — Френкеля. Поэтому класс, состоящий из элементов некоторого множества (по аксиоме подстановки) сам является множеством. Формально корректное определение универсума фон Неймана требует предварительного знакомства с понятиями ординала и кумулятивной иерархии. Ниже приводим необходимый минимум сведений об этих объектах.

3.2.12. Множество x называется *транзитивным*, если каждый элемент x является подмножеством x. Множество x называют *орди-*

налом, если само x транзитивно и линейно упорядочено отношением $\in$. В символической записи эти определения выглядят так:

$$\mathrm{Tr}\,(x) := (\forall\, y \in x)(y \subset x) := \ x \text{ — «транзитивное множество»;}$$
$$\mathrm{Ord}\,(x) := \mathrm{Tr}\,(x) \wedge (\forall\, y \in x)(\forall\, z \in x)$$
$$(y \in z \vee z \in y \vee z = y) := \ \text{«}x\text{ — ординал».}$$

Ординалы принято обозначать малыми греческими буквами. Каждый ординал рассматривается с естественным отношением порядка: для β, $\gamma \in \alpha$ полагают

$$\gamma \leq \beta \leftrightarrow \gamma \in \beta \vee \gamma = \beta.$$

Класс всех ординалов обозначается символом On, так что $\mathrm{On} := \{\alpha : \mathrm{Ord}\,(\alpha)\}$.

Ординал является *вполне упорядоченным множеством*, т. е. он линейно упорядочен и любое его подмножество имеет наименьший элемент (последнее обеспечено аксиомой фундирования). Несложно убедиться, что

$$\alpha \in \mathrm{On} \wedge \beta \in \mathrm{On} \to \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha;$$
$$\alpha \in \mathrm{On} \wedge \beta \in \alpha \to \beta \in \mathrm{On};$$
$$\alpha \in \mathrm{On} \to \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{On};$$
$$\mathrm{Ord}\,(\varnothing).$$

Ординал $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ называют *сыном* α. Ординал, являющийся сыном другого ординала, называют *последующим*. Ординал, не равный нулю и не являющийся последующим, называют *предельным*. Приняты обозначения:

$$K_{\mathrm{I}} := \{\alpha \in \mathrm{On} : (\exists\, \beta)\ \mathrm{Ord}\,(\beta) \wedge \alpha = \beta + 1 \vee \alpha = \varnothing\};$$
$$K_{\mathrm{II}} := \{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha \text{ — предельный ординал}\};$$
$$0 := \varnothing, \quad 1 := 0 + 1, \quad 2 := 1 + 1, \ldots,$$
$$\omega := \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Сейчас самый подходящий момент напомнить, что *континуум*, о котором мы изредка говорим в этой книге, это просто множество подмножеств ω.

3.2.13. Отметим, что в ZFC можно доказать возможность использования общеизвестных (на «наивном» уровне) свойств ординалов, в частности законность трансфинитной индукции и рекурсивных определений. Приведем определение универсума фон Неймана, сознательно опуская пока формальное обоснование законности подобных определений. Для каждого ординала α положим

$$V_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{P}(V_\beta),$$

т. е. $V_\alpha = \{x : (\exists\,\beta)\ (\beta \in \alpha \wedge x \subset V_\beta)\}$. Подробнее говоря,

$$V_0 := \varnothing;$$
$$V_{\alpha+1} := \mathscr{P}(V_\alpha);$$
$$V_\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} V_\alpha, \quad \text{если} \quad \beta \in K_{\mathrm{II}}.$$

Полагают

$$\mathbf{V} := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha.$$

Принципиальным фактом, обеспеченным аксиомой фундирования, является теорема

$$(\forall\,x)(\exists\,\alpha)(\mathrm{Ord}\,(\alpha) \wedge x \in V_\alpha),$$

которую записывают в виде $\mathbf{U} = \mathbf{V}$ и выражают словами: «*класс всех множеств — это универсум фон Неймана*» или «*любое множество вполне фундировано*».

Графически универсум фон Неймана $\mathbf{V}$ можно представлять себе как перевернутую пирамиду, вершиной которой служит пустое множество. Другие «нижние» этажи пирамиды таковы:

$$V_0 = \varnothing,\ V_1 = \{\varnothing\},\ V_2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots,$$
$$V_\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots\}, \dots .$$

Реализация универсума $\mathbf{V}$ в виде так называемой «*кумулятивной иерархии*» множеств $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$ позволяет с каждым множеством x связать его ранг:

$$\mathrm{rank}(x) := \text{ наименьший ординал } \alpha \text{ такой, что } x \in V_{\alpha+1}.$$

Легко убедиться, что

$$a \in b \to \operatorname{rank}(a) < \operatorname{rank}(b);$$
$$\operatorname{Ord}(\alpha) \to \operatorname{rank}(\alpha) = \alpha;$$
$$(\forall\, x)(\forall\, y) \operatorname{rank}(y) < \operatorname{rank}(x) \to (\varphi(y) \to \varphi(x)) \to (\forall\, x)\, \varphi(x),$$

где φ — формула ZFC. Последнюю теорему (точнее, схему теорем) называют *принципом индукции по рангу*.

3.2.14. Ординал, который не равномощен никакому предшествующему ординалу, называется *кардиналом*. Любое натуральное число является кардиналом. Кардинал, не являющийся натуральным числом, называют *бесконечным*. Значит, ω — наименьший бесконечный кардинал.

Числом Хартогса $\mathscr{H}(x)$ множества x называют наименьший из ординалов α таких, что нет никакого инъективного отображения из α в x. Ясно, что $\mathscr{H}(x)$ — это кардинал для любого x. При этом число Хартогса любого ординала α является наименьшим кардиналом, строго большим, чем α.

По рекурсии определяют *алефическую шкалу*:

$$\aleph_0 := \omega_0 = \omega;$$
$$\aleph_{\alpha+1} := \omega_{\alpha+1} = \mathscr{H}(\omega_\alpha);$$
$$\aleph_\beta := \omega_\beta := \sup\{\omega_\alpha : \alpha < \beta\}, \quad \text{если} \quad \beta \in K_{\mathrm{II}}.$$

Справедливы следующие утверждения:

(1) *бесконечные кардиналы составляют вполне упорядоченный собственный класс;*

(2) *отображение $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ является порядковым изоморфизмом класса ординалов и класса бесконечных кардиналов;*

(3) *существует отображение $|\cdot|$ из универсума $\mathbf{V}$ на класс всех кардиналов такое, что множества x и $|x|$ равномощны для любого $x \in \mathbf{U}$.*

Кардинал $|x|$ называют *мощностью* или *кардинальным числом множества* x. Итак, всякое множество равномощно единственному кардиналу, а именно своему кардинальному числу. Множество x *счетно*, если $|x| = \omega_0$, и *не более чем счетно*, если $|x| \leq \omega_0$.

Для произвольного ординала α обозначим символом 2^{ω_α} мощность множества $\mathscr{P}(\omega_\alpha)$, т. е. $2^{\omega_\alpha} := |\mathscr{P}(\omega_\alpha)|$. Такое обозначение оправдано тем, что 2^x и $\mathscr{P}(x)$ равномощны для любого x, где 2^x — класс всех отображений из x в 2. Теорема, установленная Г. Кантором, утверждает, что $|x| < |2^x|$, каково бы ни было множество x. В частности, $\omega_\alpha < 2^{\omega_\alpha}$ для любого ординала α. При этом будет $\omega_{\alpha+1} \leq 2^{\omega_\alpha}$.

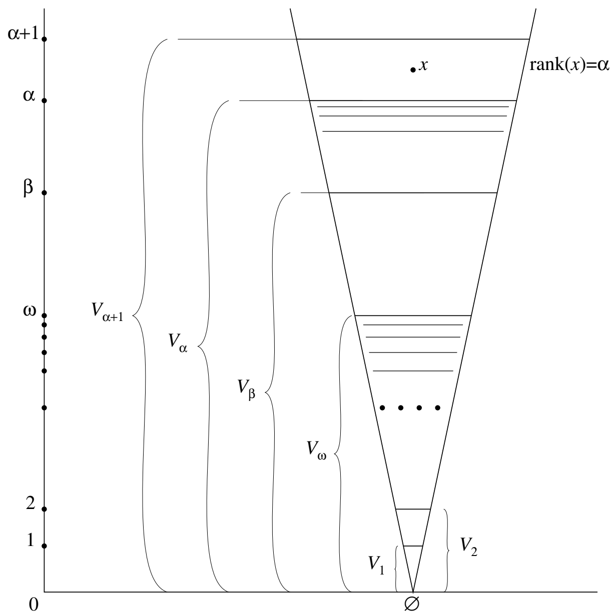


Рис. 3

Вопрос о том, имеются или нет промежуточные мощности между $\omega_{\alpha+1}$ и 2^{ω_α}, т. е. выполнено ли равенство $\omega_{\alpha+1} = 2^{\omega_\alpha}$, составляет содержание *обобщенной проблемы континуума.* При $\alpha = 0$ это классическая *проблема континуума.* Под *гипотезой континуума* CH (обобщенной гипотезой континуума GCH) понимают равенство $\omega_1 = 2^\omega$ (соответственно равенство $\omega_{\alpha+1} = 2^{\omega_\alpha}$ для всех $\alpha \in \mathrm{On}$).

3.2.15. В дальнейшем нам понадобится важный технический результат, называемый часто *принципом отражения.* В известном смысле этот результат показывает, что «конкретные» теоретико-множественные события происходят с множествами ограниченного ранга.

Теорема Монтегю — Леви. *Пусть* $\varphi := \varphi(x_1, \dots, x_n)$ *— формула теории* ZFC *и* α *— ординал. Тогда существует ординал* β *такой, что* $\beta > \alpha$ *и*

$$(\forall\, x_1, \dots, x_n \in V^\beta)\, \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{V^\beta}(x_1, \dots, x_n),$$

где φ^{V^β} *— релятивизация* φ *на* V^β*.*

$\triangleleft$ Пусть в пренексной нормальной форме φ имеет вид

$$\varphi = (Q_1 y_1) \dots (Q_m y_m)\, \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Таким образом, ψ не имеет кванторов и $Q_k \in \{\exists, \forall\}$.

Введем в рассмотрение формулу

$$\psi_k := (Q_{k+1} y_{k+1}) \dots (Q_m y_m)\, \psi$$

для $k := 0, \dots, m$. При этом с должными оговорками получаем

$$\psi_k = \psi_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{k-1}).$$

Фиксируем набор свободных переменных в ψ_k и найдем наименьший ординал γ такой, что

$$(\exists\, y_k)\psi_k \to (\exists\, y_k \in V^\gamma)\, \psi_k$$

при условии $Q_k = \exists$ и

$$(\exists\, y_k)\neg\, \psi_k \to (\exists\, y_k \in V^\gamma)\neg\, \psi_k,$$

если $Q_k = \forall$. Введем обозначения:

$$g_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{k-1}) := \gamma.$$

Для каждого ординала α, используя аксиому подстановки, строим множество $A_k(\alpha)$, заданное следующим образом:

$$\{g_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{k-1}) : x_1, \dots, x_n \in V^\alpha; y_1, \dots, y_{k-1} \in V^\alpha\}.$$

Полагаем

$$f_k(\alpha) := \sup\{\alpha + 1, (\sup A_k(\alpha)) + 1\}.$$

Используя возникающие ординальнозначные функции, последовательно определяем

$$f^{(0)}(\alpha) := \alpha;$$

$$f^{(1)}(\alpha) := \sup\{f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)\};$$

$$f^{(s+1)}(\alpha) := f^{(1)}(f^{(s)}(\alpha)) \quad (s \in \mathbb{N}).$$

И наконец, рассмотрим

$$f(\alpha) := \sup_{s \in \mathbb{N}} f^{(s)}(\alpha).$$

Видно, что для каждого α ординал $f(\alpha)$ предельный и мажорирует α. Более того, для любых $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in V^{f(\alpha)}$ и $1 \leq k \leq m$ выполнено

$$g_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{k-1}) < f(\alpha).$$

Полагая $\beta := f(\alpha)$, учитывая, что $\psi_{k-1} = (Q_k y_k)\psi_k$, и привлекая определение g_k, последовательно выводим:

$$\psi_m = \psi_m^{V^\beta} \to$$

$$\to \big(\psi_{m-1} \leftrightarrow (Q_m y_m \in V^\beta)\psi_m\big) \to$$

$$\to \Big(\psi_{m-1} \leftrightarrow \psi_{m-1}^{V^\beta}\Big) \to \dots$$

$$\dots \to \psi_1 \leftrightarrow \psi_1^{V^\beta} \to$$

$$\to (Q_1 y_1)\psi_1 \leftrightarrow (Q_1 y_1 \in V^\beta)\psi_1 \to$$

$$\to \psi_0 \leftrightarrow \psi_0^{V^\beta} \to$$

$$\to \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{V^\beta}(x_1, \dots, x_n).$$

Последнее и требовалось установить. $\rhd$

Следствие. *Пусть* $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ *— формулы* ZFC, *у которых свободны лишь переменные из* $x_1, \dots, x_n$. *Тогда при* $\alpha \in \mathrm{On}$ *будет*

$$(\exists\, \beta > \alpha)(\forall\, x_1, \dots, x_n \in V^\beta)(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_1^{V^\beta}) \wedge \dots \wedge (\varphi_m \leftrightarrow \varphi_m^{V^\beta}).$$

$\lhd$ Положим

$$\varphi(t, x_1, \dots, x_n) := (t = 1 \wedge \varphi_1) \vee (t = 2 \wedge \varphi_2) \vee \dots \vee (t = m \wedge \varphi_m)$$

и, применяя теорему, выводим требуемое. $\rhd$

3.2.16. При изучении различных моделей теории множеств широко используется конструкция ультрапроизведения. Мы приведем подробности, полезные читателю, желающему восполнить детали, связанные с уточнениями формально-логического статута нестандартных теорий множеств.

Пусть U — некоторое множество и ε — отношение в U. В контексте теории множеств пару (U, ε) называют *универсетом* или *универсоидом.* При этом вместо $(x, y) \in \varepsilon$ будем иногда писать $x\varepsilon y$.

Рассмотрим формулу $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ теории ZFC.

Допустим, что $x_1, \dots, x_n \in U$ и при интерпретации ε в качестве отношения принадлежности и ограничении всех кванторов в φ на U имеет место $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. В этой ситуации пишут $(U, \varepsilon) \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$, или $\varphi^{(U,\varepsilon)}(x_1, \dots, x_n)$, или даже φ^U и говорят о *релятивизации* φ. Используют и иные аббревиатуры.

Рассмотрим степень $\mathfrak{X} := X^{\mathscr{E}}$ фиксированного множества X, где $\mathscr{E}$ — некоторое множество индексов (X и $\mathscr{E}$ для удобства считаются непустыми). Для $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{X}$ и $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n) \in (\mathrm{ZFC})$ положим

$$[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] := \{e \in \mathscr{E} : \varphi^X(x_1(e), \dots, x_n(e))\},$$

где φ^X — релятивизация φ на X.

Пусть, далее, $\mathscr{F}$ — фильтр в $\mathscr{E}$ и

$$f \sim_{\mathscr{F}} g := [\![f = g]\!] \in \mathscr{F} \quad (f, g \in \mathfrak{X}).$$

Обозначим символом ${}^{\mathscr{F}}\!X$ фактор-множество $\mathfrak{X}/\sim_{\mathscr{F}}$ и соответственно символом ${}^{\mathscr{F}}\!f$ — класс эквивалентных f элементов. Ясно, что при $f \sim_{\mathscr{F}} f'$ и $g \sim_{\mathscr{F}} g'$ будет

$$[\![f'\varepsilon g']\!] = [\![f = f']\!] \cap [\![g = g']\!] \cap [\![f'\varepsilon g']\!].$$

Таким образом, $[\![f\varepsilon g]\!] \in \mathscr{F} \leftrightarrow [\![f'\varepsilon g']\!] \in \mathscr{F}$. Иначе говоря, в ${}^{\mathscr{F}}\!X$ корректно определено отношение

$$ {}^{\mathscr{F}}\!\varepsilon := \left\{ ({}^{\mathscr{F}}\!f,\, {}^{\mathscr{F}}\!g) \in ({}^{\mathscr{F}}\!X)^2 : [\![f\varepsilon g]\!] \in \mathscr{F} \right\}. $$

Легко удостовериться, что

$$ {}^{\mathscr{F}}\!\varepsilon = \sim_{\mathscr{F}} \circ \varepsilon_{\mathfrak{X}} \circ \sim_{\mathscr{F}} $$

для подходящей интерпретации $\varepsilon_{\mathfrak{X}}$ отношения принадлежности в $\mathfrak{X}$. Возникающее ${}^{\mathscr{F}}\!X$ называют *фильтрованной степенью* X. Если $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, то об ${}^{\mathscr{F}}\!X$ говорят как об *ультрастепени* X.

В силу сделанных определений для $f, g \in \mathfrak{X}$ будет

$$ {}^{\mathscr{F}}\!f \; {}^{\mathscr{F}}\!\varepsilon \; {}^{\mathscr{F}}\!g \leftrightarrow [\![f\varepsilon g]\!] \in \mathscr{F}; $$

$$ {}^{\mathscr{F}}\!f = {}^{\mathscr{F}}\!g \leftrightarrow [\![f = g]\!] \in \mathscr{F}. $$

Иными словами, для каждой атомарной формулы $\varphi = \varphi(x, y)$ теории ZFC выполнено

$$ ({}^{\mathscr{F}}\!X,\, {}^{\mathscr{F}}\!\varepsilon) \vDash \varphi^{{}^{\mathscr{F}}\!X}({}^{\mathscr{F}}\!f,\, {}^{\mathscr{F}}\!g) \leftrightarrow [\![\varphi(f, g)]\!] \in \mathscr{F}. $$

Для $x \in X$ положим $\overline{x}(e) := x$ $(e \in \mathscr{E})$ и обозначим $*x := {}^{\mathscr{F}}\!\overline{x}$. Подчеркнем, что $*x = *y \leftrightarrow x = y$ и $*x \,{}^{\mathscr{F}}\!\!\in *y \leftrightarrow x \in y$. Оказывается, что подобного рода эффекты носят общий характер. Для их описания дадим определение.

Пусть теперь $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная формула ZFC. Говорят, что формула φ *фильтрована* (относительно X, $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$), если

$$ ({}^{\mathscr{F}}\!X,\, {}^{\mathscr{F}}\!\varepsilon) \vDash \varphi^{{}^{\mathscr{F}}\!X}({}^{\mathscr{F}}\!f_1, \dots, {}^{\mathscr{F}}\!f_n) \leftrightarrow [\![\varphi(f_1, \dots, f_n)]\!] \in \mathscr{F} $$

для всех $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{X}$.

Теорема Лося. *Каждая формула* ZFC *является фильтрованной относительно любого ультрафильтра.*

$\lhd$ Поскольку атомарные формулы фильтрованы, то следует убедиться в том, что пропозициональные связки и навешивание кванторов сохраняют фильтрованность. Если формула φ фильтрована, то фильтрованность $\neg\varphi$ обеспечивается характеристическим свойством ультрафильтра: $F \in \mathscr{F} \leftrightarrow F' := \mathscr{E} - F \notin \mathscr{F}$. Установим поэтому лишь то минимально необходимое свойство, что при $\psi(y) := (\forall\, x)\varphi(x, y)$ фильтрованность φ обеспечивает фильтрованность ψ.

Итак, пусть $[\![\psi(y)]\!] \in \mathscr{F}$ для $y \in \mathscr{F}$ и $x \subset {}^{\mathscr{F}}\!X$. Ясно, что $[\![\psi(y)]\!] \subset [\![\varphi(x, y)]\!]$. Стало быть, $({}^{\mathscr{F}}\!X, {}^{\mathscr{F}}\!\varepsilon) \vDash {}^{\mathscr{F}}\!\varphi(x, y)$. В силу произвольности x заключаем: $({}^{\mathscr{F}}\!X, {}^{\mathscr{F}}\!\in) \vDash (\forall\, x)\varphi^{\mathscr{F}}(x, y)$.

Пусть, наконец, известно, что при $x, y \in {}^{\mathscr{F}}\!X$ будет $\varphi^{{}^{\mathscr{F}}\!X}(x, y)$, т. е. $[\![\varphi(x, y)]\!] \in \mathscr{F}$. Проверим, что $B := [\![(\forall\, x)\, \varphi(x, y)]\!]$ также лежит в $\mathscr{F}$. В самом деле, для $e \in \mathscr{E} - B := B'$ имеется $\overline{x}(e)$ такой, что $\neg\,\varphi(x(e), y(e))$. Возьмем какой угодно x_0 из $\mathfrak{X}$ и положим $\overline{\overline{x}}(e) := \overline{x}(e)$ для $e \in B'$ и $\overline{\overline{x}}(e) := x_0(e)$ в противном случае. Ясно, что $[\![\varphi(\overline{x}, y)]\!] \subset \mathscr{E} - B' = B$. Стало быть, $B \in \mathscr{F}$, ибо $[\![\varphi(\overline{\overline{x}}, y)]\!] \in \mathscr{F}$, что и требовалось. $\triangleright$

Следствие 1. *Пусть X — непустое множество и $*X$ — некоторая его ультрастепень. Тогда для $x_1, \dots, x_n \in X$ и $\varphi \in$ (ZFC) выполнено*

$$\varphi^X(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{*X}(*x_1, \dots, *x_n).$$

$\triangleleft$ По теореме Лося $\varphi^{*X}(*x_1, \dots, *x_n) \leftrightarrow [\![\varphi(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)]\!] \in \mathscr{F}$, где $\mathscr{F}$ — рассматриваемый ультрафильтр, а $\overline{x}_k(e) = (x_k)$ при $e \in \mathscr{E}$. По определению $[\![\cdot]\!]$ будет $[\![\varphi(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)]\!] \in \mathscr{F} \leftrightarrow \varphi^X(x_1, \dots, x_n)$, что и требовалось. $\triangleright$

Пусть X — бесконечное множество и $\mathscr{E}$ — направление всех его непустых конечных подмножеств. Пусть, далее, $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, содержащий фильтр хвостов направления $\mathscr{E}'$ дополнений множеств из $\mathscr{E}$. Ультрастепень ${}^{\mathscr{F}}\!X$ назовем *каноническим расширением* X, сохранив за ней обозначение $*X$.

Следствие 2. *Для формулы $\varphi = \varphi(x, y, x_1, \dots, x_n) \in$ ZFC, элементов $x_1, \dots, x_n \in X$ и канонического расширения $*X$ справедлив принцип идеализации в слабой форме*

$$(\forall^{\mathrm{fin}} A \subset X)(\exists\, b \in X)(\forall\, a \in A)\varphi^X(a, b, x_1, \dots, x_n) \to$$
$$\to (\exists\, b \in *X)(\forall\, a \in A)\varphi^{*X}(*a, b, *x_1, \dots, *x_n).$$

$\triangleleft$ Для $e \in \mathscr{E}$ найдется $b(e) \in X$ так, что выполняется $(\forall\, a \in e)$ $\varphi^X(a, b(e), x_1, \dots, x_n)$. Иначе говоря, для возникающего $b \in X^{\mathscr{E}}$ имеем

$$[\![\varphi(\overline{x}, b, \overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)]\!] \subset \{e \in \mathscr{E} : a \in e\},$$

где, как обычно, $\overline{y}(e) := y$ для $y \in X$ и $e \in \mathscr{E}$. По теореме Лося заключаем: $\varphi^{*X}(*a,\ {}^{\mathscr{F}}b,\ *x_1, \dots, *x_n)$. Это и требовалось установить. $\triangleright$

Непустое множество Z, являющееся подмножеством $\widetilde{Z}$, называем *цермеловским подмножеством* $(\widetilde{Z})$, если

(а) Z транзитивно в $\overline{Z}$ (т. е. $a \in \widetilde{Z} \wedge b \in Z \wedge a \in b \to a \in Z$);

(б) Z замкнуто относительно образования неупорядоченных пар элементов;

(в) $a \in Z \to \bigcup a \in Z \wedge \mathscr{P}(a) \in Z$.

Пусть $(\widetilde{Z}, \widetilde{\varepsilon})$ — универсет и (Z, ε) — также универсет, причем Z — непустое подмножество $\widetilde{Z}$ и ε — сужение $\widetilde{\varepsilon}$ на E^2. В этом случае (Z, ε) называют *подуниверсетом* $(\widetilde{Z}, \varepsilon)$. Если при интерпретации $\widetilde{\varepsilon}$ в качестве отношения принадлежности Z моделирует цермеловское подмножество $\widetilde{Z}$, то Z называют *цермеловским универсетом* (в $(\widetilde{Z}, \widetilde{\varepsilon})$). Указание на $\widetilde{Z}$ часто опускают, если это не вызывает недоразумений.

Следствие 3. *Пусть $(\mathfrak{X}, \varepsilon)$ — цермеловский универсет и $*\mathfrak{X}$ — ультрастепень X. Пусть, далее, $X \in \mathfrak{X}$, $Y \in *\mathfrak{X}$ и $\widetilde{f} : X \to \widetilde{Y}$ (т. е. $\widetilde{f}$ — внешняя функция), где $\widetilde{Y} := \{y : y \overset{*\mathfrak{X}}{\in} Y\}$. Существует элемент $f \in *\mathfrak{X}$ такой, что f — функция из $*X$ в Y внутри $(*\mathfrak{X})$ и при этом $\widetilde{f}(x) = f(*x)$ для $x \in X$.*

$\triangleleft$ Если $\widetilde{f} = \varnothing$, то полагаем $f := \varnothing$. Если же $\widetilde{f} \neq \varnothing$, то $Y \neq \varnothing$. Пусть $Y = {}^{\mathscr{F}}\mathscr{Y}_0$, где $\mathscr{F}$ — рассматриваемый ультрафильтр в соответствующем направлении $\mathscr{E}$. При этом $[\![\mathscr{Y}_0 \neq \varnothing]\!] = \{e \in \mathscr{E} : \mathscr{Y}_0(e) \neq \varnothing\} \in \mathscr{F}$. Переопределяя, если нужно, $\mathscr{Y}_0(e)$ при $e \notin [\![\mathscr{Y}_0 \neq \varnothing]\!]$, можно считать, что $Y = {}^{\mathscr{F}}\mathscr{Y}$ и $\mathscr{Y}(e) \neq \varnothing$ при всех $e \in \mathscr{E}$.

Пусть $y \in \widetilde{Y}$ и $y = {}^{\mathscr{F}}\mathfrak{y}$. Ясно, что $[\![\mathfrak{y} \in \mathscr{Y}]\!] \in \mathscr{F}$. Положим $h(y)(e) := \mathfrak{y}(e)$ при $e \in [\![\mathfrak{y} \in \mathscr{Y}]\!]$ и доопределим $h(y)$ при иных e, например, как какой-либо элемент $\mathscr{Y}(e) \in X$. Важно, что ${}^{\mathscr{F}}h(y) = y$ при любом подобном выборе. Для $e \in \mathscr{E}$ определим функцию $g(e) : X \to \mathscr{Y}(e)$ соотношением $g(e)(x) := h(f(x))(e)$ (здесь $x \in X$). Множество $g(e) := \{(x,\ g(e)(x)) : x \in X\}$ является элементом $\mathfrak{X}$ (ибо $\mathfrak{X}$ — цермеловский универсет). Тем самым возникает элемент g из $\mathfrak{X}^{\mathscr{E}}$ такой, что $g : e \in \mathscr{E} \mapsto g(e) \in \mathfrak{X}$. При этом, как очевидно, $[\![g : \overline{X} \to \mathscr{Y}]\!] = \mathscr{E}$. Стало быть, по теореме Лося $f := {}^{\mathscr{F}}g$ — функция из $*X$ в Y. Осталось заметить, что при $x \in X$ по тем же причинам

$$\widetilde{f}(x) = f(*x) \leftrightarrow f(*x) = {}^{\mathscr{F}}h(\widetilde{f}(x)) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow [\![g(\overline{x}) = h(\widetilde{f}(x))]\!] \in \mathscr{F}.$$

Кроме того, по определению

$$g(\overline{x})(e) = g(e)(x) = h(\widetilde{f}(x))(e)$$

при всех $e \in \mathscr{E}$. Последнее наблюдение завершает доказательство. $\triangleright$

3.2.17. Для исследования более глубоких и тонких свойств множеств требуется еще одна общая конструкция, называемая *ультрапределом.* Здесь приводится лишь нужный для дальнейшего минимум свойств ультрапредела.

Пусть (U, ε) — универсет и $V := \mathscr{P}(U)$. Положим

$$f_U(u) := f(u) = \{v \in U : (v, u) \in \varepsilon\} \quad (u \in U);$$

$$E := \{(A, B) \in V \times V : (\exists\, a \in U)(A = f(a) \wedge a \in B)\}.$$

Отметим, что для $v \subset U$ по определению образа будет

$$A \in f(v) \leftrightarrow (\exists\, u \in v)(A = f(a)) \leftrightarrow (A, v) \in E.$$

Иначе говоря,

$$f(v) = \{A \in V : (A, v) \in E\}.$$

Универсет (V, E) называют *предрасширением* (U, ε).

3.2.18. *Пусть (U, ε) — универсет, в котором выполнена аксиома экстенсиональности и (V, E) — его предрасширение. Тогда*

(1) *(V, E) удовлетворяет аксиоме экстенсиональности;*

(2) *отображение $f := f_U : U \to U$ инъективно и*

$$(f(u), f(v)) \in E \leftrightarrow (u, v) \in \varepsilon.$$

(3) *для $A \in V$ выполнено*

$$(\forall\, u \in U)(A, f(u)) \in E \leftrightarrow (\exists\, a)((a, u) \in \varepsilon \wedge A = f(a)).$$

$\triangleleft$ (1): Удостоверимся теперь в экстенсиональности (V, E).

Возьмем $x, y \in V$ такие, что $(\forall\, z \in V)(z, x) \in E \to (z, y) \in E$. Достаточно проверить, что $x \subset y$. Возьмем $w \in x, w \in U$. Тогда $(f(w), x) \in E$ и, стало быть, для некоторого $\overline{w} \in U$ будет $f(w) = f(\overline{w})$

и $\overline{w} \in y$. Но $\overline{w} = w$ по уже доказанному. Итак, $(\forall\, w \in U) w \in x \to w \in y$. Осталось вспомнить, что $x, y \in \mathscr{P}(U)$.

(2): Отметим, что $(u, v) \in \varepsilon$ означает, что $u \in f(v)$. Отсюда, используя экстенсиональность для ε в U, выводим:

$$
\begin{gathered}
f(u) = f(v) \to ((\forall\, z \in U) z \in f(u) \leftrightarrow z \in f(v)) \to \\
\to ((\forall\, z \in U)(z, u) \in \varepsilon \leftrightarrow (z, v) \in \varepsilon) \to u = v.
\end{gathered}
$$

Если теперь $(f(u), f(v)) \in E$, то по определению для некоторого $a \in \overline{U}$ будет $f(a) = f(a)$ и $a \in f(v)$. По доказанному $a = u$. Значит, $(u, v) \in \varepsilon$.

В свою очередь, импликация $(u, v) \in \varepsilon \to (f(u), f(v)) \in E$ ясна (и не требует экстенсиональности в U) — в качестве требуемого в определении E элемента a можно взять U.

(3): Если $(a, u) \in \varepsilon$ и $A = f(a)$, то $a \in f(u)$ и, стало быть, $(A, f(u)) \in E$ по определению.

Наоборот, привлекая (2), выводим

$$
\begin{gathered}
(A, f(u)) \in E \to (\exists\, a \in U) A = f(a) \wedge a \in f(u) \to \\
\to A = f(a) \wedge (f(a), f(u)) \in E \to (a, u) \in \varepsilon \wedge A = f(a),
\end{gathered}
$$

что и требовалось. $\triangleright$

Пусть (U, ε) — универсет, удовлетворяющий аксиоме экстенсиональности. Положим $U_0 := U,\ \varepsilon_0 := \varepsilon$. Применяя последовательно предыдущие предложения и имея (U_k, ε_k), полагаем

$$
U_{k+1} := \mathscr{P}(U_k);
$$

$$
f_k(u) = \{\overline{u} \in U_k : (\overline{u}, U) \in \varepsilon_k\} \quad (u \in U_k);
$$

$$
\varepsilon_{k+1} := \{(u, v) \in U_{k+1} \times U_{k+1} : (\exists\, a \in U_k)(u = f_k(a) \wedge a \in v)\}.
$$

Тем самым возникает последовательность инъекций

$$
U_0 \xrightarrow{f_1} U_1 \xrightarrow{f_2} U_2 \to \dots \to U_n \xrightarrow{f_{n+1}} U_{n+1} \to \dots
$$

Нетрудно подобрать множество V и последовательность инъекций $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ такие, что возникающая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
U_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[drrrrr, "g_0"'] & U_1 \arrow[r, "f_2"] \arrow[drrrr, "g_1"] & U_2 \arrow[r] \arrow[drrr, "g_2"] & \cdots \arrow[r] & U_n \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[dr] & U_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n+1}"] & \cdots \\
 & & & & & V &
\end{tikzcd}$$

коммутативна и $V = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U'_n$, где $U'_n := g_n(U_n)$.

В самом деле, можно рассмотреть прямую сумму

$$\widetilde{V} := \{(x,n) : x \in U_n, n \in \mathbb{Z}\}$$

и ввести отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом. Элемент (x,n) эквивалентен (y,m), если имеется $k \geq n,m$ такое, что $f_k \circ f_{k-1} \circ \ldots \circ f_n(x) = f_k \circ f_{k-1} \circ \ldots \circ f_m(y)$. В качестве V берем $\widetilde{V}/\sim$. Отображение g_n возникает как композиция естественного вложения U_n в $\widetilde{V}$ и фактор-отображения $\widetilde{V}$ на V. О наборе из V и $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ обычно говорят как об *индуктивном пределе спектра* $(U_n, f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Наделяя U'_n отношением $\varepsilon'_n := g_n^{-1} \circ \varepsilon_n \circ g_n^{-1}$, полагают

$$E := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon'_n.$$

Возникающий универсоид (V,E) называют *внешним расширением* (U,ε). При этом U можно считать вложением в V посредством инъекции $\iota := g_0$. (Часто подразумевают и естественное отождествление (U_n, ε_n) с (U'_n, ε'_n), что сокращает записи.)

3.2.19. *Для элементов u, v внешнего расширения (V,E) выполнено*

$$(u,v) \in E \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, n \in \mathbb{N})(v \in U'_{n+1} \wedge u \in U'_n \wedge g_n^{-1}(u) \in g_{n+1}^{-1}(v)) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall\, n \geq n_0)(v \in U'_{n+1} \wedge u \in U'_n \wedge g_n^{-1}(u) \in g_{n+1}^{-1}(v)).$$

$\triangleleft$ На основании 3.2.18 (2) имеем

$$f_{n+1} \circ \varepsilon_n \circ f_{n+1}^{-1} \subset \varepsilon_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Отсюда

$$g_n \circ \varepsilon_n \circ g_n^{-1} = (g_{n+1} \circ f_{n+1}) \circ \varepsilon_n \circ (f_{n+1}^{-1} \circ g_{n+1}^{-1}) =$$

$$= g_{n+1} \circ (f_{n+1} \circ \varepsilon_n \circ f_{n+1}^{-1}) \circ g_{n+1}^{-1} \in g_{n+1} \circ \varepsilon_{n+1} \circ g_{n+1}^{-1}.$$

Поэтому можно считать, что

$$(u, v) \in E \leftrightarrow (\exists\, n \in \mathbb{N})(u, v) \in g_{n+1} \circ \varepsilon_{n+1} \circ g_{n+1}^{-1}.$$

При этом для каждого $n \geq n_0$ также

$$(u, v) \in g_{n+1} \circ \varepsilon_{n+1} \circ g_{n+1}^{-1}.$$

Ясно, что $v = g_{n+1}(\overline{v})$, где $\overline{v} := g_{n+1}^{-1}(v) \in U_{n+1}$ и $u = g_{n+1}(\overline{u})$, где $\overline{u} := g_{n+1}^{-1}(v)$. При этом $\overline{u}\varepsilon_{n+1}\overline{v}$ и $\overline{v} \in U_{n+1}$, т. е. для некоторого $a \in v_n$ выполнено $\overline{v} = f_{n+1}(a)$. Итак, $(\overline{u}, f_{n+1}(a)) \in \varepsilon_{n+1}$. Значит, на основании 3.2.18 (3) будет $\overline{u} = f_{n+1}(\overline{\overline{u}})$ для некоторого $\overline{\overline{u}} \in U_n$. Стало быть, $u = g_{n+1}(\overline{u}) = g_{n+1}(f_{n+1})(\overline{\overline{u}}) = g_n(\overline{\overline{u}}) \in U_n'$. Поскольку $(f_{n+1}(\overline{\overline{u}}),\ \overline{v}) \in \varepsilon_{n+1}$, то $\overline{\overline{u}} \in \overline{v}$ по определению ε_{n+1}. Осталось заметить, что $g_n^{-1}(u) = \overline{\overline{u}}$ и $g_{n+1}^{-1}(v) = \overline{v}$. $\triangleright$

3.2.20. *Пусть (V, E) — внешнее расширение универсета (U, ε), удовлетворяющего аксиоме экстенсиональности. Тогда*

(1) $(V, E) \vDash$ *аксиома экстенсиональности;*
(2) $(V, E) \vDash$ *аксиома пары;*
(3) $(V, E) \vDash$ *аксиома объединения;*
(4) $(V, E) \vDash$ *аксиома степени;*
(5) $(V, E) \vDash$ *схема аксиом выделения;*
(6) $(V, E) \vDash$ *аксиома выбора;*
(7) $(V, E) \vDash$ *аксиома пустого множества;*
(8) $(V, E) \vDash$ *аксиома бесконечности;*
(9) $(\forall\, a, b \in U)((a, b) \in \varepsilon) \leftrightarrow (\iota(a), \iota(b)) \in E;$
(10) $(\forall\, x, y \in V)((x, y) \in E \wedge y \in \iota(U) \to x \in \iota(U));$
(11) $(\forall\, \overline{U} \subset U)(\exists\, \overline{\overline{U}} \in V)(\forall\, v \in V)((v, \overline{\overline{U}}) \in E \leftrightarrow v \in \iota(\overline{U})).$

$\triangleleft$ (1): На основании 3.2.18 (1) и принципа индукции в (U_n, ε_n) имеет место аксиома экстенсиональности. Осталось заметить, что сужение E на $U'_n \times U'_n$ совпадает с ε'_n (при всех $n \in \mathbb{Z}_+$).

(2): Пусть $u, v \in U'_n$, причем $u = g_n(x), v = g_n(y)$. Пара $z := \{x, y\}$ — элемент U_{n+1}. Стало быть, $w := g_{n+1}(z)$ — элемент U'_{n+1}. Видно, что $(z, w) \in E \leftrightarrow z = u \vee z = v$.

(3): Пусть $u \in V$. Можно считать, что $u = g_{n+2}(x)$ и $x \in U_{n+2}$. Положим

$$y := \bigcup \{f_{n+1}(z) : z \in f_{n+2}(x), z \in U_{n+1}\}.$$

Ясно, что $y \in U_{n+1}$. Обозначим $v := g_{n+1}(y)$. Заметим, что для $w \in V$ будет

$$(w, v) \in E \leftrightarrow (\exists\, \varkappa)(\varkappa, v) \in E \wedge (w, \varkappa) \in E.$$

В самом деле, для $a \in U_{n+1}$ имеем

$$a \in y \leftrightarrow ((\exists\, z \in U_{n+1}) z \in f_{n+2}(x)) \wedge a \in f_{n+1}(z) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (z, x) \in \varepsilon_{n+2} \wedge (a, z) \in \varepsilon_{n+1}.$$

Осталось привлечь 3.2.19.

(4): Возьмем $u \in V$, и пусть $u = g_n(x)$, где $x \in U_n$. Положим $A := \{y \in U_n : f_{n+1}(y) \subset f_{n+1}(x)\}$. Удостоверимся, что множество $v := g_{n+2}(A)$ играет роль множества подмножеств u в (V, E). Прежде всего, заметим, что

$$f_{n+1}(y) \subset f_{n+1}(x) \leftrightarrow (\forall\, z \in V)(z, g_{n+1}(f_{n+1}(y)) \in E \to (z, u) \in E \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (V, E) \vDash g_n(y) \text{ — подмножество } x.$$

Таким образом, для любого $a \in V$ получаем

$$(a, v) \in E \leftrightarrow (a, g_{n+1}(A)) \in E \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow ((\exists\, \overline{a} \in A)(a = g_n(\overline{a})) \leftrightarrow (\exists\, y \in U_n) a = g_n(y) \wedge f_{n+1}(y) \subset f_{n+1}(x) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, z \in V) a = Z \wedge (V, E) \vDash z \text{ — подмножество } v \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (V, E) \vDash a \text{ — подмножество } v.$$

(5): Пусть $\varphi = \varphi(x, y) \in (\mathrm{ZFC})$ и $u, y \in V$. Считаем, что $u = g_{n+1}(x)$. Положим $A := \{z \in f_{n+1}(x) : \varphi(g_n(z), y)\}$. Ясно, что $A \in U_{n+1}$. Обозначим $v := g_{n+1}(A)$. При этом для $a \in U$ выполнено

$$(a, v) \in E \leftrightarrow (\exists\, z \in U_n) a = g_n(z) \wedge z \in A \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists\, z \in U_n) z \in f_{n+1}(x) \wedge a = g_n(z) \wedge \varphi(g_n(z), y) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (a, u) \in E \wedge \varphi(a, y).$$

(6): Пусть $u = g_{n+1}(x)$. Положим

$$A := \{z \in U_n : z \in f_{n+1}(x) \wedge f_{n+1}(z) \neq \varnothing\}.$$

Имеется функция выбора $\psi : A \to U_{n+1}$ такая, что $\psi(z) \in f_{n+1}(z)$ для всех $z \in A$. Множество ψ — элемент U_{n+3}. Пусть $f := g_{n+3}(\psi)$. Легко убедиться, что f выполняет роль функции в (V, E), причем

$$(\forall\, v \in V)(v, y) \in E \wedge v \neq 0) \to (f(v), y) \in E.$$

Такое f и требовалось предъявить.

(7)–(10) сомнений не вызывают.

(11) В качестве $\overline{\overline{U}}$ возьмем $g_1(\overline{\overline{U}})$ (это корректно, ибо $\overline{U} \in U_1$). В силу (4) будет $(v, \overline{\overline{U}}) \in \iota \leftrightarrow (\exists\, u \in U_0) v = \iota(u) \wedge u \in \overline{U}$. Иными словами, $(v, \overline{\overline{U}}) \in E \leftrightarrow v \in \iota(\overline{v})$. $\rhd$

3.2.21. Примечания.

(1) Первая (наряду с теорией типов Б. Рассела) система аксиом для теории множеств, предложенная Е. Цермело в 1908 г., совпадает, по существу, с ZF_1–ZF_3, ZF_5. Аксиомы экстенсиональности ZF_1 и объединения ZF_2 предложены ранее Г. Фреге (1883 г.) и Г. Кантором (1899 г.) соответственно. Идея аксиомы бесконечности ZF_5 восходит к Р. Дедекинду.

(2) Аксиома выбора AC неявно использовалась, по-видимому, давно, но замечена она Дж. Пеано в 1890 г. и Б. Леви в 1902 г. Эта аксиома введена Е. Цермело в 1904 г. и была наиболее оспариваемой в течение многих лет. Аксиома выбора лежит в основе многих важных фрагментов современной математики. Неудивительно, что в настоящее время она принята большинством ученых. Обсуждение места и роли аксиомы выбора в различных разделах математики можно найти в [34, 99, 213, 348, 395].

(3) Теория множеств Цермело оформилась в начале 20-х годов XX века. В тот период завершилась формализация языка теории множеств, позволившая уточнить расплывчатое описание свойств, допускаемых в аксиоме выделения. В то же время аксиомы Цермело не дают в качестве следствия утверждение Кантора о том, что взаимнооднозначный образ множества есть множество. Указанный пробел устранили А. Френкель в 1922 г. и Т. Сколем в 1923 г., предложив варианты аксиомы подстановки. Этот момент можно считать рождением теории ZFC.

(4) Аксиому фундирования ZF_6, по существу, предложил Дж. фон Нейман в 1925 г. Эта аксиома не зависит от остальных аксиом ZFC.

(5) Система аксиом ZFC является бесконечной. Невозможность конечной аксиоматизируемости ZFC установил Р. Монтэгю в 1960 г., см. [21, 213, 316, 395].

3.3. Теория внутренних множеств Нельсона

Предварительный анализ свойств стандартных и нестандартных множеств, проведенный нами ранее, выявил, что в универсуме фон Неймана есть место бесконечно малым числам, но нет места для всей их совокупности.

Иначе говоря, нестандартный анализ указывает, что теория Цермело — Френкеля, описывающая классический мир «стандартной» математики, выделяет собственную, внутреннюю часть универсума «наивных» множеств. Подчеркивая это обстоятельство, в нестандартной теории множеств элементы универсума фон Неймана называют *внутренними множествами.* Таким образом, множество в смысле теории Цермело — Френкеля и внутреннее множество — это синонимы.

Удобное обоснование нестандартного анализа дает теория внутренних множеств, предложенная Э. Нельсоном — теория IST.

3.3.1. Алфавит формальной теории IST получается добавлением к алфавиту теории ZFC одного-единственного нового символа — символа одноместного предиката St, выражающего свойство быть *стандартным множеством.*

Иначе говоря, в число допустимых для рассмотрения фрагментов текстов IST включаются записи вида $\mathrm{St}(x)$ или, более развернуто, «x стандартно», или, наконец, «x — стандартное множество». Итак, содержательной областью изменения переменных IST является мир Цермело — Френкеля — универсум фон Неймана, в котором теперь выделены стандартные и нестандартные множества.

3.3.2. Формулы IST определяются обычной процедурой. При этом к числу атомарных формул добавляются тексты: $\mathrm{St}(x)$, где x — переменная. Каждая формула ZFC является формулой IST, обратное утверждение очевидно не верно.

Для различения формул используют следующую терминологию: формулы ZFC называют *внутренними*, формулы IST, не являющиеся формулами ZFC, называют *внешними*. Так, текст «x стандартно» — это внешняя формула теории IST.

Иногда ниже удобно использовать образные сокращения: писать $\varphi \in (\mathrm{IST})$ вместо φ — формула IST и соответственно $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ вместо φ — формула ZFC, т. е. φ — внутренняя формула теории IST.

3.3.3. Различие между формулами IST приводит к вычленению внешних и внутренних классов. Если φ — внешняя формула IST, то текст $\varphi(y)$ описывают словами: «y — элемент *внешнего класса* $\{x : \varphi(x)\}$». Термин *внутренний класс* используется в том же смысле, что термин класс в теории Цермело — Френкеля. В случаях, когда это не может привести к недоразумениям, внешние и внутренние классы называют просто классами.

3.3.4. Внешние классы, составленные из элементов некоторого внутреннего множества, мы называем *внешними множествами*, или, более полно, внешними подмножествами данного множества. Полезно вновь обратить внимание на то, что внутренний класс, составленный из элементов внутреннего множества, — это снова внутреннее множество. Помимо сокращений, принятых в ZFC, в теории внутренних множеств используются дополнительные соглашения. Вот некоторые из них:

$$\mathbf{V}^{\mathrm{St}} := \{x : \mathrm{St}(x)\} \ \text{— внешний класс стандартных множеств;}$$

$$x \in \mathbf{V}^{\mathrm{St}} := x \text{ стандартно} := (\exists\, y)\ (\mathrm{St}(y) \wedge y = x);$$

$$(\forall^{\mathrm{st}} x)\, \varphi := (\forall\, x)(x \text{ стандартно } \to \varphi);$$

$$(\exists^{\mathrm{st}} x)\,\varphi := (\exists\, x)(x \text{ стандартно } \wedge \varphi);$$

$$(\forall^{\mathrm{st\,fin}} x)\,\varphi := (\forall^{\mathrm{st}} x)(x \text{ конечно } \to \varphi);$$

$$(\exists^{\mathrm{st\,fin}} x)\,\varphi := (\exists^{\mathrm{st}} x)(x \text{ конечно } \wedge \varphi);$$

$$^{\circ}x := \{y \in x : y \text{ стандартно}\}.$$

Внешнее множество $^{\circ}x$ часто называют *стандартным ядром* x.

Возникающая в силу сложившейся традиции коллизия обозначений (для $x \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ символ $^{\circ}x$ обозначает и стандартную часть $\mathrm{st}(x)$ этого числа) не приводит к сколь-либо значительным недоразумениям.

3.3.5. Аксиомы IST получаются добавлением к перечню аксиом ZFC следующих трех новых схем, носящих, как указывалось ранее, название *принципов нестандартной теории множеств*:

(1) принцип переноса —

$$(\forall^{\mathrm{st}} x_1)(\forall^{\mathrm{st}} x_2)\ldots(\forall^{\mathrm{st}} x_n)((\forall^{\mathrm{st}} x)\,\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \\ \to (\forall\, x)\,\varphi(x, x_1, \ldots, x_n))$$

для каждой внутренней формулы φ;

(2) принцип идеализации —

$$(\forall\, x_1)(\forall\, x_2)\ldots(\forall\, x_n)((\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)(\exists\, x)(\forall\, y \in z)\,\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y)\,\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)),$$

где $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ — произвольная внутренняя формула;

(3) принцип стандартизации —

$$(\forall\, x_1)\ldots(\forall\, x_n)((\forall^{\mathrm{st}} x)(\exists^{\mathrm{st}} y)(\forall^{\mathrm{st}} z)(z \in y) \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z, x_1, \ldots, x_n)))$$

для всякой формулы φ.

3.3.6. ***Теорема Поуэлла.*** *Теория* IST *является консервативным расширением теории* ZFC.

$\lhd$ Пусть φ — формула ZFC, $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ и φ установлена в IST. Допустим, что в предъявленном доказательстве φ использованы аксиомы $\psi_1, \dots, \psi_m$ из ZFC. По теореме Монтегю — Леви имеется такой ординал α, что при $x_1, \dots, x_n \in V^\alpha$ будет

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{V^\alpha}(x_1, \dots, x_n) \wedge \psi_1^{V^\alpha} \wedge \dots \wedge \psi_m^{V^\alpha}$$

Положим $U_0 := V^\alpha$ и $\varepsilon_0 := \in|_{V^\alpha \times V^\alpha}$. В качестве $\mathscr{E}$ возьмем $\mathscr{P}_{\text{fin}}(U_0)$ и пусть $\mathscr{F}$ — фиксированный ультрафильтр, содержащий фильтр хвостов $\mathscr{P}_{\text{fin}}(U_0)$. Обозначим U_1 ультрастепень (= расширение) U_0 и $\iota_1 : U_0 \to U_1$ — каноническое вложение U_0 в U_1. Повторяя этот процесс, обозначим $U_{n+1} := {U_n}^{\mathscr{P}_{\text{fin}}(U_0)}/\mathscr{F}$ и $\iota_{n+1} : U_n \to U_{n+1}$ — каноническое вложение в ультрастепень и будем считать U_n вложенным в U_{n+1} (отождествлением U_n и $\iota_{n+1}(U_n)$). Пусть, далее, $U := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U_n$ и $\varepsilon := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_n$, где $\varepsilon_{n+1} := \iota_n \circ \varepsilon_n \circ \iota_{n+1}$ — интерпретация отношения принадлежности. Пусть, далее, $* : U_0 \to U$ — каноническое вложение U_0 в U. Предикат $\mathrm{St}(\cdot)$ трактуем как принадлежность к $\{*u : u \in U_0\}$. Поскольку $x \in V^\alpha \to (\exists\, \beta \in \alpha)\ x \in V^\beta \to \mathscr{P}(x) \in V^\beta$, можно сделать вывод о том, что в U удовлетворена аксиома стандартизации. Справедливость принципов переноса и идеализации обоснована теоремой Лося (см. следствие 2). Тем самым в (U, ε) удовлетворены «стандартные» релятивизации $\psi_1, \dots, \psi_m$ и принципы IST. Это означает, что $\varphi^U(*x_1, \dots, *x_n)$ и $\varphi^{V^\alpha}(x_1, \dots, x_n)$. Стало быть, φ удовлетворена в универсуме фон Неймана. $\rhd$

3.3.7. Приведенная теорема означает, что внутренние теоремы теории внутренних множеств являются теоремами теории Цермело — Френкеля. Иначе говоря, при доказательстве «стандартных» теорем о множествах из универсума фон Неймана мы вправе пользоваться формализмом IST с той же степенью надежности, которую мы имеем при работе в рамках теории ZFC. Не следует забывать при этом, что теория ZFC обосновывается, в конечном счете, своей практической «непогрешимостью» и содержательной оправданностью.

3.3.8. При обдумывании смысла формального выражения аксиом теории внутренних множеств бросается в глаза несколько громоздкая запись принципа идеализации. В то время как приведенные уточнения правил переноса и стандартизации вполне адекватно отражают выдвинутые ранее наивные концепции, место указанной формулировки принципа идеализации вызывает некоторые затруднения. Поэтому, прежде всего, установим, что принцип идеализации 3.3.5 (2) гарантирует наличие нестандартных элементов.

3.3.9. *Существует такое конечное внутреннее множество, среди элементов которого встречается каждое стандартное множество.*

$\lhd$ Рассмотрим следующую формулу: $\varphi := (x$ конечно $\wedge\, y \in x)$. Отметим, что $\varphi \in$ (ZFC). Ясно, что для каждого стандартного конечного z найдется такое x, что при всех $y \in z$ будет $\varphi(x, y)$. В качестве такого x можно взять самое z. Остается воспользоваться принципом идеализации. $\rhd$

3.3.10. При применениях принципа идеализации полезно иметь в виду, что стандартные конечные множества — это в точности те множества, каждый элемент которых стандартен. Указанный факт установлен в 2.2.2. Поучительно рассмотреть его формальный вывод, основанный на принципе идеализации.

3.3.11. *Для внутреннего множества A выполнено*

$$A = {}^{\circ}A \leftrightarrow (A \text{ стандартно}) \wedge (A \text{ конечно}).$$

$\lhd$ Составим формулу $\varphi := (x \in A \wedge x \neq y)$. Бесспорно, $\varphi \in$ (ZFC). Тогда по принципу идеализации

$$(\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)(\exists\, x)(\forall\, y \in z)\, \varphi(x, y, A) \leftrightarrow (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y)(x \in A \wedge x \neq y) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, x \in A)\ (x \text{ — нестандартное}) \leftrightarrow A - {}^{\circ}A \neq \varnothing.$$

Иными словами, получаем

$$A = {}^{\circ}A \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st\,fin}} z)(\forall\, x)(\exists\, y \in z)(x \notin A \vee x = y) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st\,fin}} z)(\forall\, x \in A)(\exists\, y \in z)(x = y) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st\,fin}} z)(A \subset z),$$

что и требовалось доказать. $\rhd$

3.3.12. *Пусть X, Y — стандартные множества и $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — некоторая формула* IST. *Справедливо правило введения стандартных функций* (= принцип конструирования):

$$(\forall^{\mathrm{st}} x)(\exists^{\mathrm{st}} y)(x \in X \to y \in Y \wedge \varphi(x, y, z)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} y(\,\cdot\,))(\forall^{\mathrm{st}} x)(y(\,\cdot\,) \text{ — функция из } X \text{ в } Y \wedge$$
$$\wedge (x \in X \to \varphi(x, y(x), z))).$$

$\triangleleft$ Рассмотрим стандартизацию $\overline{F}(x) := {}^*\{y \in Y : \varphi(x, y, z)\}$. Еще раз применяя 3.3.5 (3), образуем стандартное множество

$$F := {}^*\{(x, A) \in X \times \mathscr{P}(Y) : \overline{F}(x) = A\}$$

(здесь мы используем стандартность $\mathscr{P}(Y)$, обеспеченную предположением о стандартности Y). По условию имеем $(\forall^{\mathrm{st}} x \in X)\, \overline{F} \neq \varnothing$. При этом $F(x) = \overline{F}(x)$ по определению F. Итак,

$$((\forall^{\mathrm{st}} x \in X)(F(x) \neq \varnothing)) \to ((\forall\, x \in X)(F(x) \neq \varnothing))$$

в силу принципа переноса. Используя аксиому выбора, можно заключить:

$$(\exists\, y(\,\cdot\,))(y(\,\cdot\,) \text{ — функция из } X \text{ в } Y) \wedge (\forall\, x \in X)(y(x) \in F(x)).$$

Привлекая принцип переноса, выводим, что имеется стандартная функция $y(\,\cdot\,)$, определенная на X со значениями в Y, для которой $y(x) \in F(x)$ при всех $x \in X$. Вновь учитывая определение F, видим: $y(\,\cdot\,)$ — искомая функция. $\triangleright$

3.3.13. В дальнейшем (как и прежде) весьма удобно пользоваться некоторыми символическими записями установленных правил, сознательно допуская при этом известные отступления от сделанных соглашений. Так, способы введения стандартных функций из 3.3.12 стоит переписывать в виде:

(1) $(\forall^{\mathrm{st}} x)(\exists^{\mathrm{st}} y)\, \varphi(x, y) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} y(\,\cdot\,))(\forall^{\mathrm{st}} x)\, \varphi(x, y(x))$,

(2) $(\exists^{\mathrm{st}} x)(\forall^{\mathrm{st}} y)\, \varphi(x, y) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} y(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st}} x)\, \varphi(x, y(x))$,

где $\varphi \in \text{(IST)}$, т. е. произвольная формула IST. Иначе говоря, мы опускаем указания на возможное наличие свободных переменных в φ и на необходимое допущение «ограниченности», состоящее в том, что x и y считаются пробегающими заданные стандартные множества. Точно так же, если $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ и $\psi = \psi(y_1, \dots, y_n)$, то мы будем писать $\varphi \leftrightarrow \psi$ в случае, когда

$$(\forall^{\mathrm{st}} x_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}} x_n)(\forall^{\mathrm{st}} y_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}} y_n)\, \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(y_1, \dots, y_n),$$

и говорить об эквивалентности формул φ и ψ (хотя если одна из формул φ или ψ внешняя, формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и $\psi(y_1, \dots, y_n)$ могут не быть равносильными при некоторых наборах переменных).

Используя новые возможности, принцип переноса мы будем сокращенно изображать символами:

(3) $(\forall^{\mathrm{st}} x)\,\varphi(x) \leftrightarrow (\forall\, x)\,\varphi(x)$,

(4) $(\exists^{\mathrm{st}} x)\,\varphi(x) \leftrightarrow (\exists\, x)\,\varphi(x)$,

всегда имея в виду, что формула φ в такой записи должна быть внутренней: $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$. Полезно привести здесь же элементарные правила:

(5) $(\forall\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y)\,\varphi(x,y) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} y)(\forall\, x)\,\varphi(x,y)$,

(6) $(\exists\, x)(\exists^{\mathrm{st}} y)\,\varphi(x,y) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} y)(\exists\, x)\,\varphi(x,y)$,

справедливые для любой формулы φ, и новые записи принципа идеализации:

(7) $(\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)(\exists\, x)(\forall\, y \in z)\,\varphi(x,y) \leftrightarrow (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y)\,\varphi(x,y)$,

(8) $(\exists^{\mathrm{st\,fin}} z)(\forall\, x)(\exists\, y \in z)\,\varphi(x,y) \leftrightarrow (\forall\, x)(\exists^{\mathrm{st}} y)\,\varphi(x,y)$,

относящиеся только к внутренним формулам $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$.

3.3.14. Приведенные правила дают возможность перевода многих (но, разумеется, не всех) понятий и предложений нестандартного анализа в равносильные математические определения и утверждения, не апеллирующие к стандартности. Иначе говоря, формулы IST, выражающие «нечто необычное» о стандартных объектах, можно преобразовать в эквивалентные формулы ZFC, представляющие обычные математические записи рассматриваемых выражений. Процедура, приводящая к описанному результату, называется *алгоритмом Нельсона.* Частями такого процесса являются правила 3.3.13 (1)–3.3.13 (8). Качественно говоря, суть алгоритма «дешифровки» состоит в том, что, вводя стандартные функции, привлекая идеализацию и перестановки кванторов, мы редуцируем утверждение к форме, приспособленной для переноса. В конечном счете перевод состоит в приведении формулы к виду, пригодному для элиминации — исключения — внешнего понятия стандартности. Необходимо подчеркнуть, что во всех случаях фактического использования каких-либо из соотношений 3.3.13, оговоренные выше требования, обеспечивающие законность их применения, должны быть заранее удовлетворены.

3.3.15. Алгоритм Нельсона состоит из следующих шагов:

(1) высказывание нестандартного анализа выписывается как формула IST, т. е. осуществляется дешифровка всех сокращений;

(2) рассматриваемая формула IST приводится к пренексной нормальной форме

$$(Q_1 x_1) \ldots (Q_n x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

где φ — формула ZFC, а $Q_k \in \{\forall, \exists, \forall^{\mathrm{st}}, \exists^{\mathrm{st}}\}$ для $k := 1, \ldots, n$;

(3) если Q_n — «*внутренний*» *квантор*, т. е. $\forall$ или $\exists$, то полагают $\varphi := (Q_n x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и переходят к шагу (2);

(4) если Q_n — «*внешний*» *квантор*, т. е. $\forall^{\mathrm{st}}$ или $\exists^{\mathrm{st}}$, то отыскивают первый внутренний квантор при просматривании кванторной приставки $(Q_1 x_1) \ldots (Q_n x_n)$ в направлении справа налево;

(5) если при шаге (4) внутренних кванторов не встретилось, то на основании 3.3.13 (3) и 3.3.13 (4) заменяют квантор Q_n на соответствующий внутренний квантор и переходят к шагу (2) (т. е. последовательно справа налево «стирают» верхний индекс $^{\mathrm{st}}$ над каждым квантором);

(6) пусть Q_m — первый из встретившихся внутренних кванторов. Допустим, что Q_{m+1} — внешний квантор того же типа, что и Q_m (т. е. $Q_m = \forall$ и $Q_{m+1} = \forall^{\mathrm{st}}$ или $Q_m = \exists$ и $Q_{m+1} = \exists^{\mathrm{st}}$). Используем правила 3.3.13 (5) и 3.3.13 (6) и возвращаемся к (2);

(7) если все кванторы $Q_{m+1}, \ldots, Q_n$ имеют один и тот же тип, то применяем принцип идеализации в форме 3.3.13 (7) или 3.3.13 (8) и переходим к (2);

(8) если происходит смена кванторов, т. е. Q_{p+1} имеет тот же тип, что и Q_m, а все кванторы $Q_{m+1}, \ldots, Q_p$ — другого — противоположного — типа, то можно применить 3.3.13 (1) или 3.3.13 (2), считая при этом $x := (x_{m+1}, \ldots, x_p)$, $y := x_{p+1}$. Затем мы переходим к (2).

3.3.16. Следует иметь в виду, что одно и то же содержательное утверждение можно выразить по-разному, в том числе и в форме, абсолютно недоступной для восприятия. В этой связи при практическом применении алгоритма Нельсона необходимо учитывать конкретные возможности сокращения процедуры «протаскивания наружу внешних кванторов». В частности, не всегда целесообразно рассматривать формулы, приведенные с самого начала к пренексной нормальной форме (т. е. доводить до конца шаг (2) алгоритма).

3.3.17. Примеры.

(1) *В нестандартном анализе справедлив принцип внешней индукции, т. е. для произвольной формулы* $\varphi \in (\mathrm{IST})$ *выполнено:*

$$(\varphi(1) \wedge ((\forall\, n \in {}^\circ\mathbb{N})\, \varphi(n) \to \varphi(n+1))) \to (\forall\, n \in {}^\circ\mathbb{N})\, \varphi(n).$$

$\lhd$ Применять к формальной записи исследуемого принципа алгоритм Нельсона прямо нельзя, так как формула φ может быть внешней. В этой связи рассмотрим стандартизацию $A := {}^*\{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}$. Ясно, что $1 \in A$ и для каждого стандартного $n \in A$ будет $n + 1 \in A$. Нужно установить, что ${}^\circ\mathbb{N} \subset A$. Выпишем требуемую формулу и применим к ней алгоритм Нельсона:

$$(1 \in A \wedge (\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(n \in A \to (n+1) \in A)) \to {}^\circ\mathbb{N} \subset A \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} m)(\forall^{\mathrm{st}} n)(m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge 1 \in A \wedge n \in A \to (n+1) \in A) \to$$
$$\to m \in A \leftrightarrow (1 \in A \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(n \in A \to (n+1) \in A)) \to \mathbb{N} \subset A,$$

что и требовалось установить. $\rhd$

(2) *Сумма бесконечно малых бесконечно мала.*

$$\lhd\ (\forall\, s \in \mathbb{R})(\forall\, t \in \mathbb{R})(s \approx 0 \wedge t \approx 0 \to s + t \approx 0) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, s \in \mathbb{R})\,(\forall\, t \in \mathbb{R})(s \approx 0 \wedge t \approx 0 \to (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)|s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\forall\, s \in \mathbb{R})(\forall\, t \in \mathbb{R})((\forall^{\mathrm{st}} \delta_1 > 0)\wedge$$
$$\wedge(\forall^{\mathrm{st}} \delta_2 > 0)(|s| < \delta_1 \wedge |t| < \delta_2 \to |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\forall\, s \in \mathbb{R})(\forall t \in \mathbb{R})(\exists^{\mathrm{st}} \delta_1 > 0)(\exists^{\mathrm{st}} \delta_2 > 0)(|s| < \delta_1 \wedge$$
$$\wedge |t| < \delta_2 \to |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(\forall\, s)\,(\forall\, t)(\exists^{\mathrm{st}} \delta_1)(\exists^{\mathrm{st}} \delta_2)(\varepsilon > 0 \wedge \dots$$
$$\dots \wedge \delta_2 > 0 \wedge |s| < \delta_1 \wedge |t| < \delta_2 \to |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(\forall\, s)(\forall\, t)(\exists^{\mathrm{st}} \delta_1)(\exists^{\mathrm{st}} \delta_2)(|s| < \delta_1 \wedge |t| < \delta_2 \to |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(\exists^{\mathrm{st\,fin}} \Delta_1)(\exists^{\mathrm{st\,fin}} \Delta_2)(\forall\, s)\,(\forall\, t)(\exists\, \delta_1 \in \Delta_1)(\exists\, \delta_2 \in \Delta_2)$$
$$(|s| < \delta_1 \wedge |t| < \delta_2 \to |s+t| < \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(\exists^{\mathrm{st}} \delta_1)(\exists^{\mathrm{st}} \delta_2)(\forall\, |s| < \delta_1)(\forall\, |t| < \delta_2)|s+t| \le \varepsilon \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, |s| < \delta)(\forall\, |t| < \delta)|s + t| \leq \varepsilon. \ \rhd$$

(3) *Лемма Робинсона.* *Пусть* (a_n) *— внутренняя последовательность чисел и* $a_n \approx 0$ *для всех* $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$. *Тогда найдется* $N \approx +\infty$, *для которого* $a_n \approx 0$ *при любом* $n \leq N$.

$\lhd$ Применим алгоритм Нельсона к требуемому заключению

$$(\exists\, N \approx +\infty)(\forall\, n \leq N)\, a_n \approx 0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, N \in \mathbb{N})((\forall^{\mathrm{st}} m \in \mathbb{N})(N \geq m) \wedge (\forall\, n \in \mathbb{N})(n \leq N \rightarrow$$
$$\rightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)|a_n| < \varepsilon) \leftrightarrow (\exists\, N)(\forall^{\mathrm{st}} m)(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)$$
$$(\forall\, n)(N \geq m \wedge (n \leq N \rightarrow |a_n| < \varepsilon)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\{m_1, \dots, m_p\})(\forall^{\mathrm{st}}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\})(\exists\, N)(\forall\, k := 1, \dots, p)$$
$$(N \geq m_k \wedge n \leq N \rightarrow |a_n| < \varepsilon_k) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} m)(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(\exists\, N)\ (N \geq m \wedge (n \leq N \rightarrow |a_n| < \varepsilon)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} m)(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(m \in \mathbb{N} \wedge \varepsilon > 0 \rightarrow |a_m| < \varepsilon).$$

Теперь применим алгоритм Нельсона к условию рассматриваемого утверждения:

$$(\forall\, n \in {}^{\circ}\mathbb{N})(a_n \approx 0) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} n)(n \in \mathbb{N} \rightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)|a_n| < \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} n)(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon)(n \in \mathbb{N} \wedge \varepsilon > 0 \rightarrow |a_n| < \varepsilon).$$

Таким образом, посылка и заключение эквивалентны. $\rhd$

(4) *Принцип единственности.* *В условиях стандартности антуража каждый объект, определенный нестандартной теоремой существования и единственности, является стандартным.*

Иными словами, если $y, V \in \mathbf{V}^{\mathrm{St}}$ *и* $\varphi = \varphi(x, y)$ *— внешняя формула* IST, *то*

$$((\exists!\, \overline{x} \in V)\, \varphi(\overline{x}, y)) \rightarrow \mathrm{St}(\overline{x}).$$

$\lhd$ Используя алгоритм Нельсона, формулу φ можно преобразовать к виду

$$\varphi(x, y) := (\forall^{\mathrm{st}} u)(\exists^{\mathrm{st}} v)\psi(x, u, v, y),$$

где $\psi \in$ (ZFC).

В частности, по принципу конструирования

$$(\exists^{\mathrm{st}}\overline{v}\,(\cdot))(\forall^{\mathrm{st}}u)\,\psi(\overline{x},u,\overline{v}(u),y). \tag{1}$$

Помимо этого,

$$(\forall\,z)(\forall^{\mathrm{st}}u)(\exists^{\mathrm{st}}v)\,\psi(z,u,v,y)\to z=\overline{x}).$$

Применяя к последней формуле алгоритм Нельсона, выводим

$$(\forall^{\mathrm{st}}v\,(\cdot))(\exists^{\mathrm{st\,fin}}U)(\forall\,z)(((\forall\,u\in U)\psi(z,u,v(u),y))\to z=\overline{x}). \tag{2}$$

Обозначим $\overline{U}$ стандартное конечное множество, отвечающее в силу (2) функции $\overline{v}(\cdot)$, взятой в соответствии с (1).

Видно, что $(\forall\,u\in\overline{U})\psi(x,u,\overline{v}(u),y)$. Отсюда заключаем, что $(\exists\,z)(\forall\,u\in\overline{U})\psi(z,u,\overline{v}(u),y)$. По принципу переноса

$$(\exists^{\mathrm{st}}z)(\forall\,u\in\overline{U})\,\psi(z,u,v(u),y).$$

На основании (2) заключаем $z=\overline{x}$, т. е. $\mathrm{St}(\overline{x})$. $\triangleright$

3.3.18. В дальнейшем наряду с теорией IST Э. Нельсона нам понадобится некоторая ее разновидность — теория ограниченных (или доступных) множеств BST, предложенная В. Кановеем и М. Риикеном в [363].

Теория BST сохраняет алфавит и связанную с ним атрибутику IST. Отличия лежат в формулировке принципов нестандартной теории множеств. Принципы переноса и стандартизации IST также сохраняются в BST. Однако теория BST считает каждое внутреннее множество лежащим в некотором стандартном множестве и соответствующим образом ограничивает процесс идеализации:

(1) принцип ограниченности —

$$(\forall x)(\exists^{\mathrm{st}}X)(x\in X);$$

(2) принцип ограниченной идеализации —

$$(\forall\,x_1)(\forall\,x_2)\dots(\forall\,x_n)((\forall^{\mathrm{st\,fin}}z)(\exists\,x\in z_0)(\forall\,y\in z)$$
$$\varphi(x,y,x_1,\dots,x_n)\leftrightarrow(\exists\,x\in z_0)(\forall^{\mathrm{st}}y)\,\varphi(x,y,x_1,\dots,x_n)),$$

где $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ — произвольная внутренняя формула, а z_0 — какое-либо стандартное множество.

В. Кановей и М. Риикен доказали, что принцип ограниченной идеализации можно заменить на следующий

(2) принцип внутреннего насыщения —

$$(\forall\, x_1)(\forall\, x_2)\ldots(\forall\, x_n)((\forall^{\mathrm{st\,fin}} z \subset z_0)\,(\exists\, x)(\forall\, y \in z)\,\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y \in z_0)\,\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)),$$

где $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ — произвольная внутренняя формула, а z_0 — какое-либо стандартное множество.

Важнейшим обстоятельством является то, что класс *ограниченных* или *доступных* множеств, составленный элементами стандартных множеств в IST, служит моделью BST. Отсюда вытекает, что BST является консервативным расширением ZFC.

3.4. Теории внешних множеств

Основные установки нестандартного анализа имеют адекватное отображение в формальном аппарате теории внутренних множеств Нельсона. Теорема Поуэлла позволяет считать IST техникой исследования универсума фон Неймана. В то же время наличие внешних объектов полностью подрывает широко распространенное представление о том, что формализм Цермело — Френкеля доставляет достаточную оперативную свободу с точки зрения наивной теории множеств. Оставаясь в рамках IST, мы не в состоянии даже спросить, например: «А нельзя ли выделить такие числа, чтобы каждый элемент $\mathbb{R}$ однозначно записывался в виде некоторой их комбинации со стандартными коэффициентами — ведь $\mathbb{R}$ явно можно мыслить себе векторным пространством над ${}^{\circ}\mathbb{R}$?» Количество подобных недопустимых вопросов, имеющих бесспорное математическое содержание, столь велико, что потребность расширения рамок IST переходит в сферу жизненной необходимости.

Априорные запреты формулировать проблемы — это наложение произвольных ограничений на разум. Введение ad hoc догмата — «ясно выраженное запрещение думать» (по меткому выражению Л. Фейербаха) — путь, заведомо неприемлемый при поисках истины. Практическое решение задачи возвращения в «канторов рай» состоит, в частности, в нахождении формализма, позволяющего работать с внешними по отношению к универсуму фон Неймана множествами привычными математическими средствами. Мы ознакомимся сейчас с аксиоматическими подходами к изучению внешних множеств.

Первый вариант такого формализма принадлежит К. Хрбачеку, предложившему соответствующую теорию множеств EXT. Близкую разновидность — так называемую теорию NST — построил затем Т. Каваи. Упомянутые нестандартные теории множеств, содержательно говоря, показывают, что мир внешних множеств устроен с точки зрения математического прагматика-филистера столь же хорошо, как и универсум наивных множеств. Иначе говоря, в нем допустимы классические теоретико-множественные операции включая выделение подмножеств с помощью свойств (аксиомы свертывания) и полное упорядочение произвольных множеств (аксиома выбора). В то же время среди внешних множеств есть весь набор стандартных и нестандартных внутренних множеств, удовлетворяющих вариантам принципов переноса, идеализации и стандартизации, близким к их интуитивным формулировкам. Выражаясь строже, можно сказать, что внутренние множества включают в число внешних по определению.

С позиций реальных потребностей существующего (стандартного и нестандартного) математического анализа теории EXT и NST предоставляют практически одинаковые возможности, которых заведомо и с лихвой хватает для обоснованного использования употребительных аналитических конструкций. Необходимо, однако, внимательно и с должной критичностью проштудировать детали приводимых аксиоматик теории внешних множеств, чтобы избежать иллюзий, сопутствующих эйфории вседозволенности.

Так, стоит подчеркнуть, что мир внешних множеств не является универсумом фон Неймана (аксиома фундирования отсутствует и это обстоятельство существенно). Кроме того, точные формулировки принципов нестандартного анализа в EXT имеют технические отличия от их аналогов в IST. Поэтому EXT не является расширением теории Нельсона IST, хотя EXT служит консервативным расширением ZFC. Указанный пробел восполнил Т. Каваи. Его теория NST обогащает формальный аппарат IST и вместе с этим служит надежной техникой изучения ZFC наряду с IST и EXT.

3.4.1. Алфавит формальной теории EXT получается добавлением к алфавиту IST одного-единственного нового символа — символа одноместного предиката Int, выражающего свойство быть внутренним множеством. Иначе говоря, в рассмотрение допускаются тексты, содержащие записи вида $\mathrm{Int}(x)$, или, более развернуто, «x — внутреннее», или, наконец, «x — внутреннее множество». Интуитивно считают, что содержательной областью изменения переменных EXT является *универсум всех внешних множеств* $\mathbf{V}^{\mathrm{Ext}} := \{x : x = x\}$, в котором лежат как *мир стандартных множеств* $\mathbf{V}^{\mathrm{St}} := \{x \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}} : \mathrm{St}(x)\}$, так и расширяющий его *мир внутренних множеств* $\mathbf{V}^{\mathrm{Int}} := \{x \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}} : \mathrm{Int}(x)\}$.

3.4.2. Соглашения в EXT аналогичны принятым в ZFC и IST. В частности, конечно же, мы будем и дальше использовать «классификаторы» — фигурные скобки — в EXT (см. 3.3.3) и привычные знаки для обозначения простейших действий над классами внешних множеств. Следуя прежним образцам, для формулы φ из EXT (символически $\varphi \in (\mathrm{EXT})$) условимся писать:

$$(\forall^{\mathrm{st}} x)\, \varphi := (\forall\, x)(\mathrm{St}(x) \to \varphi) := (\forall\, x \in \mathbf{V}^{\mathrm{St}})\, \varphi,$$
$$(\exists^{\mathrm{Int}}\, x)\, \varphi := (\exists\, x)(\mathrm{Int}(x) \wedge \varphi) := (\exists\, x \in \mathbf{V}^{\mathrm{Int}})\, \varphi.$$

Подобные правила, понятные из контекста, в дальнейшем используются без особых разъяснений. Помимо этого, нам потребуется специальное новое понятие и соответствующее обозначение. Мы скажем, что внешнее множество A имеет *стандартный размер* (символически $A \in V^{\mathrm{size}}$), если существуют стандартное множество a и внешняя функция f такие, что $(\forall\, X)(X \in A \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} x \in a)\ X = f(x))$.

3.4.3. Пусть $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ — некоторая формула EXT, являющаяся формулой ZFC (т. е. не содержащая символов St и Int). Заменим каждый квантор Q в записи φ на Q^{st}. Полученную формулу обозначают φ^{St} и называют *стандартизацией* φ или *релятивизацией* φ на $\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$. Аналогично, заменяя каждый квантор Q на Q^{Int}, получаем формулу φ^{Int}, называемую *интернализацией* φ или *релятивизацией* φ на $\mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$. Подчеркнем, что со свободными переменными в φ при этом ничего не происходит. Указанное правило распространяют и на сокращения. Например, для внешних множеств A и B пишем:

$$A \subset {}^{\mathrm{St}}B := (\forall^{\mathrm{st}} x)(x \in A \to x \in B) :=$$
$$:= ((\forall\, x)(x \in A \to x \in B))^{\mathrm{St}} := (A \subset B)^{\mathrm{St}};$$
$$A \in {}^{\mathrm{Int}}B := (A \in B)^{\mathrm{Int}} := A \in B := A \in {}^{\mathrm{St}}B := (A \in B)^{\mathrm{St}}.$$

3.4.4. Специальные аксиомы EXT делятся на три группы. Первую составляют *правила образования внешних множеств*, вторую — *аксиомы связи миров* множеств $\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$, $\mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$ и $\mathbf{V}^{\mathrm{Ext}}$ и, наконец, третью группу образуют *принципы переноса, идеализации и стандартизации.*

3.4.5. В EXT выполнены законы *теории множеств Цермело* (теории Z), т. е. приняты следующие аксиомы конструирования внешних множеств:

(1) аксиома экстенсиональности —

$$(\forall\, A)(\forall\, B)(A \subset B \wedge B \subset A) \leftrightarrow A = B;$$

(2) аксиома существования пары —

$$(\forall\, A)(\forall\, B)\{A, B\} \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}};$$

(3) аксиома объединения —

$$(\forall\, A) \bigcup A \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}};$$

(4) аксиома множества подмножеств —

$$(\forall\, A)\mathscr{P}(A) \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}};$$

(5) схема аксиом свертывания —

$$(\forall\, A)(\forall\, X_1)\ldots(\forall\, X_n)\{X \in A : \varphi(X, X_1, \ldots, X_n)\} \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}}$$

для произвольной формулы $\varphi \in$ (EXT);

(6) аксиома полного упорядочения — *каждое внешнее множество может быть вполне упорядочено.*

Последнее свойство — *теорема Цермело* — обеспечивает, как известно (ср. (3.2.10)), аксиому выбора в обычной мультипликативной форме или в форме леммы Куратовского — Цорна. Отметим здесь же, что в число аксиом Z обычно включается аксиома бесконечности, которая в EXT появится ниже.

3.4.6. Вторая группа аксиом EXT содержит такие утверждения:

(1) принцип моделирования — *мир внутренних множеств* $\mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$ *— это универсум фон Неймана*, т. е. для каждой аксиомы φ теории Цермело — Френкеля интернализация φ^{Int} — аксиома EXT;

(2) аксиома транзитивности —

$$(\forall\, x \in \mathbf{V}^{\mathrm{Int}})(x \subset \mathbf{V}^{\mathrm{Int}}),$$

т. е. внутренние множества составлены только из внутренних элементов;

(3) аксиома вложения —

$$\mathbf{V}^{\mathrm{St}} \subset \mathbf{V}^{\mathrm{Int}},$$

т. е. стандартные множества являются внутренними.

3.4.7. Третью группу аксиом EXT составляют следующие предложения:

(1) принцип переноса —

$$(\forall^{\mathrm{st}} x_1) \ldots (\forall^{\mathrm{st}} x_n)(\varphi^{\mathrm{St}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{Int}}(x_1, \ldots, x_n))$$

для каждой формулы $\varphi \in$ (ZFC);

(2) принцип идеализации —

$$\begin{aligned}(\forall^{\mathrm{Int}}\, x_1) \ldots (\forall^{\mathrm{Int}} x_n)(\forall\, A \in V^{\mathrm{size}})(((\forall^{\mathrm{fin}} z)(z \subset A) \to \\ \to (\exists^{\mathrm{Int}}\, x)(\forall\, y \in z)\, \varphi^{\mathrm{Int}}(x, y, x_1, \ldots, x_n)) \to \\ \to (\exists^{\mathrm{Int}}\, x)(\forall^{\mathrm{Int}}\, y \in A)\, \varphi^{\mathrm{Int}}(x, y, x_1, \ldots, x_n))\end{aligned}$$

для произвольной $\varphi \in$ (ZFC);

(3) принцип стандартизации —

$$(\forall\, A)(\exists^{\mathrm{st}} a)(\forall^{\mathrm{st}} x)(x \in A \leftrightarrow x \in a)$$

— для любого внешнего множества A существует его стандартизация $^*A$.

3.4.8. Простейшим достойным упоминания полезным следствием приведенных аксиом является *абсолютность ограниченных формул теории* ZFC. Точнее говоря, для $\varphi \in (\Sigma_0)$ будет

$$(\forall^{\mathrm{Int}}\, x_1)\dots(\forall^{\mathrm{Int}}\, x_n)\, \varphi(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{Int}}(x_1,\dots,x_n),$$
$$(\forall^{\mathrm{st}} x_1)\dots(\forall^{\mathrm{st}} x_n)\, \varphi^{\mathrm{St}}(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \varphi^{\mathrm{Int}}(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1,\dots,x_n).$$

Значит, любое «ограниченное» свойство стандартных множеств можно без опаски выражать как в терминах внешних, так и в терминах внутренних или же стандартных элементов. Например, $x \subset y \leftrightarrow x \subset {}^{\mathrm{St}}y \leftrightarrow x \subset {}^{\mathrm{Int}}y$ для стандартных множеств x и y.

3.4.9. *Теорема Хрбачека.* *Теория* EXT *является консервативным расширением* ZFC, *т. е. для каждой* $\varphi \in$ (ZFC) *верно*

$$(\varphi - \textit{теорема}\ \mathrm{ZFC}) \leftrightarrow (\varphi^{\mathrm{Int}} - \textit{теорема}\ \mathrm{EXT}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\varphi^{\mathrm{St}} - \textit{теорема}\ \mathrm{EXT}).$$

$\lhd$ Доказательство этой теоремы приведено в [341]. $\rhd$

3.4.10. При осмысливании изложенной выше аксиоматики полезно отдавать себе отчет в том, что теория EXT не служит расширением теории IST.

Иными словами, мир внутренних множеств $\mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$ не является моделью теории внутренних множеств Нельсона, поскольку принципы идеализации и стандартизации в этих теориях имеют различные формулировки.

В универсуме $\mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$ стандартизация допускается при существенно менее ограничительных предположениях, чем в IST. Так, для любой $\varphi \in$ (IST) и произвольного $A \in \mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$ можно организовать ${}^*\{x \in A : \varphi(x)\}$, ибо $\{x \in A : \varphi(x)\}$ — внешнее подмножество A. В IST при этом, вообще говоря, нужно дополнительно требовать стандартность A — ведь стандартизовать множество, содержащее все стандартные элементы, в IST не удается.

В EXT, в свою очередь, совокупность всех стандартных элементов $\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$ не попадает вообще ни в одно внешнее (и тем более внутреннее) множество.

Действительно, справедливо следующее утверждение.

3.4.11. *Не существует такого внешнего множества — элемента $\mathbf{V}^{\mathrm{Ext}}$, в число элементов которого попадают все стандартные множества.*

$\lhd$ Предположим противное, т. е. пусть для некоторого $X \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}}$ верно, что $\mathbf{V}^{\mathrm{St}} \subset X$. По аксиоме свертывания 3.4.5(5) для формулы $\varphi(x) := \mathrm{St}(x)$ заключаем, что $\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$ — это внешнее множество, т. е. $(\exists\, Y)(\forall\, Z)(Z \in Y \leftrightarrow \mathrm{St}(Z))$. Рассмотрим стандартизацию ${}^*\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$. Тогда ${}^*\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$ оказывается стандартным конечным множеством, содержащим каждое стандартное множество. Последнее, очевидно, невозможно. $\rhd$

3.4.12. Приведенное предложение 3.4.11 показывает, что принцип идеализации в EXT («релятивизированный» на $\mathbf{V}^{\mathrm{Int}}$) не только по форме, но и по существу отличается от своего аналога в IST. В то же время указанные отличия не следует абсолютизировать. Вложить точный смысл в сделанное заявление помогают следующие факты.

3.4.13. *Имеют место утверждения:*

(1) *внешние натуральные числа совпадают со стандартными натуральными числами;*

(2) *конечное внешнее множество будет стандартным в том и только в том случае, если оно состоит исключительно из стандартных элементов;*

(3) *для произвольного внешнего множества A его стандартное ядро ${}^\circ A := \{a \in A : \mathrm{St}(a)\}$ — это множество стандартного размера;*

(4) *каждое бесконечное внутреннее множество содержит нестандартный элемент.*

$\lhd$ (1): В силу принципа индукции по стандартным натуральным числам (который, очевидно, верен в EXT — ср. 2.2.2 (1)) для множества $\mathbb{N}^{\mathrm{Ext}}$ внешних натуральных чисел имеем $\mathbb{N}^{\mathrm{Ext}} \supset {}^\circ\mathbb{N}$. Кроме того, ясно, что ${}^*\varnothing = \varnothing$ и ${}^*1 = {}^*\{\varnothing\} = \{\varnothing\} = 1$. Итак, в силу принципа индукции по внешним натуральным числам (обычная теорема Z) $\mathbb{N}^{\mathrm{Ext}} \subset {}^\circ\mathbb{N}$. Окончательно ${}^\circ\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathrm{Ext}}$.

(2): Стандартное множество — внутреннее. Значит, с учетом 3.4.6 (2) можно прибегнуть к аргументации доказательства 2.2.2 (3). Конечное множество, составленное из стандартных элементов, стандартно по 2.2.2 (2).

(3): Пусть $^*A$ — стандартизация A. Положим $f(a) := a$ для $a \in {}^\circ A$. Очевидно, $(\forall X)(X \in {}^\circ A \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} x \in {}^*A)\, f(x) = X)$.

(4): Обозначим A рассматриваемое внутреннее множество. В силу (3) $^\circ A$ имеет стандартный размер. Итак, мы можем применить принцип идеализации при $\varphi(x, y) := y \neq x \wedge x \in A$. Для каждого конечного $z \subset {}^\circ A$ безусловно $(\exists\, x \in A)(\forall\, y \in z)\, x \neq y$, ибо множество A бесконечно. Окончательно $(\exists\, x \in A)(\forall\, y \in {}^\circ A)\, x \neq y$. ▷

3.4.14. В связи с 3.4.13 и 3.4.9 удобно выделить вариант теории внутренних множеств INT, являющийся консервативным расширением ZFC и такой, что EXT, в свою очередь, — расширение INT. Отличие INT от теории IST в принятии принципов идеализации и стандартизации в следующих формах:

(1) $(\forall\, A)(\forall\, x_1)\dots(\forall\, x_n)((\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)(z \subset A)(\exists\, x)(\forall\, y \in z)$
$\varphi(x, y, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow (\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}} y \in A)\, \varphi(x, y, x_1, \dots, x_n)$
для всякой $\varphi \in$ (ZFC);

(2) $(\forall\, A)(\exists^{\mathrm{st}}\, {}^*A)(\forall^{\mathrm{st}} x)(x \in A \leftrightarrow x \in {}^*A \wedge \varphi(x))$
при произвольной $\varphi \in$ (INT).

Полезно отметить, что в INT в своих существенных частях действует алгоритм Нельсона.

3.4.15. Перейдем теперь к описанию теории NST в варианте, наиболее близком к EXT и IST (фактически Т. Каваи построил несколько отличную систему, позволяющую рассматривать классы теории фон Неймана — Гёделя — Бернайса в качестве внешних множеств).

3.4.16. Алфавит и соглашения формальной теории NST совпадают с алфавитом и соглашениями теории EXT. Более того, в NST принимаются все аксиомы конструирования внешних множеств, все аксиомы связи миров множеств и принцип переноса теории EXT. Отличия NST от EXT лежат в способах формулирования принципов стандартизации и идеализации и в следующем дополнительном постулате.

3.4.17. *Аксиома приемлемости* — $\mathbf{V}^{\mathrm{St}} \in \mathbf{V}^{\mathrm{Ext}}$, *т. е. мир стандартных множеств теории Каваи — это внешнее множество.*

В связи со сформулированной аксиомой внешнее множество A в NST называют *множеством приемлемого размера* и пишут $A \in \mathbf{V}^{\mathrm{a-size}}$, если найдется внешняя функция f, отображающая $\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$ на A.

Подчеркнем, что $\mathbf{V}^{\mathrm{St}}$ имеет приемлемый размер. Отметим здесь же, что в дальнейшем запись a-$\mathrm{fin}(A)$ означает, что имеется взаимнооднозначное внешнее отображение A на некоторое стандартное конечное множество.

3.4.18. ***Принцип стандартизации*** *в* NST *гласит:*

$$(\forall\, A)((\exists^{\mathrm{st}} X)\, A \subset X \to (\exists^{\mathrm{st}}\, {}^*\!A)(\forall^{\mathrm{st}} x)(x \in A \leftrightarrow x \in {}^*\!A)).$$

Иными словами, в NST можно стандартизовать только внешние подмножества стандартных множеств, а не произвольные внешние множества, как в EXT.

3.4.19. ***Принцип идеализации*** *в* NST *состоит в следующем:*

$$\begin{aligned}(\forall^{\mathrm{Int}}\, x_1) \dots (\forall^{\mathrm{Int}}\, x_n)(\forall\, A \in \mathbf{V}^{\mathrm{a-size}})(((\forall z)\, z \subset A \wedge a = \mathrm{fin}(z) \to \\ \to (\exists^{\mathrm{Int}}\, x)(\forall\, y \in z)\, \varphi^{\mathrm{Int}}(x, y, x_1, \dots, x_n)) \to \\ \to (\exists^{\mathrm{Int}}\, x)(\forall^{\mathrm{Int}}\, y \in A)\, \varphi^{\mathrm{Int}}(x, y, x_1, \dots, x_n))\end{aligned}$$

для произвольной формулы $\varphi \in$ (ZFC).

3.4.20. ***Теорема Каваи.*** *Теория* NST *является консервативным расширением* ZFC.

$\lhd$ Доказательство повторяет схему рассуждений теоремы Поуэлла с привлечением 3.2.20 (см. [370]). $\rhd$

3.4.21. Вновь обратим внимание на то, что мир внутренних множеств V^{Int} в универсуме NST с релятивизированными принципами стандартизации, идеализации и переноса служит моделью IST. Иными словами, технические средства, представляемые NST для работы с внешними множествами, возникающими в IST, можно без опаски использовать для получения утверждений «стандартной» математики.

Отметим здесь же, что доказательство теоремы Каваи, так же как и теорем Хрбачека и Поуэлла, в существенном опирается на применение подходящих аналогов локальной теоремы Мальцева или, говоря точнее, на предъявленную выше технику ультрапроизведений и ультрапределов. Более детальное изложение названного аппарата выходит за рамки нашего изложения.

3.4.22. Проявляя известную вольность, обозначим $\mathbf{V}^E$ универсум внешних множеств (не уточняя, о какой из теорий NST или EXT идет речь). Аналогично будем использовать знак $\mathbf{V}^I$ (соответственно $\mathbf{V}^S$) для указаний на мир внутренних (соответственно стандартных) множеств. Повторяя схему построения универсума фон Неймана, т. е. последовательно итерируя операции объединения и перехода к совокупности всех внешних подмножеств данного множества, из пустого множества можно вырастить мир $\mathbf{V}^C$ — *универсум «классических множеств»*. Подробнее говоря, полагают

$$V_\beta^C := \{x : (\exists^{\mathrm{st}} \alpha \in \beta)(x \in \mathscr{P}^{\mathrm{Ext}}(V_\alpha^C))\},$$

$$\mathbf{V}^C := \bigcup_{\beta \in \mathrm{On}^{\mathrm{St}}} V_\beta^C,$$

где $\mathrm{On}^{\mathrm{St}}$ — класс всех стандартных ординалов. Таким образом, пустое множество является «классическим» и каждое «классическое» множество составлено только из «классических» элементов.

3.4.23. С помощью рекурсии — прогулки по этажам универсума «классических» множеств — определяется робинсоновская стандартизация или $*$-изображение. Стандартное множество $*A$ называется *робинсоновской стандартизацией* или $*$-*изображением* «классического» множества A в том и только в том случае, если каждый стандартный элемент $*A$ является $*$-изображением некоторого элемента A. Символически: $*\varnothing := \varnothing, \quad *A := {}^*\{*a : a \in A\}$. Допуская вольность в обозначениях и следуя одной из традиций, мы часто считаем, что символы $*A$ и ${}^*A$ обозначают одно и тоже множество.

Отметим, что в рамках EXT законность применения обычной стандартизации не вызывает сомнений. В теории NST допустимость использования этой операции в определении робинсоновской стандартизации следует из способа построения $\mathbf{V}^C$. Аналогичное рассуждение (ср. 3.2.12) показывает, что $*$-изображение отождествляет и притом взаимнооднозначным образом миры $\mathbf{V}^C$ и $\mathbf{V}^S$. Робинсоновская стандартизация, сверх того, обеспечивает справедливость *принципа переноса*:

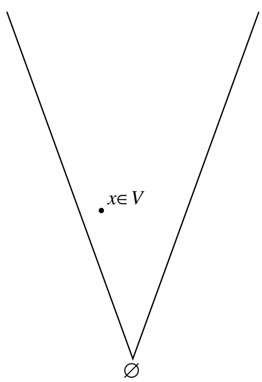
$$(\forall\, A_1 \in \mathbf{V}^C) \dots (\forall\, A_n \in \mathbf{V}^C)(\varphi^C(A_1, \dots, A_n) \leftrightarrow \varphi^S(*A_1, \dots, *A_n))$$

для произвольной формулы φ теории Цермело — Френкеля (как обычно, φ^C и φ^S — релятивизации φ на $\mathbf{V}^C$ и $\mathbf{V}^S$ соответственно).

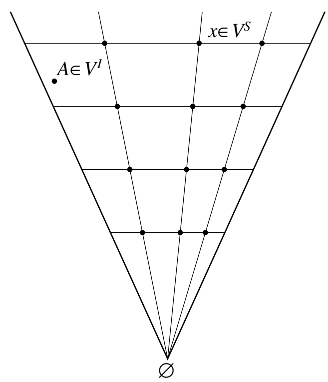
Биективные отображение часто рассматривают как отождествления отождествление объектов. В этой связи, допуская вольность, при использовании $*$-изображения вместо $*A$ пишут ${}^*A$. Мы также будет с удовольствием использовать эту порочную практику в дальнейшем изложении.

3.5. Установки нестандартного анализа

Проведенные в предыдущих параграфах рассмотрения обогатили и расширили исходные наивные представления о множестве, используемые в нестандартном анализе. От обычного универсума фон Неймана $\mathbf{V}$ мы перешли к миру $\mathbf{V}^I$ теории внутренних множеств с отмеченными в нем реперными точками — стандартными множествами, составляющими класс $\mathbf{V}^S$ (рис. 4).



Универсум фон Неймана



Универсум внутренних множеств

Рис. 4

Дальнейший анализ показал, что $\mathbf{V}^I$ лежит в новом классе — в универсуме $\mathbf{V}^E$ внешних множеств (составляющих мир Цермело). В $\mathbf{V}^E$ выделен универсум «классических» множеств $\mathbf{V}^C$ — еще одна реализация мира стандартных множеств $\mathbf{V}^S$. Точнее говоря, имеется робинсоновское $*$-изображение, поэлементно отождествляющее $\mathbf{V}^C$ и $\mathbf{V}^S$. При этом в силу принципов переноса $\mathbf{V}^C$, $\mathbf{V}^S$ и $\mathbf{V}^I$ можно рассматривать как «ипостаси» универсума фон Неймана $\mathbf{V}$ (рис. 5).

3.5.1. Изложенная картина расположения и другие известные взаимосвязи миров $\mathbf{V}^E$, $\mathbf{V}^I$, $\mathbf{V}^S$ и $\mathbf{V}^C$ приводят к выделению трех общих теоретико-множественных установок нестандартного анализа.

В этих установках — их называют классической, неоклассической и радикальной — фиксируются представления о предмете и средствах исследования. Принятие той или иной концепции определяет, в частности, способ изложения математических результатов, полученных с помощью нестандартных методов. В этой связи знакомство с упомянутыми установками нужно считать совершенно необходимым.

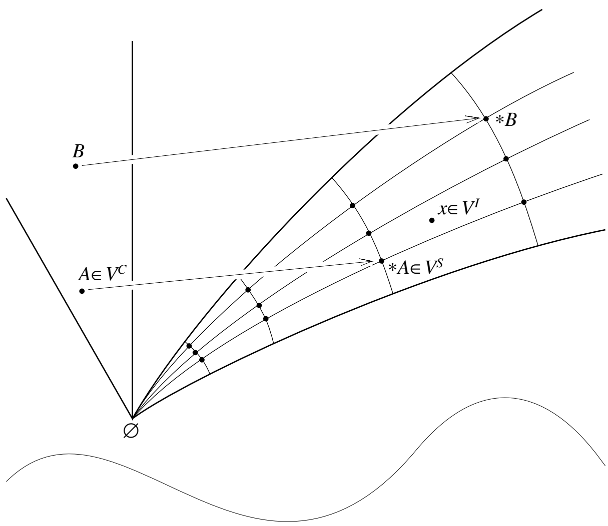


Рис. 5

3.5.2. Классическая установка нестандартного анализа отвечает методике его основоположника А. Робинсона, и в настоящее время соответствующий формализм наиболее распространен. При этой установке *главным объектом изучения объявляется мир классической математики, отождествляемый с универсумом «классических» множеств* $\mathbf{V}^C$. Последний считают «стандартным универсумом» (на практике чаще всего работают с достаточно большим фрагментом, частью $\mathbf{V}^C$, содержащей необходимые для исследования объекты — с так называемой «*суперструктурой*»). В качестве техники исследования исходного — стандартного — универсума предъявляется «нестандартный универсум» $\mathbf{V}^I$, составленный из внутренних множеств, или его подходящая часть и $*$-изображение, подклеивающее обычные стандартные объекты к их образам в «нестандартном универсуме».

Полезно подметить своеобразное использование слов «стандартный» и «нестандартный» при излагаемом подходе. Робинсоновские стандартизации — элементы универсума $\mathbf{V}^S$ — воспринимаются как «нестандартные» объекты. «Стандартное» множество — это по понятию произвольный представитель мира «классических» множеств $\mathbf{V}^C$ — член «стандартного универсума». Указывается, что $*$-изображение, как правило, добавляет новые «идеальные» элементы в множество. Здесь подразумевают, что ${}^*A = \{{}^*a : a \in A\}$ только в том случае, если «классическое» — «стандартное» — множество A конечно. Например, помещая $\mathbb{R}$ в $\mathbf{V}^C$ и в соответствии со сказанным изучая его $*$-изображение ${}^*\mathbb{R}$, мы видим, что ${}^*\mathbb{R}$ играет роль поля вещественных чисел в смысле универсума внутренних множеств — «во внутреннем смысле нестандартного универсума». В то же самое время ${}^*\mathbb{R}$ не сводится к набору своих стандартных элементов ${}^\circ({}^*\mathbb{R}) = \{{}^*t : t \in \mathbb{R}\}$. Учитывая, что ${}^*\mathbb{R}$ есть «внутреннее множество вещественных чисел $\mathbb{R}$», а ${}^\circ({}^*\mathbb{R})$ — его стандартное ядро, допускают известную вольность, полагая ${}^\circ\mathbb{R} := \{{}^*t : t \in \mathbb{R}\}$ и даже $\mathbb{R} := \{{}^*t : t \in \mathbb{R}\}$.

Образно наличие «новых» элементов в ${}^*\mathbb{R}$ выражают символом ${}^*\mathbb{R} - \mathbb{R} \neq \varnothing$ и говорят о построении системы «гипердействительных» чисел ${}^*\mathbb{R}$, расширяющей обычное поле вещественных чисел $\mathbb{R}$. Аналогичную политику проводят при рассмотрении произвольного классического множества X. Именно, считают, что $X = \{{}^*x : x \in X\}$ и тем самым $X \subset {}^*X$. Если X бесконечно, то ${}^*X - X \neq \varnothing$. Иными словами, все бесконечные множества при помощи робинсоновской стандартизации насыщаются новыми элементами. Более того, «идеальных» объектов добавляется значительное количество — ведь в $\mathbf{V}^I$ действует принцип идеализации, который в излагаемой установке часто называют *техникой направленности* или *насыщением*.

3.5.3. Пусть U — произвольное соответствие, а A и B — множества. Говорят, что U *направлено из* A *в* B или, короче, просто направлено, если для каждого непустого конечного подмножества A_0 в A найдется элемент $b \in B$ такой, что $(a_0, b) \in U$ при всех $a_0 \in A_0$.

Если в определении направленности рассматривать подмножества A_0, мощности не более заданного кардинала κ, то возникающее определение приводит к определению *κ-направленности*.

3.5.4. *Принцип направленности в слабой форме.* *Для любого соответствия U, направленного из A в B, имеется элемент $b \in {}^*B$, удовлетворяющий соотношению $({}^*a, b) \in {}^*U$ при каждом $a \in A$.*

3.5.5. Нетрудно видеть, что, в свою очередь, справедливость принципа направленности обеспечивает нам естественный эквивалент принципа идеализации в ослабленной форме — «релятивизированный на стандартные множества». В этой связи в приложениях выделяют консервативные расширения классической теории множеств, использующие как уже отмеченную возможность идеализации в слабой форме, так и принятие формулировок, обеспечивающих дополнительные возможности введения нестандартных элементов и более адекватных содержанию принципа идеализации в полных его выражениях.

3.5.6. *Принцип направленности в сильной форме.* *Пусть соответствие U таково, что ${}^*U$ направлено из A в ${}^*B$. Тогда имеется элемент $b \in {}^*B$, для которого при всех $a \in A$ будет $({}^*a, b) \in {}^*U$.*

Напомним, что семейство $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ называют *центрированным*, если для каждого непустого конечного подмножества Γ_0 выполнено: $\bigcap_{\gamma\in\Gamma_0} A_\gamma \neq \varnothing$.

3.5.7. *Принцип насыщения.* *Справедливы утверждения:*

(1) *Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — центрированное семейство внутренних множеств. Тогда $\bigcap_{n\in{}^*\mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$.*

(2) *Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающее семейство внутренних множеств и $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Тогда для некоторого $N \in {}^*\mathbb{N}$ будет $A = A_N$.*

Можно доказать, используя свободу в выборе ультрафильтров при построении ультрапределов (см. 3.2.17), что имеются расширения, в которых 3.5.7 и аналогичные принципы выполняются для произвольных центрированных семейств с множеством индексов Γ мощности не выше κ. Работая в таких обстоятельствах, принято говорить о *κ-насыщенности*. В этой терминологии 3.5.7 гарантирует ω_0-насыщенность. В приложениях нередко используют и ω_1-насыщенность.

3.5.8. Полезно помнить, что в «расширенном», «нестандартном» мире — в универсуме внутренних множеств $\mathbf{V}^I$ — действует принцип переноса, т. е. с учетом свойств робинсоновской стандартизации $(\forall\, x_1 \in \mathbf{V}^C)\ldots(\forall\, x_n \in \mathbf{V}^C)(\varphi^C(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \varphi^I({}^*x_1,\ldots,{}^*x_n))$ для каждой формулы φ теории множеств Цермело — Френкеля. Напомним, что такую форму принцип переноса именуют *принципом Лейбница*.

3.5.9. При работе с «нестандартным универсумом» иногда специально выделяют «*технику внутренних множеств*». Имеется в виду способ доказательства, основанный на том, что внешние множества, заданные «теоретико-множественным способом», — внутренние. Вот одна из возможных форм применения этой техники.

3.5.10. *Пусть A — бесконечное множество. Для любого внутреннего свойства φ не верно, что $\{x : \varphi^I(x)\} = {}^*A - A$.*

$\lhd$ Допустим противное. Тогда класс $\{x : \varphi^I(x)\}$ — это внутреннее множество ${}^*A$. Стало быть, A внутреннее. Но для бесконечного A внешнее множество ${}^*A - A$ не является внутренним. $\rhd$

В приложениях полезны и многие другие несложные формы принципов нестандартного анализа.

3.5.11. *Имеют место утверждения:*

(1) **Принцип продолжения**. *Произвольная последовательность $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ внутренних множеств A_n продолжается до внутренней последовательности $(A_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$;*

(2) **Принцип переполненности**. *Если множество A внутреннее и $\mathbb{N} \subset A$, то A содержит некоторое бесконечно большое число, т. е. элемент множества ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$;*

(3) **Принцип незаполненности**. *Если множество A внутреннее и каждое бесконечно большое $N \in {}^*\mathbb{N}$ принадлежит A, то A содержит некоторое стандартное $n \in \mathbb{N}$;*

(4) **Принцип доступности**. *Если внутреннее множество $B \subset \mathbb{R}$ состоит только из доступных элементов, то существует стандартное $t \in \mathbb{R}$, такое, что $B \subset [-t, t]$;*

(5) **Принцип перманентности**. *Если внутреннее множество B содержит все положительные доступные числа, то оно содержит и интервал $[0, \Omega]$ для некоторого бесконечно большого Ω;*

(5) Принцип Коши. *Если внутреннее множество B содержит все бесконечно малые числа, то оно содержит и интервал $[-a, a]$ для некоторого стандартного $a \in \mathbb{R}$;*

(6) Принцип Робинсона. *Если внутреннее множество B состоит только из бесконечно малых чисел, то B содержится в интервале $[-\varepsilon, \varepsilon]$, где ε — бесконечно малое число.*

3.5.12. Подводя итоги, можно сказать, что при классической установке работают с двумя универсумами — стандартным и нестандартным. Имеются формальные возможности связывать свойства стандартных и нестандартных объектов с помощью процедуры «навешивания звездочек» — с помощью $*$-изображения. При этом предоставлено право свободно переносить утверждения об объектах одного мира в другой — действует принцип Лейбница. Нестандартный мир богат идеальными элементами — в нем актуально осуществимы всевозможные трансфинитные конструкции, ибо справедлив принцип направленности. Множества, выпадающие за пределы нестандартного универсума, называют внешними (здесь проявляется особенность принимаемой терминологии: внутренние множества при излагаемом подходе внешними не являются. Полезный прием исследования составляет техника внутренних множеств. Главное достоинство классической установки — это наличие $*$-изображения, которое позволяет применять аппарат нестандартного анализа к самым произвольным обычным множествам. Например, можно утверждать, что функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна в том и только в том случае, если ${}^*f : [a, b] \to {}^*\mathbb{R}$ микронепрерывна, т. е. если ${}^*f$ не теряет бесконечную близость гипердействительных чисел. Основное затруднение в усвоении таких представлений связано с необходимостью вообразить колоссальное количество новых идеальных объектов, присоединяемых к обычным множествам. Заметные сложности вызывает естественное желание работать (по крайней мере, на первых порах) с двумя наборами переменных, относящимися соответственно к стандартному и нестандартному универсумам. (При построении интернализации φ^I формулы φ мы фактически предполагаем такую процедуру.) Словом, *двуязычность* и *робинсоновская стандартизация — неотъемлемые атрибуты классической установки* — определяют все ее особенности, преимущества и дефекты присущего ей аппарата.

3.5.13. Неоклассическая установка нестандартного анализа отвечает методике, предложенной Э. Нельсоном. При этой установке *главным объектом изучения объявляется мир математики, рассматриваемый как универсум* $\mathbf{V}^I$, *лежащий в среде внешних множеств — элементов* $\mathbf{V}^E$. «Классические» множества отдельно к анализу не привлекаются. Стандартные и нестандартные элементы указываются в обычных объектах математики, составляющих $\mathbf{V}^I$. Так, в качестве поля вещественных чисел фигурирует $\mathbb{R}$ из мира $\mathbf{V}^I$, совпадающее, разумеется, с полем ${}^*\mathbb{R}$ гипердействительных чисел — «идеальным» объектом классической установки. Позиции, освещенные в гл. 2, отвечают указанной неоклассической установке. Связанные с ней преимущества определяются возможностью изучать уже хорошо знакомые множества и отыскивать новое в их устройстве с помощью дополнительных языковых средств. Как отмечает Э. Нельсон, «подлинно новыми в нестандартном анализе являются не теоремы или доказательства, а понятия — внешние предикаты...» [429, с. 134]. Недостатки последовательно проводимой неоклассической установки вызваны необходимостью неявного переноса определений и свойств со стандартных объектов на внутренние. С этим обстоятельством мы уже сталкивались.

3.5.14. Радикальная установка нестандартного анализа состоит в том, что *предметом изучения математики объявляется универсум внешних множеств* во всей полноте и сложности его собственного устройства. Классические и неоклассические представления о нестандартном анализе — как о технике изучения математики (основанной на формализме Цермело — Френкеля) при радикальном подходе объявляются «узкими», «стыдливыми» и отметаются. С первого взгляда описанный подход воспринимается в качестве явно несерьезного и крайнего. Необходимо, по размышлению, отвести возникающие представления об экстремизме радикальной установки нестандартного анализа. Этот «экстремизм» — иллюзорный, кажущийся. Широко распространенное воззрение на математику как на науку о формах и отношениях, взятых в отвлечении от их содержания, и даже существенно менее обязывающая классическая теоретико-множественная установка, восходящая к Г. Кантору, безусловно охватывает «крайние» мысли о предмете нестандартного анализа. Следовательно, наиболее «смелые» взгляды на множества, возникшие в итоге довольно кропотливого исследования, в конечном счете вошли составной частью в исходную посылку, обогатив ее новым содержанием. Ведь начальным пунктом для нас служило скромное положение о том, что нестандартный анализ оперирует в точности теми же множествами, как и вся математика (см. 2.1.3).

3.6. Теория фон Неймана — Гёделя — Бернайса

Как уже отмечалось в 3.2.5, схема аксиом подстановки ZF_4^{φ} охватывает бесконечное число аксиом из-за произвола в выборе формулы φ. Однако можно попытаться ввести новые неопределяемые примитивные объекты, задаваемые формулами φ из ZF_4^{φ}. Тогда множество утверждений, содержащихся в схеме ZF_4^{φ}, можно высказать в виде одной аксиомы о таких объектах. При этом потребуются аксиомы, из которых вытекало бы существование объекта, соответствующего формуле. А поскольку все формулы строятся по единой процедуре за конечное число шагов, то не исключена возможность обойтись конечным числом аксиом. Это основное соображение, идущее от фон Неймана, и положено в аксиоматику теории множеств, развитой Гёделем и Бернайсом и обозначаемой NGB. Первоначальным неопределяемым объектом теории NGB является класс. Класс, являющийся элементом какого-либо класса, называют *множеством*. Прочие классы именуют *собственными*. Объективизация классов определяет коренное отличие NGB от ZFC, в метаязыке которой «класс» и «свойство» воспринимаются как синонимы. При изложении аксиоматической теории NGB пользуются, как правило, одной из двух различных модификаций языка ZFC. Первая из них состоит в добавлении к языку ZFC нового одноместного предикатного символа M. Содержательно $M(X)$ означает, что X есть множество. Вторая модификация использует два разных типа переменных для множеств и классов. Стоит подчеркнуть, что указанные приемы не являются обязательными для описания NGB, а используются лишь из соображений удобства.

3.6.1. Система NGB — теория первого порядка с равенством. Строго говоря, язык NGB ничем не отличается от языка ZFC. Однако в качестве переменных принято употреблять прописные латинские буквы X, Y, Z, $\ldots$ (с индексами). Строчные же латинские буквы оставляем для argo, возникающего в результате введения сокращающих символов, отсутствующих в языке NGB.

Пусть $M(X)$ служит сокращением для формулы $(\exists\, Y)\ (X \in Y)$ (читается «X есть множество»). Введем строчные латинские буквы $x,\ y,\ z,\ \ldots$ (с индексами) для переменных, ограниченных множествами. Точнее, формулы $(\forall\, x)\, \varphi(x)$ и $(\exists\, x)\, \varphi(x)$ являются сокращениями для формул $(\forall\, X)(M(X) \to \varphi(X))$ и $(\exists\, X)(M(X) \wedge \varphi(X))$ соответственно. Содержательно эти формулы означают: «для любого множества верно φ» и «существует множество, для которого верно φ». При использовании указанных сокращений переменная X не должна входить в формулу φ, а также в те формулы, частями которых являются эти сокращения. Впрочем, установленных правил употребления строчных и прописных букв мы будем придерживаться лишь в пределах текущего параграфа. Убедившись же в принципиальной формализуемости теории классов, постепенно вернемся к общепринятому — более свободному — математическому языку.

Приступим к формулировке специальных аксиом теории NGB.

3.6.2. *Аксиома экстенсиональности* (*для классов*) NGB$_1$: *два класса совпадают, если (и только если) они состоят из одних и тех же элементов*

$$(\forall\, X)(\forall\, Y)(X = Y \leftrightarrow (\forall\, Z)(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y)).$$

3.6.3. *Аксиомы для множеств*:

(1) аксиома (неупорядоченной) пары NGB$_2$:

$$(\forall\, x)(\forall\, y)(\exists\, z)(\forall\, u)(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y);$$

(2) аксиома объединения NGB$_3$:

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(z \in y \leftrightarrow (\exists\, u)(u \in x \wedge z \in u));$$

(3) аксиома степени NGB$_4$:

$$(\forall\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(z \in y \leftrightarrow z \subset x);$$

(4) аксиома бесконечности NGB$_5$:

$$(\exists\, x)(0 \in x \wedge ((\forall\, y)(y \in x \leftrightarrow y \cup \{y\} \in x))).$$

Как видно, эти аксиомы совпадают с одноименными аналогами из ZF, сформулированными в 3.2.3, 3.2.4, 3.2.7 и 3.2.8. Следует только иметь в виду, что в словесных формулировках слово множество здесь уже означает класс, являющийся элементом класса. В символической же записи аксиом малые латинские буквы свидетельствуют о сокращениях (см. 3.6.1). Так, например, частично развернутая аксиома степени NGB_4 имеет вид

$$(\forall X)(M(X) \to (\exists Y)(M(Y) \wedge (\forall Z)(M(Z) \to (Z \in Y \leftrightarrow Z \subset X)))).$$

В записи аксиомы бесконечности NGB_5 использовано сокращение

$$0 \in x := (\exists\, y)(y \in x \wedge (\forall\, u)(u \notin y)).$$

Существование пустого множества заранее не предполагается, а вытекает из аксиомы бесконечности. Тем не менее иногда это утверждение включают в список NGB в качестве отдельной аксиомы:

(5) $(\exists\, y)(\forall\, u)(u \notin y)$.

3.6.4. *Аксиома подстановки* $\mathbf{NGB_6}$: *если класс X однозначен, то для любого множества y класс вторых компонент тех пар из X, первые компоненты которых входят в y, является множеством:*

$$(\forall\, X)(\mathrm{Un}\,(X) \to (\forall\, y)(\exists\, z)(\forall\, u)(u \in z \leftrightarrow (\exists\, v)((v, z) \in X \wedge v \in y))).$$

Как и предполагалось, схема ZF_4^{φ} превратилась в одну аксиому. Здесь уже отметим, что схеме аксиом выделения из ZF (см. 3.2.5) также соответствует одна аксиома — аксиома выделения. Она утверждает, что для любых множества x и класса Y существует множество, состоящее из элементов, общих для x и Y, т. е.

$$(\forall\, x)(\forall\, Y)(\exists\, z)(\forall\, u)(u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in Y).$$

Эта аксиома слабее аксиомы подстановки (она выводится из NGB_6 и нижеследующей теоремы 3.6.14), но в некоторых случаях более удобна в обращении.

Следующая группа аксиом NGB_7–NGB_{13} гарантирует возможности формирования классов. Эти аксиомы утверждают, что для некоторых свойств, выраженных формулами, существуют классы всех множеств, обладающих соответствующими свойствами.

Единственность при этом вытекает, как обычно, из аксиомы экстенсиональности NGB_1.

3.6.5. *Аксиома* $\in$*-отношения* $\mathbf{NGB_7}$: *существует класс, состоящий в точности из тех упорядоченных пар множеств, у которых первая компонента служит элементом второй:*

$$(\exists\, X)(\forall\, y)(\forall\, z)((y, z) \in X \leftrightarrow y \in z).$$

3.6.6. *Аксиома пересечения* $\mathbf{NGB_8}$: *для любых двух классов существует их пересечение:*

$$(\forall\, X)(\forall\, Y)(\exists\, Z)(\forall\, u)(u \in Z \leftrightarrow u \in X \wedge u \in Y).$$

3.6.7. *Аксиома дополнения* $\mathbf{NGB_9}$: *для каждого класса существует дополнительный ему класс:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(u \in Y \leftrightarrow u \notin X).$$

Отсюда вытекает существование универсального класса $\mathbf{U} := \overline{\varnothing}$ — дополнения пустого класса $\varnothing$.

3.6.8. *Аксиома области определения* $\mathbf{NGB_{10}}$: *для каждого класса X упорядоченных пар существует класс $Y := \mathrm{dom}(X)$, элементами которого являются в точности первые компоненты элементов класса X:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(u \in Y \leftrightarrow (\exists\, v)((u, v) \in X)).$$

3.6.9. *Аксиома декартова произведения* $\mathbf{NGB_{11}}$: *для всякого класса X существует класс $Y := X \times \mathbf{U}$, состоящий из всевозможных упорядоченных пар, первые компоненты которых являются элементами класса X:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(\forall\, v)((u, v) \in Y \leftrightarrow u \in X).$$

3.6.10. *Аксиомы перестановки* $\mathbf{NGB_{12}}$ *и* $\mathbf{NGB_{13}}$. *Пусть $\sigma := (i_1, i_2, i_3)$ — перестановка множества $\{1, 2, 3\}$. Класс Y назовем σ-транспонированием класса X, если $(x_1, x_2, x_3) \in Y$ тогда и только тогда, когда $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \in X$. Для любого класса X существуют его $(2, 3, 1)$- и $(1, 3, 2)$-транспонирования:*

$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(\forall\, v)(\forall\, w)((u, v, w) \in Y \leftrightarrow (v, w, u) \in X);$$
$$(\forall\, X)(\exists\, Y)(\forall\, u)(\forall\, v)(\forall\, w)((u, v, w) \in Y \leftrightarrow (u, w, v) \in X).$$

3.6.11. *Аксиома фундирования* $\mathbf{NGB_{14}}$: *в каждом непустом классе есть элемент, не имеющий с ним общих элементов:*

$$(\forall X)(X \neq \varnothing \to (\exists y)(y \in X \land y \cap X = \varnothing)).$$

3.6.12. *Аксиома выбора* $\mathbf{NGB_{15}}$: *для каждого класса X существует выбирающая функция, т. е. однозначный класс, сопоставляющий всякому непустому множеству из X некоторый его элемент:*

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall u)(u \neq \varnothing \land u \in X \to (\exists! v)(v \in u \land (u, v) \in Y)).$$

Это очень сильная форма аксиомы выбора. Она равносильна существованию одновременного выбора по одному элементу из каждого непустого множества.

На этом список специальных аксиом NGB завершается. Как видно, теории NGB, в отличие от ZFC, имеет лишь конечное число аксиом. Другое удобное качество системы NGB состоит в том, что она фактически имеет дело с множествами и со свойствами множеств как с формальными объектами, осуществляя объективизацию, недоступную выразительным средствам ZFC.

3.6.13. Из группы аксиом формирования классов мы выведем несколько утверждений, которые потребуются нам при доказательстве общей теоремы о существовании классов.

(1) *Для любого класса существует его* $(2, 1)$*-транспонирование*:

$$(\forall X)(\exists Z)(\forall u)(\forall v)((u, v) \in Z \leftrightarrow (v, u) \in X).$$

$\lhd$ Аксиома декартова произведения гарантирует существование класса $X \times \mathbf{U}$. Последовательное применение аксиом $(2, 3, 1)$-транспонирования и $(1, 3, 2)$-транспонирования к классу $X \times \mathbf{U}$ дает класс Y всех троек (v, u, w) таких, что $(v, u) \in X$. Остается воспользоваться аксиомой области определения и заключить, что $Z := \operatorname{dom}(Y)$ — искомый класс. $\rhd$

(2) *Для любых двух классов существует их декартово произведение*:

$$(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)(\forall w)(w \in Z \leftrightarrow (\exists Z \leftrightarrow (\exists u \in X)(\exists v \in Y)(w = (u, v))).$$

◁ Нужно воспользоваться последовательно аксиомой декартова произведения, утверждением (1), аксиомой пересечения и положить $Z := (\mathbf{U} \times Y) \cap (X \times \mathbf{U})$. ▷

Для $n \geq 2$ в силу 3.6.13 (2) определен класс $\mathbf{U}^n$ всех упорядоченных n-ок.

(3) *Для любого класса X существует класс $Z := (\mathbf{U}^n \times \mathbf{U}^m) \cap (X \times \mathbf{U}^m)$:*

$$(\forall X)(\exists Z)(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\forall y_1)\dots(\forall y_m)$$
$$((x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \in Z \leftrightarrow (x_1,\dots,x_n) \in X).$$

(4) *Для любого класса X существует класс $Z := (\mathbf{U}^m \times \mathbf{U}^n) \cap (\mathbf{U}^m \times X)$:*

$$(\forall X)(\exists Z)(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\forall y_1)\dots(\forall y_m)$$
$$((y_1,\dots,y_m,x_1,\dots,x_n) \in Z \leftrightarrow (x_1,\dots,x_n) \in X).$$

◁ Для доказательства (3) и (4) нужно применить аксиому декартова произведения и аксиому пересечения. ▷

(5) *Для любого класса X существует класс Z, такой, что*

$$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\forall y_1)\dots(\forall y_m)$$
$$((x_1,\dots,x_{n-1},y_1,\dots,y_m,x_n) \in Z \leftrightarrow (x_1,\dots,x_n) \in X).$$

◁ Следует применить аксиомы перестановки и аксиому декартова произведения. ▷

3.6.14. *Теорема.* *Пусть φ — формула, в построении которой участвуют только переменные из числа $X_1,\dots,X_n$, $Y_1,\dots,Y_m$, причем φ предикативна, т. е. в φ связаны лишь переменные, ограниченные множествами. Тогда в* NGB *доказуемо утверждение*

$$(\forall Y_1)\dots(\forall Y_m)(\exists Z)(\forall x_1)\dots(\forall x_n)$$
$$((x_1,\dots,x_n) \in Z \leftrightarrow \varphi(x_1,\dots,x_n,Y_1,\dots,Y_m)).$$

◁ Пусть формула φ записана с учетом принятых сокращений в таком виде, что связанными в ней являются только переменные для множеств. Достаточно рассмотреть те φ, которые не содержат подформул вида $Y \in W$ и $X \in X$, ибо последние заменяются на эквивалентные: $(\exists\, x)(x = Y \wedge x \in W)$ и $(\exists\, u)(u = X \wedge u \in X)$. Кроме того, можно исключить из φ символ равенства, подставив в соответствии с аксиомой экстенсиональности вместо $X = Y$ выражение $(\forall\, u)(u \in X \leftrightarrow u \in Y)$. Доказательство проводится индукцией по длине k формулы φ, т. е. по числу k логических связок и кванторов, входящих в φ.

При $k = 0$ формула φ атомна и имеет вид $x_i \in x_j$ или $x_j \in x_i$, или $x_i \in Y_l$ $(i < j \leq n, l \leq m)$. Если $\varphi := x_i \in x_j$, то по аксиоме $\in$-отношения существует класс W_1, для которого

$$(\forall\, x_i)(\forall\, x_j)((x_i, x_j) \in W_1 \leftrightarrow x_i \in x_j).$$

Если же $\varphi := x_j \in x_i$, то вначале, воспользовавшись той же аксиомой, находим класс W_2 со свойством

$$(\forall\, x_i)(\forall\, x_j)((x_j, x_i) \in W_2 \leftrightarrow x_j \in x_i),$$

а затем применяем 3.6.13 (1). В результате подберем класс W_3, для которого будет

$$(\forall\, x_i)(\forall\, x_j)((x_i, x_j) \in W_3 \leftrightarrow x_j \in x_i).$$

Итак, в любом из этих двух случаев существует такой класс W, что справедлива формула

$$\Phi : (\forall\, x_i)(\forall\, x_j)((x_i, x_j) \in W \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m)).$$

На основании 3.6.13 (4) в формуле Φ можно заменить подформулу $(x_i, x_j) \in W$ на $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i) \in Z_1$ для некоторого другого класса Z_1 и добавить кванторы $(\forall\, x_1) \ldots (\forall\, x_{i-1})$ в начале. Пусть Ψ — получаемая при этом формула. В силу 3.6.13 (5) в формуле Ψ вместо подформулы $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_j) \in Z_1$ допустимо написать $(x_1, \ldots, x_i,\ x_{i+1}, \ldots, x_j) \in Z_2$ для некоторого другого класса Z_2 и добавить кванторы $(\forall\, x_{i+1}) \ldots (\forall\, x_{j-1})$ в начале формулы Ψ. Наконец, применив 3.6.13 (3) к Z_2, найдем класс Z, для которого верна формула

$$(\forall\, x_1) \ldots (\forall\, x_n)((x_1, \ldots, x_n) \in Z \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m)).$$

Для оставшегося случая $x_i \in Y_l$ требуемое утверждение следует из существования декартовых произведений $W := \mathbf{U}^{i-1} \times Y_l$ и $Z := W \times \mathbf{U}^{n-i}$. Тем самым теорема установлена при $k = 0$.

Допустим, что для всех $k < p$ теорема доказана и формула φ имеет p логических связок и кванторов. Достаточно рассмотреть случаи, когда φ получается из каких-то формул с помощью отрицания, импликации и квантора общности.

(а) $\varphi := \neg\psi$. По индукционному предположению существует класс V такой, что

$$(\forall\, x_1) \dots (\forall\, x_n)((x_1, \dots, x_n) \in V \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)).$$

По аксиоме дополнения имеется класс $Z := \mathbf{U} - V := \mathbf{U} \setminus V$, удовлетворяющий нужным условиям.

(б) $\varphi := \psi \to \theta$. Вновь по индукционному предположению найдутся классы V и W, для которых при V и ψ выполнено отмеченное в (а) и, кроме того,

$$(\forall\, x_1) \dots (\forall\, x_n)((x_1, \dots, x_n) \in W \leftrightarrow \theta(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)).$$

Искомый класс $Z := \mathbf{U} - (V \cap (\mathbf{U} - W))$ существует ввиду аксиомы пересечения и аксиомы дополнения.

(в) $\varphi := (\forall\, x)\psi$. Пусть V и ψ те же, что и в (а). Если применить аксиому области определения к классу $X := \mathbf{U} - V$, то получим класс Z_1, для которого

$$(\forall\, x_1) \dots (\forall\, x_n)((x_1, \dots, x_n) \in Z \leftrightarrow (\exists\, x)\neg\psi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)).$$

Класс $Z := \mathbf{U} - Z_1$, который существует по аксиоме дополнения, будет искомым, ибо $(\forall\, x)\psi$ эквивалентна $\neg(\exists\, x)(\neg\psi)$. $\triangleright$

3.6.15. Каждая из приведенных выше аксиом формирования классов NGB_7–NGB_{13} является следствием теоремы 3.6.14 при подходящем выборе формулы φ. С другой стороны, сама эта теорема, как видно из доказательства, выводится из аксиом формирования классов. Замечательно, что вместо бесконечного числа утверждений, содержащихся в 3.6.14, можно обойтись конечным числом аксиом NGB_7–NGB_{13}.

Теорема 3.6.14 позволяет доказывать существование самых разнообразных классов. Так, для всякого класса Y существуют класс всех его подмножеств $\mathscr{P}(Y)$ и объединение всех его элементов $\bigcup Y$, определяемые обычными формулами

$$(\forall\, u)(u \in \mathscr{P}(Y) \leftrightarrow u \subset Y),$$
$$(\forall\, u)(u \in \bigcup Y \leftrightarrow (\exists\, v)(v \in Y \wedge u \in v)).$$

В этом легко можно убедиться, если взять $\varphi(X, Y) := X \subset Y$ и $\varphi(X, Y) := (\exists\, u)(x \in u \wedge u \in Y)$. По аналогичным соображениям возможны определения Z^{-1}, $\operatorname{im} Z$, $Z \restriction Y$, $Z``Y$, $X \cup Y$ и т. п., где X, Y и Z — некоторые классы.

3.6.16. *Теорема.* *Всякая теорема теории* ZFC *является теоремой* NGB.

$\lhd$ Все аксиомы ZF являются теоремами теории NGB. Докажем единственную неочевидную часть этого утверждения, касающуюся аксиомы подстановки ZF_4^{φ}. Пусть формула φ не содержит свободных вхождений переменной y и $\{x, t, z_1, \dots, z_m\}$ — полный набор переменных, использованных в построении φ. Далее предположим, что для всех x, u, v, $z_1, \dots, z_m$ выполняется

$$\varphi(x, u, z_1, \dots, z_m) \wedge \varphi(x, v, z_1, \dots, z_m) \to u = v.$$

Формула φ предикативна, так как все переменные в ней ограничены множествами. По теореме 3.6.14 существует класс Z такой, что

$$(\forall\, x)(\forall\, u)((x, u) \in Z \leftrightarrow \varphi(x, u, z_1, \dots, z_m)).$$

Из указанного выше свойства φ видно, что класс Z однозначен, т. е. в NGB доказуема $\mathrm{Un}\,(Z)$. По аксиоме подстановки NGB_6 существует множество y, для которого

$$(\forall\, v)(v \in y \leftrightarrow (\exists\, u)((u, v) \in \mathbf{Z} \wedge u \in x)).$$

Ясно, что для y выполняется нужное соотношение

$$(\forall\, z_1) \dots (\forall\, z_m)(\forall\, v)(v \in y \leftrightarrow (\exists\, u \in x)\, \varphi(x, v, z_1, \dots, z_m)). \ \rhd$$

3.6.17. *Теорема.* *Каждая теорема* NGB, *в которой говорится о множествах, является теоремой* ZFC.

$\lhd$ Доказательство можно найти, например, в [49]. Оно требует привлечения некоторых фактов из теории моделей, выходящих за рамки настоящей книги. $\rhd$

Утверждения 3.6.16 и 3.6.17 часто формулируют в следующем виде.

3.6.18. *Теорема.* *Теория множеств фон Неймана — Гёделя — Бернайса* NGB *является консервативным расширением теории множеств Цермело — Френкеля* ZFC.

3.6.19. Из других аксиоматических теорий множеств отметим теорию Бернайса — Морса, расширяющую теорию NGB. Эта теория имеет специальные аксиомы NGB_1–NGB_5, NGB_{14} и следующую схему аксиом выделения:

$$(\exists\, X)(\forall\, Y)(Y \in X \leftrightarrow M(Y) \wedge \varphi(Y, X_1, \dots, X_n)),$$

где φ — произвольная формула, не содержащая вхождений переменной X.

Из 3.6.14 видно, что если в формуле φ область действия кванторов ограничена множеством, то схема аксиом выделения есть теорема NGB. Теория множеств Бернайса — Морса допускает в схеме аксиом выделения квантификацию по произвольным классам. К теории множеств Бернайса — Морса можно также добавить аксиому выбора NGB_{15}.

3.7. Нестандартная теория классов

В этом параграфе представлена еще одна система аксиом NCT, аналогичная теории внутренних множеств Нельсона IST, но отличающаяся от нее тем, что NCT расширяет теорию классов фон Неймана — Бернайса — Гёделя. Принципы переноса, идеализации и стандартизации в теории NCT формулируются как аксиомы, а не как схемы аксиом, так что теория NCT, как и NGB, конечно аксиоматизируема.

3.7.1. Язык NCT получается добавлением к языку NGB одноместного предикатного символа St (символ $\mathrm{St}(X)$ читается «X — стандартный класс»). Так же, как и в 3.6, переменные, принимающие значения произвольных классов, обозначены заглавными латинскими буквами, а переменные, принимающие значения множеств, — строчными.

Мы будем придерживаться и других сокращений и определений из 3.6. В частности, класс X называем *множеством* и пишем $M(X)$, если X является элементом какого-нибудь класса: $M(X) := (\exists Y)(X \in Y)$, см. 3.6.1. Как и раньше, запись $S(X_1, \dots, X_n) := \varphi(X_1, \dots, X_n)$ означает, что выражение $S(X_1, \dots, X_n)$ служит сокращением для $\varphi(X_1, \dots, X_n)$.

Итак, язык NCT — язык исчисления предикатов с равенством, содержащий один бинарный предикатный символ $\in$ и один унарный предикатный символ St. Перечислим специальные аксиомы теории NCT.

(1) Принимаемые в NCT аксиомы экстенсиональности, пары, объединения, степени, бесконечности, регулярности и выбора совпадают с соответствующими аксиомами NBG_1–NBG_5, NBG_{14}, NBG_{15} (см. 3.6.2, 3.6.3, 3.6.11, 3.6.12).

(2) Аксиома подстановки в NCT принимается в виде:

$$(\forall V)(\forall x)(\exists y)(\forall u \in x)(\exists v((u,v) \in V) \to (\exists v \in y)((u,v) \in V)).$$

Ниже используются следующие сокращения:

$$(\exists^{\mathrm{st}} x)\varphi := (\exists x)(\mathrm{St}(x) \wedge \varphi),$$
$$(\forall^{\mathrm{st}} x)\varphi := (\forall x)(\mathrm{St}(x) \to \varphi).$$

(3) Аксиома ограниченности:

$$(\forall x)(\exists^{\mathrm{st}} z)(x \in z).$$

(4) Аксиома переноса:

$$(\forall^{\mathrm{st}} X)((\exists x)x \in X \to (\exists^{\mathrm{st}} x)x \in X).$$

(5) Аксиома стандартизации:

$$(\forall X)(\exists^{\mathrm{st}} Y)(\forall^{\mathrm{st}} x)(x \in Y \leftrightarrow x \in X).$$

Отправляясь от пустого множества, по аксиоме стандартизации можно получить стандартный класс L, не содержащий стандартных элементов. По аксиоме переноса $L = \varnothing$, т. е. *пустое множество стандартно.*

3.7.2. Формула NCT называется *предикативной*, если в ней связаны только переменные, ограниченные множествами, и предикат стандартности присутствует только в составе внешних кванторов, т. е. все вхождения кванторов и предиката стандартности имеют вид $\exists x$, $\exists^{\mathrm{st}} x$, $\forall x$, $\forall^{\mathrm{st}} x$. Заметим, что подформулу $\mathrm{St}(x)$ можно заменить на $(\exists^{\mathrm{st}} y)(y = x)$.

Пусть p — произвольное множество. Класс X называется *p-стандартным* (символически $\mathrm{st}_p\, X$), если он является *p-сечением* некоторого стандартного класса Y, т. е. $\exists^{\mathrm{st}} Y(X = Y\text{"}p)$, где $Y\text{"}p = \{v : (p, v) \in Y\}$. Класс X называют *внутренним* и пишут $\mathrm{int}\, X$, если он p-стандартен для некоторого p.

Аксиома существования классов*: Для каждой предикативной формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)$ справедливы утверждения:*

(1) *для любых классов $Y_1, \dots, Y_m$ существует класс $\mathscr{T} = \{(x_1, \dots, x_n) : \varphi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)\}$;*

(2) *если φ — внутренняя формула и классы $Y_1, \dots, Y_n$ стандартны, то $\mathscr{T}$ есть стандартный класс.*

Точно так же, как и для теории NGB, вместо приведенной здесь схемы аксиом существования классов достаточно принять в качестве аксиом лишь конечное число ее частных случаев (см. NGB_7–NGB_{13}), после чего данная схема аксиом в полном объеме может быть доказана (см. 3.6.14). Следовательно, теория NCT является конечно аксиоматизируемой.

Из аксиомы существования классов легко вытекает следующее утверждение.

3.7.3. *Если в условиях аксиомы существования классов формула φ и классы $Y_1, \dots, Y_n$ — внутренние, то $\mathscr{T}$ есть внутренний класс. При этом если все Y_i будут p-стандартными для некоторого фиксированного множества p, то класс $\mathscr{T}$ также p-стандартен.*

$\triangleleft$ Следует из аксиомы существования классов. $\triangleright$

Введем теперь следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbb{U} &:= \{x : x = x\} = \{x : x \notin \varnothing\}, \\ \mathbb{E} &:= \{x : \ (\exists u)(\exists v)\,(x = (u, v) \wedge u \in v)\}, \\ \mathbb{S} &:= \{x : \ \mathrm{St}(x)\}, \\ {}^{-}X &:= \{x \ : x \notin X\}. \end{aligned}$$

Согласно аксиомам существования классов совокупности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{E}$ суть стандартные классы, $\mathbb{S}$ есть класс и для любых классов X и Y совокупности ${}^{-}X$, $X \cap Y$, $\operatorname{dom}(X)$, $X \times \mathbb{U}$ суть классы, стандартные, если стандартны X и Y.

Любое множество x является x-стандартным и, следовательно, внутренним, поскольку $x = \mathbb{E}^{-1}{}''x$. Любой стандартный класс X — внутренний, так как $X = (\{\varnothing\} \times X)''\varnothing$.

3.7.4. Следующие две аксиомы выражают свойства внутренних классов.

(1) Аксиома выделения:

$$(\forall^{\mathrm{int}} X)(\forall x)(\exists y)(\forall u)(u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge u \in X).$$

(2) Аксиома идеализации:

$$(\forall^{\mathrm{int}} X)(\forall^{\mathrm{st}} a_0)((\forall^{\mathrm{st\,fin}} c \subseteq a_0)(\exists x)(\forall a \in c)((x, a) \in X) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists x)(\forall^{\mathrm{st}} a \in a_0)((x, a) \in X)).$$

3.7.5. Следующие утверждения непосредственно вытекают из аксиомы существования классов и предложения 3.7.3.

(1) *Пусть φ — внутренняя предикативная формула. Тогда*

$$(\forall^{\mathrm{int}} X_1) \ldots (\forall^{\mathrm{int}} X_n)(\forall x)(\exists y)(\forall u)(u \in y \leftrightarrow \\ \leftrightarrow y \in x \wedge \varphi(x, X_1, \ldots, X_n)).$$

В частности, выполняется схема аксиом выделения BST.

(2) *В* NCT *выполняются аксиомы стандартизации и идеализации* BST.

(3) **Принцип переноса.** *Если φ — внутренняя предикативная формула, то*

$$(\forall^{\mathrm{st}} X_1) \ldots (\forall^{\mathrm{st}} X_n)((\forall^{\mathrm{st}} x)\, \varphi(x, X_1, \ldots, X_n) \rightarrow \\ \rightarrow (\forall x)\, \varphi(x, X_1, \ldots, X_n)).$$

В частности, выполнена схема аксиом переноса BST.

(4) *Всякое доказуемое в* BST *предложение доказуемо и в* NCT.

Напомним, что аксиомы переноса, идеализации, стандартизации и выделения BST являются частными случаями соответствующих аксиом NCT, в которых классы определяются предикативными формулами с множественными свободными переменными (для аксиом выделения, переноса и идеализации эти формулы — внутренние).

3.7.6. Отметим следующие утверждения:

(1) *Если x и p — произвольные множества, то*

$$\mathrm{st}_p\, x \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} z)(x = z"p) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} f)(\mathrm{Fnc}\ f \wedge x = f(p)).$$

$\triangleleft$ Пусть x — это p-стандартное множество. Тогда по аксиоме ограниченности и принципу переноса $x = z"p$ для некоторого стандартного z. Тогда функция $f = \{(q, z"q) : q \in \mathrm{dom}(z)\}$ стандартна и $f(p) = x$. Наоборот, если функция f стандартна, то по принципу переноса множество $f(p)$ будет p-сечением стандартного множества $\{(q, u) : u \in f(q)\}$. $\triangleright$

(2) *Пусть φ — внутренняя предикативная формула и p — произвольное множество. Тогда*

$$(\forall^{\mathrm{st}}_p X_1) \ldots (\forall^{\mathrm{st}}_p X_n)((\forall^{\mathrm{st}}_p x)\, \varphi(x, X_1, \ldots, X_n) \to$$
$$\to (\forall x)\, \varphi(x, X_1, \ldots, X_n)).$$

$\triangleleft$ Согласно предложению 3.7.3 достаточно доказать, что каждый непустой p-стандартный класс X содержит p-стандартный элемент. Пусть $X = Y"p$, причем $\mathrm{st}\, Y$ и $p \in r$ для некоторого стандартного r. По аксиомам выделения и выбора и теореме переноса найдется такая стандартная функция f, что

$$(\forall q \in r)((\exists y)(q, y) \in Y \to (\exists y)(q, y) \in Y \cap f).$$

Так как X непуст, то $p \in \mathrm{dom}(f)$ и $f(p)$ будет p-стандартным элементом X. $\triangleright$

3.7.7. Для произвольного класса C положим $^{\circ}C := C \cap \mathbb{S}$. Аксиома стандартизации постулирует существование для любого класса X стандартного класса Y со свойством $^{\circ}Y = {}^{\circ}X$. По принципу переноса такой стандартный класс единствен. Он обозначается через $^{\mathrm{s}}X$.

(1) ***Теорема.*** *Класс стандартен тогда и только тогда, когда его пересечение с каждым стандартным множеством есть стандартное множество.*

$\lhd$ Необходимость следует из аксиом существования классов и выделения. Докажем достаточность. Пусть X — такой класс, что $(\forall^{\mathrm{st}} z)(\exists^{\mathrm{st}} t)(t = X \cap z)$. Положим $Y := {}^{\mathrm{s}}\{x : x \in X\}$ и покажем, что $Y = X$. Благодаря аксиоме ограниченности для этого достаточно проверить, что для любого стандартного множества z имеет место равенство $z \cap X = z \cap Y$. По выбору Y будет

$$^{\circ}(X \cap z) = {}^{\circ}X \cap {}^{\circ}z = {}^{\circ}Y \cap {}^{\circ}z = {}^{\circ}(Y \cap z).$$

Поскольку $X \cap z$ и $Y \cap z$ являются стандартными множествами, то по принципу переноса из последней цепочки равенств следует требуемое. $\rhd$

(2) *Множество является стандартным и конечным тогда и только тогда, когда все его элементы стандартны.*

$\lhd$ По принципу идеализации имеем:

$$\begin{gathered}\mathrm{St}(x) \wedge \mathrm{fin}(x) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st\ fin}} y \subseteq x)(\forall a \in x)(\exists b \in y)(a = b) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall a \in x)(\exists^{\mathrm{st}} b \in x)(a = b),\end{gathered}$$

что и требовалось. $\rhd$

Множество называется *стандартно-конечным*, если его мощность есть стандартное натуральное число.

3.7.8. ***Теорема.*** *Множество является стандартно-конечным в том и только в том случае, если все его подклассы суть множества.*

$\lhd$ Пусть x — некоторое множество, $|x| = \alpha$ и $f : \alpha \to x$ — взаимнооднозначная функция.

Если x не является стандартно-конечным, то по принципу переноса $(\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(\alpha > n)$. Для класса $I := \{f(n) : n \in {}^{\circ}\mathbb{N}\}$ мы можем записать:

$$(\forall^{\mathrm{st\ fin}} s \subseteq \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in s)(f(k) \in I \wedge n < k).$$

Если бы I был множеством, то нашлось бы такое $k \in \mathbb{N}$, что $f(k) \in I$ и $(\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})\ (n < k)$, что невозможно, так как $f(k) \in I$ только для стандартных k в силу взаимнооднозначности f.

Пусть теперь x стандартно-конечно и $X \subseteq x$. Рассмотрим класс $T := \{n \in \alpha : f(n) \in X\}$. По принципам стандартизации и переноса существует множество $t = {}^{\mathrm{s}}T$, $t \subseteq \alpha$. Так как, по предложению 3.7.7 (2), $\alpha \subseteq \mathbb{S}$, имеет место равенство $t = {}^{\circ}t = {}^{\circ}T = T$. Тогда $X = \{f(n) : n \in t\}$ есть множество. $\triangleright$

3.7.9. Назовем *p-монадой* $\mu_p(x)$ множества x пересечение всех p-стандартных классов, содержащих x. Поскольку дополнение к стандартному классу есть стандартный класс, то p-монады двух произвольных множеств либо не пересекаются, либо совпадают. По предложению 3.7.6 (1) имеем:

$$\mu_p(x) = \{y : (\forall_p^{\mathrm{st}} z)(y \in z \leftrightarrow x \in z)\}.$$

Если множество p стандартно, то класс $\mu_p(x)$ будем называть *монадой* множества x и обозначать $\mu(x)$. Очевидно, что $\mu(x) = \bigcap\{a \in \mathbb{S} : x \in a\}$.

Пусть x — произвольное множество. По аксиоме ограниченности $x \in x_0$ для некоторого стандартного x_0. Используя принцип переноса, нетрудно показать, что $u = {}^{s}\{a \subseteq x_0 : x \in a\}$ есть стандартный ультрафильтр, причем $\bigcap {}^{\circ}u = \mu(x)$. Наоборот, если u — произвольный стандартный ультрафильтр, то по принципам переноса и идеализации $\bigcap {}^{\circ}u \neq \varnothing$ и $\mu(x) = \bigcap {}^{\circ}u$ для любого $x \in \bigcap {}^{\circ}u$.

Класс $\bigcap {}^{\circ}u$ называется *гнездом* ультрафильтра u и обозначается $\nu(u)$. Для обозначения класса всех ультрафильтров будем использовать сокращение Ult, для множества всех ультрафильтров на множестве x — символ $\mathrm{Ult}(x)$.

Для произвольных множеств x и p выполняется следующее равенство $\mu_p(x) = \mu((p, x))"p$.

$\triangleleft$ Используя 3.7.6 (1), получим:

$$\begin{gathered} y \in \mu((p, x))"p \leftrightarrow (p, y) \in \mu((p, x)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} z)((p, x) \in z \leftrightarrow (p, y) \in z) \leftrightarrow y \in \mu_p(x), \end{gathered}$$

что и требовалось. $\triangleright$

3.7.10. Класс X назовем *p-насыщенным,* если вместе с каждым множеством X содержит всю p-монаду этого множества.

(1) *Множество x является p-стандартным тогда и только тогда, когда оно p-насыщено.*

$\lhd$ Пусть x является p-насыщенным. Возьмем произвольный элемент $u \in x$ и покажем, что u принадлежит p-сечению некоторого стандартного множества, включенному в x. Действительно, если допустить противное, то

$$(\forall^{\mathrm{st}} z)(u \in z"p \to (\exists v \in z"p)(v \notin x)).$$

Область изменения z в этой формуле можно ограничить стандартным множеством $\{t : t \subseteq \bigcup x_0\}$, где $x_0 \ni x$ стандартно. По принципу идеализации получим:

$$(\exists v \notin x)(\forall^{\mathrm{st}} z)(u \in z"p \to v \in z"p),$$

что противоречит включению $\mu_p(u) \subseteq x$.

Таким образом, мы имеем: $(\forall u \in x)(\exists^{\mathrm{st}} z)(u \in z"p \subseteq x)$. Вновь применив принцип идеализации, получим такое стандартное конечное множество z_0, что $(\forall u \in x)(\exists z \in z_0)(u \in z"p \subseteq x)$. Нетрудно проверить, что x будет p-сечением стандартного множества $\bigcup z_0$. $\rhd$

(2) *Для любых множеств x и p имеет место эквивалентность*

$$\mu_p(x) = \{x\} \leftrightarrow \mathrm{st}_p\, x.$$

$\lhd$ Импликация влево очевидна. Если же $\mu_p(x) = \{x\}$, то $\{x\}$ — p-насыщенное и, значит, p-стандартное множество. Тогда по принципу переноса x также будет p-стандартным. $\rhd$

3.7.11. Аксиома насыщенности:

$$(\forall X)(\exists p)(\forall x \in X)(\mu_p(x) \subseteq X),$$

т. е. всякий класс является p-насыщенным для некоторого множества p.

Для произвольных класса $D \subseteq \mathrm{Ult}$ и множества p положим

$$\mathrm{Psls}(D,p) := \bigcup_{u \in {}^{\circ}D} \nu(u)"p.$$

Полумножествами называются подклассы множеств:

$$\mathrm{Sms}\, X := (\exists^{\mathrm{st}} z)(X \subseteq z).$$

3.7.12. Теорема. *Пусть X — произвольный класс. Тогда найдутся такой стандартный класс $D \subseteq \mathrm{Ult}$ и множество p, что выполняется равенство*

$$X = \mathrm{Psls}(D,p).$$

Если X — полумножество, то D можно выбрать множеством.

$\lhd$ Пусть X — это p-насыщенный класс. Положим $D = {}^{s}\{u \in \mathrm{Ult} : \nu(u)"p \subseteq X\}$. Тогда по предложению из 3.7.9 выполняется требуемое равенство.

Это же равенство остается в силе для $X \in z$, где z стандартно, если вместо D взять стандартное по принципу переноса множество $d = D \cap \mathrm{Ult}(r \times z)$, где r — произвольное стандартное множество, содержащее p. $\rhd$

Таким образом, всякое полумножество в NCT оказывается определимым некоторой предикативной Σ_2^{st}-формулой. Можно показать также, что если в формуле все кванторы ограничены полумножествами, то она эквивалентна некоторой предикативной формуле.

В самом деле, достаточно заменить все подформулы вида $\mathrm{st}\, X$ на $(\forall^{\mathrm{st}} s)(\exists^{\mathrm{st}} t)(t = X \cap s)$, а подформулы вида $(\exists X)(\mathrm{Sms}\, X \to \varphi(X,\dots))$ на $(\exists^{\mathrm{st}} d)(\exists p)\, \varphi(\mathrm{Psls}(d,p),\dots)$.

Следующая теорема является принципом насыщенности в его традиционной формулировке. Отметим, что, в отличие от NCT, ни в IST, ни в BST эта теорема не может быть не только доказана, но даже сформулирована.

3.7.13. Теорема. *Пусть класс X и стандартное множество z_0 таковы, что $(\forall^{\mathrm{st}} x \in z_0)(\exists y)((x,y) \in X)$. Тогда найдется такая функция-множество f, что $(\forall^{\mathrm{st}} x \in z_0)((x, f(x)) \in X)$.*

$\lhd$ По аксиомам выделения и ограниченности найдется стандартное множество t такое, что $(\forall x \in z_0)((\exists y)(x,y) \in X \to (\exists y \in t)(x,y) \in$

X). Пусть X — это p-насыщенный класс. Если $(x, y) \in X$ и x стандартно, то $(\forall y\prime \in \mu(y))(x, y\prime) \in X$, поскольку $\mu_p((x, y)) = \{x\} \times \mu_p(y)$. Положим $d = {}^s\{(x, u) \in z \times \mathrm{Ult}(t) : \{x\} \times (\nu(u)"p) \subseteq X\}$. Аксиома выбора и принцип переноса позволяют выбрать такую стандартную функцию $h : z_0 \to \mathrm{Ult}(t)$, что $(\forall x \in z_0)((x, h(x)) \in d)$. Имеем:

$$(\forall^{\mathrm{st\,fin}} z \in z_0)(\exists f)(\forall x \in z)(\forall^{\mathrm{st}} a \in h(x))(\mathrm{Fnc}\,(f) \wedge f(x) \in a).$$

По принципу идеализации получим такую функцию f, для которой $(\forall^{\mathrm{st}} x \in z)(f(x) \in \nu(h(x)))$. Нетрудно видеть, что это f — искомое. $\triangleright$

3.7.14. Примечания.

(1) Нестандартная теория классов NCT, представленная в этом параграфе, предложена П. В. Андреевым и Е. И. Гордоном в [7]. От других теорий внешних множеств NCT отличается естественностью и простотой. В частности, она содержит лишь конечное число аксиом — принципы переноса, идеализации и стандартизации Э. Нельсона формулируются здесь в виде отдельных аксиом, а не их схем.

(2) Наличие классов позволяет формализовать в рамках NCT различные конструкции, использующие внешние множества, что невозможно в IST. В частности, одной из аксиом NCT является аксиома насыщенности (см. 3.7.11), играющая исключительно важную роль в приложениях нестандартного анализа.

(3) Все множества в NCT являются внутренними. Внешние объекты суть собственные классы. При этом, как и в альтернативной теории множеств П. Вопенки AST [31], здесь возможны подклассы множеств, которые не являются множествами (аксиома выделения истинна только для внутренних множеств). Следуя П. Вопенке, последние названы полумножествами. Теория NCT имеет и некоторые другие свойства AST. В частности, в ней справедлива теорема о том, что множество стандартно-конечно (т. е. его мощность есть стандартное натуральное число) в том и только в том случае, когда оно не содержит подполумножеств.

(4) Если внутренний класс (в частности, внутреннее множество) X представляет собой сечение стандартного класса множеством p, то говорят, что X стандартен относительно p, или p-стандартен, см. 3.7.2. Это понятие относительной стандартности в рамках теории IST было впервые введено в статье [44], где, в частности, было доказано, что принцип переноса и импликация вправо в принципе идеализации остаются справедливыми, если заменить все вхождения предиката стандартности в них на предикат стандартности относительно произвольного, но фиксированного для каждой конкретной формулы множества p. То же остается справедливым и для теории NCT (см. 3.7.7 (1)).

3.8. Непротиворечивость NCT

Настоящий параграф посвящен доказательству того, что NCT является консервативным расширением BST.

3.8.1. *Теорема.* *Всякое предикативное предложение, доказуемое в* NCT, *доказуемо в* BST.

$\triangleleft$ Мы покажем, что всякая модель BST изоморфно вкладывается в некоторую модель NCT в качестве универсума всех множеств, откуда по теореме о полноте следует доказываемое утверждение. $\triangleright$

3.8.2. Рассмотрим произвольную модель $\mathfrak{M} = (M, \in^M, \mathrm{st}^M)$ теории BST. Пусть L есть обогащение языка BST элементами из M, рассматриваемыми как новые константные символы. Будем считать $\mathfrak{M}$ моделью языка L, принимая за интерпретацию символа $a \in M$ само множество a. Множества из M, входящие в формулу языка L, будем называть ее параметрами.

Имея формулу φ языка L с одной свободной переменной, положим $\lceil\varphi\rceil := \{x : \mathfrak{M} \models \varphi(x)\}$. Пусть, далее,

$$N := \{\lceil\varphi\rceil : \varphi \text{ — формула языка } L \text{ с одной свободной переменной}\};$$

$$\mathrm{Std} := \{\lceil\varphi\rceil \in N : \varphi \text{ — внутренняя формула со стандартными параметрами}\};$$

$$\mathrm{Set}(a) := \lceil x \in a\rceil \text{ для любого } a \in M.$$

Для любых $p, q \in N$ определим

$$p \in^N q := (\exists\, a \in M)(p = \mathrm{Set}(a) \wedge a \in q),$$
$$\mathrm{st}^N p := p \in \mathrm{Std}\,.$$

3.8.3. *Для любых $a, b \in M$ и $p, q \in N$ имеют место следующие утверждения:*

(1) $p \in^N q \to (\exists\, a \in M)(p = \mathrm{Set}(a))$;
(2) $\mathrm{Set}(a) = \mathrm{Set}(b) \leftrightarrow a = b$;
(3) *если* $p = \mathrm{Set}(a)$ *и* $q = \mathrm{Set}(b)$, *то* $p \in^N q \leftrightarrow a \in^M b$;
(4) *если* $p = \mathrm{Set}(a)$, *то* $\mathrm{st}^N p \leftrightarrow \mathrm{st}^M a$.

$\lhd$ В самом деле, (1) верно по определению отношения $\in^N$, (2) вытекает из справедливости аксиомы экстенсиональности в $\mathfrak{M}$, а (3) следует из (1) по определению отношения $\in^N$.

Для обоснования (4) заметим, что из определения st^N следует $p = \{b : \mathfrak{M} \models b \in a\} = \{b : \mathfrak{M} \models \varphi(b)\}$, где φ — внутренняя формула со стандартными параметрами. Следовательно, $\mathfrak{M} \models (\forall x)(x \in a \leftrightarrow \varphi(x))$. Из того, что в $\mathfrak{M}$ выполнена схема аксиом переноса, следует, что $\mathfrak{M} \models \mathrm{st}\, a$, т. е. $\mathrm{st}^M a$. Наоборот, если $\mathrm{st}^M a$, то $p = \lceil x \in a \rceil \in \mathrm{Std}$. $\rhd$

(5) *Отображение* Set *изоморфно вкладывает* $\mathfrak{M}$ *как модель языка* L *в модель* $\mathfrak{N} = (N, \in^N, \mathrm{st}^N)$, *причем для всякого* $p \in N$ *будет* $\mathfrak{N} \models (\exists\, X)(p \in X) \to (\exists\, a \in M)(p = \mathrm{Set}(a))$.

$\lhd$ Очевидно следует из (1)–(4). $\rhd$

Предложение 3.8.3 (5) показывает, что класс p является множеством в $\mathfrak{N}$ в том и только в том случае, когда $p = \mathrm{Set}(a)$ для некоторого $a \in M$, т. е. $\mathfrak{M}$ действительно вкладывается в $\mathfrak{N}$ как универсум всех множеств.

3.8.4. Остается проверить выполнимость аксиом NCT в модели $\mathfrak{M}$.

Из предложения 3.8.3 (5) следует, что аксиомы NCT, являющиеся предикативными предложениями, выполняются в $\mathfrak{N}$, если они истинны в BST. Это верно по отношению к аксиомам пары, объединения, степени, бесконечности, выбора, регулярности и ограниченности. Аксиома экстенсиональности выполняется в $\mathfrak{N}$ благодаря построению отношения $\in^N$.

Если φ — формула языка L, то символом $\mathbf{C}_\varphi$ мы будем обозначать совокупность $\{x : \varphi(x, x_1, \dots, x_n)\}$. Пусть $\Phi(X_1, \dots, X_n)$ — предикативная формула, а $\varphi_1(x, x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x, x_1, \dots, x_m)$ — формулы языка L, свободные переменные которых не участвуют в построении Φ. Обозначим через $\Phi(\mathbf{C}_{\varphi_1}, \dots, \mathbf{C}_{\varphi_n})$ формулу, которая получается из $\Phi(X_1, \dots, X_n)$ заменой:

(1) всех вхождений атомарных формул вида $y \in X_j$ на $\varphi_j(y, x_1, \dots, x_m)$;

(2) всех вхождений атомарных формул вида $X_i \in X_j$ на

$$(\exists\, x)((\forall y)(y \in x \leftrightarrow \varphi_i(y, x_1, \dots, x_m)) \wedge \varphi_j(x, x_1, \dots, x_m));$$

(3) всех вхождений атомарных формул вида $X_i = X_j$ на

$$(\forall x)(\varphi_i(x, x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow \varphi_j(x, x_1, \dots, x_m));$$

(4) всех вхождений атомарных формул вида $X_i = x$ на

$$(\forall y)(y \in x \leftrightarrow \varphi_i(y, x_1, \dots, x_m)).$$

Свободными переменными формулы $\Phi(\mathbf{C}_{\varphi_1}, \dots, \mathbf{C}_{\varphi_n})$ являются таковые у формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

3.8.5. *Если Φ — предикативная формула и $\mathbf{C}_{\varphi_1}, \dots, \mathbf{C}_{\varphi_n}$ — совокупности без свободных переменных, то*

$$\mathfrak{N} \models \Phi(\lceil\varphi_1\rceil, \dots, \lceil\varphi_n\rceil) \leftrightarrow \mathfrak{M} \models \Phi(\mathbf{C}_{\varphi_1}, \dots, \mathbf{C}_{\varphi_n}).$$

$\lhd$ Доказательство проводится индукцией по сложности Φ с использованием предложений из 3.8.3. $\rhd$

3.8.6. Заметим, что аксиомы NCT, не являющиеся предикативными предложениями, имеют вид

$$(Q_1 X)(Q_2 Y)(Q Z)\Psi(X, Y, Z),$$

где $Q_1, Q_2 \in \{\forall, \forall^{\mathrm{st}}\}$, $Q \in \{\exists, \exists^{\mathrm{st}}\}$ и Ψ — предикативная формула. Будем говорить, что предложение указанного вида *истинно в* BST *для классов*, если для произвольных формул $\varphi_1(x, u_1, \dots, u_l)$ и $\varphi_2(x, v_1, \dots, v_m)$ языка BST, внутренних, если соответствующие кванторы внешние, можно указать такую формулу $\varphi(x, w_1, \dots, w_n)$ языка BST, внутреннюю, если квантор Q внешний, что предложение

$$(Q_1 u_1) \dots (Q_1 u_l)(Q_2 v_1) \dots (Q_2 v_m)(Q w_1) \dots (Q w_n)\Psi(\mathbf{C}_{\varphi_1}, \mathbf{C}_{\varphi_2}, \mathbf{C}_{\varphi})$$

истинно в BST. При этом предполагается, что переменные u_i, v_i, w_i не участвуют в построении формулы Ψ.

3.8.7. *Пусть предложение* Φ *имеет вид*

$$(Q_1X)(Q_2Y)(Q_3Z)\Psi(X,Y,Z)$$

из 3.8.6. Тогда если Φ *истинно в* BST *для классов, то* Φ *выполняется в* $\mathfrak{N}$.

$\lhd$ Рассмотрим случай, когда в Φ все кванторы по классам внешние. Возьмем произвольные $\mathfrak{N}$-стандартные элементы $\lceil\varphi_1\rceil, \lceil\varphi_2\rceil \in N$. Из того, что Φ истинно в BST для классов, следует, что найдется такая внутренняя формула φ языка L с $\mathfrak{M}$-стандартными параметрами и одной свободной переменной, что $\mathfrak{M} \models \Psi(\mathbf{C}_{\varphi_1}, \mathbf{C}_{\varphi_2}, \mathbf{C}_{\varphi})$. Таким образом, мы имеем: $\mathrm{st}^N\lceil\varphi\rceil$ и $\mathfrak{N} \models \Psi(\lceil\varphi_1\rceil, \lceil\varphi_2\rceil, \lceil\varphi\rceil)$ по предложению 3.8.5, что и требовалось. $\rhd$

Нетрудно доказать истинность в BST для классов аксиом переноса, существования классов, регулярности, подстановки и идеализации. Аксиомы стандартизации, выделения и насыщенности требуют отдельного рассмотрения.

Мы будем пользоваться определениями, обозначениями и доказанными выше фактами о монадах и ультрафильтрах, которые имеют место также и в BST. Кроме того, будет использована следующая теорема из [**].

3.8.8. *Теорема.* *Для любой формулы* Φ *с двумя свободными переменными найдется внутренняя формула* φ, *удовлетворяющая условию*

$$(\forall p)(\forall^{\mathrm{st}} x)(\Phi(x,p) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} U \in \mathrm{Ult})(p \in \nu(U) \to \varphi(x,U)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} U \in \mathrm{Ult})(p \in \nu(U) \wedge \varphi(x,U))).$$

3.8.9. *Теорема.* *Аксиома стандартизации* NCT *верна в* BST *для классов.*

$\lhd$ Пусть Φ — произвольная формула. Можно считать, что она имеет не более двух свободных переменных. Выберем согласно теореме 3.8.8 внутреннюю формулу φ, удовлетворяющую условию теоремы. Тогда если множество p и ультрафильтр U таковы, что $p \in \nu(U)$, то

$$(\forall^{\mathrm{st}} x)(\Phi(x,p) \leftrightarrow \varphi(x,U)).$$

Поскольку всякое множество принадлежит гнезду некоторого стандартного ультрафильтра, это доказывает истинность аксиомы стандартизации в BST для классов. ▷

Пусть U — ультрафильтр. Обозначим

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(U) &:= \{\mathrm{dom}(u) : u \in U\}; \\ \mathrm{im}(U) &:= \{\mathrm{im}(u) : u \in U\}. \end{aligned}$$

Используя принципы переноса и идеализации, нетрудно показать, что $\mathrm{dom}(U)$ и $\mathrm{im}(U)$ являются ультрафильтрами для всякого ультрафильтра U, причем для любых множеств a и b справедливы импликации

$$\begin{aligned} &(a, b) \in \nu(U) \to a \in \nu(\mathrm{dom}(U)) \wedge b \in \nu(\mathrm{im}(U)); \\ &a \in \nu(\mathrm{dom}(U)) \to (\exists\, b \in \mathrm{im}(U))((a, b) \in \nu(U)). \end{aligned}$$

3.8.10. *Теорема.* *Аксиома выделения истинна в* BST *для классов.*

◁ Пусть Φ есть формула с двумя свободными переменными. Согласно теореме 3.8.8 для некоторой внутренней формулы φ будет:

$$\Phi(a, b) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} U \in \mathrm{Ult})((a, b) \in \nu(U) \wedge \varphi(U)).$$

Обозначим

$$\psi(V, W) := (\exists\, U \in \mathrm{Ult})(\mathrm{dom}(U) = V \wedge \mathrm{im}(U) = W \wedge \varphi(U)).$$

По теореме 3.8.10 и принципу переноса BST для любого стандартного множества A найдется такое стандартное множество R, что

$$(\forall V \in \mathrm{Ult}(A))((\exists\, W)\, \psi(V, W) \to (\exists\, W \in R)\, \psi(V, W)).$$

Обозначим $Y := \bigcup\bigcup R$. Тогда по принципу переноса и свойствам гнезд ультрафильтров для всякого $a \in A$ будем иметь:

$$\begin{aligned} (\exists\, b)\Phi(a, b) &\to (\exists^{\mathrm{st}} V \in \mathrm{Ult}(A))(\exists^{\mathrm{st}} W \in \mathrm{Ult})(a \in \nu(V) \wedge \psi(V, W)) \to \\ &\to (\exists^{\mathrm{st}} V \in \mathrm{Ult}(A))(\exists^{\mathrm{st}} W \in R)(a \in \nu(U) \wedge \psi(V, W)) \to \\ &\to (\exists\, b \in Y)(\exists^{\mathrm{st}} U)((a, b) \in \nu(U) \wedge \varphi(U)) \to \\ &\to (\exists\, b \in Y)\Phi(a, b). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\Psi(x, y, p)$ — произвольная формула. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого p и всякого стандартного X найдется такое множество Y, что верна формула

$$(\forall x \in X)((\exists\, y)\Psi(x, y, p) \to (\exists\, y \in Y)\Psi(x, y, p)).$$

Зафиксировав стандартные множества X и p, положим

$$\Phi(a, b) := (\exists\, x)(\exists\, p)(a = (x, p) \wedge \Psi(x, b, p)).$$

По доказанному найдется такое стандартное множество Y, что для любого $p \in P$ выполняется требуемая формула. Осталось применить аксиому ограниченности. $\rhd$

3.8.11. *Теорема.* *Аксиома насыщенности истинна в* BST *для классов.*

$\lhd$ В силу теоремы 3.8.8 для всякой формулы Φ с двумя свободными переменными можно построить такую внутреннюю формулу φ, что

$$\Phi(x, p) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} U)((p, x) \in \nu(U) \wedge \varphi(U)).$$

Отсюда для любого множества p по предложению 3.7.9 получаем

$$(\forall x)(\Phi(x, p) \to (\forall y \in \mu_p(x))\, \Phi(y, p)),$$

что и доказывает утверждение теоремы. $\rhd$

Итак, все аксиомы NCT истинны в $\mathfrak{N}$, следовательно, теорема 3.8.1 доказана полностью.

3.8.12. Примечания.

(1) Разумеется, тот факт, что собственные классы не являются элементами других классов, несколько ограничивает выразительные возможности теории NCT. В частности, в ней не удается в полном объеме формализовать конструкцию нестандартной оболочки внутреннего нормированного пространства E. В самом деле, элементами этой нестандартной оболочки являются классы эквивалентности внешнего подкласса ограниченных элементов E по внешнему отношению бесконечной близости в E. Но поскольку эти классы — внешние, то не существует класса, содержащего их в качестве элементов. Для того же, чтобы рассматривать нестандартную оболочку

E как класс, состоящий из представителей указанных классов эквивалентности, нужно добавить к NCT более сильную форму аксиомы выбора, утверждающую, например, возможность такого вполне упорядочения полумножества, при котором каждый *подкласс* этого полумножества имеет наименьший элемент. Такое упорядочение назовем сильно полным. Однако (см. [7]) такая аксиома не может быть добавлена к NCT без противоречия.

(2) Можно показать, что класс может быть сильно вполне упорядочен лишь в том случае, если для него существует биекция на полумножество стандартных элементов некоторого стандартного множества (полумножество ограниченных элементов внутреннего нормированного пространства таковым не является).

(3) Класс X имеет *стандартный размер*, если можно подыскать функцию F и класс D такие, что $X = F"{}^{\circ}D$. При этом функцию F можно считать внутренней, а класс D — стандартным. Имеет место следующее утверждение (см. [7]).

Теорема. *На полумножестве X можно задать сильно полный порядок в том и только в том случае, если оно имеет стандартный размер.*

(4) В NCT может быть формализовано и доказано утверждение, равносильное теореме о полноте нестандартной оболочки. Речь идет об утверждении о том, что всякая внешняя, т. е. занумерованная стандартными натуральными числами, S-фундаментальная, последовательность e_n элементов E (т. е. такая последовательность, что $(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon > 0)(\exists^{\mathrm{st}}n_0)(\forall^{\mathrm{st}}m, n > n_0)(\|e_n - e_m\| < \varepsilon)$), имеет S-предел в E (т. е. $(\exists e \in E)(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon > 0)(\exists^{\mathrm{st}}n_0)(\forall^{\mathrm{st}}n > n_0)\|e_n - e\| < \varepsilon)$).

Аналогично в рамках NCT могут быть формализованы содержащиеся в главе 7 рассмотрения, связанные с построением топологических групп, как фактор-групп гиперконечных групп по внешнему нормальному делителю.

3.9. Теория относительно стандартных множеств

В этом параграфе мы рассмотрим теорию относительно стандартных множеств в рамках теории внутренних множеств Э. Нельсона.

3.9.1. Наличие актуальных бесконечно малых чисел в нестандартном анализе дает возможность формировать новые (а по существу узаконивает давно отвергнутые) понятия для изучения классических объектов анализа. В частности, интересным приобретением являются новые математические понятия — микропредел конечной последовательности (см. 2.3.4) и микронепрерывность функции в точке (см. 4.4.5). Эти и другие аналогичные понятия позволяют сформулировать нестандартные определения предела (см. 2.3.5), непрерывности (см. 2.3.8, 4.2.7), компактности (см. 4.3.6) и т. д., лежащие в основе большого числа приложений нестандартного анализа.

Однако существенным ограничением является то, что все эти эквивалентные определения имеют дело со стандартными объектами. Даже если нестандартные методы применяются к изучению стандартного объекта, часто возникают трудности, связанные с указанным ограничением. Рассмотрим два типичных примера.

(1) Обратимся к нестандартному определению того факта, что $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} x_{nm} = a$ для стандартной двойной последовательности $(x_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}}$ и стандартного числа a. Воспользуемся утверждением (см. 2.3.5): *стандартное число $a \in \mathbb{R}$ будет пределом стандартной последовательности (a_n) тогда и только тогда, когда a — микропредел $a[N]$, где N — бесконечно большое натуральное число.* Отсюда получаем эквивалентное условие

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} x_{nm} = a \leftrightarrow (\forall N \approx +\infty)\,(\lim_{m\to+\infty} x_{N,m} \approx a).$$

Однако нельзя применить нестандартное определение предела далее, так как внутренняя последовательность $y_m := {}^*x_{N,m}$ не является стандартной. Аналогичная последовательность возникает и при рассмотрении повторного предела $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, а также при попытке получить нестандартное представление несобственного интеграла (см. утверждение 2.3.6).

(2) Попытаемся теперь дать нестандартное доказательство следующего утверждения:

Равномерный предел последовательности ограниченных равномерно непрерывных функций на равномерном пространстве будет равномерно непрерывной функцией.

Итак, стандартная последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится равномерно к стандартной функции f на множестве X. По тем же соображениям, что и в (1) для бесконечно большого натурального числа N и любого $x \in X$ будет $f_N(x) \approx f(x)$, так как $\sup\{|f_N(x) - f(x)| : x \in X\} \approx 0$. В силу 2.3.12 (ср. 4.4.6 (1)) достаточно показать, что для любых $x', x'' \in X$ верно $x' \approx x'' \to f(x') \approx f(x'')$. Итак, мы имеем $f(x') \approx f_N(x')$ и $f(x'') \approx f_N(x'')$. Однако, несмотря на равномерную непрерывность функции f_N, мы не можем утверждать, что $f_N(x') \approx f_N(x'')$, поскольку нестандартный равномерный критерий непрерывности неприменим к нестандартной функции f_N.

Трудности указанного вида преодолеваются путем введения относительно нестандартных элементов. Неформально говоря, относительно нестандартное множество — нестандартное множество более высокого порядка, чем данное.

3.9.2. Концепцию относительной стандартности мы будем рассматривать в рамках теории внутренних множеств Э. Нельсона.

Обозначим символом $\mathrm{Ffin}(f)$ утверждение: f — функция и каждый элемент из образа $\mathrm{im}(f)$ представляет собой конечное множество, символически:

$$\mathrm{Ffin}(f) := \mathrm{Func}\,(f) \ \wedge\ (\forall x \in \mathrm{im}(f))\ \mathrm{fin}(f(x)).$$

Элемент x назовем *допустимым* (в символах $\mathrm{Su}(x)$), если $(\exists^{\mathrm{st}} X)\,(x \in X)$. Введем определимый в IST предикат $x\,\mathrm{st}\,y$ (читается «x стандартно относительно y» или «x является y-стандартным») формулой:

$$x\,\mathrm{st}\,y := (\exists^{\mathrm{st}}\varphi)(\mathrm{Ffin}(\varphi) \wedge y \in \mathrm{dom}(\varphi) \wedge x \in \varphi(y)).$$

Напомним, что $\mathrm{fin}(x)$ означает лишь то, что мощность x есть элемент ω, т. е. натуральное число, возможно, и бесконечно большое, если x — нестандартное множество.

3.9.3. Ниже нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Допустим, что $A(x, y)$ — *формула* ZFC, *причем в теории* ZFC *выводима формула* $(\forall x)(\exists!\, y)A(x, y)$. *Тогда в теории* IST *выводима формула* $(\forall^{\mathrm{st}} x)(\forall y)(A(x, y) \to \mathrm{St}(y))$.

$\lhd$ Вытекает непосредственно из принципа переноса. $\rhd$

В дальнейшем будем использовать следующие сокращения, аналогичные сокращениям 3.3.4:

$$(\forall^{\mathrm{st}\,y} x)\, \varphi := (\forall\, x)\, (x \text{ стандартно относительно } y \to \varphi);$$
$$(\exists^{\mathrm{st}\,y} x)\, \varphi := (\exists\, x)\, (x \text{ стандартно относительно } y \wedge \varphi);$$
$$(\forall^{\mathrm{st\,fin}\,y} x)\, \varphi := (\forall^{\mathrm{st}\,y} x)\, (x \text{ конечно} \to \varphi);$$
$$(\exists^{\mathrm{st\,fin}\,y} x)\, \varphi := (\exists^{\mathrm{st}\,y} x)\, (x \text{ конечно} \wedge \varphi).$$

3.9.4. *Двуместный предикат $x \,\mathrm{st}\, y$ обладает следующими свойствами:*

(1) $x \,\mathrm{st}\, y \ \to\ \mathrm{Su}(x) \wedge \mathrm{Su}(y)$.
(2) $x \,\mathrm{st}\, y \wedge y \,\mathrm{st}\, z \ \to\ x \,\mathrm{st}\, z$.
(3) $x \,\mathrm{st}\, y \wedge \mathrm{fin}(x) \ \to\ (\forall z \in x)\, z \,\mathrm{st}\, y$.
(4) $\mathrm{Su}(y) \wedge \mathrm{St}(x) \ \to\ x \,\mathrm{st}\, y$.

В последнем утверждении St — это уже знакомый одноместный предикат из IST, выражающий свойство быть «стандартным», см. 3.3.1.

$\lhd$ Утверждение (1) очевидно. Чтобы установить (2), допустим, что $x \in \varphi_1(y)$ и $y \in \varphi_2(z)$, где φ_1 и φ_2 — стандартные функции, причем $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — конечные множества для любого $t \in \mathrm{dom}(\varphi_i)$. Построим функцию h следующим образом:

$$\mathrm{dom}\, h := \mathrm{dom}(\varphi_2),\ h(t) := \{\varphi_1(u) :\ u \in \varphi_2(t) \cap \mathrm{dom}(\varphi_1)\}\ (t \in \mathrm{dom}(\varphi_2)).$$

Как видно, $h(t)$ конечно для любого $t \in \mathrm{dom}(\varphi_2)$ из-за конечности $\varphi_1(t)$ и $x \in h(z)$. Согласно предложению 3.9.3 h — стандартная функция, что и доказывает (2).

Для обоснования (3) предположим, что ψ — стандартная функция, $\psi(t)$ конечно для каждого $t \in \mathrm{dom}(\psi)$, и возьмем $x \in \psi(y)$. Вновь, опираясь на предложение 3.9.3, построим новую стандартную функцию g следующим образом:

$$g(t) := \{v :\ v \in \psi(t)\ \wedge\ v \text{ конечно}\} \quad (t \in \mathrm{dom}(g) := \mathrm{dom}(\psi)).$$

Ясно, что $z \in g(y)$, и остается заметить, что для любого $t \in \mathrm{dom}(\psi)$ множество $g(t)$ конечно, как конечное объединение конечных множеств.

Наконец, чтобы убедиться в справедливости (4), возьмем стандартное множество X, содержащее y. Существование такого X следует из $\mathrm{Su}(y)$. Определим функцию φ формулой $\varphi(t) := \{x\}$ $(t \in X)$. Эта функция стандартна ввиду стандартности x и $x \in \varphi(y)$. $\rhd$

3.9.5. *Релятивизированный принцип переноса.* *Если A — внутренняя формула, содержащая в качестве свободных переменных только $x, t_1, \dots, t_k$ $(k \geq 1)$, то для любого допустимого τ имеет место формула*

$$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t_k)((\forall^{\mathrm{st}\,\tau} x)\, A(x, t_1, \dots, t_k) \to (\forall x)\, A(x, t_1, \dots, t_k)).$$

$\lhd$ Для краткости положим $k = 1$. Нужно доказать справедливость следующего предложения в IST:

$$(\forall \tau)(\mathrm{Su}(\tau) \to (\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t)((\forall^{\mathrm{st}\,\tau} x)\, A(x, t) \to (\forall x)\, A(x, t))).$$

Поскольку $\neg\,\mathrm{Su}(t) \to \neg(t \,\mathrm{st}\, \tau)$, то ввиду предложения 3.9.4 последняя формула эквивалентна следующей:

$$(\forall \tau)(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t)((\forall^{\mathrm{st}\,\tau} x)\, A(x, t) \to (\forall x)\, A(x, t)).$$

Перепишем эту формулу на языке IST:

$$\begin{aligned}(\forall \tau)(\forall^{\mathrm{st}} \varphi)(\forall t)\, (\tau \in \mathrm{dom}(\varphi) \wedge t \in \varphi(\tau) \to \\ \to ((\forall^{\mathrm{st}} \psi)(\forall x)(\tau \in \mathrm{dom}(\psi) \wedge x \in \psi(\tau) \to A(x, t)) \to \\ \to (\forall y)\, A(y, t))).\end{aligned}$$

Здесь и ниже φ и ψ обозначают функции, значениями которых служат конечные множества, а Φ — какое-нибудь множество таких функций. К полученной формуле применим алгоритм Нельсона 3.3.15. Тогда получим еще одну эквивалентную (в исчислении предикатов) запись

$$\begin{gathered}(\forall^{\mathrm{st}} \varphi)\, (\forall \tau, t)\, (\exists^{\mathrm{st}} \psi)(\tau \in \mathrm{dom}(\varphi) \wedge t \in \varphi(\tau) \wedge \\ \wedge (\forall x)(\tau \in \mathrm{dom}(\psi) \wedge x \in \psi(\tau) \to A(x, t)) \to (\forall y)\, A(y, t)).\end{gathered}$$

В силу принципа идеализации последняя эквивалентна формуле

$$\begin{gathered}(\forall^{\mathrm{st}} \varphi)(\exists^{\mathrm{st\ fin}} \Phi)(\forall \tau)\, (\forall t)(\tau \in \mathrm{dom}(\varphi) \wedge t \in \varphi(\tau) \wedge \\ \wedge (\forall \psi \in \Phi)(\forall x)(\tau \in \mathrm{dom}(\psi) \wedge x \in \psi(\tau) \to A(x, t)) \to (\forall y)\, A(y, t)).\end{gathered}$$

В соответствии с принципом переноса у первых двух кванторов знак st можно опустить, и мы приходим к тому, что нужно обосновать следующую формулу в теории ZFC:

$$(\forall\varphi)(\exists^{\mathrm{fin}}\Phi)(\forall\tau,t)(\tau\in\mathrm{dom}(\varphi)\wedge t\in\varphi(\tau)\wedge$$
$$\wedge(\forall\psi\in\Phi)(\forall x)(\tau\in\mathrm{dom}(\psi)\wedge x\in\psi(\tau)\to A(x,t))\to$$
$$\to(\forall y)\,A(y,t)).$$

Рассмотрим фиксированную функцию φ и построим одноточечное множество $\Phi=\{\psi\}$, где функция ψ определяется следующим образом. Пусть $M:=\bigcup\mathrm{im}(\varphi)$ и $M_1:=\{t\in M:\ (\exists y)\,\neg A(y,t)\}$. Из аксиом ZFC следует существование такой функции h, что $\mathrm{dom}(h)=M_1$ и верна $\neg A(h(t),t)$ для всех $t\in\mathrm{dom}(h)$. Положим теперь $\mathrm{dom}(\psi):=\mathrm{dom}(\varphi)$ и $\psi(\alpha):=\{h(\nu)\,:\,\nu\in\varphi(\alpha)\cap M_1\}$ $(\alpha\in\mathrm{dom}(\varphi))$. Если $\varphi(\alpha)\cap M_1=\varnothing$, то полагаем $\psi(\alpha):=\varnothing$. Заметим, что $\psi(\alpha)$ конечно ввиду конечности $\varphi(\alpha)$. Зафиксируем $\tau\in\mathrm{dom}(\varphi)$ и $t\in\varphi(\tau)$. Для обоснования требуемой ZFC-формулы теперь достаточно показать, что верна следующая импликация:

$$(\forall x\in\psi(\tau))\,A(x,t)\to(\forall y)\,A(y,t).$$

Если $t\in M-M_1$, то указанная импликация верна, а если $t\in M_1$, то ее посылка ложна. В самом деле, если $x=h(t)$, то $x\in\psi(\tau)$, ибо $t\in\varphi(\tau)\cap M_1$, но $A(h(t),t)$ ложна. $\rhd$

3.9.6. *Релятивизированный принцип идеализации.* *Пусть дана некоторая внутренняя формула $B(x,y)$, которая наряду с x и y может содержать еще какие-нибудь свободные переменные. Тогда для любого допустимого τ выполняется*

$$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau\,\mathrm{fin}}\,z)(\exists x)(\forall y\in z)\,B(x,y)\leftrightarrow(\exists x)(\forall^{\mathrm{st}\,\tau}y)\,B(x,y).$$

$\lhd$ Так же, как и в 3.9.5, φ и ψ обозначают функции, значениями которых служат конечные множества, а Φ и Ψ — некоторые множества таких функций. Заметим прежде всего, что сформулированный принцип будет установлен, если доказать импликацию $\to$, так как противоположная импликация следует из 3.9.4 (3). Допустим, что формула B содержит еще одну свободную переменную t. Тогда нужно показать справедливость формулы

$$(\forall\tau)(\mathrm{Su}(\tau)\to(\forall t)(\forall^{\mathrm{st}\ \tau\ \mathrm{fin}}x)(\exists y)(\forall z\in x)\,B(z,y,t)\to$$
$$\to(\exists u)(\forall^{\mathrm{st}\ \tau}v)B(v,u,t))).$$

Привлекая вновь 3.9.4, замечаем, что эта формула эквивалентна следующей:

$$(\forall \tau)(\forall t)((\forall^{\mathrm{st}\ \tau\ \mathrm{fin}} x)(\exists y)(\forall z \in x)\, B(z,y,t) \to (\exists u)(\forall^{\mathrm{st}\ \tau} v)\, B(v,u,t)).$$

Перепишем последнее утверждение в терминах IST, т. е. предикат $x \operatorname{st} \tau$ заменим на эквивалентный фрагмент текста в языке IST

$$\begin{aligned}
&(\forall \tau)(\forall t)((\forall^{\mathrm{st}} \varphi)(\forall^{\mathrm{fin}} x)(\tau \in \mathrm{dom}(\varphi) \wedge x \in \varphi(\tau) \to \\
&\qquad \to (\exists y)(\forall z \in x)\, B(z,y,t)) \to \\
&\qquad \to (\exists u)(\forall^{\mathrm{st}} \Psi)(\forall v)\left(\tau \in \mathrm{dom}(\psi) \wedge v \in \psi(\tau) \to B(v,u,t)\right)) \\
&\qquad \leftrightarrow \\
&(\forall \tau)(\forall t)((\forall^{\mathrm{st}} \varphi)(\forall^{\mathrm{fin}} x)(\tau \in \mathrm{dom}(\varphi) \wedge x \in \varphi(\tau) \to \\
&\qquad \to (\exists y)(\forall z \in x)\, B(z,y,t)) \to \\
&\qquad \to (\forall^{\mathrm{st}\ \mathrm{fin}} \Psi)(\exists u)(\forall \psi \in \Psi)(\forall v)(\tau \in \mathrm{dom}(\psi) \wedge v \in \psi(\tau) \to \\
&\qquad \to B(v,u,t))) \\
&\qquad \leftrightarrow \\
&(\forall^{\mathrm{st}\ \mathrm{fin}} \Psi)(\exists^{\mathrm{st}\ \mathrm{fin}} \Phi)(\forall \tau)(\forall t)((\forall \varphi \in \Phi)(\forall^{\mathrm{fin}} x) \\
&\qquad (\tau \in \mathrm{dom}(\varphi) \wedge x \in \varphi(\tau) \to \\
&\qquad \to (\exists y)(\forall z \in x)\, B(z,y,t)) \to (\exists u)(\forall \psi \in \Psi)(\forall v) \\
&\qquad (\tau \in \mathrm{dom}(\psi) \wedge v \in \psi(\tau) \to B(v,u,t))).
\end{aligned}$$

В последней из цепочки эквивалентных формул, как и в доказательстве 3.9.5, можно опустить знак st в первых двух кванторах ввиду принципа переноса, и вновь дело сводится к доказательству полученной ZFC-формулы. Возьмем произвольное конечное множество Ψ функций и определим Φ, полагая $\Phi := \{\varphi\}$, где

$$\mathrm{dom}(\varphi) := \bigcup_{\psi \in \Psi} \mathrm{dom}(\psi), \quad \varphi(\alpha) := \left\{ \bigcup \psi(\alpha) : \ \psi \in \Psi,\ \alpha \in \mathrm{dom}(\psi) \right\}.$$

Заметим, что $\varphi(\alpha)$ — конечное множество. Фиксируем произвольные τ и t. Если $\tau \notin \mathrm{dom}(\varphi)$, то $\tau \notin \mathrm{dom}(\psi)$ для всех $\psi \in \Psi$, значит, требуемая формула истинна. Если же $\tau \in \mathrm{dom}(\varphi)$, то необходимо обосновать справедливость импликации

$$\begin{gathered}
(\exists y)\ \left(\forall z \in \bigcup \{\psi(\tau) : \ \psi \in \Psi,\ \tau \in \mathrm{dom}(\psi)\}\right)\ B(z,y,t) \to \\
\to (\exists u)(\forall \psi \in \Psi)(\forall v)(\tau \in \mathrm{dom}(\psi) \wedge v \in \psi(\tau) \to B(v,u,t)).
\end{gathered}$$

Посылку этой импликации можно преобразовать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&(\exists y)\big(\forall z \in \bigcup\{\psi(\tau) : \psi \in \Psi,\ \tau \in \mathrm{dom}(\psi)\}\big)\, B(z,y,t)\\
&\qquad\leftrightarrow\\
&\qquad(\exists y)(\forall z)(\exists \psi \in \Psi)(\tau \in \mathrm{dom}(\psi) \wedge z \in \psi(\tau) \to B(z,y,t))\\
&\qquad\leftrightarrow\\
&\qquad(\exists y)(\forall z)(\forall \psi \in \Psi)(\tau \in \mathrm{dom}(\psi) \wedge z \in \psi(\tau) \to B(z,y,t)).
\end{aligned}
$$

Теперь очевидно, что в указанной импликации посылка равносильна заключению. $\triangleright$

3.9.7. Отметим несколько простых следствий из уже установленных принципов 3.9.5 и 3.9.6.

(1) *Пусть выполнены условия предложения 3.9.3, x — некоторый τ-стандартный элемент и y удовлетворяет $A(x,y)$. Тогда y также τ-стандартный элемент.*

$\triangleleft$ Следует непосредственно из релятивизированного принципа переноса. $\triangleright$

(2) *Для того чтобы τ-стандартное множество x было конечным, необходимо и достаточно, чтобы x состояло из τ-стандартных элементов.*

$\triangleleft$ Импликация $\to$ совпадает с 3.9.4 (3). Докажем обратную импликацию. Для этого запишем заключение нашего утверждения в виде $(\forall u \in x)\,(\exists^{\mathrm{st}\ \tau} v)\,(u = v)$. Применив релятивизированный принцип идеализации, это предложение можно переписать в следующей эквивалентной форме: $(\exists^{\mathrm{st}\ \tau\ \mathrm{fin}} V)(\forall u \in x)(\exists v \in V)(u = v)$, которая означает, что $x \subset V$ и x конечно, поскольку таково множество V. $\triangleright$

(3) $\mathrm{fin}(x) \to |x|\,\mathrm{st}\,\tau$.

$\triangleleft$ Следует непосредственно из (1). $\triangleright$

3.9.8. Покажем, что для принципа стандартизации нельзя установить результат, аналогичный 3.9.5 и 3.9.6. Осуждаемый *релятивизированный принцип стандартизации* запишем в виде

(1) $(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} x)(\exists^{\mathrm{st}\,\tau} y)(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} z)(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge C(z))$,

где $C(z)$ — формула IST, содержащая, быть может, свободные переменные, отличные от z. Будет установлено, что 3.9.8 (1) приводит к противоречию, даже если формула $C(z)$ удовлетворяет следующему дополнительному требованию: каждое вхождение предиката st в $C(z)$ имеет вид $\cdot \,\mathrm{st}\, \tau$, а одноместный предикат $\mathrm{st}(x)$ не входит в $C(z)$.

Дело в том, что существование стандартной части ${}^\circ t$ для каждого доступного гипердействительного числа $t \in \mathbb{R}$ следует в IST из принципа стандартизации, см. 2.2.16. Рассуждения, приводящие к этому результату, можно повторить и для τ-стандартной части, если имеет место 3.9.8 (1). Пусть τ — произвольное допустимое внутреннее множество. Число $x \in \mathbb{R}$ назовем τ-*бесконечно малым* и напишем $x \overset{\tau}{\approx} 0$, если $|x| \leq \varepsilon$ для любого τ-стандартного $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Итак, из 3.9.8 (1) с формулой $C(z)$, удовлетворяющей указанному выше ограничению, вытекает справедливость предложения

$$(\forall \tau)\,(\forall t \in \mathbb{R})((\exists^{\mathrm{st}\ \tau} u \in \mathbb{R})(|t| < u) \to (\exists^{\mathrm{st}\ \tau} v \in \mathbb{R})(|t - v| \overset{\tau}{\approx} 0)).$$

Тот факт, что 3.9.8 (1) ложно, вытекает теперь из следующего ниже предложения.

3.9.9. *Существуют бесконечно большое натуральное число N и $x \in [0, 1]$ такие, что если y является N-бесконечно близким к x, то y не будет N-стандартным.*

$\lhd$ Доказательство будет приведено ниже в 4.6.15. $\rhd$

3.9.10. В заключение этого параграфа мы представим вкратце аксиоматическую теорию RIST относительно внутренних множеств. Язык этой теории получается из языка теории Цермело — Френкеля добавлением одного двуместного предиката st. Как и выше, выражение $x \,\mathrm{st}\, y$ читается как «x стандартно относительно y». Формула теории RIST внутренняя, если она не содержит предиката st. Так же, как и в 3.9.3 определяются внешние кванторы $\forall^{\mathrm{st}\,\alpha}$, $\exists^{\mathrm{st}\,\alpha}$, $\forall^{\mathrm{st\,fin}\,\alpha}$, $\exists^{\mathrm{st\,fin}\,\alpha}$.

Аксиомы RIST включают все аксиомы теории Цермело — Френкеля. Предикат st удовлетворяет следующим трем аксиомам:

(1) $(\forall x)\, x \,\mathrm{st}\, x$;

(2) $(\forall x)(\forall y)\, x \,\mathrm{st}\, y \vee y \,\mathrm{st}\, x$;

(3) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \,\mathrm{st}\, y \wedge y \,\mathrm{st}\, z \to x \,\mathrm{st}\, z)$.

Кроме того, теория RIST (как и IST) включает три новые схемы. Схемы аксиом переноса и идеализации те же, что и в 3.9.5 и 3.9.6, а в схеме аксиом стандартизации необходимо ограничить класс формул в соответствии с замечанием 3.9.8.

3.9.11. ***Схема аксиом переноса.*** Если $\varphi(x, t_1, \dots, t_k)$ — внутренняя формула со свободными переменными $x, t_1, \dots, t_k$ и τ — фиксированное множество, то

$$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t_k) \big((\forall^{\mathrm{st}\,\tau} x)\, \varphi(x, t_1, \dots, t_k) \ \rightarrow\ (\forall x)\, \varphi(x, t_1, \dots, t_k)\big).$$

3.9.12. ***Схема аксиом идеализации.*** Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ — внутренняя формула со свободными переменными $x_1, \dots, x_k, y$, причем, возможно, есть и другие свободные переменные. Пусть, далее, $\tau_1, \dots, \tau_k$ — фиксированные множества и β не является стандартным относительно $(\tau_1, \dots, \tau_k)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) **Принцип ограниченной идеализации:**
$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau_1\,\mathrm{fin}} z_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau_k\,\mathrm{fin}} z_k)$
$(\exists^{\mathrm{st}\,\beta} y)(\forall x_1 \in z_1) \dots (\forall x_k \in z_k)\, \varphi(x_1, \dots, x_k, y) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}\,\beta} y)(\forall^{\mathrm{st}\,\tau_1} x_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau_k} x_k)\, \varphi(x_1, \dots, x_k, y)$.

(2) **Принцип неограниченной идеализации:**
$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau\,\mathrm{fin}} z_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau\,\mathrm{fin}} z_k)$
$(\exists y)(\forall x_1 \in z_1) \dots (\forall x_k \in z_k)\, \varphi(x_1, \dots, x_k, y) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists y)(\forall^{\mathrm{st}\,\tau_1} x_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau_k} x_k)\, \varphi(x_1, \dots, x_k, y)$.

3.9.13. Для формулировки схемы аксиом стандартизации введем класс τ-внешних формул $\mathscr{F}_\tau$, где τ — фиксированное множество. Если $\mathscr{F}$ — класс формул теории RIST, то $\mathscr{F}_\tau$ определяется как наименьший его подкласс, удовлетворяющий следующим условиям:

(1) атомарная формула $x \in y$, где x и y — переменные или константы, входит в $\mathscr{F}_\tau$;

(2) если формулы φ и ψ входят в $\mathscr{F}_\tau$, то и формулы $\neg\varphi$ и $\varphi \rightarrow \psi$ входят в $\mathscr{F}_\tau$;

(3) если формула $\varphi(x, y)$ входит в $\mathscr{F}_\tau$, то в $\mathscr{F}_\tau$ входит и формула $(\exists y)\, \varphi(x, y)$;

(4) если формула $\varphi(x, y)$ входит в $\mathscr{F}_\tau$, а β — такое множество, что множество τ стандартно относительно β, то и формула $(\exists^{\mathrm{st}\,\beta} y)\, \varphi(x, y)$ входит в $\mathscr{F}_\tau$.

3.9.14. *Схема аксиом стандартизации.* *Если τ — фиксированное множество и φ — некоторая τ-внешняя формула, то*

$$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} y)(\exists^{\mathrm{st}\,\tau} z)(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t)(t \in z \leftrightarrow (t \in y \wedge \varphi(t))).$$

3.9.15. *Теорема.* *Теория* RIST *является консервативным расширением теории* ZFC.

3.9.16. Примечания.

(1) Материал, вошедший в пункты 3.9.2–3.9.9, взят из статьи Е. И. Гордона [44], см. также [313]. Так как принцип стандартизации не имеет места, то, в частности, можно сделать вывод, что принцип стандартизации теории IST не является следствием остальных аксиом этой теории (подробности см. в [44, 313]).

(2) Определения и основные свойства относительно стандартных элементов получены в рамках теории внутренних множеств IST, однако все эти результаты имеют место и в любом нестандартном универсуме, удовлетворяющем принципу Нельсона. При этом, разумеется, необходимо иметь в виду особенности классической установки нестандартного анализа 3.5.2–3.5.12.

(3) Аксиоматическая теория RIST, изложенная в 3.9.10–3.9.14, была предложена И. Пэрером [441]. Там же установлена теорема 3.9.15. Ранее И. Пэрер осуществил (непротиворечивое относительно ZFC) расширение теории IST посредством добавления последовательности не определимых в IST предикатов $\mathrm{St}_p(x)$ (x стандартно степени $1/p$), см. [440]. Другие результаты в этом направлении см. в [185, 442].

(4) В [44, 313] рассмотрен также более простой вариант понятия относительной стандартности. Именно, вводится отношение x *сильно стандартен относительно* τ или x *сильно* τ*-стандартен* формулой

$$x \,\mathrm{sst}\, \tau := (\exists^{\mathrm{st}} \varphi)\,(\mathrm{Fnc}\,(\varphi) \wedge \tau \in \mathrm{dom}(\varphi) \wedge x = \varphi(\tau)).$$

Ясно, что $x \,\mathrm{sst}\, y \rightarrow x \,\mathrm{st}\, y$. Обратное, вообще говоря, неверно, см. [313].

(5) Утверждения 3.9.4 $(1, 2, 4)$ и релятивизированный принцип переноса остаются в силе, если заменить в них все вхождения предиката $\cdot\,\mathrm{st}\,\cdot$ на $\cdot\,\mathrm{sst}\,\cdot$. В релятивизированном принципе идеализации сохраняется лишь импликация $\rightarrow$.

(6) Имеет место следующая формула (см. [313]):

$$(\exists N \in \omega)\,(\exists n < N)\,(\neg n \,\mathrm{sst}\, N).$$

$\lhd$ Достаточно доказать, что в IST ложно предложение

$$(\forall N \in \omega)\,(\forall n < N)(\exists^{\mathrm{st}} \varphi \in \omega^{\omega})(n = \varphi(N)).$$

Применив к нему принципы идеализации и переноса, получаем внутреннее предложение

$$(\exists \Phi \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\omega))(\forall n, N \in \omega)(n < N \to (\exists \varphi \in \Phi)(n = \varphi(N))).$$

Покажем, что отрицание последнего предложения истинно в теории ZFC.

В самом деле, пусть $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ — произвольное конечное множество функций $\varphi_l : \omega \to \omega$. Выберем $N > k$. Тогда, очевидно, имеется $n \in \{0, 1, \dots, N-1\} - \{\varphi_1(N), \dots, \varphi_k(N)\}$. Пара чисел n, N удовлетворяет формуле $n < N \wedge (\forall \varphi \in \Phi)\,(n \neq \varphi(N))$, что и требовалось. $\rhd$

(7) Из (6) можно вывести, что 3.9.4 (3) (как и импликация $\leftarrow$ в релятивизированном принципе идеализации) не имеет места для предиката sst. В самом деле, конечное множество $\{0, 1, \dots, N-1\}$ стандартно относительно N (в смысле нового определения относительной стандартности). Однако можно указать такое N, при котором некоторый элемент $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ не будет стандартным относительно N в смысле нового определения. Отсюда вытекает ложность 3.9.4 (3).

Глава 4

Монады в общей топологии

В рамках теоретико-множественной установки математики в начале XX века был выработан универсальный подход к изучению структуры непрерывности и близости, получивший оформление в общей топологии.

Рассматривая микроструктуру числовой прямой, мы уже увидели, что с позиций нестандартного анализа набор актуальных бесконечно малых возникает как монада — как внешнее пересечение стандартных элементов фильтра окрестностей нуля единственной отделимой топологии, согласованной со стандартной алгебраической структурой поля вещественных чисел. Можно сказать, что в понятии монады фильтра фактически осуществляется определенный синтез общетопологических и инфинитезимальных идей. Соответствующие связи станут основным предметом исследования в настоящей главе.

Мы сосредоточимся на уже наиболее разработанных способах изучения классических топологических концепций и конструкций, группирующихся вокруг компактности, с помощью идеализации, допускаемой в нестандартной теории множеств.

Вклад нового подхода в эту проблематику связан, главным образом, с выработкой принципиально важного понятия околостандартной точки. Соответствующий критерий компактности стандартного пространства — околостандартность каждой его точки — показывает значение и смысл концепции околостандартности, осуществляющей известную индивидуализацию для точек общепринятого понятия компактности, относящегося к множествам.

Подобного рода приемы индивидуализации составляют заметную и характерную часть арсенала нестандартных методов анализа.

4.1. Монады и фильтры

Простейшим примером фильтра служит, как известно, совокупность надмножеств некоторого непустого множества. Нестандартный анализ позволяет подобным же образом изучать произвольный стандартный фильтр как стандартизацию фильтра внешних надмножеств подходящим образом задаваемого внешнего множества — монады этого фильтра. Способ введения таких монад и их простейшие свойства рассматриваются в текущем параграфе.

4.1.1. Пусть X — стандартное множество и $\mathscr{B}$ — стандартный базис фильтра в X. Таким образом, $\mathscr{B} \neq \varnothing$, $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$, $\varnothing \notin \mathscr{B}$ и B_1, $B_2 \in \mathscr{B} \to (\exists\, B \in \mathscr{B})(B \subset B_1 \cap B_2)$. Символом $\mu(\mathscr{B})$ обозначают *монаду* $\mathscr{B}$, т. е. внешнее множество, определенное соотношением

$$\mu(\mathscr{B}) := \bigcap\{B : B \in {}^{\circ}\mathscr{B}\}.$$

4.1.2. *Внутреннее множество является надмножеством некоторого стандартного элемента стандартного базиса фильтра $\mathscr{B}$ в том и только в том случае, если оно содержит монаду $\mu(\mathscr{B})$.*

$\triangleleft$ Если $A \supset B$ и $B \in {}^{\circ}\mathscr{B}$, то $A \supset \mu(\mathscr{B})$ по определению. Если, наоборот, $A \supset \mu(\mathscr{B})$, то, учитывая, что по принципу идеализации имеется внутреннее множество $B \in \mathscr{B}$, для которого $B \subset \mu(\mathscr{B})$, выводим: $A \supset B$. $\triangleright$

4.1.3. *Каждый стандартный фильтр $\mathscr{F}$ является стандартизацией внешнего главного фильтра надмножеств монады $\mu(\mathscr{F})$.*

$\triangleleft$ В символах требуется установить

$$(\forall^{\mathrm{st}} A)((A \in \mathscr{F}) \leftrightarrow (A \supset \mu(\mathscr{F}))).$$

Последнее соотношение, очевидно, содержится в 4.1.2. $\triangleright$

4.1.4. *Монада фильтра $\mathscr{F}$ является внутренним множеством в том и только в том случае, если она стандартна. При этом исходный стандартный $\mathscr{F}$ есть фильтр надмножеств $\mu(\mathscr{F})$.*

$\lhd$ Если $\mu(\mathscr{F})$ — внутреннее множество, то с учетом 4.1.3 и принципа идеализации имеем

$$(\exists\, A)(\forall^{\mathrm{st}} F)(F \in \mathscr{F} \leftrightarrow F \supset A) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{U})(\exists\, A)$$
$$(\forall\, F \in \mathscr{U})(F \in \mathscr{F} \leftrightarrow F \supset A) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} U)\ (\exists\, A)(U \in \mathscr{F} \leftrightarrow U \supset A).$$

Привлекая принцип переноса, выводим, что $\mathscr{F}$ — фильтр надмножеств некоторого множества A. Поскольку такое множество A единственно, $A = \mu(\mathscr{F})$ и при этом A стандартно. $\rhd$

4.1.5. Для стандартного базиса фильтра $\mathscr{B}$ элементы из $\mu(\mathscr{B})$ называют *бесконечно малыми* или *удаленными* (относительно $\mathscr{B}$). Аналогично, элемент $B \in \mathscr{B}$ такой, что $B \subset \mu(\mathscr{B})$, также называют бесконечно малым или удаленным. Совокупность всех бесконечно удаленных множеств из $\mathscr{B}$ обозначают ${}^a\mathscr{B}$.

4.1.6. Примеры.

(1) Монада $\mu(\mathbb{R})$ представляет собой монаду фильтра окрестностей нуля обычной топологии на $\mathbb{R}$.

(2) Пусть $\mathscr{B}$ — базис фильтра и $\mathrm{fil}\,\mathscr{B}$ — фильтр, порожденный $\mathscr{B}$, т. е. совокупность надмножеств элементов из $\mathscr{B}$. Символически:

$$\mathrm{fil}\,\mathscr{B} := \{F \subset X : (\exists\, B \in \mathscr{B})(B \subset F)\}.$$

По принципу переноса если $\mathscr{B}$ — стандартный базис фильтра (в стандартном множестве X), то $\mathrm{fil}\,\mathscr{B}$ — стандартный фильтр. При этом $\mu(\mathscr{B}) = \mu(\mathrm{fil}\,\mathscr{B})$. Отметим, что в дальнейшем бывает удобным рассматривать монаду произвольного внутреннего фильтра $\mathscr{F}$. Ее определяют очевидным образом: $\mu(\mathscr{F}) := \bigcap {}^{\circ}\mathscr{F}$. Подчеркнем, что монада фильтра $\mathscr{F}$ в стандартном множестве X обязательно является внешним надмножеством некоторого внутреннего элемента $\mathscr{F}$.

(3) Пусть Ξ — стандартное направление, т. е. непустое направленное множество. В силу принципа идеализации в Ξ имеются внутренние элементы, мажорирующие все стандартные точки Ξ. Такие элементы Ξ называют *бесконечно большими, недоступными* или *удаленными* в Ξ. Рассмотрим стандартный базис фильтра хвостов $\mathscr{B} := \{[\xi, \rightarrow) := \{\eta \in \Xi : \eta \geq \xi\} : \xi \in \Xi\}$.

По определению $\eta \in \mu(\mathscr{B}) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \Xi)\, \eta \geq \xi$, т. е. монада фильтра хвостов, как и следовало ожидать, составлена из удаленных элементов рассматриваемого направления. Используем обозначение ${}^a\Xi := \mu(\mathscr{B})$.

(4) Пусть $\mathscr{E}$ — некоторое стандартное покрытие стандартного множества X, т. е. $X \subset \bigcup \mathscr{E}$. Рассмотрим совокупность $\Xi(\mathscr{E})$ стандартных конечных объединений элементов $\mathscr{E}$. Таким образом, $\Xi(\mathscr{E}) := {}^*\{\cup \mathscr{E}_0 : \mathscr{E}_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{st\,fin}}(\mathscr{E})\}$, где $\mathscr{P}_{\mathrm{st\,fin}}(\mathscr{E})$ — множество стандартных конечных подмножеств $\mathscr{E}$. Внешнее объединение бесконечно удаленных элементов $\Xi(\mathscr{E})$ называют *монадой* $\mathscr{E}$ и обозначают $\mu(\mathscr{E})$. Итак,

$$\mu(\mathscr{E}) = \bigcup \{E : E \in {}^\circ\mathscr{E}\}.$$

Аналогично определяют монаду любого фильтрованного по возрастанию семейства множеств.

(5) Пусть $f \subset X \times Y$ и $\mathscr{F}$ — (базис) фильтра в X, причем f задевает $\mathscr{F}$, т. е. $(\forall F \in \mathscr{F})\ \mathrm{dom}(f) \cap F \notin \varnothing$. Положим, как это принято,

$$f(\mathscr{F}) := \{B \subset Y : (\exists F \in \mathscr{F})(B \supset f(F))\}.$$

Таким образом, $f(\mathscr{F})$ — фильтр в Y — образ $\mathscr{F}$ при соответствии f. Принимая гипотезу *стандартности антуража*, т. е., считая X, Y, f, $\mathscr{F}$ стандартными объектами, с учетом принципа идеализации имеем

$$\begin{gathered}
y \in \mu(f(\mathscr{F})) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} B \in f(\mathscr{F}))(y \in B) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(y \in f(F)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\exists x)(x \in F \wedge y \in f(x)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists x)(\forall F \in \mathscr{F}_0)(x \in F \wedge y \in f(x)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists x)\ (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(x \in F \wedge y \in f(x)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists x \in \mu(\mathscr{F}))(y \in f(x)) \leftrightarrow (y \in f(\mu(\mathscr{F}))).
\end{gathered}$$

Итак, *образ монады фильтра — есть монада образа этого фильтра*:

$$\mu(f(\mathscr{F})) = f(\mu(\mathscr{F})).$$

Пусть теперь $\mathscr{G}$ — базис фильтра в Y, причем f^{-1} задевает $\mathscr{G}$. Рассмотрим прообраз $f^{-1}(\mathscr{G})$ фильтра $\mathscr{G}$ при соответствии f (т. е. образ этого фильтра при соответствии f^{-1}). Ясно, что в силу уже доказанного $\mu(f^{-1}(\mathscr{G})) = f^{-1}(\mu(\mathscr{G}))$. Полезно подчеркнуть, что последнее соотношение может быть доказано без использования «насыщения». В самом деле, прямо по определению выводим

$$\mu(f^{-1}(\mathscr{G})) = \bigcap_{G \in {}^\circ\mathscr{G}} f^{-1}(G) = f^{-1}\Big(\bigcap_{G \in {}^\circ\mathscr{G}} G\Big) = f^{-1}(\mu(\mathscr{G})),$$

т. е. монада прообраза фильтра есть прообраз монады исходного фильтра. Стоит подчеркнуть, что при выводе этого положения мы пользовались тем, что соответствие f позволяет определять и внешние прообразы внешних подмножеств Y.

4.1.7. *Пусть $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ — два стандартных базиса фильтра в некотором стандартном множестве. Тогда*

$$\operatorname{fil}\mathscr{B}_1 \supset \operatorname{fil}\mathscr{B}_2 \leftrightarrow \mu(\mathscr{B}_1) \subset \mu(\mathscr{B}_2).$$

$\lhd$ $\rightarrow$: Если B_2 стандартно и $B_2 \supset \mu(\mathscr{B}_2)$, то на основании 4.1.2 $B_2 \in \operatorname{fil}\mathscr{B}_2$ и, стало быть, $B_2 \in \operatorname{fil}\mathscr{B}_1$. Отсюда $B_2 \supset \mu(\mathscr{B}_1)$. Следовательно, $\mu(\mathscr{B}_1) \subset \mu(\mathscr{B}_2)$.

$\leftarrow$: Пусть F_2 — стандартный элемент $\operatorname{fil}\mathscr{B}_2$, т. е. надмножество некоторого стандартного $B_2 \in \mathscr{B}_2$. По условию B_2 содержит монаду $\mu(\mathscr{B}_1)$. Значит, в силу 4.1.2 $B_2 \in \operatorname{fil}\mathscr{B}_1$. Поэтому и $F_2 \in \operatorname{fil}\mathscr{B}_1$. Остается сослаться на принцип переноса. $\rhd$

4.1.8. *Пусть $f : X \to Y$ и $\mathscr{A}$ — базис фильтра в X, а $\mathscr{B}$ — базис фильтра в Y. В случае стандартных параметров следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $f(\mathscr{A}) \supset \operatorname{fil}\mathscr{B}$;
(2) $f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \operatorname{fil}\mathscr{A}$;
(3) $\mu(f(\mathscr{A})) \subset \mu(\mathscr{B})$;
(4) $f(\mu(\mathscr{A})) \subset \mu(\mathscr{B})$.

$\lhd$ Эквивалентность (1) $\leftrightarrow$ (2) видна из выкладки:

$$f(\mathscr{A}) \supset \operatorname{fil}\mathscr{B} \leftrightarrow (\forall\, B \in \mathscr{B})(\exists\, A \in \mathscr{A})(f(A) \subset B) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, B \in \mathscr{B})(\exists\, A \in \mathscr{A})(A \subset f^{-1}(B)) \leftrightarrow (f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \operatorname{fil}\mathscr{A}).$$

Равносильность (1) и (3) обеспечена 4.1.7. Для завершения доказательства следует заметить, что с учетом 4.1.6 (5) будет

$$f(\mu(\mathscr{A})) \subset \mu(\mathscr{B}) \leftrightarrow \mu(\mathscr{A}) \subset f^{-1}(\mu(\mathscr{B})) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \mu(\mathscr{A}) \subset \mu(f^{-1}(\mathscr{B})) \leftrightarrow f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \operatorname{fil}\mathscr{A},$$

Предложение доказано. $\rhd$

4.1.9. В классической установке в формулировке 4.1.8 можно добиться сокращения. Именно, слова «в случае стандартных параметров» можно опустить, записав 4.1.8 (4) в форме $*f(\mu(\mathscr{A})) \subset \mu(\mathscr{B})$, где $*$ — робинсоновская стандартизация. Обычно молчаливо предполагают $f := *f$, что приводит к наиболее образной и легко запоминаемой формулировке. Той же формулировкой часто пользуются и в рамках неоклассической и радикальной установок. Иначе говоря, если нестандартный анализ применяется в качестве техники исследования универсума фон Неймана, «названные» параметры без специальных указаний считают стандартными множествами, а термин «внутреннее множество» заменяют более привычным: «множество». Понятно, что это удобное соглашение полностью коррелирует с качественными представлениями о стандартных объектах. В дальнейшем мы также будем стоять на свободной точке зрения, опуская по мере возможности указания на тип возникающих множеств в случаях, когда это не должно приводить к сколь-либо серьезным недоразумениям.

4.1.10. *Справедливы утверждения:*

(1) *фильтры $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ имеют точную верхнюю границу в том и только в том случае, если $\mu(\mathscr{F}_1) \cap \mu(\mathscr{F}_2) \neq \varnothing$;*

(2) *для любого ограниченного сверху множества фильтров $\mathscr{E}$ выполнено*

$$\mu(\sup \mathscr{E}) = \bigcap \{\mu(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in {}^{\circ}\mathscr{E}\},$$

т. е. монада пересечения фильтров есть пересечение монад.

$\lhd$ Утверждение (1) мгновенно вытекает из 4.1.7.

Для доказательства (2) заметим сначала, что при $\mathscr{F} \in {}^{\circ}\mathscr{E}$ верно $\mathscr{F} \leq \sup \mathscr{E}$ и, стало быть, $\mu(\sup \mathscr{E}) \subset \mu(\mathscr{F})$. Это обеспечивает включение $\mu(\sup \mathscr{E}) \subset \bigcap \{\mu(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in {}^{\circ}\mathscr{E}\}$. Пусть теперь $F \in {}^{\circ} \sup \mathscr{E}$. В силу свойств фильтров найдется стандартное конечное множество $\mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}$ такое, что $F \in \sup \mathscr{E}_0$. На основании 4.1.3 с учетом (1) выводим $F \supset \mu(\sup \mathscr{E}_0) = \bigcap \{\mu(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in \mathscr{E}_0\}$. Заключаем:

$$\mu(\sup \mathscr{E}) \supset \bigcap \{\mu(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in \mathscr{E}_0,\ \mathscr{E}_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{st\,fin}}(\mathscr{E})\} = \bigcap \{\mu(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in {}^{\circ}\mathscr{E}\},$$

что и требовалось. $\rhd$

4.1.11. *Пусть $\mathscr{A}$ — некоторый ультрафильтр, т. е. максимальный по включению элемент множества фильтров $\mathscr{F}(X)$ рассматриваемого множества X, и $\mathscr{F}$ — фильтр: $\mathscr{F} \in \mathscr{F}(X)$. Тогда либо $\mu(\mathscr{A}) \cap \mu(\mathscr{F}) = \varnothing$, либо $\mu(\mathscr{A}) \subset \mu(\mathscr{F})$.*

$\lhd$ Если $\mu(\mathscr{A}) \cap \mu(\mathscr{F}) \neq \varnothing$, то на основании 4.1.10 (1) имеется верхняя грань $\mathscr{A} \vee \mathscr{F} = \mathscr{A}$. Следовательно, $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ и по 4.1.7 верно $\mu(\mathscr{A}) \subset \mu(\mathscr{F})$. $\rhd$

4.1.12. *Нестандартный критерий для ультрафильтра.* *Фильтр $\mathscr{F}$ в X является ультрафильтром в том и только в том случае, если монаду $\mathscr{F}$ легко поймать, т. е. для всяких стандартных подмножеств A и B в X таких, что $A \cup B = X$, будет $\mu(\mathscr{F}) \subset A$ или $\mu(\mathscr{F}) \subset B$.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Раз $\mu(\mathscr{F}) \subset A \cup B$, то можно считать, что $\mu(\mathscr{F}) \cap A \neq \varnothing$. Так как $A = \mu(\{\operatorname{fil} \mathscr{A}\})$, то в силу 4.1.11 $\mu(\mathscr{F}) \subset A$.

$\leftarrow$: Пусть $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}$. Тогда по 4.1.7 $\mu(\mathscr{G}) \subset \mu(\mathscr{F})$. Если A стандартно и $A \supset \mu(\mathscr{G})$, то либо $A \supset \mu(\mathscr{F})$, либо $A' := X - A \supset \mu(\mathscr{F})$ по условию. Случай $A' \supset \mu(\mathscr{F})$ исключен, так как было бы, что $\mu(\mathscr{F}) \cap \mu(\mathscr{G}) \subset A \cap A' = \varnothing$. Значит, $A \supset \mu(\mathscr{F})$, т. е. $A \in \mathscr{F}$ по 4.1.2. Итак, для всякого стандартного $A \in \mathscr{G}$ верно, что $A \in \mathscr{F}$. По принципу переноса $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$, т. е. $\mathscr{F}$ — ультрафильтр. $\rhd$

4.1.13. *Стандартный критерий ультрафильтра.* *Фильтр $\mathscr{F}$ является ультрафильтром в том и только в том случае, если $A \cup B \in \mathscr{F} \rightarrow A \in \mathscr{F} \vee B \in \mathscr{F}$.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Если $A \cup B \in \mathscr{F}$, то монада поймана; $\mu(\mathscr{F}) \subset A \cup B$. Если $\mu(\mathscr{F}) \cap A \neq \varnothing$, то $\mu(\mathscr{F}) \subset A$ и $A \in \mathscr{F}$. Если же $\mu(\mathscr{F}) \cap B \neq \varnothing$, то $\mu(\mathscr{F}) \subset B$ и $B \in \mathscr{F}$.

$\leftarrow$: Пусть $A \cup B = X$. Если $A \in \mathscr{F}$, то $A \supset \mu(\mathscr{F})$. Если же $B \in \mathscr{F}$, то $B \supset \mu(\mathscr{F})$, т. е. монада легко ловится. $\rhd$

4.1.14. *Каждый предел фильтра — это точка его прикосновения. Точки прикосновения ультрафильтра — это его пределы.*

$\lhd$ Достаточно работать в стандартном антураже. Ясно, что $\mathscr{F} \rightarrow x \leftrightarrow \mu(\mathscr{F}) \subset \mu(x) := \mu(\tau(x))$. Помимо этого, $x \in \operatorname{cl}(\mathscr{F}) := \bigcap\{\operatorname{cl}(F) : F \in \mathscr{F}\} \leftrightarrow (\forall F \in \mathscr{F})(\forall U \in \tau(x))(U \cap F \neq \varnothing) \leftrightarrow (\mu(\mathscr{F}) \cap \mu(x) \neq \varnothing)$ в силу 4.1.10 (1). Тем самым первая часть утверждения доказана. Если же теперь $\mathscr{F}$ — ультрафильтр и $x \in \operatorname{cl}(\mathscr{F})$, то

$\mu(\mathscr{F}) \cap \mu(x) \neq \varnothing$. На основании альтернативы, описанной в 4.1.11, выводим $\mu(\mathscr{F}) \subset \mu(x)$, т. е. $\mathscr{F} \to x$. $\triangleright$

4.1.15. *Пусть $\mathscr{E}$ — покрытие X. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *существует стандартное конечное подпокрытие $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$, т. е. такое $\mathscr{E}_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{st\,fin}}(\mathscr{E})$, что $X \subset \cup\mathscr{E}_0$;*

(2) *монада $\mu(\mathscr{E})$ совпадает с X;*

(3) *монада $\mu(\mathscr{E})$ — стандартное множество;*

(4) *монада $\mu(\mathscr{E})$ — внутреннее множество;*

(5) *для каждого стандартного ультрафильтра $\mathscr{F}$ в множестве X найдется $E \in \mathscr{E}$, лежащее в $\mathscr{F}$.*

$\triangleleft$ Импликации (1) $\to$ (2) $\to$ (3) $\to$ (4) очевидны. Если $\mu(\mathscr{E})$ — внутреннее множество, то с учетом 4.1.6 (4) и 4.1.4 выводим, что $\mu(\mathscr{E})$ стандартно, т. е. найдется стандартное конечное $\mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}$ такое, что $\mu(\mathscr{E}) = \cup\mathscr{E}_0 \supset X$. Значит, (4) $\to$ (1). Импликация (1) $\to$ (5) очевидна. Для доказательства (5) $\to$ (1) допустим, что вопреки утверждаемому $(\forall^{\mathrm{st\,fin}}\mathscr{E}_0) \cup \mathscr{E}_0 \notin X$. Рассмотрим $\mathscr{E}' := \{E' := X - E : E \in \mathscr{E}\}$. Ясно, что семейство $\mathscr{E}'$ можно считать порождающим базис фильтра в X. Пусть $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, содержащий этот базис. Тогда имеется $E \in \mathscr{E}$, такое что $E \in \mathscr{F}$. Кроме того, по построению $E' \in \mathscr{F}$. Получается противоречие. $\triangleright$

4.1.16. В заключение текущего параграфа приведем полезные признаки, основанные на «технике внутренних множеств».

4.1.17. *Принцип Коши.* *Пусть $\mathscr{F}$ — стандартный фильтр в некотором стандартном множестве. Пусть, далее, $\varphi := \varphi(x)$ — некоторое внутреннее свойство (т. е. $\varphi = \varphi^I$ для некоторой теоретико-множественной формулы φ). Если для каждого удаленного элемента x верно $\varphi(x)$, то имеется стандартное множество $F \in \mathscr{F}$ такое, что $(\forall\, x \in F)\, \varphi(x)$.*

$\triangleleft$ Найдется внутреннее множество F с требуемым свойством (таков любой удаленный элемент фильтра $\mathscr{F}$). Значит, по принципу переноса существует искомое стандартное F. $\triangleright$

4.1.18. *Принцип заданного горизонта.* *Пусть X и Y — некоторые стандартные множества, $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — стандартные фильтры в X и Y соответственно, причем $\mu(\mathscr{F}) \cap {}^{\circ}X \neq \varnothing$. Фиксируем какое-нибудь удаленное множество — «горизонт» — F из ${}^{a}\mathscr{F}$. Для стан-*

дартного соответствия $f \subset X \times Y$, *задевающего* $\mathscr{F}$, *эквивалентны утверждения:*

(1) $f(\mu(\mathscr{F}) - F) \subset \mu(\mathscr{G})$;

(2) $(\forall\, F' \in {}^a\mathscr{F})\ f(F' - F) \subset \mu(\mathscr{G})$;

(3) $f(\mu(\mathscr{F})) \subset \mu(\mathscr{G})$.

$\lhd$ Ясно, что (3) $\to$ (1) $\to$ (2). Стало быть, следует установить только импликацию (2) $\to$ (3).

Возьмем $G \in {}^\circ\mathscr{G}$. Допустим, что для каждого стандартного F'' из ${}^\circ\mathscr{F}$ найдется x из $F'' - F$, для которого $f(x) \notin G$. В силу принципа идеализации в этом случае существует $x' \in \mu(\mathscr{F})$ такой, что $x' \notin F$ и в то же время $f(x') \notin G$. Рассмотрим $F' := F \cup \{x'\}$. Ясно, что $F' \in {}^a\mathscr{F}$. Получили противоречие, означающее, что для некоторого стандартного $F'' \in \mathscr{F}$ будет $f(F'' - F) \subset G$. Учитывая, что в F нет стандартных элементов X, выводим

$$(\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\exists^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\forall^{\mathrm{st}} x \in F)(f(x) \in G).$$

Остается воспользоваться принципом переноса. $\rhd$

4.2. Монады в топологических пространствах

В этом параграфе изучаются свойства монад фильтров окрестностей в топологических пространствах.

4.2.1. Пусть (X, τ) — стандартное *предтопологическое пространство.* Таким образом, для каждого (стандартного) x из X задан (стандартный) фильтр $\tau(x)$ в X. Обозначим $\mu(x) := \mu_\tau(x) := \mu(\tau(x))$. Элементы $\mu(x)$ называют *бесконечно близкими точками* к x. Очевидно, что $\mu(x)$ — монада фильтра окрестностей $\tau(x)$ точки x. Предтопологическое пространство (X, τ) называют *топологическим*, если каждая окрестность точки в X содержит открытую окрестность этой точки. Иными словами, у любого $x \in {}^\circ X$ имеется бесконечно малая окрестность $U \in \tau(x)$, для которой $\mu(x') \subset \mu(x)$ при всех $x' \in U$.

4.2.2. Пусть G — (внешнее) множество в топологическом пространстве (X, τ). Положим $h(G) := \bigcup\{\mu(x) : x \in {}^\circ G\}$. Множество $h(G)$ называют *гало* G в X. Множество $G \cap h(G)$ называют *автогало* или *околостандартной частью* G и обозначают $\mathrm{nst}\,(G)$.

Если $G \supset h(G)$, то G называют *насыщенным* или, более полно, τ-насыщенным. Если для всякого $x \in G$ верно, что $\mu(x) \subset G$, то G называют *вполне насыщенным* (*вполне τ-насыщенным*).

4.2.3. *Стандартное множество открыто в том и только в том случае, если оно насыщено.*

$\lhd$ Если G открыто и $x \in {}^{\circ}G$, то $G \supset \mu(x)$. Значит, G содержит свое гало. Наоборот, если $G \supset h(G)$, то, выбирая удаленный элемент U_x из фильтра $\tau(x)$ для $x \in {}^{\circ}G$, видим, что $G \supset U_x$. По принципу переноса G открыто. $\rhd$

4.2.4. Стандартную точку x из X называют *микропредельной* для U, если $\mu(x) \cap U \neq \varnothing$. Стандартное множество, образованное всеми микропредельными точками U, называют *микрозамыканием* U и обозначают $\mathrm{cl}_{\approx}(U)$.

4.2.5. *Микрозамыкание $\mathrm{cl}_{\approx}(U)$ произвольного внутреннего множества U замкнуто. Если U — стандартное множество, то микрозамыкание $\mathrm{cl}_{\approx}(U)$ совпадает с замыканием $\mathrm{cl}(U)$ множества U.*

$\lhd$ Пусть $A := \mathrm{cl}_{\approx}(U) = {}^{*}\{x \in X : \mu(x) \cap U \neq \varnothing\}$ и $y \in \mathrm{cl}(A)$. Следует установить, что $y \in A$. По принципу переноса можно считать, что y — стандартный элемент. Возьмем стандартную открытую окрестность V точки y. По условию имеется стандартная точка $x \in V$ такая, что $x \in A$. По определению стандартизации и монады выводим, что $V \supset \mu(x)$ и $\mu(x) \cap U \neq \varnothing$. Отсюда $(\forall^{\mathrm{st}} V \in \tau(y)) V \cap U \neq \varnothing$. В силу принципа идеализации заключаем: $\mu(y) \cap U \neq \varnothing$, т. е. $y \in \mathrm{cl}_{\approx}(U)$.

Пусть теперь U стандартно. Ясно, что ${}^{\circ}U \subset \mathrm{cl}_{\approx}(U)$. Стало быть, $U \subset \mathrm{cl}_{\approx}(U)$ и $\mathrm{cl}(U) \subset \mathrm{cl}_{\approx}(U)$ в силу уже доказанного. Если взять $y \in \mathrm{cl}(U)$, то $(\forall^{\mathrm{st}} V \in \tau(y)) V \cap U \neq \varnothing$. Значит, по принципу идеализации $\mu(y) \cap U \neq \varnothing$, т. е. $y \in \mathrm{cl}_{\approx}(U)$. $\rhd$

4.2.6. *Для точки x и непустого множества U эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *x — точка прикосновения U;*

(2) *x — микропредельная точка U;*

(3) *существует стандартный фильтр $\mathscr{F}$, монада $\mu(\mathscr{F})$ которого лежит в монаде $\mu(x)$;*

(4) *имеется такая стандартная сеть* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *точек* U, *что ее элементы с бесконечно большими номерами бесконечно близки к* x, *т. е.* $x_\xi \in \mu(x)$ *при всех* $\xi \in {}^a\Xi$.

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Если $x \in \mathrm{cl}(U)$, то имеется точная верхняя граница $\tau(x) \vee \mathrm{fil}\,\{U\}$. В силу 4.1.10 (1) будет

$$\varnothing \neq \mu(\tau(x) \vee \mathrm{fil}\,\{U\}) = \mu(\tau(x)) \cap \mu(\mathrm{fil}\,\{U\}) = \mu(x) \cap U.$$

Последнее означает, что $x \in \mathrm{cl}_\approx(U)$.

(2) $\to$ (3): Если $x \in \mathrm{cl}_\approx(U)$, то $U \cap \mu(x) \neq \varnothing$. Отсюда на основании 4.1.10 (1) строим фильтр $\mathscr{F}$, такой что $A \in \mathscr{F} \leftrightarrow A \supset U \cap \mu(x)$. Ясно, что $\mathscr{F}$ — искомый.

(3) $\to$ (4): Полагаем $\Xi := \tau(x)$ и $\xi_1 \leq \xi_2 \leftrightarrow \xi_1 \supset \xi_2$. Определим x_ξ как произвольную точку какого-нибудь $F \in \mathscr{F}$ такого, что $F \subset \xi$. Ясно, что $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — искомая сеть. В самом деле, по построению $x_\xi \in \mu(x)$ при $\xi \in {}^a\Xi$.

(4) $\to$ (1): Пусть V — стандартная окрестность x и η — произвольный бесконечно большой номер из Ξ. Ясно, что $x_\xi \in V$ для $\xi \geq \eta$, ибо $\mu(x) \subset V$ и $\xi \in {}^a\Xi$. Итак, $V \cap U \neq \varnothing$ (так как $x_\xi \in U$ по условию). $\rhd$

4.2.7. Нестандартный критерий непрерывности. *Пусть* (X, τ) *и* (Y, σ) *— стандартные топологические пространства,* $f : X \to Y$ *— стандартное отображение и* x *— стандартная точка в* X. *Эквивалентны утверждения:*

(1) f *непрерывно в точке* x;

(2) f *переводит точки, бесконечно близкие к* x, *в точки, бесконечно близкие к* $f(x)$, *т. е.*

$$(\forall\, x')(x' \in \mu_\tau(x) \to f(x') \in \mu_\sigma(f(x))).$$

$\lhd$ Достаточно сослаться на 4.1.8. $\rhd$

4.2.8. Для множества A в X символом $\mu(A)$ обозначим пересечение стандартных открытых множеств, содержащих A. Множество $\mu(A)$ называют *монадой* A. Отметим, что $\mu(\varnothing) = \varnothing$. Если $A \neq \varnothing$, то $\mu(A)$ — это монада фильтра окрестностей множества A.

4.2.9. *Пусть (X,τ) — стандартное топологическое пространство. Тогда*

(1) *(X,τ) — отделимое ($=\mathrm{T}_1$) пространство в том и только в том случае, если ${}^\circ\mu(x)=\{x\}$ для всякой точки $x\in{}^\circ X$;*

(2) *(X,τ) — хаусдорфово ($=\mathrm{T}_2$) пространство в том и только в том случае, если $\mu(x_1)\cap\mu(x_2)=\varnothing$ для $x_1,x_2\in{}^\circ X$, $x_1\neq x_2$;*

(3) *(X,τ) регулярно, если оно отделимо и обладает свойством T_3: для каждых замкнутого стандартного $A\subset X$ и стандартной точки $x\notin A$ верно $\mu(x)\cap\mu(A)=\varnothing$;*

(4) *(X,τ) нормально, если оно отделимо и обладает свойством T_4: для любых двух непересекающихся замкнутых множеств A и B в X верно $\mu(A)\cap\mu(B)=\varnothing$.*

4.2.10. *Справедливы утверждения:*

(1) *стандартное множество будет вполне насыщено тогда и только тогда, когда оно открыто;*

(2) *монада произвольного множества вполне насыщена;*

(3) *монада стандартного фильтра $\mathscr{F}$ вполне насыщена в том и только в том случае, если $\mathscr{F}$ имеет базис из открытых множеств;*

(4) *монада $\mu(A)$ произвольного внутреннего A является наименьшим вполне насыщенным множеством, содержащим A, при этом имеет место представление $\mu(A)=\bigcup\{\mu(a):a\in A\}$.*

$\lhd$ (1): Если A стандартно и вполне насыщено, то оно заведомо насыщено и, стало быть, A открыто по 4.2.3. Если же заранее известно, что A стандартно и открыто, то для $a\in A$ будет $\mu(a)\subset A$ по определению монады, т. е. A вполне насыщено.

(2): Монада множества есть по определению пересечение стандартных открытых множеств. Значит, с учетом (1) она вполне насыщена.

(3): Если у $\mathscr{F}$ есть базис из открытых стандартных множеств, то все следует из (1). Если $\mu(\mathscr{F})$ вполне насыщено и V — стандартный элемент $\mathscr{F}$, то $V\supset\mu(\mathscr{F})\supset\bigcup\{U_a:a\in F\}$, где F — какой-нибудь бесконечно удаленный элемент $\mathscr{F}$ и U_a — какая-нибудь бесконечно малая окрестность точки a. Так как $\bigcup\{U_a : a \in F\} \in \mathscr{F}$, то требуемое вытекает из принципа переноса.

(4): В силу (2) $\mu(A)$ вполне насыщено. Кроме того, на основании (3) вполне насыщено $B := \bigcup\{\mu(a) : a \in A\}$. Следует проверить только, что $B = \mu(A)$. Включение $B \subset \mu(A)$ очевидно. Предположим, что, вопреки доказываемому, $B \neq \mu(A)$, т. е. найдется $x \in \mu(A)$ такое, что $x \notin B$. Значит, для каждого $a \in A$ имеется стандартная окрестность U_a точки a, обладающая тем свойством, что $x \notin U_a$. Иначе говоря, $(\forall\, a \in A)(\exists^{\mathrm{st}}\, U_a)\ U_a \in \tau(a)$. Привлекая принцип идеализации, видим, что существует стандартное конечное множество $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$ такое, что $A \subset U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}$. Отсюда $x \in \mu(A) \subset U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}$. Получаем противоречие. $\rhd$

4.2.11. *Пусть (X, τ) — отделимое топологическое пространство. Отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \tau)$ непрерывно в точке x в том и только в том случае, если для какой-либо бесконечно малой окрестности U точки x выполнено $f(\mu_\tau(x) - U) \subset \mu_\sigma(f(x))$.*

$\lhd$ В силу отделимости $\mu_\tau(x) - U = \mu(x) - U$, где $\mu(x)$ — монада фильтра $\tau(x)$ проколотых окрестностей x, т. е. $V \in \tau(x) \leftrightarrow V \cup \{x\} \in \tau(x)$. Ясно, что $\mu(x) = \mu_\tau(x) - \{x\}$ и при этом $U - \{x\}$ — бесконечно малый элемент $\tau(x)$. Привлекая принцип заданного горизонта 4.1.18, видим, что $f(\mu(x) - U) \subset \mu_\sigma(f(x)) \leftrightarrow f(\mu(x)) \subset \mu_\sigma(f(x)) \leftrightarrow f(\mu_\tau(x)) \subset \mu_\sigma(f(x))$. $\rhd$

4.2.12. *Пусть $(Y_\xi, \sigma_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — стандартное семейство топологических пространств. Пусть, далее, $(f_\xi : X \to Y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство отображений и $\tau := \sup_{\xi\in\Xi} f_\xi^{-1}(\sigma_\xi)$ — инициальная топология в X, т. е. слабейшая топология, в которой непрерывны отображения f_ξ при всех $\xi \in \Xi$. Тогда для каждой стандартной точки $x \in X$ верно*

$$\mu_\tau(x) = \bigcap_{\xi\in{}^\circ\Xi} f_\xi^{-1}\big(\mu(\sigma_\xi(f_\xi(x)))\big).$$

$\lhd$ На основании 4.1.8 выводим требуемое. $\rhd$

4.2.13. *Точка x' тихоновского произведения бесконечно близка к данной точке x, если стандартные координаты x' бесконечно близки к соответствующим стандартным координатам x.*

$\lhd$ Формально говоря, пусть $(X_\xi, \tau_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — стандартное семейство стандартных топологических пространств. Пусть, далее, $(\mathscr{X}, \tau)$ —

тихоновское произведение $(X_\xi, \tau_\xi)_{\xi\in\Xi}$, т. е.

$$\mathscr{X} := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi; \quad \tau := \sup_{\xi\in\Xi} \mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\tau_\xi),$$

где Pr_ξ — оператор проектирования $\mathscr{X}$ на X_ξ. Для $x \in {}^\circ\mathscr{X}$ в силу 4.2.12 и 4.1.6 (5) выводим

$$\mu(x) = \bigcap_{\xi\in{}^\circ\Xi} \mu\big(\mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\tau_\xi(x_\xi))\big) = \bigcap_{\xi\in{}^\circ\Xi} \mathrm{Pr}_\xi^{-1}\big(\mu(\tau_\xi(x_\xi))\big).$$

Отметим, что для $\xi \in {}^\circ\Xi$ верно $x' \in \mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\mu(\tau_\xi(x_\xi))) \leftrightarrow \mathrm{Pr}_\xi\, x' \in \mu(\tau_\xi(x_\xi))$, т. е.

$$\mathrm{Pr}_\xi^{-1}\big(\mu(\tau_\xi(x_\xi))\big) = \mu_{\tau_\xi}(x_\xi) \times \prod_{\eta\neq\xi} X_\eta.$$

Отсюда (ср. 4.1.6 (5)) для каждого стандартного $\xi \in \Xi$ справедливо

$$\mathrm{Pr}_\xi(\mu(x)) = \mu(\tau_\xi(x_\xi)),$$

что и требовалось. $\triangleright$

4.3. Околостандартность и компактность

Близость к стандартной точке, возникающая в топологических пространствах, позволяет дать удобные критерии компактных пространств. Получение таких критериев — основная тема текущего параграфа.

4.3.1. Точка x некоторого стандартного топологического пространства (X, τ) называется *околостандартной* или, более полно, τ-околостандартной, если $x \in \mathrm{nst}\,(X)$, т. е. если для некоторой стандартной $x' \in {}^\circ X$ будет $x \in \mu(x')$.

4.3.2. *Точка $x \in X$ является околостандартной в том и только в том случае, если для каждого стандартного открытого покрытия $\mathscr{E}$ множества X будет $x \in \mu(\mathscr{E})$. Иными словами,*

$$\mathrm{nst}\,(X) = \bigcap \{\mu(\mathscr{E}) : \mathscr{E} \text{ — \textit{открытое покрытие} } X\}.$$

◁ Пусть сначала $x \in \operatorname{nst}(X)$ и $x' \in {}^\circ X$ таково, что $x \in \mu(x')$. Для открытого покрытия $\mathscr{E}$ имеется стандартный элемент $E \in \mathscr{E}$ такой, что $x' \in E$, т. е. $\mu(x') \subset E$ на основании 4.2.3. Значит, $x \in \mu(x') \subset E \subset \mu(\mathscr{E})$. Пусть теперь $x \notin \operatorname{nst}(X)$. Тогда для всякого $x' \in {}^\circ X$ верно $x \notin \mu(x')$. Значит, существует стандартная открытая окрестность $U_{x'}$ точки x', для которой $x \notin U_{x'}$. Стандартизация $\mathscr{E} := {}^*\{U_{x'} : x' \in {}^\circ X\}$ представляет собой открытое покрытие X, для которого $x \notin \mu(\mathscr{E})$. ▷

4.3.3. *Каждая околостандартная точка стандартного топологического пространства бесконечно близка к единственной стандартной точке в том и только в том случае, если рассматриваемое пространство хаусдорфово.*

◁ Если τ — хаусдорфова топология и $x', x'' \in {}^\circ X$, то $\mu(x') \cap \mu(x'') \neq \varnothing \to x' = x''$. Наоборот, пусть $x \in \mu(x') \cap \mu(x'')$ при $x', x'' \in {}^\circ X$. Поскольку x околостандартна, то $x' = x''$ по условию. Итак, $x' \neq x'' \to \mu(x') \cap \mu(x'') = \varnothing$. ▷

4.3.4. Определим внешнее соответствие $\operatorname{st}(x) := \{x' \in {}^\circ X : x \in \mu(x')\}$. В хаусдорфовом случае st — отображение $\operatorname{nst}(X)$ на ${}^\circ X$.

4.3.5. *Для каждого внутреннего U справедливо представление $\operatorname{cl}_\approx(U) = {}^*\operatorname{st}(U)$. В частности, стандартное множество U замкнуто в том и только в том случае, если $U = {}^*\operatorname{st}(U)$.*

◁ Все содержится в 4.2.5. ▷

4.3.6. *Нестандартные критерии компактности.* *Для стандартного пространства sX эквивалентны утверждения:*

(1) *X компактно;*

(2) *каждая точка из X околостандартна;*

(3) *автогало X — внутреннее множество.*

◁ (1) → (2): Пусть $\mathscr{E}$ — открытое покрытие X. Тогда монада $\mu(\mathscr{E})$ совпадает с X на основании 4.1.15 (и компактности X). В силу 4.3.2 видим: $\operatorname{nst}(X) = \bigcap_{\mathscr{E}} \mu(\mathscr{E}) = X$.

(2) → (3): Очевидно.

(3) → (1): Пусть $\mathscr{E}$ — стандартное открытое покрытие X. Поскольку $(\forall x \in \operatorname{nst}(X))(\exists^{\rm st} E \in \mathscr{E})\, x \in E$, то по принципу идеализации $(\exists^{\rm st\,fin} \mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}) \cup \mathscr{E}_0 \supset \operatorname{nst}(X) \supset {}^\circ X$. Отсюда по принципу переноса $\mathscr{E}_0$ — покрытие X. ▷

4.3.7. *Пусть C — множество в топологическом пространстве X. Эквивалентны утверждения:*

(1) *C компактно в индуцированной топологии;*

(2) *C лежит в гало $h(C)$;*

(3) *монада $\mu(C)$ совпадает с гало $h(C)$.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Раз C компактно в индуцированной топологии, то $C \subset \mathrm{nst}\,(C) \subset h(C)$ на основании 4.3.6.

(2) $\to$ (3): Ясно, что всегда $h(G) = \bigcup\{\mu(x) : x \in {}^\circ G\} \subset \mu(G)$. По условию для каждого $x \in C$ найдется $y \in {}^\circ C$, удовлетворяющий соотношению $x \in \mu(y)$. В силу 4.2.8 (2) $\mu(x) \subset \mu(y)$. Стало быть, с учетом 4.2.8 (4) получаем: $\mu(C) = \bigcup\{\mu(x) : x \in C\} \subset \bigcup\{\mu(y) : y \in {}^\circ C\} = h(C)$.

(3) $\to$ (1): Пусть $\mathscr{E}$ — стандартное открытое покрытие C. По определению $C \subset \mu(C) \subset h(C)$. Видно (ср. 4.3.2), что тем самым $C \subset \mu(\mathscr{E})$. На основании 4.1.15 фиксируем наличие в $\mathscr{E}$ конечного подпокрытия C. $\rhd$

4.3.8. ***Нестандартный критерий относительной компактности.*** *Для регулярного пространства X и множества C в X эквивалентны утверждения:*

(1) *C относительно компактно (т. е.* $\mathrm{cl}(C)$ *компактно);*

(2) *C лежит в околостандартной части X.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Ясно, что без дополнительных гипотез из 4.3.7 вытекает

$$C \subset \mathrm{cl}(C) \subset h(\mathrm{cl}(C)) \subset h(X) = h(X) \cap X = \mathrm{nst}\,(X).$$

(2) $\to$ (1): Рассмотрим замыкание $\mathrm{cl}(C)$, и пусть $\mathscr{E}$ — открытое покрытие $\mathrm{cl}(C)$. Значит, для каждого $c \in C$ найдется $E \in \mathscr{E}$, содержащее c. Пусть E_c — некоторая замкнутая окрестность c, содержащаяся в E. Понятно, что семейство $\mathscr{E}' := \{E_c : c \in C\}$ составляет стандартное покрытие $\mathrm{cl}(C)$. Семейство $\mathscr{E}' \cup \{X - \mathrm{cl}(C)\}$ образует покрытие X и, значит, с учетом 4.3.1 выводим, что $C \subset \mathrm{nst}\,(X) \subset \mu(\mathscr{E}') \cup \{X - \mathrm{cl}(C)\}$. На основании 4.1.15 найдется конечное множество $\mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}'$, покрывающее C. Понятно, что $\bigcup \mathscr{E}_0$ замкнуто, т. е. $\mathscr{E}_0$ — покрытие $\mathrm{cl}(C)$. Каждый элемент из $\mathscr{E}_0$ по построению подмножество некоторого элемента из $\mathscr{E}$. Таким образом, можно выделить конечное подпокрытие $\mathrm{cl}(C)$ из исходного $\mathscr{E}$. $\rhd$

4.3.9. Критерий 4.3.8 допускает усиление. Именно, оказывается, что микрозамыкание произвольного внутреннего подмножества околостандартной части произвольного хаусдорфова пространства компактно.

4.3.10. *Пусть* $\mathscr{X} := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$ *— стандартное произведение стандартных топологических пространств. Точка* $x \in \mathscr{X}$ *околостандартна в том и только в том случае, если околостандартны ее стандартные координаты:* $x_\xi \in \operatorname{nst}(X_\xi)$ *для* $\xi \in {}^\circ\Xi$.

$\lhd$ Если $x \in \operatorname{nst}(\mathscr{X})$, то с учетом 4.1.12 для некоторого $y \in {}^\circ\mathscr{X}$ и всякого $\xi \in {}^\circ\Xi$ будет $x_\xi \in \mu(y_\xi)$. Осталось заметить, что $y_\xi \in {}^\circ X_\xi$ по принципу переноса. Пусть теперь заранее известно, что $x_\xi \in \operatorname{nst}(X_\xi)$ для $\xi \in {}^\circ\Xi$.

Рассмотрим внешнюю функцию $y : \xi \mapsto \operatorname{st}(x_\xi)$ из ${}^\circ\Xi$ в $\bigcup_{\xi\in\Xi} {}^\circ X_\xi$. Ясно, что для стандартизации ${}^*y$ будет ${}^*y \in {}^\circ\mathscr{X}$ и $x \in \mu({}^*y)$ в силу 4.1.12. $\rhd$

4.3.11. ***Теорема Тихонова.*** *Тихоновское произведение семейства компактных множеств компактно.*

$\lhd$ По принципу переноса можно считать, что речь идет о стандартном семействе стандартных пространств. В последнем случае на основании 4.3.10 каждая точка произведения околостандартна. $\rhd$

4.3.12. В дальнейшем мы будем, как правило, рассматривать хаусдорфовы компактные пространства. Пользуясь принятой терминологией, такие пространства называют коротко — *компактами.*

4.4. Бесконечная близость в равномерных пространствах

В равномерных пространствах возникает важное симметричное, рефлексивное и транзитивное отношение между внутренними точками — их бесконечная близость. Сейчас мы изучим важнейшие конструкции, связанные с этим понятием.

4.4.1. Пусть $(X, \mathscr{U})$ — равномерное пространство. Это означает, что $\mathscr{U} := \{\varnothing\}$, если $X = \varnothing$. Если же $X \neq \varnothing$, то $\mathscr{U}$ — фильтр в X^2, называемый *равномерностью* и обладающий теми свойствами, что

(1) $\mathscr{U} \subset \operatorname{fil}\{I_X\}$;

(2) $(\forall U \in \mathscr{U})(U^{-1} \in \mathscr{U})$;
(3) $(\forall V \in \mathscr{U})(\exists U \in \mathscr{U})(U \circ U \subset V)$.

4.4.2. *Критерий Люксембурга.* *Фильтр $\mathscr{U}$ в X^2 — равномерность на (непустом) множестве X в том и только в том случае, если монада $\mu(\mathscr{U})$ — внешнее отношение эквивалентности.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Имеем

$$\mu(\mathscr{U}) = \bigcap {}^{\circ}\mathscr{U} = \bigcap_{U \in {}^{\circ}\mathscr{U}} U = \bigcap_{U \in {}^{\circ}\mathscr{U}} U^{-1} = \mu(\mathscr{U})^{-1};$$

$$\mu(\mathscr{U}) \supset I_X;$$

$$\mu(\mathscr{U}) = \bigcap \{U \circ U : U \in {}^{\circ}\mathscr{U}\} \supset \mu(\mathscr{U}) \circ \mu(\mathscr{U}) \supset \mu(\mathscr{U}) \circ I_X \supset \mu(\mathscr{U}).$$

Здесь мы воспользовались тем, что U^{-1} и $U \circ U$ стандартны при условии стандартности U. Кроме того, $U \supset \mu(\mathscr{U})$ для $U \in {}^{\circ}\mathscr{U}$ по определению монады.

$\leftarrow$: В силу 4.1.4 фильтр $\mathscr{U}$ — это стандартизация надмножеств своей монады, т. е.

$$U \in {}^{\circ}\mathscr{U} \leftrightarrow U \supset \mu(\mathscr{U}).$$

Отсюда следует, что $\mathscr{U} \subset \operatorname{fil}\{I_X\}$ и $U \in \mathscr{U} \rightarrow U^{-1} \in \mathscr{U}$. Рассмотрим бесконечно малый элемент W фильтра $\mathscr{U}$. В силу уже доказанного $U := W^{-1} \cap W \in \mathscr{U}$. Кроме того, $U \circ U \subset \mu(\mathscr{U}) \circ \mu(\mathscr{U}) = \mu(\mathscr{U})$. Значит, для каждого стандартного $V \in \mathscr{U}$ найдется $U \in \mathscr{U}$ такой, что $U \circ U \subset V$. В силу принципа переноса заключаем, что $\mathscr{U}$ — равномерность. $\rhd$

4.4.3. При применении критерия Люксембурга полезно помнить, что далеко не каждое отношение эквивалентности на X^2 является монадой (т. е. задает равномерность в X). Например, если считать $x, y \in \mathbb{R}$ эквивалентными при $x - y \in {}^{\circ}\mathbb{R}$, то эквивалентные нулю точки заполнят множество ${}^{\circ}\mathbb{R}$, не являющееся монадой никакого фильтра. Это означает, в частности, что такая эквивалентность не задается никакой стандартной равномерностью.

4.4.4. Если x, y — точки пространства X с равномерностью $\mathscr{U}$, то x и y называют *бесконечно близкими* (относительно $\mathscr{U}$) и пишут $x \approx_{\mathscr{U}} y$ или просто $x \approx y$ при условии $(x, y) \in \mu(\mathscr{U})$. Для произвольного множества A в X (возможно, внешнего) множество $\mu_{\mathscr{U}}(A)$

называют *микрогало* множества A в X и обозначают ${}^{\approx}A$. Если множество A стандартно, то, допуская известную непоследовательность, для обозначения гало $h(A)$ множества A также используют символ ${}^{\approx}A$, имея в виду равенство $h(A) = {}^{\approx\circ}A$. Разумеется, что гало здесь вычисляется относительно равномерной топологии $\tau_{\mathscr{U}}$, порожденной $\mathscr{U}$. Отметим, что монада стандартной точки x в такой топологии состоит, как и следовало ожидать, из бесконечно близких к ней точек, т. е. представляет собой микрогало ${}^{\approx}x := {}^{\approx}\{x\}$ этой точки. Иногда используют несколько менее адекватную существу дела терминологию, называя микрогало ${}^{\approx}x$ внутренней точки x монадой этой точки.

4.4.5. Функцию f, действующую из равномерного пространства X в равномерное пространство Y, переводящую бесконечно близкие точки в бесконечно близкие, называют *микронепрерывной* на X.

4.4.6. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *стандартная функция микронепрерывна в том и только в том случае, если она равномерно непрерывна;*

(2) *стандартное множество состоит из микронепрерывных функций в том и только в том случае, если это множество равностепенно (равномерно) непрерывно.*

$\triangleleft$ (1): Равномерная непрерывность $f : X \to Y$ означает, что $f^{\times}(\mathscr{U}_X) \supset \mathscr{U}_Y$, где $\mathscr{U}_X$, $\mathscr{U}_Y$ — равномерности в X и Y соответственно и $f^{\times}(x, x') := (f(x), f(x'))$ для $x, x' \in X$. С учетом 4.1.8 выводим

$$f^{\times}(\mathscr{U}_X) \supset \mathscr{U}_Y \leftrightarrow \mu(f^{\times}(\mathscr{U}_X)) \subset \mu(\mathscr{U}_Y).$$

(2): Множество $\mathscr{E} \subset Y^X$ называют, как известно, равностепенно (равномерно) непрерывным, если $(\forall\, V \in \mathscr{U}_Y)(\exists\, U \in \mathscr{U}_X)(\forall\, f \in \mathscr{E})$ $f^{-1} \circ V \circ f \in \mathscr{U}_X$. Значит, для такого $\mathscr{E}$ по принципу переноса $(\forall^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{U}_Y)(\exists^{\mathrm{st}} U \in \mathscr{U}_X)(\forall\, f \in \mathscr{E})(\forall\, x, x' \in U)((f(x), f(x')) \in V)$. В частности, если $x \approx x'$, то для каждого $f \in \mathscr{E}$ при любой $V \in {}^{\circ}\mathscr{U}_Y$ будет $(f(x), f(x')) \in V$, т. е. $f(x) \approx f(x')$. Итак, равностепенно непрерывное стандартное множество имеет только микронепрерывные элементы.

Для доказательства противоположной импликации воспользуемся, ради разнообразия, принципом Коши 4.1.17. Действительно, для $V \in {}^{\circ}\mathscr{U}_Y$ и произвольного удаленного элемента $U \in {}^{\circ}\mathscr{U}_X$ верно

$(\forall f \in \mathscr{E})\, f^{\times}(U) \subset V$. Значит, это же внутреннее свойство справедливо для некоторого стандартного $U \in \mathscr{U}_X$. Остается воспользоваться принципом переноса. $\triangleright$

4.4.7. *Пусть $(X, \mathscr{U}_X)$, $(Y, \mathscr{U}_Y)$ — стандартные равномерные пространства и f — внутренняя функция; $f : X \to Y$. Пусть далее ${}^E\mathscr{U}_X$, ${}^E\mathscr{U}_Y$ — фильтры внешних надмножеств ${}^\circ\mathscr{U}_X$ и ${}^\circ\mathscr{U}_Y$ соответственно. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *f микронепрерывна;*

(2) *$f : (X, {}^E\mathscr{U}_X) \to (Y, {}^E\mathscr{U}_Y)$ равномерно непрерывна;*

(3) $(\forall^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{U}_Y)(\exists^{\mathrm{st}} U \in \mathscr{U}_X)(f^{\times}(U) \subset V)$.

$\triangleleft$ (1) $\to$ (3): Пусть $V \in {}^\circ\mathscr{U}_Y$. Для всякого удаленного элемента $U \in {}^\circ\mathscr{U}_X$ будет $(x, x') \in U \to x \approx x' \to f(x) \approx f(x')$, т. е. $f^{\times}(U) \subset V$. По принципу Коши 4.1.17 имеется стандартное U с тем же свойством.

(3) $\to$ (1): Возьмем $x \approx x'$ и стандартный элемент $V \in \mathscr{U}_Y$. По условию при некотором стандартном $U \in \mathscr{U}_X$ будет $f^{\times}(U) \subset V$. В частности, $(f(x), f(x')) \in V$. Значит, $f(x) \approx f(x')$.

(3) $\leftrightarrow$ (2): Очевидно. $\triangleright$

4.4.8. Примеры.

(1) Пусть X — множество и d — *полуметрика* (= *отклонение*) на X. Иными словами, имеются (стандартные) объекты X и $d : X^2 \to \mathbb{R}$ такие, что

$$d(x, x) = 0 \quad (x \in X);$$
$$d(x, y) = d(y, x) \quad (x, y \in X);$$
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (x, y, z \in X).$$

Рассмотрим цилиндры $\{d \leq \varepsilon\} := \{(x, y) \in X_2 : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ и семейство $\mathscr{U}_d := \mathrm{fil}\,\{\{d \leq \varepsilon\} : \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$. Ясно, что $\mathscr{U}_d$ задает в X структуру равномерного пространства — обычную равномерность *полуметрического пространства* (X, d). Отметим, что монада этой равномерности определяется следующим отношением эквивалентности:

$$x \approx_d y \leftrightarrow d(x, y) \approx 0 \leftrightarrow d(x, y) \in \mu(\mathbb{R}).$$

(2) Пусть $(X, \mathfrak{M})$ — *мультиметрическое пространство*, т. е. $\mathfrak{M}$ — *мультиметрика* (= непустое множество полуметрик на X). Монаду $\mu(\mathfrak{M})$ определяют как пересечение монад (стандартных) равномерных пространств (X, d), где $d \in {}^\circ\mathfrak{M}$. Именно,

$$x \approx_{\mathfrak{M}} y \leftrightarrow (\forall\, d \in {}^\circ\mathfrak{M})(d(x,y) \approx 0).$$

Нет сомнений, что монада $\mu(\mathfrak{M})$ есть монада равномерности $\mathscr{U}_{\mathfrak{M}} := \sup\{\mathscr{U}_d : d \in \mathfrak{M}\}$ рассматриваемого мультиметрического пространства $(X, \mathfrak{M})$. Полезно здесь же напомнить, что каждое равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ мультиметризуемое, т. е. $\mathscr{U} = \mathscr{U}_{\mathfrak{M}}$ для подходящей мультиметрики $\mathfrak{M}$.

(3) Пусть $(X, \mathscr{U})$ — равномерное пространство. Наделим пространство $\mathscr{P}(X)$ *равномерностью Вьеториса*, базис фильтра окружений в которой составлен из множеств:

$$\{(A, B) \in \mathscr{P}(X)^2 : B \subset U(A),\ A \subset U(B)\},$$

где $U \in \mathscr{U}$. Очевидно, что монада $\mu_v := \mu_v(\mathscr{U})$ равномерности Вьеториса имеет вид:

$$\mu_v = \{(A, B) : A \subset {}^{\approx}B,\ B \subset {}^{\approx}A\}.$$

(4) Пусть (X, τ) — компакт, т. е. хаусдорфово компактное пространство. Это пространство равномеризуемо и притом единственным способом — фильтр $\mathscr{U}$ такой, что равномерная топология $\tau_{\mathscr{U}}$ совпадает с τ, есть фильтр окрестностей диагонали в X^2. Значит, $\mu(\mathscr{U}) = \mu_{\tau\times\tau}(I_X)$. Иначе говоря, $x \approx x' \leftrightarrow \mathrm{st}(x) = \mathrm{st}(x')$, ибо $\mu_{\tau\times\tau}(x, x) = \mu_\tau(x) \times \mu_\tau(x)$ для стандартной точки x в силу 4.2.13 и каждая точка X^2 околостандартна по 4.3.6.

(5) Пусть X, Y — непустые множества, $\mathscr{U}_Y$ — равномерность в Y и $\mathscr{B}$ — фильтрованное по возрастанию семейство подмножеств X. Рассмотрим равномерность $\mathscr{U}$ в Y^X, называемую «*равномерностью равномерной сходимости на множествах из* $\mathscr{B}$». Семейство $\mathscr{U}$ представляет собой совокупность надмножеств следующих элементов:

$$V_{B,U} := \{(f, g) \in Y^X \times Y^X : g \circ I_B \circ f^{-1} \subset U\},$$

где $B \in \mathscr{B}$ и $U \in \mathscr{U}_Y$. Ясно, что

$$\begin{aligned}(f, g) \in \mu(\mathscr{U}) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(\forall^{\mathrm{st}} U \in U_Y)(\forall\, x \in B)(f(x), g(x) \in U) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(\forall\, x \in B)(f(x) \approx g(x)) \leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{B}))(f(x) \approx g(x)),\end{aligned}$$

где, как обычно, $\mu(\mathscr{B}) := \bigcup {}^{\circ}\mathscr{B}$ — монада семейства $\mathscr{B}$. Если $\mathscr{B} = \{X\}$, то говорят о *сильной равномерности* $\mathscr{U}_s$ на X. Бесспорно выполнение соотношения:

$$(f, g) \in \mu(\mathscr{U}_s) \leftrightarrow (\forall\, x \in X)(f(x) \approx g(x)).$$

Если $\mathscr{B} = \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)$, то $\mu(\mathscr{B}) = {}^{\circ}X$ и, стало быть, для соответствующей *слабой равномерности* $\mathscr{U}_w$ (или, что по определению то же самое, для *равномерности поточечной сходимости*) будет

$$(f, g) \in \mu(\mathscr{U}_w) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} x \in X)(f(x) \approx g(x)).$$

4.4.9. Множество A называют *бесконечно малым* (относительно равномерности $\mathscr{U}$), если $A^2 \subset \mu(\mathscr{U})$, т. е. если любые две точки из A бесконечно близки.

4.4.10. *Для стандартного фильтра $\mathscr{F}$ в $(X, \mathscr{U})$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *монада $\mu(\mathscr{F})$ бесконечно мала;*

(2) *фильтр $\mathscr{F}$ — это фильтр Коши;*

(3) *для всякого $U \in {}^{\circ}\mathscr{U}$ найдется $x \in {}^{\circ}X$ такой, что $\mu(\mathscr{F}) \subset U(x)$.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Пусть $\mu(\mathscr{F})^2 \subset \mu(\mathscr{U})$. Ясно, что $\mu(\mathscr{F})^2 = \mu(\mathscr{F}^{\times})$, где $\mathscr{F}^{\times} := \{F^2 : F \in \mathscr{F}\}$, ибо

$$(x, y) \in \mu(\mathscr{F}^{\times}) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(x \in F \wedge y \in F) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (x \in \mu(\mathscr{F}) \wedge y \in \mu(\mathscr{F})).$$

Итак, $\mu(\mathscr{F}^{\times}) \subset \mu(\mathscr{U})$, т. е. $\mathscr{F}^{\times} \supset \mathscr{U}$. Последнее означает, что $\mathscr{F}$ — фильтр Коши.

(2) $\to$ (3): Для $U \in {}^{\circ}\mathscr{U}$ существует стандартный элемент $F \in \mathscr{F}$, для которого $F \times F \subset U$. Если $x \in {}^{\circ}F$, то $(\forall^{\mathrm{st}} y \in F)(y \in U(x))$. Значит, $F \subset U(x)$ и тем более $\mu(\mathscr{F}) \subset U(x)$.

(3) $\to$ (1): Привлекая идеализацию, видим, что $(\exists\, x \in X)\, \mu(\mathscr{F}) \subset {}^{\approx}x$. Следовательно, монада $\mu(\mathscr{F})$ бесконечна мала. $\rhd$

4.4.11. *Фильтр Коши сходится в том и только в том случае, если его монада содержит околостандартную точку.*

$\lhd$ $\to$: Если $\mathscr{F}$ — рассматриваемый фильтр, то $\mu(\mathscr{F}) \subset \mu(x)$, как только $\mathscr{F} \to x$. Любая точка из $\mu(\mathscr{F})$ околостандартна.

$\leftarrow$: Пусть $\mu(\mathscr{F}) \cap {}^{\approx}x \neq \varnothing$. Для $y \in \mu(\mathscr{F})$ и $z \in \mu(\mathscr{F}) \cap {}^{\approx}x$ будет $y \approx z \approx x$, т. е. $y \approx x$. Значит, $\mu(\mathscr{F}) \subset \mu(x)$. Остается апеллировать к 4.1.7. $\rhd$

4.5. Предстандартность, полнота и полная ограниченность

Как известно, в равномерных пространствах обеспечен удобный признак компактности — классический критерий Хаусдорфа. В этом параграфе приводятся его нестандартные аналоги и связанные с ними критерии предстандартности в пространствах непрерывных функций.

4.5.1. *Для точки x стандартного равномерного пространства X эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *микрогало x является монадой некоторого стандартного фильтра в X;*

(2) *микрогало x — монада некоторого фильтра Коши в X;*

(3) *микрогало x совпадает с монадой минимального по включению фильтра Коши;*

(4) *микрогало x содержит некоторую бесконечно малую монаду;*

(5) *существует стандартная обобщенная последовательность $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов X, микросходящаяся к x, т. е. такая, что для всех удаленных элементов $\xi \in {}^a\Xi$ верно $x_\xi \approx x$.*

$\lhd$ (1) $\rightarrow$ (2): Если ${}^{\approx}x = \mu(\mathscr{F})$ для некоторого стандартного фильтра $\mathscr{F}$, то внешнее множество $\mu(\mathscr{F})$ бесконечно мало (так как микрогало ${}^{\approx}x$ бесконечно мало).

(2) $\rightarrow$ (3): Пусть ${}^{\approx}x = \mu(\mathscr{F})$, а $\mathscr{F}'$ — фильтр Коши и $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$. Тогда по 4.1.17 $\mu(\mathscr{F}') \supset \mu(\mathscr{F}) = {}^{\approx}x$. Если $y \in \mu(\mathscr{F}')$, то в силу бесконечной малости $\mu(\mathscr{F}')$ будет $y \approx x$, т. е. $\mu(\mathscr{F}') = \mu(x) = \mu(\mathscr{F})$. Отсюда $\mathscr{F}' = \mathscr{F}$ по 4.1.4.

(3) $\rightarrow$ (4): Очевидно.

(4) $\rightarrow$ (1): Допустим, что ${}^{\approx}x \supset \mu(\mathscr{F})$ и фильтр $\mathscr{F}$ — это фильтр Коши. Положим $\mathscr{F}' := \mathrm{fil}\{U(F) : U \in \mathscr{U}_X, F \in \mathscr{F}\}$. Имеем для $\mathscr{U} := \mathscr{U}_X$ соотношения

$$
{}^{\approx}\mu(\mathscr{F}) = \mu(\mathscr{U})\,(\mu(\mathscr{F})) = \mu(\mathscr{U})\Big(\bigcap_{F\in{}^{\circ}\mathscr{F}} F\Big) = \bigcap_{F\in{}^{\circ}\mathscr{F}} \mu(\mathscr{U})(F) =
$$

$$
= \bigcap_{F\in{}^{\circ}\mathscr{F}}\ \bigcap_{U\in{}^{\circ}\mathscr{U}} U(F) = \bigcap\{F' : F' \in {}^{\circ}\mathscr{F}'\} = \mu(\mathscr{F}').
$$

Ясно, что ${}^{\approx}\mu(\mathscr{F}) \supset {}^{\approx}x$. Значит, $\mu(\mathscr{F}) = {}^{\approx}x = \mu(\mathscr{F}')$.

(4) → (5): Если $\mathscr{F}$ — фильтр и $\mu(\mathscr{F}) \subset {}^{\approx}x$, то, выбирая обычным способом по стандартной точке из каждого стандартного $F \in {}^{\circ}\mathscr{F}$ и привлекая стандартизацию, строим нужную последовательность. Наоборот, если $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ микросходится к x, то монада фильтра хвостов этой последовательности содержится в микрогало ${}^{\approx}x$. ▷

4.5.2. Точку x, удовлетворяющую одному (а значит, и любому) из эквивалентных условий 4.5.1 (1)–(4), называют *предстандартной* в X. Внешнее множество всех предстандартных точек в X обозначают $\operatorname{pst}(X)$.

4.5.3. *Околостандартные точки (относительно равномерной топологии) являются предстандартными.*

◁ Пусть $x \in \operatorname{nst}(X)$ для рассматриваемого пространства $(X,\mathscr{U})$. Значит, $x \in {}^{\approx}y$ для некоторого $y \in {}^{\circ}X$. Отсюда ${}^{\approx}x \supset {}^{\approx}y = \mu(\tau_{\mathscr{U}}(y))$. На основании 4.5.1 $x \in \operatorname{pst}(X)$. ▷

4.5.4. *Образ предстандартной точки при равномерно непрерывном отображении предстандартен.*

◁ Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр Коши и $\mu(\mathscr{F}) \subset {}^{\approx}x$. Ясно, что $f(\mathscr{F})$ — фильтр Коши в образе X при отображении f. Итак, $\mu(f(\mathscr{F})) \subset {}^{\approx}f(x)$, т. е. $f(x)$ — предстандартная точка по 4.5.2. ▷

4.5.5. *Точка тихоновского произведения стандартного семейства равномерных пространств предстандартна в том и только в том случае, если предстандартны ее стандартные координаты.*

◁ →: Пусть $\mathscr{X} := \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$ и $\mathscr{U}_{\mathscr{X}} := \sup_{\xi\in\Xi} \operatorname{Pr}_\xi^{-1}(\mathscr{U}_\xi)$ — тихоновское произведение стандартных пространств $(X_\xi, \mathscr{U}_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Возьмем $x \in \operatorname{pst}(\mathscr{X})$. На основании 4.5.1 имеется фильтр Коши $\mathscr{F}$ в $(\mathscr{X}, \mathscr{U}_{\mathscr{X}})$ такой, что ${}^{\approx}x = \mu(\mathscr{F})$. Для всякого стандартного $\xi \in \Xi$ в силу равномерной непрерывности Pr_ξ и 4.4.6 $\operatorname{Pr}_\xi({}^{\approx}x) \subset {}^{\approx}x_\xi$, т. е. ${}^{\approx}x_\xi \supset \operatorname{Pr}_\xi(\mu(\mathscr{F})) = \mu(\operatorname{Pr}_\xi(\mathscr{F}))$. Значит, x_ξ — предстандартная точка в X_ξ при $\xi \in {}^{\circ}\Xi$.

←: Если для всякого $\xi \in {}^{\circ}\Xi$ верно, что ${}^{\approx}x_\xi = \mu(\mathscr{F}_\xi)$ при подходящем выборе фильтра $\mathscr{F}_\xi$, то рассмотрим фильтр

$$\mathscr{F} := \sup_{\xi\in\Xi} \operatorname{Pr}_\xi^{-1}(\mathscr{F}_\xi).$$

Ясно, что фильтр $\mathscr{F}$ стандартен и

$$\mu(\mathscr{F}) = \bigcap_{\xi \in {}^\circ\Xi} \mu(\mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\mathscr{F}_\xi)) = \bigcap_{\xi \in {}^\circ\Xi} \mathrm{Pr}_\xi^{-1}(\mu(\mathscr{F}_\xi)) =$$

$$= \bigcap_{\xi \in {}^\circ\Xi} \mathrm{Pr}_\xi^{-1}({}^\approx x_\xi) = \{y \in \mathscr{X} : (\forall\, \xi \in {}^\circ\Xi)\, y_\xi \approx x_\xi\} = {}^\approx x.$$

Тем самым доказательство завершено. $\triangleright$

4.5.6. *Нестандартный критерий полноты.* *Произвольное стандартное пространство полно в том и только в том случае, если каждая его предстандартная точка околостандартна.*

$\triangleleft$ $\rightarrow$: Пусть X — полное пространство, т. е. такое, что каждый фильтр Коши в X сходится. Возьмем $x \in \mathrm{pst}\,(X)$. На основании 4.5.2 для некоторого стандартного фильтра Коши $\mathscr{F}$ будет $\mu(\mathscr{F}) = {}^\approx x$. В силу полноты существует $y \in {}^\circ X$ такой, что $\mu(y) \supset \mu(\mathscr{F})$. Итак, ${}^\approx y = \mu(y) \supset \mu(\mathscr{F}) \supset {}^\approx x$. Следовательно, ${}^\approx y = {}^\approx x$, т. е. $x \in \mathrm{nst}\,(X)$.

$\leftarrow$: Пусть $\mathrm{nst}\,(X) = \mathrm{pst}\,(X)$ и $\mathscr{F}$ — фильтр Коши в X. Возьмем $x \in \mu(\mathscr{F})$. Тогда ${}^\approx x \supset \mu(\mathscr{F})$ (ибо $\mu(\mathscr{F})$ — бесконечно малое множество). На основании 4.5.2 $x \in \mathrm{pst}\,(X)$. Значит, $x \in \mathrm{nst}\,(X)$. Остается привлечь 4.4.11. $\triangleright$

4.5.7. *Тихоновское произведение семейства полных равномерных пространств полно.*

$\triangleleft$ В силу принципа переноса достаточно разобрать случай стандартных параметров. Если стандартные сомножители полны, то каждая их предстандартная точка околостандартна по 4.5.5. Остается вспомнить, что околостандартные точки — это точки с околостандартными стандартными координатами (см. 4.3.10), а предстандартные точки — это точки с предстандартными стандартными координатами по 4.5.5. Кроме того, нужно учесть, что равномерная топология произведения есть произведение равномерных топологий сомножителей. $\triangleright$

4.5.8. *Пространство функций, действующих в полное пространство, при наделении его сильной равномерностью становится полным.*

$\triangleleft$ Пусть $(Y, \mathscr{U})$ — полное стандартное равномерное пространство, X — стандартное множество. Возьмем предстандартную точку

$f \in Y^X$. В силу 4.5.2 и 4.4.8 это значит, что имеется стандартная последовательность $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов Y^X, для которой

$$(\forall\, \xi \in {}^a\Xi)(\forall\, x \in X)(f_\xi(x) \approx f(x)).$$

На основании 4.5.7 f околостандартна в слабой равномерности, т. е. найдется стандартный элемент $g \in Y^X$ такой, что

$$(\forall\, \xi \in {}^a\Xi)(\forall^{\mathrm{st}} x \in X)(f_\xi(x) \approx g(x)).$$

Значит, для каждого стандартного $x \in X$ последовательность $(f_\xi(x))_{\xi\in\Xi}$ сходится к $g(x)$. В силу принципа переноса $(\forall\, x \in X)$ $f_\xi(x) \to g(x)$. Отсюда $(\forall\, U \in {}^\circ\mathscr{U})(\forall\, x \in X)(f(x), g(x)) \in U$. Последнее обеспечивает тот факт, что f бесконечно близка к g в сильной равномерности. Ссылки на 4.5.6 и принцип переноса завершают доказательство. $\triangleright$

4.5.9. *Пусть E — это некоторое множество в равномерном пространстве $(X, \mathscr{U})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество E вполне ограничено, т. е. для каждого $U \in \mathscr{U}$ имеется конечное множество $E_0 \subset E$ такое, что $E \subset U(E_0)$ (для всякого $U \in \mathscr{U}$ существует конечная U-сеть);*

(2) *найдется внутреннее конечное покрытие E бесконечно малыми внутренними множествами;*

(3) *множество E имеет конечный скелет, т. е. найдется внутреннее конечное множество E_0 в X такое, что E лежит в микрогало ${}^{\approx}E_0$;*

(4) *множество E лежит в микрогало некоторого внутреннего вполне ограниченного множества.*

$\triangleleft$ (1) $\leftrightarrow$ (2): Привлекая определение и принцип идеализации, последовательно выводим:

$$(\forall^{\mathrm{st}} U \in \mathscr{U})(\exists\, E_0)(E_0 \subset E \wedge E_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) \wedge E \subset U(F_0)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U})(\exists\, E_0)(\forall\, U \in \mathscr{U}_0)(E_0 \subset E \wedge E_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) \wedge E \subset$$
$$\subset U(E_0)) \leftrightarrow (\exists E_0)(\forall^{\mathrm{st}} U \in \mathscr{U})(E_0 \subset E \wedge E_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) \wedge E \subset U(E_0)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, E_0 \subset E)(E_0 \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) \wedge E \subset {}^{\approx}E_0).$$

(1) $\leftrightarrow$ (3): Безусловно, что E — вполне ограничено в том и только в том случае, если для каждого стандартного $U \in \mathscr{U}$ найдется конечное покрытие $\{E_1, \dots, E_n\}$ множества E такое, что $E_k \times E_k \subset U$ (т. е. E_k мало порядка U) для $k := 1, \dots, n$. Остается воспользоваться принципом идеализации.

(3) $\to$ (4): Очевидно.

(4) $\to$ (1): Пусть U — стандартное окружение. Имеется симметричный элемент $V \in {}^\circ\mathscr{U}$, для которого $V \circ V \subset U$. Ясно, что для некоторого конечного E' в X будет $V(E') \supset E_0$, где E_0 — заданное вполне ограниченное множество с тем свойством, что ${}^{\approx}E_0 \supset E$. Значит, $U(E') \supset V \circ V(E') \supset V(E_0) \supset E$. $\rhd$

4.5.10. *В каждом стандартном равномерном пространстве имеется универсальный конечный скелет, т. е. общий внутренний конечный скелет для всех вполне ограниченных стандартных множеств исходного пространства.*

$\lhd$ Вспоминая, что объединение конечного числа вполне ограниченных множеств вполне ограничено, и учитывая 4.5.9, для пространства X, конечного стандартного набора $\mathscr{E}$ вполне ограниченных множеств и стандартного конечного набора $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}_X$ можно подобрать единое конечное множество в X, служащее U-сетью любого $E \in \mathscr{E}$ при каждом $U \in \mathscr{U}_0$. Привлекаем идеализацию. $\rhd$

4.5.11. ***Нестандартные критерии полной ограниченности.*** *Для равномерного пространства X эквивалентны утверждения:*

(1) *X вполне ограничено;*
(2) *каждая точка X предстандартна;*
(3) *множество $\operatorname{pst}(X)$ является внутренним;*
(4) *множество X имеет конечный скелет.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Пусть $x \in X$. Для всякой стандартной $U \in \mathscr{U}$ найдется стандартная точка $x' \in {}^\circ X$, для которой $x \in U(x')$ — *элемент конечной стандартной* U-сети для X. Положим $\mathscr{F} := \operatorname{fil}^*\{U(x') : U \in {}^\circ\mathscr{U}\}$. Ясно, что $\mathscr{F}$ — фильтр Коши на основании 4.4.10. При этом по построению $x \in \mu(\mathscr{F})$, т. е. $x \in \operatorname{pst}(X)$.

(2) $\to$ (3): Очевидно.

(3) $\to$ (1): Предположим, что для некоторого стандартного $U \in \mathscr{U}$ и всякого конечного стандартного $E \subset X$ не верно, что $\operatorname{pst}(X) \subset U(E)$. По принципу идеализации это означает, что найдется внутренняя точка $x \in \operatorname{pst}(X)$, обладающая свойством: $x \notin U(y)$ при

любом $y \in {}^{\circ}X$. По определению 4.5.2 ${}^{\approx}x = \mu(\mathscr{F})$ для подходящего фильтра Коши $\mathscr{F}$. Возьмем $F \in {}^{\circ}\mathscr{F}$ такое, что $F \times F \subset U$. Тогда для всякого $y \in {}^{\circ}F$ будет $x \in \mu(\mathscr{F}) \subset U(y)$, вопреки нашему допущению. Итак, $(\forall^{\mathrm{st}} U \in \mathscr{U})(\exists^{\mathrm{st\,fin}} E \subset X)(U(E) \supset \mathrm{pst}\,(X))$. Осталось вспомнить, что $\mathrm{pst}\,(X) \supset {}^{\circ}X$.

(1) $\leftrightarrow$ (4): Содержится в 4.5.9. $\triangleright$

4.5.12. *Критерий Хаусдорфа.* *Равномерное пространство является компактным в том и только в том случае, если оно полно и вполне ограничено.*

$\triangleleft$ $\rightarrow$: Если пространство X компактно (и стандартно), то каждая точка в нем околостандартна и, стало быть, предстандартна по 4.5.3. На основании 4.5.11 X вполне ограничено. В силу 4.5.6 X полно.

$\leftarrow$: Раз X вполне ограничено, то по 4.5.11 $X = \mathrm{pst}\,(X)$. Поскольку X полно, то по 4.6.6 $\mathrm{pst}\,(X) = \mathrm{nst}\,(X)$. Окончательно $X = \mathrm{nst}\,(X)$, т. е. X — компактно по 4.3.6. $\triangleright$

4.5.13. *Пусть X — произвольное множество, а Y — равномерное пространство и $f : X \to Y$ — (стандартная) функция. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *f — вполне ограниченное отображение, т. е. $\mathrm{im}\, f$ вполне ограничен в Y;*

(2) *существует внутреннее конечное покрытие $\mathscr{E}$ множества X такое, что $f(E)$ бесконечно мало для каждого $E \in \mathscr{E}$, т. е. f — почти ступенчатая функция относительно $\mathscr{E}$;*

(3) *существуют внутреннее $n \in \mathbb{N}$ и набор $\{X_1, \dots, X_n\}$ внешних попарно непересекающихся множеств, таких что $X_1 \cup \ldots \cup X_n = X$ и $f(x) \approx (x')$ для всех $x, x' = X_k$ при каждом $k := 1, \dots, n$.*

$\triangleleft$ (1) $\rightarrow$ (2): В силу 4.5.9 имеется внутреннее конечное покрытие $\mathscr{E}$ множества $\mathrm{im}\, f$ такое, что $E \in \mathscr{E} \rightarrow E \subset \mu(\mathscr{U}_Y)$. Полагаем $\mathscr{E}' := \{f^{-1}(E) : E \in \mathscr{E}\}$. Ясно, что $\mathscr{E}'$ — искомое покрытие X.

(2) $\rightarrow$ (3): Очевидно.

(3) $\rightarrow$ (1): Возьмем $y_k \in f(X_k)$ и положим $E := \{y_k : k = 1, \dots, n\}$. Ясно, что E — внутреннее конечное множество. По условию E — скелет $f(X)$. Значит, на основании 4.5.9 $\mathrm{im}\, f$ вполне ограничен. $\triangleright$

4.5.14. *Пространство $CB(X,Y)$ вполне ограниченных отображений из X в Y полно в сильной равномерности.*

$\triangleleft$ В силу 4.5.8 достаточно установить замкнутость $CB(X,Y)$. Итак, пусть стандартная $f : X \to Y$ такова, что для некоторой вполне ограниченной функции g будет $(\forall\, x \in X) f(x) \approx g(x)$. Ясно, что $\operatorname{im} f \subset {}^{\approx}\operatorname{im} g$. Учитывая полную ограниченность $\operatorname{im} g$, 4.2.5 и 4.5.9, выводим: $f \in \operatorname{cl}(CB(X,Y)) \to f \in CB(X,Y)$. $\triangleright$

4.5.15. Конечное покрытие $\mathscr{E}$ множества X называют *мелким*, если оно вписано в каждое стандартное конечное покрытие $\mathscr{E}_0$ стандартного множества X, т. е. если каждое множество из $\mathscr{E}$ содержится в некотором множестве из $\mathscr{E}_0$. Отображение, действующее из X в равномерное пространство и являющееся почти ступенчатым относительно каждого мелкого покрытия X, называют *микроступенчатым* на X.

4.5.16. *Критерий предстандартности в $CB(X,Y)$.* *Пусть Y — полное равномерное пространство. Функция $f : X \to Y$ предстандартна в $CB(X,Y)$ (относительно сильной равномерности) в том и только в том случае, если f микроступенчата на X и образ f составлен из околостандартных точек Y.*

$\triangleleft$ $\to$: На основании 4.5.14 и 4.5.6 выводим, что f околостандартна в сильной равномерности. Значит, для некоторой $g \in {}^{\circ}CB(X,Y)$ при всех $x \in X$ будет $f(x) \approx g(x)$. Ясно, что $\operatorname{im} f \subset {}^{\approx}\operatorname{im} g$. Кроме того, $\operatorname{im} g \subset \operatorname{pst}(Y)$ в силу 4.5.13. Если теперь $\mathscr{E}$ — какое-либо мелкое покрытие, то, учитывая определение полной ограниченности, для каждого стандартного $V \in \mathscr{U}_Y$ можно подыскать стандартное конечное покрытие $\mathscr{E}'$ в X такое, что $g(E)^2 \subset V$ при всяком $E \in \mathscr{E}'$. Отсюда выводим, что $(\forall\, E \in \mathscr{E})\, g(E)^2 \subset V$, т. е. g почти ступенчата на $\mathscr{E}$. Значит, при $E \in \mathscr{E}$ и $x, x' \in E$ будет $g(x) \approx f(x) \approx f(x') \approx g(x')$, т. е. f также почти ступенчата относительно $\mathscr{E}$. В силу произвольности $\mathscr{E}$ отображение f микроступенчато.

$\leftarrow$: Поскольку $\operatorname{im} f \subset \operatorname{nst}(Y)$, то $(\forall\, x \in X)(\exists^{\mathrm{st}} y \in Y)(\forall^{\mathrm{st}} W \in \tau(y))(f(x) \in W)$. Применяя правило введения стандартных функций, имеем

$$(\forall^{\mathrm{st}} W(\,\cdot\,))(\forall\, x \in X)(\exists^{\mathrm{st}} y \in Y)(f(x) \in W(y)).$$

На основании принципа идеализации выводим:

$$(\forall^{\mathrm{st}} W(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st}}\{y_1, \dots, y_n\})(\forall x \in X)(\exists\, k)(f(x) \in W(y_k)).$$

Возьмем теперь $V \in \mathscr{U}_Y$. По условию для всякого мелкого покрытия $\mathscr{E}$ множества X и для $E \in \mathscr{E}$ будет $f(E)^2 \subset V$. Привлекая принцип Коши 4.1.17 (учитывая, что мелкие покрытия — удаленные элементы направленного множества конечных покрытий), видим, что имеется стандартное конечное покрытие $\mathscr{E}_V$ такое, что $f(E)^2 \subset V$ при $E \in \mathscr{E}_V$.

Подберем соответствующее стандартное покрытие $\mathscr{E}_V$ и стандартный конечный набор Y_0 элементов Y, для которых $\operatorname{im} f \subset V(Y_0)$.

Используя $\mathscr{E}_V$ и Y_0, легко построить стандартную ступенчатую функцию f_V такую, что $(\forall\, x \in X)((f_V(x), f(x)) \in V)$. Ясно, что для $U \in {}^\circ\mathscr{U}_Y$, удовлетворяющего условиям: $U = U^{-1}$ и $U \circ U \subset V$, будет $(f_{V'}(x), f_{V''}(x)) \in V' \circ V''^{-1} \subset U \circ U \subset V$ при любых $V', V'' \subset U$. Значит, стандартная сеть $(f_V)_{V \in \mathscr{U}_Y}$ (более полно: ${}^*\{f_V : V \in {}^\circ\mathscr{U}_Y\}$) фундаментальна. Обозначим через g ее стандартный предел в $CB(X,Y)$. По-прежнему справедливо: $(\forall^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{U}_Y)(\forall\, x \in X)((g(x), f(x)) \in V)$. Окончательно $g \approx f$ в сильной равномерности. Итак, f околостандартна, а значит, и предстандартна в силу полноты $CB(X,Y)$, отмеченной 4.5.14. $\triangleright$

4.5.17. ***Нестандартные критерии относительной компактности.*** *В полном отделимом пространстве X для множества E эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *E относительно компактно;*
(2) *E предкомпактно (т. е. пополнение E компактно);*
(3) *E вполне ограничено;*
(4) *$E \subset \operatorname{pst}(X)$;*
(5) *$E \subset \operatorname{nst}(X)$;*
(6) *E лежит в микрогало конечного множества;*
(7) *$\operatorname{cl}(U)$ имеет конечный скелет.*

$\triangleleft$ В силу полноты X по 4.5.6 $\operatorname{pst}(X) = \operatorname{nst}(X)$. Значит, $(5) \to (1) \to (4)$ на основании 4.3.8. Бесспорно, что $(7) \to (6) \to (3) \to (1) \to (2)$. Если выполнено (2), то замыкание $\operatorname{cl}(E)$ полно и вполне ограничено по критерию Хаусдорфа. Учитывая 4.5.11, выводим импликацию $(2) \to (7)$. $\triangleright$

4.5.18. ***Критерии предстандартности в $C(X,Y)$.*** *Пусть X — компакт, Y — полное равномерное пространство и $C(X,Y)$ — пространство непрерывных функций, действующих из X в Y, наделенное сильной равномерностью. Для внутреннего элемента $f \in$*

$C(X,Y)$ *эквивалентны утверждения:*

(1) f *предстандартен;*

(2) f *околостандартен;*

(3) f *микронепрерывен и переводит стандартные точки в околостандартные.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Ясно, что f предстандартен в Y^X с сильной равномерностью, например, на основании 4.5.4. В силу 4.5.8 и 4.5.6 f околостандартен в Y^X, т. е. имеется стандартная $g \in Y^X$, для которой $f(x) \approx g(x)$ при всех $x \in X$. Пусть $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — стандартная последовательность в $C(X,Y)$, микросходящаяся к f. Возьмем $x' \approx x$ и заметим, что $f_\xi(x') \approx f_\xi(x)$ для всех стандартных $\xi \in \Xi$ (в силу непрерывности f_ξ и компактности X). Тогда (ср. 3.3.17(3)) для некоторого $\eta \in {}^a\Xi$ будет $f_\eta(x') \approx f_\eta(x)$. Отсюда последовательно выводим $g(x') \approx f(x') \approx f_\eta(x') \approx f_\eta(x) \approx f(x) \approx g(x)$. Таким образом, стандартная функция g микронепрерывна и, стало быть, $g \in CB(X,Y)$ по 4.4.6.

(2) $\to$ (3): По условию для некоторой стандартной непрерывной функции g выполнено: $g(x) \approx f(x)$ для всех $x \in X$. Тем самым $f({}^\circ X) \subset {}^{\approx}g({}^\circ X) \subset {}^{\approx\circ}g(X) \subset \operatorname{nst}(Y)$. Помимо этого, по 4.5.6 g микронепрерывна и, стало быть, для $x' \approx x$ будет $f(x) \approx g(x) \approx g(x') \approx f(x')$.

(3) $\to$ (1): В силу 4.5.3 следует убедиться только, что (3) $\to$ (2). Возьмем микронепрерывную функцию f, для которой $f({}^\circ X) \subset \operatorname{nst}(X)$. По принципу введения стандартных функций имеется стандартная функция g такая, что $g(x) \in {}^\circ f(x)$ для $x \in {}^\circ X$. Проверим, что g равномерно непрерывна. Для этого возьмем стандартное окружение $V \in \mathscr{U}_Y$ и подберем стандартное $W \in \mathscr{U}_Y$ из условия $W \circ W \circ W \subset V$. Учитывая 4.5.7, подыщем стандартное U из единственной равномерности $\mathscr{U}_X$ (см. 4.4.8 (4)), чтобы было $f^\times(U) \subset W$. Для стандартных $x, x' \in {}^\circ X$ при $(x,x') \in U$ будет $(f(x), f(x')) \in W$, $(f(x'), g(x')) \in W$, $(g(x), f(x)) \in W$. Следовательно, $(g(x), g(x')) \in W \circ W \circ W \subset V$. Окончательно

$$(\forall^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{U}_Y)(\exists^{\mathrm{st}} U \in \mathscr{U}_X)(\forall^{\mathrm{st}} x, x' \in U)((g(x), g(x')) \in V).$$

Значит, по принципу переноса $g \in C(X,Y)$. Теперь для произвольного $x \in X$ выводим $f(x) = f(x') \approx g(x') \approx g(x)$, где x' — единственная стандартная точка, бесконечно близкая к x. Итак, элемент f бесконечно близок к g в сильной равномерности. $\rhd$

4.5.19. *Теорема Асколи — Арцела.* *Пусть X — компакт, а Y — полное отделимое равномерное пространство и $E \subset C(X, Y)$. Множество E относительно компактно в сильной равномерности в том и только в том случае, если E равностепенно непрерывно и равномерно (вполне) ограничено (т. е. для некоторого вполне ограниченного C в Y будет $f(X) \subset C$ при всех $f \in E$).*

$\lhd$ Все следует из 4.5.18, 4.5.17 и 4.4.6 (2). $\rhd$

4.6. Относительные монады

Понятие относительно стандартного элемента, введенное в 3.9, удобно при характеризации некоторых топологических свойств.

4.6.1. Пусть τ — произвольный допустимый элемент (см. 3.9.2). Возьмем τ-стандартное топологическое пространство X. Для τ-стандартной точки $a \in X$ определим ее τ-*монаду* как пересечение всех τ-стандартных окрестностей этой точки:

$$\mu^\tau(a) := \bigcap\{u \subset X : u \text{ открыто}, a \in u, u \operatorname{st} \tau\}.$$

Если $x \in \mu^\tau(a)$, то говорят, что x является τ-*бесконечно близкой к* a точкой и пишут $x \overset{\tau}{\approx} a$. Если X — равномерное пространство с τ-стандартной равномерностью Σ, то про произвольные две точки x и y в нем говорят, что они τ-*бесконечно близки* и пишут $x \overset{\tau}{\approx} y$, если $(x, y) \in \bigcap\{\sigma \in \Sigma : \sigma \operatorname{st} \tau\}$.

Непосредственно из принципа идеализации следует, что если a не является изолированной точкой, то $\mu^\tau(a) - \{a\} \neq \varnothing$.

4.6.2. *Пусть τ и λ — допустимые элементы, причем τ является λ-стандартным. Если X — это τ-стандартное топологическое пространство и $a \in X$ — некоторая τ-стандартная точка в нем, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *$\mu^\lambda(a) \subset \mu^\tau(a)$;*

(2) *для произвольных $x, y \in X$ из $x \overset{\lambda}{\approx} y$ следует $x \overset{\tau}{\approx} y$;*

(3) *если X и a стандартны, то $\mu^\lambda(a) \subset \mu(a)$;*

(4) *если X и a стандартны, то для произвольных $x, y \in X$ из $x \overset{\lambda}{\approx} y$ вытекает $x \approx y$.*

$\lhd$ Доказательство следует из 3.9.4 (2). Из этого же предложения видно, что $X \operatorname{st} \lambda$, стало быть, определение $\mu^\lambda(a)$ корректно.

В случае стандартных X и a следует взять $\tau = \varnothing$ (или любое другое стандартное множество), поскольку формулы $\mathrm{st}(X)$ и $X \,\mathrm{st}\, \varnothing$ равносильны. $\triangleright$

4.6.3. *Теорема.* *Пусть заданы некоторое топологическое пространство X, множество A в X и точка $a \in X$. Тогда:*

(1) *A открыто в том и только в том случае, если $\mu^\tau(x) \subset A$ для любых τ-стандартных $x \in A$;*

(2) *A замкнуто в том и только в том случае, если любая τ-стандартная точка $x \in X$, имеющая τ-бесконечно близкие точки из A, содержится в A, т. е. если*

$$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} x \in X)(\forall \eta \in A)(\eta \in \mu^\tau(x) \to x \in A).$$

$\triangleleft$ Эти утверждения доказываются так же, как и аналогичные факты для стандартных объектов. Для полноты приведем доказательство (1).

Пусть σ — топология на X и $\sigma(a)$ — множество всех открытых окрестностей точки a. Из τ-стандартности топологического пространства X в силу 3.9.7 (1) вытекает τ-стандартность топологии σ, а также множества $\sigma(a)$ для каждого τ-стандартного $a \in X$. Допустим открытость множества A и возьмем τ-стандартный элемент $x \in A$. Тогда по определению τ-монады $\mu^\tau(x) = \bigcap\{u : u \,\mathrm{st}\, \tau, u \in \sigma(x)\}$, следовательно, $\mu^\tau(x) \subset A$, так как $A \in \sigma(x)$. Для обоснования обратного утверждения предположим, что $\mu^\tau(x) \subset A$ для любого τ-стандартного $x \in A$, но A не является открытым. Так как X, A стандартны относительно τ, то в силу релятивизированного принципа переноса будет

$$(\exists^{\mathrm{st}\ \tau} x \in A)(\forall^{\mathrm{st}\ \tau} U \in \sigma(x))(\exists^{\mathrm{st}\ \tau} y)(y \in U \wedge y \notin A).$$

Рассмотрим бинарное отношение $\mathscr{R} \subset \sigma(x) \times X$, определяемое формулой

$$(u, z) \in \mathscr{R} \leftrightarrow z \in U \wedge z \notin A.$$

Отношение $\mathscr{R}$ удовлетворяет условию принципа идеализации, поскольку $\bigcap I \in \sigma(x)$ и $\bigcap I \,\mathrm{st}\, \tau$ для любого τ-стандартного конечного множества $I \subset \sigma(x)$. Но это означает, что $(\exists y)(\forall^{\mathrm{st}\ \tau} U \in \sigma(x))(y \in U \wedge y \notin A)$. Тем самым приходим к противоречивому соотношению $y \in \mu^\tau(x) - A$. $\triangleright$

4.6.4. Теорема. *Пусть топологические пространства X и Y, отображение $f : X \to Y$, точки $a \in X$ и $b \in Y$ являются τ-стандартными. Если τ — это λ-стандартный элемент для некоторого допустимого λ, то справедливы соотношения*

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *в том и только в том случае, если для любого $\xi \in X$ из $\xi \overset{\lambda}{\approx} a$ следует $f(\xi) \overset{\tau}{\approx} b$;*

(2) *в случае равномерных пространств X и Y отображение f равномерно непрерывно в том и только в том случае, если для любых $\xi, \eta \in X$ из $\xi \overset{\lambda}{\approx} \eta$ следует $f(\xi) \overset{\tau}{\approx} f(\eta)$.*

$\lhd$ Докажем (1). Из-за τ-стандартности f, a и b релятивизированный принцип переноса дает

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}\ \tau} W \in \sigma_Y(b))(\exists^{\mathrm{st}\ \tau} u \in \sigma_X(a))(f(u) \subset W),$$

где σ_Y и σ_X — топологии в Y и X соответственно. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Требуется доказать, что $f(\mu^\lambda(a)) \subset \mu^\tau(b)$. Согласно 4.6.2 (1) $\mu^\lambda(a) \subset \mu^\tau(a)$, поэтому достаточно показать, что $f(\mu^\tau(a)) \subset \mu^\tau(b)$ или, в эквивалентной записи,

$$(\forall^{\mathrm{st}\ \tau} W \in \sigma_Y(b))(f(\mu^\tau(a)) \subset W).$$

Предположим, что $u \operatorname{st} \tau$, $u \in \sigma_X(a)$ и $f(u) \subset W$. Тогда $\mu^\tau(a) \subset u$, значит, $f(\mu^\tau(a)) \subset W$, что и требовалось.

Для обоснования обратной импликации предположим, что имеет место включение $f(\mu^\lambda(a)) \subset \mu^\tau(b)$. Зафиксируем произвольную τ-стандартную окрестность $W \in \sigma_Y(b)$ и заметим, что в силу 3.9.4 (2) будет $W \operatorname{st} \lambda$ и $f(\mu^\lambda(a)) \subset W$.

Докажем сначала формулу $(\exists^{\mathrm{st}\ \lambda} U \in \sigma_X(a))(f(U) \subset W)$. Если это не так, то отношение $\mathscr{R}_1 \subset \sigma_X(a) \times Y$, определяемое равенством $\mathscr{R}_1 := \{(U, y) : y \in U \wedge f(y) \notin W\}$, удовлетворяет условию релятивизированного принципа идеализации. Применив последний, получаем формулу

$$(\exists y)(\forall^{\mathrm{st}\ \lambda} U \in \sigma_X(a))(y \in U \wedge f(y) \notin W).$$

Это противоречит включению $f(\mu^\lambda(a)) \subset W$. Таким образом, $(\exists u \in \sigma_X(a))\,(f(U) \subset W)$. Так как все параметры в последнем предложении τ-стандартны, то релятивизированный принцип переноса дает $(\exists^{\mathrm{st}\ \tau} U \in \sigma_X(a))\,(f(U) \subset W)$, что и требовалось. Утверждение (2) доказывается аналогично. $\rhd$

4.6.5. Теоремы 4.6.3 и 4.6.4 применимы к любым допустимым объектам, так как $x \operatorname{st} x$ для любого допустимого x. Так, например, если $\tau := (X, A)$ (или же если $\tau := (X, Y, f, a, b)$), то объекты X и A в теореме 4.6.3 (соответственно X, Y, f, a, b в теореме 4.6.4) стандартны относительно τ. Отсюда вытекают, в частности, следующие утверждения.

(1) *Пусть X — допустимое топологическое пространство и $A \subset X$. Если $\tau := (X, A)$, то множество $A \subset X$ открыто в том и только в том случае, если $\mu^\tau(x) \subset A$ для любого $x \in A$, стандартного относительно τ.*

(2) *Пусть X и Y — допустимые топологические пространства, $f : X \to Y$, $a \in X$ и $b \in Y$. При $\tau := (X, Y, f, a, b)$ имеет место следующая эквивалентность:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \leftrightarrow (\forall x \in \mu^\tau(a))\, f(x) \in \mu^\tau(b).$$

4.6.6. Рассмотрим теперь подробнее случай $X := \mathbb{R}$. Зафиксируем внутреннее допустимое множество τ. Пусть $x \in \mathbb{R}$ — произвольное (не обязательно стандартное) число. Будем говорить, что x является *τ-бесконечно малым* числом и писать $x \overset{\tau}{\approx} 0$, если $(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} y \in \mathbb{R}_+)\, |x| < y$. Естественны также следующие определения: x — это *τ-бесконечно большое* число, символически $x \overset{\tau}{\approx} \infty$ или $x \overset{\tau}{\sim} \infty$, если $1/x$ — это τ-бесконечно малое число; x — это *τ-доступное* или *τ-конечное* число, если x не является τ-бесконечно большим; последнее обстоятельство записывают как $x \overset{\tau}{\ll} \infty$.

Как видно непосредственно из определений, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
x \overset{\tau}{\approx} 0 &\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}\ \tau} y \in \mathbb{R}_+)\, (|x| \le y),\\
x \overset{\tau}{\approx} \infty &\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}\ \tau} y \in \mathbb{R}_+)\, (|x| > y),\\
x \overset{\tau}{\ll} \infty &\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}\ \tau} y \in \mathbb{R}_+)\, (|x| \le y).
\end{aligned}$$

4.6.7. *Число $x \in \mathbb{R}_+$ будет τ-бесконечно малым тогда и только тогда, когда $|x| < \varphi(\tau)$ для любой стандартной функции φ со значениями в $\mathbb{R}_+$ такой, что $\tau \in \operatorname{dom}(\varphi)$.*

◁ Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $y \in \mathbb{R}_+$ и $y \operatorname{st} \tau$. Покажем, что $|x| < y$. Из условия $y \operatorname{st} \tau$ вытекает существование такой стандартной функции ψ, что $\tau \in \operatorname{dom}(\psi)$, $\operatorname{im}(\psi) \subset \mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{R}_+)$ (как обычно, символом $\mathscr{P}_{\text{fin}}(A)$ обозначим множество всех конечных подмножеств A), $y \in \psi(\tau)$. Определим стандартную (ввиду 3.9.3) функцию $\varphi : \operatorname{dom}(\psi) \to \mathbb{R}_+$, положив $\varphi(\alpha) := \min \psi(\alpha)$. Тогда из условий следует, что $|x| < \varphi(\tau)$, а из определения функции φ видно, что $y \geq \varphi(\tau)$. ▷

4.6.8. *Для любого $x \in \mathbb{R}_+$ и натурального числа $n \leq x$ выполняется $n \operatorname{st} x$.*

◁ Пусть $m := [x]$ — целая часть числа x. Тогда $m \operatorname{st} x$ и $n \leq m$. Рассмотрим множество $\overline{m} = \{0, 1, \dots, m\}$. Как видно из предложения 3.9.7 (1), $\overline{m} \operatorname{st} m$. Более того, $\overline{m}$ — конечное множество, т. е. верна формула $\operatorname{fin}(\overline{m})$. Из 3.9.7 (2) вытекает, что $n \operatorname{st} \overline{m}$, если $n \in \overline{m}$. ▷

4.6.9. *Пусть $\lambda \operatorname{st} \tau$. Если $x \overset{\tau}{\approx} 0$ (или $x \overset{\tau}{\approx} \infty$), то $x \overset{\lambda}{\approx} 0$ (соответственно $x \overset{\lambda}{\approx} \infty$). Если число x является λ-доступным, то x и τ-доступно.*

◁ Следует из соотношений, отмеченных в 4.6.6. ▷

4.6.10. ***Теорема.*** *Имеют место утверждения:*

(1) **Принцип доступности.** *Если внутреннее множество $B \subset \mathbb{R}$ состоит только из τ-доступных элементов, то существует τ-стандартное $t \in \mathbb{R}$ такое, что $B \subset [-t,\, t]$.*

(2) **Принцип перманентности.** *Если внутреннее множество B содержит все положительные τ-доступные числа, то оно содержит и интервал $[0,\, \Omega]$ для некоторого τ-бесконечно большого Ω.*

(3) **Принцип Коши.** *Если внутреннее множество B содержит все τ-бесконечно малые числа, то оно содержит и интервал $[-a,\, a]$ для некоторого τ-стандартного $a \in \mathbb{R}_+$.*

(4) **Принцип Робинсона.** *Если внутреннее множество B состоит только из τ-бесконечно малых чисел, то B содержится в интервале $[-\varepsilon,\, \varepsilon]$, где ε — некоторое τ-бесконечно малое положительное число.*

$\lhd$ Ограничимся доказательством (1) и (4).

(1): Если $\lambda \overset{\tau}{\approx} \infty$, то по условию $|\xi| < \lambda$ для всех $\xi \in B$ (см. 4.6.6). Тем самым B — ограниченное множество. Так как множество $B' := \{|b| : b \in B\}$ ограничено сверху, то существует положительное $\mu := \sup(B')$. Если $\mu \overset{\tau}{\approx} \infty$, то $\mu - 1 \overset{\tau}{\approx} \infty$ и по определению супремума $\mu - 1 < |\xi| \leq \mu$ для некоторого $\xi \in B$. Но это противоречит доступности ξ. Следовательно, μ — это τ-доступное число, значит (см. 4.6.6), существует τ-стандартное число $t \in \mathbb{R}$ такое, что $t > \mu$. Как видно, $B \subset [-t, t]$.

(4): Возьмем произвольное τ-стандартное число $y \in \mathbb{R}$. По условию для любого $\xi \in B'$ будет $\xi \leq y$, следовательно, B' — ограниченное множество. Положим $\varepsilon := \sup(B')$. Тогда будет $B \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ и для любого τ-стандартного $y \in \mathbb{R}$ верно $\varepsilon \leq y$. Аналогично доказываются (2) и (3). $\rhd$

4.6.11. *Для каждого бесконечно большого (бесконечно малого) числа $x \in \mathbb{R}$ существует нестандартное число η такое, что $x \overset{\eta}{\approx} \infty$ (соответственно $x \overset{\eta}{\approx} 0$). Это число η можно выбрать доступным, бесконечно малым или бесконечно большим.*

$\lhd$ Рассмотрим внутреннее отношение $\sigma \subset \mathbb{R}_+^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, определяемое формулой

$$(f, \xi, \eta) \in \sigma \leftrightarrow f(\eta) < |x| \wedge \eta \neq \xi.$$

Предполагая x бесконечно большим, легко видеть, что σ удовлетворяет посылке принципа идеализации, т. е. выполняется

$$(\forall^{\mathrm{st\ fin}} M \subset \mathbb{R}_+^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R})(\exists \eta)(\forall (f, \xi) \in M)((f, \xi, \eta) \in \sigma).$$

Применив принцип идеализации, получим

$$(\exists \eta)(\forall^{\mathrm{st}} f \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{R}})(\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \mathbb{R})(f(\eta) < |x| \wedge \eta \neq \xi).$$

Число η, удовлетворяющее последнему соотношению, будет искомым. Если η доступно, то $\eta' = \eta - {}^\circ\eta \approx 0$ также удовлетворяет требуемым условиям в силу предложения 4.6.9. $\rhd$

Рассмотрим теперь как введенные понятия могут помочь обойти трудности, о которых говорилось в начале параграфа 3.9.

4.6.12. *Теорема.* *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ стандартны и для каждого x из некоторой окрестности нуля существует $\lim_{y\to 0} f(x, y)$. Тогда*

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y) = a \leftrightarrow (\forall\alpha \approx 0)\,(\forall\beta \overset{\alpha}{\approx} 0)\,(f(\alpha, \beta) - a \approx 0).$$

$\lhd$ Пусть $a := \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y)$. Положим

$$g(x) := \lim_{y\to 0} f(x, y).$$

Тогда $g(\alpha) \approx a$ для любого $\alpha \approx 0$. Отметим, что g — стандартная функция в силу 3.9.3, следовательно, $g(\alpha)\,\mathrm{st}\,\alpha$. Теперь ввиду 4.6.2 и 3.9.4 (2) равенство $g(\alpha) = \lim_{y\to 0} f(\alpha, y)$ эквивалентно утверждению

$$(\forall\beta \overset{\alpha}{\approx} 0)\, f(\alpha, \beta) \overset{\alpha}{\approx} g(\alpha).$$

В силу 4.6.2 из $f(\alpha, \beta) \overset{\alpha}{\approx} \varphi(\alpha)$ следует $f(\alpha, \beta) \approx g(\alpha)$. Но так как $g(\alpha) \approx a$, то $f(\alpha, \beta) \approx a$.

Докажем обратное утверждение. При этом достаточно установить предложение

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta)(\forall x)\Big(|x| < \delta \to (\exists\gamma)(\forall y)(|y| < \gamma \to |f(x, y) - a| < \varepsilon)\Big).$$

Зафиксируем произвольное стандартное ε и рассмотрим внутреннее множество

$$M :=$$
$$:= \Big\{\delta > 0 :\ (\forall x)\,\Big(|x| < \delta \to (\exists\gamma)(\forall y)(|y| < \gamma \to |f(x, y) - a| < \varepsilon)\Big)\Big\}.$$

Легко понять, что M содержит все бесконечно малые числа. В самом деле, если $\delta \approx 0$ и $|x| < \delta$, то $x \approx 0$. Если $\gamma \overset{x}{\approx} 0$, то $(\forall y)(|y| < \gamma \to y \overset{x}{\approx} 0)$. Отсюда $|f(x, y) - a| < \varepsilon$. Теперь очевидно, что в силу принципа Коши M содержит и некоторый стандартный элемент. $\rhd$

Понятно, что эта теорема имеет место и в случае, если $x \to b$ и $y \to c$ для произвольных стандартных b и c. Без труда рассматриваются и случаи бесконечного предела и предела в бесконечности, а также повторный предел в произвольных топологических пространствах.

4.6.13. *Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на каждом конечном интервале и существует $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ хотя бы в смысле главного значения, то имеет место представление*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = {}^{\circ}\!\left(\Delta \sum_{-[\frac{a}{\Delta}]}^{[\frac{a}{\Delta}]} {}^{*}f(k\Delta)\right)$$

для любых $a \approx \infty$ и $\Delta \overset{a}{\approx} 0$.

$\lhd$ Следует непосредственно из 4.6.12. $\rhd$

4.6.14. Рассмотрим теперь три простых иллюстративных примера.

(1) Обратимся к «трудной» части теоремы Лопиталя.

Пусть f и g — стандартные функции, дифференцируемые в окрестности стандартной точки a. Допустим, что $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, $g'(x) \neq 0$ в окрестности a и

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d.$$

Требуется показать, что $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = d$. Возьмем произвольные точки y, $z \approx a$. Для определенности полагаем $a < z < y$. По теореме Коши существует точка $\eta \in [z, y]$, для которой

$$\frac{{}^{*}f(y) - {}^{*}f(z)}{{}^{*}g(y) - {}^{*}g(z)} = \frac{{}^{*}f'(\eta)}{{}^{*}g'(\eta)} \approx d,$$

поскольку $\eta \approx a$. Рассмотрим равенство

$$\frac{{}^{*}f(y) - {}^{*}f(z)}{{}^{*}g(y) - {}^{*}g(z)} = \frac{{}^{*}f(z)}{{}^{*}g(z)} \cdot \left(1 - \frac{{}^{*}f(y)}{{}^{*}f(z)}\right) \cdot \left(1 - \frac{{}^{*}g(y)}{{}^{*}g(z)}\right)^{-1}.$$

Из этой формулы вытекает, что если $z \overset{y}{\approx} a$, то ${}^{*}f(y)/{}^{*}f(z) \approx 0$ и ${}^{*}g(y)/{}^{*}g(z) \approx 0$ в силу теоремы 4.6.4 (1) (точнее, ее очевидной модификации для бесконечных пределов), следовательно, ${}^{*}f(z)/{}^{*}g(z) \approx d$. Таким образом, ${}^{*}f(z)/{}^{*}g(z) \approx d$ для любого $z \overset{y}{\approx} a$. В соответствии с 4.6.4 (1) это означает, что $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = d$.

(2) Завершим доказательство утверждения из 4.6.4 (2). Для этого возьмем x' и x'' так, чтобы $x' \overset{N}{\approx} x''$. Тогда ввиду 4.6.4 (2) ${}^*f_N(x') \approx {}^*f_N(x'')$ и мы получаем немедленно ${}^*f(x') \approx {}^*f(x'')$. Тем самым для любых x', x'' из $x' \overset{N}{\approx} x''$ следует ${}^*f(x') \approx {}^*f(x'')$. Но согласно 4.6.4 (2) это и означает равномерную непрерывность функции f.

(3) В качестве применения предложения 4.6.11 укажем следующее утверждение (см. [5, 1.3.2]).

Пусть $(a_{m,n})_{m\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}}$ — некоторая стандартная двойная последовательность такая, что существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = a; \qquad \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = b.$$

Тогда

$$(\forall m \approx \infty)(\exists n_1, n_2 \approx \infty)$$
$$\big((\forall n < n_1)(n \approx \infty \to a_{m,n} \approx a) \wedge (\forall n > n_2)(a_{m,n} \approx b)\big).$$

Для доказательства этого утверждения нужно подобрать $n_1 \approx \infty$ так, чтобы $m \overset{n_1}{\approx} \infty$ (что возможно в силу 4.6.11) и $n_2 \overset{m}{\approx} \infty$.

4.6.15. *Теорема.* *Существуют бесконечно большое натуральное число N и $x \in [0,1]$ такие, что если число y стало N-бесконечно близким к x, то y не будет N-стандартным.*

$\lhd$ Предположим, что это утверждение теоремы ложно. Тогда, воспользовавшись 4.6.6, выводим, что в IST истинно предложение

$$(\forall N \in \mathbb{N})(\forall x \in [0,1])(\exists^{\mathrm{st}}\varphi \in (\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R})_+)^{\mathbb{N}})(\exists z \in \mathbb{R}_+)$$
$$(\forall^{\mathrm{st}}\psi \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}})(z \in \varphi(N) \wedge |x - z| < \psi(N)).$$

К последней формуле применим алгоритм Нельсона. В дальнейшем считаем, что переменные N, x, φ, z, ψ пробегают те же множества, что в этой формуле, и не будем указывать этого в следующих ниже соотношениях. На основании принципа идеализации приходим к предложению

$$(\forall N)(\forall x)(\exists^{\mathrm{st}}\varphi)\,(\forall^{\mathrm{st}}\Xi)(\exists z)(\forall \psi \in \Xi)(z \in \varphi(N) \wedge |x - z| < \psi(N)),$$

где $\Xi \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}})$. Применяя к этому предложению принцип стандартизации, получаем, что оно равносильно формуле

$$(\forall N)\,(\forall x)(\forall^{\mathrm{st}}\tilde{\Xi})(\exists^{\mathrm{st}}\varphi)(\exists z)(\forall\psi \in \tilde{\Xi}(\varphi))(z \in \varphi(N) \wedge |x - z| < \psi(N)),$$

где $\tilde{\Xi} : \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}} \to \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}})$. Меняя местами крайние левые кванторы $\forall$, используя вновь принцип идеализации, а затем принцип переноса, выводим, что последняя формула равносильна следующему внутреннему предложению:

$$\begin{gathered}(\forall\tilde{\Xi})(\exists\Phi)(\forall N)\,(\forall x)(\exists\varphi \in \Phi)(\forall\psi \in \tilde{\Xi}(\varphi))(\exists z)\\ (z \in \varphi(N) \wedge |x - z| < \psi(N)),\end{gathered}$$

где $\Phi \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}})$. Осталось доказать, что полученное предложение ложно в ZFC.

Определим функцию $\tilde{\Xi}$ и множество $M_{\varphi,n}$ формулами

$$\begin{gathered}\tilde{\Xi}(\varphi) := \{\psi\}, \quad \psi(n) := a_n := 1/2n|\varphi(n)| \quad \varphi \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}});\\ M_{\varphi,n} := \bigcup_{z\in\varphi(n)} (z - a_n, z + a_n),\end{gathered}$$

где $|\varphi(n)|$ — число элементов множества $\varphi(n)$.

Заметим, что $\nu(M_{\varphi,n}) \leq 1/n$, где ν — мера Лебега. Если $\Phi \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}})$, то положим

$$\overline{M}_{\Phi,n} := \bigcup_{\varphi\in\Phi} M_{\varphi,n}.$$

Ясно, что $\nu(\overline{M}_{\Phi,n}) \leq |\Phi|/n$.

Если бы указанное выше предложение выполнялось в ZFC, то, применив его к построенной функции, получили бы

$$(\exists\Phi \in \mathscr{P}^{\mathrm{fin}}(\mathscr{P}^{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}})(\forall n \in \mathbb{N})\,([0, 1] \subset \overline{M}_{\Phi,n}).$$

Но это неверно, так как при $n > |\Phi|$ приходим к противоречивому выводу $\nu(\overline{M}_{\Phi,n}) < 1$. $\triangleright$

4.6.16. Примечания.

(1) Материал этого параграфа взят из [44], см. также [313].

(2) Из 4.6.14 вытекает также, что нестандартные критерии компактности 4.3.6 не допускают обобщения на случай τ-стандартных объектов, как это имеет место для критерия равномерной непрерывности 4.4.6 (1) (см. 4.6.4).

(3) Рассмотрим отношение строгой стандартности sst, о котором говорилось в 3.9.16 (4). Заменяя $\cdot\operatorname{st}\cdot$ на $\cdot\operatorname{sst}\cdot$ в 4.6.6, мы определяем τ-бесконечно малые (τ-бесконечно большие, τ-доступные) числа относительно этого предиката $\cdot\operatorname{sst}\cdot$. При этом из предложения 4.6.7 видно, что понятие τ-бесконечно малого (τ-бесконечно большого, τ-доступного) числа относительно предиката $\cdot\operatorname{st}\tau\cdot$ совпадает с соответствующим понятием относительно предиката $\cdot\operatorname{sst}\tau\cdot$.

(4) Простая модификация доказательства предложения 4.6.7 показывает, что понятие τ-бесконечной близости в произвольных топологических пространствах и равномерных пространствах относительно предикатов $\cdot\operatorname{st}\cdot$ и $\cdot\operatorname{sst}\cdot$ совпадают. Отсюда вытекает, что теоремы 4.6.3, 4.6.4, 4.6.10, 4.6.12 и предложения 4.6.9, 4.6.11 остаются в силе, если в них предикат $\cdot\operatorname{st}\tau\cdot$ заменить на $\cdot\operatorname{sst}\tau\cdot$.

(5) Несмотря на (4), предложение 4.6.8 не имеет места с предикатом $\cdot\operatorname{sst}\tau\cdot$. Отсюда вытекает, что ни 3.9.4 (3), ни импликация $\leftarrow$ в релятивизированном принципе идеализации не сохраняются при замене $\cdot\operatorname{st}\tau\cdot$ на $\cdot\operatorname{sst}\tau\cdot$. Подробнее об этом см. [44, 313].

4.7. Компактность и субнепрерывность

В этом параграфе даются стандартные и нестандартные критерии компактности и аналогичных понятий для фильтров, детализирующие аналогичные факты нестандартной общей топологии, относящиеся к множествам (ср. 4.3, 4.5). Приведены приложения к теории субнепрерывных соответствий, развитой в [307, 469].

4.7.1. Фильтр $\mathscr{F}$ (в топологическом пространстве X) называют *компактным* (см. [439]), если каждый фильтр, более тонкий, чем $\mathscr{F}$, имеет точку прикосновения в X. Соответственно сеть называют *компактной,* если каждая ее подсеть имеет сходящуюся подсеть.

4.7.2. *Стандартный фильтр $\mathscr{F}$ в X является компактным в том и только в том случае, если каждая точка его монады околостандартна: $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{nst}(X)$.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Пусть $x \in \mu(\mathscr{F})$. Рассмотрим ультрафильтр $(x) := {}^*\{U \subset X : x \in U\}$ в исходном пространстве X. Ясно, что $(x) \supset \mathscr{F}$ и, стало быть, имеется стандартная точка x' такая, что $x \approx x'$. Иными словами, x — околостандартная точка.

$\leftarrow$: Если $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}$, то $\mu(\mathscr{G}) \subset \mu(\mathscr{F})$. Пусть $x \in \mu(\mathscr{G})$. Тогда $x \in \operatorname{nst}(X)$, т. е. для некоторой $x' \in {}^\circ X$ будет $x \approx x'$. Последнее означает, что x' — точка прикосновения $\mathscr{F}$. $\rhd$

4.7.3. *Фильтр $\mathscr{F}$ в X является компактным в том и только в том случае, если для любого открытого покрытия множества X найдется конечное подпокрытие некоторого элемента из $\mathscr{F}$.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Достаточно работать в стандартном антураже. Итак, если $\mathscr{F}$ компактен, то $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{nst}(X)$. Учитывая, что $\operatorname{nst}(X)$ лежит в монаде любого стандартного покрытия $\mathscr{E}$, выводим: $(\exists F \in \mathscr{F})(\forall x \in F)(\exists E \in {}^\circ\mathscr{E})(x \in E)$. В качестве искомого F можно взять любой бесконечно малый элемент $\mathscr{F}$. Применяя последовательно принципы идеализации и переноса, получим требуемое.

$\leftarrow$: Пусть $\mathscr{E}$ — открытое покрытие X и $\mu(\mathscr{E})$ — объединение стандартных элементов $\mathscr{E}$, т. е. монада $\mathscr{E}$. По принципу переноса имеются стандартное $F \in \mathscr{F}$ и конечное стандартное подмножество $\mathscr{E}_0$ в $\mathscr{E}$ такие, что $\bigcup \mathscr{E}_0 \supset F \supset \mu(\mathscr{F})$. Значит, $\mu(\mathscr{F}) \subset \mu(\mathscr{E})$. Остается вспомнить, что $\operatorname{nst}(X)$ — это в точности пересечение монад стандартных открытых покрытий X. $\rhd$

4.7.4. Сформулированный в 4.7.3 признак делает естественным поиск аналога критерия Хаусдорфа для фильтров. В этой связи будем рассматривать равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$.

4.7.5. Фильтр $\mathscr{F}$ в X называют *вполне ограниченным,* если для каждого окружения $U \in \mathscr{U}$ имеется конечная U-сеть некоторого элемента F фильтра $\mathscr{F}$.

4.7.6. Фильтр $\mathscr{F}$ в X называют *полным,* если каждый фильтр Коши, более тонкий, чем $\mathscr{F}$, сходится в X.

4.7.7. *Стандартный фильтр является полным в том и только в том случае, если каждая предстандартная точка его монады околостандартна.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Пусть $\mathscr{F}$ — полный фильтр и $x \in \operatorname{pst}(X) \cap \mu(\mathscr{F})$ — предстандартная точка монады $\mathscr{F}$. Предстандартность x означает, что

x лежит в монаде некоторого фильтра Коши $\mathscr{G}$. При этом $\mu(\mathscr{F}) \cap \mu(\mathscr{G}) \neq \varnothing$. Ясно, что верхняя грань $\mathscr{G}$ и $\mathscr{F}$ — это фильтр Коши и, стало быть, имеется точка $x' \in {}^{\circ}X$, для которой $x' \in \mu(\mathscr{G}) \cap \mu(\mathscr{F})$. Отсюда $x' \approx x$ и $x \in \operatorname{nst}(X)$.

$\leftarrow$: Пусть $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — фильтр Коши. Если $x \in \mu(\mathscr{G})$, то $x \in \mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{nst}(X)$. Значит, у $\mathscr{G}$ есть точка прикосновения. $\triangleright$

4.7.8. *Стандартный фильтр является вполне ограниченным в том и только в том случае, если каждая точка его монады предстандартна.*

$\triangleleft$ $\rightarrow$: По принципу переноса для каждого стандартного окружения U из $\mathscr{U}$ имеются стандартный элемент F фильтра $\mathscr{F}$ и конечное стандартное множество E такие, что $U(E) \supset F$. Стало быть, $\mu(\mathscr{F}) \subset U(E)$. Тем самым для $x \in \mu(\mathscr{F})$ и любого $U \in {}^{\circ}\mathscr{U}$ будет $x \in U(x')$ при подходящем стандартном x'. Положим $\mathscr{G} := {}^*\{U(x') : U \in \mathscr{U}, x \in U(x')\}$. Ясно, что $\mathscr{G}$ — базис фильтра Коши и $x \in \mu(\mathscr{G})$ по построению. Следовательно, $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{pst}(X)$.

$\leftarrow$: Допустим, что рассматриваемый фильтр $\mathscr{F}$ таков, что $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{pst}(X)$, и тем не менее $\mathscr{F}$ не вполне ограничен. По принципу переноса имеется стандартное окружение U из ${}^{\circ}\mathscr{U}$ такое, что для всяких $F \in {}^{\circ}\mathscr{F}$ и любого стандартного конечного множества E найдется $x \in F$, не попадающий в $U(E)$. По принципу идеализации имеется элемент $x \in \mu(\mathscr{F})$ такой, что $x \notin U(y)$ для каждого стандартного $y \in X$. По условию $x \in \mu(\mathscr{G})$, где $\mathscr{G}$ — фильтр Коши. Возьмем $G \in {}^{\circ}\mathscr{G}$ так, чтобы было $G \times G \subset U$. Тогда для всякого $y \in G$ выполнено $x \in \mu(\mathscr{G}) \subset U(y)$ вопреки исходному допущению. $\triangleright$

4.7.9. ***Критерий Хаусдорфа для фильтров.*** *Фильтр является компактным в том и только в том случае, если он полон и вполне ограничен.*

$\triangleleft$ $\rightarrow$: Достаточно работать в стандартном антураже. Если $\mathscr{F}$ компактен, то $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{nst}(X)$ по 4.7.2. Учитывая, что $\operatorname{nst}(X) \subset \operatorname{pst}(X)$, заключаем: $\mathscr{F}$ полон и вполне ограничен.

$\leftarrow$: Если $\mathscr{F}$ вполне ограничен, то по 4.7.8 $\mu(\mathscr{F}) \subset \operatorname{pst}(X)$. Если $\mathscr{F}$ полон, то $\mu(\mathscr{F}) \cap \operatorname{pst}(X) \subset \operatorname{nst}(X)$. Отсюда выводим: $\mu(\mathscr{F}) = \mu(\mathscr{F}) \cap \operatorname{pst}(X) \subset \operatorname{nst}(X)$. Остается сослаться на 4.7.2. $\triangleright$

4.7.10. Найденные признаки могут быть положены в основу изучения различных топологических понятий, близких к непрерывности. Остановимся здесь на одном из них (см. [307, 439, 469]).

4.7.11. Соответствие Γ, действующее из X в Y, называют *субнепрерывным в точке* x из $\operatorname{dom}(\Gamma)$, если образ фильтра окрестностей точки x при Γ является компактным в Y. Соответствие Γ, субнепрерывное в каждой точке $\operatorname{dom}(\Gamma)$, называют *субнепрерывным.*

4.7.12. *Стандартное соответствие* Γ *из* X *в* Y *субнепрерывно в том и только в том случае, если* $\Gamma(\operatorname{nst}(X)) \subset \operatorname{nst}(Y)$.

$\lhd$ Доказательство следует из 4.7.2, ибо $\operatorname{nst}(X)$ представляет собой объединение монад точек стандартного ядра ${}^\circ X$. $\rhd$

4.7.13. *Соответствие субнепрерывно в том и только в том случае, если оно переводит компактные фильтры в компактные.*

$\lhd$ Поскольку фильтр окрестностей точки заведомо компактен, достаточность приведенного условия бесспорна. Пусть теперь заранее известно, что соответствие субнепрерывно. Без умаления общности можно работать в стандартном антураже. Привлекая 4.7.12 и 4.7.2, видим, что в данной ситуации образ стандартного компактного фильтра компактен. Остается сослаться на принцип переноса. $\rhd$

4.7.14. В связи с критерием 4.7.13 субнепрерывные соответствия называют иногда *компактными* (ср. [439]).

4.7.15. *Субнепрерывное соответствие, действующее в хаусдорфово пространство, сохраняет относительную компактность.*

$\lhd$ Если U — стандартное относительно компактное множество в X, то $U \subset \operatorname{nst}(X)$. Стало быть, $\Gamma(U) \subset \operatorname{nst}(Y)$. Известно [408], что в этом случае $\Gamma(U)$ относительно компактно. $\rhd$

4.7.16. *Пусть* Γ *— некоторое замкнутое субнепрерывное соответствие. Тогда* Γ *полунепрерывно сверху.*

$\lhd$ По принципу переноса можно работать в стандартном антураже. Итак, пусть A — стандартное замкнутое множество и $x \in \operatorname{cl}(\Gamma^{-1}(A))$. Имеется $x' \approx x$, для которого при некотором $a' \in A$ будет $(x', a') \in \Gamma$. Раз $a' \in \Gamma(\operatorname{nst}(X))$, то найдется стандартное a в образе, для которого $a \approx a'$. В силу замкнутости A выводим: $a \in A$. В силу замкнутости Γ выполнено $(x, a) \in \Gamma$. Итак, $x \in \Gamma^{-1}(A)$. $\rhd$

4.7.17. Предложение 4.7.16 фактически установлено в [469] и обобщает более ранее утверждение о функциях из [307]. В заключение дадим простое нестандартное доказательство небольшой модификации критерия непрерывности 5.1 из [307].

4.7.18. *Пусть $f : X \to Y$ — функция, действующая в хаусдорфово пространство. Тогда f непрерывна в том и только в том случае, если для каждой точки x из X имеется элемент y из Y такой, что условие $x_\xi \to x$ влечет существование подсети $(x_\eta)_{\eta \in \mathrm{H}}$, для которой $f(x_\eta) \to y$.*

$\triangleleft$ Нуждается в проверке лишь достаточность сформулированного признака. Будем работать в стандартном антураже. По условию имеем

$$(\forall x_\xi \to x)(\exists y_\eta \to y)\ (x_\eta, y_\eta) \in f.$$

Ясно (ср. теорему 5.3.11), что последнее соотношение можно переписать в виде

$$(\forall x' \approx x)(\exists y' \approx y)(x', y') \in f.$$

В частности, для некоторого $y' \approx y$ выполнено $y' = f(x)$. В силу хаусдорфовости Y заключаем, что $y = f(x)$. Кроме того, $x' \approx x \to f(x') \approx f(x)$, т. е. f — непрерывная функция. $\triangleright$

4.8. Циклические и экстенсиональные фильтры

В этом параграфе даются необходимые для дальнейшего вспомогательные (и в большей части очевидные) сведения о спусках и подъемах фильтров.

4.8.1. *Для непустых элементов $(A_\xi)_{\xi \in \Xi}$ универсума $\mathbf{V}^{(B)}$ и разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ выполнено*

$$\Big(\sum_{\xi \in \Xi} b_\xi A_\xi\Big)\!\downarrow = \sum_{\xi \in \Xi} b_\xi A_\xi \!\downarrow.$$

$\triangleleft$ Обозначим $A := \sum_{\xi \in \Xi} b_\xi A_\xi$. Ясно, что при каждом $\xi \in \Xi$ будет $[\![a \in A_\xi]\!] \geq [\![a \in A]\!] \wedge [\![A = A_\xi]\!] = [\![A = A_\xi]\!] \geq b_\xi$, как только $a \in A\!\downarrow$. В силу принципа переноса в $\mathbf{V}^{(B)}$ верно $[\![a \in A_\xi]\!] = [\![(\exists a_\xi \in A_\xi)(a = a_\xi)]\!]$. Значит, с учетом принципа максимума $(\exists a_\xi \in A_\xi\!\downarrow)[\![a \in A_\xi]\!] = [\![a = a_\xi]\!] \geq b_\xi$. Таким образом, $a = \sum_{\xi \in \Xi} b_\xi a_\xi$.

Пусть теперь известно, что $b_\xi a = b_\xi a_\xi$ при некоторых $a_\xi \in A_\xi\!\downarrow$ и всех $\xi \in \Xi$. Тогда, учитывая, что $[\![A = A_\xi]\!] \geq b_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ по определению перемешивания, выводим $[\![a \in A]\!] \geq [\![a = a_\xi]\!] \wedge [\![a_\xi \in A_\xi]\!] \wedge [\![A_\xi = A]\!] \geq b_\xi$ при $\xi \in \Xi$, т. е. $[\![a \in A]\!] \geq \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi = 1$ и $a \in A\!\downarrow$. $\triangleright$

4.8.2. *Для циклических множеств* A_ξ, *где* $A_\xi \in \mathscr{P}(\mathbf{V}^{(B)})$ *при* $\xi \in \Xi$, *выполнено*

$$\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi{\uparrow} = \Big(\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\Big){\uparrow}.$$

$\lhd$ Учитывая, что $A_\xi{\uparrow}{\downarrow} = A_\xi$ при $\xi \in \Xi$ по условию, на основании 4.8.1 выводим

$$\Big(\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi{\uparrow}\Big){\downarrow} = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi{\uparrow}{\downarrow} = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi.$$

Отсюда, вспоминая, что для непустого внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ множества A верно $A = A{\downarrow}{\uparrow}$, получаем

$$\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi{\uparrow} = \Big(\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi{\uparrow}\Big){\downarrow}{\uparrow} = \Big(\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi A_\xi\Big){\uparrow},$$

что и завершает доказательство. $\rhd$

4.8.3. *Пусть* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *некоторое разбиение единицы и семейства элементов* $(X_\xi)_{\xi\in\Xi}$, $(Y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *таковы, что* $[\![X_\xi \supset Y_\xi]\!] = \mathbf{1}$ $(\xi \in \Xi)$. *Тогда*

$$\Big[\!\!\Big[\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi X_\xi \supset \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi Y_\xi\Big]\!\!\Big] = \mathbf{1}.$$

$\lhd$ Обозначим $X := \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi X_\xi$ и $Y := \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi Y_\xi$. Ясно, что $[\![Y \subset X]\!] \geq [\![X = X_\xi]\!] \wedge [\![X_\xi \supset Y]\!] \geq [\![X = X_\xi]\!] \wedge [\![X_\xi \supset Y_\xi]\!] \wedge [\![Y = Y_\xi]\!] \geq b_\xi \wedge \mathbf{1} \wedge b_\xi = b_\xi$ при всех $\xi \in \Xi$. $\rhd$

4.8.4. *Пусть* X — *непустой элемент* $\mathbf{V}^{(B)}$. *Тогда*

$$[\![\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) = \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\Uparrow}]\!] = \mathbf{1},$$

где, как обычно, $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(A)$ — *совокупность конечных подмножеств* A *и* $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\Uparrow} := \{Y{\uparrow} : Y \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})\}{\uparrow}$.

$\lhd$ Включение $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\Uparrow} \subset \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ не вызывает сомнений (подъем конечного множества конечен). Остается проверить следующее соотношение:

$$a := [\![(\forall t)\, t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) \to t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\Uparrow}]\!] = \mathbf{1}.$$

Последнее равносильно равенству

$$\bigwedge\left\{[\![t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\Uparrow}]\!] : [\![t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)]\!] = \mathbf{1}\right\} = a.$$

Если $[\![t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)]\!] = \mathbf{1}$, то в силу принципа переноса будет

$$\mathbf{1} = [\![(\exists n \in \mathbb{N}^{\wedge})(\exists f : n \to X)(t = \operatorname{im} f)]\!] = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} [\![f : n^{\wedge} \to X]\!] \wedge [\![t = \operatorname{im} f]\!].$$

Используя принцип перемешивания и принцип максимума, подберем счетное разбиение единицы (b_n) в B и последовательность (f_n) в $\mathbf{V}^{(B)}$ так, что $b_n \leq [\![f_n : n^{\wedge} \to X]\!] \wedge [\![t = \operatorname{im} f]\!]$. Можно считать без ограничения общности, что $[\![f_n : n^{\wedge} \to X]\!] = \mathbf{1}$. Положим $g_n := f{\downarrow} : n \to X{\downarrow}$. Тогда $\operatorname{im} g \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})$ и $b_n \leq [\![t = (\operatorname{im} g){\uparrow}]\!]$. Отсюда выводим:

$$\begin{aligned}\mathbf{1} &= \bigvee_{n \in \mathbb{N}} [\![t = (\operatorname{im} g){\uparrow}]\!] \leq \\ &\leq \bigvee \{[\![t = u]\!] : u \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\uparrow}\} = \\ &= [\![t \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X{\downarrow})^{\Uparrow}]\!],\end{aligned}$$

что и требовалось. $\triangleright$

4.8.5. *Пусть $\mathscr{G}$ — базис фильтра в множестве X, причем $X \in \mathscr{P}(\mathbf{V}^{(B)})$, т. е. X — подмножество $\mathbf{V}^{(B)}$. Положим*

$$\mathscr{G}' := \{F \in \mathscr{P}(X{\uparrow}){\downarrow} : (\exists G \in \mathscr{G})\, [\![\, F \supset G{\uparrow}\,]\!] = \mathbf{1}\};$$
$$\mathscr{G}'' := \{G{\uparrow} : G \in \mathscr{G}\}.$$

Тогда $\mathscr{G}'{\uparrow}$ и $\mathscr{G}''{\uparrow}$ — базисы одного и того же фильтра $\mathscr{G}^{\uparrow}$ в $X{\uparrow}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$.

$\triangleleft$ Проверим, что $\mathscr{G}'{\uparrow}$ — базис фильтра в $X{\uparrow}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Имеем

$$\begin{aligned}&[\![(\forall F_1, F_2 \in \mathscr{G}'{\uparrow})(\exists F \in \mathscr{G}'{\uparrow})(F \subset F_1 \cap F_2)]\!] = \\ &= \bigwedge_{F_1, F_2 \in \mathscr{G}'} [\![(\exists F \in \mathscr{G}'{\uparrow})(F \subset F_1 \subset F_2)]\!].\end{aligned}$$

Если $F_1, F_2 \in \mathscr{G}'$, то найдутся $G_1, G_2 \in \mathscr{G}$ такие, что $[\![F_1 \supset G_1{\uparrow}]\!] = \mathbf{1}$ и $[\![F_2 \supset G_2{\uparrow}]\!] = \mathbf{1}$. Возьмем элемент $G \in \mathscr{G}$, для которого $G \subset G_1 \cap G_2$. Тогда будет $(G_1 \cap G_2){\uparrow} \in \mathscr{G}'{\uparrow}$ и

$$[\![F_1 \cap F_2 \supset (G_1 \cap G_2){\uparrow}]\!] \geq [\![F_1 \supset G_1{\uparrow}]\!] \wedge [\![F_2 \supset G_2{\uparrow}]\!] = \mathbf{1}.$$

Кроме того, бесспорно, что $\mathscr{G}''{\uparrow}$ — базис фильтра в $X{\uparrow}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. По построению, $\mathscr{G}' \supset \mathscr{G}''$. Тем более $\mathscr{G}'{\uparrow}{\downarrow} \supset \mathscr{G}''{\uparrow}{\downarrow}$ и, значит, $[\![\mathscr{G}'{\uparrow} \supset \mathscr{G}''{\uparrow}]\!] = \mathbf{1}$. Следовательно, и подавно $[\![\mathrm{fil}\{\mathscr{G}'{\uparrow}\} \supset \mathrm{fil}\{\mathscr{G}''{\uparrow}\}]\!] = \mathbf{1}$, где, как обычно, $\mathrm{fil}\{\mathscr{B}\}$ — множество надмножеств элементов $\mathscr{B}$. Помимо того,

$$\begin{aligned}&[\![(\forall F_1 \in \mathscr{G}'{\uparrow})(\exists F_2 \in \mathscr{G}''{\uparrow})(F_1 \supset F_2)]\!] = \\ &= \bigwedge_{F_1 \in \mathscr{G}'} [\![(\exists F_2 \in \mathscr{G}''{\uparrow})(F_1 \supset F_2)]\!] = \mathbf{1},\end{aligned}$$

ибо для $G_1 \in \mathscr{G}$ такого, что $[\![F_1 \supset G_1{\uparrow}]\!] = \mathbf{1}$, будет $G_1{\uparrow} \in \mathscr{G}'{\uparrow}$. Итак, $[\![\mathrm{fil}\{\mathscr{G}'{\uparrow}\} \subset \mathrm{fil}\{\mathscr{G}''{\uparrow}\}]\!] = \mathbf{1}$ по принципу переноса в $\mathbf{V}^{(B)}$. $\triangleright$

4.8.6. Фильтр $\mathscr{G}^{\uparrow}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$, построенный в 4.8.5, называют *подъемом* $\mathscr{G}$.

4.8.7. *Пусть $\mathscr{G}$ — базис фильтра в $X{\downarrow}$ для непустого X из $\mathbf{V}^{(B)}$. Пусть, далее, $\mathrm{mix}(\mathscr{G})$ — совокупность перемешиваний непустых семейств элементов $\mathscr{G}$. Тогда если $\mathscr{G}$ состоит из циклических множеств, то $\mathrm{mix}(\mathscr{G})$ — базис фильтра в $X{\downarrow}$ и $\mathrm{mix}(\mathscr{G}) \supset \mathscr{G}$. Кроме того, имеет место равенство $\mathscr{G}^{\uparrow} = \mathrm{mix}(\mathscr{G})^{\uparrow}$.*

$\triangleleft$ Пусть $U, V \in \mathrm{mix}(\mathscr{G})$. Это означает, что имеются множества Ξ, H, разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, $(c_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ и семейства $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$, $(V_\xi)_{\eta\in\mathrm{H}}$ элементов $\mathscr{G}$, для которых $b_\xi U = b_\xi U_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ и $c_\eta V = c_\eta V_\eta$ $(\eta \in \mathrm{H})$. Пусть $W_{(\xi,\eta)} \subset U_\xi \cap V_\eta$ — некоторый элемент базиса $\mathscr{G}$. Положим $d_{(\xi,\eta)} := b_\xi \wedge c_\eta$. Ясно, что $(d_{(\xi,\eta)})_{(\xi,\eta)\in\Xi\times\mathrm{H}}$ — разбиение единицы. Рассмотрим $W := \sum_{(\xi,\eta)\in\Xi\times\mathrm{H}} d_{(\xi,\eta)} W_{(\xi,\eta)}$, т. е. совокупность соответствующих перемешиваний элементов $W_{(\xi,\eta)}$. Ясно, что $d_{(\xi,\eta)}U = b_\xi c_\eta U = c_\eta b_\xi U_\xi \supset d_{(\xi,\eta)} W_{(\xi,\eta)}$ и аналогично $d_{(\xi,\eta)}V \supset d_{(\xi,\eta)}W_{(\xi,\eta)}$. Тем самым $W \subset U \cap V$ и $W \in \mathrm{mix}(\mathscr{G})$.

Поскольку $\mathscr{G}$ состоит из циклических множеств, то с учетом 4.8.2 и 4.8.3 видно, что $\mathrm{mix}(\mathscr{G})' = \mathrm{mix}(\mathscr{G}')$, что и завершает доказательство. $\triangleright$

4.8.8. Для *фильтра* $\mathscr{F}$ в X внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ положим $\mathscr{F}^{\downarrow} := \mathrm{fil}\{F{\downarrow} : F \in \mathscr{F}{\downarrow}\}$. Фильтр $\mathscr{F}^{\downarrow}$ в $X{\downarrow}$ называют спуском $\mathscr{F}$. Базис фильтра $\mathscr{G}$ в $X{\downarrow}$ называют *экстенсиональным*, если имеется фильтр $\mathscr{F}$ в X такой, что $\mathrm{fil}\{\mathscr{G}\} = \mathscr{F}^{\downarrow}$. Базис фильтра $\mathscr{G}$ в $X{\downarrow}$ называют *циклическим*, если $\mathrm{fil}\{\mathscr{G}\}$ имеет базис из циклических множеств. (Заметим, что в литературе циклическими иногда называют экстенсиональные фильтры.)

4.8.9. *Фильтр $\mathscr{F}$ экстенсионален в том и только в том случае, если $\mathscr{F}$ циклический и $\mathscr{F} = \mathrm{fil}\{\mathrm{mix}(\mathscr{F})\}$*

$\lhd$ Все следует из 4.8.2, 4.8.3 и 4.8.7. $\rhd$

4.8.10. *Для экстенсиональных фильтров $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ в $X{\downarrow}$ выполнено $\mathscr{F} \supset \mathscr{G} \leftrightarrow [\![\mathscr{F}^{\uparrow} \supset \mathscr{G}^{\uparrow}]\!] = \mathbf{1}$.*

$\lhd$ Если $\mathscr{F} \supset \mathscr{G}$, то $\mathscr{F}' \supset \mathscr{G}'$ и тем более $[\![\mathscr{F}^{\uparrow} \supset \mathscr{G}^{\uparrow}]\!] = \mathbf{1}$. Отсюда $\mathscr{F}^{\uparrow}{\downarrow} \supset \mathscr{G}^{\uparrow}{\downarrow}$, т. е. $\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow} \supset \mathscr{G}^{\uparrow\downarrow}$. Остается вспомнить 4.8.8. $\rhd$

4.8.11. Максимальные элементы в множестве экстенсиональных фильтров называют *проультрафильтрами*.

4.8.12. *Проультрафильтры суть максимальные элементы множества циклических фильтров.*

$\lhd$ Если $\mathscr{A}$ — проультрафильтр и $\mathscr{F}$ — мажорирующий его циклический фильтр, то $\mathscr{A} \subset \mathscr{F} \subset \mathrm{mix}(\mathscr{F})$. Отсюда $\mathscr{A} = \mathscr{F}$. Наоборот, пусть $\mathscr{A}$ — максимальный циклический фильтр. Тогда $\mathscr{A} = \mathrm{mix}(\mathscr{A})$ и, стало быть, $\mathscr{A}$ — проультрафильтр. $\rhd$

4.8.13. *Проультрафильтры в $X{\downarrow}$ — это в точности спуски ультрафильтров в X.*

$\lhd$ Прямое следствие 4.8.8. $\rhd$

4.8.14. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $f : X \to Y$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ и выполняется соотношение $[\![\mathscr{F}$ — фильтр в $X]\!] = \mathbf{1}$, то*

$$f(\mathscr{F})^{\downarrow} = f{\downarrow}(\mathscr{F}^{\downarrow});$$

(2) *для экстенсионального отображения $f : X{\downarrow} \to Y{\downarrow}$ и фильтра $\mathscr{F}$ в $X{\downarrow}$ верно*

$$f(\mathscr{F})^{\uparrow} = f{\uparrow}\,(\mathscr{F}^{\uparrow});$$

(3) *образ экстенсионального фильтра при экстенсиональном отображении экстенсионален;*

(4) *образ проультрафильтра при экстенсиональном отображении — проультрафильтр.*

$\lhd$ (1): Используя определения и свойства спуска $f{\downarrow}$ отображения f, имеем

$$G \in f(\mathscr{F})^{\downarrow} \leftrightarrow (\exists U \in f(\mathscr{F}){\downarrow})(G \supset U{\downarrow}) \leftrightarrow (\exists F \in \mathscr{F}{\downarrow})(G \supset f(F){\downarrow}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists F \in \mathscr{F}{\downarrow})(G \supset f{\downarrow}(F{\downarrow}) \leftrightarrow (\exists F \in \mathscr{F}^{\downarrow})(G \supset f{\downarrow}(F) \leftrightarrow G \in f{\downarrow}(\mathscr{F}^{\downarrow}).$$

(2): Используя свойства подъема $f{\uparrow}$, проводим оценки:

$$[\![G \in f{\uparrow}(\mathscr{F}^{\uparrow})]\!] = [\![(\exists U \in f{\uparrow}(\mathscr{F}^{\uparrow}))(G \supset U)]\!] =$$
$$= [\![(\exists F \in \mathscr{F}^{\uparrow})(G \supset f{\uparrow}(F))]\!] = \bigvee_{F \in \mathscr{F}} [\![G \supset f{\uparrow}(F{\uparrow})]\!] =$$
$$= \bigvee_{F \in \mathscr{F}} [\![G \supset f(F){\uparrow}]\!] = \bigvee_{U \in f(\mathscr{F})'} [\![G \supset U]\!] = [\![(\exists U \in f(\mathscr{F})'{\uparrow})(G \supset U)]\!] =$$
$$= [\![(\exists U \in f(\mathscr{F})^{\uparrow})(G \supset U)]\!] = [\![G \in f(\mathscr{F})^{\uparrow}]\!].$$

(3): Применяя последовательно (2) и (1), имеем

$$f(\mathscr{F})^{\uparrow\downarrow} = f{\uparrow}(\mathscr{F}^{\uparrow})^{\downarrow} = f{\uparrow}{\downarrow}(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}) = f(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}).$$

Последнее равенство обеспечивает требуемое.

(4): Если $f : X{\downarrow} \to Y{\downarrow}$ — экстенсиональное отображение и $\mathscr{F}$ — проультрафильтр, то $\mathscr{F}^{\uparrow}$ — ультрафильтр в X внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Следовательно, $f{\uparrow}(\mathscr{F}^{\uparrow})$ — ультрафильтр в Y внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Тем самым $f{\uparrow}\ (\mathscr{F}^{\uparrow})^{\downarrow}$ — проультрафильтр. Остается заметить, что $f{\uparrow}\ (\mathscr{F}^{\uparrow})^{\downarrow} = f(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}) = f(\mathscr{F})$ в силу (3). $\rhd$

4.9. Существенные и проидеальные точки циклических монад

В этом параграфе дается признак цикличности фильтра и вводятся связанные с ним необходимые для дальнейшего понятия.

4.9.1. Монаду $\mu(\mathscr{F})$ фильтра $\mathscr{F}$ называют *циклической*, если она совпадает со своей циклической оболочкой $\mathrm{mix}(\mu(\mathscr{F}))$.

4.9.2. *Нестандартный критерий цикличности фильтра.* *Стандартный фильтр является циклическим в том и только в том случае, если циклична его монада.*

$\lhd$ Пусть $\mathscr{F}$ — стандартный фильтр. Допустим, что он циклический. Возьмем внутреннее множество Ξ и внутреннее разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ точек монады $\mu(\mathscr{F})$. По условию у фильтра $\mathscr{F}$ имеется базис $\mathscr{G}$ из циклических множеств и, стало быть, $\mu(\mathscr{F}) = \bigcap\{G : G \in {}^\circ\mathscr{G}\}$, где, как обычно, ${}^\circ\mathscr{G}$ — множество стандартных элементов $\mathscr{G}$. Если x — перемешивание $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, то x лежит в каждом стандартном G из $\mathscr{G}$ (ибо $x_\xi \in G$ при $\xi \in \Xi$). Тем самым $\mu(\mathscr{F}) \supset \operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F})) \supset \mu(\mathscr{F})$.

Если заранее известно, что монада $\mu(\mathscr{F})$ — циклическое внешнее множество, то, взяв бесконечно малый элемент $F \in \mathscr{F}$ (т. е. такой, что $F \subset \mu(\mathscr{F})$), видим, что $F_0 := \operatorname{mix}(F) \subset \operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F})) \subset \mu(\mathscr{F})$. Значит, внутреннее множество F_0 бесконечно мало и лежит в $\mathscr{F}$. Итак, $(\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\exists F_0 \in \mathscr{F})(F_0 = \operatorname{mix}(F_0) \wedge F \supset F_0)$. По принципу Лейбница выводим, что $\mathscr{F}$ обладает циклическим базисом. $\rhd$

4.9.3. *Теорема.* *Для стандартного фильтра $\mathscr{F}$ в $X{\downarrow}$ положим*

$$\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow} := \operatorname{fil}\{F{\uparrow}{\downarrow} : F \in \mathscr{F}\}.$$

Тогда $\operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F})) = \mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow})$ и $\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}$ — это наибольший циклический фильтр, более грубый, чем $\mathscr{F}$.

$\lhd$ Ясно, что $\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow} \subset \mathscr{F}$ и, значит, с учетом 4.9.2 $\mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}) \supset \mu(\mathscr{F})$ и $\mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}) \supset \operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))$. Пусть теперь $x \in \mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow})$. По определению монады и свойствам перемешивания имеем

$$(\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\exists (b_\xi)_{\xi\in\Xi})(\exists (x_\xi)_{\xi\in\Xi})(\forall \xi \in \Xi)(x_\xi \in F \wedge b_\xi x = b_\xi x_\xi).$$

Ясно, что тем самым выполняется

$$\begin{gathered}(\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists (b_\xi)_{\xi\in\Xi})(\exists (x_\xi)_{\xi\in\Xi})(\forall F_0 \in \mathscr{F}_0)\\ (\forall \xi \in \Xi)(x_\xi \in F \wedge b_\xi x_\xi = b_\xi x).\end{gathered}$$

Применяя принцип идеализации в сильной форме, имеем

$$(\exists (b_\xi)_{\xi\in\Xi})(\exists (x_\xi)_{\xi\in\Xi})(\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\forall \xi \in \Xi)(x_\xi \in F \wedge b_\xi x_\xi = b_\xi x).$$

Последнее означает, что существуют элементы $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ из монады $\mu(\mathscr{F})$ такие, что $x = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi$, т. е. $x \in \operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))$. Окончательно заключаем о равенстве: $\mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}) = \operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))$.

Пусть теперь $\mathscr{G}$ — циклический фильтр, причем $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$. Тем самым $\operatorname{mix}(\mu(\mathscr{G})) = \mu(\mathscr{G}) \supset \operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F})) = \mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow})$. Итак, $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}$. $\rhd$

4.9.4. Пусть x — внутренняя точка из $X{\downarrow}$. Определим стандартный фильтр (x) в $X{\downarrow}$ соотношением

$$(x) := {}^*\{U \subset X{\downarrow} : x \in U\},$$

где * — *символ стандартизации.* Таким образом, (x) составлен в точности такими стандартными подмножествами $X{\downarrow}$, которые содержат x. Элемент x называют *существенной точкой* $X{\downarrow}$ (и пишут $x \in e(X)$), если $(x){\uparrow}{\downarrow}$ — проультрафильтр в $X{\downarrow}$.

4.9.5. *Каждая точка x монады стандартного проультрафильтра $\mathscr{F}$ является существенной. При этом справедливы равенства*

$$\mathscr{F} = (x)^{\uparrow\downarrow} = (x){\uparrow}{\downarrow} = \mathrm{fil}\{{}^*\{U{\uparrow}{\downarrow} : x \in U \wedge U \subset X{\downarrow}\}\}.$$

$\lhd$ Так как (см. [408]) монада $\mu(\mathscr{F})$ по условию задевает монаду ультрафильтра (x), то $(x) \supset \mathscr{F}$. Следовательно, $(x){\uparrow}{\downarrow} \supset \mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow} = \mathscr{F}$. На основании 4.8.12 выводим $\mathscr{F} = (x){\uparrow}{\downarrow}$. В силу 4.8.5 имеет место равенство $(x){\uparrow}{\downarrow}^{\uparrow} = (x)^{\uparrow}$. Значит, из-за 4.8.13 x — существенная точка. Наконец, $(x)^{\uparrow\downarrow} = \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow} = \mathscr{F} = (x){\uparrow}{\downarrow}$. $\rhd$

4.9.6. *Образ существенной точки при экстенсиональном отображении — существенная точка в образе.*

$\lhd$ Пусть x — существенная точка $X{\downarrow}$ и $f : X{\downarrow} \to Y{\downarrow}$ — экстенсиональное отображение. Имеется проультрафильтр $\mathscr{F}$ такой, что $x \in \mu(\mathscr{F})$. Ясно, что $f(x) \in f(\mu(\mathscr{F})) = \mu(f(\mathscr{F}))$. В самом деле, с учетом сильной идеализации

$$\begin{gathered}
y \in \mu(f(\mathscr{F})) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(y \in f(F)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists x)(\forall F \in \mathscr{F}_0)(x \in F \wedge y = f(x)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists x)(\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F}) x \in F \wedge y = f(x) \leftrightarrow (\exists x \in \mu(\mathscr{F}))(y = f(x)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow y \in f(\mu(\mathscr{F})).
\end{gathered}$$

Остается сослаться на 4.8.14. $\rhd$

4.9.7. *Пусть E — некоторое стандартное множество и X — стандартный элемент $\mathbf{V}^{(B)}$. Рассмотрим произведение $X^{E^\wedge}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$, где $E^\wedge$ — стандартное имя E в $\mathbf{V}^{(B)}$. Если x — существенная точка $X^{E^\wedge}{\downarrow}$, то для всякого стандартного $e \in E$ точка $x{\downarrow}(e)$ — существенная в $X{\downarrow}$.*

$\lhd$ Раз $x \in X^{E^\wedge}{\downarrow}$, то $[\![x : E^\wedge \to X]\!] = \mathbf{1}$, т. е. $x{\downarrow} : E \to X{\downarrow}$ и для всякого $e \in E$ будет $[\![x{\downarrow}(e) = x(e^\wedge)]\!] = \mathbf{1}$ по определению спуска $x{\downarrow}$.

Рассмотрим отображение, переводящее элемент $x \in X^{E^\wedge}{\downarrow}$ в точку $x(e^\wedge)$ из $X{\downarrow}$ для фиксированного стандартного $e \in E$. Ясно, что для $x_1, x_2 \in X^{E^\wedge}{\downarrow}$ верно

$$[\![x_1 = x_2]\!] = [\![(\forall e \in E^\wedge)(x_1(e) = x_2(e))]\!] = \bigwedge_{e \in E} [\![x_1(e^\wedge) = x_2(e^\wedge)]\!] \leq \\ \leq [\![x_1(e^\wedge) = x_2(e^\wedge)]\!],$$

т. е. введенное стандартное отображение экстенсионально. На основании 4.9.6 заключаем, что $x(e^\wedge)$ — существенная точка в $X{\downarrow}$. Осталось вспомнить, что $x{\downarrow}(e) = x(e^\wedge)$ по определению спуска. $\rhd$

4.9.8. *Пусть $\mathscr{F}$ — циклический фильтр в $X{\downarrow}$ и ${}^e\mu(\mathscr{F}) := \mu(\mathscr{F}) \cap e(X)$ — множество существенных точек его монады. Тогда ${}^e\mu(\mathscr{F}) = {}^e\mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow})$.*

$\lhd$ Пусть $x \in {}^e\mu(\mathscr{F})$. Значит, x лежит в монаде некоторого проультрафильтра $\mathscr{G}$. Отсюда $\mu(\mathscr{G}) \cap \mu(\mathscr{F}) \neq \varnothing$ и, стало быть, $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}$. С учетом 4.8.10 $\mathscr{G}^{\uparrow\downarrow} \supset \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}$ и $x \in \mu(\mathscr{G}) \subset \mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow})$. Если теперь известно, что $x \in {}^e\mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow})$, то имеется ультрафильтр $\mathscr{G}$ в X внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ такой, что $x \in \mu(\mathscr{G}^{\downarrow})$ и $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}^{\uparrow}$. Поскольку $\mathscr{F} = \mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow} \subset \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow} \subset \mathscr{G}^{\downarrow}$ в силу 4.9.7, то $\mu(\mathscr{F}) \supset \mu(\mathscr{G}^{\downarrow})$. Следовательно, $x \in {}^e\mu(\mathscr{F})$. $\rhd$

4.9.9. Пусть A — подмножество рассматриваемого нами спуска $X{\downarrow}$. Множество $(X - A{\uparrow}){\downarrow}$ называют *продополнением* или *циклическим дополнением* A и обозначают A^c. Точку $x \in X{\downarrow}$ называют *проидеальной,* если x лежит в продополнении каждого конечного стандартного подмножества $X{\downarrow}$. Совокупность всех проидеальных точек $X{\downarrow}$ обозначаем $p(X)$.

4.9.10. *Если у множества $X{\downarrow}$ нет проидеальных точек, то X — конечное множество внутри $\mathbf{V}^{(B)}$.*

$\lhd$ По принципу идеализации имеется конечное стандартное множество Y в $X{\downarrow}$ такое, что $Y^e = \varnothing$. Итак, $[\![X - Y{\uparrow} = \varnothing{\uparrow}]\!] = \mathbf{1}$, т. е. $X = Y{\uparrow}$. $\rhd$

4.9.11. *Если X — бесконечное множество внутри $\mathbf{V}^{(B)}$, то проидеальные точки $X{\downarrow}$ составляют циклическую монаду. Подъем циклического фильтра с монадой $p(X)$ — это фильтр дополнений конечных подмножеств X внутри $\mathbf{V}^{(B)}$.*

$\lhd$ Продополнения конечных подмножеств $X{\downarrow}$ составляют базис фильтра. В самом деле, раз $(Y \cup Z){\uparrow}{\downarrow} \supset Y{\uparrow}{\downarrow} \cup Z{\uparrow}{\downarrow}$, то $(Y \cup Z){\uparrow} \supset Y{\uparrow} \cup Z{\uparrow}$ и $[\![X - (Y \cup Z){\uparrow} \subset X - (Y{\uparrow} \cup Z{\uparrow})]\!] = \mathbf{1}$. Значит, $(Y \cup Z)^c \subset (X - Y{\uparrow}){\downarrow} \cap (X - Z{\uparrow}){\downarrow} = Y^c \cap Z^c$. Таким образом, на основании 4.9.2 $p(X)$ — это циклическая монада. Обозначим ${}_p\mathscr{F}$ фильтр с монадой $p(X)$, т. е. фильтр продополнений конечных множеств в $X{\downarrow}$. Пусть далее ${}_{\mathrm{cf}}\mathscr{F}(X)$ — фильтр дополнений конечных множеств в X внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ (= коконечный фильтр в X). С учетом 4.9.4 имеем

$$[\![Y \in {}_{\mathrm{cf}}\mathscr{F}(X)]\!] = [\![(\exists Z \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X))(Y \supset X - Z)]\!] =$$
$$= \bigvee_{A \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X\downarrow)} [\![Y \supset X - A{\uparrow}]\!] = \bigvee_{A \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X\downarrow)} [\![Y \supset A^c{\uparrow}]\!] =$$
$$= \bigvee_{Z \in {}_p\mathscr{F}} [\![Y \supset Z{\uparrow}]\!] = [\![Y \in {}_p\mathscr{F}^{\uparrow}]\!].$$

Стало быть, ${}_{\mathrm{cf}}\mathscr{F}(X) = {}_p\mathscr{F}^{\uparrow}$. $\rhd$

4.10. Изображения компактных и предкомпактных пространств

В этом параграфе мы применим циклические монады для получения нужных нам описаний спусков — изображений топологических пространств в булевозначных моделях теории множеств. Идейно приводимые ниже результаты тесно примыкают к классическим работам А. Робинсона [454] и В. Люксембурга [408]. Ниже всюду для простоты рассматривается внутреннее (в смысле $\mathbf{V}^{(B)}$) непустое равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$. Обычное предположение «стандартности антуража» действует и в этом параграфе, т. е., в частности, при использовании нестандартных методов B, X, $\mathscr{U}$ и т. п. считаются стандартными множествами. Как это принято, пишем $x \approx y$ вместо $(x, y) \in \mu(\mathscr{U}^{\downarrow})$.

4.10.1. Равномерное пространство $(X{\downarrow}, \mathscr{U}^{\downarrow})$ называют *прокомпактным* или *циклически компактным*, если $(X, \mathscr{U})$ компактно внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Аналогичный смысл вкладывают в термин *прополная ограниченность* и т. п. Иногда используют термины типа «циклическая компактность».

4.10.2. *Нестандартные критерии прокомпактности.* *Для стандартного пространства X эквивалентны утверждения:*

(1) *$X{\downarrow}$ — прокомпактное пространство;*

(2) *каждая существенная точка $X{\downarrow}$ околостандартна;*

(3) *каждая существенная идеальная точка $X{\downarrow}$ околостандартна.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Пусть x — существенная точка $X{\downarrow}$. Тогда x лежит в монаде проультрафильтра $(x)^{\uparrow\downarrow}$. Значит, внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ верно, что найдется элемент $y \in X$ такой, что $(x)^{\uparrow}$ сходится к y. В силу принципа максимума и принципа Лейбница (во внутреннем мире) можно заключить, что имеется стандартный элемент $y \in X{\downarrow}$ такой, что $(x)^{\uparrow\downarrow} \supset \mathscr{U}^{\uparrow}(y)$. Отсюда вытекает, что $\mu((x)^{\uparrow\downarrow}) \subset \mathscr{U}^{\downarrow}(y)$ и, стало быть, $x \approx y$. Иными словами, x — околостандартная точка.

(2) $\to$ (3): Очевидно.

(3) $\to$ (1): Следует убедиться, что ультрафильтр в X внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ имеет точку прикосновения. Будем, не ограничивая общности, считать, что $\mathscr{F}$ не является главным ультрафильтром. Следовательно, $\mathscr{F}$ тоньше фильтра дополнений конечных множеств внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Привлекая 4.9.6, видим, что $\mu(\mathscr{F}^{\downarrow}) \subset p(X)$. Если $x \in \mu(\mathscr{F}^{\downarrow})$, то на основании 4.9.8 $\mathscr{F} = (x)^{\uparrow}$ и, кроме того, x — существенная точка. По условию такая точка околостандартна, т. е. имеется стандартный $y \in X{\downarrow}$, для которого $\mathscr{U}^{\downarrow}(y) \cap \mu(\mathscr{F}^{\downarrow}) \neq \varnothing$. Тем самым y — точка прикосновения $\mathscr{F}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. $\rhd$

4.10.3. Доказанное в 4.10.2 показывает отличия булевозначного критерия прокомпактности от привычного: «компактное пространство — это пространство с околостандартными точками». Наличие колоссального количества прокомпактных и некомпактных пространств обеспечивает разнообразие примеров нестандартных но неидеальных точек. Отметим здесь же, что совместное применение 4.10.2 и 4.9.7 позволяет, конечно же, дать нестандартное доказательство естественного аналога теоремы Тихонова для произведения прокомпактных пространств — «спуска теоремы Тихонова в $\mathbf{V}^{(B)}$».

4.10.4. *Нестандартный критерий пропредкомпактности.* *Стандартное пространство является спуском вполне ограниченного равномерного пространства в том и только в том случае, если каждая его существенная точка предоколостандартна.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Пусть x — существенная точка $X{\downarrow}$. Тогда $(x)^{\uparrow}$ — ультрафильтр внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ и, значит, $(x)^{\uparrow}$ является фильтром Коши в X в силу полной ограниченности X в $\mathbf{V}^{(B)}$. Спуск фильтра Коши — фильтр Коши в спуске. Значит, x — элемент монады фильтра Коши, т. е. x — предоколостандартная точка.

$\leftarrow$: Возьмем ультрафильтр $\mathscr{F}$ в X внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Нужно установить, что $\mathscr{F}$ — фильтр Коши в $\mathbf{V}^{(B)}$. Возьмем точку x из монады спуска $\mathscr{F}^{\downarrow}$. Тогда x существенна и, стало быть, предоколостандартна. Значит, микрогало x, т. е. множество $\mathscr{U}^{\downarrow}(x)$, — это монада фильтра Коши. Тем самым $\mathscr{F}^{\downarrow}$ — фильтр Коши. $\rhd$

4.11. Монады проультрафильтров и экстенсиональных фильтров

В 4.4.11 предложен подход к применению монадологии, развитой в нестандартном анализе, к изучению циклических фильтров, возникающих при использовании булевозначных моделей. В этом разделе приводятся критерии монад проультрафильтров и экстенсиональных фильтров и обсуждаются некоторые связанные с ними свойства этих объектов. При использовании монадологии подразумевается неоклассическая установка. Гипотеза стандартности антуража применяется, как обычно, без дополнительных оговорок.

4.11.1. Пусть X — рассматриваемое циклическое множество (= спуск некоторого B-множества). Символом μ_d обозначим оператор взятия (дискретной) *монадной оболочки.* Иными словами, $\mu_d(\varnothing) := \varnothing$ и, кроме того, для непустого U в X множество $\mu_d(U)$ — это монада стандартизации внешнего фильтра надмножеств U, т. е.

$$x \in \mu_d(U) \leftrightarrow ((\forall^{\mathrm{st}} V \subset X)\ U \subset V \rightarrow x \in U).$$

По аналогии определим *циклически монадную оболочку* μ_c следующим образом:

$$x \in \mu_c(U) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} V)(V = V{\uparrow}{\downarrow} \wedge V \subset X \wedge U \subset V \rightarrow x \in V).$$

Таким образом, для непустого U циклически монадная оболочка $\mu_c(U)$ есть монада циклической оболочки стандартизации фильтра надмножеств U.

4.11.2. *Циклически монадная оболочка множества представляет собой циклическую оболочку его монадной оболочки:*

$$\mu_c(U) = \mathrm{mix}(\mu_d(U))$$

для каждого U.

$\lhd$ Пусть $U \neq \varnothing$ и стандартное множество V таково, что $V \supset \mathrm{mix}(\mu_d(U))$. На основании 4.9.3 для некоторого W из фильтра $^*\{U_1 \subset X : U_1 \supset U\}$ будет $V \supset W{\uparrow}{\downarrow}$ и, следовательно, $V \supset \mu_c(U)$. Таким образом, $\mu_c(U) \subset \mathrm{mix}(\mu_d(U))$, ибо стоящее справа множество — это монада. В свою очередь, если $V \supset \mu_c(U)$ и V стандартно, то V содержит циклическую оболочку надмножества U и, стало быть, $V \supset U$. Отсюда $V \supset \mu((^*\{W : W \supset U\}){\uparrow}{\downarrow})$ и остается вновь апеллировать к 4.9.3. $\rhd$

4.11.3. Максимальные по включению циклические фильтры в X называют *проультрафильтрами* в X. *Существенная точка* в X по определению — элемент монады стандартного проультрафильтра. Внешнее множество всех существенных точек X обозначают символом ^eX. Полезно подчеркнуть, что проультрафильтры в X суть в точности спуски ультрафильтров в подъеме $X{\uparrow}$ множества X.

4.11.4. ***Нестандартный критерий проультрафильтра.*** *Фильтр является проультрафильтром в том и только в том случае, если, во-первых, его монада циклическая и, во-вторых, ее легко поймать стандартным циклическим множеством.*

$\lhd$ Пусть $\mathscr{F}$ — рассматриваемый фильтр. Нас интересует справедливость следующего утверждения:

$$(\mathscr{F} \text{ — } \textit{проультрафильтр}\ ) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \mu(\mathscr{F}) = \mathrm{mix}(\mu(\mathscr{F})) \wedge (\forall^{\mathrm{st}} V)(V = V{\uparrow}{\downarrow} \rightarrow \mu(\mathscr{F}) \subset V \vee \mu(\mathscr{F}) \subset V').$$

Для стандартного V либо $\mu(\mathscr{F}) \cap V = \varnothing$, либо $\mu(\mathscr{F}) \cap V \neq \varnothing$. В первом случае $V' := X - V \in \mathscr{F}$. Во втором возникает фильтр $\mathscr{G}$ с монадой $\mu(\mathscr{F}) \cap V$. Ясно, что если $\mathscr{F}$ — проультрафильтр и V — циклическое множество, то $\mathscr{G} = \mathscr{F}$ на основании критерия циклического фильтра 4.9.2. Таким образом, $V \in \mathscr{F}$, что устанавливает импликацию $\rightarrow$.

Установим справедливость импликации $\leftarrow$. Возьмем циклический фильтр $\mathscr{G}$, более тонкий, чем $\mathscr{F}$. Ясно, что $G \in \mathscr{G} \to G' \notin \mathscr{F}$ (иначе, $G' \supset \mu(\mathscr{F}) \supset \mu(\mathscr{G})$). Стало быть, $G \in \mathscr{F}$. Следовательно, $\mathscr{G} = \mathscr{F}$. $\triangleright$

4.11.5. *Стандартные критерии проультрафильтра.* *Допустим, что $\mathscr{F}$ — циклический фильтр в X. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *$\mathscr{F}$ — проультрафильтр;*

(2) *при любом конечном множестве $\mathscr{E}$ подмножество X будет либо $(\bigcup \mathscr{E})' \in \mathscr{F}$, либо $E{\uparrow\downarrow} \in \mathscr{F}$ для некоторого $E \in \mathscr{E}$;*

(3) *для всякого конечного набора циклических множеств в $\mathscr{F}$ входит либо одно из них, либо дополнение каждого;*

(4) *если U — произвольное множество, то либо $U{\uparrow\downarrow} \in \mathscr{F}$, либо $U' \in \mathscr{F}$;*

(5) *для каждого циклического множества V либо $V \in \mathscr{F}$, либо $V' \in \mathscr{F}$.*

$\triangleleft$ Для доказательства (1) $\to$ (2) воспользуемся принципом переноса и нестандартным критерием проультрафильтра 4.11.4. Итак, пусть $\mathscr{F}$ — стандартный фильтр и $\mathscr{E}$ — стандартное конечное множество стандартных подмножеств X. Возможны два случая: либо $\mu(\mathscr{F}) \bigcap \bigcup \mathscr{E} = \varnothing$, либо $\mu(\mathscr{F}) \bigcap \bigcup \mathscr{E} \neq \varnothing$. В первом из них множество $(\bigcup \mathscr{E})'$, очевидно, входит в $\mathscr{F}$. Во втором найдется $E \in \mathscr{E}$, для которого $E \cap \mu(\mathscr{F}) \neq \varnothing$. Тем самым $E{\uparrow\downarrow} \cap \mu(\mathscr{F}) \neq \varnothing$. Учитывая стандартность $E{\uparrow\downarrow}$, на основании 4.11.4 заключаем $E{\uparrow\downarrow} \supset \mu(\mathscr{F})$ и, стало быть, $E{\uparrow\downarrow} \in \mathscr{F}$.

Импликации (2) $\to$ (3) $\to$ (4) $\to$ (5) не вызывают сомнений. То, что (5) обеспечивает (1), вытекает из 4.11.4 и принципа переноса. $\triangleright$

4.11.6. *Следствие.* *Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в X. Фильтр $\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}$ является проультрафильтром в том и только в том случае, если для каждого подмножества U в X будет $U{\uparrow\downarrow} \in \mathscr{F}$ или же найдется F из $\mathscr{F}$, для которого $F{\uparrow\downarrow} \subset U'$.*

4.11.7. *Следствие.* *Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в X. Для того чтобы $\mathscr{F}$ был проультрафильтром, необходимо и достаточно выполнение равенства $\mathscr{F} = (\ddot{\mathscr{F}}){\uparrow\downarrow}$, где $\ddot{\mathscr{F}}$ — гриль фильтра $\mathscr{F}$, определенный* *соотношением*

$$U \in \ddot{\mathscr{F}} \leftrightarrow (\forall F \in \mathscr{F}) U \cap F \neq \varnothing.$$

$\lhd$ Пусть известно, что $\mathscr{F}$ — проультрафильтр. Ясно, что $\mathscr{F} \subset \ddot{\mathscr{F}}$ и, следовательно, $\mathscr{F} = \mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow} \subset (\ddot{\mathscr{F}}){\uparrow}{\downarrow}$. Если $V \in (\ddot{\mathscr{F}}){\uparrow}{\downarrow}$, то найдется U из $\ddot{\mathscr{F}}$, для которого $V \supset U{\uparrow}{\downarrow}$. При этом $U{\uparrow}{\downarrow}$ явно входит в $\mathscr{F}$ на основании (4). Стало быть, $V \in \mathscr{F}$.

Допустим теперь, что $\mathscr{F} = (\ddot{\mathscr{F}}){\uparrow}{\downarrow}$. Поскольку по определению каждый элемент в правой части — это надмножество циклического множества, то $\mathscr{F}$ — циклический фильтр. Пусть U — произвольное циклическое множество. Если $U \cap F = \varnothing$ для некоторого $F \in \mathscr{F}$, то $U' \in \mathscr{F}$. Если же $U \cap F \neq \varnothing$ для всякого $F \in \mathscr{F}$, то U входит в $(\ddot{\mathscr{F}}){\uparrow}{\downarrow}$ и потому $U \in \mathscr{F}$. На основании (5) заключаем, что $\mathscr{F}$— проультрафильтр. $\rhd$

4.11.8. Семейство $(\ddot{\mathscr{F}}){\uparrow}{\downarrow}$ из 4.11.7 называют *циклическим грилем* $\mathscr{F}$ или (реже) *прогрилем.*

Смысл этого понятия и способ его применения раскрываются в связи с техникой спусков и подъемов. Напомним, что для семейства $\mathscr{E}$ непустых подмножеств $X{\uparrow}$ *спуск* $\mathscr{E}^{\downarrow}$ вводят соотношением

$$U \in \mathscr{E}^{\downarrow} \leftrightarrow U \subset X \wedge (\exists E \in \mathscr{E}{\downarrow})(U \supset E{\downarrow}).$$

4.11.9. Для фильтра $\mathscr{F}$ и его гриля $\ddot{\mathscr{F}}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ справедливо равенство

$$(\ddot{\mathscr{F}})^{\downarrow} = (\mathscr{F}^{\downarrow}){\uparrow}{\downarrow}.$$

$\lhd$ Для доказательства достаточно заметить, что в силу правил подсчета оценок в $\mathbf{V}^{(B)}$ выполнено

$$[\![U{\uparrow} \in \ddot{\mathscr{F}}]\!] = \bigwedge_{F \in \mathscr{F}^{\downarrow}} [\![U{\uparrow} \cap F{\uparrow} \neq \varnothing]\!],$$

где U — подмножество X. $\rhd$

4.11.10. *Экстенсиональный фильтр является проультрафильтром в том и только в том случае, если его циклический гриль является фильтром.*

$\lhd$ Ясно, что фильтр $\mathscr{F}$ — это проультрафильтр в том и только в том случае, если $\mathscr{F}^{\uparrow}$ совпадает со своим грилем внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Последнее бывает тогда и только тогда, когда гриль $\mathscr{F}^{\uparrow}$ — это фильтр внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Остается привлечь 4.11.9. $\rhd$

4.11.11. *Критерий существенности.* *Точка существенна в том и только в том случае, если ее можно отделить стандартным циклическим множеством от любого не содержащего ее стандартного циклического множества.*

$\lhd$ Символически нас интересует утверждение

$$x \in {}^eX \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall U = U{\uparrow\downarrow}) x \notin U \to (\exists V = V{\uparrow\downarrow})\ x \in V \wedge U \cap V = \varnothing.$$

Пусть сначала x — существенная точка и стандартное циклическое множество U таково, что $x \notin U$. В силу 4.11.3 дополнение U' входит в фильтр $(x){\uparrow\downarrow}$, порождаемый циклическими надмножествами x (ибо $(x){\uparrow\downarrow}$ — это проультрафильтр по условию). Стало быть, для некоторого V будет $x \in V$ и $V{\uparrow\downarrow} \cap U \neq \varnothing$.

Если выполнено условие отделимости, то для фильтра $(x){\uparrow\downarrow}$ будут удовлетворены условия критерия проультрафильтра 4.11.4.

В самом деле, пусть $U = U{\uparrow\downarrow}$ — произвольное циклическое множество. Нужно убедиться, что либо U, либо U' входит в $(x){\uparrow\downarrow}$. В случае $x \in U$ по определению $U \in (x){\uparrow\downarrow}$. Если же $x \in U'$, то по предположению для некоторого $V \in (x){\uparrow\downarrow}$ будет $V \cap U = \varnothing$, т. е. $V \subset U'$ и $U' \in (x){\uparrow\downarrow}$. $\rhd$

4.11.12. *Следствие.* *Если в монаде ультрафильтра $\mathscr{F}$ есть существенная точка, то $\mu(\mathscr{F}) \subset {}^eX$ и, кроме того, $\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}$ — проультрафильтр.*

$\lhd$ Пусть V — произвольное циклическое множество и $x \in \mu(\mathscr{F}) \cap {}^eX$. Если $x \in V$, то $V \cap \mu(\mathscr{F}) \neq \varnothing$ и, стало быть, $V \in \mathscr{F}$, а потому и $V \in \mathscr{F}{\uparrow\downarrow}$. Если $x \notin V$, то на основании 4.11.11 для некоторого циклического U будет $x \in U$ и $U \cap V = \varnothing$. Ясно, что $U \in \mathscr{F}{\uparrow\downarrow}$. Отсюда следует, что $V' \in \mathscr{F}{\uparrow\downarrow}$. Остается сослаться на 4.11.5, чтобы заключить, что $\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}$ — проультрафильтр. Как уже отмечалось, $\mu(\mathscr{F}){\uparrow\downarrow} \subset {}^eX$ в этом случае. Поскольку $\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}) = \mathrm{mix}(\mu(\mathscr{F}))$, на основании теоремы 4.9.3 выводим требуемое. $\rhd$

4.11.13. *Критерий экстенсиональности фильтра.* *Фильтр является экстенсиональным в том и только в том случае, если его монада представляет собой циклически монадную оболочку множества своих существенных точек.*

$\lhd$ В символической записи нам следует установить эквивалентность

$$(\mathscr{F} \text{ экстенсионален}) \leftrightarrow \mu(\mathscr{F}) = \operatorname{mix}(\mu_d({}^e\mu(\mathscr{F}))).$$

Условие экстенсиональности $\mathscr{F}$ можно переписать в виде $[\![\, \mathscr{F}^{\uparrow}$ — фильтр $X{\uparrow}\,]\!] = \mathbf{1}$. Используя принцип переноса булевозначного анализа, для некоторого множества $\mathfrak{A}$ проультрафильтров в X можно записать

$$[\![\, F \in \mathscr{F}^{\uparrow} \,]\!] = \bigwedge_{\mathscr{A} \in \mathfrak{A}} [\![\, F \in \mathscr{A}^{\uparrow} \,]\!].$$

Отсюда следует, что для циклического множества F в X выполнено

$$F \in \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow} \leftrightarrow F \in \bigcap_{\mathscr{A} \in \mathfrak{A}} \mathscr{A}^{\uparrow\downarrow}.$$

Тем самым для стандартного циклического F выводим

$$F \supset \mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}) \leftrightarrow F \supset \mu_d\biggl(\bigcup_{\mathscr{A} \in {}^\circ\mathfrak{A}} \mu(\mathscr{A}^{\uparrow\downarrow})\biggr),$$

где ${}^\circ\mathfrak{A}$ — стандартное ядро $\mathfrak{A}$, т. е. внешнее множество стандартных элементов $\mathfrak{A}$. Последнее в силу 4.11.2 переписывается в виде

$$\mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}) = \operatorname{mix}\biggl(\mu\biggl(\bigcup_{\mathscr{A} \in {}^\circ\mathfrak{A}} \mu(\mathscr{A}^{\uparrow\downarrow})\biggr)\biggr).$$

Остается заметить, что на основании 4.9.5 монады проультрафильтров состоят только из существенных точек и множество $\mathfrak{A}$ есть совокупность проультрафильтров, мажорирующих $\mathscr{F}$. $\rhd$

4.11.14. ***Следствие.*** *Стандартное множество циклично в том и только в том случае, если оно является циклически монадной оболочкой своих существенных точек.*

4.11.15. *Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр в X, а b — элемент булевой алгебры B. Пусть, далее, $b\mathscr{F}$ — образ фильтра $\mathscr{F}$ при умножении на b. Тогда имеет место равенство*

$$b(b\mathscr{F})^{\uparrow} = b\mathscr{F}^{\uparrow}.$$

$\lhd$ В самом деле, справедлива оценка

$$\llbracket (b\mathscr{F})^{\uparrow} = \mathscr{F}^{\uparrow} \rrbracket \geq \bigwedge_{F\in\mathscr{F}} \llbracket (bF)\uparrow \in \mathscr{F}^{\uparrow} \rrbracket \geq \bigwedge_{F\in\mathscr{F}} \llbracket (bF)\uparrow = F\uparrow \rrbracket \geq$$
$$\geq \bigwedge_{F\in\mathscr{F}} \bigwedge_{x\in X} \llbracket bx \in F\uparrow \rrbracket \geq \bigwedge_{F\in\mathscr{F}} \bigwedge_{x\in X} \llbracket bx = x \rrbracket \geq b.$$

Отсюда и вытекает требуемое соотношение. $\rhd$

4.11.16. *Пусть $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — фильтры внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ и $b \in B$. Тогда выполнено*

$$b\mathscr{F} = b\mathscr{G} \leftrightarrow b\mathscr{F}^{\downarrow} = b\mathscr{G}^{\downarrow}.$$

$\lhd$ Если $\llbracket \mathscr{F} \subset \mathscr{G} \rrbracket \geq b$, то с учетом принципа максимума для каждого $F \in \mathscr{F}^{\downarrow}$ найдется $G \in \mathscr{G}^{\downarrow}$ так, что

$$\llbracket F\uparrow \supset G\uparrow \rrbracket = \llbracket \mathscr{F} \supset \mathscr{G} \rrbracket \geq b.$$

Иначе говоря, $bF\uparrow \supset bG\uparrow$ и, стало быть, для циклических F и G будет $bF \supset bG$. Таким образом, $b\mathscr{F}^{\downarrow} \subset b\mathscr{G}^{\downarrow}$.

Пусть теперь заранее известно, что $b\mathscr{F}^{\downarrow} \subset b\mathscr{G}^{\downarrow}$. Тогда последовательно с учетом 4.11.15 выводим

$$b\mathscr{F}^{\downarrow} \subset b\mathscr{G}^{\downarrow} \to (b\mathscr{F}^{\downarrow})^{\uparrow} \subset (b\mathscr{G}^{\downarrow})^{\uparrow} \to$$
$$\to b(b\mathscr{F}^{\downarrow})^{\uparrow} \subset b(b\mathscr{G}^{\downarrow})^{\uparrow} \to b(b\mathscr{F}^{\downarrow\uparrow}) \subset b(b\mathscr{G}^{\downarrow\uparrow}) \to b\mathscr{F} \subset b\mathscr{G}.$$

Окончательно заключаем: $\llbracket \mathscr{F} \subset \mathscr{G} \rrbracket \geq b \leftrightarrow b\mathscr{F}^{\downarrow} \subset b\mathscr{G}^{\downarrow}$. Отсюда и вытекает требуемая эквивалентность. $\rhd$

4.11.17. *Нестандартный критерий для перемешивания фильтров.* *Пусть $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — стандартное семейство экстенсиональных фильтров и $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — стандартное разбиение единицы. Фильтр $\mathscr{F}$ является перемешиванием $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в том и только в том случае, если*

$$(\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \Xi)\ b_\xi \mu(\mathscr{F}) = b_\xi \mu(\mathscr{F}_\xi).$$

$\lhd$ В соответствии с общим определением F входит в перемешивание $\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi \mathscr{F}_\xi$, если найдется семейство $(F_\xi)_{\xi\in\Xi}$ такое, что $F_\xi \in$

$\mathscr{F}_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ и при этом $F \supset \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi F_\xi$. Учитывая правила 4.8.1 и 4.8.2 и экстенсиональность фильтров семейства $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$, заключаем, что, во-первых, $\mathscr{F}$ также экстенсионален, а, во-вторых, подъем $\mathscr{F}^{\uparrow}$ является перемешиванием $(\mathscr{F}_\xi^{\uparrow})_{\xi\in\Xi}$ с теми же вероятностями. Используя отделимость $\mathbf{V}^{(B)}$ и предложения 4.11.16 и 4.1.6 (5), последовательно выводим:

$$
\begin{gathered}
\mathscr{F}^{\uparrow} = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi \mathscr{F}_\xi^{\uparrow} \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \Xi)\ b_\xi \mathscr{F}^{\uparrow} = b_\xi \mathscr{F}_\xi^{\uparrow} \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \Xi)\ b_\xi \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow} = b_\xi \mathscr{F}_\xi^{\uparrow\downarrow} \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \Xi)\ b_\xi \mathscr{F} = b_\xi \mathscr{F}_\xi \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \Xi) \mu(b_\xi \mathscr{F}) = \mu(b_\xi \mathscr{F}_\xi) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \xi \in \Xi)\ b_\xi \mu(\mathscr{F}) = b_\xi \mu(\mathscr{F}_\xi).
\end{gathered}
$$

что заверщает доказательство. $\triangleright$

Глава 5

Инфинитезимали и субдифференциалы

Нестандартные методы анализа нашли применения во многих разделах математики. В этой главе мы остановимся на использовании актуальных бесконечно малых в *субдифференциальном исчислении* — одном из новых разделов функционального анализа, обязанных своему развитию теории экстремальных задач. При исследовании оптимизационных проблем значительное внимание уделяется поиску удобных выпуклых аппроксимаций для достаточно произвольных функций и множеств. Дело в том, что для выпуклых задач развита весьма мощная и эффективная техника теоретического анализа и построены соответствующие вычислительные алгоритмы. Способы локальной аппроксимации множеств и функций, развиваемые в субдифференциальном исчислении, связаны с построением достаточно сложных, зачастую труднообозримых формул. Возникающие понятия — гиперкасательные, пределы по Рокафеллару, производные Кларка — при первом знакомстве вызывают недоумение, так как смысл их формальных определений уловить совсем нелегко.

Нестандартный анализ предлагает эффективные упрощающие процедуры — привлечение легализуемых им внешних понятий «*убивает кванторы*», что существенно сокращает сложность восприятия описываемых стандартных конструкций. Ниже мы займемся главным образом развитием и иллюстрацией этих положений для классификаций односторонних касательных к произвольным функциям и множествам.

Следует подчеркнуть, что многие конструкции, описываемые в настоящей главе, имеют более широкую область применимости, нежели субдифференциальное исчисление, в контексте которого ведется изложение.

5.1. Топологии в векторных пространствах

Изучение локальных аппроксимаций в векторных пространствах связано с особенностями монад, задающих топологии, согласованные с имеющимися там структурами. Именно этими топологиями мы займемся в текущем параграфе.

5.1.1. *Пусть U — звездное множество в векторном пространстве, т. е. $[0,1]\ U \subset U$. Множество U поглощает множество V в том и только в том случае, если для некоторого (а тогда и для любого) положительного инфинитезимального α будет $\alpha V \subset U$.*

$\lhd$ Раз U поглощает V, то по определению имеется $\beta > 0$, для которого $\beta V \subset U$. По принципу переноса с учетом стандартности U и V можно заключить, что $(\exists^{\mathrm{st}} \beta > 0)\, \beta V \subset U$. Теперь если $\alpha > 0$ и $\alpha \approx 0$, то $\alpha V = \alpha/\beta(\beta V) \subset \alpha/\beta U \subset U$. Оставшаяся часть утверждения очевидна. $\rhd$

5.1.2. Пусть x — стандартный элемент рассматриваемого стандартного векторного пространства X. Внешнее множество $\{\alpha x : \alpha > 0, \alpha \approx 0\}$ называют *радиус-монадой* x или *конатусом* вектора x, или, наконец, *направлением* на x. Термин «конатус» был предложен Т. Гоббсом [37, p. 173], писавшим. что конатус “is motion through a space and a time less than any given, that is, less than any determined whether by exposition or assigned by number, that is, through a point." Объединение радиус-монад стандартных элементов X называют *конатусом направлений* этого пространства и обозначают $\mathrm{cnt}(X)$.

5.1.3. *Стандартное звездное множество U является поглощающим в X в том и только в том случае, если U содержит конатус направлений* $\mathrm{cnt}(X)$ *пространства X.*

5.1.4. ***Нестандартный критерий векторной топологии.*** *Пусть X — стандартное векторное пространство над основным полем $\mathbb{F}$ и $\mathscr{N}$ — стандартный фильтр в X. Существует векторная топология τ на X такая, что $\mathscr{N} = \tau(0)$ в том и только в том случае, если* *монада $\mu(\mathscr{N})$ фильтра $\mathscr{N}$ содержит конатус направлений* $\operatorname{cnt}(X)$ *и, кроме того, является внешним* ${}^{\approx}\mathbb{F}$*-подмодулем* X.

(Здесь, как обычно, ${}^{\approx}\mathbb{F} := \{t \in F : (\exists^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})|t| \le n\}$ — доступная часть основного поля скаляров $\mathbb{F}$, наделенная естественной структурой внешнего кольца. Напомним, что $\mathbb{F}$ — это $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$.)

$\lhd$ $\rightarrow$: Так как сложение непрерывно в нуле, то $\mu(\mathscr{N}) + \mu(\mathscr{N}) = \mu(\mathscr{N})$, т. е. $\mu(\mathscr{N})$ — внешняя подгруппа X. Пусть $\alpha \in {}^{\approx}\mathbb{F}$ и $\mathscr{G}$ — какой-нибудь базис $\mathscr{N}$, состоящий из уравновешенных множеств. Если $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ таково, что $|\alpha| \le n$, то для $G \in {}^{\circ}\mathscr{G}$ и $x \in \mu(\mathscr{N})$ будет $\alpha/n\ x \in G$. Отсюда $\alpha/nx \in \bigcap\{G : G \in {}^{\circ}\mathscr{G}\} = \mu(\mathscr{G}) = \mu(\mathscr{N})$. Стало быть, $\alpha x \in n\mu(\mathscr{N}) = \mu(\mathscr{N})$. Окончательно $\alpha\mu(\mathscr{N}) = \mu(\mathscr{N})$ для $\alpha \in {}^{\approx}\mathbb{F}$. Необходимо, наконец, отметить, что $\mathscr{N}$ имеет базис из поглощающих множеств, и сослаться на 5.1.3, чтобы заключить $\mu(\mathscr{N}) \supset \operatorname{cnt}(X)$.

$\leftarrow$: Возьмем $U \in {}^{\circ}\mathscr{N}$. В соответствии с 4.1.4 это означает, что $U \supset \mu(\mathscr{N})$. Если W — бесконечно малый элемент $\mathscr{N}$, то его уравновешенная оболочка V также бесконечно мала (ибо $V \subset \mu(\mathscr{N})$). Кроме того, $V + V \subset \mu(\mathscr{N}) + \mu(\mathscr{N}) \subset \mu(\mathscr{N}) \subset U$. Итак,

$$(\forall^{\mathrm{st}} U \in \mathscr{N})(\exists V \in \mathscr{N})(V \text{ уравновешено } \wedge V + V \subset U).$$

По принципу переноса делаем вывод, что $\mathscr{N} + \mathscr{N} = \mathscr{N}$ и, кроме того, $\mathscr{N}$ имеет базис из уравновешенных множеств. На основании 5.1.3 отмечаем также, что $\mathscr{N}$ составлен из уравновешенных стандартных множеств. Тем самым $\mathscr{N}$ действительно определяет векторную топологию на X. $\rhd$

5.1.5. *Для каждой точки x монады $\mu(X) := \mu(\tau(0))$ топологического векторного пространства имеется бесконечно большое натуральное число $N \in \mathbb{N} - {}^{\circ}\mathbb{N}$ такое, что $Nx \in \mu(X)$.*

$\lhd$ Если V — стандартная окрестность нуля и $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$, то на основании 5.1.4 множество $A(n, V) := \{m \in \mathbb{N} : m \ge n \wedge mx \in V\}$ не пусто (ибо $\mu(X) \subset V$). По принципу переноса имеется элемент N, для которого $(\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(\forall^{\mathrm{st}} U \in \tau(0))(N \in A(n, V))$. Ясно, что элемент N — искомый. $\rhd$

5.1.6. В приложениях иногда удобно рассматривать *почти векторные топологии.* Такая топология τ на пространстве X характеризуется теми свойствами, что, во-первых, непрерывно умножение векторов из X на каждый скаляр из основного поля и, во-вторых, сложение непрерывно по совокупности переменных. Пару (X, τ), равно как и само X, называют при этом *почти топологическим векторным пространством.* Естественность этого понятия легко осознать в связи со следующим очевидным утверждением.

5.1.7. *Нестандартный критерий почти векторной топологии.* *Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{F}$. Существует почти векторная топология τ на X такая, что $\tau(0)$ совпадает с фиксированным фильтром $\mathscr{N}$ в том и только в том случае, если монада $\mu(\mathscr{N})$ является внешним векторным пространством над внешним полем стандартных скаляров ${}^{\circ}\mathbb{F}$.*

5.1.8. В связи с 5.1.7 отметим, что монада фильтра окрестностей нуля почти векторного пространства является выпуклым внешним множеством. Внутреннее выпуклое множество U содержит, очевидно, произвольные выпуклые комбинации своих элементов, т. е. для конечных наборов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ положительных скаляров, составляющих в сумме единицу, и набора $\{u_1, \dots, u_N\}$ элементов U будет $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \in U$. Здесь N — произвольный (внутренний) элемент $\mathbb{N}$. Сформулированное свойство, называемое *гипервыпуклостью*, для внешних выпуклых множеств не выполняется (принцип индукции по внутренним натуральным числам в мире внешних множеств просто неверен). Примеры, подтверждающие высказанное положение, легко извлечь с учетом следующего полезного предложения.

5.1.9. *Нестандартный критерий локально выпуклой топологии.* *Векторная топология является локально выпуклой в том и только в том случае, если монада ее фильтра окрестностей нуля — гипервыпуклое множество.*

$\triangleleft$ $\rightarrow$: Стандартные окрестности локально выпуклой топологии содержат стандартные выпуклые, а потому и гипервыпуклые окрестности. Пересечение же гипервыпуклых внешних множеств вновь гипервыпукло.

$\leftarrow$: Каждая стандартная окрестность нуля рассматриваемой топологии τ содержит выпуклую оболочку бесконечно малой окрестности (ибо эта оболочка целиком лежит в монаде $\tau(0)$ в силу ее гипервыпуклости). По принципу переноса заключаем, что любая окрестность в $\tau(0)$ содержит выпуклую окрестность нуля. $\triangleright$

5.1.10. В заключение текущего параграфа, несколько уклоняясь от основной линии изложения, отметим, что нестандартный анализ топологических векторных пространств и операторов в них связан с изучением расположения точек различного вида. При этом, помимо уже встречавшихся нам околостандартных и предстандартных точек, важное место занимают специфические понятия «борнологического типа». Остановимся здесь лишь на простейших понятиях такого рода.

5.1.11. *Пусть* (X,τ) *— локально выпуклое пространство и* x *— внутренняя точка* X*. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *при любом бесконечно малом* $\alpha \in \mathbb{F}$ *верно* $\alpha x \approx_\tau 0$*;*

(2) $x \in \bigcap\limits_{V\in\tau(0)} \bigcup\limits_{n\in{}^\circ\mathbb{N}} nV$*;*

(3) *для всякой стандартной непрерывной полунормы* p *(элемента зеркала* τ*) выполнено* $p(x) \in {}^{\approx}\mathbb{F}$*.*

$\lhd$ (1) $\leftrightarrow$ (2): Воспользуемся алгоритмом Нельсона:

$$(\forall\, \alpha \in \mathscr{F})(\alpha \approx 0 \to \alpha x \approx 0) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{\rm st} V \in \tau(0))(\forall\, \alpha)((\forall^{\rm st} n \in \mathbb{N})\, |\alpha| \le n^{-1} \to \alpha x \in V) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{\rm st} V \in \tau(0))(\forall\, \alpha)(\exists^{\rm st} n \in \mathbb{N})(|\alpha| \le n^{-1} \to \alpha x \in V) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{\rm st} V \in \tau(0))(\exists^{\rm st} n \in \mathbb{N})(x \in nV).$$

(1) $\to$ (3): Если p — непрерывная полунорма, то для всякого $t \in {}^{\approx}\mathbb{R}$ будет $|t|p(x) = p(|t|x) \approx 0$ в силу 4.2.7. Итак, $p(x) \in {}^{\approx}\mathbb{R}$.

(3) $\to$ (1): При каждой стандартной непрерывной полунорме p верно $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \approx 0$, как только $|\alpha| \approx 0$. Останется заметить, что последнее и означает инфинитезимальность αx в топологии τ. $\rhd$

5.1.12. Точка x, удовлетворяющая одному, а тогда и любому из эквивалентных условий 5.1.11 (1)–(3), называется *доступной*, реже *конечной*, в (X,τ). При этом пишут $x \in \operatorname{ltd}(X,\tau)$ или просто $x \in \operatorname{ltd}(X)$, если в указании на топологию нет особой необходимости, и говорят о принадлежности x *доступной части* пространства X.

5.1.13. *Нестандартный критерий ограниченности.* *Пусть* X *— стандартное локально выпуклое пространство. Стандартное множество* U *в* X *ограничено в том и только в том случае, если оно составлено доступными точками* X*, т. е.* $U \subset \operatorname{ltd}(X)$*.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Если U ограничено, то имеется стандартное $t \in {}^\circ\mathbb{R}$ такое, что $p(U) \le t$ для взятой непрерывной полунормы p. Значит, при $\alpha \approx 0$ и $x \in U$ будет $p(\alpha x) \le t\alpha$, т. е. $\alpha x \approx 0$.

Разнообразия ради мы воспользуемся секвенциальным признаком ограниченности. Итак, пусть (α_n) — стандартная последовательность скаляров, сходящаяся к нулю, и (u_n) — стандартная последовательность точек U. Нужно показать, что $\alpha_n u_n \to 0$. Пусть N — бесконечно большой номер. Тогда $\alpha_N \approx 0$ и, стало быть, на основании 5.1.11 (1) и условия будет $\alpha_N u_N \approx 0$. $\rhd$

5.1.14. Точку x пространства X называют *ограниченной* и пишут $x \in \mathrm{bd}\,(X)$, если найдется стандартное ограниченное множество, содержащее x.

5.1.15. ***Нестандартные критерии нормируемости.*** *Пусть X — (отделимое) локально выпуклое пространство. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *X нормируемо;*

(2) *$\mathrm{bd}\,(X) = \mathrm{ltd}(X)$;*

(3) *$\mu(X) \subset \mathrm{bd}\,(X)$.*

$\lhd$ (1) $\rightarrow$ (2): Ясно, что $\mathrm{bd}\,(X) \subset \mathrm{ltd}(X)$ без каких-либо гипотез об X. Если же X нормируемо, то $\mathrm{ltd}(X) = \{x \in X : \|x\| \in {}^{\approx}\mathbb{R}\}$, где $\|\cdot\|$ — подходящая норма. Тем самым $\mathrm{ltd}(X)$ лежит, например, в шаре $B_X := \{x \in X : \|x\| \le 1\}$.

(2) $\rightarrow$ (3): Поскольку $\mu(X)$ всегда лежит в $\mathrm{ltd}(X)$, то требуемое очевидно.

(3) $\rightarrow$ (1): Пусть U — бесконечно малая окрестность в X. Имеем по условию, что для каждого $x \in U$ найдется стандартное множество V такое, что V ограничено и $x \in V$. Тем самым на основании принципа идеализации U лежит в некотором ограниченном множестве. Остается сослаться на классический критерий Колмогорова. $\rhd$

5.1.16. Приведенное утверждение показывает, в частности, что в общем (ненормируемом) случае доступных точек в пространстве больше, чем ограниченных. В нормированном же пространстве X, конечно, $\mathrm{ltd}(X) = \mathrm{bd}\,(X)$.

5.2. Классические аппроксимирующие и регуляризирующие конусы

В негладком анализе ведется интенсивный поиск удобных способов локальной односторонней аппроксимации произвольных функций и множеств. Принципиальным исходным пунктом послужило данное Ф. Кларком определение субдифференциала липшицевой функции [112]. Построенные и изучаемые в этой связи касательные конусы и отвечающие им производные зачастую определяются громоздкими труднообозримыми формулами. Здесь мы применим нестандартный анализ в качестве техники «убивания кванторов» — сворачивания сложных формул. Оказывается, что в обычном предположении *стандартности антуража* — в случае стандартности свободных переменных (см. 4.1.9) — конусы Булигана, Кларка и Адамара и связанные с ними регуляризирующие конусы определяются ясными инфинитезимальными конструкциями — прямыми апелляциями к бесконечно близким точкам и направлениям.

5.2.1. Пусть X — вещественное векторное пространство. В этом пространстве наряду с фиксированной почти векторной топологией $\sigma := \sigma_X$ с фильтром окрестностей нуля $\mathscr{N}_\sigma := \sigma(0)$ выделим почти векторную топологию τ с фильтром $\mathscr{N}_\tau := \tau(0)$. Как обычно, введем отношение бесконечной близости, ассоциированное с соответствующей равномерностью: $x_1 \approx {}_\sigma x_2 \leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mu(\mathscr{N}_\sigma)$. Аналогичное правило действует для τ. Ниже, если явно не оговорено противное, σ считаем векторной топологией. При этом монаду фильтра окрестностей $\sigma(x)$ обозначаем $\mu(\sigma(x))$, а монаду $\mu(\sigma(0))$ — просто $\mu(\sigma)$.

5.2.2. Для фиксированных множеств F в X и точки x из X в субдифференциальном исчислении рассматривают, в частности, следующие *конусы Адамара, Кларка* и *Булигана*:

$$\operatorname{Ha}(F,x') := \bigcup_{\substack{U\in\sigma(x')\\ \alpha'}} \operatorname{int}_\tau \left(\bigcap_{\substack{x\in F\cap U\\ 0<\alpha\leq\alpha'}} \frac{F-x}{\alpha} \right);$$

$$\operatorname{Cl}(F,x') := \bigcap_{V\in\mathscr{N}_\tau} \bigcup_{\substack{U\in\sigma(x')\\ \alpha'}} \bigcap_{\substack{x\in F\cap U\\ 0<\alpha\leq\alpha'}} \left(\frac{F-x}{\alpha} + V \right);$$

$$\operatorname{Bo}(F,x') := \bigcap_{\substack{U\in\sigma(x')\\ \alpha'}} \operatorname{cl}_\tau \left(\bigcup_{\substack{x\in F\cap U\\ 0<\alpha\leq\alpha'}} \frac{F-x}{\alpha} \right),$$

где, как обычно, $\sigma(x') := x' + \mathscr{N}_\sigma$. Если $h \in \mathrm{Ha}(F, x')$, то иногда говорят, что F *эпилипшицево* в x' по отношению к h. Ясно, что

$$\mathrm{Ha}(F, x') \subset \mathrm{Cl}(F, x') \subset \mathrm{Bo}\,(F, x').$$

5.2.3. Выделяют также *гиперкасательный конус, конус допустимых направлений и контингенцию* F в точке x' соотношениями:

$$H(F, x') := \bigcup_{\substack{U \in \sigma(x') \\ \alpha'}} \bigcap_{\substack{x \in F \cap U \\ 0 < \alpha \le \alpha'}} \frac{F - x}{\alpha};$$

$$\mathrm{Fd}(F, x') := \bigcap_{\alpha' > 0} \frac{F - x'}{\alpha'};$$

$$K(F, x') := \bigcap_{\alpha'} \mathrm{cl}_\tau \left(\bigcup_{0 < \alpha \le \alpha'} \frac{F - x'}{\alpha} \right).$$

Для экономии слов удобно считать, что $x' \in F$. Например, можно без оговорок сказать, что конусы $H(F, x')$ и $K(F, x')$ — это соответственно конус Адамара и конус Булигана для случая, когда τ или σ — дискретная топология. Итак, ниже всегда $x' \in F$. При этом ради экономии места принимают следующие сокращения:

$$(\forall^\bullet x)\,\varphi := (\forall\, x \approx {}_\sigma x')\,\varphi := (\forall\, x)(x \in F \wedge x \approx {}_\sigma x') \to \varphi,$$
$$(\forall^\bullet h)\,\varphi := (\forall\, h \approx {}_\tau h')\,\varphi := (\forall\, h)(h \in X \wedge h \approx {}_\tau h') \to \varphi,$$
$$(\forall^\bullet \alpha)\,\varphi := (\forall\, \alpha \approx 0)\,\varphi := (\forall\, \alpha)((\alpha > 0 \wedge \alpha \approx 0) \to \varphi).$$

Двойственным образом определяют кванторы $\exists^\bullet x$, $\exists^\bullet h$, $\exists^\bullet \alpha$, т. е. считают

$$(\exists^\bullet x)\,\varphi := (\exists\, x \approx {}_\sigma x')\,\varphi := (\exists\, x)(x \in F \wedge x \approx {}_\sigma x') \wedge \varphi,$$
$$(\exists^\bullet h)\,\varphi := (\exists\, h \approx {}_\tau h')\,\varphi := (\exists\, h)(h \in X \wedge h \approx {}_\tau h') \wedge \varphi,$$
$$(\exists^\bullet \alpha)\,\varphi := (\exists\, \alpha \approx 0)\,\varphi := (\exists\, \alpha)(\alpha > 0 \wedge \alpha \approx 0) \wedge \varphi.$$

Установим, что упомянутые конусы определяются простыми инфинитезимальными конструкциями.

5.2.4. *Конус Булигана является стандартизацией* $\exists\exists\exists$*-конуса, т. е. для стандартного элемента* h' *выполняется*

$$h' \in \mathrm{Bo}\,(F, x') \leftrightarrow (\exists^{\bullet}\, x)(\exists^{\bullet}\, \alpha)(\exists^{\bullet} h)(x + \alpha h \in F).$$

$\lhd$ Из определения конуса Булигана следуют эквивалентности

$$\begin{gathered} h' \in \mathrm{Bo}\,(F, x') \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall\, U \in \sigma(x'))(\forall\, \alpha' \in \mathbb{R})(\forall\, V \in \mathscr{N}_\tau)(\exists\, x \in F \cap U) \\ (\exists\, 0 < \alpha \leq \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall\, U)(\forall\, \alpha')(\forall\, V)(\exists\, x)(\exists\, \alpha)(\exists\, h) \\ (x \in F \cap U \wedge h \in h' + V \wedge 0 < \alpha \leq \alpha' \wedge x + \alpha h \in F). \end{gathered}$$

В силу принципа переноса выводим

$$\begin{gathered} h' \in \mathrm{Bo}\,(F, x') \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} U)(\forall^{\mathrm{st}} \alpha')(\forall^{\mathrm{st}} V)(\exists^{\mathrm{st}} x)(\exists^{\mathrm{st}} \alpha)(\exists^{\mathrm{st}} h) \\ (x \in F \cap U \wedge h \in h' + V \wedge 0 < \alpha \leq \alpha' \wedge x + \alpha h \in F). \end{gathered}$$

Используя теперь принцип идеализации в слабой форме, получаем

$$\begin{gathered} h' \in \mathrm{Bo}\,(F, x') \to (\exists\, x)(\exists\, \alpha)(\exists\, h)(\forall^{\mathrm{st}} U)(\forall^{\mathrm{st}} \alpha')(\forall^{\mathrm{st}} V) \\ (x \in F \cap U \wedge h \in h' + V \wedge 0 < \alpha \leq \alpha' \wedge x + \alpha h \in F) \to \\ \to (\exists\, x \approx_\sigma x')(\exists\, \alpha \approx 0)(\exists\, h \approx_\tau h')(x + \alpha h \in F) \to \\ \to (\exists^{\bullet} x)(\exists^{\bullet} \alpha)(\exists^{\bullet} h)(x + \alpha h \in F). \end{gathered}$$

Пусть, в свою очередь, стандартный элемент h' входит в стандартизацию «$\exists\exists\exists$-конуса». Поскольку стандартные элементы стандартного фильтра содержат элементы монады этого фильтра, получаем

$$\begin{gathered} (\forall^{\mathrm{st}} U \in \sigma(x'))(\forall^{\mathrm{st}} \alpha' \in \mathbb{R})(\forall^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{N}_\tau) \\ (\exists\, x \in F \cap U)(\exists\, 0 < \alpha < \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F). \end{gathered}$$

В силу принципа переноса заключаем, что $h' \in \mathrm{Bo}\,(F, x')$. $\rhd$

5.2.5. Доказанное утверждение переписывается в виде

$$\mathrm{Bo}\,(F,x') = {}^*\{h' \in X : (\exists^\bullet\, x)(\exists^\bullet \alpha)(\exists^\bullet h)(x+\alpha h \in F)\},$$

где, как обычно, * — символ стандартизации. В этой связи используют образные обозначения:

$$\exists\exists\exists(F,x') := \mathrm{Bo}\,(F,x').$$

В дальнейшем подобного рода обозначения мы будем употреблять без особых оговорок.

5.2.6. *Конус Адамара — это стандартизация $\forall\forall\forall$-конуса:*

$$\mathrm{Ha}(F,x') = \forall\forall\forall(F,x').$$

Иначе говоря, для стандартных h', F и x' выполнено

$$h' \in \mathrm{Ha}(F,x') \leftrightarrow (x'+\mu(\sigma)) \cap F + \mu(\mathbb{R}_+)(h'+\mu(\tau)) \subset F,$$

где $\mu(\mathbb{R}_+)$ — внешнее множество положительных бесконечно малых чисел.

$\lhd$ Доказательство получается из соображений двойственности из 5.2.4, если (что, конечно же, корректно) забыть о наличии F в $\exists^\bullet x$. $\rhd$

5.2.7. Из уже установленного видны соотношения

$$h' \in H(F,x') \leftrightarrow (\forall^\bullet x)(\forall^\bullet \alpha)(x+\alpha h' \in F),$$
$$h' \in K(F,x') \leftrightarrow (\exists^\bullet \alpha)(\exists^\bullet\, h)(x'+\alpha h \in F).$$

5.2.8. *Для стандартных F, x', h' (в условиях слабой идеализации) эквивалентны утверждения:*

(1) $h' \in \mathrm{Cl}(F,x')$;

(2) *существуют бесконечно малые $U \in \sigma(x')$, $V \in \mathscr{N}_\tau$ и $\alpha' > 0$ такие, что*

$$h' \in \bigcap_{\substack{0<\alpha\le\alpha' \\ x\in F\cap U}} \left(\frac{F-x}{\alpha} + V\right);$$

(3) $(\exists\, U \in \sigma(x'))(\exists\, \alpha')\,(\forall\, x \in F\cap U)(\forall\, 0<\alpha\le\alpha')$ $(\exists\, h \approx{}_\tau h')\ x+\alpha h \in F$.

◁ Используя очевидные сокращения, можно записать

$$
\begin{gathered}
h' \in \mathrm{Cl}(F, x') \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists\, V)(\exists\, U)(\exists\, \alpha')(\forall\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \le \alpha')(\exists\, h \in h' + V) \\
x + \alpha h \in F.
\end{gathered}
$$

Привлекая принцип переноса и слабую идеализацию, имеем последовательно

$$
\begin{gathered}
h \in \mathrm{Cl}(F, x') \to (\forall^{\mathrm{st}} V)(\exists^{\mathrm{st}} U)(\exists^{\mathrm{st}} \alpha')(\forall\, x \in F \cap V) \\
(\forall\, 0 < \alpha \le \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F) \to \\
\to (\forall^{\mathrm{st}} \{V_1, \dots, V_n\})(\exists^{\mathrm{st}} U)(\exists^{\mathrm{st}} \alpha')(\exists^{\mathrm{st}} V)(\forall\, k := 1, \dots, n) \\
V_k \supset V \wedge (\forall\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \le \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F) \to \\
\to (\exists\, U)(\exists\, \alpha')(\exists\, V)(\forall^{\mathrm{st}} V')\, V' \supset V \wedge (\forall\, x \in F \cap U) \\
(\forall\, 0 < \alpha \le \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F).
\end{gathered}
$$

Отсюда, без сомнения, следует, что для некоторых $V \in \mathscr{N}_\tau$, $V \subset \mu(\tau)$ и $U \in \sigma(x')$, $U \subset \mu(\sigma) + x'$ и бесконечно малого α будет (2) и, тем более, (3).

Если, в свою очередь, выполнено (3), то с учетом определения отношения $\approx_\tau$ будет

$$
\begin{gathered}
(\forall^{\mathrm{st}} V)(\exists\, U)(\exists\, \alpha')(\forall\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \le \alpha')(\exists\, h \in h' + V) \\
x + \alpha h \in F.
\end{gathered}
$$

Значит, по принципу переноса $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$. ▷

5.2.9. *Конус Кларка (в условиях сильной идеализации) является стандартизацией $\forall\forall\exists$-конуса:*

$$\mathrm{Cl}(F, x') = {}^{*}\forall\forall\exists(F, x').$$

Иными словами,

$$h' \in \mathrm{Cl}(F, x') \leftrightarrow (\forall^{\bullet} x)(\forall^{\bullet} \alpha)(\exists^{\bullet} h)(x + \alpha h \in F).$$

◁ Пусть сначала $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$. Возьмем произвольные $x \approx_\sigma x'$ и $\alpha > 0$, $\alpha \approx 0$. Для каждой стандартной окрестности V — элемента фильтра $\mathscr{N}_\tau$ — в силу принципа переноса найдется элемент h, для которого $h \in h' + V$ и $x + \alpha h \in F$. Применяя сильную идеализацию, имеем

$$\begin{gathered}(\forall^{\mathrm{st}} V)(\exists\, h)(h \in h' + V \wedge x + \alpha h \in F) \to \\ \to (\exists\, h)(\forall^{\mathrm{st}} V)(h \in h' + V \wedge x + \alpha h \in F) \to \\ \to (\exists^{\bullet} h)(x + \alpha h \in F),\end{gathered}$$

т. е. $h' \in \forall\forall\exists(F, x')$.

Пусть теперь $h' \in \forall\forall\exists(F, x')$. Возьмем произвольную стандартную окрестность V из фильтра $\mathscr{N}_\tau$. Фиксируем бесконечно малую окрестность U точки x' и положительное бесконечно малое число α'. Тогда по условию для некоторого $h \approx_\tau h'$ будет

$$(\exists\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \le \alpha')(x + \alpha h \in F).$$

Иными словами,

$$\begin{gathered}(\forall^{\mathrm{st}} V)(\exists\, U)(\exists\, \alpha')(\forall\, x \in F \cap U)(\forall\, 0 < \alpha \le \alpha')(\exists\, h \in h' + V) \\ (x + \alpha h \in F).\end{gathered}$$

В силу принципа переноса $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$. $\triangleright$

5.2.10. Приведем пример применения найденного нестандартного критерия элементов конуса Кларка для вывода его основного (и хорошо известного) свойства. Более общее утверждение будет установлено ниже.

5.2.11. *Конус Кларка произвольного множества в топологическом векторном пространстве является выпуклым и замкнутым.*

$\triangleleft$ В силу принципа переноса достаточно рассмотреть ситуацию, в которой параметры — пространство, топология, множество и т. п. — стандартны. Итак, пусть $h_0 \in \mathrm{cl}_\tau(\mathrm{Cl}(F, x'))$. Возьмем стандартную окрестность V из $\mathscr{N}_\tau$, и пусть стандартные элементы $V_1, V_2 \in \mathscr{N}_\tau$ таковы, что $V_1 + V_2 \subset V$. Найдется стандартный элемент $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$ такой, что $h' - h_0 \in V'$. Кроме того, для любых $x \approx_\tau x'$ и $\alpha > 0$, $\alpha \approx 0$ для некоторого h будет $h \in h' + V_2$ и $x + \alpha h \in F$. Ясно, что $h \in h' + V_2 \subset h_0 + V_1 + V_2 \subset h_0 + V$. Отсюда следует, что $h_0 \in \mathrm{Cl}(F, x')$.

Для доказательства выпуклости конуса Кларка достаточно заметить, что $\mu(\tau) + \mu(\mathbb{R}_+)\mu(\tau) \subset \mu(\tau)$ ввиду непрерывности отображения $(x, \alpha, h) \mapsto x + \alpha h$. $\triangleright$

5.2.12. *Пусть θ — векторная топология и $\theta \geq \tau$. Тогда*

$$\forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta(F), x') \subset \forall\forall\exists(F, x').$$

Если к тому же $\theta \geq \sigma$, то

$$\forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta(F), x') = \forall\forall\exists(F, x').$$

$\lhd$ Пусть $h' \in \forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta(F), x')$ — некоторый стандартный элемент названного конуса. Возьмем элементы $x \in F$ и $\alpha > 0$ такие, что $x \approx_\sigma x'$ и $\alpha \approx 0$. Ясно, что $x \in \mathrm{cl}_\theta(F)$. Значит, для некоторого $h \in {}_\tau h'$ будет $x + \alpha h \in \mathrm{cl}_\theta(F)$. Возьмем бесконечно малую окрестность W из $\mu(\theta)$. Окрестность αW — также элемент $\theta(0)$ и, стало быть, для некоторого $x'' \in F$ будет $x'' - (x + \alpha h) \in \alpha W$. Положим $h'' := (x'' - x)/\alpha$. Ясно, что $x + \alpha h'' \in F$ и, кроме того, $\alpha h'' \in \alpha h + \alpha W$. Отсюда $h'' \in h + W \subset h' + \mu(\tau) + W \subset h' + \mu(\tau) + \mu(\theta) \subset h' + \mu(\tau) + \mu(\tau) \subset h' + \mu(\tau)$, т. е. $h'' \approx_\tau h'$. Итак, $h' \in \forall\forall\exists(F, x')$.

Пусть теперь $\theta \geq \sigma$ и $h' \in \forall\forall\exists(F, x')$. Возьмем положительное бесконечно малое α и какой-нибудь элемент $x \in \mathrm{cl}_\theta(F)$ такой, что $x \approx_\sigma x'$. Подберем $x'' \in F$, для которого $x - x'' \in \alpha W$, где $W \subset \mu(\theta)$ — бесконечно малая симметричная окрестность нуля в θ. Поскольку $\theta \geq \sigma$, то $\mu(\theta) \subset \mu(\tau)$, т. е. $x - x'' \in \mu(\theta) \subset \mu(\sigma)$. Иначе говоря, $x \approx_\sigma x' \approx_\sigma x''$. По определению (элемент h', как обычно, считается стандартным) для некоторого $h \approx_\tau h'$ будет $x'' + \alpha h \in F$. Положим $h'' := (x'' - x)/\alpha + h$. Ясно, что при этом выполнено

$$\begin{gathered} h'' \in h + W \subset h + \mu(\theta) \subset h' + \mu(\theta) + \mu(\tau) \subset \\ \subset h' + \mu(\tau) + \mu(\tau) \subset h' + \mu(\tau), \end{gathered}$$

т. е. $h'' \approx_\tau h'$. Кроме того,

$$x + \alpha h'' = x + (x'' - x) + \alpha h = x'' + \alpha h \in F \subset \mathrm{cl}_\theta(F).$$

Окончательно $h' \in \forall\forall\exists(\mathrm{cl}_\theta(F), x')$. $\rhd$

5.2.13. Из найденных представлений, в частности, видно:

$$\mathrm{Ha}(F, x') \subset H(F, x') \subset \mathrm{Cl}(F, x') \subset K(F, x') \subset \mathrm{cl}_\tau(\mathrm{Fd}(F, x')).$$

При условии $\sigma = \tau$ для выпуклого F будет

$$\mathrm{Fd}(F, x') \subset \mathrm{Cl}(F, x') \subset \mathrm{cl}(\mathrm{Fd}(F, x')),$$

т. е.

$$\mathrm{Cl}(F, x') = K(F, x') = \mathrm{cl}(\mathrm{Fd}(F, x')).$$

5.2.14. Приведенные нестандартные критерии конусов Булигана, Адамара и Кларка показывают, что эти конусы взяты из перечня восьми возможных конусов с инфинитезимальной приставкой $(Q^\bullet x)\,(Q^\bullet \alpha)\,(Q^\bullet h)$ (здесь Q — либо $\forall$, либо $\exists$). Ясно, что для полного описания всех этих конусов достаточно привести характеризации $\forall\exists\exists$-конуса и $\forall\exists\forall$-конуса.

5.2.15. *Имеет место представление*

$$\forall\exists\exists(F, x') = \bigcap_{\substack{\alpha' \\ V \in \mathscr{N}_\tau}} \ \bigcup_{U \in \sigma(x')} \ \bigcap_{x \in F \cap U} \left(V + \bigcup_{0 < \alpha \leq \alpha'} \frac{F - x}{\alpha} \right).$$

$\triangleleft$ Для доказательства следует сначала понять, что требуемое равенство — сокращенная запись утверждения: для стандартных h', F, x' выполнено:

$$\begin{gathered}(\forall^\bullet x)(\exists^\bullet \alpha)(\exists^\bullet h)(x + \alpha h \in F) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall\, V \in \mathscr{N}_\tau)(\forall\, \alpha')(\exists\, U \in \sigma(x'))(\forall\, x \in F \cap U) \\ (\exists\, 0 < \alpha \leq \alpha')(\exists\, h \in h' + V)(x + \alpha h \in F).\end{gathered}$$

Значит, при $h' \in \forall\exists\exists(F, x')$ и стандартных $V \in \mathscr{N}_\tau$ и $\alpha > 0$ в качестве требуемой окрестности U можно взять внутреннее подмножество монады $\mu(\sigma(x'))$. В свою очередь, последовательное применение принципов переноса и сильной идеализации дает

$$\begin{gathered}(\forall^{\mathrm{st}} V)(\forall^{\mathrm{st}} \alpha')(\forall x \approx_\sigma x')(\exists 0 < \alpha \leq \alpha')(\exists h \in h' + V)\, x + \alpha h \in F \to \\ \to (\forall\, x \approx_\sigma x')(\forall^{\mathrm{st}} \{V_1, \dots, V_n\})(\forall^{\mathrm{st}} \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}) \\ (\exists h)(\exists \alpha)(\forall\, k := 1, \dots, n)(0 < \alpha \leq \alpha'_k \wedge h \in h' + V_k \wedge x + \alpha h \in F) \to \\ \to (\forall x \approx_\sigma x')(\exists h)(\exists \alpha)(\forall^{\mathrm{st}} V)(h \in h' + V) \wedge (\forall^{\mathrm{st}} \alpha') \\ (0 < \alpha \leq \alpha' \wedge x + \alpha h \in F) \to (\forall^\bullet\, x)(\exists^\bullet h)(\exists\, \alpha \approx 0)\, x + \alpha h \in F \to \\ \to h' \in {}^*\{h' : (\forall^\bullet x)(\exists^\bullet \alpha)(\exists^\bullet h)(x + \alpha h \in F)\} \to h' \in \forall\exists\exists(F, x').\end{gathered}$$

Тем самым доказательство закончено. $\triangleright$

5.2.16. Помимо указанных выше восьми инфинитезимальных конусов классического ряда имеются еще девять пар конусов, содержащих конус Адамара и лежащих в конусе Булигана. Такие конусы, понятно, порождаются изменением порядка кванторов. Пять новых пар устроены сложным образом по типу $\forall\exists\forall$-конуса. Прочие порождаются перестановками и дуализациями конуса Кларка и $\forall\exists\exists$-конуса. Например, в естественных образных обозначениях имеем

$$\forall\forall\exists(F,x') = \bigcap_{U\in\sigma(x')} \bigcup_{\alpha'} \operatorname{int}_\tau \left(\bigcap_{0<\alpha\leq\alpha'} \bigcup_{x\in F\cap U} \frac{F-x}{\alpha} \right),$$

$$\exists\exists\forall(F,x') = \bigcup_{\alpha'} \bigcap_{U\in\sigma(x')} \operatorname{cl}_\tau \left(\bigcup_{x\in F\cap U} \bigcap_{0<\alpha\leq\alpha'} \frac{F-x}{\alpha} \right),$$

$$\exists\forall\forall(F,x') = \bigcap_{\substack{U\in\sigma(x')\\ \alpha'}} \operatorname{cl}_\tau \left(\bigcap_{\substack{0<\alpha\leq\alpha'\\ x\in F\cap U}} \frac{F-x}{\alpha} \right).$$

Последний конус у́же конуса Кларка и является выпуклым в случае, если $\mu(\sigma)+\mu(\mathbb{R}_+)\mu(\tau)\subset\mu(\sigma)$. Его обозначают $\mathrm{Ha}^+(F,x')$. Отметим, что

$$\mathrm{Ha}(F,x')\subset\mathrm{Ha}^+(F,x')\subset\mathrm{Cl}(F,x').$$

Выпуклым является $\forall\,\alpha\exists\,h\forall\,x$-конус, который обозначают символом $\mathrm{In}(F,x')$. Ясно, что

$$\mathrm{Ha}^+(F,x')\subset\mathrm{In}(F,x')\subset\mathrm{Cl}(F,x').$$

5.2.17. При вычислении касательных к композиции соответствий используют специальные *регуляризирующие конусы.*

Именно, если $F\subset X\times Y$, где векторные пространства X и Y снабжены топологиями σ_X, τ_X и σ_Y, τ_Y соответственно и $a':=(x',y')\in F$, полагают $\sigma:=\sigma_X\times\sigma_Y$ и

$$R^1(F,a') := \bigcap_{V\in\mathscr{N}_{\tau_Y}} \bigcup_{\substack{W\in\sigma(\alpha')\\ \alpha'}} \bigcup_{\substack{a\in W\cap F\\ 0<\alpha\leq\alpha}} \left(\frac{F-a}{\alpha} + \{0\}\times V \right),$$

$$Q^1(F,a') := \bigcap_{V\in\mathscr{N}_{\tau_Y}} \bigcup_{\substack{W\in\sigma(a')\\ \alpha'\\ U\in\mathscr{N}_\sigma}} \bigcap_{\substack{a\in W\subset F\\ 0<\alpha\leq\alpha'\\ x\in U}} \left(\frac{F-x}{\alpha} + \{x\}\times V\right),$$

$$QR^2(F,a') := \bigcup_{\substack{W\in\sigma(a')\\ \alpha'\\ U\in\mathscr{N}_\sigma}} \bigcap_{\substack{a\in W\cap F\\ 0<\alpha\leq\alpha'\\ x\in U}} \left(\frac{F-x}{\alpha} + (x,0)\right).$$

Конусы $R^2(F,a')$, $Q^2(F,a')$ и $QR^1(F,a')$ определяют двойственным образом. Более того, аналогичные обозначения распространяют на случай произведений пространств в числе, большем двух, подразумевая, что верхний индекс над символом аппроксимирующего множества указывает номер координаты, на которую накладывается условие соответствующего типа. Отметим также, что в приложениях обычно рассматривают попарно совпадающие топологии: $\sigma_X = \tau_X$ и $\sigma_Y = \tau_Y$. Дадим удобные очевидные нестандартные критерии описанных регуляризирующих конусов.

5.2.18. *Для стандартных векторов $s' \in X$ и $t' \in Y$ выполнено:*

$$(s',t') \in R^1(F,a') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, a \approx_\sigma a', a \in F)(\forall\, \alpha \in \mu(\mathbb{R}_+))(\exists\, t \approx_{\tau_Y} t')(a + \alpha(s',t) \in F);$$
$$(s',t') \in Q^1(F,a') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall a \approx_\sigma a', a \in F)(\forall \alpha \in \mu(\mathbb{R}_+))(\forall s \approx \tau_X s')(\exists t \approx_{\tau_Y} t')(a + \alpha(s,t) \in F);$$
$$(s',t') \in QR^2(F,a') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, a \approx_\sigma a', a \in F)(\forall\, \alpha \in \mu(\mathbb{R}_+))(\forall\, s \approx_{\tau_X} s')(a + \alpha(s,t') \in F).$$

5.2.19. Из 5.2.18 видно, что конусы типа QR^j — разновидности конуса Адамара, конусы R^j — разновидности конуса Кларка. Конусы R^j при этом получаются также специализацией конусов типа Q^j при соответствующем подборе дискретных топологий. В обычных предположениях названные конусы являются выпуклыми. Приведем доказательство указанного факта только для конуса Q^j, чего в силу уже отмеченного вполне достаточно.

5.2.20. *Если отображение $(a,\alpha,b) \mapsto a+\alpha b$ непрерывно как действующее из $(X \times Y, \sigma) \times (\mathbb{R}, \tau_\mathbb{R}) \times (X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$ в $(X \times Y, \sigma)$, то конусы $Q^j(F,a')$ для $j := 1, 2$ выпуклые.*

$\lhd$ По принципу переноса можно работать в стандартном антураже, т. е. в предположении стандартности рассматриваемых параметров, и пользоваться критерием 5.2.18. Итак, пусть (s', t') и (s'', t'') лежат в $Q^1(F, x')$. Для $a \approx_\sigma a'$ и $a \in F$, положительного $\alpha \approx 0$ и $s \approx_{\tau_X} (s' + s'')$ в силу 5.2.18 при некотором $t_1 \approx_{\tau_Y} t'$ будет $a_1 := a + \alpha(s - s'', t_1) \in F$. По условию $\mu(\sigma) + \alpha(\mu(\tau_X) \times \mu(\tau_Y)) \subset \mu(\sigma)$. Стало быть, $a_1 \approx_\sigma a$ и $a_1 \in F$. Вновь привлекая 5.2.18, найдем $t_2 \approx_{\tau_Y} t''$, для которого $a_1 + \alpha(s'', t_2) \in F$. Ясно, что для $t := t_1 + t_2$ будет $t \approx_{\tau_Y} (t' + t'')$ и $a + \alpha(s, t) = a + \alpha(s - s'', t_1) + \alpha(s'', t_2) = a_1 + \alpha(s'', t_2) \in F$, что и требовалось доказать, ибо однородность $Q^1(F, a')$ обеспечена устойчивостью монад почти векторных топологий относительно умножений на стандартные скаляры (см. 5.1.4). $\rhd$

5.2.21. Проведенный анализ показывает, что имеет смысл ввести в рассмотрение конусы P^j и S^j с помощью следующих прямых стандартизаций:

$$(s', t') \in P^2(F, a') \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, s \approx_{\tau_X} s')(\forall\, t \approx_{\tau_Y} t')(\forall\, a \approx_\sigma a', a \in F)(\forall\, \alpha \in \mu(\mathbb{R}_+))$$
$$(a + \alpha(s, t) \in F);$$
$$(s', t') \in S^2(F, a) \leftrightarrow (\forall\, t \approx_{\tau_Y} t')(\exists\, s \approx_{\tau_X} s')(\forall\, a \approx_\sigma a', a \in F)$$
$$(\forall\, \alpha \in \mu(\mathbb{R}_+))(a + \alpha(s, t) \in F).$$

Явный вид конусов P^j и S^j можно в принципе выписать (мы разберем этот конус в следующем параграфе). Однако от возникающих явных формул (особенно для S^j) мало пользы ввиду их необозримой громоздкости. Впрочем, как мы уже убедились, подобные формулы фактически осложняют анализ, скрывая прозрачный «инфинитезимальный» смысл конструкций.

5.2.22. *Для* $j := 1, 2$ *выполнено*

$$\mathrm{Ha}(F, a') \subset P^j(F, a') \subset S^j(F, a') \subset Q^j(F, a') \subset R^j(F, a') \subset \mathrm{Cl}(F, a').$$

При этом названные конусы выпуклы, как только $\mu(\sigma) + \alpha(\mu(\tau_X) \times \mu(\tau_Y)) \subset \mu(\sigma)$ *для всех* $\alpha > 0$, $\alpha \approx 0$.

$\lhd$ Включения, которые требуется доказать, очевидны из нестандартных определений соответствующих конусов. Выпуклость большинства из указанных конусов уже отмечалась. Установим для полноты выпуклость $S^2(F, a')$.

То, что $S^2(F, a')$ выдерживает умножение на положительные стандартные скаляры, вытекает из неделимости монады. Проверим, что $S^2(F, a')$ — полугруппа. Итак, для стандартных (s', t') и (s'', t'') из $S^2(F, a')$ возьмем $t \approx_{\tau_Y} (t' + t'')$. Тогда $t - t'' \approx_{\tau_Y} t'$ и имеется $s_1 \approx_{\tau_X} s'$, обслуживающее $t - t''$ в соответствии с определением $S^2(F, a')$. Подберем $s_2 \approx_{\tau_X} s''$, обслуживающее t'' в том же очевидном смысле. Ясно, что $(s_1 + s_2) \approx_{\tau_X} (s' + s'')$. При этом для всяких $a \in F$ и $\alpha > 0$ таких, что $a \approx_{\sigma} a'$ и $\alpha \approx 0$, будет $a_1 := a + \alpha(s_1, t - t'') \in F$. Поскольку a_1, как видно, бесконечно близко (в смысле σ) к a', из условия выбора s_2 заключаем: $a_1 + \alpha(s_2, t'') \in F$. Отсюда непосредственно видно, что $a + \alpha(s_1 + s_2, t) \in F$, т. е. $(s' + s'', t' + t'') \in S^2(F, a')$.

Выпуклость $P^j(F, a')$ проверяется аналогичным прямым рассуждением. $\triangleright$

5.2.23. Из доказательства 5.2.22 видно, что можно рассматривать выпуклые расширения конусов P^j и S^j — конусы P^{+j} и S^{+j}, получающиеся «переносом квантора $\forall\,\alpha$». Например, определяют конус $P^{+2}(F, a')$ соотношением

$$(s', t') \in P^{+2}(F, a') \leftrightarrow (\forall\,\alpha \in \mu(\mathbb{R}_+))(\exists\, s \approx_{\tau_X} s')(\forall\, t \approx_{\tau_Y} t')$$
$$(\forall\, a \approx_{\sigma} a', a \in F)(a + \alpha(s, t) \in F).$$

В связи с 5.2.19 ясно, что имеет смысл использовать и регуляризации, получающиеся специализацией конуса Ha^+ при подборе дискретных топологий. Соответствующие явные формулы опускаются. Значение регуляризирующих конусов связано с их ролью при субдифференцировании сложных отображений, которым посвящен пункт 5.5.

5.3. Пределы по Куратовскому и Рокафеллару

В предыдущем параграфе мы увидели, что многие интересующие нас конструкции связаны с процедурой чередования кванторов в инфинитезимальных конструкциях. Подобные образования возникают в различных задачах и соотнесены с некоторыми принципиальными фактами. О тех из них, которые наиболее часто встречаются при субдифференцировании, и пойдет сейчас речь. Начнем с общих наблюдений об алгоритме Нельсона.

5.3.1. *Пусть* $\varphi = \varphi(x, y) \in (\mathrm{ZFC})$, *т. е.* φ — *некоторая формула теории Цермело — Френкеля, не содержащая никаких свободных переменных, кроме* x, y. *Тогда*

$$(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, \varphi(x, y) \leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\forall\, x \in F)\, \varphi(x, y),$$
$$(\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, \varphi(x, y) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\exists\, x \in F)\, \varphi(x, y),$$

где, как обычно, $\mu(\mathscr{F})$ — *монада стандартного фильтра* $\mathscr{F}$.

$\lhd$ Достаточно доказать импликацию $\to$: в первой из эквивалентностей. По условию для любого удаленного элемента F фильтра $\mathscr{F}$ выполнено внутреннее свойство $\psi := (\forall\, x \in F)\, \varphi(x, y)$. Значит, по принципу Коши ψ справедливо для какого-либо стандартного F. $\rhd$

5.3.2. *Пусть* $\varphi = \varphi(x, y, z) \in (\mathrm{ZFC})$ *и* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — *некоторые стандартные фильтры (в каких-либо стандартных множествах). Тогда*

$$(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))\, \varphi(x, y, z) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\exists^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\forall\, x \in F)(\exists\, y \in G)\, \varphi(x, y, z) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} F(\,\cdot\,))(\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\forall\, x \in F(G))(\exists\, y \in G)\, \varphi(x, y, z),$$
$$(\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall\, y \in \mu(\mathscr{G}))\, \varphi(x, y, z) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\exists\, x \in F)(\forall\, y \in G)\, \varphi(x, y, z) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} F(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\exists\, x \in F(G))(\forall\, y \in G)\, \varphi(x, y, z)$$

(здесь символ $F(\,\cdot\,)$ *обозначает функцию из* $\mathscr{G}$ *в* $\mathscr{F}$*).*

$\lhd$ Доказательство состоит в апелляции к принципам идеализации и конструирования с учетом 5.3.1. $\rhd$

5.3.3. *Пусть* $\varphi = \varphi(x, y, z, u) \in (\mathrm{ZFC})$ *и* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ — *три стандартных фильтра. Если* u — *стандартное множество, то выполнены соотношения:*

$$(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))(\forall\, z \in \mu(\mathscr{H}))\, \varphi(x, y, z, u) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, G(\,\cdot\,))(\exists\, F \in \mathscr{F})(\exists^{\mathrm{fin}} \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H})(\forall\, x \in \mathscr{F})$$
$$(\exists\, H \in \mathscr{H}_0)(\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi(x, y, z, u);$$
$$(\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall\, y \in \mu(\mathscr{G}))(\exists\, z \in \mu(\mathscr{H}))\, \varphi(x, y, z, u) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, G(\,\cdot\,))(\forall\, F \in \mathscr{F})(\forall^{\mathrm{fin}} \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H})(\exists\, x \in F)$$
$$(\forall\, H \in \mathscr{H}_0)(\forall\, y \in G(H))(\exists\, z \in H)\, \varphi(x, y, z, u),$$

где $G(\,\cdot\,)$ — *функция из* $\mathscr{H}$ *в* $\mathscr{G}$.

$\lhd$ Реализуя алгоритм Нельсона, выводим:

$$
\begin{gathered}
(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))(\forall\, z \in \mu(\mathscr{H}))\, \varphi \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} G(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st}} H \in \mathscr{H})(\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G(\,\cdot\,))(\forall\, x)(\exists^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})(\exists^{\mathrm{st}} H \in \mathscr{H}) \\
(x \in F \to (\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{F}_0)(\exists^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{H}_0)(\forall\, x)(\exists\, F \in \mathscr{F}_0)(\exists\, H \in \mathscr{H}_0) \\
(F \in \mathscr{F} \wedge H \in \mathscr{H} \wedge (x \in F \to (\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H})(\forall\, x)(\exists\, F \in \mathscr{F}_0) \\
(x \in F \to (\exists\, H \in \mathscr{H}_0)(\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, G(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists^{\mathrm{fin}} \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H})(\forall\, x) \\
((\forall\, F \in \mathscr{F}_0)(x \in F) \to (\exists\, H \in \mathscr{H}_0)(\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, G(\,\cdot\,))(\exists^{\mathrm{fin}} \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F})(\exists^{\mathrm{fin}} \mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H})(\forall\, x \in \textstyle\bigcap \mathscr{F}_0) \\
(\exists\, H \in \mathscr{H}_0)(\exists\, y \in G(H))(\forall\, z \in H)\, \varphi.
\end{gathered}
$$

Остается заметить, что для конечного множества $\mathscr{F}_0$, содержащегося в $\mathscr{F}$, обязательно $\bigcap \mathscr{F}_0 \in \mathscr{F}$. $\rhd$

5.3.4. Приведенное предложение дает возможность охарактеризовать в явном виде $\forall\exists\forall$-конусы и им подобные образования. Легко видеть, что возникающие стандартные описания неудобоваримы. Остановимся теперь на наиболее важных для приложений конструкциях, связанных с приставками типа $\forall\exists$, $\forall\forall$, $\exists\forall$ и $\exists\exists$. Начнем с некоторых средств, позволяющих использовать распространенный язык бесконечно малых переменных величин для анализа таких конструкций.

5.3.5. Пусть Ξ — *направление*, т. е. непустое направленное множество. В соответствии с принципом идеализации в Ξ имеются внутренние элементы, мажорирующие ${}^\circ\Xi$. Напомним (см. 4.1.6 (3)), что их называют *удаленными* или *бесконечно большими* в Ξ. Рассмотрим стандартный базис фильтра хвостов $\mathscr{B} := \{\sigma(\xi) : \xi \in \Xi\}$, где σ — порядок в Ξ. Ясно, что монада фильтра хвостов составлена из удаленных элементов рассматриваемого направления. Используют записи: ${}^a\Xi := \mu(\mathscr{B})$ и $\xi \approx +\infty \leftrightarrow \xi \in {}^a\Xi$.

5.3.6. *Пусть* Ξ, H — *два направления и* $\xi := \xi(\,\cdot\,) : \mathrm{H} \to \Xi$ — *некоторое отображение. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $\xi({}^a\mathrm{H}) \subset {}^a\Xi$;

(2) $(\forall\, \xi \in \Xi)(\exists\, \eta \in \mathrm{H})(\forall\, \eta' \geq \eta)(\xi(\eta') \geq \xi)$.

$\lhd$ В самом деле, (1) означает, что фильтр хвостов Ξ грубее образа фильтра хвостов H, т. е. что в каждом хвосте направления Ξ лежит образ некоторого хвоста H. Последнее утверждение и составляет содержание (2). $\rhd$

5.3.7. В случае выполнения эквивалентных условий 5.3.6 (1), 5.3.6 (2) говорят, что H — *поднаправление* Ξ (относительно $\xi(\,\cdot\,)$).

5.3.8. Пусть X — некоторое множество и $x := x(\,\cdot\,) : \Xi \to X$ — некоторая сеть элементов X (пишем также $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ или просто (x_ξ)). Пусть, далее, $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ — еще одна сеть элементов X. Говорят, что (y_η) — *подсеть Мура* сети (x_ξ) или *строгая подсеть* (x_ξ), если H является поднаправлением Ξ относительно такого $\xi(\,\cdot\,)$, что $y_\eta = x_{\xi(\eta)}$ при всех $\eta \in \mathrm{H}$, т. е. $y = x \circ \xi$. Подчеркнем, что в силу 4.1.6 (5) выполнено $y({}^a\mathrm{H}) \subset x({}^a\Xi)$.

5.3.9. Последнее указанное свойство подсетей Мура кладут в основу более свободного определения подсети, которое привлекает непосредственной связью с фильтрами. Именно, сеть $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ элементов X называют *подсетью* (или *подсетью в широком смысле слова*) сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов X, если

$$(\forall\, \xi \in \Xi)(\exists\, \eta \in \mathrm{H})(\forall\, \eta' \geq \eta)(\forall\, \xi' \geq \xi)(x(\xi') = y(\eta')),$$

т. е. в случае, когда каждый хвост сети x содержит некоторый хвост y. На языке монад, разумеется, выполнено $y({}^a\mathrm{H}) \subset x({}^a\Xi)$ или, в наглядной записи:

$$(\forall\, \eta \approx +\infty)(\exists\, \xi \approx +\infty)(y_\eta = x_\xi).$$

При этом, стремясь к образности, часто пишут $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ — подсеть сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ (что может привести к недоразумениям). Полезно подчеркнуть, что в общем случае подсети не обязаны являться подсетями Мура. Отметим также, что две сети в одном множестве называют *эквивалентными*, если каждая из них — подсеть другой, т. е. если их монады совпадают.

5.3.10. Если $\mathscr{F}$ — фильтр в X и (x_ξ) — сеть элементов X, то говорят, что рассматриваемая *сеть подчинена* $\mathscr{F}$ при условии: $\xi \approx +\infty \to x_\xi \in \mu(\mathscr{F})$. Иначе говоря, сеть (x_ξ) подчинена $\mathscr{F}$, если фильтр ее хвостов тоньше $\mathscr{F}$. При этом допускают вольность и пишут $x_\xi \downarrow \mathscr{F}$, имея в виду аналогию с топологическими обозначениями сходимости. Отметим здесь же, что в случае, когда $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, $\mathscr{F}$ совпадает с фильтром хвостов любой подчиненной ему сети (x_ξ), т. е. сама такая сеть (x_ξ) — *ультрасеть*.

5.3.11. ***Теорема.*** *Пусть $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — формула теории Цермело — Френкеля, не содержащая никаких свободных параметров, кроме x, y, z, причем z — стандартное множество. Пусть, далее, $\mathscr{F}$ — фильтр в X, а $\mathscr{G}$ — фильтр в Y. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $(\forall\, G \in \mathscr{G})(\exists\, F \in \mathscr{F})(\forall\, x \in F)(\exists\, y \in G)\, \varphi(x, y, z)$;

(2) $(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))\, \varphi(x, y, z)$;

(3) *для любой сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов X, подчиненной $\mathscr{F}$, найдутся сеть $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ элементов Y, подчиненная $\mathscr{G}$, и строгая подсеть $(x_{\xi(\eta)})_{\eta\in\mathrm{H}}$ сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ такие, что при всех $\eta \in \mathrm{H}$ будет $\varphi(x_{\xi(\eta)}, y_\eta, z)$, т. е. символически*

$$(\forall\, x_\xi \downarrow \mathscr{F})(\exists\, y_\eta \downarrow \mathscr{G})\, \varphi(x_{\xi(\eta)}, y_\eta, z);$$

(4) *для любой сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов X, подчиненной $\mathscr{F}$, найдутся сеть $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ элементов Y, подчиненная $\mathscr{G}$, и подсеть $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ такие, что при всех $\eta \in \mathrm{H}$ будет $\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$, т. е. символически*

$$(\forall\, x_\xi \downarrow \mathscr{F})(\exists\, y_\eta \downarrow \mathscr{G})\, \varphi(x_\eta, y_\eta, z);$$

(5) *для любой ультрасети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов X, подчиненной $\mathscr{F}$, найдутся ультрасеть $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$, подчиненная $\mathscr{G}$, и ультрасеть $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$, эквивалентная $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$, такие, что $\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$ при всех $\eta \in \mathrm{H}$.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Пусть $x \in \mu(\mathscr{F})$. По принципу переноса для каждого стандартного G имеется стандартное F такое, что $(\forall\, x \in F)$ $(\exists\, y \in G)$ $\varphi(x, y, z)$. Значит, для $x \in \mu(\mathscr{F})$ будет $(\forall\, G \in {}^\circ\mathscr{G})(\exists\, y \in G)$ $\varphi(x, y, z)$. Привлекая принцип идеализации, выводим: $(\exists\, y)(\forall\, G \in {}^\circ\mathscr{G})(y \in G \wedge \varphi(x, y, z))$. Итак, $y \in \mu(\mathscr{G})$ и $\varphi(x, y, z)$.

(2) $\to$ (3): Пусть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — стандартная сеть в X, подчиненная $\mathscr{F}$. Для каждого стандартного G из $\mathscr{G}$ и $\xi \in {}^\circ\Xi$ положим

$$A_{(G,\xi)} := \{\xi' \geq \xi : (\forall\, \xi'' \geq \xi')(\exists\, y \in G)\, \varphi(x_{\xi''}, y, z)\}.$$

На основании 4.1.8 видим, что ${}^a\Xi \subset A_{(G,\xi)}$. Учитывая, что $A_{(G,\xi)}$ — внутреннее множество, по принципу Коши заключаем: ${}^\circ\!A_{(G,\xi)} \neq \varnothing$. Тем самым на направлении $\mathrm{H} := \mathscr{G} \times \Xi$ (с естественным упорядочением) заданы стандартные отображения $\xi : \mathrm{H} \to \Xi$ и $y : \mathrm{H} \to Y$ такие, что $\xi(\eta) \in A_{(G,\xi)}$ и $y_\eta \in G$ при $G \in \mathscr{G}$ и $\xi \in \Xi$, для которых $\eta \in (G, \xi)$. Видно, что $\xi(\eta) \approx +\infty$ и $y_\eta \in \mu(\mathscr{G})$ при $\eta \approx +\infty$.

(3) $\to$ (4): Очевидно.

(4) $\to$ (1): Если (1) не выполнено, то по условию

$$(\exists\, G \in \mathscr{G})(\forall\, F \in \mathscr{F})(\exists\, x \in F)(\forall\, y \in G)\, {}^\neg\varphi(x, y, z).$$

Для $F \in \mathscr{F}$ выбираем $x_F \in F$ так, чтобы было ${}^\neg\varphi(x, y, z)$ при всех $y \in G$. Отметим, что получаемую сеть $(x_F)_{F\in\mathscr{F}}$ элементов X, равно как и множество G, можно считать стандартными на основании принципа переноса. Нет сомнений, что $x_F \downarrow \mathscr{F}$ и, стало быть, в силу (3) найдутся направление H и подсеть $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ сети $(x_F)_{F\in\mathscr{F}}$ такие, что для некоторой сети $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ будет $\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$ при всяком $\eta \in \mathrm{H}$. По определению 5.3.9 x_η при каждом бесконечно большом η совпадает с x_F для некоторого удаленного F, т. е. $x_\eta \in \mu(\mathscr{F})$. По условию $y_\eta \in \mu(\mathscr{G})$ и тем более $y_\eta \in G$. При этом оказывается $\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$ и ${}^\neg\varphi(x_\eta, y_\eta, z)$, чего быть не может. Полученное противоречие свидетельствует о ложности сделанного допущения. Таким образом, (1) выполнено (как только имеет место (4)).

(1) $\leftrightarrow$ (5): Для доказательства требуемой эквивалентности достаточно заметить, что она становится очевидной в случае, когда $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ суть ультрафильтры. Остается заметить, что каждая монада есть объединение монад ультрафильтров. $\rhd$

5.3.12. В приложениях бывает удобным рассматривать конкретизации 5.3.11, отвечающие случаям, в которых один из фильтров дискретен. Так, используя естественные обозначения, выводим

$$(\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, \varphi(x, y) \leftrightarrow (\exists\, x_\xi \downarrow \mathscr{F})\, \varphi(x_\xi, y);$$
$$(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, \varphi(x, y) \leftrightarrow (\forall\, x_\xi \downarrow \mathscr{F})(\exists\, x_\eta \downarrow \mathscr{F})\, \varphi(x_\eta, y).$$

5.3.13. Пусть $F \subset X \times Y$ — внутреннее соответствие из стандартного множества X в стандартное множество Y. Допустим, что в X выделен стандартный фильтр $\mathscr{N}$, а в Y — топология τ. Полагаем

$$\begin{aligned}
\forall\forall(F) &:= {}^*\{y' : (\forall\, x \in \mu(\mathscr{N}) \cap \operatorname{dom}(F))(\forall\, y \approx y')(x, y) \in F\},\\
\exists\forall(F) &:= {}^*\{y' : (\exists\, x \in \mu(\mathscr{N}) \cap \operatorname{dom}(F))(\forall\, y \approx y')(x, y) \in F\},\\
\forall\exists(F) &:= {}^*\{y' : (\forall\, x \in \mu(\mathscr{N}) \cap \operatorname{dom}(F))(\exists\, y \approx y')(x, y) \in F\},\\
\exists\exists(F) &:= {}^*\{y' : (\exists\, x \in \mu(\mathscr{N}) \cap \operatorname{dom}(F))(\exists\, y \approx y')(x, y) \in F\},
\end{aligned}$$

где, как обычно, * — символ стандартизации, а запись $y \approx y'$ означает, что $y \in \mu(\tau(y'))$. Множество $Q_1Q_2(F)$ называют Q_1Q_2-*пределом* F (здесь Q — один из кванторов $\forall$ или $\exists$).

5.3.14. В приложениях обычно ограничиваются случаем, когда F — стандартное соответствие, определенное на некотором элементе фильтра $\mathscr{N}$. При этом изучают $\exists\exists$-предел и $\forall\exists$-предел. Первый называют *верхним пределом*, а второй — *нижним пределом* F вдоль $\mathscr{N}$.

Если рассматривается сеть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в области определения F, то, имея в виду фильтр хвостов сети, полагают

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_{\xi\in\Xi} F &:= \liminf_{\xi\in\Xi} F(x_\xi) := \forall\exists(F),\\
\mathrm{Ls}_{\xi\in\Xi} F &:= \limsup_{\xi\in\Xi} F(x_\xi) := \exists\exists(F).
\end{aligned}$$

В таких случаях чаще всего говорят о *пределах по Куратовскому*.

5.3.15. *Для стандартного соответствия F справедливы представления:*

$$\exists\exists(F) = \bigcap_{U\in\mathscr{N}} \operatorname{cl}\left(\bigcup_{x\in U} F(x)\right);$$

$$\forall\exists(F) = \bigcap_{U\in\ddot{\mathscr{N}}} \operatorname{cl}\left(\bigcup_{x\in U} F(x)\right),$$

где $\ddot{\mathscr{N}}$ — так называемый гриль $\mathscr{N}$, т. е. семейство, составленное всеми подмножествами X, задевающими монаду $\mu(\mathscr{N})$.

Иначе говоря,

$$\ddot{\mathscr{N}} = {}^*\{U' \subset X : U' \cap \mu(\mathscr{N}) \neq \varnothing\} =$$
$$= \{U' \subset X : (\forall\, U \in \mathscr{N})(U \cap U' \neq \varnothing)\}.$$

Отметим в этой связи соотношения:

$$\forall\exists(F) = \bigcap_{U \in \ddot{\mathscr{N}}} \operatorname{int} \bigcup_{x \in U} (F(x)),$$

$$\forall\forall(F) = \bigcup_{U \in \mathscr{N}} \operatorname{int} \left(\bigcap_{x \in U} F(x) \right).$$

5.3.16. Из теорем 5.3.11 мгновенно следует описание пределов на языке сетей.

5.3.17. *Элемент y лежит в $\forall\exists$-пределе F в том и только в том случае, если для каждой сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\operatorname{dom}(F)$, подчиненной $\mathscr{N}$, найдутся подсеть $(x_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$ сети $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и сеть $(y_\eta)_{\eta\in\mathrm{H}}$, сходящаяся к y, такие, что $(x_\eta, y_\eta) \in F$ для всех $\eta \in \mathrm{H}$.*

5.3.18. *Элемент y лежит в $\exists\exists$-пределе F в том и только в том случае, если существуют сеть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\operatorname{dom}(F)$, подчиненная $\mathscr{N}$, и сеть $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$, сходящаяся к y, для которых $(x_\xi, y_\xi) \in F$ при любых $\xi \in \Xi$.*

5.3.19. *Для любого внутреннего соответствия F выполнено:*

$$\forall\forall(F) \subset \exists\forall(F) \subset \forall\exists(F) \subset \exists\exists(F).$$

При этом $\exists\exists(F)$, $\forall\exists(F)$ — суть замкнутые, а $\forall\forall(F)$ и $\exists\forall(F)$ — открытые множества.

$\lhd$ Искомые включения бесспорны. Таким образом, с учетом соображений двойственности установим для определенности замкнутость $\forall\exists$-предела.

Если V — стандартная открытая окрестность y' из $\operatorname{cl}(\forall\exists(F))$, то имеется $y \in \forall\exists(F)$, для которого $y \in V$. Для $x \in \mu(\mathscr{N})$ подыщем y'' так, чтобы было $y'' \in \mu(\tau(y))$ и $(x, y'') \in F$. Ясно, что $y'' \in V$, ибо V — окрестность y. Итак,

$$(\forall\, x \in \mu(\mathscr{N}))(\forall\, V \in {}^\circ\tau(y'))(\exists\, y'' \in V)\,(x, y'') \in F.$$

Используя принцип идеализации, выводим: $y' \in \forall\exists(F)$. $\rhd$

5.3.20. Приведенные общие утверждения позволяют охарактеризовать элементы многих аппроксимирующих или регуляризирующих конусов на языке сетей, что распространено в литературе (см. [112, 121]). Отметим, в частности, что конус Кларка $\mathrm{Cl}(F,x')$ для F в X получается как предел по Куратовскому:

$$\mathrm{Cl}(F,x') = \mathrm{Li}_{\tau(x')\times\tau_{\mathbb{R}^+}(0)}\,\Gamma_F,$$

где Γ_F — *гомотетия*, связанная с F, т. е.

$$(x,\alpha,h)\in\Gamma_F \leftrightarrow h\in\frac{F-x}{\alpha}\quad (x,h\in X, \alpha>0).$$

5.3.21. В выпуклом анализе нередко используют специальные разновидности пределов по Куратовскому, связанные с надграфиками функций, действующих в расширенную числовую прямую $\overline{\mathbb{R}}$. Прежде всего, приведем полезные признаки верхнего и нижнего пределов.

5.3.22. *Пусть $f : X\to\overline{\mathbb{R}}$ — стандартная функция, определенная на стандартном X, и $\mathscr{F}$ — некоторый стандартный фильтр в X. Для каждого стандартного $t\in\mathbb{R}$ выполнено*

$$\sup_{F\in\mathscr{F}}\inf f(F)\le t \leftrightarrow (\exists\, x\in\mu(\mathscr{F}))\,{}^{\circ}f(x)\le t,$$
$$\inf_{F\in\mathscr{F}}\sup f(F)\le t \leftrightarrow (\forall\, x\in\mu(\mathscr{F}))\,{}^{\circ}f(x)\le t.$$

$\lhd$ Проверим сначала первую эквивалентность. Применяя последовательно принципы переноса и идеализации, выводим

$$\begin{gathered}
\sup_{F\in\mathscr{F}}\inf f(F)\le t \to (\forall\, F\in\mathscr{F})\ \inf f(F)\le t\to\\
\to(\forall F\in\mathscr{F})(\forall\varepsilon>0)\inf f(F)<t+\varepsilon\to(\forall\varepsilon)(\forall F)(\exists\, x\in F)\\
(f(x)<t+\varepsilon)\to(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon)(\forall^{\mathrm{st}}F)(\exists\, x)(x\in F\wedge f(x)<t+\varepsilon)\to\\
\to(\exists\, x)(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon)(\forall^{\mathrm{st}}F)(x\in F\wedge f(x)<t+\varepsilon)\to\\
\to(\exists\, x\in\mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon>0)(f(x)<t+\varepsilon)\to(\exists\, x\in\mu(\mathscr{F}))\,{}^{\circ}f(x)\le t
\end{gathered}$$

(здесь мы учли 2.2.18 (3)). Теперь заметим, что для всякого стандартного элемента F фильтра $\mathscr{F}$ будет $x\in\mu(\mathscr{F})\subset F$. Значит,

$\inf f(F) \le t$ (ибо $\inf f(F) \le f(x) < t + \varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$). Отсюда в силу принципа переноса для внутреннего F из $\mathscr{F}$ выполнено $\inf f(F) \le t$, что и нужно.

Ввиду уже доказанного и с учетом стандартности $-f$ и t выводим

$$\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) \ge t \leftrightarrow -\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) \le -t \leftrightarrow \sup_{F\in\mathscr{F}} \inf(-f)(F) \le -t \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ(-f(x)) \le -t \leftrightarrow (\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ f(x) \ge t.$$

Таким образом, получается

$$\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) < t \leftrightarrow \neg\big(\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) \ge t\big) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \neg((\exists\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ f(x) \ge t) \leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ f(x) \le t.$$

Окончательно на основе доказанного заключаем

$$\inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) \le t \leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0) \inf_{F\in\mathscr{F}} \sup f(F) < t + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ f(x) < t + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\, {}^\circ f(x) < t + \varepsilon \leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^\circ f(x) \le t,$$

ибо число ${}^\circ f(x)$ стандартно. $\triangleright$

5.3.23. *Пусть X, Y — стандартные множества, $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ — стандартная функция и $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — стандартные фильтры в X и в Y соответственно. Для каждого стандартного вещественного числа t выполнено*

$$\sup_{G\in\mathscr{G}} \inf_{F\in\mathscr{F}} \sup_{x\in F} \inf_{y\in G} f(x, y) \le t \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, y \in \mu(\mathscr{G}))\, {}^\circ f(x, y) \le t.$$

$\triangleleft$ Положим $f_G(x) := \inf\{f(x, y) : y \in G\}$. Заметим, что f_G — стандартная функция, если только G — стандартное множество. Привлекая принцип переноса, предложение 5.3.22 и (сильную) идеализацию, последовательно выводим

$$
\begin{gathered}
\sup_{G\in\mathscr{G}}\ \inf_{F\in\mathscr{F}}\ \sup_{x\in F}\inf_{y\in G} f(x,y)\le t \leftrightarrow (\forall\, G\in\mathscr{G})\ \inf_{F\in\mathscr{F}}\ \sup_{x\in F} f_G(x)\le t \leftrightarrow\\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G\in\mathscr{G})\ \inf_{F\in\mathscr{F}}\ \sup_{x\in F} f_G(x)\le t \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G\in\mathscr{G})(\forall\, x\in\mu(\mathscr{F}))\ {}^\circ f_G(x)\le\\
\le t \leftrightarrow (\forall\, x\in\mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} G\in\mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon>0)\ \inf_{y\in G} f(x,y)<t+\varepsilon\rightarrow\\
\rightarrow (\forall\, x\in\mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon>0)(\forall^{\mathrm{st}} G\in\mathscr{G})(\exists\, y\in G)(f(x,y)<t+\varepsilon)\rightarrow\\
\rightarrow (\forall\, x\in\mu(\mathscr{F}))(\exists\, y\in\mu(\mathscr{G}))(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon>0)(f(x,y)<t+\varepsilon)\rightarrow\\
\rightarrow (\forall\, x\in\mu(\mathscr{F}))(\exists\, y\in\mu(\mathscr{G}))\,{}^\circ f(x,y)\le t.
\end{gathered}
$$

Из последнего соотношения для внутреннего элемента $F\subset\mu(\mathscr{F})$ фильтра $\mathscr{F}$ и стандартного элемента G фильтра $\mathscr{G}$ выводим

$$
\begin{gathered}
\sup_{x\in F}\inf_{y\in G} f(x,y)\le t\rightarrow \inf_{F\in\mathscr{F}}\ \sup_{x\in F}\inf_{y\in G} f(x,y)\le t\rightarrow\\
\rightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G\in\mathscr{G})\ \inf_{F\in\mathscr{F}}\ \sup_{x\in F}\inf_{y\in G} f(x,y)\le t\rightarrow\\
\rightarrow (\forall\, G\in\mathscr{G})\ \inf_{F\in\mathscr{F}}\ \sup_{x\in F}\inf_{y\in G} f(x,y)\le t
\end{gathered}
$$

в силу принципа переноса. $\triangleright$

5.3.24. В связи с 5.3.23 величину

$$
\lim_{\mathscr{F}}\sup\inf_{\mathscr{G}} f := \sup_{G\in\mathscr{G}}\ \inf_{F\in\mathscr{F}}\ \sup_{x\in F}\ \inf_{y\in G} f(x,y)
$$

называют *пределом f по Рокафеллару.*

Если $f:=(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство функций, действующих из топологического пространства (X,σ) в $\overline{\mathbb{R}}$ и $\mathscr{N}$ — фильтр в Ξ, то определяют *нижний предел* в точке x' из X семейства f и его *верхний предел* или *предел по Рокафеллару*

$$
\begin{gathered}
\mathrm{li}_{\mathscr{N}} f(x') := \sup_{V\in\sigma(x')}\ \sup_{U\in\mathscr{N}}\ \inf_{\xi\in U}\ \inf_{x\in V} f_\xi(x),\\
\mathrm{ls}_{\mathscr{N}}(x') := \sup_{V\in\sigma(x')}\ \inf_{U\in\mathscr{N}}\ \sup_{\xi\in U}\ \inf_{x\in V} f_\xi(x).
\end{gathered}
$$

Последние пределы часто называют *эпипределами.* Смысл этого определения раскрывает следующее очевидное утверждение.

5.3.25. *Нижний и верхний пределы произвольного семейства надграфиков служат соответственно надграфиками нижнего и верхнего пределов рассматриваемого семейства функций.*

5.4. Аппроксимации, определяемые набором инфинитезималей

В этом параграфе мы займемся проблемой анализа классических аппроксимирующих конусов кларковского типа с помощью детализации вклада бесконечно малых чисел, участвующих в их определении. Такой анализ позволяет выделить как новые аналоги касательных конусов, так и новые описания конуса Кларка.

5.4.1. Вновь рассмотрим вещественное векторное пространство X, наделенное линейной топологией σ и почти векторной топологией τ. Пусть, далее, в X выделены множество F и точка x' из F. В соответствии с соглашением из 5.2 названные объекты считаются стандартными множествами.

Фиксируем некоторую инфинитезималь — вещественное число α, для которого $\alpha > 0$ и $\alpha \approx 0$. Положим

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ha}_\alpha(F,x') &:= {}^*\{h' \in X : (\forall\, x \approx_\tau x', x \in F)(\forall\, h \approx_\tau h')(x + \alpha h \in F)\},\\
\mathrm{In}_\alpha(F,x') &:= {}^*\{h' \in X : (\exists\, h \approx_\tau h')(\forall\, x \approx_\sigma x', x \in F)(x + \alpha h \in F)\},\\
\mathrm{Cl}_\alpha(F,x') &:= {}^*\{h' \in X : (\forall\, x \approx_\sigma x', x \in F)(\exists\, h \approx_\tau h')(x + \alpha h \in F)\},
\end{aligned}$$

где, как обычно, * — символ стандартизации внешнего множества.

Рассмотрим теперь некоторое непустое, вообще говоря, внешнее множество инфинитезималей Λ и положим

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x') &:= {}^*\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Ha}_\alpha(F,x'),\\
\mathrm{In}_\Lambda(F,x') &:= {}^*\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{In}_\alpha(F,x'),\\
\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x') &:= {}^*\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Cl}_\alpha(F,x').
\end{aligned}$$

Аналогичную политику обозначений примем и для других вводимых типов аппроксимаций. В качестве примера стоит подчеркнуть, что в силу определений для стандартного h' из X выполнено:

$$\begin{gathered}
h' \in \mathrm{In}_\Lambda(F,x') \leftrightarrow\\
\leftrightarrow (\forall\, \alpha \in \Lambda)(\exists\, h \approx_\tau h')(\forall\, x \approx_\sigma x', x \in F)(x + \alpha h \in F).
\end{gathered}$$

Полезно отметить, что в случае, когда Λ — это монада соответствующего стандартного фильтра $\mathscr{F}_\Lambda$, где $\mathscr{F}_\Lambda := {}^*\{A \subset \mathbb{R} : A \supset \Lambda\}$, то, например, для $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ будет

$$\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') = \bigcap_{V \in \mathscr{N}} \bigcup_{\substack{U \in \sigma(x') \\ A \in \mathscr{F}_\Lambda}} \bigcap_{\substack{x \in F \cap U \\ \alpha \in A, \alpha > 0}} \left(\frac{F - x}{\alpha} + V \right).$$

Если же Λ — не монада (например, одноточечное множество), то явный вид $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ связан с той моделью анализа, в которой фактически ведется исследование. Подчеркнем, что ультрафильтр $\mathscr{U}(\alpha) := {}^*\{A \subset \mathbb{R} : \alpha \in A\}$ имеет монаду, не сводящуюся к исходной инфинитезимали α, т. е. множество $\mathrm{Cl}_\alpha(F, x')$, вообще говоря, шире, чем $\mathrm{Cl}_{\mu(\mathscr{U}_{(\alpha)})}(F, x')$. В то же время оказывается, что введенные аппроксимации обладают многими достоинствами, присущими кларковским конусам. При детализации и обосновании последнего положения без особых оговорок, как и в 5.2, мы используем предположение непрерывности отображения $(x, \beta, h) \to x + \beta h$ пространства $(X \times \mathbb{R} \times X, \sigma \times \tau_{\mathbb{R}} \times \tau)$ в (X, σ) в нуле (эквивалентное в стандартном антураже включению $\mu(\sigma) + \mu(\mathbb{R}_+)\mu(\tau) \subset \mu(\sigma)$).

5.4.2. *Теорема.* *Для каждого множества Λ положительных бесконечно малых чисел справедливы утверждения:*

(1) $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x'), \mathrm{In}_\Lambda(F, x'), \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ — *полугруппы, причем*

$$\begin{gathered} \mathrm{Ha}(F, x') \subset \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x') \subset \mathrm{In}_\Lambda(F, x') \subset \\ \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') \subset K(F, x'), \\ \mathrm{Cl}(F, x') \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x'); \end{gathered}$$

(2) *если Λ — внутреннее множество, то $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ является τ-открытым;*

(3) $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ — *это τ-замкнутое множество, причем для выпуклого F будет $K(F, x') = \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$, как только $\sigma = \tau$;*

(4) *если $\tau = \sigma$, то имеет место равенство*

$$\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') = \mathrm{Cl}_\Lambda(\mathrm{cl}(F), x');$$

(5) *выполнена формула Рокафеллара*

$$\operatorname{Ha}_\Lambda(F,x') + \operatorname{Cl}_\Lambda(F,x') \subset \operatorname{Ha}_\Lambda(F,x');$$

(6) *если x' — это τ-граничная точка F, то для $F' := (X - F) \cup \{x'\}$ выполнено*

$$\operatorname{Ha}_\Lambda(F,x') = -\operatorname{Ha}_\Lambda(F',x').$$

$\lhd$ (1): Проверим для определенности, что полугруппой является $\operatorname{In}_\Lambda(F,x')$. Если стандартные h', h'' входят в $\operatorname{In}_\Lambda(F,x')$, то для каждого $\alpha \in \Lambda$ при некотором $h_1 \approx_\tau h'$ будет $x'' := x + \alpha h_1 \in F$, как только $x \in F$ и $x \approx_\sigma x'$. По условию имеется $h_2 \approx_\tau h''$, для которого $x'' + \alpha h_2 \in F$, ибо $x'' \approx_\sigma x$. Окончательно $h_1 + h_2 \approx_\tau h' + h''$ и $h_1 + h_2$ «обслуживает» вхождение $h' + h'' \in \operatorname{In}_\Lambda(F,x')$.

Если $h' \in \operatorname{Cl}_\Lambda(F,x')$ и h' стандартен, то $x' + \alpha h \in F$ для каких-нибудь $\alpha \in \Lambda$ и $h \approx_\tau h'$. Это означает, что $h' \in K(F,x')$. Прочие включения, выписанные в (1), не вызывают сомнений.

(2): Если h' — стандартный элемент $\operatorname{Ha}_\Lambda(F,x')$, то

$$(\forall\, x \approx_\sigma x', x \in F)(\forall\, h \approx_\tau h')(\forall\, \alpha \in \Lambda)(x + \alpha h \in F).$$

С учетом 5.3.2, используя то, что Λ — внутреннее множество, выводим

$$(\exists^{\mathrm{st}} V \in \mathscr{N}_\tau)(\exists^{\mathrm{st}} U \in \sigma(x'))(\forall\, x \in U \cap F)(\forall\, h \in h' + V)(\forall\, \alpha \in \Lambda)$$
$$(x + \alpha h \in F).$$

Подберем стандартные окрестности V_1, $V_2 \in \mathscr{N}_\tau$, так, чтобы было $V_1 + V_2 \subset V$. Тогда для всех стандартных $h'' \in h' + V_1$ выполнено

$$(\forall\, x \in U \cap F)(\forall\, h \in h'' + V_2)(\forall\, \alpha \in \Lambda)(x + \alpha h \in F),$$

т. е. $h'' \in \operatorname{Ha}_\Lambda(F,x')$ при любых $h'' \in h + V_1$.

(3): Пусть теперь h' — стандартный элемент $\operatorname{cl}_\tau(\operatorname{Cl}_\Lambda(F,x'))$. Возьмем произвольную стандартную окрестность V точки h' и выберем вновь стандартные V_1, $V_2 \in \mathscr{N}_\tau$, из условия $V_1 + V_2 \subset V$. По определению замыкания имеется $h'' \in \operatorname{Cl}_\Lambda(F,x')$ такой, что $h'' \in h' + V_1$. На основании 5.4.1 и в силу 5.3.2 будет

$$(\forall\, \alpha \in \Lambda)(\exists^{\mathrm{st}} U \in \sigma(x'))(\forall\, x \in F \cap U)(\exists\, h \in h'' + V_2)(x + \alpha h \in F).$$

При этом $h \in h'' + V_2 \subset h' + V_1 + V_2 \subset h' + V$. Иначе говоря,

$$(\forall^{\rm st} V \in \mathscr{N}_\tau)(\forall\, \alpha \in \Lambda)(\exists^{\rm st} U \in \sigma(x'))(\forall\, x \in F \cap U)(\exists\, h \in h' + V)$$
$$(x + \alpha h \in F).$$

Значит, $h' \in \mathrm{Cl}_\alpha(F, x')$ при каждом $\alpha \in \Lambda$, т. е. $h' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$.

Если теперь $h' \in \mathrm{Fd}(F, x')$ и h' стандартен, то для некоторого стандартного $\alpha' > 0$ по принципу переноса будет $x' + \alpha' h' \in F$. Если $x \approx_\sigma x'$ и $x \in F$, то $(x - x')/\alpha' \approx_\sigma 0$. Для $h := h' + (x - x')/\alpha'$ будет $h \approx_\tau h'$ и, кроме того, $x + \alpha' h \in F$. С учетом выпуклости F верно: $x + (0, \alpha']h \subset F$. В частности, $x + \Lambda h \subset F$. Итак, $(\forall\, x \approx_\sigma x', x \in F)(\forall\, \alpha \in \Lambda)(\exists\, h \approx_\tau h')(x + \alpha h \in F)$, т. е. $h' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$. Следовательно,

$$\mathrm{Fd}(F, x') \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x') \subset K(F, x') \subset \mathrm{cl}(\mathrm{Fd}(F, x')).$$

С учетом τ-замкнутости $\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ заключаем: $K(F, x') = \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$.

(4): Устанавливается как и в предложении 5.2.11.

(5): Для стандартных $k' \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$ и $h' \in \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$ при каждом $\alpha \in \Lambda$ и любом $x \in F$ таком, что $x \approx_\sigma x'$, подобрав h из условий $h \approx_\tau h'$ и $x + \alpha h \in F$, получаем последовательно

$$\begin{aligned} x + \alpha(h' + k' + \mu(\tau)) &= x + \alpha h + \alpha(k' + (h - h') + \mu(\tau)) \subset \\ &\subset (x + \mu(\sigma)) \cap F + \alpha(k' + \mu(\tau) + \mu(\tau)) \subset \\ &\subset (x + \mu(\sigma)) \cap F + \alpha(k' + \mu(\tau)) \subset F, \end{aligned}$$

что и означает вхождение $h' + k'$ в $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$.

(6): Пусть $-h \notin \mathrm{Ha}_\Lambda(F', x')$. Тогда для некоторого $\alpha \in \Lambda$ найдется $h \approx_\tau h'$ так, что при подходящем $x \approx_\sigma x'$, $x \in F$ выполнено $x - \alpha h \in F$. Если все же $h \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$, то, в частности, $h \in \mathrm{Ha}_\alpha(F, x')$ и $x = (x - \alpha h) + \alpha h \in F$, ибо $x - \alpha h \approx_\sigma x$. Итак, $x \in F \cap F'$, т. е. $x = x'$. Кроме того, $(x' - \alpha h) + \alpha(h + \mu(\tau)) \subset F$, ибо $h + \mu(\tau) \subset \mu(\tau(h'))$. Стало быть, x' — это τ-внутренняя точка F, что противоречит условию. Следовательно, $h \notin \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$, что обеспечивает включение $-\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x') \subset (F', x')$. Меняя в приведенном рассуждении F' и $F = (F')'$ местами, приходим к требуемому. $\rhd$

5.4.3. Важно подчеркнуть, что во многих случаях описанные аналоги конусов Адамара и Кларка являются выпуклыми. В самом деле, имеют место следующие утверждения.

5.4.4. *Пусть τ — векторная топология и $t\Lambda \subset \Lambda$ для некоторого стандартного $t \in (0,1)$. Тогда $\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$ — выпуклый конус. Если к тому же Λ — внутреннее множество, то $\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x')$ — также выпуклый конус.*

$\lhd$ Предположим, что рассматривается $\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x')$, и $h \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F,x')$ — стандартный элемент этого множества. На основании 5.4.2 (2) $\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x')$ открыто в топологии τ. Кроме того, $th \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F,x')$, где t — фигурирующее в условии стандартное положительное число. $\rhd$

5.4.5. *Пусть $t\Lambda \subset \Lambda$ для каждого стандартного $t \in (0,1)$. Тогда множества $\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$, $\mathrm{In}_\Lambda(F,x')$ и $\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x')$ являются выпуклыми конусами.*

$\lhd$ Предположим для определенности, что речь идет о $\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$. Пусть h' — стандартный вектор из названного множества и $0 < t < 1$ — стандартное число. Пусть $x \approx_\sigma x'$, $x \in F$ и $\alpha \in \Lambda$. Для x и $t\alpha \in \Lambda$ подберем h, для которого $h \approx_\tau h'$ и $x + \alpha th \in F$. Поскольку $th \approx_\tau th'$ на основании 5.1.7, то $th' \in \mathrm{Cl}_\alpha(F,x')$. Иначе говоря, на основании принципа переноса $(0,1)\,\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x') \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$. Остается сослаться на 5.4.2 (1). $\rhd$

5.4.6. Множество Λ назовем *представительным*, если $\mathrm{Ha}_\Lambda(F,x')$ и $\mathrm{Cl}_\Lambda(F,x')$ суть (выпуклые) конусы. Предложения 5.4.4 и 5.4.5 дают примеры представительных Λ.

5.4.7. Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — функция, действующая в расширенную числовую прямую. Для инфинитезимали α, точки x' из $\mathrm{dom}(f)$ и вектора $h' \in X$ полагаем

$$f(\mathrm{Ha}_\alpha)(x')(h') := \inf\{t \in \mathbb{R} : (h',t) \in \mathrm{Ha}_\alpha(\mathrm{epi}(f),(x',f(x')))\},$$
$$f(\mathrm{In}_\alpha)(x')(h') := \inf\{t \in \mathbb{R} : (h',t) \in \mathrm{In}_\alpha(\mathrm{epi}(f),(x',f(x')))\},$$
$$f(\mathrm{Cl}_\alpha)(x')(h') := \inf\{t \in \mathbb{R} : (h',t) \in \mathrm{Cl}_\alpha(\mathrm{epi}(f),(x',f(x')))\}.$$

Производные $f(\mathrm{Ha}_\Lambda)$, $f(\mathrm{In}_\Lambda)$ и $f(\mathrm{Cl}_\Lambda)$ вводятся естественным образом. Отметим, что производную $f(\mathrm{Cl}) := f(\mathrm{Cl}_{\mu(\mathbb{R}_+)})$ называют *производной Рокафеллара* и обозначают символом $f^\uparrow$. В этой связи мы пишем

$$f^\uparrow_\alpha(x') := f(\mathrm{Cl}_\alpha)(x'), \quad f^\uparrow_\Lambda(x') := f(\mathrm{Cl}_\Lambda)(x').$$

Если τ — это дискретная топология, то $\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x') = \mathrm{In}_\Lambda(F, x') = \mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')$. При этом производную Рокафеллара называют *производной Кларка* и используют обозначения

$$f^\circ_\alpha(x') := f^\uparrow_\alpha(x'), \quad f^\circ_\Lambda(x') := f^\uparrow_\Lambda(x').$$

При $\Lambda = \mu(\mathbb{R}_+)$ указание на Λ опускают.

Рассматривая эпипроизводные, предполагают, что пространство $X \times \mathbb{R}$ наделено обычными произведениями топологий $\sigma \times \tau_\mathbb{R}$ и $\tau \times \tau_\mathbb{R}$, где $\tau_\mathbb{R}$ — стандартная топология $\mathbb{R}$. Иногда удобно наделять $X \times \mathbb{R}$ парой топологий $\sigma \times \tau_0$ и $\tau \times \tau_\mathbb{R}$, где τ_0 — тривиальная топология в $\mathbb{R}$. При использовании таких топологий говорят о *производных Кларка и Рокафеллара вдоль эффективной области* $\mathrm{dom}(f)$ и добавляют индекс d в обозначениях: f°_d, $f^\uparrow_{\Lambda,d}$ и т. п.

5.4.8. *Справедливы утверждения:*

$$f^\uparrow_\alpha(x')(h') \le t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \approx_\sigma x', t \approx f(x'), t \ge f(x))\, (\exists\, h \approx_\tau h')\ {}^\circ((f(x+\alpha h) - t)/\alpha) \le t';$$
$$f^\circ_\alpha(x')(h') < t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \approx_\sigma x', t \approx f(x'), t \ge f(x))\, (\forall\, h \approx_\tau h')\ {}^\circ((f(x+\alpha h) - t)/\alpha) < t';$$
$$f^\uparrow_{\alpha,d}(x')(h') \le t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \approx_\sigma x', x \in \mathrm{dom}(f))(\exists\, h \approx_\tau h')\,{}^\circ((f(x+\alpha h) - t)/\alpha) \le t';$$
$$f^\circ_{\alpha,d}(x')(h') < t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \approx_\sigma x', x \in \mathrm{dom}(f))(\forall\, h \approx_\tau h')\,{}^\circ((f(x+\alpha h) - t)/\alpha) < t'.$$

$\lhd$ Для доказательства нужно апеллировать к 2.2.18 (3). $\rhd$

5.4.9. *Если f — полунепрерывная снизу функция, то*

$$f^\uparrow_\alpha(x')(h') \le t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \forall\, x \approx_\sigma x', f(x) \approx f(x'))(\exists\, h \approx_\tau h')\ {}^\circ\!\left(\frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha}\right) \le t';$$
$$f^\circ_\alpha(x')(h') < t' \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, x \approx_\sigma x', f(x) \approx f(x'))(\forall\, h \approx_\tau h')\ {}^\circ\!\left(\frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha}\right) < t'.$$

$\triangleleft$ Нуждаются в проверке только импликации вправо. В силу идентичности таких проверок осуществим первую из них. На основании полунепрерывности f снизу выводим: $x' \approx_{\sigma} x \to {}^{\circ}f(x) \geq f(x')$. Значит, при x, t таких, что $t \approx f(x')$ и $t \geq f(x)$, выполнено ${}^{\circ}t \geq {}^{\circ}f(x) \geq f(x') = {}^{\circ}t$. Иначе говоря, ${}^{\circ}f(x) = f(x')$ и $f(x) \approx f(x')$. Подбирая подходящее h с помощью условий, видим

$$ {}^{\circ}(\alpha^{-1}(f(x+\alpha h) - t)) \leq {}^{\circ}(\alpha^{-1}(f(x+\alpha h) - f(x))) \leq t', $$

что и обеспечивает требуемое. $\triangleright$

5.4.10. *Для непрерывной функции f имеют место равенства*

$$ f^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x') = f^{\uparrow}_{\Lambda}(x'), \quad f^{\circ}_{\Lambda,d}(x') = f^{\circ}_{\Lambda}(x'). $$

$\triangleleft$ Достаточно заметить, что непрерывность f в стандартной точке означает $(x \approx_{\sigma} x', x \in \mathrm{dom}(f)) \to f(x) \approx f(x')$ (см. 4.2.7). $\triangleright$

5.4.11. *Теорема.* *Пусть Λ — монада. Тогда справедливы представления:*

(1) *если f — полунепрерывная снизу функция, то*

$$ f^{\uparrow}_{\Lambda}(x')(h') = \limsup_{\substack{x \to_f x' \\ \alpha \in \mathscr{F}_{\Lambda}}} \inf_{h \to h'} \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha}, $$

$$ f^{\circ}_{\Lambda}(x')(h') = \limsup_{\substack{x \to_f x' \\ \alpha \in \mathscr{F}_{\Lambda}}} \frac{f(x+\alpha h') - f(x)}{\alpha}, $$

где $x \to_f x'$ означает, что $x \to_{\sigma} x'$ и $f(x) \to f(x')$;

(2) *для непрерывной функции f выполнено*

$$ f^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x')(h') = \limsup_{\substack{x \to x' \\ \alpha \in \mathscr{F}_{\Lambda}}} \inf_{h \to h'} \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha}, $$

$$ f^{\circ}_{\Lambda,d}(x')(h') = \limsup_{\substack{x \to x' \\ \alpha \in \mathscr{F}_{\Lambda}}} \frac{f(x+\alpha h') - f(x)}{\alpha}. $$

$\triangleleft$ Для доказательства достаточно привлечь критерий для предела по Рокафеллару 5.2.23 и 5.4.9, 5.4.10. $\triangleright$

5.4.12. *Теорема.* *Пусть Λ — представительное множество инфинитезималей. Справедливы утверждения:*

(1) *если f — отображение, липшицевое по направлениям в точке x', т. е. такое, что $\mathrm{Ha}(\mathrm{epi}(f), (x', f(x'))) \neq \varnothing$, то*

$$f^{\uparrow}_{\Lambda}(x') = f^{\circ}_{\Lambda}(x');$$

если к тому же f непрерывно в точке x', то

$$f^{\uparrow}_{\Lambda}(x') = f^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x') = f^{\circ}_{\Lambda,d}(x') = f^{\circ}_{\Lambda}(x');$$

(2) *если f — произвольное отображение, причем конус Адамара эффективного множества f в точке x' не пуст, т. е. $\mathrm{Ha}(\mathrm{dom}(f), x') \neq \varnothing$, то $f^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x') = f^{\circ}_{\Lambda,d}(x')$.*

$\lhd$ Доказательство обоих искомых утверждений проводится по одному образцу, связанному с применением теоремы 5.4.2. Разберем подробно случай липшицевости f по направлениям. Положим $\mathscr{A} := \mathrm{epi}(f)$, $a' := (x', f(x'))$.

В силу условий $\mathrm{Cl}_{\Lambda}(\mathscr{A}, a')$ и $\mathrm{Ha}_{\Lambda}(\mathscr{A}, a')$ — выпуклые конусы. При этом $\mathrm{Ha}_{\Lambda}(\mathscr{A}, a') \supset \mathrm{Ha}(\mathscr{A}, a')$ и, стало быть,

$$\mathrm{int}_{\tau \times \tau_{\mathbb{R}}}(\mathrm{Ha}_{\Lambda}(\mathscr{A}, a')) \neq \varnothing.$$

На основании формулы Рокафеллара выводим:

$$\mathrm{cl}_{\tau \times \tau_{\mathbb{R}}}(\mathrm{Ha}_{\Lambda}(\mathscr{A}, a')) = \mathrm{Cl}_{\Lambda}(\mathscr{A}, a').$$

Отсюда и вытекает требуемое утверждение. $\rhd$

5.4.13. *Теорема.* *Пусть $f_1, f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — произвольные функции и $x' \in \mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2)$. Тогда*

$$(f_1 + f_2)^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x') \leq (f_1)^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x') + (f_2)^{\circ}_{\Lambda,d}(x').$$

Если, кроме того, f_1 и f_2 непрерывны в точке x', то

$$(f_1 + f_2)^{\uparrow}_{\Lambda}(x') \leq (f_1)^{\uparrow}_{\Lambda}(x') + (f_2)^{\circ}_{\Lambda}(x').$$

$\lhd$ Пусть стандартный элемент h' выбран следующим образом:

$$h' \in \mathrm{dom}\left((f_2)^{\circ}_{\Lambda,d}\right) \cap \mathrm{dom}\left((f_1)^{\uparrow}_{\Lambda,d}\right).$$

Если такого h' нет, то искомые оценки очевидны.

Возьмем $t' \geq (f_1)^{\uparrow}_{\Lambda,d}(x')(h')$ и $s' > (f_2)^{\circ}_{\Lambda,d}(x')(h')$. Тогда на основании 5.4.8 для каждого $x \approx{}_{\sigma} x'$, $x \in \operatorname{dom}(f_1) \cap \operatorname{dom}(f_2)$ и любого $\alpha \in \Lambda$ имеется h, для которого $h \approx{}_{\tau} h'$ и, кроме того,

$$\delta_1 := {}^{\circ}((f_1(x+\alpha h) - f_1(x))/\alpha) \leq t';$$
$$\delta_2 := {}^{\circ}((f_2(x+\alpha h) - f_2(x))/\alpha) < s'.$$

Отсюда выводим: $\delta_1 + \delta_2 < t' + s'$, что обеспечивает (1). Если f_1 и f_2 непрерывны в точке x', то следует привлечь 5.4.10. $\triangleright$

5.4.14. В заключение текущего пункта разберем специальные представления конуса Кларка, возникающие в конечномерном пространстве и связанные со следующим замечательным результатом.

5.4.15. ***Теорема Корне.*** *В конечномерном пространстве конус Кларка представляет собой предел по Куратовскому контингенций:*

$$\mathrm{Cl}(F, x') = \operatorname{Li}_{\substack{x \to x' \\ x \in F}} K(F, x).$$

5.4.16. ***Следствие.*** *Пусть Λ — (внешнее) множество строго положительных инфинитезималей, содержащее сходящуюся к нулю (внутреннюю) последовательность. Тогда справедливо равенство*

$$\mathrm{Cl}_{\Lambda}(F, x') = \mathrm{Cl}(F, x').$$

$\triangleleft$ По принципу Лейбница можно работать в стандартном антураже. Поскольку включение $\mathrm{Cl}_{\Lambda}(F, x') \supset \mathrm{Cl}(F, x')$ очевидно, возьмем стандартную точку h' из $\mathrm{Cl}_{\Lambda}(F, x')$ и установим, что h' лежит в конусе Кларка $\mathrm{Cl}(F, x')$.

Поскольку с учетом 5.3.13 справедливо представление

$$\operatorname{Li}_{\substack{x \to x' \\ x \in F}} K(F, x) = {}^{*}\{h' : (\forall\, x \approx x', x \in F)(\exists\, h \approx h')\, h \in K(F, x)\},$$

убедимся в том, что при $x \approx x'$, $x \in F$ будет $h \in K(F, x)$ для некоторого элемента h, бесконечно близкого к h'.

Если (α_n) — последовательность элементов Λ, сходящаяся к нулю, то по условию выполнено

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})(\exists\, h_n)(x + \alpha_n h_n \in F \wedge h_n \approx h').$$

Для всякого стандартного $\varepsilon > 0$ и обычной нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^n$ будет $\|h_n - h'\| \leq \varepsilon$. Стало быть, с учетом конечномерности можно подыскать последовательности $(\overline{\alpha}_n)$ и $(\overline{h}_n)$ такие, что

$$\overline{\alpha}_n \to 0, \quad \overline{h}_n \to \overline{h}, \quad \|\overline{h} - h'\| \leq \varepsilon, \quad x + \overline{\alpha}_n \overline{h}_n \in F \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Используя принцип идеализации в сильной форме, заключаем, что имеются последовательности $(\overline{\alpha}_n)$ и $(\overline{h}_n)$, обслуживающие одновременно все стандартные положительные числа ε. Ясно, что соответствующий предельный вектор h бесконечно близок к h' и в то же время $h \in K(F, x)$ по определению контингенции. $\rhd$

5.4.17. В качестве множества Λ в приведенной теореме может фигурировать монада любого сходящегося к нулю фильтра, например, фильтра хвостов фиксированной стандартной последовательности (α_n), составленной из строго положительных чисел и стремящейся к нулю. Приведем характеризации конуса Кларка, относящиеся к этому случаю и дополняющие приведенные выше. Для формулировки условимся символом $d_F(x)$ обозначать расстояние от точки x до множества F.

5.4.18. ***Теорема.*** *Для сходящейся к нулю последовательности (α_n) строго положительных чисел эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$;

(2) $\limsup\limits_{\substack{x \to x' \\ n \to \infty}} \frac{d_F(x + \alpha_n h') - d_F(x)}{\alpha_n} \leq 0$;

(3) $\limsup\limits_{x \to x'} \limsup\limits_{n \to \infty} \alpha_n^{-1}(d_F(x + \alpha_n h') - d_F(x) \leq 0$;

(4) $\limsup\limits_{\substack{x \to x' \\ x \in F}} \limsup\limits_{n \to \infty} \alpha_n^{-1} d_F(x + \alpha_n h') = 0$;

(5) $\limsup\limits_{x \to x'} \liminf\limits_{n \to \infty} \alpha_n^{-1}(d_F(x + \alpha_n h') - d_F(x)) \leq 0$;

(6) $\lim\limits_{\substack{x \to x' \\ x \in F}} \liminf\limits_{n \to \infty} \frac{d_F(x + \alpha_n h')}{\alpha_n} = 0$.

$\lhd$ Прежде всего заметим, что при $\alpha > 0$ имеет место эквивалентность:

$${}^\circ(\alpha^{-1} d_F(x + \alpha h')) = 0 \leftrightarrow (\exists\, h \approx h')(x + \alpha h \in F),$$

где $^\circ t$ — это, как обычно, стандартная часть числа t.

Действительно, для установления импликации влево положим $y := x + \alpha h'$. Тогда

$$d_F(x + \alpha h')/\alpha = \|x + \alpha h' - y\|/\alpha \le \|h - h'\|.$$

При проверке противоположной импликации, привлекая принцип идеализации в сильной форме, последовательно получаем

$$\begin{gathered} {}^\circ(\alpha^{-1} d_F(x + \alpha h')) = 0 \to (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\, d_F(x + \alpha h')/\alpha < \varepsilon \to \\ \to (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\exists\, y \in F)\, \|x + \alpha h' - y\|/\alpha < \varepsilon \to \\ \to (\exists\, y \in F)(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\, \|h' - (y - x)/\alpha\| < \varepsilon \to \\ \to (\exists\, y \in F)\, \|h - (y - x)/\alpha\| \approx 0. \end{gathered}$$

Полагая $h := (y - x)/\alpha$, видим: $h \approx h'$ и при этом $x + \alpha h \in F$.

Перейдем теперь собственно к доказательству искомых эквивалентностей.

Поскольку импликации (3) $\to$ (4) $\to$ (6) и (3) $\to$ (5) $\to$ (6) очевидны, установим только, что (1) $\to$ (2) $\to$ (3) и (6) $\to$ (1).

(1) $\to$ (2): Работая в стандартном антураже, возьмем $x \approx x'$ и $N \approx +\infty$. Подберем $x'' \in F$ так, чтобы было $\|x - x''\| \le d_F(x') + \alpha_N^2$. Поскольку имеет место неравенство

$$d_F(x + \alpha_N h') - d_F(x'' + \alpha_N h') \le \|x - x''\|,$$

выводим следующие оценки:

$$\begin{gathered} (d_F(x + \alpha_N h') - d_F(x))/\alpha_N \le (d_F(x'' + \alpha_N h') + \|x - x''\| - \\ - d_F(x))/\alpha_N \le d_F(x'' + \alpha_N h')/\alpha_N + \alpha_N. \end{gathered}$$

В силу того, что $h' \in \mathrm{Cl}(F, x')$, с учетом выбора x'' и N для некоторого $h \approx h'$ будет $x'' + \alpha_N h \in F$. Значит, на основании уже доказанного $^\circ(d_F(x'' + \alpha_N h')/\alpha_N) = 0$. Отсюда

$$(\forall\, x \approx x')(\forall\, N \approx +\infty)\, {}^\circ(\alpha_N^{-1}(d_F(x + \alpha_N h') - d_F(x))) \le 0.$$

Последнее в соответствии с 5.3.22 составляет нестандартный критерий справедливости (2).

(2) $\to$ (3): Достаточно заметить, что для $f : U \times V \to \overline{\mathbb{R}}$ и фильтров $\mathscr{F}$ в U и $\mathscr{G}$ в V будет

$$
\begin{gathered}
\limsup_{\mathscr{F}} \limsup_{\mathscr{G}} f(x,y) \le t \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))\, {}^{\circ}\limsup_{\mathscr{G}} f(x,y) \le t \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0) \inf_{G \in \mathscr{G}} \sup_{y \in G} f(x,y) < t + \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\exists\, G \in \mathscr{G}) \sup_{y \in G} f(x,y) < t + \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0) \sup_{y \in G} f(x,y) t + \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0) \sup_{y \in G} f(x,y) \le t + \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\exists\, G \in \mathscr{G})(\forall\, y \in G)\, {}^{\circ}f(x,y) \le t.
\end{gathered}
$$

Здесь, как обычно, $\mu(\mathscr{F})$ — монада фильтра $\mathscr{F}$.

(6) $\to$ (1): Прежде всего, в обозначениях предыдущего фрагмента доказательства, выполнено

$$
\begin{gathered}
\limsup_{\mathscr{F}} \liminf_{\mathscr{G}} f(x,y) \le t \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F})) \sup_{G \in \mathscr{G}} \inf_{y \in \mathscr{G}} f(x,y) \le t \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\forall\, G \in \mathscr{G}) \inf_{y \in G} f(x,y) \le t + \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall\, G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0) \inf_{y \in G} f(x,y) < t + \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall\, G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\exists\, y \in G)(f(x,y) < t + \varepsilon) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\, x \in \mu(\mathscr{F}))(\forall\, G \in \mathscr{G})(\exists\, y \in G)\, {}^{\circ}f(x,y) \le t.
\end{gathered}
$$

Привлекая условия, из установленного признака выводим:

$$
(\forall\, x \approx x', x \in F)(\forall\, n)(\exists\, N \ge n)\, {}^{\circ}(\alpha_N^{-1} d_F(x + \alpha_N h')) = 0.
$$

Иначе говоря, для некоторого h_N такого, что $h_N \approx h'$, будет $x + \alpha_N h_N \in F$. На основе приведенных соображений, как и при доказательстве 5.4.16, можно сделать вывод, что h' лежит в нижнем пределе по Куратовскому контингенций множества F в точках, близких к x', т. е. в конусе Кларка $\mathrm{Cl}(F, x')$. $\triangleright$

5.5. Аппроксимация композиции множеств

Перейдем к изучению касательных кларковского типа и суперпозиции соответствий. При этом нам придется начать с некоторых топологических рассмотрений, относящихся к открытым и почти открытым операторам.

5.5.1. Пусть, помимо рассматриваемого векторного пространства X с топологиями σ_X и τ_X, задано еще одно векторное пространство Y с топологиями σ_Y и τ_Y. Рассмотрим линейный оператор T из X в Y и изучим, прежде всего, вопрос о связи аппроксимирующих множеств F в точке x', где $F \subset X$, и образа $T(F)$ в точке Tx'.

5.5.2. *Справедливы утверждения:*

(1) *включение*

$$T(\mu(\sigma_X(x')) \cap F) \supset \mu(\sigma_Y(Tx')) \cap T(F)$$

равносильно соотношению

$$(\forall U \in \sigma_X(x'))(\exists V \in \sigma_Y(Tx'))\, T(U \cap F) \supset V \cap T(F)$$

— условию (относительной) предоткрытости, или условию (ρ_-) (для параметров T, F и x');

(2) *условие (ρ_-) вместе с требованием непрерывности T как отображения (X, σ_X) в (Y, σ_Y) равносильно следующему условию (относительной) открытости:*

$$T(\mu(\sigma_X(x')) \cap F) = \mu(\sigma_Y(Tx')) \cap T(F);$$

(3) *оператор T удовлетворяет условию (относительной) почти открытости, или условию $(\overline{\rho})$, т. е.*

$$(\forall U \in \sigma_X(x'))(\exists V \in \sigma_Y(Tx'))$$
$$(\mathrm{cl}_{\tau_Y} T(U \cap F) \supset V \cap T(F))$$

в том и только в том случае, если

$$(\forall W \in \mathscr{N}_{\tau_Y})$$
$$(T(\mu(\sigma_X(x')) \cap F) + W \supset \mu(\sigma_Y(Tx')) \cap T(F)).$$

◁ Утверждения (1) и (2) получаются специализацией 5.3.2. Для доказательства (3) обозначим

$$\mathscr{A} := T(\sigma_X(x') \cap F) \quad \mathscr{B} := \sigma_Y(Tx') \cap T(F),$$
$$\mathscr{N} := \big\{N \subset Y^2 : (\exists\, W \in \mathscr{N}_{\tau_Y})\, N \supset \{(y_1, y_2) : y_1 - y_2 \in W\}\big\},$$

т. е. $\mathscr{N}$ — равномерность в Y, отвечающая рассматриваемой топологии. Используя введенные обозначения и привлекая 5.3.2, а также принципы идеализации и переноса, последовательно получаем:

$$(\forall\, N \in \mathscr{N})\, N(\mu(\mathscr{A})) \supset \mu(\mathscr{B}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, N \in \mathscr{N})(\forall\, b \in \mu(\mathscr{B}))(\exists\, a \in \mu(\mathscr{A}))(b \in N(a)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, N \in \mathscr{N})(\forall^{\mathrm{st}} A \in \mathscr{A})(\exists^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(\forall\, b \in B)(\exists\, a \in A)(b \in N(a)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} A \in \mathscr{A})(\forall\, N \in \mathscr{N})(\exists^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(B \subset N(A)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} A \in \mathscr{A})(\exists^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(\forall\, N \in \mathscr{N})(B \subset N(A)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} A \in \mathscr{A})(\exists^{\mathrm{st}} B \in \mathscr{B})(B \subset \mathrm{cl}(A)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, A \in \mathscr{A})(\exists\, B \in \mathscr{B})(B \subset \mathrm{cl}(A)),$$

где замыкание вычисляется в соответствующей равномерной топологии. ▷

5.5.3. *Теорема.* *Имеют место утверждения:*

(1) *если оператор T удовлетворяет условию (ρ) и непрерывен как отображение (X, τ_X) в (Y, τ_Y), то*

$$T(\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(T(F), Tx'),$$
$$T(\mathrm{In}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{In}_\Lambda(T(F), Tx');$$

если, сверх того, T — открытое отображение (X, τ_X) в (Y, τ_Y), то

$$T(\mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{Ha}_\Lambda(T(F), T(x'));$$

(2) *если τ_Y — векторная топология, а линейный оператор $T : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ непрерывен и удовлетворяет условию $(\overline{\rho})$, то*

$$T(\mathrm{Cl}_\Lambda(F, x')) \subset \mathrm{Cl}_\Lambda(T(F), Tx').$$

$\lhd$ (1): Проверим, например, второе из требуемых включений. Для этого, фиксировав $h' \in \mathrm{In}_\Lambda(F, x')$, при $\alpha \in \Lambda$ возьмем $h \approx \tau_X h'$ такой, что при всех $x \approx_{\sigma_X} x'$, $x \in F$ будет $x + \alpha h \in F$. Видно, что $Th \approx_{\sigma_Y} Th'$ и $Tx + \alpha Th \in T(F)$. Привлекая условие (ρ), заключаем: $Th' \in \mathrm{In}_\Lambda(T(F), Tx')$.

Пусть теперь известно, что T удовлетворяет указанному выше дополнительному условию открытости, т. е. на основании 5.5.2 (1) $T(\mu(\tau_X)) \supset \mu(\tau_Y)$. Вместе с непрерывностью T это означает совпадение выписанных монад. Если теперь $y \in T(F)$, $y \approx_{\sigma_Y} Tx'$, то по условию (ρ) будет $y = Tx$, где $x \in F$ и $x \approx_{\sigma_X} x'$. При этом для $z \approx_{\tau_Y} Th'$ можно подыскать $h \approx_{\tau_X} h'$, для которого $z = Th$. Значит, при всех $\alpha \in \Lambda$ выполнено $x + \alpha h \in F$, т. е. $y + \alpha z = Tx + \alpha Th \in T(F)$, как только стандартный h' таков, что $h' \in \mathrm{Ha}_\Lambda(F, x')$.

(2): Возьмем инфинитезималь $\alpha \in \Lambda$ и какой-либо стандартный элемент $h' \in \mathrm{Cl}_\alpha(F, x')$. Пусть W — некоторая бесконечно малая окрестность нуля в τ_Y. Тогда αW — также окрестность нуля по условию. На основании $(\overline{\rho})$, взяв $y \approx_{\sigma_Y} Tx'$, $y \in T(F)$, найдем $x \in \mu(\sigma_X(x')) \cap F$ так, чтобы $y = Tx + \alpha w$ и $w \approx_{\tau_Y} 0$. По условию вхождения h' в конус Кларка имеется элемент $h'' \approx_{\tau_Y} h'$, для которого $x + \alpha h'' \in F$. Итак, $y + \alpha(Th'' - w) = y - \alpha w + \alpha Th'' = T(x + \alpha h'') \in T(F)$. Действительно, отсюда выводим, что $Th'' - w \in Th' + \mu(\tau_Y) - w \in Th' + \mu(\tau_Y) + \mu(\tau_Y) = Th' + \mu(\tau_Y)$. Тем самым установлено: $Th' \in \mathrm{Cl}_\alpha(T(F), Tx')$. $\rhd$

5.5.4. Рассмотрим теперь некоторые векторные пространства X, Y, Z, снабженные топологиями σ_X, τ_X; σ_Y, τ_Y и σ_Z, τ_Z соответственно. Пусть, далее, $F \subset X \times Y$, а $G \subset Y \times Z$ — два соответствия и точка $d' := (x', y', z') \in X \times Y \times Z$ такова, что $a' := (x', y') \in F$ и $b' := (y', z') \in G$. Обозначим $H := X \times G \cap F \times Z$, $c' := (x', z')$. Отметим, что $G \circ F = \mathrm{Pr}_{X \times Z} H$, где $\mathrm{Pr}_{X \times Z}$ — оператор естественного проектирования. Введем следующие сокращения:

$$\sigma_1 := \sigma_X \times \sigma_Y; \quad \sigma_2 := \sigma_Y \times \sigma_Z; \quad \sigma := \sigma_X \times \sigma_Z; \quad \overline{\sigma} := \sigma_X \times \sigma_Y \times \sigma_Z;$$
$$\tau_1 := \tau_X \times \tau_Y; \quad \tau_2 := \tau_Y \times \tau_Z; \quad \tau := \tau_X \times \tau_Z; \quad \overline{\tau} := \tau_X \times \tau_Y \times \tau_Z.$$

Полезно напомнить, что оператор $\mathrm{Pr}_{X \times Z}$ непрерывен и открыт (при использовании «однобуквенных» топологий). По-прежнему фиксируем некоторое множество Λ, составленное из инфинитезимальных чисел. Отметим также необходимое нам свойство монад.

5.5.5. *Монада суперпозиции — это суперпозиция монад.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathscr{A}$ — фильтр в $X \times Y$, а $\mathscr{B}$ — в $Y \times Z$. Имеем

$$\mathscr{B} \circ \mathscr{A} := \operatorname{fil}\{B \circ A : A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\},$$

причем можно считать, что множества, фигурирующие в определении $\mathscr{B} \circ \mathscr{A}$, непусты. Ясно, что

$$B \circ A = \mathrm{Pr}_{X \times Z}(A \times Z \cap X \times B).$$

Итак, интересующий нас фильтр $\mathscr{B} \circ \mathscr{A}$ — это образ $\mathrm{Pr}_{X\times Z}(\mathscr{C})$, где $\mathscr{C} := \mathscr{C}_1 \vee \mathscr{C}_2$ и $\mathscr{C}_1 := \mathscr{A} \times \{Z\}$, $\mathscr{C}_2 := \{X\} \times \mathscr{B}$. Поскольку монада произведения есть произведение монад, а монада точной верхней границы фильтров — пересечение их монад, с учетом 4.1.6 (5) приходим к соотношению

$$\mu(\mathscr{B} \circ \mathscr{A}) = \mathrm{Pr}_{X \times Z}\big(\mu(\mathscr{A}) \times Z \cap X \times \mu(\mathscr{B})\big) = \mu(\mathscr{B}) \circ \mu(\mathscr{A}).$$

Это и требовалось установить. $\triangleright$

5.5.6. *Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *для оператора* $\mathrm{Pr}_{X\times Z}$, *соответствия* H *и точки* c' *выполнено условие* (ρ);

(2) $G \circ F \cap \mu(\sigma(c')) = G \cap \mu(\sigma_2(b')) \circ F \cap \mu(\sigma_1(a'))$;

(3) $(\forall\, V \in \sigma_Y(y'))(\exists\, U \in \sigma_X(x'))(\exists\, W \in \sigma_Z(z'))$
$G \circ F \cap U \times W \subset G \circ I_V \circ F$,

где I_V *— это, как обычно, тождественное отношение на* V.

$\triangleleft$ Применяя 5.3.2, перепишем (3) в эквивалентной форме

$$\begin{gathered}(\forall\, V \in \sigma_Y(y'))(\exists\, O \in \sigma(c'))(\forall\, (x,z) \in O, (x,z) \in G \circ F)\\ (\exists\, y \in V)(x,y) \in F \wedge (y,z) \in G \leftrightarrow (\forall\, (x,z) \approx_{\sigma} c', (x,z) \in G \circ F)\\ (\exists\, y \approx_{\sigma_Y} y')(x,y) \in F \wedge (y,z) \in G \leftrightarrow \mu(\sigma(c')) \cap G \circ F \subset\\ \subset \mu(\sigma_2(b')) \cap G \circ \mu(\sigma_1(a')) \cap F.\end{gathered}$$

Остается заметить, что

$$\begin{gathered}\mathrm{Pr}_{X \times Z}\big(\mu(\overline{\sigma}(d')) \cap H\big) =\\ = \{(x,z) \in G \circ F : x \approx_{\sigma_X} x' \wedge\\ \wedge z \approx_{\sigma_Z} z' \wedge (\exists\, y \approx_{\sigma_Y} y')\,(x,y) \in F \wedge (y,z) \in G\} =\\ = \mu\big(\sigma_2(b')\big) \cap G \circ \mu\big(\sigma_1(a')\big) \cap F.\end{gathered}$$

Тем самым предложение доказано полностью. $\triangleright$

5.5.7. *Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *для оператора* $\mathrm{Pr}_{X\times Z}$, *соответствия* H *и точки* c' *выполнено условие* $(\overline{\rho})$;

(2) $(\forall\, W \in \mathscr{N}_\tau)\, \mu(\sigma_2(b')) \cap G \circ \mu(\sigma_1(a')) \cap F + W \supset \mu(\sigma(c')) \cap G \circ F$;

(3) $(\forall\, V \in \sigma_2(b'))(\forall\, U \in \sigma_1(a'))(\exists\, W \in \sigma(c'))$ $W \cap G \circ F \subset \mathrm{cl}_\tau(V \cap G \circ U \cap F)$;

(4) $(\forall\, U \in \sigma_X(x'))(\forall\, V \in \sigma_Y(y'))(\forall\, W \in \sigma_Z(z'))$ $(\exists\, V \in \sigma(c'))O \cap G \circ F \subset \mathrm{cl}_\tau(G \circ I_V \circ F \cap U \times W)$;

(5) *если* $\tau \geq \sigma$, *то*

$$
(\forall\, V \in \sigma_Y(y'))(\exists\, U \in \sigma_X(x'))(\exists\, W \in \sigma_Z(z'))
$$
$$
G \circ F \cap U \times W \subset \mathrm{cl}_\tau(G \circ I_V \circ F),
$$

т. е., как говорят, выполнено условие $(\overline{\rho c})$ *в точке* $d' := (x', y', z')$.

$\lhd$ Из предложения 5.5.2 (3) и выкладки, проведенной при доказательстве 5.5.2 (3), непосредственно заключаем: (1) $\leftrightarrow$ (2) $\leftrightarrow$ (3).

Для доказательства эквивалентности (3) $\leftrightarrow$ (4) достаточно заметить:

$$
\begin{gathered}
(V \times W) \cap G \circ (U \times V) \cap F = \\
= \{(x, z) \in X \times Z : x \in U \wedge z \in W \wedge (\exists\, y \in V)(x, y) \in F \wedge (y, z) \in G\} = \\
= G \circ I_V \circ F \cap U \times W
\end{gathered}
$$

для всяких $U \subset X$, $V \subset Y$, $W \subset Z$.

Таким образом, остается установить только, что (4) $\leftrightarrow$ (5). При этом импликация (4) $\rightarrow$ (5) не вызывает сомнений, ибо (5) получается специализацией (4) при $U := X$ и $W := Z$.

Для проверки (5) $\rightarrow$ (4), взяв $V \in \sigma_Y(y')$, подберем открытую окрестность $C \in \sigma(c')$, чтобы было $G \circ F \cap C \subset \mathrm{cl}_\tau(A)$, где $A := G \circ I_V \circ F$. Взяв открытые $U \in \sigma_X(x')$ и $W \in \sigma_Z(z')$, положим $B := U \times W$ и $O := B \cap C$. Очевидно, что $G \circ F \cap O \subset (\mathrm{cl}_\tau(A)) \cap B$. Работая в стандартном антураже, для $a \in (\mathrm{cl}_\tau(A)) \cap B$ найдем точку $a' \in A$ такую, что $a' \approx_\tau a$. Ясно, что $a' \approx_\sigma a$, ибо $\mu(\tau) \subset \mu(\sigma)$ по условию. Ввиду σ-открытости B будет $a' \in B$, т. е. $a' \in A \cap B$ и $a \in \mathrm{cl}_\tau(A \cap B)$. Окончательно $G \circ F \cap O \subset \mathrm{cl}_\tau(A \cap B)$, что и нужно было обеспечить. $\rhd$

5.5.8. *Имеют место включения:*

(1) $\mathrm{Ha}_\Lambda(H,d') \supset X \times \mathrm{Ha}_\Lambda(G,b') \cap \mathrm{Ha}_\Lambda(F,a') \times Z$;

(2) $R^2_\Lambda(H,d') \supset X \times R^1_\Lambda(G,b') \cap R^2_\Lambda(F,a') \times Z$;

(3) $\mathrm{Cl}_\Lambda(H,d') \supset X \times Q^1_\Lambda(G,b') \cap \mathrm{Cl}_\Lambda(F,a') \times Z$;

(4) $\mathrm{Cl}_\Lambda(H,d') \supset X \times \mathrm{Cl}(G,b') \cap Q^2_\Lambda(F,a') \times Z$;

(5) $\mathrm{Cl}^2(H,d') \supset X \times P^2(G,b') \cap S^2(F,a') \times Z$, *где множество* $\mathrm{Cl}^2(H,d')$ *определено соотношением*

$$\mathrm{Cl}^2(H,d') :=$$
$$:= {}^*\{(s',t',r') \in X \times Y \times Z : (\forall\, d \approx{}_{\overline{\sigma}} d', d \in H)$$
$$(\forall\, \alpha \in \mu(\mathbb{R}_+))(\exists\, s \approx{}_{\tau_X} s')(\forall\, t \approx{}_{\tau_Y} t')(\exists\, r \approx{}_{\tau_Z} z')(d + \alpha(s,t,r) \in H)\}.$$

$\lhd$ Проверим только (1) и (5), так как прочие утверждения проверяются по той же схеме.

(1): Пусть элемент (s',t',r') стандартен и входит в правую часть рассматриваемого соотношения. Возьмем $d \approx{}_{\overline{\sigma}} d'$ и $\alpha \in \Lambda$, где $d := (x,y,z) \in H$. Ясно, что $a := (x,y) \in F$ и $a \approx{}_{\sigma_1} a'$, а $b := (y,z) \in G$, $b \approx{}_{\sigma_2} b'$. В этой связи для $\alpha \in \Lambda$ и $(s,t,r) \approx{}_{\overline{\tau}} (s',t',r')$ будет $a + \alpha(s,t) \in F$ и $b + \alpha(t,r) \in G$. Итак,

$$d + \alpha(s,t,r) = (a + \alpha(s,t), z + \alpha r) \in F \times Z,$$
$$d + \alpha(s,t,r) = (x + \alpha s, b + \alpha(t,r)) \in X \times G,$$

т. е. $(s',t',r') \in \mathrm{Ha}_\Lambda(H,d')$.

(5): Возьмем стандартный элемент (s',t',r') из правой части (4). По определению имеется элемент $s \approx{}_{\tau_X} s'$ такой, что для всякого $t \approx{}_{\tau_Y} t'$ при некотором $r \approx{}_{\tau_Z} r'$ и всех $a \approx{}_{\sigma_1} a'$ и $b \approx_{\sigma_2} b'$ будет $a + \alpha(s,t) \in F$ и $b + \alpha(t,r) \in G$. Ясно, что и подавно $d + \alpha(s,t,r) \in H$, как только $b \approx{}_{\overline{\sigma}} d'$ и $d \in H$. $\rhd$

5.5.9. Подчеркнем, что механизм «проскоков», проиллюстрированный в 5.5.8, можно модифицировать в зависимости от целей исследования. Как правило, в такие цели включают оценки аппроксимации композиции множеств. При этом наиболее удобно использовать схему, основанную на использовании метода общего положения [112, 121], а также уточняющие и обобщающие эту схему результаты, представленные выше. Сформулируем только один из возможных результатов.

5.5.10. *Теорема.* *Пусть τ — векторная топология, $\tau \geq \sigma$ и соответствия $F \subset X \times Y$ и $G \subset Y \times Z$ таковы, что $\mathrm{Ha}(F, a') \neq \varnothing$ и конусы $Q_2(F, a') \times Z$ и $X \times \mathrm{Cl}(G, b')$ находятся в общем положении (относительно топологии $\overline{\tau}$), тогда*

$$\mathrm{Cl}(G \circ F, c') \supset \mathrm{Cl}(G, b') \circ \mathrm{Cl}(F, a'),$$

если выполнено условие ($\overline{\rho c}$) в точке d'.

$\triangleleft$ Доказательство проводится по образцу предложения 5.3.13 в [112] и состоит в констатации выполнения (уже установленных) условий, обеспечивающих справедливость следующих выкладок:

$$\begin{gathered}
\mathrm{Cl}(G \circ F, c') = \mathrm{Cl}(\mathrm{Pr}_{X \times Z} H, \mathrm{Pr}_{X \times Z} d') \supset \mathrm{cl}_\tau(\mathrm{Pr}_{X \times Z} \mathrm{Cl}(H, d')) \supset \\
\supset \mathrm{Pr}_{X \times Z} \mathrm{cl}_{\overline{\tau}}(X \times \mathrm{Cl}(G, b') \cap Q^2(F, a') \times Z) = \\
= \mathrm{Pr}_{X \times Z}(\mathrm{cl}_{\overline{\tau}}(X \times \mathrm{Cl}(G, b')) \cap \mathrm{cl}_{\overline{\tau}}(Q^2(F, a') \times Z)) = \\
= \mathrm{Pr}_{X \times Z}(X \times \mathrm{Cl}(G, b') \cap \mathrm{Cl}(F, a') \times Z) = \mathrm{Cl}(G, b') \circ \mathrm{Cl}(F, a').
\end{gathered}$$

Тем самым доказательство завершено. $\triangleright$

5.6. Инфинитезимальные субдифференциалы

В теории экстремальных задач известное внимание уделяется проблеме учета точности соблюдения критериев оптимальности при практической реализации вычислений. Общепринятый качественный подход к названной проблеме отражен в так называемом выпуклом ε-программировании, дающем аппарат оценок приближения к оптимуму по функционалу. Развитый на этом пути инструментарий достаточно специфичен и в некотором смысле оказывается искусственно усложненным. В то же время он не вполне коррелирует с бытующими приемами, основанными на поиске «практического оптимума» с помощью «практически точного» соблюдения требований дополняющей нежесткости, отвечающих классическому случаю $\varepsilon = 0$. В результате можно говорить об определенном расхождении и даже разрыве теоретических и практических воззрений.

Здесь мы изложим подход к преодолению имеющихся трудностей в рамках радикальной установки нестандартного анализа. В качестве основы вводится понятие инфинитезимально оптимального решения — допустимой точки, значение целевой функции в которой бесконечно близко к идеалу — не обязательно реализованному значению программы. Таким образом, инфинитезимальный оптимум предстает в качестве приемлемого претендента на роль «практического» оптимума, ибо никакие осуществимые процедуры не в состоянии отличить его от обычного — «теоретического» оптимума. Приводятся основные формулы исчисления инфинитезимальных субдифференциалов, отвечающих приведенной концепции оптимальности. Получающиеся правила для внешних множеств совпадают по форме со своими классическими аналогами стандартного выпуклого анализа. При этом в признаках инфинитезимальной оптимальности действительно возникает приближенно выполненная дополняющая нежесткость.

5.6.1. Пусть X — векторное пространство, $E^\bullet$ — упорядоченное векторное пространство с присоединенным наибольшим элементом $+\infty$. Рассмотрим выпуклый оператор $f : X \to E^\bullet$ и точку $\overline{x}$ из эффективного множества $\operatorname{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ оператора F. Для элемента $\varepsilon \geq 0$ (из конуса положительных элементов E^+ пространства E) принятым способом определяем *ε-субдифференциал* f в точке $\overline{x}$, т. е. множество

$$\partial_\varepsilon f(\overline{x}) := \{T \in L(X,E) : (\forall\, x \in X)(Tx - Tx \leq f(x) - f(\overline{x}) + \varepsilon)\},$$

где $L(X,E)$ — пространство линейных операторов, действующих из X в E.

5.6.2. Пусть в E выделено фильтрованное по убыванию семейство $\mathscr{E}$ положительных элементов. Считая E и $\mathscr{E}$ стандартными множествами, определим *монаду* $\mu(\mathscr{E})$ соотношением

$$\mu(\mathscr{E}) := \bigcap \{[0,\varepsilon] : \varepsilon \in {}^\circ\mathscr{E}\}.$$

Элементы $\mu(\mathscr{E})$ называют положительными *бесконечно малыми* или *инфинитезимальными* (*относительно* $\mathscr{E}$).

В дальнейшем без особых оговорок подразумевается, что E — это K-пространство, а монада $\mu(\mathscr{E})$ — это внешний конус над ${}^\circ\mathbb{R}$ и, кроме того, $\mu(\mathscr{E}) \cap {}^\circ E = 0$. (В приложениях, как правило, $\mathscr{E}$ — фильтр единиц в E.) Будет использоваться также отношение *бесконечной близости* между элементами E, т. е.

$$e_1 \approx e_2 \leftrightarrow e_1 - e_2 \in \mu(\mathscr{E}) \wedge e_2 - e_1 \in \mu(\mathscr{E}).$$

5.6.3. *Имеет место равенство*

$$\bigcap_{\varepsilon\in{}^\circ\mathscr{E}} \partial_\varepsilon f(\overline{x}) = \bigcup_{\varepsilon\in\mu(\mathscr{E})} \partial_\varepsilon f(\overline{x}).$$

$\lhd$ Для $T \in L(X,E)$ последовательно выводим:

$$T \in \bigcap_{\varepsilon\in{}^\circ\mathscr{E}} \partial_\varepsilon f(\overline{x}) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon \in \mathscr{E})(\forall\, x \in X)(Tx - T\overline{x} \le f(x) - f(\overline{x}) + \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon \in \mathscr{E})\, f^*(T) := \sup_{x\in\mathrm{dom}(f)} (Tx - f(x)) \le T\overline{x} - f(\overline{x}) + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon \in \mathscr{E})0 \le f^*(T) - (T\overline{x} - f(\overline{x})) \le -\varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow f^*(T) - (T\overline{x} - f(\overline{x})) \approx 0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists\,\varepsilon \in E^+)\,\varepsilon \approx 0 \wedge f^*(T) = T\overline{x} - f(\overline{x}) + \varepsilon \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow T \in \bigcup_{\varepsilon\in\mu(\mathscr{E})} \partial_\varepsilon f(\overline{x}),$$

что и требуется. $\rhd$

5.6.4. Внешнее множество, фигурирующее в обеих частях равенства 5.6.3, называют *инфинитезимальным субдифференциалом* f в точке $\overline{x}$ и обозначают $Df(\overline{x})$. Элементы $Df(\overline{x})$ называют *инфинитезимальными субградиентами* f в точке $\overline{x}$. Специальных указаний на множество $\mathscr{E}$ при этом не делают, так как вероятность недоразумений незначительна.

5.6.5. *Пусть выполнено предположение стандартности антуража, т. е. параметры X, f, $\overline{x}$ — стандартные множества. Стандартизация инфинитезимального субдифференциала отображения f в точке $\overline{x}$ совпадает с (нулевым) субдифференциалом f в точке $\overline{x}$, т. е.*

$$^*Df(\overline{x}) = \partial f(\overline{x}).$$

$\lhd$ Для стандартного $T \in {}^\circ L(X,E)$ в силу принципа переноса выполнено

$$T \in {}^*Df(\overline{x}) \leftrightarrow T \in Df(\overline{x}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon \in \mathscr{E})(\forall\, x \in X)(Tx - T\overline{x} \le f(x) - f(\overline{x}) + \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\, \varepsilon \in \mathscr{E})(\forall\, x \in X)(Tx - T\overline{x} \le f(x) - f(\overline{x}) + \varepsilon) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow T \in \partial f(\overline{x}),$$

ибо $\inf \mathscr{E} = 0$ на основании соотношения $\mu(\mathscr{E}) \cap {}^\circ E = 0$. $\rhd$

5.6.6. *Пусть F — стандартное K-пространство и $g : E \to F^\bullet$ — возрастающий выпуклый оператор. Если множества $X \times \operatorname{epi}(g)$ и $\operatorname{epi}(f) \times F$ находятся в общем положении, то*

$$D(g \circ f)(\overline{x}) = \bigcup_{T \in Dg(f(\overline{x}))} D(T \circ f)\ (\overline{x}).$$

Если, кроме того, параметры (за исключением, быть может, точки $\overline{x}$) стандартны, то для стандартных ядер справедливо представление

$$^\circ D(g \circ f)(\overline{x}) = \bigcup_{T \in {}^\circ Dg(f(\overline{x}))} {}^\circ D(T \circ f)(\overline{x}).$$

$\lhd$ Отметим, что по условию монада $\mu(\mathscr{E})$ — это нормальная внешняя подполугруппа в F, т. е.

$$\varepsilon \in \mu(\mathscr{E}) \to [0, \varepsilon] \subset \mu(\mathscr{E}),$$
$$\mu(\mathscr{E}) + \mu(\mathscr{E}) \subset \mu(\mathscr{E}).$$

Учитывая это обстоятельство и привлекая как 5.6.3, так и правила вычисления ε-субдифференциалов, последовательно получаем

$$D(g \circ f)\,(\overline{x}) = \bigcup_{\varepsilon \in \mu(\mathscr{E})} \partial_\varepsilon (g \circ f)\,(\overline{x}) =$$
$$= \bigcup_{\varepsilon \in \mu(\mathscr{E})} \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon \\ \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0}} \bigcup_{T \in \partial \varepsilon_1 g(f(\overline{x}))} \partial_{\varepsilon_2} (T \circ f)\,(\overline{x}) =$$
$$= \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0 \\ \varepsilon_1 \approx 0, \varepsilon_2 \approx 0}} \bigcup_{T \in \partial_{\varepsilon_1} g(f(\overline{x}))} \partial_{\varepsilon_2} (T \circ f)\,(\overline{x}) =$$
$$= \bigcup_{\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_1 \approx 0} \bigcup_{T \in \partial_{\varepsilon_1} g(f(\overline{x}))} \bigcup_{\varepsilon_2 \geq 0, \varepsilon_2 \approx 0} \partial_{\varepsilon_2} (T \circ f)\,(\overline{x}) =$$
$$= \bigcup_{\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_1 \approx 0} \bigcup_{T \in \partial_{\varepsilon_1} g(f(\overline{x}))} D(T \circ f)\,(\overline{x}).$$

Пусть теперь выполнено предположение о стандартности антуража и $S \in {}^\circ D(g \circ f)\,(\overline{x})$. Тогда для некоторого бесконечно малого ε будет

$$(g \circ f)^*(S) = \sup_{x \in \operatorname{dom}(g \circ f)} (Sx - g \circ f(x)) \leq S\overline{x} - g(f(\overline{x})) + \varepsilon.$$

По формуле замены переменной в преобразовании Юнга — Фенхеля с учетом принципа переноса имеется стандартный оператор $T \in {}^{\circ}L(E,F)$ такой, что T положителен, т. е. $T \in L^{+}(E,F)$ и, кроме того,

$$(g \circ f)^{*}(S) = (T \circ f)^{*}(S) + g^{*}(T).$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}\varepsilon \geq \sup_{x \in \mathrm{dom}(f)} (Sx - T \circ f(x)) + \sup_{e \in \mathrm{dom}(g)} (Te - g(e)) - S\overline{x} + g(f(\overline{x})) = \\ = \sup_{x \in \mathrm{dom}(f)} (Sx - S\overline{x} - (T \circ f(x) - T \circ f(\overline{x}))) + \\ + \sup_{e \in \mathrm{dom}(g)} (Te - T \circ f(\overline{x}) - (g(e) - g(f(\overline{x})))).\end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &:= \sup_{e \in \mathrm{dom}(g)} (Te - T \circ f(\overline{x}) - (g(e) - g(f(\overline{x})))), \\ \varepsilon_2 &:= \sup_{x \in \mathrm{dom}(f)} (Sx - S\overline{x} - (T \circ f(x) - T \circ f(\overline{x}))).\end{aligned}$$

Ясно, что $S \in \partial_{\varepsilon_2}(T \circ f)(\overline{x})$, т. е. $S \in {}^{\circ}D(T \circ f)(\overline{x})$ и $T \in \partial_{\varepsilon_1} g(f(\overline{x}))$, т. е. $T \in {}^{\circ}Dg(f(\overline{x}))$, ибо $\varepsilon_1 \approx 0$ и $\varepsilon_2 \approx 0$. $\triangleright$

5.6.7. *Пусть $f_1, \ldots, f_n : X \to E^{\bullet}$ — выпуклые операторы, причем n — стандартное натуральное число. Если $f_1, \ldots, f_n$ находятся в общем положении, то для точки $\overline{x} \in \mathrm{dom}(f_1) \cap \ldots \cap \mathrm{dom}(f_n)$ выполнено*

$$D(f_1 + \ldots + f_n)(\overline{x}) = Df_1(\overline{x}) + \ldots + Df_n(\overline{x}).$$

$\triangleleft$ Доказательство состоит в применении 5.6.3 и правила ε-субдифференцирования суммы с учетом того, что сумма стандартного числа бесконечно малых слагаемых вновь бесконечно мала. $\triangleright$

5.6.8. *Пусть $f_1, \ldots, f_n : X \to E^{\bullet}$ — выпуклые операторы, причем n — стандартное число. Допустим, что $f_1, \ldots, f_n$ находятся в общем положении, E — это векторная решетка и $\overline{x} \in \mathrm{dom}(f_1 \vee \ldots \vee f_n)$. Если F — стандартное K-пространство и $T \in L^{+}(E,F)$ — положительный линейный оператор, то элемент $S \in L(X,F)$ служит инфинитезимальным субградиентом оператора $T \circ (f_1 \vee \ldots \vee f_n)$ в точке*

$\overline{x}$ в том и только в том случае, если совместна следующая система условий:

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k; \quad T_k \in L^{+}(E, F) \quad (k := 1, \ldots, n);$$

$$\sum_{k=1}^{n} T_k \overline{x} \approx T(f_1(\overline{x}) \vee \ldots \vee f_n(\overline{x})); \quad S \in \sum_{k=1}^{n} D(T_k \circ f_k)(\overline{x}).$$

$\triangleleft$ Определяем следующие операторы:

$$(f_1, \ldots, f_n) : X \to (E^n)^{\bullet}, \quad (f_1, \ldots, f_n)(x) := (f_1(x), \ldots, f_n(x));$$
$$\varkappa : E^n \to E, \quad \varkappa(e_1, \ldots, e_n) := e_1 \vee \ldots \vee e_n.$$

Тогда справедливо представление:

$$T \circ f_1 \vee \ldots \vee f_n = T \circ \varkappa \circ (f_1, \ldots, f_n).$$

Отсюда, учитывая 5.6.5 и вспоминая, что $T \circ \varkappa$ — сублинейный оператор, выводим требуемое. $\triangleright$

5.6.9. Пусть X — векторное пространство, E — некоторое K-пространство и $\mathfrak{A}$ — слабо порядково ограниченное множество в $L(X, E)$. Рассмотрим регулярный выпуклый оператор $f := \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle^{e}$, где, как обычно, $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ — *канонический сублинейный оператор*

$$\varepsilon_{\mathfrak{A}} : l_{\infty}(\mathfrak{A}, E) \to E, \quad \varepsilon_{\mathfrak{A}}(f) := \sup f(\mathfrak{A}),$$

и аффинный оператор $\langle \mathfrak{A} \rangle^{\varepsilon}$ для $e \in l_{\infty}(\mathfrak{A}, E)$ действует по правилу $\langle \mathfrak{A} \rangle^{e} x := \langle \mathfrak{A} \rangle x + e$, $\langle \mathfrak{A} \rangle x : T \in \mathfrak{A} \mapsto Tx$.

5.6.10. *Если $g : E \to F^{\bullet}$ — возрастающий выпуклый оператор, действующий в стандартное K-пространство F, причем в образе $f(X)$ имеется алгебраически внутренняя точка $\mathrm{dom}(g)$, а элемент $\overline{x}$ из X таков, что $f(\overline{x}) \in \mathrm{dom}(g)$, то справедливо представление*

$$D(g \circ f)(\overline{x}) =$$
$$= \{T \circ \langle \mathfrak{A} \rangle : T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in Dg(f(\overline{x})), T \geq 0, T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} f(\overline{x}) \approx T \circ \langle \mathfrak{A} \rangle^{e} \overline{x}\}.$$

$\triangleleft$ Если $S \in D(g \circ f)(\overline{x})$, то по 5.6.3 $S \in \partial_\varepsilon(g \circ f)(\overline{x})$ при некотором $\varepsilon \approx 0$. Остается привлечь соответствующее правило ε-субдифференцирования.

Если же $T \geq 0, T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in Dg(f(\overline{x}))$ и $T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} f(\overline{x}) \approx T \circ \langle \mathfrak{A} \rangle^e \overline{x}$, то для некоторого $\varepsilon \approx 0$ будет, конечно же, $T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in \partial_\varepsilon g(f(\overline{x}))$. Положим, кроме того, $\delta := T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} f(\overline{x}) - T \circ \langle \mathfrak{A} \rangle^e \overline{x}$. Тогда $\delta \geq 0$ и $\delta \approx 0$ по условию. Значит, $T \circ \langle \mathfrak{A} \rangle \in \partial_{\varepsilon+\delta}(g \circ f)(\overline{x})$. Остается заметить, что $\varepsilon + \delta \approx 0$. $\triangleright$

5.6.11. *Пусть в условиях 5.6.10 отображение g — это сублинейный оператор Магарам. Тогда*

$$D(g \circ f)(\overline{x}) = \bigcup_{T \in Dg(f(\overline{x}))} \ \bigcup_{\delta \geq 0, T\delta \approx 0} T(\partial_\delta f(\overline{x})).$$

$\triangleleft$ В силу 5.6.5 можно считать, что $g := T$. Если для всякого $x \in X$ выполнено $Cx - C\overline{x} \leq f(x) - f(\overline{x}) + \delta$ и $T\delta \approx 0$, то бесспорно $TC \in \partial_{T\delta}(T \circ f)(\overline{x}) \subset D(T \circ f)(\overline{x})$. Для завершения доказательства возьмем $S \in D(T \circ f)(\overline{x})$. В силу 5.6.3 имеется бесконечно малое ε такое, что $S \in \partial_\varepsilon(T \circ f)(\overline{x})$. Привлекая соответствующее правило ε-субдифференцирования, найдем $\delta \geq 0$ и $C \in \partial_\delta f(\overline{x})$ такие, что $T\delta \leq \varepsilon$ и $S = TC$. Это и требовалось. $\triangleright$

5.6.12. *Пусть Ξ — некоторое множество и $(f_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — равномерно регулярное семейство выпуклых операторов. Справедливы представления:*

$$D\Big(\sum_{\xi \in \Xi} f_\xi\Big)(\overline{x}) = \bigcup_{\substack{\delta \in l_1(\Xi, E) \\ \delta \geq 0, \delta \approx 0}} \sum_{\xi \in \Xi} \partial_{\delta(\xi)} f_\xi(\overline{x});$$

$$D\big(\sup_{\xi \in \Xi} f_\xi\big)(\overline{x}) =$$

$$\bigcup \Big\{ \sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi \partial_{\delta(\xi)} f_\xi(\overline{x}) : 0 \leq \alpha_\xi \leq \mathbf{1}_E, \quad \sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi = \mathbf{1}_E,$$

$$\sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi f_\xi(\overline{x}) \approx \sup_{\xi \in \Xi} f_\xi(\overline{x}), \quad \sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi \delta(\xi) \approx 0 \Big\}.$$

$\triangleleft$ Доказательство немедленно вытекает из 5.6.11 с учетом правил дезинтегрирования (см. [121]). $\triangleright$

5.6.13. Полезно отметить, что формулы 5.6.7–5.6.12 допускают уточнения, аналогичные имеющемуся в 5.6.6 в случае стандартности антуража (в который, быть может, не включена точка $\overline{x}$). Подчеркнем также, что по приведенным образцам выводится полный спектр всевозможных формул субдифференциального исчисления (свертки, лебеговы множества и т. п.).

5.6.14. Пусть, как и выше, $f : X \to E^{\bullet}$ — выпуклый оператор, действующий в стандартное K-пространство E, и $\mathscr{X} := \mathscr{X}(\,\cdot\,)$ — *обобщенная точка в* $\operatorname{dom}(f)$, т. е. сеть элементов $\operatorname{dom}(f)$. Говорят, что оператор $T \in L(X, E)$ — это *инфинитезимальный субградиент* f в обобщенной точке $\mathscr{X}$, если для некоторого бесконечно малого положительного ε выполнено

$$f^*(T) \le \liminf(T\mathscr{X} - f(\mathscr{X})) + \varepsilon$$

(здесь, конечно, действует правило $T\mathscr{X} := T \circ \mathscr{X}$). Таким образом, в предположении стандартности антуража инфинитезимальный субградиент — это обычный опорный оператор в обобщенной точке (см. [1, 121]). Условимся обозначать символом $Df(\mathscr{X})$ совокупность всех инфинитезимальных субградиентов f в $\mathscr{X}$. Это множество по понятным причинам называют *инфинитезимальным субдифференциалом* f в $\mathscr{X}$. Приведем выводы для двух основных правил субдифференцирования в обобщенной точке, представляющие интерес в связи с тем, что точные формулы для соответствующих ε-субдифференциалов неизвестны.

5.6.15. *Пусть $f_1, \dots, f_n$ — стандартный набор выпуклых операторов в общем положении и обобщенная точка $\mathscr{X}$ лежит в пересечении* $\operatorname{dom}(f_1) \cap \ldots \cap \operatorname{dom}(f_n)$. *Тогда*

$$D(f_1 + \ldots + f_n)\ (\mathscr{X}) = Df_1(\mathscr{X}) + \ldots + Df_n(\mathscr{X}).$$

$\triangleleft$ Пусть $T_k \in Df_k(\mathscr{X})$ для $k := 1, \dots, n$, т. е.

$$f_k^*(T_k) \le \liminf(T_k\mathscr{X} - f_k(\mathscr{X})) + \varepsilon_k$$

при подходящих бесконечно малых $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. При этом

$$(f_1 + \ldots + f_n)^*(T_1 + \ldots + T_n) \le \sum_{k=1}^{n} f_k^*(T_k) \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} (\liminf(T_k\mathscr{X} - f_k(\mathscr{X})) + \varepsilon_k) \le$$
$$\le \liminf \sum_{k=1}^{n} (T_k\mathscr{X} - f_k(\mathscr{X})) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$$

в силу обычных свойств преобразования Юнга — Фенхеля и нижнего предела. Остается заметить, что $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n \approx 0$ и сделать вывод о справедливости включения $\supset$ для множеств, рассматриваемых в интересующем нас равенстве.

Для проверки противоположного включения, сведя дело к $n=2$, возьмем $T \in D(f_1 + f_2)(\mathscr{X})$. Тогда при некоторых $\varepsilon \approx 0$ и T_1, T_2 таких, что $T_1 + T_2 = T$, будет

$$(f_1 + f_2)^*(T) = f_1^*(T_1) + f_2^*(T_2),$$
$$f_1^*(T_1) + f_2^*(T_2) - \liminf(T\mathscr{X} - (f_1 + f_2)(\mathscr{X})) \le \varepsilon.$$

Положим по определению

$$\delta_1 := f_1^*(T_1) - \liminf(T_1\mathscr{X} - f_1(\mathscr{X})),$$
$$\delta_2 := f_2^*(T_2) - \liminf(T_2\mathscr{X} - f_2(\mathscr{X})).$$

Видно, что при $k := 1, 2$ выполнено

$$0 \le \sup_{x \in \operatorname{dom}(f_k)} (T_k x - f_k(x)) - \limsup\,(T_k\mathscr{X} - f_k(\mathscr{X})) \le \delta_k.$$

Значит, остается убедиться в бесконечной малости δ_1 и δ_2. Имеем

$$\delta_1 + \delta_2 \le$$
$$\le \varepsilon + \liminf(T\mathscr{X} - (f_1 + f_2)(\mathscr{X})) - \sum_{k=1}^{2} \liminf(T_k\mathscr{X} - f_k(\mathscr{X})) \le$$
$$\le (\varepsilon + \limsup(T_1\mathscr{X} - f_1(\mathscr{X})) - \liminf(T_1\mathscr{X} - f_1(\mathscr{X})))\wedge$$
$$\wedge(\varepsilon + \limsup(T_2\mathscr{X} - f_2(\mathscr{X})) - \liminf(T_2\mathscr{X} - f_2(\mathscr{X})) \le$$
$$\le \big(\varepsilon + f_1^*(T_1) - \liminf(T_1\mathscr{X} - f_1(\mathscr{X}))\big)\wedge$$
$$\wedge\big(\varepsilon + f_2^*(T_2) - \liminf(T_2\mathscr{X} - f_2(\mathscr{X}))\big) \le$$
$$\le \varepsilon + \delta_1 \wedge \delta_2.$$

Отсюда $0 \le \delta_1 \vee \delta_2 \le \varepsilon$, что и завершает доказательство. $\triangleright$

5.6.16. *Пусть F — стандартное K-пространство и $g : E \to F'$ — возрастающий выпуклый оператор. Если множества $X \times \mathrm{epi}(g)$ и $\mathrm{epi}(f) \times F$ находятся в общем положении, то для обобщенной точки $\mathscr{X}$ в $\mathrm{dom}(g \circ f)$ выполнено*

$$D(g \circ f)(\mathscr{X}) = \bigcup_{T \in Dg(f(\mathscr{X}))} D(T \circ f)(\mathscr{X}).$$

$\lhd$ Если известно, что

$$(T \circ f)^*(S) \leq \liminf(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon_1,$$
$$g^*(T) \leq \liminf(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon_2$$

для некоторых бесконечно малых ε_1 и ε_2, то

$$(g \circ f)^*(S) \leq (T \circ f)^*(S) + g^*(T) \leq$$
$$\leq \liminf(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon_1 + \liminf(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon_2 \leq$$
$$\leq \liminf(S\mathscr{X} - g \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Следовательно, $S \in D(g \circ f)(\mathscr{X})$ и правая часть анализируемой формулы символизирует множество, входящее в ее левую часть.

Для завершения доказательства возьмем $S \in D(g \circ f)(\mathscr{X})$. Тогда найдутся бесконечно малое ε и оператор T такие, что

$$(g \circ f)^*(S) = (T \circ f)^*(S) + g^*(T) \leq \liminf(S\mathscr{X} - g \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon.$$

Положим

$$\delta_1 := (T \circ f)^*(S) - \liminf(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})),$$
$$\delta_2 := g^*(T) - \liminf(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})).$$

Учитывая свойства верхних и нижних пределов, выводим, во-первых,

$$\delta_1 \geq (T \circ f)^*(S) - \limsup(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) \geq 0,$$
$$\delta_2 \geq g^*(T) - \limsup(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) \geq 0$$

и, во-вторых,

$$
\begin{gathered}
\delta_1 + \delta_2 \leq \\
\leq \liminf(S\mathscr{X} - g \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon - \liminf(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) - \\
- \liminf(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) \leq (\limsup(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) - \\
- \liminf(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) + \varepsilon) \wedge (\limsup(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) - \\
- \liminf(T \circ f(\mathscr{X}) - gf(\mathscr{X})) + \varepsilon) \leq \delta_1 \wedge \delta_2 + \varepsilon,
\end{gathered}
$$

ибо справедливы очевидные неравенства

$$
\begin{gathered}
\limsup(T \circ f(\mathscr{X}) - g \circ f(\mathscr{X})) \leq g^*(T), \\
\limsup(S\mathscr{X} - T \circ f(\mathscr{X})) \leq (T \circ f)^*(S).
\end{gathered}
$$

Таким образом, $0 \leq \delta_1 \vee \delta_2 \leq \varepsilon$ и $\delta_1 \approx 0$, $\delta_2 \approx 0$. Это означает, что $T \in Dg(f(\mathscr{X}))$ и $S \in D(T \circ f)\,(\mathscr{X})$. $\triangleright$

5.6.17. Дадим теперь некоторое обобщение понятия инфинитезимального субдифференциала, апеллирующее к предельно широкому спектру внешних возможностей.

Пусть, как и прежде, F — выпуклый оператор и B — возможно внешнее подмножество $\operatorname{dom}(F)$. Полагаем

$$
DF(B) := \bigcap_{\overline{x} \in B} DF(\overline{x}).
$$

Внешнее множество $DF(B)$ называют *инфинитезимальным субдифференциалом F вдоль множества B*.

Пусть теперь $\mathscr{B}$ — (вообще говоря, внешний) базис фильтра в эффективной области определения $\operatorname{dom}(F)$ выпуклого оператора F. Иногда такой базис называют *обобщенной точкой*. Определим *инфинитезимальный субдифференциал F* вдоль базиса фильтра $\mathscr{B}$ (в обобщенной точке $\mathscr{B}$) соотношением

$$
DF(\mathscr{B}) := \bigcup_{B \in \mathscr{B}} DF(B).
$$

5.6.18. *Для оператора T из $L(X, Y)$ эквивалентны утверждения:*

(1) $T \in DF(\mathscr{B})$;
(2) $(\exists B \in \mathscr{B})(\forall \overline{x} \in B)(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))\, T \in \partial_\varepsilon F(\overline{x})$;
(3) $(\exists B \in \mathscr{B})(\forall \varepsilon \in {}^\circ\mathscr{E})(\forall \overline{x} \in B) T \in \partial_\varepsilon F(\overline{x})$;
(4) $(\exists B \in \mathscr{B})(\forall \overline{x} \in B)(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))(F^*(T) \le T\overline{x} - F\overline{x} + \varepsilon)$, *где* F^* *— преобразование Юнга — Фенхеля оператора* F;
(5) *найдется* $B \in \mathscr{B}$ *такое, что*
$$(\forall \overline{x} \in B) \sup_{x \in \operatorname{dom}(F)} ((Tx - T\overline{x}) - (Fx - F\overline{x})) \approx 0.$$

$\lhd$ Привлекая определения, видим

$$DF(\mathscr{B}) = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} \bigcap_{\overline{x} \in B} DF(\overline{x}) = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} \bigcap_{\overline{x} \in B} \bigcap_{\varepsilon \in {}^\circ\mathscr{E}} \partial_\varepsilon F(\overline{x}) =$$
$$= \bigcup_{B \in \mathscr{B}} \bigcap_{\varepsilon \in {}^\circ\mathscr{E}} \bigcap_{\overline{x} \in B} \partial_\varepsilon F(\overline{x}),$$

что означает эквивалентность (1) $\leftrightarrow$ (3). Ссылка на принцип Коши обеспечивает (2) $\leftrightarrow$ (3). Прочие эквивалентности следуют из определения преобразования Юнга — Фенхеля. $\rhd$

5.6.19. *Пусть* $\mathscr{C} := \{C \subset X : (\exists B \in \mathscr{B})\, C \supset B\}$ *— внешний фильтр, порожденный базисом* $\mathscr{B}$. *Тогда* $DF(\mathscr{C}) = DF(\mathscr{B})$.

$\lhd$ Ясно, что $\mathscr{C} \supset \mathscr{B}$ и поэтому

$$DF(\mathscr{C}) = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} DF(C) \supset \bigcup_{B \in \mathscr{B}} DF(B) = DF(\mathscr{B}).$$

Если теперь $T \in DF(\mathscr{C})$, то в силу 5.6.18 для некоторого C из $\mathscr{C}$ будет выполнено условие

$$(\forall \overline{x} \in C) \sup_{x \in \operatorname{dom}(F)} ((Tx - T\overline{x}) - (Fx - F\overline{x})) \approx 0.$$

Множество C содержит некоторый элемент B базиса $\mathscr{B}$ по условию. Апеллируя к 5.6.18, видим, что $T \in DF(B) \subset DF(\mathscr{B})$. $\rhd$

5.6.20. *Пусть* $\mathscr{B}$ *— внутренний фильтр в* X *и* $f : X \to \mathbb{R}$ *— (всюду определенная) выпуклая функция. Тогда для* $x^\# \in X^\#$ *выполнено*

$$x^\# \in Df(\mathscr{B}) \leftrightarrow (\exists \varepsilon \in \mu(\mathbb{R}_+))\ f^*(x^\#) \le \liminf\,(x^\#(\mathscr{B}) - f(\mathscr{B})) + \varepsilon,$$

где $\mu(\mathbb{R}_+)$ *— множество положительных инфинитезималей в* $\mathbb{R}$.

$\triangleleft$ Для проверки импликации вправо заметим, что в силу 5.6.18 для некоторого внутреннего B из $\mathscr{B}$ и любого стандартного $\varepsilon > 0$ будет

$$f^*(x^\#) \le \inf\big\{\langle x \mid x^\#\rangle - f(x) : x \in B\big\} + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$(\forall \varepsilon \in {}^\circ\mathbb{R}_+)\, f^*(x^\#) \le \liminf_{x \in B} \big(\langle x \mid x^\#\rangle - f(x)\big) + \varepsilon.$$

Остается сослаться на принцип Коши.

Установим теперь импликацию влево. Для этого возьмем бесконечно малое $\delta > 0$ и подберем $B \in \mathscr{B}$ так, чтобы было

$$\liminf_{x \in B} \langle x \mid x^\#\rangle - f(x) \le \inf(x^*(B) - f(B)) + \delta.$$

После этого можно сослаться на 5.6.18. $\triangleright$

5.6.21. *Пусть Z — стандартное K-пространство и $C : Y \to Z^\bullet$ — возрастающий выпуклый оператор. Если множества $X \times \operatorname{epi}(G)$ и $\operatorname{epi}(F) \times Z$ находятся в общем положении и $\mathscr{B}$ — базис фильтра в $\operatorname{dom}(F)$, то*

$$D(G \circ F)(\mathscr{B}) = \bigcup_{S \in DG(F(\mathscr{B}))} D(S \circ F)(\mathscr{B}).$$

$\triangleleft$ Доказательство состоит в проверке двух включений. Для проверки одного из них возьмем $S \in DG(F(\mathscr{B}))$ и $T \in D(S \circ F)(\mathscr{B})$. Тогда в силу 5.6.18 выполнены соотношения

$$(\exists \overline{B} \in \mathscr{B})(\forall \overline{x} \in \overline{B})(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))T \in \partial_\varepsilon(S \circ F)(\overline{x});$$
$$(\exists \overline{\overline{B}} \in \mathscr{B})(\forall \overline{x} \in \overline{\overline{B}})(\exists \delta \in \mu(\mathscr{E}))S \in \partial^\delta G((S \circ F)(\overline{x})).$$

Поскольку $\mathscr{B}$ — это базис фильтра, для некоторого $B \in \mathscr{B}$ будет $B \subset \overline{B} \cap \overline{\overline{B}}$. При этом для $\overline{x} \in B$ справедливы неравенства

$$(G \circ F)^*(T) \le G^*(S) + (S \circ F)^*(T) \le T\overline{x} - G(F(\overline{x})) + \varepsilon + \delta.$$

Здесь мы учли подходящее правило подсчета преобразования Юнга — Фенхеля. Инфинитезимали составляют конус. Поэтому $\varepsilon + \delta \approx 0$

и ссылка на 5.6.18 гарантирует вхождение $T \in D(G \circ F)(\mathscr{B})$. Следовательно, множество из правой части доказываемого включения содержится в множестве, стоящем в его левой части.

Для доказательства оставшегося все еще непроверенным включения возьмем $T \in D(G \circ F)(\mathscr{B})$. В силу 5.6.18 для некоторого B из $\mathscr{B}$ будет

$$(\forall \overline{x} \in B)(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))(G \circ F)^*(T) \leq T\overline{x} - G(F(\overline{x})) + \varepsilon.$$

Применяя точную формулу для преобразования Юнга — Фенхеля композиции выпуклых операторов, найдем положительный оператор $S \in L^+(Y, Z)$, для которого

$$(G \circ F)^*(T) = G^*(S) + (S \circ F)^*(T).$$

Взяв $\overline{x} \in \overline{B}$, положим

$$\varepsilon_1 := G^*(S) - (SF(\overline{x}) - G \circ F(\overline{x})); \quad \varepsilon_2 := (S \circ F)^*(T) - (T\overline{x} - SF\overline{x}).$$

Ясно, что $0 \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$. Стало быть, ε_1 и ε_2 — бесконечно малые величины. Итак, $S \in DG(F(B)) \subset DG(F(\mathscr{B}))$ и $T \in D(S \circ F)(B) \subset D(S \circ F)(\mathscr{B})$. $\triangleright$

5.6.22. *Пусть $F_1, \dots, F_n : X \to Y^\bullet$ — выпуклые операторы, причем n — стандартное число. Если $F_1, \dots, F_n$ находятся в общем положении и $\mathscr{B}$ — базис фильтра в $\operatorname{dom}(F_1) \cap \ldots \cap \operatorname{dom}(F_n)$, то*

$$D(F_1 + \ldots + F_n)(\mathscr{B}) = D(F_1)(\mathscr{B}) + \ldots + D(F_n)(\mathscr{B}).$$

$\triangleleft$ Если $T_k \in D(F_k(\mathscr{B}))$, то найдутся $B_1, \dots, B_n \in \mathscr{B}$ такие, что для каждого $\overline{x}$ из B_k при некотором бесконечно малом ε_k выполнено $T_k \in \partial^{\varepsilon_k}(F_k)(\overline{x})$. Если теперь $\overline{x} \in B_1 \cap \ldots \cap B_n$, то выполнено

$$T_1 + \ldots + T_n \in \partial_{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n}(F_1 + \ldots + F_n)(\overline{x}).$$

Сумма стандартного числа бесконечно малых бесконечно мала. Следовательно, ссылка на 5.6.18 подтверждает, что множество в правой части доказуемого равенства содержится в множестве из левой части.

Пусть теперь $T \in D(F_1 + \ldots + F_n)(\mathscr{B})$. Привлекая 5.6.18, видим, что для некоторого $B \in \mathscr{B}$ выполняется условие

$$(\forall \overline{x} \in \mathscr{B})(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))\, T \in \partial_\varepsilon(F_1 + \ldots + F_n)(\overline{x}).$$

Таким образом, взяв $\overline{x} \in B$, можно подыскать инфинитезималь ε, для которой

$$(F_1 + \ldots + F_n)^*(T) \leq T\overline{x} - (F_1 + \ldots + F_n)(\overline{x}) + \varepsilon.$$

Используя точную формулу для подсчета преобразования Юнга — Фенхеля, найдем операторы $T_1, \ldots, T_n \in L(X, Y)$, удовлетворяющие соотношениям

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k; \quad \left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right)^*(T) = \sum_{k=1}^{n} F_k^*(T_k).$$

Полагаем теперь

$$\varepsilon_k := F_k^*(T_k) - (T_k\overline{x} - F_k\overline{x}) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Ясно, что $\varepsilon_k \geq 0$ и $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n \leq \varepsilon$. Следовательно, $\varepsilon_k \approx 0$ и $T_k \in DF_k(\overline{x})$ для каждого $k = 1, \ldots, n$. Это и требовалось установить. $\triangleright$

5.6.23. *Пусть $F_1, \ldots, F_n : X \to Y^\bullet$ — выпуклые операторы, причем n — стандартное число. Допустим, что $F_1, \ldots, F_n$ находятся в общем положении, Y — векторная решетка и $\mathscr{B}$ — базис фильтра в $\operatorname{dom}(F_1 \vee \ldots \vee F_n)$. Если Z — стандартное K-пространство и $T \in L(Y, Z)$ — положительный линейный оператор, то элемент $S \in L(X, Z)$ служит инфинитезимальным субградиентом оператора $T \circ (F_1 \vee \ldots \vee F_n)$ вдоль $\mathscr{B}$ в том и только в том случае, если для некоторого $B \in \mathscr{B}$ совместна следующая система условий:*

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k; \quad T \in L^+(Y, Z), \quad k = 1, \ldots, n;$$

$$\sum_{k=1}^{n} T_k(F_k(\overline{x})) \approx T(F_1(\overline{x}) \vee \ldots \vee F_n(\overline{x})) \quad (\overline{x} \in B);$$

$$S \in \sum_{k=1}^{n} D(T_k \circ F_k)(B).$$

$\lhd$ Определим следующие операторы:

$$(F_1, \dots, F_n) : X \to (Y^n)^\bullet; \quad (F_1, \dots, F_n)(x) := (F_1(x), \dots, F_n(x));$$
$$\varkappa : Y^n \to Y; \quad \varkappa(y_1, \dots, y_n) := y_1 \vee \dots \vee y_n.$$

Тогда справедливо представление

$$T \circ F_1 \vee \dots \vee F_n = T \circ \varkappa \circ (F_1, \dots, F_n).$$

Учитывая 5.6.22, выводим требуемое. $\rhd$

5.6.24. *Пусть X — векторное пространство, Y — некоторое K-пространство и $\mathscr{A}$ — слабо порядково ограниченное множество в $L(X,Y)$, а $F = \varepsilon_{\mathscr{A}} \circ \langle \mathscr{A} \rangle_y$, — регулярный выпуклый оператор.*

Пусть, далее, $G : Y \to Z^\bullet$ — возрастающий выпуклый оператор, действующий в стандартном K-пространстве Z, причем в образе $F(X)$ имеется алгебраически внутренняя точка $\operatorname{dom}(S)$, а базис фильтра $\mathscr{B}$ в X таков, что $F(\mathscr{B})$ — базис фильтра в $\operatorname{dom}(G)$. Оператор S из $\mathscr{L}(X,Z)$ входит в инфинитезимальный субдифференциал $D(G \circ F)(\mathscr{B})$ в том и только в том случае, если найдется $B \in \mathscr{B}$ такой, что совместна следующая система условий:

$$S = T \circ \langle \mathscr{A} \rangle; \quad T \geq 0; \quad T \circ \Delta_{\mathscr{A}} \in DG(F(B));$$
$$(\forall \overline{x} \in B)\, T \circ \Delta_{\mathscr{A}} F\overline{x} \approx T \circ \langle \mathscr{A} \rangle_y \overline{x}.$$

$\lhd$ В силу правил субдифференциального исчисления разрешимость приведенной системы означает, что $S \in D(G \circ F)(\overline{x})$ для каждого $\overline{x} \in B$. Таким образом, остается установить обратную импликацию. Как легко видеть,

$$D(G \circ F)(\mathscr{B}) = D(G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \circ \langle \mathscr{A} \rangle_y) = \partial(G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}})(\overline{\mathscr{B}}) \circ \langle \mathscr{A} \rangle,$$

где $\overline{\mathscr{B}} := \langle \mathscr{A} \rangle_y(\mathscr{B})$. Значит, нам достаточно получить представление оператора $T \in D(G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}})(\overline{\mathscr{B}})$. Итак, пусть

$$(\exists B \in \mathscr{B})(\forall \overline{x} \in B)(\exists \varepsilon \in \mu(\mathscr{E}))$$
$$(G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}})^* T \leq T \circ \langle \mathscr{A} \rangle_y \overline{x} - G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \circ \langle \mathscr{A} \rangle_y \overline{x} + \varepsilon.$$

В силу общих правил замены переменных в преобразовании Юнга — Фенхеля (теорема 3.7.10 в [121]), выполнено

$$(G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}})^* T = G^*(T \circ \Delta_{\mathscr{A}}).$$

Полагая $\overline{y} := \langle \mathscr{A} \rangle_y \overline{x}$ для $\overline{x} \in B$, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon \geq (G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}})^* T + T \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \overline{y} - T\overline{y} = \\ = G^*(T \circ \Delta_{\mathscr{A}}) + G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \overline{y} - T\overline{y} = \\ = \sup_{y \in \operatorname{dom}(G)} (T \circ \Delta_{\mathscr{A}} y - T \circ \Delta_{\mathscr{A}} \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \overline{y}) - \\ -(Gy - G \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \overline{y}) + T \circ \Delta_{\mathscr{A}} \circ \mathscr{E}_{\mathscr{A}} \overline{y} - T\overline{y} \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $T \circ \Delta_{\mathscr{A}} \in DG(F(B))$ и $T \circ \Delta_{\mathscr{A}} F\overline{x} \approx T \circ \langle \mathscr{A} \rangle_y \overline{x}$. Тем самым требуемое утверждение установлено. $\triangleright$

5.6.25. Суть изложенной схемы в том, что необходимое представление субградиентов осуществляется в некотором смысле независимо от выбора исследуемой точки за счет точности применяемых правил вычисления преобразований Юнга — Фенхеля. Иными словами, поведение инфинитезимальных субградиентов, по форме аналогичное свойствам обычных «точных» субградиентов, по существу родственно случаю ε-субдифференциалов, учитывающих поведение рассматриваемых операторов «в целом», во всей области их определения. Таким образом, хотя по форме правила подсчета инфинитезимальных субдифференциалов аналогичны обычным правилам локального субдифференцирования, условия их справедливости существенно более жесткие, совпадающие с условиями в целом для преобразований Юнга — Фенхеля или ε-субдифференциалов.

По изложенной схеме можно получить аналоги для всего спектра правил субдифференциального исчисления (дезинтегрирование, свертки Рокафеллара, лебеговы множества и т. п.). Естественным путем отсюда выводятся и признаки инфинитезимальной оптимальности. Подробности мы опускаем.

5.7. Инфинитезимальная оптимальность

В этом параграфе мы изучим новое понятие решения экстремальной задачи, основанное на использовании актуальных нестандартных величин. Для простоты ограничимся случаем «точечных» субдифференциалов.

5.7.1. Точку $\overline{x} \in \operatorname{dom}(f)$ называют *инфинитезимальным решением* безусловной программы $f(x) \to \inf$, где $f : X \to E^{\bullet}$, если $0 \in Df(\overline{x})$, т. е. если $\overline{x}$ допустимо и $f(\overline{x}) \approx \inf\{f(x) : x \in X\}$. Естественным образом понимают инфинитезимальное решение произвольной программы.

5.7.2. *В стандартной безусловной программе* $f(x) \to \inf$ *имеется инфинитезимальное решение в том и только в том случае, если, во-первых, образ* $f(X)$ *ограничен снизу и, во-вторых, существует стандартное обобщенное решение* $(x_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathscr{E}}$ *рассматриваемой программы, т. е.* $x_\varepsilon \in \operatorname{dom}(f)$ *и* $e \le f(x_\varepsilon) \le e + \varepsilon$ *для всех* $\varepsilon \in \mathscr{E}$, *где* $e := \inf f(X)$ — *значение программы.*

$\triangleleft$ В силу принципов идеализации и переноса с учетом 5.6.3 выводим:

$$
\begin{gathered}
(\exists\,\overline{x} \in X)(0 \in Df(\overline{x})) \leftrightarrow (\exists\,x \in X)(\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon \in \mathscr{E})(0 \in \partial_\varepsilon f(x)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st\,fin}}\mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E})(\exists\,x \in X)(\forall\,\varepsilon \in \mathscr{E}_0)(0 \in \partial_\varepsilon f(x)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\varepsilon \in \mathscr{E})(\exists\,x_\varepsilon \in X)(0 \in \partial_\varepsilon f(x_\varepsilon)) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall\,\varepsilon \in \mathscr{E})(\exists\,x_\varepsilon \in X)(\forall\,x \in X)(f(x) \ge f(x_\varepsilon) - \varepsilon),
\end{gathered}
$$

что и нужно. $\triangleright$

5.7.3. Рассмотрим *регулярную выпуклую программу*

$$g(x) \le 0, \quad f(x) \to \inf.$$

Таким образом, $g, f : X \to E^{\bullet}$ (для простоты $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(g) = X$) при каждом $x \in X$ либо $g(x) \le 0$, либо $g(x) \ge 0$ и, кроме того, для некоторого $x_0 \in X$ элемент $-g(x_0)$ — это единица в E.

5.7.4. *В стандартном антураже допустимая внутренняя точка* $\overline{x}$ *является инфинитезимальным решением рассматриваемой регулярной программы в том и только в том случае, если совместна следующая система условий:*

$$
\begin{gathered}
\alpha, \beta \in {}^{\circ}[0, \mathbf{1}_E], \quad \alpha + \beta = \mathbf{1}_E, \quad \ker(\alpha) = 0; \\
\beta \circ g(\overline{x}) \approx 0, \quad 0 \in D(\alpha \circ f)(\overline{x}) + D(\beta \circ g)(\overline{x}).
\end{gathered}
$$

$\lhd$ $\leftarrow$: При совместности рассматриваемой системы для допустимого x при некоторых бесконечно малых ε_1 и ε_2 будет

$$\alpha f(\overline{x}) \leq \alpha f(x) + \beta g(x) - \beta g(\overline{x}) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \alpha f(x) + \varepsilon$$

для каждого стандартного $\varepsilon \in {}^{\circ}\mathscr{E}$. В частности, $\alpha(f(\overline{x}) - f(x)) \leq \alpha\varepsilon$ при $\varepsilon \in {}^{\circ}\mathscr{E}$, ибо α — это стандартное отображение. В силу условия $\ker(\alpha) = 0$ и общих свойств мультипликаторов видим, что $\overline{x}$ — инфинитезимальное решение.

$\rightarrow$: Пусть $e := \inf\{f(x) : x \in X, g(x) \leq 0\}$ — значение рассматриваемой программы. По условию и в силу принципа переноса e — стандартный элемент. Значит, вновь привлекая принцип переноса, по теореме о векторном минимаксе найдем стандартные мультипликаторы $\alpha, \beta \in {}^{\circ}[0, \mathbf{1}_E]$ такие, что

$$\alpha + \beta = \mathbf{1}_E; \quad 0 = \inf_{x \in X} (\alpha(f(x) - e) + \beta \circ g(x)).$$

Обычным рассуждением (см. [1]) проверяется, что $\ker(\alpha) = 0$. Кроме того, поскольку $\overline{x}$ является инфинитезимально оптимальным решением, для некоторого бесконечно малого ε будет $f(\overline{x}) - e = \varepsilon$. Следовательно, при любом $x \in X$ справедливы оценки $-\alpha\varepsilon \leq \alpha f(x) -\alpha f(\overline{x}) + \beta g(x)$. В частности, $0 \geq \beta g(\overline{x}) \geq -\alpha\varepsilon \geq -\varepsilon$, т. е. $\beta g(\overline{x}) \approx 0$ и

$$0 \in \partial_{\alpha\varepsilon + \beta g(\overline{x})}(\alpha \circ f + \beta \circ g)\ (\overline{x}) \subset D(\alpha \circ f + \beta \circ g)\ (\overline{x}),$$

ибо $\alpha\varepsilon + \beta g(\overline{x}) \approx 0$. $\rhd$

5.7.5. Рассмотрим *регулярную в смысле Слейтера программу*

$$Ax = A\overline{x}, \quad g(x) \leq 0, \quad f(x) \rightarrow \inf,$$

т. е., во-первых, $A \in L(X, \mathfrak{X})$ — линейный оператор со значениями в некотором векторном пространстве $\mathfrak{X}$, отображения $g : X \rightarrow F^{\bullet}$ и $f : X \rightarrow E^{\bullet}$ — выпуклые операторы (для удобства $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(g) = X$), во-вторых, F — архимедово упорядоченное векторное пространство, E — это стандартное K-пространство ограниченных элементов и, наконец, в-третьих, для некоторой допустимой точки x_0 элемент $-g(x_0)$ является сильной единицей в F.

5.7.6. ***Критерий инфинитезимальной оптимальности.*** *Допустимая точка $\overline{x}$ является инфинитезимальным решением регулярной в смысле Слейтера программы в том и только в том случае, если совместна следующая система условий:*

$$\gamma \in L^{+}(F, E), \quad \mu \in L(\mathfrak{X}, E), \quad \gamma g(\overline{x}) \approx 0,$$
$$0 \in Df(\overline{x}) + D(\gamma \circ g)(\overline{x}) + \mu \circ A.$$

$\lhd$ $\leftarrow$: При совместности рассматриваемой системы для всякой допустимой точки x и некоторых бесконечно малых ε_1 и ε_2 будет

$$f(\overline{x}) \le f(x) + \varepsilon_1 + \gamma g(x) - \gamma g(\overline{x}) + \varepsilon_2 - \mu(Ax) + \mu(A\overline{x}) \le$$
$$\le f(x) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \gamma g(\overline{x}) \le f(x) + \varepsilon$$

при любом стандартном $\varepsilon \in {}^{\circ}\mathscr{E}$.

$\rightarrow$: Если $\overline{x}$ — инфинитезимальное решение, то $\overline{x}$ и ε-решение для подходящего бесконечно малого ε. Остается привлечь соответствующий критерий ε-оптимальности. $\rhd$

5.7.7. Допустимая точка $\overline{x}$ называется *инфинитезимально оптимальной по Парето* в программе 5.7.5, если $\overline{x}$ является ε-оптимальной по Парето для какого-нибудь бесконечно малого ε (относительно сильной единицы $\mathbf{1}_E$ в пространстве E), т. е. если для допустимого x выполнено $f(x) - f(\overline{x}) \le \varepsilon \mathbf{1}_E$, то $f(x) - f(\overline{x}) = \varepsilon \mathbf{1}_E$ при $\varepsilon \in \mu(\mathbb{R}_+)$.

5.7.8. *Пусть точка $\overline{x}$ инфинитезимально оптимальна по Парето в регулярной в смысле Слейтера программе. Тогда при некоторых линейных функционалах α, β, γ на пространствах E, F и $\mathfrak{X}$ соответственно совместна следующая система условий:*

$$\alpha > 0, \quad \beta \ge 0, \quad \beta g(\overline{x}) \approx 0,$$
$$0 \in D(\alpha \circ f)(\overline{x}) + D(\beta \circ g)(\overline{x}) + \gamma \circ A.$$

Если, в свою очередь, приведенные соотношения выполнены для некоторой допустимой точки $\overline{x}$, причем $\alpha(\mathbf{1}_E) = 1$ и $\ker(\alpha) \cap E^{+} = 0$, то $\overline{x}$ служит инфинитезимально оптимальным по Парето решением рассматриваемой программы.

$\triangleleft$ Первая часть доказываемого утверждения вытекает из обычного признака ε-оптимальности по Парето с учетом отмеченных ранее свойств бесконечно малых. Если же выполнена гипотеза второй части интересующего нас предложения, то, привлекая определения, для любого допустимого $x \in X$ выводим:

$$0 \le \alpha(f(x) - f(\overline{x})) + \beta g(x) - \beta g(\overline{x}) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \le$$
$$\le \alpha(f(x) - f(\overline{x})) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \beta g(\overline{x})$$

при подходящих бесконечно малых ε_1, ε_2. Положим $\varepsilon := \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \beta g(\overline{x})$. Ясно, что $\varepsilon \approx 0$ и, кроме того, $\varepsilon \ge 0$. Если теперь для допустимого x верно, что $f(x) - f(\overline{x}) \le -\varepsilon \mathbf{1}_E$, то получаем равенство $\alpha(f(\overline{x}) - f(x)) = \varepsilon$. Иными словами, $\alpha(f(x) - f(\overline{x}) - \varepsilon \mathbf{1}_E) = 0$ и $f(x) - f(\overline{x}) = \varepsilon \mathbf{1}_E$. Последнее как раз и означает, что $\overline{x}$ — это ε-оптимальное по Парето решение.

5.7.9. По описанному образцу можно получить признаки инфинитезимальных решений и в других основных формах задач выпуклого программирования, например, вывести нестандартные аналоги теоремы о характеристике естественным образом определяемых инфинитезимально оптимальных траекторий в конечно-шаговых терминальных динамических задачах.

5.7.10. Примечания.

(1) Дать подробный указатель по проблемам негладкого анализа, рассматриваемым в текущей главе, не представляется возможным в виде грандиозности темы. Мы приводим здесь только несколько стандартных ссылок, отсылая читателя за подробностями к [121]. Отметим следующие превосходные сочинения, определившие многие основные направления исследований в рассматриваемой области: [60, 184, 252, 271, 405 455, 456].

(2) Ренессанс теории локальных приближений связан с открытием Кларком выпуклого касательного конуса, носящего теперь его имя (см. [270, 271]).

Кларк анализировал конечномерный случай. Изобретение общего определения в произвольном топологическом векторном пространстве оказалось весьма нетривиальным и было осуществлено Рокафелларом. Радикальные изменения, вызванные в негладком анализе появлением конуса Кларка, освещены в десятках обзоров и монографий. Отметим часть из них [59, 60, 184, 271, 405].

(3) Разнообразие касательных конусов сделано насущной проблему их классификации. Из пионерских исследований в этом направлении нужно выделить статьи Долецкого [290, 291] и Уарда [509–511]. Классификация касательных с помощью актуальных бесконечно малых, излагаемая в главе, принадлежит С. С. Кутателадзе [125, 127, 132].

(4) Регуляризирующие конусы типов R^1 и Q^1 были введены А. Г. Кусраевым [106, 107, 110] и Тибольтом [499, 500].

(5) Теория сходимости соответствий, основанная на изучении поведения надграфиков, возникла благодаря теории оптимизации. Важную роль в развитии эписходимости сыграла книга Этуша [251]. Наше изложение следует, в основном, [132].

(6) Идея выделения конкретных наборов инфинитезималей для построения касательных предложена в [134]. Излагая проблемы, связанные с теоремой Корне, мы придерживаемся работы Хириарт-Урути [334].

Общий подход к построению аппроксимаций сумм и композиций был предложен в [110, 111]. Наше изложение следует С. С. Кутателадзе [132].

(7) Инфинитезимальные субдифференциалы были предложены и изучены в ряде работ С. С. Кутателадзе. Отметим первое подробное изложение основ этой теории [128].

Литература

1. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.
2. Александров А. Д. Общий взгляд на математику // Математика, ее содержание, методы и значение.—М.: Изд-во АН СССР, 1956.—Т. 1.—С. 5–78.
3. Александров А. Д. Проблемы науки и позиция ученого.—Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1988.—512 с.
4. Алексеев М. А., Глебский Л. Ю., Гордон Е. И. Об аппроксимациях групп, групповых действий и алгебр Хопфа // В кн: Теория представления, динамические системы, комбинаторика и алгебра. Методы. 3 / Записки научн. семин. С.-Петербург. отдел. мат. ин-та Стеклова (ПОМИ) 256.—1999.—С. 224–262.
5. Альбеверио С., Фенстад Й., Хёэг-Крон Р., Линдстрём Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике.—М.: Мир, 1990.—616 с.
6. Андреев П. В. О принципе стандартизации в теории ограниченных множеств // Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, мат., мех.—1997.—№ 1.—С. 68–70.
7. Андреев П. В., Гордон Е. И. Нестандартная теория классов // Владикавказский мат. журн. — 1999. — Т. 1, № 4. — С. 2–16. (http://alanianet.ru/omj/journal/htm)
8. Архимед. Сочинения.—М.: Физматгиз, 1962.—639 с.
9. Березин Ф. А., Шубин М. А. Уравнение Шрёдингера. — М.: Изд-во МГУ, 1983.—392 с.
10. Беркли Дж. Сочинения.—М.: Мысль, 2000.—556 с.
11. Биркгоф Г. Теория решеток.—М.: Наука, 1984.—566 с.

12. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко А. Г. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики.—М.: Наука, 1983.—328 с.

13. Боголюбов А. Н. «Читайте, читайте Эйлера: он учитель всех нас» // Наука в СССР.—1984.—№ 6.—С. 98–104.

14. Борель Э. Вероятность и достоверность.—М.: Физматгиз, 1961. —119 с.

15. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.— М.: Мир, 1982.—511 с.

16. Бурбаки Н. Теория множеств.—М.: Мир, 1965.—455 с.

17. Бухвалов А. В. Порядково ограниченные операторы в векторных решетках и пространствах измеримых функций // Итоги науки и техники. Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1988.—Т. 26.—С. 3–63.

18. Бухвалов А. В., Векслер А. И., Гейлер В. А. Нормированные решетки // Итоги науки и техники. Математический анализ.— М.: ВИНИТИ, 1980.—Т. 18.—С. 125–184.

19. Бухвалов А. В., Векслер А. И., Лозановский Г. Я. Банаховы решетки — некоторые банаховы аспекты теории // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, вып. 2.—С. 137–183.

20. Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М. Векторные решетки и интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1991.—214 с.

21. Ван Хао, Мак-Нотон Р. Аксиоматические системы теории множеств.—М.: Изд-во иностр. лит., 1963.—54 с.

22. Векслер А. И. О новой конструкции дедекиндова пополнения векторных структур и l-групп с делением // Сиб. мат. журн.— 1969.—Т. 10, № 6.—С. 70–73.

23. Векслер А. И. Банаховы циклические пространства и банаховы структуры // Докл. АН СССР.—1973.—Т. 213, № 4.—С. 770–773.

24. Векслер А. И., Гейлер В. А. О порядковой и дизъюнктной полноте линейных полуупорядоченных пространств // Сиб. мат. журн.—1972.—Т. 13, № 1.—С. 43–51.

25. Векслер А. И., Гордон Е. И. Нестандартное расширение не всюду определенных положительных операторов // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 4.—С. 720–727.

26. Вершик А. М., Гордон Е. И. Группы, локально вложимые в класс конечных групп // Алгебра и анализ. — 1997. — № 1. — С. 72–86.

27. Виленкин Н. Командор «Лузитании» // Знание — сила. — 1984.—№ 1.—С. 27–29.

28. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. p-Адический анализ и математическая физика.—М.: Наука, 1994.—352 с.

29. Владимиров Д. А. Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.—318 с.

30. Вольтер Стихи и проза.—М.: Изд. «Московский рабочий», 1997.—382 с.

31. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств. —М.: Мир, 1983.—150 с.

32. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.—407 с.

33. Выгодский М. Я. Основы исчисления бесконечно малых.—М.; Л.: ГТТИ, 1933.—464 с.

34. Гёдель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 8, вып. 1.—С. 96–149.

35. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики.—М.: Наука, 1979.—558 с.

36. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ.—М.: Наука, 1969.—475 с.

37. Гоббс Т. Избранные произведения. Т. 1.—М.: Мысль, 1965.—583 с.

38. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики.—М.: Мир, 1983.—488 с.

39. Гордон Е. И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 237, № 4.—С. 773–775.

40. Гордон Е. И. K-пространства в булевозначных моделях теории множеств // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 258, № 4.—С. 777–780.

41. Гордон Е. И. К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 5.—С. 55–65.

42. Гордон Е. И. Рационально полные полупервичные коммутативные кольца в булевозначных моделях теории множеств.—Горький: ВИНИТИ, № 3286-83Деп, 1983.—35 с.

43. Гордон Е. И. Нестандартные конечномерные аналоги операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$// Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 2.—С. 45–59.

44. Гордон Е. И. Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Э. Нельсона // Сиб. мат. журн.—1989. —Т. 30, № 1.—С. 89–95.

45. Гордон Е. И. Гиперконечные аппроксимации локально компактных абелевых групп // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 314, № 5.—С. 1044–1047.

46. Гордон Е. И. Нестандартный анализ и компактные абелевы группы // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 2.—С. 26–40.

47. Гордон Е. И. О мерах Лёба // Известия вузов.—1991.—№ 2.— С. 25–33.

48. Гордон Е. И. Элементы булевозначного анализа. Учебное пособие.—Горький: Горьковск. ун-т, 1991.

49. Гордон Е. И., Любецкий В. А. Некоторые применения нестандартного анализа в теории булевозначных мер // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 256, № 5.—С. 1037–1041.

50. Гордон Е. И., Морозов С. Ф. Булевозначные модели теории множеств.—Горький: Горьковск. ун-т, 1982.—72 с.

51. Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А. О формуле Кюннета для L_p-когомологий искривленных произведений // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 5.—С. 29–42.

52. Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А. Об аппроксимации точных и замкнутых дифференциальных форм финитными // Сиб. мат. журн.—1992.—Т. 33, № 2.—С. 49–65.

53. Гретцер Г. Общая теория решеток.—М.: Мир, 1982.—454 с.

54. Гурарий В. П. Групповые методы коммутативного гармонического анализа// Итоги науки и техники: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.—М.: ВИНИТИ, 1988.—Т. 25.—С. 5–311.

55. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.— Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.—С. 63–211.

56. Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартный анализ и векторные решетки. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.—380 с.

57. Девис М. Прикладной нестандартный анализ.—М.: Мир, 1980. —236 с.

58. Деллашери К. Емкости и случайные процессы.—М.: Мир, 1972.

59. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация.—М.: Наука, 1981.

60. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы гладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.—М.: Наука, 1990.

61. Джонстон П. Т. Теория топосов.—М.: Наука, 1986.—438 с.

62. Диксмье Ж. C^*-алгебры и их представления. — М.: Наука, 1974.—399 с.

63. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств.—Киев: Вища школа, 1980.—215 с.

64. Емельянов Э. Ю. Инвариантные гомоморфизмы нестандартного расширения булевых алгебр и векторных решеток // Сиб. мат. журн.—1997.—Т. 38, № 2.—С. 286–296.

65. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика.—М.: Наука, 1987.—320 с.

66. Есенин-Вольпин А. С. Анализ потенциальной осуществимости // Логические исследования.—М.: Изд-во АН СССР, 1959.—С. 218–262.

67. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений.—М.: Мир, 1976.—165 с.

68. Звонкин А. К., Шубин М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.—1984.—Т. 39, вып. 2.—С. 77–127.

69. Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д. Фрактали, подобие, промежуточная асимптотика // Успехи физ. наук.—1985.—Т. 146, № 3.—С. 493–506.

70. Зорич В. А. Математический анализ.—М.: Наука, 1981.—Ч. 1. —543 с.

71. Иванов В. В. Геометрические свойства монотонных функций и вероятности случайных колебаний//Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37, № 1.—С. 117–150.

72. Иванов В. В. Колебания средних в эргодической теореме// Докл. РАН.—1996.—Т. 347, № 6.—С. 736–738.

73. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ.—М.: Наука, 1979.—719 с.

74. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.—М.: Мир, 1973.—150 с.

75. Кановей В. Г. О корректности эйлерова метода разложения синуса в бесконечное произведение // Успехи мат. наук.—1988.—Т. 43, вып. 4.—С. 57–81.

76. Кановей В. Г. Неразрешимые гипотезы в теории внутренних множеств Нельсона // Успехи мат. наук.—1991.—Т. 46, вып. 6.—С. 3–50.

77. Кант И. Сочинения. Т. 3.—М.: Мысль, 1964.—799 с.

78. Кантор Г. Труды по теории множеств.—М.: Наука, 1985.—430 с.

79. Канторович Л. В. О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР.—1935.—Т. 4, № 1–2.—С. 11–14.

80. Канторович Л. В. К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 1, № 7.—С. 271–274.

81. Канторович Л. В. О некоторых классах линейных операций // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 3, № 1.—С. 9–13.

82. Канторович Л. В. Об одном классе функциональных уравнений // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 4, № 5.—С. 211–216.

83. Канторович Л. В. Общие формы некоторых классов линейных операций // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 3, № 9.—С. 101–106.

84. Канторович Л. В. О функциональных уравнениях // Труды ЛГУ.—1937.—Т. 3, № 7.—С. 17–33.

85. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.

86. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.

87. Карно Л. Размышления о метафизике бесконечно малых.—М.: ОНТИ, 1933.

88. Качуровский А. Г. Ограниченность флуктуации средних в статистической эргодической теореме // Оптимизация.—1990.—Вып. 48(65).—С. 71–77.

89. Качуровский А. Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи мат. наук.—1996.—Т. 51, вып. 4.—С. 73–124.

90. Кейслер Г., Чен Ч. Теория моделей.—М.: Мир, 1977.—614 с.

91. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов // Успехи мат. наук. —1971.—Т. 26, вып. 4.—С. 15–41.

92. Клини С. Математическая логика.—М.: Мир, 1973.—480 с.

93. Колесников Е. В., Кусраев А. Г., Малюгин С. А. О мажорируемых операторах.—Новосибирск, 1988.—32 с. (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 26).

94. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика.—М.: Мир, 1969.—417 с.

95. Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика. Дополнительные главы.—М.: Изд-во Московск. ун-та, 1984.—119 с.

96. Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы.—М.: Наука, 1984.—320 с.

97. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.—М.: Наука, 1980.—383 с.

98. Король А. М., Чилин В. И. Измеримые операторы в булевозначной модели теории множеств // Докл. АН УзССР.— 1989.— № 3.—С. 7–9.

99. Коэн П. Дж. Теория моделей и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1973.—347 с.

100. Коэн П. Дж. Об основании теории множеств // Успехи мат. наук.—1974.—Т. 29, вып. 5.—С. 169–176.

101. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений.—М.: Физматгиз, 1962.

102. Кузьмина И. С. Лузитания и ее создатель // Наука в СССР.— 1985.—№ 1.—С. 107–110.

103. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления.—М.: Наука, 1967.—Т. 1.—804 с.

104. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов.—М.: Просвещение, 1967.—665 с.

105. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств.—М.: Мир, 1970.—416 с.

106. Кусраев А. Г. Субдифференциалы негладких операторов и необходимые условия экстремума // Оптимизация/Ин-т математики СО АН СССР.—Новосибирск, 1980.—Вып. 24.—С. 75–117.

107. Кусраев А. Г. Об одном общем методе субдифференцирования // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 257, № 4.—С. 822–826.

108. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 267, № 5.—С. 1049–1052.

109. Кусраев А. Г. Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1312–1316.

110. Кусраев А. Г. О субдифференциалах композиции множеств и функций // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 2.—С. 116–127.

111. Кусраев А. Г. О субдифференциале суммы // Сиб. мат. журн. —1984.—Т. 25, № 4.—С. 107–110.

112. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.— Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.

113. Кусраев А. Г. Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии в «целом» и математическому анализу. — Новосибирск: Наука, 1987.— С. 84–123.

114. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ и JB-алгебры // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 1.—С. 124–134.

115. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.—С. 212–292.

116. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ инволютивных банаховых алгебр.—Владикавказ: Изд-во Северо-Осетинского ун-та, 1996.—96 с.

117. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Анализ субдифференциалов с помощью булевозначных моделей // Докл. АН СССР.— 1982.—Т. 265, № 5.—С. 1061–1064.

118. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Записки по булевозначному анализу.—Новосибирск: Новосибирск. ун-т, 1984.—80 с.

119. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.—344 с.; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.—435 p.

120. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. О комбинировании нестандартных методов // Сиб. мат. журн.—1990.—Т. 31, № 5.— С. 111–119.

121. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992. — 270 с.; Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1995.—398 p.

122. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Теорема Крейна — Мильмана и пространства Канторовича // Оптимизация.— 1992.— № 51 (68).—С. 5–18.

123. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. 55 нерешенных задач из нестандартного анализа.—Новосибирск: Изд-во НГУ, 1993.—16 с.

124. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Булевозначный анализ. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.—398 с.

125. Кутателадзе С. С. Инфинитезимальные касательные конусы // Сиб. мат. журн.—1985.—Т. 27, № 6.—С. 67–76.

126. Кутателадзе С. С. Микропределы, микросуммы и теплицевы матрицы // Оптимизация.—1985.—Вып. 35.—С. 16–23.

127. Кутателадзе С. С. Нестандартный анализ касательных конусов // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 284, № 3.—С. 525–527.

128. Кутателадзе С. С. Вариант нестандартного выпуклого программирования // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. 27, № 4. —С. 84–92.

129. Кутателадзе С. С. Основы нестандартного математического анализа.—Новосибирск: Изд-во НГУ.—Ч. 1: Наивное обоснование инфинитезимальных методов.—1986.—44 с.; Ч. 2: Теоретико-множественное обоснование нестандартного анализа. — 1986.—34 с.; Ч. 3: Монады в общей топологии.—1986.—34 с.

130. Кутателадзе С. С. О нестандартных методах в субдифференциальном исчислении // Дифференциальные уравнения с частными производными.—Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986.—С. 116–120.

131. Кутателадзе С. С. Циклические монады и их применения // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 1.—С. 100–110.

132. Кутателадзе С. С. Инфинитезимали и исчисление касательных // Исследования по геометрии «в целом» и математическому анализу.—Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.—С. 123–135.

133. Кутателадзе С. С. О топологических понятиях, близких к непрерывности // Сиб. мат. журн.—1987.—Т. 28, № 1.—С. 143–147.

134. Кутателадзе С. С. Эпипроизводные, определяемые набором инфинитезималей // Сиб. мат. журн.—1987.—Т. 28, № 4.—С. 140–144.

135. Кутателадзе С. С. Монады ультрафильтров и экстенсиональных фильтров // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 1.—С. 129–133.

136. Кутателадзе С. С. Установки нестандартного анализа // Современные проблемы анализа и геометрии.—Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.—С. 153–182. (Труды Ин-та математики СО АН СССР. Т. 14.)

137. Кутателадзе С. С. Формализмы нестандартного анализа.— Новосибирск: Новосибирск. ун-т, 1999.—52 с.

138. Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2000.—336 с.

139. Лаврентьев М. А. Николай Николаевич Лузин // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 29, вып. 5.—С. 177–182.

140. Лаврентьев М. А. Наука. Технический прогресс. Кадры. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.—287 с.

141. Ламбек И. Кольца и модули.—М.: Мир, 1971.—279 с.

142. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.

143. Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике.—М.: Наука, 1985.—352 с.

144. Леге Ж.-М. Наука, техника и мир // Наука и жизнь.—1986.— № 11.—С. 3–11.

145. Лейбниц Г. В. Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, вып. 1. — С. 166–173.

146. Лейбниц Г. В. Сочинения. Т. 1.—М.: Мысль, 1983.—688 с.

147. Лейбниц Г. В. Сочинения. Т. 2.—М.: Мысль, 1984.—736 с.

148. Ленг С. Алгебра.—М.: Мир, 1968.—564 с.

149. Лузин Н. Н. Современное состояние теории функций действительного переменного // Труды Всероссийского съезда математиков в Москве 27 апреля–4 мая 1927 г.—М.-Л.: Главнаука, 1928.—С. 11–32.

150. Лузин Н. Н. Теория функций действительного переменного.— М.: Учпедгиз, 1940.—302 с.

151. Лузин Н. Н. Собрание сочинений.—М.: Изд-во АН СССР, 1959. —Т. 3.—507 с.

152. Лузин Н. Н. Дифференциальное исчисление.—М.: Высш. шк., 1961.—477 с.

153. Лузин Н. Н.—Выдающийся математик и педагог // Вестн. АН СССР.—1984.—№ 11.—С. 95–102.

154. Любецкий В. А. О некоторых алгебраических вопросах нестандартного анализа // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 280, № 1.—С. 38–41.

155. Любецкий В. А., Гордон Е. И. Булевы расширения равномерных структур // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам.—М.: Наука, 1983.—С. 82–153.

156. Любецкий В. А., Гордон Е. И. Вложение пучков в гейтингозначный универсум и теоремы переноса // Докл. АН СССР. —1983.—Т. 268, № 4.—С. 794–798.

157. Лянце В. Э. Возможно ли игнорировать нестандартный анализ // Общая теория граничных задач.—Киев: Наук. думка, 1983.—С. 108–112.

158. Лянце В. Э. О нестандартном анализе // Математика сегодня. —Киев: Вища школа, 1986.—С. 26–44.

159. Лянце В. Э., Кудрик Т. С. О функциях дискретного переменного // Математика сегодня.—Киев: Вища школа, 1987.—19 с.

160. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева.—Ленинград, 1985.

161. Мазья В. Г., Хавин В. П. Нелинейная теория потенциала // Успехи мат. наук.—1972.—Т. 27, вып. 6.—С. 67–138.

162. Мальцев А. И. Алгебраические системы.—М.: Наука, 1970.—392 с.

163. Малыхин В. И. Новые моменты в общей топологии, связанные с форсингом // Успехи мат. наук.—1988.—Т. 43, вып. 4.—С. 83–94.

164. Малыхин В. И., Пономарев В. И. Общая топология (теоретико-множественное направление) // Алгебра. Топология. Геометрия.—М.: ВИНИТИ, 1975.—Т. 13.—С. 149–229.

165. Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое.—М.: Сов. радио, 1979.—168 с.

166. Медведев Ф. А. Канторовская теория множеств и теология // Историко-математические исследования.—М.: Наука, 1985.—Вып. 29. —С. 209–240.

167. Медведев Ф. А. Нестандартный анализ и история классического анализа // Закономерности развития современной математики.—М.: Наука, 1987.—С. 75–84.

168. Мендельсон Э. Введение в математическую логику.—М.: Наука, 1971.—320 с.

169. Мерфи Дж. C^*-алгебры и теория операторов.—М.: Факториал, 1997.—332 с.

170. Молчанов В. А. Одномерный математический анализ в нестандартном изложении. — Саратов: СГПИ им. К. А. Федина, 1989.—80 с.

171. Молчанов В. А. О применении повторных нестандартных расширений в топологии // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 3.—С. 64–71.

172. Молчанов В. А. Введение в нестандартный анализ.—Саратов: СГПИ им. К. А. Федина, 1990.—89 с.

173. Молчанов В. А. Нестандартные сходимости в пространствах отображений.—Саратов: СГПИ им. К. А. Федина, 1991.—96 с.

174. Мостовский А. Конструктивные множества и их приложения. —М.: Мир, 1973.—256 с.

175. Наймарк М. А. Нормированные кольца.—М.: Наука, 1968. — 664 с.

176. Наймарк М. А. Теория представления групп.—М.: Наука, 1976.

177. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии.—М.: Мир, 1990.

178. Начала Евклида. Книги VII–X.—М.; Л.: Гостехиздат, 1949.—511 с.

179. фон Нейман Дж. Избранные труды по функциональному анализу. Т. 1, 2.—М.: Наука, 1987.

180. Нельсон Э. Радикально элементарная теория вероятностей. — Новосибирск: Изд-во Института математики им. С. Л. Соболева, 1995.—120 с.

181. Непейвода Н. Н. Прикладная логика.—Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000.—491 с..

182. Новиков П. С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической.—М.: Наука, 1977.—328 с.

183. Ньютон И. Математические работы.—М.; Л.: ОНТИ, 1937.—452 с.

184. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ.—М.: Мир, 1988.—510 с.
185. Перэр И. Общая теория бесконечно малых // Сиб. мат. журн. —1990.—Т. 31, № 3.—С. 103–124.
186. Пич А. Операторные идеалы.—М.: Мир, 1982.
187. Понтрягин Л. С. Анализ бесконечно малых.—М.: Наука, 1980. —256 с.
188. Понтрягин Л. С. Математический анализ для школьников.— М.: Наука, 1980.—88 с.
189. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы.—М.: Наука, 1984.
190. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел.—М.: Наука, 1971.
191. Проблемы Гильберта.—М.: Наука, 1969.—240 с.
192. Расева Е., Сикорский Р. Метаматематика математики.—М.: Наука, 1972.—592 с.
193. Ревуженко А. Ф. Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ.—Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000.—430 с.
194. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. Ч. I, кн. 1.— Новосибирск: Изд-во Института математики, 1991.—454 с.
195. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики.—М.: Мир, 1977–1982.—Т. 1: Функциональный анализ. —1977.—357 с. Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. — 1978.—395 с. Т. 3: Теория рассеяния.—1982.—443 с. Т. 4: Анализ операторов.—1982.—428 с.
196. Рисс Ф., Сёкефальви–Надь Б. Лекции по функциональному анализу.—М.: Мир, 1979.—587 с.
197. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры.—М.: Наука, 1967.—376 с.
198. Рудин У. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1975.
199. Рузавин Г. И. Философские проблемы оснований математики. —М.: Наука, 1983.—302 с.
200. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И. Упорядоченные алгебры.—Ташкент: Фан, 1983.
201. Севери Ф. Итальянская алгебраическая геометрия, ее строгость, методы и проблемы // Математика.—1959.—Т. 3, № 1.— С. 111–141.
202. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике.—М.: Мир, 1990.—240 с.

203. Секст Эмпирик. Сочинения.—М.: Мысль, 1976.—Т. 1.—399 с.

204. Сикорский Р. Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—376 с.

205. Соболев В. И. О полуупорядоченной мере множеств, измеримых функциях и некоторых абстрактных интегралах // Докл. АН СССР.—1953.—Т. 91, № 1.—С. 23–26.

206. Соловьёв Ю. П., Троицкий Е. В. C^*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии.—М.: Факториал, 1996.—352 с.

207. Строян К. Д. Инфинитезимальный анализ кривых и поверхностей // Справочная книга по математической логике.—М.: Наука, 1982.—Ч. 1.—С. 199–234.

208. Треногин В. А. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1980.—496 с.

209. Троицкий В. Г. Нестандартная дискретизация и продолжение по Лёбу семейства мер // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 3.—С. 190–198.

210. Успенский В. А. Семь размышлений на темы философии математики // Закономерности развития современной математики. —М.: Наука, 1987.—С. 106–155.

211. Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ.—М.: Наука, 1987.—128 с.

212. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977.—688 с.

213. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств.—М.: Мир, 1966.—555 с.

214. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы.—М.: Мир, 1965.—342 с.

215. Фурман М. П. Логика топосов // Справочная книга по математической логике.—М.: Наука, 1983.—Ч. 4.—С. 241–277.

216. Хелгасон С. Преобразование Радона.—М.: Мир, 1983.

217. Хрестоматия по истории математики. — М.: Просвещение, 1977.—234 с.

218. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике.—М.: Наука, 1971.

219. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. —М.: Наука, 1975.—664 с.

220. Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Ф. Основы теории категорий. —М.: Наука, 1974.—256 с.

221. Чёрч А. Введение в математическую логику. — М.: Изд-во иностр. лит., 1965.—488 с.

222. Чилин В. И. Частично упорядоченные бэровские инволютивные алгебры // Современные проблемы математики. Новейшие достижения.—М.: ВИНИТИ, 1985.—Т. 27.—С. 99–128.

223. Шамаев И. И. О разложении и представлении регулярных операторов // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 2.— С. 192–202.

224. Шамаев И. И. Оператор, дизъюнктный решеточным гомоморфизмам, операторам Магарам и интегральным операторам // Оптимизация.—1990.— Вып. 46.— С. 154–159.

225. Шамаев И. И. Топологические методы в теории регулярных операторов в пространствах Канторовича (Докт. дис.). — Якутск, 1994.

226. Шварц Л. Анализ.—М.: Мир, 1972.—Т. 1.—824 с.

227. Шенфильд Дж. Р. Математическая логика.—М.: Наука, 1975. —520 с.

228. Шенфильд Дж. Р. Аксиомы теории множеств // Справочная книга по математической логике.—М.: Наука, 1982.—Ч. 2.— С. 9–34.

229. Шотаев Г. Н. О билинейных операторах в решеточно нормированных пространствах // Оптимизация.—1986.—Вып. 37.— С. 38–50.

230. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. —М.: ОНТИ, 1936.—Т. 1.—352 с.

231. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление.—Л.: Гостехиздат, 1949.— 580 с.

232. Эйлер Л. Интегральное исчисление.—М.: Гостехиздат, 1950.— Т. 1.—415 с.

233. Эклоф П. Теория ультрапроизведений для алгебраистов // Справочная книга по математической логике. — М.: Наука, 1982.—Ч. 1.—С. 109–140.

234. Энгелер Э. Метаматематика элементарной математики.—М.: Мир, 1987.—127 с.

235. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. —М.: Мир, 1979.

236. Юшкевич А. П. Лейбниц и основание исчисления бесконечно малых // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 3, вып. 1.—С. 150–164.

237. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.—М.: Мир, 1974.—488 с.

238. Aksoy A. G. and Khamsi M. A. Nonstandard Methods in Fixed Point Theory.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1990.—139 p.

239. Albeverio S., Gordon E. I., and Khrennikov A. Yu. Finite dimensional approximations of operators in the Hilbert spaces of functions on locally compact abelian groups // Acta Appl. Math. (to appear).

240. Albeverio S., Luxemburg W. A. J., and Wolff M. .P. H. (eds.) Advances in analysis, probability and mathematical physics: contributions of nonstandard analysis. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (1995). — x+ 251 p.

241. Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Locally Solid Riesz Spaces.—New York etc.: Academic Press, 1978.

242. Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Positive Operators.—New York: Academic Press, 1985.—367 p.

243. Anderson R. M. A nonstandard representation of Brownian motion and Itô integration // Israel J. Math. Soc.—1976.—V. 25.—P. 15–46.

244. Anderson R. M. Star-finite representations of measure spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1982.—V. 271.—P. 667–687.

245. Anselone P. M. Collectively Compact Operator Approximation Theory and Applications to Integral Equations. —Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1971.

246. Arens R. F. and Kaplansky I. Topological representation of algebras // Trans. Amer. Math. Soc.—1948.—V. 63, No. 3.— P. 457–481.

247. Arkeryd L. and Bergh J. Some properties of Loeb–Sobolev spaces // J. London Math. Soc.—1986.—V. 34, No. 2.—P. 317–334.

248. Arkeryd L. O., Cutland N. J., and Henson W. (eds.) Nonstandard Analysis. Theory and Applications (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Nonstandard Analysis and Its Applications, International Centre for Mathematical Studies, Edinburgh, Scotland, 30 June–13 July).—Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1997.—380 p.

249. Arveson W. Operator algebras and invariant subspaces// Ann. of Math.—1974.—V. 100, No. 2.—P. 433–532.

250. Arveson W. An Invitation to C^*-Algebras.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1976.—106 p.

251. Attouch H. Variational Convergence for Functions and Operators. —Boston etc.: Pitman, 1984.

252. Aubin J.-P. and Frankowska H. Set-Valued Analysis. — Boston: Birkhäuser, 1990.

253. Auslander L. and Tolimieri R. Is computing with finite Fourier transform pure or applied mathematics? // Bull. Amer. Math. Soc.—1979.—V. 1, No. 6.—P. 847–897.

254. Bagarello F. Nonstandard variational calculus with applications to classical mechanics. I: An existence criterion// Internat. J. Theoret. Phys.—1999.—V. 38, No. 5.—P. 1569–1592.

255. Bagarello F. Nonstandard variational calculus with applications to classical mechanics. II: The inverse problem and more // Internat. J. Theoret. Phys.—1999.—V. 38, No. 5.—P. 1593–1615.

256. Ballard D. Foundational Aspects of "Non" Standard Mathematics. —Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.—135 p.

257. Bell J. L. Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—New York etc.: Clarendon Press, 1985.—xx+165 p.

258. Bell J. L. and Slomson A. B. Models and Ultraproducts: an Introduction.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1969.—ix+322 p.

259. Berberian S. K. Baer $*$-Rings.—Berlin: Springer-Verlag, 1972.—xii+296 p.

260. Bigard A., Keimel K., and Wolfenstein S. Groupes et Anneaux Réticulés, —Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977.—xi+334 p. (Lecture Notes in Math., **608**.)

261. Bishop E. and Bridges D. Constructive Analysis.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1985.

262. Blumenthal L. M. Theory and Applications of Distance Geometry. —Oxford: Clarendon Press, 1953.—xi+347 p.

263. Boole G. An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.—New York: Dover, 1957.—xi+424 p.

264. Boole G. Selected Manuscripts on Logic and Its Philosophy.—Basel: Birkhäuser-Verlag, 1997.—xiv+236 p. (Science Networks. Historical Studies, **20**.)

265. Burden C. W. and Mulvey C. J. Banach spaces in categories of sheaves // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl.

Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., University of Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 169–196.

266. Canjar R. M. Complete Boolean ultraproducts // J. Symbolic Logic.—1987.—V. 52, No. 2.—P. 530–542.

267. Capinski M. and Cutland N. J. Nonstandard Methods for Stochastic Fluid Mechanics.—Singapore etc.: World Scientific Publishers, 1995.—xii+227 p. (Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, Vol. 27.)

268. Castaing C. and Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977. (Lecture Notes in Math., **580**).—278 p.

269. Ciesielski K. Set Theory for the Working Mathematician. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997.—xi+236 p.

270. Clarke F. H. Generalized gradients and applications // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—V. 205, No. 2.—P. 247–262.

271. Clarke F. H. Optimization and Nonsmooth Analysis.—Wiley: New York, 1983.

272. Cozart D. and Moore L. C. Jr. The nonstandard hull of a normed Riesz space // Duke Math. J.—1974.—V. 41.—P. 263–275.

273. Cristiant C. Der Beitrag Gödels für die Rechfertigung der Leibnizschen Idee von der Infinitesimalen // Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II.—1983.—Bd 192, No. 1–3.—S. 25–43.

274. Curtis T. Nonstandard Methods in the Calculus of Variations.—London: Pitman, 1993.—94 p. (Pitman Research Notes in Mathematics, **297**.)

275. Cutland N. J. Nonstandard measure theory and its applications // Bull. London Math. Soc.—1983.—V. 15, No. 6.—P. 530–589.

276. Cutland N. J. Infinitesimal methods in control theory, deterministic and stochastic // Acta Appl. Math.—1986.—V. 5, No. 2.—P. 105–137.

277. Cutland N. J. (ed.) Nonstandard Analysis and Its Applications.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.

278. Dacunha-Castelle D. and Krivine J.-L. Applications des ultraproduits a l'etude des espaces et des algebres de Banach // Studia Math.—1972.—V. 41.—P. 315–334.

279. Dales H. and Woodin W. An Introduction to Independence for

Analysts. — Cambridge: Cambridge University Press, 1987. — viii+242 p.

280. Dauben J. W. Abraham Robinson. The Creation of Nonstandard Analysis, a Personal and Mathematical Odyssey. — Princeton: Princeton University Press, 1995.— xix+559 p.

281. Day M. Normed Linear Spaces.—New York and Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.—viii+211 p.

282. Diener F. and Diener M. Les applications de l'analyse non standard // Recherche.—1989.—V. 20, No. 1.—P. 68–83.

283. Diener F. and Diener M. (eds.) Nonstandard Analysis in Practice. —Berlin etc.: Springer-Verlag, 1995.—250 p.

284. Diestel J. and Uhl J. J. Vector Measures.—Providence, RI: Amer. Math. Soc, 1977. (Math. Surveys; **15**.)

285. Digernes T., Husstad E., and Varadarajan V. Finite approximations of Weyl systems // Math. Scand.—1999.—V. 84.—P. 261–283.

286. Digernes T., Varadarajan V., and Varadhan S. Finite approximations to quantum systems // Rev. Math. Phys.—1994.—V. 6, No. 4.—P. 621–648.

287. Dinculeanu N. Vector Measures.—Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.—432 p.

288. Dixmier J. C^*-Algebras.—Amsterdam, New York, and Oxford: North-Holland, 1977.—xiii+492 p.

289. Dixmier J. Les Algebres d'Operateurs dans l'Espace Hilbertien (Algebres de von Neumann).—Paris: Gauthier–Villars, 1996.—x+367 p.

290. Dolecki S. A general theory of necessary optimality conditions // J. Math. Anal. Appl.—1980.—V. 78, No. 12.—P. 267–308.

291. Dolecki S. Tangency and differentiation: marginal functions // Adv. in Appl. Math.—1990.—V. 11.—P. 388–411.

292. Dragalin A. G. An explicit Boolean-valued model for nonstandard arithmetic // Publ. Math. Debrecen.—1993.—V. 42, No. 3–4.— P. 369–389.

293. Dunford N. and Schwartz J. T. Linear Operators. Vol. 1: General Theory.—New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.—xiv+858 p.

294. Dunford N. and Schwartz J. T. Linear Operators. Vol. 2: Spectral Theory. Selfadjoint Operators in Hilbert Space–New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.—P. i–x, 859–1923 and 1–7.

295. Dunford N. and Schwartz J. T. Linear Operators. Vol. 3: Spectral Operators.—New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.—P. i–xx and 1925–2592.

296. Eda K. A Boolean power and a direct product of abelian groups // Tsukuba J. Math.—1982.—V. 6, No. 2.—P. 187–194.

297. Eda K. On a Boolean power of a torsion free abelian group // J. Algebra.—1983.—V. 82, No. 1.—P. 84–93.

298. Ellis D. Geometry in abstract distance spaces // Publ. Math. Debrecen.— 1951.—V. 2.—P. 1–25.

299. Espanol L. Dimension of Boolean valued lattices and rings // J. Pure Appl. Algebra.—1986.—No. 42.—P. 223–236.

300. Fakhoury H. Représentations d'opérateurs à valeurs dans $L^1(X, \Sigma, \mu)$ // Math. Ann.—1979.—V. 240, No. 3.—P. 203–212.

301. Farkas E. and Szabo M. On the plausibility of nonstandard proofs in analysis // Dialectica.—1974.—V. 38, No. 4.—P. 297–310.

302. Fattorini H. O. The Cauchy Problem.—Addison-Wesley, 1983.

303. Foster A. L. Generalized 'Boolean' theory of universal algebras. I. Subdirect sums and normal representation theorems // Math. Z. —1953.—V. 58, No. 3.—P. 306–336.

304. Foster A. L. Generalized 'Boolean' theory of universal algebras. II. Identities and subdirect sums of functionally complete algebras // Math. Z.—1953.—V. 59, No. 2.—P. 191–199.

305. Fourman M. P. and Scott D. S. Sheaves and logic // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 302–401.

306. Fourman M. P., Mulvey C. J., and Scott D. S. (eds.) Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977), Springer-Verlag, Berlin, 1979.

307. Fuller R. V. Relations among continuous and various noncontinuous functions // Pacific J. Math.—1968.—V. 25, No. 3.—P. 495–509.

308. Gandy R. O. Limitations to mathematical knowledge // Logic Colloquium-80.—New York and London: North-Holland, 1982.—P. 129–146.

309. Georgescu G. and Voiculescu I. Eastern model theory for Boolean-valued theories // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1985.—No. 31.—P. 79–88.

310. Gödel K. What is Cantor's continuum problem // Amer. Math. Monthly.—1947.—V. 54, No. 9.—P. 515–525.

311. Goldblatt R. Lectures on the Hyperreals: An Introduction to Nonstandard Analysis.—New York etc.: Springer-Verlag, 1998.—303 p.

312. Goodearl K. R. Von Neumann Regular Rings.— London: Pitman, 1979.

313. Gordon E. I. Nonstandard Methods in Commutative Harmonic Analysis.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997.

314. Grayson R. J. Heyting-valued models for intuitionistic set theory // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 402–414.

315. Gutman A. E. Locally one-dimensional K-spaces and σ-distributive Boolean algebras // Siberian Adv. Math.—1995.—V. 5, No. 2. —P. 99–121.

316. Hallet M. Cantorian Set Theory and Limitation of Size.—Oxford: Clarendon Press, 1984.—xix+343 p.

317. Halmos P. R. Lectures on Boolean Algebras.—Toronto, New York, and London: Van Nostrand, 1963.—147 p.

318. Hanshe-Olsen H. and Störmer E. Jordan Operator Algebras.—Boston etc.: Pitman Publ. Inc., 1984.

319. Harnik V. Infinitesimals from Leibniz to Robinson time—to bring them back to school // Math. Intelligencer.—1986.—V. 8, No. 2.—P. 41–47.

320. Hatcher W. Calculus is algebra // Amer. Math. Monthly.—1989.—V. 89, No. 6.—P. 362–370.

321. Heinrich S. Ultraproducts of L_1-predual spaces // Fund. Math.—1981.—V. 113, No. 3.—P. 221–234.

322. Henle J. M. and Kleinberg E. M. Infinitesimal Calculus.—Cambridge and London: Alpine Press, 1979.—135 p.

323. Henson C. W. On the nonstandard representation of measures // Trans. Amer. Math. Soc.—1972.—V. 172, No. 2.—P. 437–446.

324. Henson C. W. When do two Banach spaces have isometically isomorphic nonstandard hulls? // Israel J. Math.—1975.—V. 22.—P. 57–67.

325. Henson C. W. Nonstandard hulls of Banach spaces // Israel J. Math.—1976.—V. 25.—P. 108–114.

326. Henson C. W. Unbounded Loeb measures // Proc. Amer. Math. Soc.—1979.—V. 74, No. 1.—P. 143–150.

327. Henson C. W. Infinitesimals in functional analysis //Nonstandard Analysis and Its Applications.—Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 1988.—P. 140–181.

328. Henson C. W. and Keisler H. J. On the strength of nonstandard analysis // J. Symbolic Logic.—1986.—V. 51, No. 2.—P. 377–386.

329. Henson C. W. and Moore L. C. Jr. Nonstandard hulls of the classical Banach spaces // Duke Math. J.—1974.—V. 41, No. 2.—P. 277–284.

330. Henson C. W. and Moore L. C. Jr. Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces // Nonstandard Analysis. Recent Developments.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1983.—P. 27–112.—(Lecture Notes in Math., **983**.)

331. Henson C. W., Kaufmann M., and Keisler H. J. The strength of nonstandard methods in arithmetic // J. Symbolic Logic.—1984.—V. 49, No. 34.—P. 1039–1057.

332. Hermann R. Supernear functions // Math. Japon.—1986.—V. 31, No. 2.—P. 320.

333. Hernandez E. G. Boolean-valued models of set theory with automorphisms // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1986.—V. 32, No. 2.—P. 117–130.

334. Hiriart-Urruty J.-B. Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces // Math. Oper. Res.—1979.—V. 4, No. 1.—P. 79–97.

335. Hoehle U. Almost everywhere convergence and Boolean-valued topologies / Topology, Proc. 5th Int. Meet., Lecce/Italy 1990, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. 29.—1992.—P. 215–227.

336. Hofman K. H. and Keimel K. Sheaf theoretical concepts in analysis: bundles and sheaves of Banach spaces, Banach $C(X)$-modules // Applications of Sheaves, 1979, Springer-Verlag, Berlin.

337. Hofstedter D. R. Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.—New York: Vintage Books, 1980.—778 p.

338. Hogbe-Nlend H. Theorie des Bornologie et Applications.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.

339. Horiguchi H. A definition of the category of Boolean-valued models // Comment. Math. Univ. St. Paul.—1981.—V. 30, No. 2.—

P. 135–147.

340. Horiguchi H. The category of Boolean-valued models and its applications // Comment. Math. Univ. St. Paul.—1985.—V. 34, No. 1.—P. 71–89.

341. Hrbaček K. Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fund. Math.—1978.—V. 98, No. 1.—P. 1–24.

342. Hrbaček K. Nonstandard set theory // Amer. Math. Monthly.—1979.—V. 86, No. 8.—P. 659–677.

343. Hurd A. E. (ed.) Nonstandard Analysis. Recent Developments.—Berlin: Springer-Verlag, 1983.—213 p.

344. Hurd A. E. and Loeb H. An Introduction to Nonstandard Analysis.—Orlando etc.: Academic Press, 1985.—232 p.

345. Ionescu Tulcea A. and Ionescu Tulcea C. Topics in the Theory of Lifting.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1969.—190 p.

346. Jaffe A. Ordering the universe: the role of mathematics // SIAM Rev.—1984.—V. 26, No. 4.—P. 473–500.

347. Jarnik V. Bolzano and the Foundations of Mathematical Analysis.—Prague: Society of Czechosl. Math. Phys., 1981.—89 p.

348. Jech T. J. The Axiom of Choice.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1973.—xi+202 p.

349. Jech T. J. Abstract theory of abelian operator algebras: an application of forcing // Trans. Amer. Math. Soc.—1985.—V. 289, No. 1.—P. 133–162.

350. Jech T. J. First order theory of complete Stonean algebras (Boolean-valued real and complex numbers) // Canad. Math. Bull.—1987.—T. 30, No. 4.—P. 385–392.

351. Jech T. J. Boolean-linear spaces // Adv. in Math.—1990.—V. 81, No. 2.—P. 117–197.

352. Jech T. J. Set Theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1997. — xiv+634 p.

353. Johnstone P. T. Stone Spaces.—Cambridge and New York: Cambridge University Press, 1982.—xxii+370 p.

354. de Jonge E. and van Rooij A. C. M. Introduction to Riesz Spaces.—Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977.

355. Jordan P., von Neumann J., and Wigner E. On an algebraic generalization of the quantum mechanic formalism // Ann. Math.—1944.—V. 35.—P. 29–64.

356. Kadison R. V. and Ringrose J. R. Fundamentals of the Theory of Operator Algebras.—Vol. 1, 2.—Providence, RI: Amer. Math.

Soc., 1997. Vol. 3, 4.—Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 1991–1992.

357. Kalina M. On the ergodic theorem within nonstandard models // Tatra Mt. Math. Publ.—1997.—V. 10.—P. 87–93.

358. Kalton N. J. The endomorphisms of L_p $(0 \leq p \leq 1)$// Indiana Univ. Math. J.—1978.—V. 27, No. 3.—P. 353–381.

359. Kalton N. J. Linear operators on L_p for $0 < p < 1$// Trans. Amer. Math. Soc.—1980.—V. 259, No. 2.—P. 319–355.

360. Kalton N. J. Representation of operators between function spaces // Indiana Univ. Math. J.—1984.—V. 33, No. 5.—P. 639–665.

361. Kalton N. J. Endomorphisms of symmetric function spaces// Indiana Univ. Math. J.—1985.—V. 34, No. 2.—P. 225–247.

362. Kamo S. Nonstandard natural number systems and nonstandard models // J. Symbolic Logic.—1987.—V. 46, No. 2.—P. 365–376.

363. Kanovei V. and Reeken M. Internal approach to external sets and universes // Studia Logica, part 1: **55**, 227–235 (1995); part II: **55**, 347–376 (1995); part III: **56**, 293–322 (1996).

364. Kanovei V. and Reeken M. Mathematics in a nonstandard world. I // Math. Japon.—1997.— V. 45, No. 2.— P. 369–408.

365. Kanovei V. and Reeken M. A nonstandard proof of the Jordan curve theorem // Real Anal. Exchange.—1998.—V. 24, No. 1.—P. 161–169.

366. Kanovei V. and Reeken M. Extending standard models of ZFC to models of nonstandard set theories // Studia Logica.—2000.—V. 64, No. 1.—P. 37–59.

367. Kaplansky I. Projections in Banach algebras // Ann. of Math. (2).—1951.—V. 53.—P. 235–249.

368. Kaplansky I. Algebras of type I // Ann. of Math. (2).—1952.—V. 56.—P. 460–472.

369. Kaplansky I. Modules over operator algebras // Amer. J. Math.—1953.—V. 75, No. 4.—P. 839–858.

370. Kawai T. Axiom systems of nonstandard set theory // Logic Symposia, Proc. Conf. Hakone 1979, 1980.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1981.—P. 57–65.

371. Kawebuta Sh. A “non-standard” approach to the field equations in the functional form // Osaka J. Math.—1986.—V. 23, No. 1.—P. 55–67.

372. Keisler H. J. Elementary Calculus: An Approach Using Infinitesimals.—Boston, Mass.: Prindle, Weber, and Schmidt, 1976.—71 p.

373. Keisler H. J. An infinitesimal approach to stochastic analysis // Mem. Amer. Math. Soc.—1984.—V. 48.—184 p.

374. Kopperman R. Model Theory and Its Applications.—Boston: Allyn and Bacon, 1972.—333 p.

375. Kramosil I. Comparing alternative definitions of Boolean-valued fuzzy sets // Kybernetika.—1992.—V. 28, No. 6.—P. 425–443.

376. Kreisel G. Observations of popular discussions on foundations // Axiomatic Set Theory. Proc. Symposia in Pure Math.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1971.—V. 1.—P. 183–190.

377. Krupa A. On various generalizations of the notion of an $\mathscr{F}$-power to the case of unbounded operators // Bull. Polish Acad. Sci. Math.—1990.—V. 38.—P. 159–166

378. Kudryk T. S. and Lyantse V. E. Operator-valued charges on finite sets// Mat. Stud.—1997.—V. 7, No. 2.—P. 145-156.

379. Kudryk T. S., Lyantse V. E., and Chujko G. I. Nearstandardness of finite set// Mat. Stud.—1993.—V. 2.—P. 25-34.

380. Kuribayashi Y. Fourier transform using nonstandard analysis // RIMS Kokyuroku.—1996.—V. 975.—P. 132-144.

381. Kudryk T. S., Lyantse V. E., and Chujko G. I. Nearstandard operators// Mat. Stud.—1994.—V. 3.—P. 29-40.

382. Kusraev A. G. On Boolean valued convex analysis // Mathematische Optimiering. Theorie und Anwendungen. Wartburg/Eisenach, 1983, P. 106–109.

383. Kusraev A. G. Dominated Operators.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. —405 p.

384. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods for Kantorovich spaces // Siberian Adv. Math.—1992.—V. 2, No. 2. —P. 114–152.

385. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods in geometric functional analysis // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.—1992.—V. 151.—P. 91–105.

386. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Boolean-valued introduction to the theory of vector lattices // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.—1995.—V. 163.—P. 103–126.

387. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods in functional analysis // Interaction Between Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability Theory.—New York: Marcel Dekker Inc., 1995.—P. 301–306.

388. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. On combined nonstandard methods in the theory of positive operators // Matematychni Studii.—1997.—V. 7, No. 1.—C. 33–40.

389. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. On combined nonstandard methods in functional analysis // Владикавказский мат. журн. (Полнотекст. база данных, номер гос. регистр. 0229905212).—2000.—T. 2. No. 1. (http://alanianet.ru/omj/journal.htm)

390. Kutateladze S. S. Credenda of nonstandard analysis // Siberian Adv. Math.— 1991.—V.1, No. 1.—P. 109–137.

391. Kutateladze S. S. Nonstandard tools for convex analysis//Math. Japon.—1996.—V. 43, No. 2.—P. 391–410.

392. Lacey H. E. The Isometric Theory of Classical Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—x+270 p.

393. Langwitz D. Nicht-standard-mathematik, begründel durch eine Verallgemeinerung der Körpererweiterung // Exposit. Math.—1983.—V. 1.—P. 307–333.

394. Larsen R. Banach Algebras, an Introduction.—New York: Dekker, 1973.—xi+345 p.

395. Levy A. Basic Set Theory.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—xiv+391 p.

396. Li N. The Boolean-valued model of the axiom system of GB // Chinese Sci. Bull.—1991.—V. 36, No. 2.—P. 99–102.

397. Lindenstrauss J. Extension of compact operators // Mem. Amer. Math. Soc.—1964.—V. 48.—112 p.

398. Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 1: Sequence Spaces. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977. — xiii+188 p.

399. Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 2: Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—x+243 p.

400. Locher J. L. (ed.) The World of M. C. Escher.—New York: Abradale Press, 1988.

401. Loeb P. A. Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications to probability theory // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—V. 211.—P. 113–122.

402. Loeb P. A. An introduction to nonstandard analysis and hyperfinite probability theory // Probabilistic Analysis and Related Topics. V. 2. (Ed. A. T. Bharucha–Reid).—New York: Academic Press, 1979.—P. 105–142.

403. Loeb P. and Wolff M. P. H. (eds.) Nonstandard Analysis for the Working Mathematician.—Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 2000.—336 p.

404. Lowen R. Mathematics and fuzziness // Fuzzy Sets Theory and Applications (Louvain-la-Neuve, 1985), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., 177.—Reidel, Dordrecht, and Boston, 1986.—P. 3–38.

405. Loewen P. D. Optimal Control via Nonsmooth Analysis.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993.—ix+153 p.

406. Lutz R. and Gose M. Nonstandard Analysis. A Practical Quide with Applications.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1981.—261 p.—(Lecture Notes in Math., **881**.)

407. Luxemburg W. A.J. (ed.) Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability.—New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1969.—307 p.

408. Luxemburg W. A. J. A general theory of monads // Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability.—Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1969.—P. 18–86.

409. Luxemburg W. A. J. A nonstandard approach to Fourier analysis // Contributions to Nonstandard Analysis.—Amsterdam: North-Holland, 1972.—P. 16–39.

410. Luxemburg W. A. J. and Robinson A. (eds.) Contribution to Non-Standard Analysis.—Amsterdam: North-Holland, 1972.—289 p.

411. Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 1.—Amsterdam and London: North-Holland, 1971.—514 p.

412. Lyantse V. E. Nearstandardness on a Finite Set. Diss. Math. 369 (1997).—63 p.

413. Lyantse W. and Kudryk T. Introduction to Nonstandard Analysis. —Lviv: VNTL Publishers, 1997.—253 p.

414. Lyantse V. E. and Yavorskyj Yu. M. Nonstandard Sturm–Liouville difference operator//Mat. Stud.—1998.—V. 10, No. 1.—P. 54–68.

415. Lyantse V. E. and Yavorskyj Yu. M. Nonstandard Sturm–Liouville difference operator. II // Mat. Stud.—1999.—V. 11, No. 1.—P. 71-82.

416. MacLane S. Categories for the Working Mathematician.—New York: Springer-Verlag, 1971.—ix+262 p.

417. Marinakis K. The infinitely small in space and in time // Trans. Hellenic Inst. Appl. Sci.—1970.—No. 8.—62 p.

418. Martin–Löf P. The definition of random sequences // Inform. and Control.—1966.—V. 9.—P. 602–619.

419. Mckee T. Monadic characterizable in nonstandard topology // Z. Math. Logik.—1940.—V. 26, No. 5.—P. 395–397.

420. Melter R. Boolean valued rings and Boolean metric spaces // Arch. Math.—1964.—No. 15.—P. 354–363.

421. Milvay C. J. Banach sheaves // J. Pure Appl. Algebra.—1980.—V. 17, No. 1.—P. 69–84.

422. Mochover M. and Hirschfeld J. Lectures on Non-Standard Analysis. —Berlin etc.: Springer-Verlag, 1969.—79 p.—(Lecture Notes in Math., **94**.)

423. Molchanov I. S. Set-valued estimators for mean bodies related to Boolean models // Statistics 28.—1996.—No. 1.—P. 43–56.

424. Monk J. D. and Bonnet R. (eds.) Handbook of Boolean Algebras. Vol. 1–3.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1989.

425. Moore L. C. Jr. Hyperfinite extensions of bounded operators on a separable Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc.—1976.—V. 218.—P. 285–295.

426. Namba K. Formal systems and Boolean valued combinatorics // Southeast Asian Conference on Logic (Singapore, 1981), P. 115–132. Stud. Logic Found. Math., 111, Amsterdam and New York: North-Holland, 1983.

427. Nelson E. Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc.—1977.—V. 83, No. 6.—P. 1165–1198.

428. Nelson E. Radically Elementary Probability Theory.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1987.—98 p.

429. Nelson E. The syntax of nonstandard analysis // Ann. Pure Appl. Logic.—1988.—V. 38, No. 2.—P. 123–134.

430. Neubrunn I., Riećan B., and Riecanou Z. An elementary approach to some applications of nonstandard analysis // Rend. Circl. Math. Palermo.—1984.—No. 3.—P. 197–200.

431. von Neumann J. Collected Works. Vol. 1: Logic, Theory of Sets and Quantum Mechanics.—Oxford etc.: Pergamon Press, 1961.—654 p.

432. von Neumann J. Collected Works. Vol. 3: Rings of Operators.—New York, Oxford, London, and Paris: Pergamon Press, 1961.—ix+574 p.

433. von Neumann J. Collected Works. Vol. 4: Continuous Geometry and Other Topics.—Oxford, London, New York, and Paris: Pergamon Press, 1962.—x+516 p.

434. Nishimura H. Boolean valued and Stone algebra valued measure theories // Math. Logic Quart.—1994.—V. 40, No. 1.—P. 69–75.

435. Ozawa M. Boolean valued analysis approach to the trace problem of AW^*-algebras // J. London Math. Soc. (2).—1986.—V. 33, No. 2.—P. 347–354.

436. Ozawa M. Embeddable AW^*-algebras and regular completions // J. London Math. Soc.—1986.—V. 34, No. 3.—P. 511–523.

437. Ozawa M. Boolean-valued interpretation of Banach space theory and module structures of von Neumann algebras // Nagoya Math. J.—1990.—V. 117.—P. 1–36.

438. Pedersen G. K. Analysis Now. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1995.—277 p.

439. Penot J.-P. Compact nets, filters and relations // J. Math. Anal. Appl.—1983.—V. 93, No. 2.—P. 400–417.

440. Péraire Y. Une nouvelle théorie des infinitesimaux// C. R. Acad. Aci. Paris Ser. I.—1985.—V. 301, No. 5.—P. 157–159.

441. Péraire Y. Théorie relative des ensembles internes//Osaka J. Math. —1992.—V. 29, No. 2.—P. 267–297.

442. Péraire Y. Some extensions of the principles of idealization transfer and choice in the relative internal set theory // Arch. Math. Logic.—1995.—V. 34.—P. 269–277.

443. Pinus A. G. Boolean Constructions in Universal Algebras.—Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1993.—vii+350 p.

444. Pirce R. S. Modules over commutative regular rings // Mem. Amer. Math. Soc.—1967.—No. 70.

445. Raebiger F. and Wolff M. P. H. On the approximation of positive operators and the behaviour of the spectra of the approximants // Integral Equations Operator Theory.—1997.—V. 28.—P. 72–86.

446. Raebiger F. and Wolff M. P. H. Spectral and asymptotic properties of dominated operators // J. Austral. Math. Soc. (Series A).—1997.—V. 63.— P. 16–31.

447. Reinhardt H.-J. Analysis of Approximation Methods for Differential and Integral Equations.—New York, Berlin, Heidelberg, and Tokyo: Springer-Verlag, 1985.

448. Rema P. S. Boolean metrization and topological spaces // Math. Japon.—1964.—V. 9, No. 9.—P. 19–30.

449. Repicky M. Cardinal characteristics of the real line and Boolean-valued models // Comment. Math. Univ. Carolin.—1992.—V. 33, No. 1.—P. 184.

450. Rickart Ch. General Theory of Banach Algebras.—Princeton: Van Nostrand, 1960.—xi+394 p.

451. Robert A. Analyse Non-Standard.—Kingston: Queen's University Press, 1984.—119 p.

452. Robert A. One approache naive de l'analyse non-standard // Dialectica. —1984.—V. 38.—P. 287–290.

453. Robinson A. The metaphysics of the calculus // Problems in the Philosophy of Mathematics.—Amsterdam: North-Holland, 1967. —V. 1.—P. 28–46.

454. Robinson A. Non-Standard Analysis.—Princeton: Princeton University Press, 1996.—293 p.

455. Rockafellar R. T. The Theory of Subgradients and Its Applications to Problems of Optimization: Convex and Nonconvex Functions.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1981.

456. Rockafellar R. T. and Wets R. J.-B. Variational Analysis.—Birkhäuser: Springer-Verlag, 1998.—xiii+733 p.

457. Rosser J. B. Logic for Mathematicians.—New York etc.: McGraw-Hill voon Company, Inc., 1953.—530 p.

458. Rosser J. B. Simplified Independence Proofs. Boolean Valued Models of Set Theory.—New York and London: Academic Press, 1969.—xv+217 p.

459. Rubio J. E. Optimization and Nonstandard Analysis.—New York and London: Marcel Dekker, 1994.—376 p. (Pure and Applied Mathematics, **184**.)

460. Sakai S. C^*-Algebras and W^*-Algebras.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.—256 p.

461. Salbany S. and Todorov T. Nonstandard analysis in topology: nonstandard and standard compactifications // J. Symbolic Logic.—2000.—V. 65, No. 4.—P. 1836–1840.

462. Saracino D. and Weispfenning V. On algebraic curves over commutative regular rings // Model Theory and Algebra (a Memorial Tribute to Abraham Robinson).—New York etc.: Springer-Verlag, 1969. (Lecture Notes in Math., **498**.)

463. Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—376 p.

464. Schröder J. Das Iterationsverfahren bei allgemeinierem Abshtandsbegriff // Math. Z.—1956.—Bd 66.—S. 111–116.

465. Schwarz H.-U. Banach Lattices and Operators.—Leipzig: Teubner, 1984.—208 p.

466. Schwinger J. Unitary operator bases. The special canonical group // Proc. Natl. Acad. Sci. USA.—1960.—V. 46.—P. 570–579, 1401–1405.

467. Sikorskiĭ M. R. Some applications of Boolean-valued models to study operators on polynormed spaces // Sov. Math.—1989.—V. 33, No. 2.—P. 106–110.

468. Smith K. Commutative regular rings and Boolean-valued fields // J. Symbolic Logic.—1984.—V. 49, No. 1.—P. 281–297.

469. Smithson R. Subcontinuity for multifunctions // Pacific J. Math. —1975.—V. 61, No. 4.—P. 283–288.

470. Solovay R. M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. of Math. (2).—1970.—V. 92, No. 2.—P. 1–56.

471. Solovay R. and Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math.—1972.—V. 94, No. 2.—P. 201–245.

472. Sourour A. R. Operators with absolutely bounded matrices // Math. Z. —1978.—V. 162, No. 2.—P. 183–187.

473. Sourour A. R. The isometries of $L^p(\Omega, X)$ // J. Funct. Anal.—1978.—V. 30, No. 2.—P. 276–285.

474. Sourour A. R. A note on integral operators // Acta Sci. Math.—1979.—V. 41, No. 43.—P. 375–379.

475. Sourour A. R. Pseudo-integral operators // Trans. Amer. Math. Soc.—1979.—V. 253.—P. 339–363.

476. Sourour A. R. Characterization and order properties of pseudo-integral operators // Pacific J. Math.—1982.—V. 99, No. 1.— P. 145–158.

477. Stern J. Some applications of model theory in Banach space theory // Ann. Math. Logic.—1976.—V. 9, No. 1.—P. 49–121.

478. Stern J. The problem of envelopes for Banach spaces // Israel J. Math.—1976.—V. 24, No. 1.—P. 1–15.

479. Stewart I. Frog and Mouse revisited // Math. Intelligencer.—1986.—V. 8, No. 4.—P. 78–82.

480. Stroyan K. D. Infinitesimal calculus in locally convex spaces. I // Trans. Amer. Math. Soc.—1978.—V. 240.—P. 363–384; Locally convex infinitesimal calculus. II // J. Funct. Anal.—1983.—V. 53, No. 1.—P. 1–15.

481. Stroyan K. D. and Bayod J. M. Foundations of Infinitesimal Stochastic Analysis.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1986.—478 p.

482. Stroyan K. D. and Luxemburg W. A. J. Introduction to the Theory of Infinitesimals.—New York etc.: Academic Press, 1976.—326 p.

483. Stummel F. Diskrete Konvergenz Linearer Operatoren. I // Math. Ann.—1970.—V. 190.—P. 45–92.

484. Stummel F. Diskrete Konvergenz Linearer Operatoren. II // Math. Z.—1971.—V. 120.—P. 231–264.

485. Sunder V. S. An Invitation to Von Neumann Algebras.—New York etc.: Springer-Verlag, 1987.—171 p.

486. Tacon D. G. Nonstandard extensions of transformations between Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1980.—V. 260, No. 1.—P. 147–158.

487. Takeuti G. Two Applications of Logic to Mathematics.—Tokyo and Princeton: Iwanami and Princeton Univ. Press, 1978.—137 p.

488. Takeuti G. A transfer principle in harmonic analysis // J. Symbolic Logic.—1979.—V. 44, No. 3.—P. 417–440.

489. Takeuti G. Boolean valued analysis // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—P. 714–731. (Lecture Notes in Math., **753**.)

490. Takeuti G. Quantum set theory // Current Issues in Quantum Logic (Erice, 1979).—New York and London: Plenum Press, 1981. —P. 303–322.

491. Takeuti G. C^*-algebras and Boolean valued analysis // Japan. J. Math. (N.S.).—1983.—V. 9, No. 2.—P. 207–246.

492. Takeuti G. Von Neumann algebras and Boolean valued analysis // J. Math. Soc. Japan.—1983.—V. 35, No. 1.—P. 1–21.

493. Takeuti G. and Titani S. Heyting-valued universes of intuitionistic set theory // Logic Symposia, Hakone 1979, 1980 (Hakone, 1979/1980).—Berlin and New York: Springer-Verlag, 1981.—P. 189–306. (Lecture Notes in Math., **891**.)

494. Takeuti G. and Titani S. Globalization of intuitionistic set theory // Ann. Pure Appl. Logic.—1987.—V. 33, No. 2.—P. 195–211.

495. Takeuti G. and Zaring W. M. Introduction to Axiomatic Set Theory.—New York etc.: Springer-Verlag, 1971.—348 p.

496. Takeuti G. and Zaring W. M. Axiomatic Set Theory.—New York: Springer-Verlag, 1973.—238 p.

497. Tall D. The calculus of Leibniz—an alternative modern approach // Math. Intelligencer.—1979/80.—V. 2, No. 1.—P. 54–60.

498. Tanaka K. and Yamazaki T. A nonstandard construction of Haar measure and weak Koenig's lemma// J. Symbolic Logic.—2000.—V. 65, No. 1.—P. 173-186.

499. Thibault L. Epidifferentielles de fonctions vectorielles // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1980.—V. 290, No. 2.—P. A87–A90.

500. Thibault L. Subdifferentials of nonconvex vector-valued mappings // J. Math. Anal. Appl.—1982.—V. 86, No. 2.

501. Topping D. M. Jordan algebras of self-adjoint operators // Mem. Amer. Math. Soc.—1965.—Vol. 53.—48 p.

502. Van de Berg I. Nonstandard Asymptotic Analysis.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1987.—187 p.

503. van der Hoeven J. On the computation of limsups//J. Pure Appl. Algebra.—1997.—V. 117–118.—P. 381–394.

504. Varadarajan V. Quantization of Semisimple Groups and some Applications.—Preprint.—1996.

505. Venkataraman K. Boolean valued almost periodic functions: existence of the mean // J. Indian Math. Soc. (N.S.).—1979.—V. 43, No. 1–4.—P. 275–283.

506. Venkataraman K. Boolean valued almost periodic functions on topological groups // J. Indian Math. Soc. (N.S.).—1984.—V. 48, No. 1–4.—P. 153–164.

507. Vopěnka P. General theory of $\bigtriangledown$-models // Comment. Math. Univ. Carolin.—1967.—V. 7, No. 1.—P. 147–170.

508. Vopěnka P. The limits of sheaves over extremally disconnected compact Hausdorff spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci.

Math. Astronom. Phys.—1967.—V. 15, No. 1.—P. 1–4.

509. Ward D. E. Convex subcones on the contingent cone in nonsmooth calculus and optimization // Trans. Amer. Math. Soc.—1987.—V. 302, No. 2.—P. 661–682.

510. Ward D. E. The quantification tangent cones // Canad. J. Math.—1988.—V. 40, No. 3.—P. 666–694.

511. Ward D. E. Corrigendum to 'Convex subcones of the contingent cone in nonsmooth calculus and optimization' // Trans. Amer. Math. Soc.—1989.—V. 311, No. 1.—P. 429–431.

512. Wattenberg F. Nonstandard measure theory: Avoiding pathological sets // Trans. Amer. Math. Soc.—1979.—V. 250.—P. 357–368.

513. Weil A. Euler // Amer. Math. Monthly.—1984.—V. 91, No. 9.—P. 537–542.

514. Weis L. Decompositions of positive operators and some of their applications// Functional Analysis: Survey and Recent Results. Vol. 3: Proc. 3rd Conf., Paderborn, 24–29 May, 1983.—Amsterdam.—1984.

515. Weis L. On the representation of order continuous operators by random measures// Trans. Amer. Math. Soc.—1984.—V. 285, No. 2.—P. 535–563.

516. Weis L. The range of an operator in $C(X)$ and its representing stochastic kernel// Arch. Math.—1986,—V. 46.—P. 171–178.

517. Weispfenning V. Model-completeness and elimination of quantifiers for subdirect products of structures // J. of Algebra.—1975.—V. 36, No. 2.—P. 252–277.

518. Westfall R. Never at Rest. A Bibliography of Isaak Newton.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982.—908 p.

519. Wolff M. P. H. An introduction to nonstandard functional analysis // L. O. Arkeryd, N. J. Cutland, C. Ward Henson (eds): Nonstandard Analysis, Theory and Applications.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.—P. 121–151.

520. Wolff M. P. H. On the approximation of operators and the convergence of the spectra of approximants // Operator Theory: Advances and Applications.—1998.—V. 103.—P. 279–283.

521. Wright J. D. M. Vector lattice measures on locally compact spaces // Math. Z.—1971.—V. 120, No. 3.—P. 193–203.

522. Yamaguchi J. Boolean $[0, 1]$-valued continuous operators // Internat. J. Comput. Math.—1998.—V. 68, No. 1–2.—P. 71–79.

523. Yessenin-Volpin A. S. The ultra intuitionistic criticism and the traditional program for foundations of mathematics // Intuitionism and Proof Theory.—Amsterdam and London: North-Holland, 1970.—P. 3–45.

524. Yood B. Banach Algebras. An Introduction.—Ottawa: Carleton Univ., 1988.—174 p.

525. Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 2.— Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—xi+720 p.

526. Zaanen A. C. Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1997.—312 p.

527. Zhang Jin-wen. A unified treatment of fuzzy set theory and Boolean valued set theory fuzzy set structures and normal fuzzy set structures // J. Math. Anal. Appl.—1980.—V. 76, No. 1.—P. 297–301.

528. Zivaljevic R. Infinitesimals, microsimplexes and elementary homology theory // Amer. Math. Monthly.—1986.—V. 93, No. 7.—P. 540–544.

Указатель обозначений

Предметный указатель

Гордон Евгений Израилевич
Кусраев Анатолий Георгиевич
Кутателадзе Семён Самсонович

Инфинитезимальный анализ
Часть 1
Серия «Нестандартные методы анализа»

Ответственный редактор
академик *Ю. Г. Решетняк*

Редактор серии
С. С. Кутателадзе

Редактор издательства *И. И. Кожанова*

Издание подготовлено с использованием макропакета $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX,
the American Mathematical Society'sTEX macro system.

Подписано в печать 30.03.01. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 19. Уч.-изд. л. 19. Тираж 200 экз. Заказ № 19.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики.
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

Лицензия ПЛД № 57–43 от 22 апреля 1998 г.
Отпечатано на полиграфическом участке ИМ СО РАН.
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.