РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК • СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. СОБОЛЕВА

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

Е.И. ГОРДОН, А.Г. КУСРАЕВ
С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ЧАСТЬ 2

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

Нестандартные методы анализа

**Е. И. Гордон, А. Г. Кусраев,
С. С. Кутателадзе**

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
ЧАСТЬ 2

Новосибирск
Издательство Института математики
2001

УДК 517.11+517.98
ББК 22.16
Г68

Гордон Е. И., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Инфинитезимальный анализ. Ч. 2. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001. — viii+247 с. — (Нестандартные методы анализа).

ISBN 5–86134–097–8 (ч. 2)
ISBN 5–86134–096–X.

Инфинитезимальный анализ — один из наиболее разработанных разделов, составляющих нестандартные методы анализа. В его рамках получили строгое обоснование метод неделимых и монадология, восходящие к глубокой древности. В монографии подробно излагаются теоретико-множественные формализмы, позволяющие использовать актуальные бесконечно большие и бесконечно малые величины. Детально изучаются приложения инфинитезимальных методов в топологии, теории меры, оптимизации и гармоническом анализе.

Книга издана в двух частях, составляющих единое целое, и ориентирована на широкий круг читателей, интересующихся современным состоянием и приложениями классического анализа бесконечных.

Библиогр.: 533.

Ответственный редактор
академик *Ю. Г. Решетняк*

Редактор серии
С. С. Кутателадзе

Г $\frac{1602080000\text{–}07}{\text{Я}82(03)\text{–}01}$ Без объявл.

ISBN 5–86134–097–8 (ч. 2)
ISBN 5–86134–096–X

Содержание

От редактора серии

Нестандартные методы анализа в современном понимании состоят в привлечении двух различных — «стандартной» и «нестандартной» — моделей теории множеств для исследования конкретных математических объектов и проблем. Такие методы получили существенное развитие во второй половине XX века и сформировались в несколько направлений.

Первое из названных направлений вслед за его основоположником А. Робинсоном часто называют запоминающимся, хотя и отчасти эпатажным, термином — *нестандартный анализ* (теперь чаще говорят о классическом или робинсоновском нестандартном анализе). Робинсоновский нестандартный анализ характеризуется широким использованием давно известных в практике естествознания, но долгое время запрещенных в математике XX века концепций, связанных с представлениями об актуальных бесконечно больших и актуальных бесконечно малых величинах. В этой связи сейчас за ним закрепилось наименование *инфинитезимальный анализ*, выразительно напоминающее о классическом анализе бесконечно малых.

Инфинитезимальный анализ бурно развивается и уже внес капитальные изменения в систему общематематических представлений. Прежде всего это связано с тем, что в нем предложено новое понимание метода неделимых, восходящего к глубокой древности, и осуществлен синтез подходов к дифференциальному и интегральному исчислению, предложенных его основоположниками. В наши дни инфинитезимальный анализ находит широкое распространение и проникает во все разделы современной математики. Наибольшие изменения происходят в этой связи в негладком анализе, в теории вероятностей и теории меры, в качественной теории дифференциальных уравнений и в математической экономике.

Второе направление — *булевозначный анализ* — характеризуется широким использованием таких терминов, как спуски и подъемы, циклические оболочки и миксинги, B-множества и изображения объектов в моделях. Развитие этого направления, становление которого связано со знаменитыми работами П. Дж. Коэна по гипотезе континуума, привело к принципиально новым идеям и результатам в ряде направлений функционального анализа, прежде всего в теории пространств Канторовича, в теории алгебр фон Неймана, в выпуклом анализе и теории векторных мер.

В монографии [119], изданной в 1990 году Сибирским отделением издательства «Наука» и переизданной в 1994 году издательством Kluwer Academic Publishers на английском языке, впервые с единых методологических позиций были рассмотрены оба указанных выше направления, составляющих ядро современных нестандартных методов анализа.

Читательский интерес и стремительное развитие самой дисциплины поставили задачу отразить современное состояние дел, изложив новые темы и результаты. При работе над реализацией проекта выяснилось, что остаться в прежних рамках одной книги уже невозможно. В этой связи в 1999 году было принято решение о подготовке серии монографий под общим названием «Нестандартные методы анализа», каждая из которых трактует различные аспекты этого математического направления.

В названной серии уже вышли две книги [56, 125], опубликованные практически одновременно с их переводами на английский язык. Монография [125] посвящена булевозначному анализу, а книга [56] трактует приложения нестандартных методов к теории векторных решеток.

Настоящее издание посвящено инфинитезимальному анализу и состоит из двух частей единой монографии. Наряду с систематическим изложением соответствующего формального аппарата, большое место в книге уделено приложениям к топологии, оптимизации и гармоническому анализу.

Введение

Идея инфинитезимали — актуальной бесконечно малой величины — восходит к эпохе античности. В наше время после примерно полувекового перерыва инфинитезимальным понятиям уделяется все большее внимание внутри современной математики. Бесконечно большие и бесконечно малые числа, математические атомы — «неделимые» монады — все чаще фигурируют в различных публикациях, входят в математическую практику. Поворотный пункт в развитии инфинитезимальных концепций связан с выдающимся достижением А. Робинсона — созданием нестандартного анализа.

Около полувека нестандартный анализ рассматривали как довольно тонкую и даже экзотическую логическую технику, предназначенную для обоснования метода актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел. Считалось также, что эта техника имеет ограниченную сферу применимости и в любом случае принципиально не может привести к серьезному пересмотру общематематических представлений. В конце 70-х годов после опубликования теории внутренних множеств Э. Нельсона (и несколько позже теорий внешних множеств К. Хрбачека и Т. Каваи) взгляды на место и роль нестандартного анализа коренным образом обогатились и видоизменились.

В свете новых открытий нестандартные элементы стало возможно рассматривать не как «мнимые, глухие, идеальные сущности», добавляемые к обычным множествам из соображений формального удобства, а как неотъемлемые части любых привычных математических объектов. Возникла установка, состоящая в том, что каждое множество образовано стандартными и нестандартными элементами. В свою очередь, стандартные множества формируют своеобразную реперную сетку, плотно расположенную в совокупности всех предметов изучения математики.

При этом обнаружилось, что фигурирующие в нестандартном математическом анализе объекты — монады фильтров, стандартные части чисел и векторов, тени операторов и т. п. — составляют «канторовские» множества, не попадающие ни на одну из канонизированных картин, рисуемых известными формальными теориями множеств.

Универсум фон Неймана не исчерпывает мир классической математики — вот одно из очевидных следствий новых воззрений. Таким образом, традиционные взгляды на нестандартный анализ стали нуждаться, по меньшей мере, в ревизии, потребовали переосмысления инфинитезимальных концепций.

Важным достоинством возникших путей стал аксиоматический подход, дающий возможность овладеть аппаратом нестандартного математического анализа без предварительного изучения техники ультрапроизведений, булевозначных моделей или их аналогов. Выдвинутые аксиомы просты в обращении и отчетливо мотивируются на содержательном уровне в рамках привычной для анализа «наивной» теоретико-множественной установки. В то же время они существенно расширяют круг математических объектов, создают возможности развития нового формального аппарата, позволяют значительно уменьшить опасные разрывы между представлениями, методическими установками и уровнями строгости, принятыми в математике и ее приложениях к естественным и социальным наукам.

Иначе говоря, аксиоматическое теоретико-множественное обоснование нестандартного математического анализа имеет общенаучное значение.

В 1947 г. К. Гёдель отметил: «Могут существовать аксиомы, столь богатые проверяемыми следствиями, проливающие такой яркий свет на всю дисциплину и доставляющие настолько сильные методы решения задач (даже, насколько это возможно, решающие их в каком-либо конструктивистском смысле), что совершенно безотносительно к их внутренней необходимости эти аксиомы придется принять хотя бы в том же смысле, в каком принимают любую основательную физическую теорию» [314, с. 521]. Предсказание К. Гёделя сбывается на наших глазах.

Цель настоящего сочинения — сделать более доступными появившиеся пути в нестандартный анализ.

Для достижения этой цели мы начинаем с изложения содержательных качественных представлений о стандартных и нестандартных объектах, об аппарате нестандартного анализа на «наивном» уровне строгости, абсолютно достаточном для эффективных применений без апелляции к логическим формализмам.

Затем приводится краткий и в то же время достаточно полный справочный материал, относящийся к современным аксиоматическим построениям нестандартного анализа в рамках канторовской установки. При этом мы сочли возможным значительное место уделить идейной и исторической стороне дела, что определило специфику изложения.

Собранные в первой и второй главах исторические сведения, качественные мотивировки принципов нестандартного анализа и обсуждение их простейших следствий для дифференциального и интегрального исчисления составляют «наивное» обоснование инфинитезимального анализа. Формальные детали соответствующего аппарата нестандартной теории множеств собраны в третьей главе.

Веским доводом в пользу известной концентричности изложения служат замечательные слова Н. Н. Лузина: «Математический анализ вовсе не есть совершенно законченная наука, как иногда склонны себе его представлять, с раз навсегда найденными принципами, из которых только остается извлекать дальнейшие следствия... Математический анализ ничем не отличается от всякой другой науки и имеет свой ход идей, движущийся не только поступательно, но и кругообразно, с возвращением к группе прежних идей, правда всегда в новом освещении» [153, с. 389].

В четвертой и пятой главах представлены инфинитезимальные методы в общей топологии и субдифференциальном исчислении.

Шестая глава посвящена проблемам приближения бесконечномерных банаховых пространств и операторов в них конечномерными пространствами и матрицами. Разумеется, размерность аппроксимирующего пространства является здесь бесконечно большим числом.

Близким по проблематике является и материал седьмой главы, относящейся к гармоническому анализу на группах. Здесь подробно излагается нестандартная техника приближения локально компактных групп и соответствующих преобразований Фурье.

Выбор именно этих тем из многообразия современных приложений нестандартного анализа определен во многом личными предпочтениями авторов.

В заключительной восьмой главе собраны упражнения, полезные для закрепления материала, а также сформулированы и открытые вопросы, трудность которых варьируется от нулевой до бесконечно большой.

Мы не захотели ограничивать себя двухэлементной булевой алгеброй и кое-где привлекаем общие булевозначные модели. Для удобства читателя необходимый минимум сведений о последних собран в приложении.

При завершении работы над рукописью по предложению издательства мы приняли решение о публикации книги в двух частях. Деление было осуществлено механически объявлением шестой главы началом второй части книги. Каждая из частей снабжена собственными указателями и содержит общие для всего издания введение и список литературы.

Предлагаемое читателю сочинение отчасти служит отчетом о работе над проблемами, занимавшими авторов в течение последней четверти двадцатого века. Мы с удовлетворением вспоминаем трудности и радости нашей многолетней совместной работы и теплого дружеского общения. Возможно, они также были проявлениями приятных следствий нестандартного анализа...

Глава 6

Техника гиперприближений

Многие важные приложения инфинитезимального анализа к исследованию непрерывных и других бесконечных объектов основаны на «дискретном» моделировании последних. Речь идет о поиске конечномерных или конечных объектов, в той или иной форме бесконечно близких к исходным. Аналогия с хорошо известными секвенциальными схемами теории приближений подсказывает, что конечность в таких случаях подразумевает актуальные бесконечно большие величины.

Среди новых конструкций такого рода в первую очередь следует отметить нестандартные оболочки, введенные Люксембургом, и меры, введенные Лёбом и носящие теперь его имя. Первая позволяет моделировать бесконечномерные банаховы пространства с помощью гиперконечномерных пространств. Вторая — пространства со счетно-аддитивной мерой с помощью мер на гиперконечных множествах. Мы объединяем эти идеи термином «гиперприближение».

В этой главе рассмотрены конструкции нестандартной оболочки и меры Лёба, а также их приложения к изучению дискретного приближения в банаховых пространствах и построению гиперприближений интегральных и псевдоинтегральных операторов.

На протяжении всей главы мы работаем в рамках классической или даже радикальной установок инфинитезимального анализа, поскольку используемые нами конструкции часто оперируют со всеми типами канторовских множеств, доступных инфинитезимальному анализу. Это подразумевает, в частности, необходимость несколько утяжелять язык изложения приставкой «гипер», терминологически различая гиперконечные и конечные множества, гиперконечномерные и конечномерные пространства и т. п. Читатель должен осознавать принципиальную неизбежность той или иной формы «двуязычия» при использовании любой из установок инфинитезимального анализа.

Не оговаривая этого особо, мы обычно выбираем достаточно представительный для наших нужд нестандартный универсум или его фрагмент — подходящую суперструктуру. Всегда можно считать, что в выбранной суперструктуре выполняется нужная форма принципа насыщения или же $\varkappa$-насыщения. Иногда мы будем использовать и принцип направленности в сильной форме — принцип идеализации Нельсона (см. 3.5.2–3.5.11). Следует подчеркнуть, что подобная свобода действий совершенно законна и представляет собой обычную «нестандартную» практику.

6.1. Нестандартные оболочки

В этом параграфе опишем важную конструкцию инфинитезимального анализа, полезность которой демонстрируется на протяжении всей оставшейся части книги.

6.1.1. Пусть E — внутреннее векторное пространство над ${}^*\mathbb{F}$, где $\mathbb{F}$ — ***основное поле*** скаляров, т. е. одно из числовых полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Таким образом, заданы две внутренние операции $+ : E \times E \to E$ и $\cdot : {}^*\mathbb{F} \times E \to E$, удовлетворяющие обычным аксиомам векторного пространства. Поскольку $\mathbb{F} \subset {}^*\mathbb{F}$, то внутреннее векторное пространство E будет также и векторным пространством над $\mathbb{F}$, т. е. внешним векторным пространством, которое, однако, не будет ни нормированным, ни гильбертовым, даже если E является таковым как внутреннее пространство. Тем не менее с каждым внутренним нормированным (предгильбертовым) пространством связано некоторое внешнее банахово (гильбертово) пространство.

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — внутреннее нормированное пространство над ${}^*\mathbb{F}$. Как обычно, элемент $x \in E$ называют ***доступным*** (соответственно ***бесконечно малым***), если $\|x\|$ — доступное (бесконечно малое) число.

Пусть $\operatorname{ltd}(E)$ и $\mu(E)$ — это внешние множества соответственно всех доступных и всех бесконечно малых элементов пространства E. Обозначение $\mu(E)$ согласуется с принятой в главе 4 символикой, так как $\mu(E)$ совпадает с монадой нуля в E.

Ясно, что $\mathrm{ltd}(E)$ — (внешнее) векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а $\mu(E)$ — его подпространство. Обозначим символом $E^{\#}$ фактор-пространство $\mathrm{ltd}(E)/\mu(E)$. На $E^{\#}$ вводят норму формулой

$$\|\pi x\| := \|x^{\#}\| := \mathrm{st}(\|x\|) \in \mathbb{F} \quad (x \in \mathrm{ltd}(E)),$$

где $\pi := (\cdot)^{\#} : \mathrm{ltd}(E) \to E^{\#}$ — канонический фактор-гомоморфизм.

При этом $(E^{\#}, \|\cdot\|)$ — внешнее нормированное пространство, именуемое *нестандартной оболочкой* E. Если пространство $(E, \|\cdot\|)$ стандартно, то нестандартной оболочкой E называют $({}^*E)^{\#}$.

Для каждого $x \in E$ элемент $\pi({}^*x) = ({}^*x)^{\#}$ содержится в $({}^*E)^{\#}$, причем $\|x\| = \|({}^*x)^{\#}\|$. Таким образом, отображение $x \mapsto ({}^*x)^{\#}$ осуществляет изометрическое вложение E в $({}^*E)^{\#}$. Обычно считают, что $E \subset ({}^*E)^{\#}$.

Предположим теперь, что E и F — внутренние нормированные пространства и $T : E \to F$ — внутренний ограниченный линейный оператор. Числовое множество

$$c(T) := \{C \in {}^*\mathbb{R} : (\forall x \in E)\|Tx\| \leq C\|x\|\}$$

является внутренним и ограниченным. Как известно, $\|T\| := \inf c(T)$.

Если $\|T\|$ — доступное число, то из классического нормативного неравенства $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$, справедливого для всех $x \in E$, видно, что $T(\mathrm{ltd}(E)) \subset \mathrm{ltd}(F)$ и $T(\mu(E)) \subset \mu(F)$. Следовательно, корректно определено снижение T на фактор-пространство — внешний оператор $T^{\#} : E^{\#} \to F^{\#}$, действующий по правилу

$$T^{\#}\pi x := \pi T x \quad (x \in E).$$

Оператор $T^{\#}$ линеен (над $\mathbb{F}$) и ограничен, причем $\|T^{\#}\| = \mathrm{st}(\|T\|)$. Естественно называть $T^{\#}$ *нестандартной оболочкой* T.

6.1.2. *Теорема.* *Пространство $E^{\#}$ банахово для каждого внутреннего (не обязательно полного) нормированного пространства E.*

$\lhd$ Введем следующие обозначения для открытого и замкнутого шаров с центром в a и радиуса ε: если X — нормированное пространство, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$, то

$$\overset{\circ}{B}_X(a, \varepsilon) := \overset{\circ}{B}_\varepsilon(a) := \{x \in X : \|x - a\| < 1\},$$
$$B_X(a, \varepsilon) := B_\varepsilon(a) := \{x \in X : \|x - a\| \leq 1\}.$$

Воспользуемся принципом вложенных шаров в качестве критерия полноты. Рассмотрим последовательность вложенных шаров $B_{E^\#}(x_n^\#, r_n)$, где $x_n \in E$ и $r_n \in \mathbb{R}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, причем $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Можно считать, что (r_n) убывает. Рассмотрим вложенную последовательность внутренних замкнутых шаров $B_E(x_n, r_n + r_n/2^{n+1})$ в E. В силу принципа насыщения существует элемент $x \in E$, содержащийся в каждом из этих шаров. Элемент $x^\#$ — общая точка всех шаров $B_{E^\#}(x_n^\#, r_n)$ для $n \in \mathbb{N}$. $\triangleright$

6.1.3. Если внутренняя размерность внутреннего нормированного пространства E конечна, то пространство E называют *гиперконечномерным.*

В дальнейшем наибольшее внимание уделяется внутренним гиперконечномерным пространствам, поэтому стоит подробнее остановиться на некоторых деталях данного определения.

Прежде всего необходимо уточнить, что такое сумма гиперконечного множества элементов линейного пространства. Для этого запишем определение конечной суммы в виде формулы и применим к ней принцип переноса. Если f — последовательность в E (т. е. $f : \mathbb{N} \to E$), то частичные суммы $g(n)$ ряда $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ определяются рекурсией:

$$\mathrm{Seq}(f) \wedge \mathrm{Seq}(g) \wedge f(0) = g(0) \wedge (\forall k \in \mathbb{N})(g(k+1) = g(k) + f(k+1)),$$

где $\mathrm{Seq}(g)$ — сокращенная запись высказывания «g — последовательность». Обозначим сокращенно символом $\Sigma(f, g)$ приведенную выше формулу. Мощность множества M будем обозначать символом $|M|$, а конечный кардинал (= натуральное число) k отождествим с множеством $\{0, 1, \dots, k-1\}$.

Итак, пусть E — внутреннее векторное пространство (или внутренняя абелева группа), Y — гиперконечное подмножество E. Зафиксируем какую-нибудь биекцию $f : \{0, \dots, |Y| - 1\} \to Y$ и продолжим f до внутренней последовательности $f : {}^*\mathbb{N} \to Y$, считая f нулем при $n > |Y| - 1$. Определим последовательность $g : {}^*\mathbb{N} \to E$ формулой $\Sigma(f, g)$. В силу принципа переноса $g(|Y| - 1)$ не зависит от выбора внутренней биекции f, стало быть, корректно следующее определение: $\sum_{x\in Y} x := g(|Y| - 1)$. В соответствии с принципом переноса построенная таким образом сумма гиперконечного множества обладает всеми свойствами обычной конечной суммы. Например, если $\{Y_m : m < \nu\}$ — внутреннее гиперконечное семейство подмножеств Y, которое является разбиением Y, то

$$\sum_{x\in Y} x = \sum_{k=0}^{\nu-1} \sum_{x\in Y_k} x.$$

Теперь легко определить внутреннее гиперконечномерное линейное пространство. Пусть E — внутреннее линейное пространство. Внутреннее гиперконечное множество $\{e_1, \dots, e_\Omega\}$, где $\Omega \in {}^*\mathbb{N}$, называется базисом в E, если для любого $x \in X$ существует единственное внутреннее гиперконечное множество $\{x_1, \dots, x_\Omega\}$ в ${}^*\mathbb{F}$, такое, что $x = \sum_{k=1}^{\Omega} x_k e_k$. Пространство, имеющее гиперконечный базис, и будет ***гиперконечномерным***, а внутренняя мощность этого базиса служит (***внутренней***) ***размерностью*** пространства E. Обозначим внутреннюю размерность E символом $\dim(E)$, т. е. $\dim(E) := \Omega$.

В силу принципа переноса все свойства конечномерных пространств и их конечных базисов сохранены для гиперконечномерных пространств и их гиперконечных базисов. Например, $\dim(E) = \Omega$ тогда и только тогда, когда существует внутренне линейно независимое гиперконечное подмножество Y в E, имеющее внутреннюю мощность Ω, а любое гиперконечное множество, имеющее внутреннюю мощность $\Omega + 1$, является внутренне линейно зависимым. При этом внутреннее гиперконечное множество $\{y_1, \dots, y_\nu\}$ называется ***внутренне линейно независимым***, если $\sum_{j=0}^{\nu} \lambda_j y_j \neq 0$ для любой внутренней конечной последовательности $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\nu\}$, в которой хотя бы один элемент отличен от нуля.

Заметим, что если множество $\{y_1, \dots, y_\nu\}$ внутренне линейно независимо, то оно линейно независимо и с внешней точки зрения. В самом деле, его внешняя линейная зависимость означает линейную зависимость над $\mathbb{F}$ каждого его стандартно-конечного подмножества, которая является линейной зависимостью и с внутренней точки зрения, поскольку стандартно-конечное множество является внутренним, а $\mathbb{F} \subset {}^*\mathbb{F}$.

С другой стороны, внутренне линейно зависимое множество может и не быть линейно зависимым с внешней точки зрения. Например, если $x \in E$, $x \neq 0$, $\alpha \in {}^*\mathbb{F} - \mathbb{F}$, то $\{x, \alpha x\}$ — внутренне линейно зависимое множество, но оно линейно независимо внешне, так как $\alpha \notin \mathbb{F}$.

В дальнейшем, говоря о внутренних линейных пространствах, мы всегда будем иметь в виду внутренние линейную зависимость и независимость, внутренний базис, внутреннюю размерность и т. п. Поэтому само прилагательное «внутренний» часто будет опускаться.

6.1.4. Наиболее типичный пример гиперконечномерного пространства — это пространство $({}^*\mathbb{C})^T$, составленное из всевозможных внутренних отображений $x : T \to {}^*\mathbb{C}$ некоторого гиперконечного множества T в поле гиперкомплексных чисел ${}^*\mathbb{C}$. На возникающем векторном пространстве можно рассмотреть внутреннюю норму

$$\|x\|_p := \left(\sum_{t\in T} |x(t)|^p\right)^{1/p} \qquad (x \in ({}^*\mathbb{C})^T),$$

где $p \in {}^*\mathbb{R}$, $1 \le p$. Это пространство обозначается символом $l_p(T)$ или же $l_p(n)$, где n — число элементов множества T.

Можно рассмотреть внутреннее скалярное произведение

$$\langle x, y\rangle := \sum_{t\in T} x(t)\overline{y(t)}.$$

Соответствующая гильбертова норма элемента x при этом совпадает с $\|x\|_2$, причем индекс $p = 2$ в обозначении нормы часто опускается.

С внутренней точки зрения все эти нормы на $({}^*\mathbb{C})^T$ в силу принципа переноса эквивалентны, т. е. $(\exists C_1, C_2 > 0)(\forall\, x)(C_1\|x\|_{p_1} \le \|x\|_{p_2} \le C_2\|x\|_{p_1})$. Однако $C_1, C_2 \in {}^*\mathbb{R}$, т. е., в частности, эти константы могут быть бесконечно малыми или бесконечно большими.

Напомним, что если E — некоторое нормированное пространство (для определенности, над полем $\mathbb{C}$), то E принято рассматривать как топологическое пространство, в котором фильтр окрестностей произвольной точки x имеет вид

$$\tau_E(x) := \mathrm{fil}\{B_\varepsilon(x) : \varepsilon \in \mathbb{R}_+\}.$$

При этом ${}^*E$ — внутреннее нормированное пространство над ${}^*\mathbb{C}$ и фильтр окрестностей произвольной точки y из ${}^*E$ имеет вид

$$\tau_{{}^*E}(y) := \mathrm{fil}\{B_\varepsilon(y) : \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_+\}.$$

Обычно в этих случаях в обозначениях операций сложения и умножения на скаляры, а также нормы и скалярного произведения знак * опускается.

Пространство $l_p(n)$ является банаховой решеткой. Отметим, полноты ради, что если E — внутренняя нормированная решетка, то $E^\#$ обладает естественной структурой порядка, индуцированной фактор-гомоморфизмом $x \mapsto x^\#$. Именно, положительный конус в $E^\#$ имеет вид $E^\# := \{x^\# : 0 \le x \in \mathrm{ltd}(E)\}$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Нестандартная оболочка $E^\#$ внутренней нормированной решетки E будет банаховой решеткой с секвенциально о-непрерывной нормой. Более того, всякая возрастающая и ограниченная по норме последовательность в $E^\#$ является порядково ограниченной.

Если p и n — доступные числа, то $l_p(n)^\#$ — банахова решетка, ***изоморфная*** $l_q(n)$, где $q := \mathrm{st}(p)$, т. е. порядково изоморфная и линейно изометричная последнему пространству, см. 6.1.5. Если допустить, что p — бесконечно большое число, но n по-прежнему доступно, то пространство $l_p(n)^\#$ изоморфно $l_\infty(n)$. Можно показать также, что для бесконечно большого n и доступного $p \ge 1$ пространство $l_p(n)$ изоморфно $L_q(\mu)$ для некоторой меры μ. В случае, когда оба числа n и $p \ge 1$ бесконечно большие, $l_p(n)$ изоморфно $L_\infty(\mu)$.

6.1.5. ***Теорема.*** *Если E — внутреннее конечномерное нормированное пространство и $n := \dim(E)$ — стандартное число, то выполняется равенство $\dim(E^\#) = n$. В противном случае $E^\#$ не сепарабельно.*

$\lhd$ Покажем сначала, что если $E^\#$ сепарабельно, то оно конечномерно. Для $A \subset E$ обозначим $A^\# := \{e^\# : e \in A\} \subset E^\#$. Последнее обозначение используется как для внешних, так и для внутренних подмножеств E. Условимся через B_X обозначать ***единичный шар*** в нормированном пространстве X, т. е. $B_X := \{x \in X : \|x\| \le 1\}$.

Легко видеть, что $B_{E^\#} = (B_E)^\#$.

В самом деле, включение $(B_E)^\# \subset B_{E^\#}$ вытекает из того, что $(\forall \lambda \in {}^*\mathbb{R})(\lambda \le 1 \to {}^\circ\lambda \le 1)$. Пусть $\xi \in B_{E^\#}$ т. е. $\|\xi\| \le 1$. Если $\|\xi\| < 1$, то $(\exists e \in E)(\xi = e^\# \wedge \|e\| < 1)$, т. е. $e \in B_E$ и тем самым $\xi \in (B_E)^\#$. Если же $\|\xi\| = 1$, то $\xi = e^\#$, где $\|e\| \approx 1$ и может оказаться, что $\|e\| > 1$. Однако в этом случае $e' := \frac{e}{\|e\|} \approx e$, поэтому

$e'^{\#} = e^{\#}$. Итак, $\|e'\| = 1$ и вновь $\xi \in (B_E)^{\#}$. Аналогично, если $e \in \operatorname{ltd}(E)$, то $\overset{\circ}{B}_E(e,\varepsilon)^{\#} \subset B_{E^{\#}}(e^{\#},\varepsilon)$.

Для доказательства конечномерности $E^{\#}$ достаточно показать, что шар $B_{E^{\#}}$ компактен. По предположению $E^{\#}$ является сепарабельным, т. е. в $B_{E^{\#}}$ имеется счетное всюду плотное множество $\{e_k^{\#} : k \in \mathbb{N}\}$. Ввиду установленного выше, можно считать, что $e_k \in B_E$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим возрастающую последовательность внутренних множеств $M_n := \bigcup_{k=0}^{n} \overset{\circ}{B}_E(e_k,\varepsilon) \cap B_E$. Покажем, что $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = B_E$.

В самом деле, если $e \in B_E$, то $\|e^{\#} - e_n^{\#}\| < \varepsilon$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, но тогда и $\|e - e_n\| < \varepsilon$, т. е. $e \in B_E(e_n,\varepsilon) \subset M_n$. В силу принципа насыщения можно заключить, что $M_{n_0} = B_E$ для подходящего $n_0 \in {}^*\mathbb{N}$. Отсюда выводим

$$
\begin{aligned}
B_{E^{\#}} &= \left(\bigcup_{k=0}^{n_0} \overset{\circ}{B}_E(e_k,\varepsilon) \cap B_E \right)^{\#} = \\
&= \bigcup_{k=0}^{n_0} \left(\overset{\circ}{B}_E(e_k,\varepsilon) \cap B_E \right)^{\#} \subset \\
&\subset \bigcup_{k=0}^{n_0} \overset{\circ}{B}_{E^{\#}}(e_k^{\#},\varepsilon) \cap B_{E^{\#}}.
\end{aligned}
$$

Это включение позволяет заключить, что $\{e_0^{\#},\dots,e_{n_0}^{\#}\}$ служит ε-сетью для $B_{E^{\#}}$.

Покажем теперь, что если $e_1,\dots,e_n \in \operatorname{ltd}(E)$, где $n \in \mathbb{N}$ и элементы $e_1^{\#},\dots,e_n^{\#}$ линейно независимы, то и $e_1,\dots,e_n$ линейно независимы в E (т. е. над ${}^*\mathbb{F}$). В самом деле, пусть элементы $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in {}^*\mathbb{F}$ не все равны нулю и $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0$. Если $\lambda := \max_k |\lambda_k|$, то $\lambda \neq 0$ и $\sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k = 0$, где $\mu_k := \lambda_k/\lambda$ и $|\mu_k| \leq 1$. Поскольку $|\mu_k|$ — доступно, заключаем, что ${}^\circ\mu_k$ лежит в ${}^*\mathbb{R}$. Легко проверить, что в этом случае $(\sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k)^{\#} = \sum_{k=1}^{n} {}^\circ\mu_k e_k^{\#} = 0$. Но $\|\mu_j\| = 1$ при некотором j, т. е. ${}^\circ\mu_j \neq 0$, а это противоречит линейной независимости $e_1^{\#},\dots,e_n^{\#}$.

Из приведенных рассуждений следует, в частности, что если внутренняя размерность E — это стандартное число n, т. е. $\dim(E) = n$, то $\dim(E^{\#}) \leq n$. Для доказательства обратного неравенства воспользуемся базисом Ауэрбаха (см. [334]).

Базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в нормированном пространстве X называется ***базисом Ауэрбаха***, если $\|e_1\| = \ldots = \|e_n\| = 1$ и для каждого $j := 1, \dots, n$ выполнено

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \geq |\alpha_j| \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}).$$

(Это равносильно тому, что линейная оболочка множества $(e_k)_{k \neq j}$ ***ортогональна*** к вектору e_j, если ***ортогональность*** $M \subset L$ к $x \in L$ означает справедливость формулы $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ для всех $\alpha \in \mathbb{F}$ и $x \in M$, см. [36].)

Известно (см., например, [36]), что базис Ауэрбаха существует в любом конечномерном нормированном пространстве. Следовательно, в силу принципа переноса такой базис существует и во внутреннем n-мерном пространстве E.

Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис Ауэрбаха в E. Покажем, что элементы $e_1^{\#}, \dots, e_n^{\#}$ линейно независимы. Если $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k^{\#} = 0$, то $\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\| \approx 0$, но $\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\| \geq |\lambda_j|$ для всех $j := 1, \dots, n$. Однако это противоречит тому, что все числа λ_k стандартны и хотя бы одно из них отлично от нуля. Тем самым доказано, что внутренняя размерность E равна n, т. е. $\dim(E^{\#}) = n$. Тем самым первая часть теоремы доказана.

Наконец, предположим, что внутренняя размерность E больше любого стандартного n. Тогда для любого стандартного n существует внутреннее подпространство $E_1 \subset E$ такое, что $\dim(E_1) = n$. Как видно, $E_1^{\#}$ вложено в $E^{\#}$ с сохранением нормы, поэтому пространство $E^{\#}$ содержит n-мерное подпространство при любом $n \in \mathbb{N}$, следовательно, $E^{\#}$ не может быть ни конечномерным, ни сепарабельным. $\triangleright$

6.1.6. Пусть $\mathfrak{F}(E)$ — множество всех конечномерных подпространств нормированного пространства E. Взяв $F \in \mathfrak{F}(E)$, обозначим символом $\dim(F)$ размерность пространства F. По принципу переноса ${}^*\mathfrak{F}(E)$ состоит из (не обязательно всех) гиперконечномерных подпространств внутреннего пространства ${}^*E$, а ${}^*\dim$ — отображение из ${}^*\mathfrak{F}(E)$ в ${}^*\mathbb{N}$, причем ${}^*\dim(F) = \dim(F)$ для каждого $F \in \mathfrak{F}(E)$.

Для каждого (нормированного) векторного пространства E существует такое $F \in {}^*\mathfrak{F}(E)$, что $E \subset F \subset {}^*E$. Иными словами, су-

ществует гиперконечномерное подпространство $F \subset {}^*E$, содержащее все стандартные элементы внутреннего пространства ${}^*E$.

$\lhd$ Доказательство представляет собой простое применение принципа насыщения. Для каждого $x \in E$ обозначим $A_x := \{F \in {}^*\mathfrak{F}(E) : x \in F\}$. Семейство внутренних множеств $(A_x)_{x \in E}$ центрировано, т. е. обладает свойством конечного пересечения. По принципу насыщения существует множество $F \in {}^*\mathfrak{F}(E)$ такое, что $x \in F$ для всех $x \in X$. $\rhd$

Несмотря на простоту формулировки и доказательства, именно это предложение лежит в основе многочисленных приложений инфинитезимального анализа к теории банаховых пространств. Схема действий здесь такова.

Пространство E вкладывают в гиперконечномерное пространство F. Привлекая принцип переноса, теперь можно устанавливать различные утверждения относительно пространства F и операторов в нем, предварительно обосновав их для конечномерных подпространств E и операторов в них. Поскольку E содержится в F, переходя к стандартным частям, можно получить результаты относительно пространства E и операторов в нем.

Описанная схема, однако, не всегда проходит автоматически и порою требует весьма изощренной техники. В частности, необходимая для перехода к стандартным частям околостандартность в рассматриваемых структурах может вовсе отсутствовать и тогда ее приходится вводить искусственно, см. [417].

6.1.7. Рассмотрим теперь вкратце вопрос о том, что происходит со свойствами оператора при переходе к нестандартной оболочке.

Пусть E, F и G — внутренние нормированные пространства над полем ${}^*\mathbb{F}$ (т. е. над стандартизацией основного поля $\mathbb{F}$, совпадающей с ${}^*\mathbb{R}$ или ${}^*\mathbb{C}$), $S, T : E \to F$ и $R : F \to G$ — доступные внутренние операторы. Тогда имеют место следующие утверждения:

(1) $\|T^\#\| = {}^\circ\|T\|$;

(2) $(S + T)^\# = S^\# + T^\#$;

(3) $(\lambda T)^\# = ({}^\circ\lambda) \cdot T^\#$ *для любого* $\lambda \in \operatorname{ltd}({}^*\mathbb{F})$;

(4) $(R \circ T)^\# = R^\# \circ T^\#$.

$\lhd$ Эти свойства очевидны. $\rhd$

6.1.8. Предположим, что E — внутреннее векторное пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда, как уже отмечалось,

$E^\#$ — несепарабельное гильбертово пространство, в котором скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ определяется формулой

$$(x^\#, y^\#) := \langle x, y \rangle \quad (x, y \in E).$$

Если T — оператор, действующий в гильбертовых пространствах, то символом T^* мы обозначаем эрмитово сопряженный оператор. Пусть $\sigma(T)$ — ***спектр оператора*** T, а $\sigma_p(T)$ — его ***точечный спектр*** (т. е. множество собственных значений T).

Если E — внутреннее предгильбертово пространство, а $T : E \to E$ — внутренний линейный оператор с доступной нормой, то справедливы следующие утверждения:

(1) *$(T^*)^\# = (T^\#)^*$;*

(2) *если T — эрмитов (нормальный, унитарный) оператор, то таким же будет и оператор $T^\#$;*

(3) *если пространство E гиперконечномерно, то $\sigma(T^\#) = \sigma_p(T^\#)$.*

6.1.9. *Если E — внутреннее предгильбертово пространство, а F — внутреннее подпространство E, то $(F^\perp)^\# = (F^\#)^\perp$.*

$\triangleleft$ Пусть P_F — ортопроектор в E на подпространство F, а $P_{F^\#}$ — ортопроектор в $E^\#$ на подпространство $F^\#$. Покажем, что $P_F^\# = P_{F^\#}$. Из 6.1.7 и 6.1.8 вытекает, что $P_F^\#$ — ортопроектор. Остается показать, что $P_F^\#\xi = \xi$ в том и только в том случае, когда $\xi \in F^\#$. Если $\xi = x^\#$ и $x \in F$, то $P_T^\# x^\# = (P_F x)^\# = x^\# = \xi$. Наоборот, предположим, что $P_F^\#\xi = \xi$. Если $\xi = y^\#$, то $(P_F y)^\# = y^\#$, значит, $P_F y - y \approx 0$. Полагая $x := P_F y$, получаем $\xi = x^\#$, но поскольку $x = P_F y \in F$, то $\xi \in F^\#$. Для завершения доказательства заметим, что $H = F^\perp$ в том и только в том случае, если $P_H + P_F = I$ и $P_H P_F = P_F P_H = 0$. В этом случае, привлекая вновь 6.1.7, получим $P_{H^\#} + P_{F^\#} = I^\#$ и $P_{H^\#} P_{F^\#} = P_{F^\#} P_{H^\#} = 0^\#$, следовательно, $H^\# = (T^\#)^\perp$. $\triangleright$

Приведем еще три вспомогательных факта, которые потребуются в дальнейшем. В следующих пунктах 6.1.10–6.1.12 символом E обозначено гиперконечномерное гильбертово пространство.

6.1.10. *Если внутренний линейный оператор T нормален и доступен, то $\sigma(T^\#) = \{{}^\circ\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$.*

◁ Пусть $B := \{{}^\circ\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$. Тогда B — замкнутое подмножество $\mathbb{C}$, так как $\sigma(T)$ — внутреннее множество в силу 4.2.5. Как видно, $B \subset \sigma(T^{\#})$. Допустим, что $\mu \notin B$. Тогда существует стандартное число $\delta > 0$ такое, что $|\mu - \xi| \geq \delta$ для всех $\xi \in B$. При этом верно также неравенство $|\mu - \xi| \geq \delta$ для всех $\xi \in \sigma(T)$. Поскольку $\mu \notin \sigma(T)$, то $(\mu - T)^{-1}$ — ограниченный линейный оператор. Очевидно, что

$$\sigma((\mu - T)^{-1}) = \left\{\frac{1}{\mu - \lambda} : \lambda \in \sigma(T)\right\}.$$

В силу нормальности T из последнего равенства следует, что $\|(\mu - T)^{-1}\| \leq \delta^{-1}$. Значит, оператор $(\mu - T)^{-1}$ имеет доступную норму. Теперь из 6.1.7 (4) видно, что $(\mu - T)^{-1\#} = (\mu(I_E)^{\#} - T^{\#})^{-1} = (\mu - T^{\#})^{-1}$, поскольку $(I_E)^{\#} = I_{E^{\#}}$ — тождественный оператор на $E^{\#}$. Стало быть, $\mu \notin \sigma(T^{\#})$. ▷

6.1.11. *Пусть* $\dim(E) = N \in {}^*\mathbb{N}$ *и внутренний эрмитов эндоморфизм* $A : E \to E$ *определяется в некотором ортонормальном базисе матрицей* $(a_{kl})_{k,l=1}^N$, *которая удовлетворяет условию* $\sum_{k,l=1}^N |a_{kl}|^2 \ll +\infty$. *Тогда все собственные значения* A *доступны и кратность каждого собственного значения, не являющегося бесконечно малым, будет стандартным натуральным числом.*

◁ Это следует немедленно из равенства

$$\sum_{k=1}^{s} n_k |\lambda_k|^2 = \sum_{k,l=1}^{N} |a_{kl}|^2,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — полная система попарно различных собственных значений A с кратностями $n_1, \dots, n_s$ соответственно. ▷

6.1.12. *Пусть* $A : E \to E$ *— эрмитов оператор и* $\lambda \in \mathbb{R}$ *— стандартное число. Предположим, что множество* $\mathscr{M}$ *собственных значений* A*, бесконечно близких к* λ*, является внутренним и стандартно-конечным, т. е.* $\mathscr{M} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$*, где* $n \in \mathbb{N}$*. Допустим также, что кратность каждого* $\lambda_k \in \mathscr{M}$ *стандартна, и пусть* $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ *— полная ортонормальная система собственных векторов, соответствующих собственным значениям из* $\mathscr{M}$*. Если при этом* $f \in E^{\#}$ *— собственный вектор* $A^{\#}$*, соответствующий собственному значению* λ*, то* f *можно представить в виде линейной комбинации элементов* $\varphi_1^{\#}, \dots, \varphi_m^{\#}$.

$\lhd$ Пусть H — это внутренняя линейная оболочка множества $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$. Так как m стандартно, видно, что подпространство $H^{\#}$ в $E^{\#}$ будет линейной оболочкой множества $\{\varphi_1^{\#}, \dots, \varphi_m^{\#}\}$. Обозначим символом $E_\lambda^{\#}$ собственное подпространство $A^{\#}$, соответствующее собственному значению λ. Тогда $H^{\#} \subset E_\lambda^{\#}$. Если $H^{\#} \neq E_\lambda^{\#}$, то $(H^{\#})^{\perp} \cap E_\lambda^{\#} \neq 0$.

В силу 6.1.9 выполнено $H^{\#\perp} = (H^{\perp})^{\#}$. По определению H — инвариантное подпространство для A. Следовательно, $H^{\perp}$ также инвариантное подпространство для A, а потому $(H^{\perp})^{\#}$ — инвариантное подпространство для $A^{\#}$. Допустим, что $0 \neq f \in (H^{\perp})^{\#} \cap E_\lambda^{\#}$. Тогда λ будет собственным значением ограничения $A^{\#}$ на $(H^{\perp})^{\#}$, поэтому существует собственное значение γ оператора $A|_{H^{\perp}}$. Собственный вектор, соответствующий γ, ортогонален к H и, стало быть, ко всем φ_i. Получили противоречие. $\rhd$

6.1.13. Примечания.

(1) Нестандартная оболочка банахова пространства была введена Люксембургом [412]. Разновидностью нестандартной оболочки является ультрапроизведение банаховых пространств, введенное Дакуня-Кастелем и Кривиным [282]. О роли этих понятий в теории банаховых пространств и соответствующую библиографию см. в [325, 331, 334].

(2) Вопрос об аналитическом описании нестандартных оболочек, затронутый в конце пункта 6.1.4, наиболее полно изучен для случая классических банаховых пространств, см. [334]. В произвольной аксиоматической теории внешних множеств можно получать результаты только в стиле факта, отмеченного в 6.1.4. Однако при работе в конечном фрагменте универсума фон Неймана можно детализировать описания нестандартных оболочек. Так, например, если нестандартный универсум ω_0-насыщен (ограничение снизу) и при этом обладает свойством ω_0-изоморфизма (ограничение сверху), то нестандартная оболочка банаховой решетки L_p ([0,1]) изометрически изоморфна l_p-сумме k экземпляров пространства $L_p([0,1]^k)$, где $k := 2^{\omega_0}$. Подробное изложение этого факта и дальнейшие ссылки см. в [329, 334].

(3) Напомним, что некоторые свойства нормированного пространства являются «локальными» в том смысле, что они определяются устройством и расположением конечномерных подпространств изучаемого пространства.

Нестандартные оболочки обладают интересными локальными свойствами. Так, например, часто случается, что если какое-то свойство выполнено «приближенно» на конечномерных подпространствах, то это же свойство в нестандартной оболочке выполняется уже «точно». Примером может служить понятие финитной представимости, см. [276, 334]. Понятия финитной представимости (термин принадлежит Джеймсу) в теорию банаховых пространств ввел Дворецкий задолго до проникновения туда теоретико-модельной техники.

(4) Вопрос о том, когда банаховы пространства имеют изоморфные нестандартные оболочки, исследовал Хенсон [328]. Используя специальный язык первого порядка, он рассмотрел свойство аппроксимативной эквивалентности банаховых пространств, равносильное изометрической изоморфности их нестандартных оболочек [328]. По этому поводу см. также [482, 483].

(5) Предложения 6.1.7 и 6.1.8 установлены в [430]. Утверждения 6.1.9–6.1.12 взяты из [317]. Предложение 6.1.10, справедливое для нормального оператора в гиперконечномерном гильбертовом пространстве, не имеет места в более общих ситуациях (контрпримеры см. в [525]).

6.2. Дискретные приближения в банаховом пространстве

При исследовании линейных операторных уравнений в банаховом пространстве часто и успешно применяется метод дискретизации, состоящий в замене исходного уравнения приближенным уравнением в конечномерном пространстве. При этом возникает важный вопрос о предельном поведении спектров приближающих операторов. В текущем параграфе намечен инфинитезимальный подход к этому кругу вопросов.

6.2.1. Начнем с понятия дискретного приближения банахова пространства и линейного оператора.

Пусть X и X_n $(n \in \mathbb{N})$ — банаховы пространства, нормы которых обозначены символами $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_n$. Предположим, что найдутся некоторое плотное подпространство $Y \subset X$ и последовательность ограниченных линейных операторов (T_n) из Y в X_n, удовлетворяющие условию

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n(f)\|_n = \|f\| \quad (f \in Y).$

В этой ситуации говорят, что последовательность $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ служит *дискретным приближением* пространства X или, более подробно, является *последовательностью дискретных приближений* к пространству X. Если $Y = X$, то дискретное приближение называется *сильным*. Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где $x_n \in X_n$, *дискретно сходится* к $f \in Y$, если $\|T_n f - x_n\|_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть даны дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ пространства X, линейный (возможно, неограниченный) оператор $A : X \to X$ и последовательность (A_n), где A_n — эндоморфизм X_n. Обозначим символом $DAp(A)$ подпространство Y, состоящее из всех $f \in Y$ таких, что $Af \in Y$ и

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n Af - A_n T_n f\|_n = 0.$

(Последнее, очевидно, означает, что $(A_n T_n f)$ дискретно сходится к Af.)

Мы будем называть множество $DAp(A)$ *областью приближения* оператора A последовательностью (A_n). Если $DAp(A)$ плотно в Y, то говорят, что последовательность операторов (A_n) дискретно сходится к оператору A. Если дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ является сильным и $\|T_n A - A_n T_n\|_n \to 0$ при $n \to \infty$, то говорят, что дискретная сходимость равномерна.

6.2.2. *Если $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — сильное дискретное приближение, то последовательность $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно ограничена, т.е. имеет место соотношение $(\exists C > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\|T_n\|_n \leq C)$.*

$\lhd$ Это утверждение представляет собой разновидность классического принципа ограниченности (см., например, параграф 7.2 в [140]). $\rhd$

6.2.3. Рассмотрим теперь гильбертовы пространства X и X_n со скалярными произведениями $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ соответственно. Предположим, что $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — дискретное приближение пространства X. Зафиксируем бесконечно большое целое число N и рассмотрим внутреннее гильбертово пространство X_N. Всюду ниже буквой $\mathscr{X}$ будем обозначать нестандартную оболочку $X_N^{\#}$. Определим вложение $\mathbf{t} : X \to \mathscr{X}$.

Пусть $Y \subset X$ — плотное подпространство из определения 6.2.1. Для $f \in Y$ положим $\mathbf{t}(f) := T_N(f)^{\#}$. В силу 6.1.7 (1) и нестандартного критерия предела $\|f\| \approx \|T_N(f)\|_N$. Отсюда очевидным образом вытекает равенство $\|f\| = \|\mathbf{t}(f)\|$. Итак, линейный оператор $\mathbf{t} : Y \to \mathscr{X}$ изометричен и потому имеет единственное продолжение по непрерывности на все $\mathscr{X}$, за которым мы сохраним прежний символ $\mathbf{t}$.

Возьмем последовательность (A_n), где A_n — эндоморфизм X_n, дискретно сходящуюся к линейному ограниченному оператору $A : X \to X$ и фигурирующую в определении дискретного приближения.

Предположим вначале, что последовательность операторов (A_n) равномерна ограничена (т. е. $(\exists C > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\|A_n\|_n \leq C)$). Тогда внутренний линейный оператор A_N также ограничен и, более того, его норма $\|A_N\|_N$ — доступное гипердействительное число. Следовательно, ограниченный линейный оператор $A_N^{\#} : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ мы можем определить правилом:

$$A_N^{\#}(x^{\#}) = A_N(x)^{\#} \quad (x \in \operatorname{ltd}(X_N)).$$

В дальнейшем этот оператор будет обозначаться следующим образом: $\mathscr{A} := A_N^{\#}$. Как видно, $\|\mathscr{A}\| = {}^{\circ}\|A_N\|_N$.

(1) *Равномерно ограниченная последовательность (A_n), где A_n — эндоморфизм X_n, дискретно сходится к ограниченному эндоморфизму A пространства X в том и только в том случае, когда для любого бесконечного натурального числа N диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A} & X \\ {\scriptstyle \mathbf{t}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathbf{t}}\big\downarrow \\ \mathscr{X} & \xrightarrow{\mathscr{A}} & \mathscr{X} \end{array}$$

коммутативна.

$\lhd$ Условие дискретной сходимости 6.2.1 (2) влечет справедливость формулы $\|A_N T_N f - T_N A f\|_N \approx 0$ для всех $f \in Y$. Но это означает, что $\mathscr{A}\mathbf{t}(f) = \mathbf{t}Af$ при любых $f \in Y$. Плотность Y в X и ограниченность всех операторов из последнего равенства влечет требуемое. $\rhd$

(2) *Пусть равномерно ограниченная последовательность (A_n), где A_n — эндоморфизм X_n, дискретно сходится к ограниченному эндоморфизму A пространства X. Тогда $DAp(A) = \{f \in Y :$*

$Af \in Y\}$. В частности, если $Y = X$ и 6.2.1 (2) выполняется для элементов некоторого плотного подмножества X, то оно выполняется на всем X.

$\lhd$ Следует из (1). $\rhd$

6.2.4. Начиная с этого места, мы предполагаем, что для всех n пространства X_n конечномерны, а все операторы A_n и A нормальны (самосопряжены). Тогда $\mathscr{A}$ также будет нормальным (соответственно самосопряженным). В этом случае согласно 6.1.10 $\sigma(\mathscr{A}) = \{{}^\circ\lambda : \lambda \in \sigma(A_N)\}$ и этот спектр является дискретным, т. е. $\sigma(\mathscr{A})$ совпадает с точечным спектром $\sigma_p(\mathscr{A})$ оператора $\mathscr{A}$ или, иначе говоря, состоит только из собственных значений $\mathscr{A}$.

Будем предполагать также, что последовательность (A_n) дискретно сходится к A. Для нормального оператора коммутативность диаграммы из 6.2.3 (1) влечет включение $\sigma(A) \subset \sigma(\mathscr{A})$. Таким образом, собственные векторы $\mathscr{A}$, соответствующие точкам спектра $\sigma(A)$, можно рассматривать как обобщенные собственные векторы оператора A. Условимся использовать также следующее обозначение: $T^{(\lambda)} := \ker(\lambda - T)$ для произвольного оператора T.

Если A — компактный оператор и $\mathscr{A}(\mathscr{X}) \subset \mathbf{t}(X)$, то имеют место утверждения:

(1) $\sigma(A) = \sigma(\mathscr{A})$;

(2) *если $\lambda \in \sigma(A)$ и $\lambda \neq 0$, то $\mathscr{A}^{(\lambda)} = \mathbf{t}(A^{(\lambda)})$, следовательно,* $\dim(\mathscr{A}^{(\lambda)}) = \dim(A^{(\lambda)})$.

$\lhd$ Нужно показать, что при наших предположениях $\sigma(\mathscr{A}) \supset \sigma(A)$ и каждый собственный вектор f оператора $\mathscr{A}$, не содержащийся в $\ker(\mathscr{A})$, имеет вид $f = \mathbf{t}(x)$, где x — собственный вектор A, соответствующий тому же самому собственному значению, что и f.

В самом деле, пусть $\lambda \in \sigma(\mathscr{A})$, причем мы можем предположить, что $\lambda \neq 0$. В противном случае $\lambda \in \sigma(A)$, ибо A — компактный и нормальный оператор. Так как $\sigma(\mathscr{A})$ состоит только из собственных значений, то существует $f \in \mathscr{X}$ такой, что $\mathscr{A}f = \lambda f$. Но по условию $\mathscr{A}f \in \mathbf{t}(X)$ и, поскольку $\lambda \neq 0$, верно также $f \in \mathbf{t}(X)$. Итак, существует единственный $x \in X$ такой, что $f = \mathbf{t}(x)$. В силу коммутативности диаграммы из 6.2.3 (1) $\mathbf{t}(Ax) = \mathscr{A}(\mathbf{t}(x)) = \mathscr{A}f = \lambda f$. Теперь очевидно равенство $\mathbf{t}(\lambda x) = \lambda f$ и в силу инъективности $\mathbf{t}$ мы получаем, что x — собственный вектор A, соответствующий λ. $\rhd$

6.2.5. *Пусть выполнены условия 6.2.3 и, кроме того, A и A_N — самосопряженные операторы. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) *для любого $\lambda \in \sigma(\mathscr{A})$, $\lambda \neq 0$, множество $\sigma_\lambda := \{\nu \in \sigma(A_N) : \nu \approx \lambda\}$ конечно, т. е. $\sigma_\lambda = \{\nu_1, \dots, \nu_k\}$, где $k \in \mathbb{N}$;*

(2) *для каждого $\jmath \leq m$ размерность $m_\jmath := \dim(A_N^{(\nu_\jmath)})$ конечна и $\sum_{\jmath=1}^k m_\jmath = \dim(\mathscr{A}^{(\lambda)})$;*

(3) $(A_N^{(\nu_1)} \oplus \ldots \oplus A_N^{(\nu_m)})^\# = \mathscr{A}^{(\lambda)}$;

(4) *если семейство $(x_1^\jmath, \dots, x_{m_\jmath}^\jmath)$ — гильбертов базис в $A_N^{(\nu_\jmath)}$ для всех $\jmath := 1, \dots, k$, то семейство $((x_1^1)^\#, \dots, (x_{m_1}^1)^\#, \dots, (x_1^k)^\#, \dots, (x_{m_k}^k)^\#)$ служит гильбертовым базисом в $\mathscr{A}^{(\lambda)}$;*

(5) *если $A^{(\lambda)} \subset DAp(A)$, то существует гильбертов базис $(y_1^1, \dots, y_{m_1}^1, \dots, y_1^k, \dots, y_{m_k}^k)$ в $A^{(\lambda)}$ такой, что $T_N y_l^\jmath \approx x_l^\jmath$ при $\jmath := 1, \dots, k$; $l := 1, \dots, m_\jmath$.*

$\lhd$ Как видно, если $\nu \approx \lambda$ и $x \in A_N^{(\nu)}$, то $x^\# \in \mathscr{A}^{(\lambda)}$. Если $\nu_1, \dots, \nu_k \in \sigma_\lambda$ попарно различны, то любые элементы $x_1 \in A_N^{(\nu_1)}, \dots, x_k \in A_N^{(\nu_k)}$ попарно ортогональны, следовательно, $x_1^\#, \dots, x_k^\#$ попарно ортогональны. Тем самым $k \leq \dim(\mathscr{A}^{(\lambda)})$. Обратное неравенство доказано в 6.1.6 (3). Импликации (2) $\to$ (3) и (3) $\to$ (4) очевидны. Утверждение (5) следует из определения вложения $\mathbf{t}$. $\rhd$

6.2.6. Последовательность операторов (A_n) *квазикомпактна*, если она удовлетворяет условию $\mathscr{A}(\mathscr{X}) \subset \mathbf{t}(X)$ для любого бесконечно большого N (причем (A_n) не обязательно сходится к какому-либо A).

Для разъяснения мотивов введения этого определения, предположим на время, что рассматриваемое дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n \in \mathbb{N}}$ является сильным (см. 6.2.1). Тогда условие 6.2.1 (2) означает, что при бесконечно больших N образ $A_N x$ каждого доступного элемента $x \in X_N$ бесконечно близок к $T_N y$ для некоторого (стандартного) элемента $y \in X$. Остается вспомнить, что нестандартный критерий компактности оператора гласит (ср. 4.3.6): *оператор компактен в том и только в том случае, если образ всякого доступного элемента околостандартен.*

Приведем одно простое достаточное условие квазикомпактности последовательности операторов (A_n), справедливое для любых банаховых пространств X и X_n, где $n \in \mathbb{N}$ (ср. [450]). Оно основывается на требовании следующего часто применяемого в дальнейшем свойства дискретного приближения:

$$\textbf{(1)}\quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\|z\|=1} (\inf\{\|x\|_n : T_n x = z\}) < +\infty.$$

(2) *Если последовательность (A_n) дискретно сходится к компактному оператору A, причем эта сходимость равномерная, а дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (1), то (A_n) — квазикомпактная последовательность.*

$\lhd$ Пусть $\xi \in \mathscr{X}$. Тогда существует доступный элемент $x \in X_N$ такой, что $\xi = x^{\#}$. Так как каждый оператор T_n — это эпиморфизм, то по принципу переноса существует элемент $f \in {}^*X$, для которого $x = T_N f$. Условие, наложенное на $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$, позволяет считать f доступным. Из условия равномерной сходимости $\|A_N T_N - T_N {}^*A\|_N \approx 0$, стало быть, $A_N x = A_N T_N f \approx T_N {}^*A f$. Так как A компактен, а f доступен, то можно подобрать стандартный элемент $h \in X$ так, чтобы ${}^*Af \approx h$. Согласно 6.2.2 число $\|T_N\|_N$ доступно, значит, $T_N {}^*Af \approx T_N h$, откуда $A_N x \approx T_N h$ и $\mathscr{A}(\xi) = \mathbf{t}(h)$. $\rhd$

Ниже в 7.6 и 7.7 сильная дискретная сходимость будет применена в ситуации [290], когда существуют сохраняющие норму вложения $\imath_n : X_n \to X$ и $T_n := \imath_n^{-1} \circ p_n$, где $p_n : X \to \imath_n(X_n)$ — ортопроектор. Легко видеть, что в этом случае дискретное приближение удовлетворяет указанному в формулировке предложения условию.

К сожалению, равномерная сходимость — явление достаточно редкое. Во многих интересных случаях квазикомпактность (A_n) установить не так просто. Здесь прежде всего необходимо найти условия, при которых элемент $x \in X_N$ бесконечно близок к элементу вида $T_N y$ для некоторого стандартного $y \in X$. Один такой критерий, полезный при развиваемом в следующей главе подходе к приближению операторов типа Шрёдингера, будет доказан ниже в 7.6.15.

6.2.7. Определение квазикомпактности приобретает естественную стандартную версию, поскольку условие в определении 6.2.6 выполняется для каждого бесконечно большого натурального N. Тогда обычные в нестандартном анализе рассуждения позволяют доказать следующее ниже предложение, справедливое для произвольных параметров.

Обозначим символом B_N единичный шар пространства X_N, сохранив символ $B_N(\varepsilon, x)$ за шаром пространства X_N с центром в точке x и радиуса ε.

Если $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — сильное дискретное приближение, то последовательность операторов (A_n) квазикомпактна в том и только в том случае, если справедлива следующая формула:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists^{\mathrm{fin}} B \subset X)(\exists n_0)(\forall N > n_0)\Big((A_N(B_N)) \subset \bigcup_{y\in B} B_N(\varepsilon, T_N y)\Big).$$

$\lhd$ $\leftarrow$: Зафиксируем произвольное стандартное $\varepsilon > 0$. По принципу переноса для любого бесконечно большого N имеет место включение:

$$A_N(B_N) \subset \bigcup_{y\in B} B_N(\varepsilon, T_N y).$$

Возьмем $x \in B_N$. Из указанного включения следует, что для любого стандартного $n \in \mathbb{N}$ существует стандартный элемент y_n из X такой, что $\|A_N x - T_N y_n\|_N < n^{-1}$. Так как $\|T_N y_n - T_N y_m\|_N \approx \|y_n - y_m\|$ для произвольных стандартных n и m, то $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность Коши в X. Следовательно, (y_n) сходится к некоторому стандартному элементу $y \in X$. Как видно, $\|A_N x - T_N y\| \approx 0$.

$\rightarrow$: Предположим, что проверяемая формула не выполняется. Переходя в ней к отрицаниям, получаем

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall^{\mathrm{fin}} B \subset X)(\forall n_0)(\exists N > n_0)$$
$$\Big((A_N(B_N)) \not\subset \bigcup_{y\in B} B_N(\varepsilon, T_N y)\Big).$$

Возьмем стандартное $\varepsilon_0 > 0$, удовлетворяющее последней формуле. Рассмотрим гиперконечное множество $B \subset {}^*X$ такое, что $X \subset B$. Применив принцип переноса к выписанной выше формуле, найдем такое бесконечно большое N, что

$$A_N(B_N) \not\subset \bigcup_{y\in B} B_N(\varepsilon, T_N y).$$

Итак, имеется x из B_N, расстояние от которого до любого элемента вида $T_N y$ со стандартным y, не меньше, чем стандартное число ε_0. Это доказывает, что для найденного N не выполняется условие определения квазикомпактности в 6.2.6. $\triangleright$

6.2.8. Теорема. *Пусть A — компактный эрмитов оператор в гильбертовом пространстве X, а $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — дискретное приближение X. Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — квазикомпактная последовательность эрмитовых операторов $A_n : X_n \to X_n$, дискретно сходящаяся к A. Тогда справедливы утверждения:*

(1) *спектр $\sigma(A)$ совпадает с множеством неизолированных предельных точек множества $\bigcup_n \sigma(A_n)$;*

(2) *если $0 \neq \lambda \in \sigma(A)$ и J — окрестность λ, не содержащая других точек спектра $\sigma(A)$, то λ — единственная неизолированная предельная точка множества $J \cap \bigcup_n \sigma(A_n)$;*

(3) *если в условиях (2) $M_n^\lambda := \sum_{\nu\in\sigma(A_n)\cap J} A_n^{(\nu)}$, то для достаточно больших n будет $\dim(M_n^\lambda) = \dim(A^{(\lambda)}) = s$ и при этом существует последовательность ортонормальных базисов $(f_1^n, \dots, f_s^n)$ в M_n^λ, дискретно сходящаяся к ортонормальному базису $(f_1, \dots, f_s)$ в $A^{(\lambda)}$.*

$\triangleleft$ Это стандартная переформулировка 6.2.4 и 6.2.5. $\triangleright$

Разумеется, приведенные рассуждения не проходят для неограниченного самосопряженного оператора A, так как в этом случае для последовательности (A_n), дискретно сходящейся к A, норма оператора A_N будет бесконечно большим числом и возникают проблемы уже с определением $A_N^\#$ (см. [381]). Однако для этого случая можно использовать несколько измененные результаты о сильной резольвентной сходимости (ср., например, [197, теорема VIII.19], а также [306, теорема 5.7.6]). Отметим здесь же, что все используемые нами понятия и факты теории неограниченных операторов можно найти в [197, глава 8].

Если $\lambda \notin \sigma(A)$, то соответствующее значение резольвенты обозначим символом $R_\lambda(A) := (\lambda - A)^{-1} := (\lambda 1 - A)^{-1}$, где, как обычно, 1 обозначает тождественный оператор I на пространстве X, играющий роль единицы в алгебре эндоморфизмов X.

6.2.9. *Если A — самосопряженный оператор и область приближения $DAp(A)$ оператора A последовательностью (A_n) является су-*

щественной областью A, то для всякого λ такого,что $\lambda \notin \mathrm{cl}(\sigma(A) \cup \bigcup_n \sigma(A_n))$, последовательность $(R_\lambda(A_n))$ дискретно сходится к оператору $R_\lambda(A)$.

$\lhd$ Сначала докажем требуемое для значений $\lambda := \pm i$, которые, как очевидно, удовлетворяют нашим предположениям. Рассмотрим лишь случай $\lambda := -i$; случай $\lambda := i$ разбирается совершенно аналогично. По определению нужно лишь обосновать равенство 6.2.1 (2) для $R_{-i}(A)$ и $R_{-i}(A_n)$ при некотором плотном подмножестве $Y \subset X$. Положим $Y := \{(A+i)\varphi : \varphi \in DAp(A)\}$. Тогда Y плотно в X, так как $DAp(A)$ — существенная область оператора A. Зафиксируем бесконечно большое натуральное число N. Тогда

$$((A+i)^{-1} - (A_N+i)^{-1})(A+i)\varphi = (A_N+i)^{-1}(A_N - A)\varphi.$$

Поскольку $\varphi \in DAp(A)$, то $(A_N - A)\varphi \approx 0$. Взяв подмножество B на вещественной оси $\mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, обозначим символом $\rho(\lambda, B)$ расстояние между λ и B на плоскости $\mathbb{C}$. Пусть $S := \mathrm{cl}(\sigma(A) \cup \bigcup_n \sigma(A_n))$. Если λ удовлетворяет условиям сформулированного предложения, то $\rho(\lambda, S) > 0$. В силу принципа переноса будет

$$\|(A_N+i)^{-1}\| = \rho(\lambda, \sigma(A_N))^{-1} \leq \rho(\lambda, S)^{-1} \ll +\infty.$$

Таким образом, $R_{-i}(A_N)(A+i)\varphi \approx R_{-i}(A)(A+i)\varphi$, что доказывает дискретную сходимость $R_{-i}(A_n)$ к $R_{-i}(A)$.

Докажем теперь, что если утверждение предложения имеет место для некоторого λ_0, удовлетворяющего условию $\lambda \notin S$, то оно выполняется и для любого такого λ, что $|\lambda - \lambda_0| < \rho(\lambda_0, S)$. Понятно, что из этого факта вытекает требуемое, так как каждое $\lambda \notin S$ можно соединить или с i, или с $-i$ гладкой кривой, лежащей целиком в $\mathbb{C} - S$, следовательно, можно подобраться к λ из i или $-i$ конечным числом кругов радиуса меньше, чем $\rho(\lambda, S)$.

Функции $R_\lambda(A_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ и $R_\lambda(A)$ аналитичны в открытом круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \rho(\lambda_0, S)\}$ и разлагаются в следующие равномерно сходящиеся ряды:

(1) $R_\lambda(A) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^m R_{\lambda_0}^{m+1}(A)$,

(2) $R_\lambda(A_n) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^m R_{\lambda_0}^{m+1}(A_n)$.

Докажем, что для произвольного бесконечно большого числа N и любого стандартного элемента $f \in Y$ выполняется $T_N R_\lambda(A) f \approx R_\lambda(A_N) T_N f$. Так как последнее верно для λ_0, то для любого стандартного $k \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение

$$(3)\quad \sum_{m=0}^{k} (\lambda - \lambda_0)^m T_N R_{\lambda_0}^{m+1}(A) f \approx \sum_{m=0}^{k} (\lambda - \lambda_0)^m R_{\lambda_0}^{m+1}(A_N) T_N f.$$

Возьмем произвольное стандартное $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (1) и (2) существует номер n_0 такой, что при $k > n_0$ будет

$$\left\| R_\lambda(A) f - \sum_{m=0}^{k} (\lambda - \lambda_0)^m R_{\lambda_0}^{m+1}(A) f \right\| < \varepsilon.$$

Обозначим буквой h функцию в левой части последнего неравенства. Так как h стандартна, то $\|T_N h\| \approx \|h\|$. Отсюда вытекает неравенство

$$(4)\quad \left\| T_N R_\lambda(A) f - \sum_{m=0}^{k} (\lambda - \lambda_0)^m T_N R_{\lambda_0}^{m+1}(A) f \right\|_N \le \varepsilon.$$

Покажем, что сходимость рядов в (2) равномерна по n. Имеем

$$\|R_{\lambda_0}(A_n)\| = \max_{\nu} \{\nu : \nu \in \sigma(A_n)\} = \rho(\lambda_0, \sigma(A_n))^{-1} \le \rho(\lambda_0, S)^{-1}.$$

Тем самым $q := |\lambda - \lambda_0| \cdot \|R_{\lambda_0}(A_n)\| < 1$, откуда выводим

$$\left\| \sum_{m=k+1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^m R_{\lambda_0}^{m+1}(A_n) \right\| \le \frac{\rho(\lambda_0, S)^{-1} \cdot q^{k+1}}{1 - q} \to 0$$

при $k \to \infty$. Далее, так как число $\|T_N f\|_N$ доступно (вследствие соотношения $T_N f \approx f$), то найдется номер n_1, для которого

$$(5)\quad \left\| R_\lambda(A_n) T_N f - \sum_{m=0}^{k} (\lambda - \lambda_0)^m R_{\lambda_0}^{m+1}(A_N) T_N f \right\|_N < \varepsilon$$

при всех $k > n_1$.

Как видно, для стандартного номера $k > \max\{n_0, n_1\}$ из (3), (4) и (5) получаем $\|T_N R_\lambda(A) f - R_\lambda(A_N) T_N f\|_N \le 2\varepsilon$. Произвол в выборе стандартного $\varepsilon > 0$ приводит к требуемому. ▷

6.2.10. Следующее предложение является простым следствием установленного в предыдущем пункте факта.

Если в условиях предложения 6.2.9 резольвенты самосопряженных операторов A_n компактны и для некоторого вещественного числа $\lambda \notin \mathrm{cl}(\sigma(A) \cup \bigcup_n \sigma(A_n))$ последовательность $(R_\lambda(A))$ квазикомпактна, то выполняются утверждения 6.2.8 (1)–(3).

6.2.11. Если $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ служит сильным дискретным приближением и удовлетворяет условию 6.2.6 (1), то ввиду предложения 6.2.6 (2) квазикомпактность последовательности резольвент следует из ее равномерной сходимости. Достаточное условие равномерной сходимости резольвент дается следующим предложением (ср. [197, теорема 8.25]).

Допустим, что в условиях предложения 6.2.9 сильное дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию 6.2.6 (1) и для некоторой существенной области $D \subset DAp(A)$ оператора A выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\varphi\in D, \|\varphi\|_A=1} \|(T_nA - A_nT_n)\varphi\|_n = 0,$$

где $\|\varphi\|_A := \|A\varphi\| + \|\varphi\|$. Тогда последовательность $(R_\lambda(A_n))$ сходится к $R_\lambda(A)$ равномерно.

6.2.12. Примечания.

(1) Материал, представленный в этом параграфе, взят из статьи С. Альбеверио, Е. И. Гордона и А. Ю. Хренникова [243]. Определения, данные в 6.2.1, являются специальными случаями понятия дискретной сходимости, восходящей к Штуммелю [488, 489]. Аспекты этого понятия обсуждаются в книге [452]. В частности, в [452, параграф 7.3] введено понятие *дискретной компактности*, которое в некоторых случаях эквивалентно квазикомпактности.

(2) Дискретное приближение при $Y = X$ используется также в [290], где пространства X_n функций на конечной сетке вложены в $L_2(\mathbb{R}^n)$ как подпространства ступенчатых функций, а в качестве линейных операторов T_n взяты ортопроекторы на эти подпространства. Заметим, что в этом случае T_nf отличается от таблицы значений f даже для непрерывной функции f. Однако для гладкой функции f разность между T_nf и таблицей значений f сходится к нулю. Возникающая при этом возможность рассматривать операторы A_n как операторы, действующие в X (в этом случае $X = L_2(\mathbb{R}^n)$), существенно упрощает исследование сходимости спектра. Ключевым при этом оказывается понятие ***равномерной компактности*** последовательности операторов (A_n), означающее относительную компактность множества $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n(U)$, где U — единичный шар в $L_2(\mathbb{R}^n)$, см. [290]. Это понятие было введено в [249].

(3) Мы рассмотрели здесь только случай самосопряженных операторов с дискретным спектром и компактными резольвентами. Однако представляется, что развиваемый подход может оказаться полезным и в более общей ситуации. Некоторые результаты о сходимости спектров операторов A_n, дискретно сходящихся к оператору A в случае банаховых пространств, но в предположении $Y = X$ (см. определения из 6.2.1) были получены Рабигером и Вольфом [450, 451], которые также использовали нестандартные методы. Для самосопряженных интегральных операторов на компактных группах такой подход использовал Е. И. Гордон в [317].

(4) В доказательстве 6.2.7 мы использовали $\mathrm{Card}(X)^+$-насыщенность, т. е. соответствующий вариант принципа направленности. Легко видеть, что для сепарабельного X достаточно использовать ω_1-насыщенность нестандартного универсума.

(5) Понятие квазикомпактности из 6.2.6 стоит сравнить с понятием компактности последовательности (A_n), использованным в [290]. Как уже отмечалось в 6.2.6, в [290] предполагается существование сохраняющих норму вложений $\imath_n : X_n \to X$ и $T_n := \imath_n^{-1} \circ p_n$, где $p_n : X \to \imath_n(X_n)$ — ортопроектор. В этой ситуации оператор A_n можно отождествить с оператором $\bar{A}_n := \imath_n A_n T_n$, действующим в X. Согласно [290] последовательность (A_n) *компактна*, если множество $\bigcup_n \bar{A}_n(B)$, где B — единичный шар в X, относительно компактно. Легко видеть, что компактность последовательности (A_n) в смысле [290] влечет ее квазикомпактность. Действительно, если $x \in B_N$ для всех недоступных $N \in {}^*\mathbb{N}$, то $\imath_N(x) \in B$ и $\bar{A}_N \imath_N x = \imath_N A_N x \approx y$ для некоторого стандартного $y \in X$ ввиду компактности в смысле [290] и теоремы 4.3.6.

6.3. Меры Лёба

Одной из наиболее полезных конструкций инфинитезимального анализа является мера Лёба, нашедшая применение в ряде разделов функционального анализа, теории вероятностей и стохастическом моделировании, см. [5, 279]. В этом параграфе приводятся начальные сведения о мерах Лёба.

6.3.1. Пусть $(X, \mathscr{A}, \nu)$ — внутреннее пространство с конечно-аддитивной положительной мерой. Точнее, пусть $\mathscr{A}$ — внутренняя алгебра подмножеств внутреннего множества X и $\nu : \mathscr{A} \to {}^*\mathbb{R}$ — внутренняя конечно-аддитивная положительная функция. Это означает, в частности, что $\mathscr{A} \subset {}^*\mathscr{P}(X)$. Кроме того, для гиперконечного набора множеств $\{A_1, \ldots, A_\Omega\}$, где $\Omega \in {}^*\mathbb{N}$, будет $\bigcup_{k=1}^{\Omega} A_k \in \mathscr{A}$, а если A_k попарно не пересекаются, то

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\Omega} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\Omega} \nu(A_k).$$

Объединение гиперконечной совокупности множеств определяется так же, как и сумма гиперконечного множества в 6.1.3. Если $f : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(X)$ — последовательность в $\mathscr{P}(X)$, то рекурсией задается новая последовательность $g : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(X)$:

$$\mathrm{Seq}(f) \wedge \mathrm{Seq}(g) \wedge f(0) = g(0) \wedge (\forall k \in \mathbb{N})(g(k+1) = g(k) \cup f(k+1)).$$

Сокращенно эту формулу мы обозначим символом $\bigcup(f, g)$. Возьмем теперь гиперконечное множество $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$ и положим $\Omega := |\mathscr{A}_0|$. Зафиксируем какую-нибудь биекцию $f : \{0, \ldots, \Omega - 1\} \to \mathscr{A}_0$ и продолжим ее до внутренней последовательности $f : {}^*\mathbb{N} \to \mathscr{A}$, считая f нулем при $n > \Omega - 1$. Определим последовательность $g : {}^*\mathbb{N} \to \mathscr{A}$ формулой $\bigcup(f, g)$. В силу принципа переноса $g(\Omega - 1)$ не зависит от выбора внутренней биекции f, стало быть, корректно следующее определение: $\bigcup_{A \in \mathscr{A}_0} A := g(\Omega - 1)$. В соответствии с принципом переноса заданное таким образом объединение гиперконечного множества обладает всеми свойствами обычного конечного объединения.

Рассмотрим внешнюю функцию

$$°\nu : A \mapsto °(\nu(A)) \in \mathbb{R}^\bullet \quad (A \in \mathscr{A}),$$

где, как обычно, $°(\nu(A))$ — стандартная часть $\nu(A)$, если $\nu(A)$ доступно и $°(\nu(A)) = +\infty$ в противном случае. Легко видеть, что функция $°\nu$ конечно-аддитивна.

6.3.2. Мера Лёба возникает как счетно-аддитивное продолжение $°\nu$ на внешнюю σ-алгебру $\sigma(\mathscr{A})$, порожденную алгеброй $\mathscr{A}$. Такое продолжение, как будет показано ниже в 6.3.4, выводится из теоремы Лебега — Каратеодори, но единственность продолжения требует несколько вспомогательных фактов, играющих техническую роль.

(1) *Пусть $\mathscr{A}_0$ — счетная подалгебра алгебры $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}_0$ — полная алгебра подмножеств X (т. е. полная подалгебра в $\mathscr{P}(X)$), порожденная $\mathscr{A}_0$. Если $S \subset X$ и для любого $A \in \mathscr{A}_0$ либо $S \subset A$, либо $S \cap A = \varnothing$, то для любого $B \in \mathscr{B}_0$ либо $S \subset B$, либо $S \cap B = \varnothing$.*

$\triangleleft$ Множество $P \subset X$ назовем отмеченным, если оно представимо в виде $P := \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, где $(B_n) \subset \mathscr{A}_0$ и для каждого множества $\mathscr{A}_0$ либо оно само, либо его дополнение совпадает с одним из B_k. Пусть $\mathscr{P}$ — совокупность всех отмеченных подмножеств X. Легко видеть, что множества из $\mathscr{P}$ попарно не пересекаются и $\bigcup \mathscr{P} = X$, т. е. $\mathscr{P}$ — разбиение множества X. Из определения отмеченного множества видно, что для $P \in \mathscr{P}$ и $A \in \mathscr{A}_0$ выполняется одно из соотношений $P \subset A$ и $P \cap A = \varnothing$. Следовательно, $A = \bigcup\{P \in \mathscr{P} : P \subset A\}$ для каждого $A \in \mathscr{A}_0$. Заметим далее, что алгебра $\mathscr{B}_0$ состоит в точности из множеств $B \subset X$ вида $B := \bigcup \mathscr{P}'$, где $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$.

Возьмем теперь такое множество $S \subset X$, что для каждого $A \in \mathscr{A}_0$ либо $S \subset A$, либо $S \cap A = \varnothing$. Тогда последовательность (B_k) всех элементов из $\mathscr{A}_0$, содержащих S, такова, что $P := \bigcap B_k$ входит в $\mathscr{P}$. Так как $S \subset P$, то для $B \in \mathscr{B}_0$ в силу уже доказанного возможны лишь два случая: либо $P \subset B$ и тогда $S \subset B$, либо $P \cap B = \varnothing$ и тогда $S \cap B = \varnothing$. $\triangleright$

Обозначим символом $c(\mathscr{A})$ совокупность всех множеств $S \subset X$, удовлетворяющих следующему условию: существует счетная подалгебра $\mathscr{A}_0$ алгебры $\mathscr{A}$ такая, что S содержится в полной алгебре подмножеств X, порожденной $\mathscr{A}_0$ (т. е. в полной подалгебре булеана $\mathscr{P}(X)$). В этом случае говорят, что множество S порождается алгеброй $\mathscr{A}_0$. Следующее утверждение легко выводится из определений.

(2) *Множество $c(\mathscr{A})$ представляет собой σ-алгебру, причем $\sigma(\mathscr{A}) \subset c(\mathscr{A})$.*

6.3.3. *Для любого множества $S \in c(\mathscr{A})$ имеет место, и притом только одно из следующих утверждений:*

(1) *существует элемент $A \in \mathscr{A}$ такой, что $A \subset S$ и $\nu(A)$ — бесконечно большое число;*

(2) *существует последовательность $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ такая, что $S \subset \bigcup_k A_k$ и число $\nu(A_k)$ доступно для всех $k \in \mathbb{N}$.*

$\triangleleft$ Пусть множество $S \in c(\mathscr{A}_0)$ порождается счетной подалгеброй $\mathscr{A}_0$ алгебры $\mathscr{A}$. Положим $\mathscr{A}_0' := \{A \in \mathscr{A}_0 : |\nu(A)| \ll +\infty\}$.

Если $S \subset \bigcup \mathscr{A}_0'$, то выполняется (2). В противном случае возьмем $p \in S - \bigcup \mathscr{A}_0'$. Рассмотрим счетное множество $\mathscr{A}_0'' := \{A \in \mathscr{A}_0 : p \in A\}$ и заметим, что оно замкнуто относительно конечных пересечений и состоит из множеств с бесконечно большой мерой. Пусть $A(n, B) := \{A \in \mathscr{A} : p \in A \subset B, \nu(A) \geq n\}$. В силу указанных свойств множества $\mathscr{A}_0''$ множество $\{A(n, B) : n \in \mathbb{N}, B \in \mathscr{A}_0''\}$ замкнуто относительно конечных пересечений. Согласно принципу насыщения существует множество $A \in \mathscr{A}$ такое, что $A \in A(n, B)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $B \in \mathscr{A}_0''$. Таким образом, $\nu(A)$ — бесконечно большое число, $p \in A$ и $A \subset B$ для всех $B \in \mathscr{A}_0''$. Допустим, что некоторое множество $C \in \mathscr{A}_0$ не содержит A. Тогда $p \notin C$ или $p \in X - C$, значит, $X - C \in \mathscr{A}_0''$ и поэтому $A \subset X - C$. Итак, для любого $C \in \mathscr{A}_0$ либо $A \subset C$, либо $A \cap C = \varnothing$. Так как S порождается алгеброй $\mathscr{A}_0$, то либо $A \subset S$, либо $A \cap S = \varnothing$ согласно 6.3.2 (1). Так как $p \in A \cap S$, то должно быть $A \subset S$, стало быть, выполняется (1).

Предположим, что выполнены оба условия (1) и (2). Тогда $A \subset \bigcup_k A_k$, причем $\nu(A)$ — бесконечно большое число, а величины $\nu(A_k)$ доступны. В силу принципа насыщения $A \subset A_1 \cup \ldots \cup A_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Это, однако, невозможно, так как приводит к противоречивому неравенству $\nu(A) \leq \nu(A_1) + \ldots + \nu(A_n)$. $\triangleright$

6.3.4. *Теорема.* *Конечно-аддитивная мера ${}^{\circ}\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^{\bullet}$ обладает единственным счетно-аддитивным распространением λ на внешнюю σ-алгебру $\sigma(\mathscr{A})$, порожденную алгеброй $\mathscr{A}$. Более того, справедливы следующие утверждения:*

(1) $\lambda(B) = \inf\{{}^{\circ}\nu(A) : B \subset A, A \in \mathscr{A}\} \quad (B \in \sigma(\mathscr{A}))$;

(2) *если $\lambda(B) < +\infty$ для некоторого $B \in \sigma(\mathscr{A})$, то*

$$\lambda(B) = \sup\{{}^{\circ}\nu(A) : A \subset B, A \in \mathscr{A}\};$$

(3) *если $\lambda(B) < +\infty$ для некоторого $B \in \sigma(\mathscr{A})$, то существует $A \in \mathscr{A}$ такое, что $\lambda(A \triangle B) = 0$;*

(4) *для произвольного $B \in \sigma(\mathscr{A})$ либо существует $A \in \mathscr{A}$ такое, что $A \subset B$ и ${}^{\circ}\nu(A) = +\infty$, либо существует последовательность $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ множеств из $\mathscr{A}$, такая, что $B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ и ${}^{\circ}\nu(A_n) < +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

$\triangleleft$ Существование меры λ следует из теоремы Лебега — Каратеодори о продолжении меры. Условие применимости этой теоремы выполняется тривиальным образом.

В самом деле, возьмем возрастающую последовательность множеств $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в $\mathscr{A}$ и предположим, что множество $A := \bigcup_k A_k$ содержится в $\mathscr{A}$. В силу принципа насыщения $A = A_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, следовательно, ${}^{\circ}\nu(A_k) \to {}^{\circ}\nu(A)$. Докажем теперь утверждения (1)–(3) и единственность продолжения.

Возьмем $B \in \sigma(\mathscr{A})$. Процедура продолжения Лебега — Каратеодори гарантирует, в частности, что для каждого $B \in \sigma(\mathscr{A})$ имеет место формула

$$\lambda(B) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ}\nu(A_k) : A_k \in \mathscr{A}(k \in \mathbb{N}), B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\}.$$

Следовательно, для любого $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ существует последовательность внутренних множеств $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, для которой $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ}\nu(A_k) < \lambda(B) + \varepsilon/2$. Так как $\nu(A_k) < {}^{\circ}\nu(A_k) + \varepsilon/2^{k+1}$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то для произвольного $n \in \mathbb{N}$ можно написать

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k) \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ}\nu(A_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^{k+1} < \lambda(B) + \varepsilon.$$

Достроим $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ до внутренней последовательности $(A_k)_{k\in{}^*\mathbb{N}}$, используя принцип продолжения 3.5.11 (1). Рассмотрим внутреннее множество $\{n \in {}^*\mathbb{N} : \nu\,(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) < \lambda(B) + \varepsilon\}$. Так как это множество содержит все стандартные натуральные числа, то по принципу переполнения содержит и некоторое бесконечно большое гипернатуральное число Ω. Положим $A_\Omega := \bigcup_{k=1}^{\Omega} A_k$. Тогда по определению будет $B \subset A_\Omega$ и $\nu(A_\Omega) < \lambda(B) + \varepsilon$, значит, ${}^{\circ}\nu(A_\Omega) \le \lambda(B) + \varepsilon$. Тем самым обосновано (1).

Допустим, что $\lambda(B) < +\infty$. В силу доказанного можно подобрать внутреннее множество $C \in \mathscr{A}$ так, что $B \subset C$ и $\nu(C)$ конечно. Тогда утверждение (2) получается применением (1) к множеству $C - B$. Далее, пусть $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность в $\mathscr{A}$, причем $A_k \subset B$ и $|\nu(A_k) - \lambda(B)| < 1/k$. Продолжим эту последовательность до внутренней возрастающей последовательности $(A_k)_{k\in{}^*\mathbb{N}}$ с теми же свойствами и в силу принципа переполненности подберем такое недоступное гипернатуральное число $\Omega \in {}^*\mathbb{N}$, что $|\nu(A_\Omega) - \lambda(B)| < 1/\Omega$. Тогда $\lambda(B) = {}^\circ\nu(A_\Omega)$ и легко видеть, что $\lambda(A_\Omega \triangle B) = 0$. Утверждение (4) вытекает непосредственно из 6.3.3.

Остается доказать единственность. Предположим, что λ_1 и λ_2 — два σ-аддитивных продолжения меры ${}^\circ\nu$ на $\sigma(\mathscr{A})$. Так как $\sigma(\mathscr{A}) \subset c(A)$, то к множеству $S \in \sigma(\mathscr{A})$ можно применить 6.3.3. Если выполнено 6.3.3 (1), то существует такое $A \in \mathscr{A}$, что $A \subset S$ и ${}^\circ\nu(A) = \infty$, поэтому $\lambda_\jmath(S) = \infty$ для $\jmath := 1, 2$. Если же выполняется 6.3.3 (2), то существует последовательность $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в $\mathscr{A}$ такая, что $S \subset \bigcup_k A_k$ и $\nu(A_k)$ доступно для каждого $k \in \mathbb{N}$. Можно считать без ограничения общности, что эта последовательность возрастает. По установленной уже формуле 6.3.4 (1)

$$\lambda_\jmath(S \cap A_k) = \inf\{{}^\circ\nu(A) : A \in \mathscr{A}, S \cap A_k \subset A \subset A_k\} \quad (\jmath := 1, 2).$$

Отсюда видно, в частности, что $\lambda_1(S \cap A_k) = \lambda(S \cap A_k)$ для $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $S = \bigcup_k (S \cap A_k)$ и последовательность $(S \cap A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ возрастает, то $\lambda_1(S) = \lambda_2(S)$. Тем самым λ_1 и λ_2 совпадают на $\sigma(\mathscr{A})$. $\triangleright$

6.3.5. Пусть $S(\mathscr{A})$ — пополнение $\sigma(\mathscr{A})$ относительно меры λ, а ν_L — продолжение λ на $S(\mathscr{A})$. Можно показать, что если $\nu_L(X) < +\infty$, то $B \in S(\mathscr{A})$ в том и только в том случае, когда

$$\sup\{{}^\circ\nu(A) : A \subset B, A \in \mathscr{A}\} = \inf\{{}^\circ\nu(A) : B \subset A, A \in \mathscr{A}\} = \nu_L(B).$$

Набор $(X, S(\mathscr{A}), \nu_L)$, представляющий собой пространство с σ-аддитивной мерой ν_L, называют *пространством Лёба* (для $(X, \mathscr{A}, \nu)$), а меру ν_L — *мерой Лёба* (отвечающей ν).

Функция $f : X \to {}^*\overline{\mathbb{R}}$ называется *измеримой по Лёбу*, если она измерима относительно σ-алгебры $S(\mathscr{A})$. Внутренняя функция $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ называется *$\mathscr{A}$-измеримой*, если $\{x \in X : F(x) \le t\} \in \mathscr{A}$ при всех $t \in {}^*\mathbb{R}$. Внутренняя $\mathscr{A}$-измеримая функция $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ называется *лифтингом* функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, если $f(x) = {}^\circ F(x)$ для ν_L-почти всех $x \in X$.

6.3.6. Теорема. *Функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима по Лёбу тогда и только тогда, когда f имеет лифтинг.*

$\lhd$ $\leftarrow$: Возьмем $\mathscr{A}$-измеримую внутреннюю функцию $F : X \to {}^*\mathbb{R}$. Для произвольного стандартного числа $r \in \mathbb{R}$ будет

$$\{x \in X : {}^\circ F(x) \le r\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{x \in X : F(x) \le r + 1/k\} \in \sigma(\mathscr{A}),$$

следовательно, функция ${}^\circ F$ измерима по Лёбу. Если $f(x) = {}^\circ F(x)$ ν_L-почти всюду, то f также измерима по Лёбу.

$\to$: Пусть теперь f измерима по Лёбу. Возьмем какую-нибудь нумерацию $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ множества всех стандартных рациональных чисел: $\mathbb{Q} = \{q_k : k \in \mathbb{N}\}$. Положим $B_k := \{x \in X : f(x) \le q_k\}$. Подберем внутренние множества $A_k \in \mathscr{A}$ так, чтобы $\nu_L(A_k \triangle B_k) = 0$ и $A_k \subset A_l$ при $q_k \le q_l$. Пользуясь вновь принципами продолжения и переполненности, найдем бесконечно большое натуральное число Ω такое, что $A_k \in \mathscr{A}$ и $q_k \le q_l$ влечет $A_k \subset A_l$ при всех $k, l \le \Omega$. Определим теперь внутреннюю $\mathscr{A}$-измеримую функцию $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ с гиперконечным множеством значений $\{q_1, \dots, q_\Omega\}$ тем условием, что соотношения $F(x) \le q_k$ и $x \in A_k$ равносильны. Точнее, если указанное гиперконечное множество перенумеровать в порядке возрастания $q_{k_1} < q_{k_2} < \ldots < q_{k_\Omega}$, то можно положить

$$F(x) := \begin{cases} q_{k_1}, & \text{если } x \in A_{k_1}, \\ q_{k_l}, & \text{если } x \in A_{k_l} - A_{k_l - 1} \quad (1 < l \le \Omega), \\ q_{k_\Omega + 1}, & \text{если } x \notin A_{k_\Omega}. \end{cases}$$

Как видно, для любого $k \in \mathbb{N}$ соотношения $F(x) \le q_k$ и $f(x) \le q_k$ равносильны при всех $x \notin D := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \triangle B_k$. Так как $\nu_L(D) = 0$, то ${}^\circ F(x) = f(x)$ для ν_L-почти всех $x \in X$. $\rhd$

6.3.7. Внутренняя функция F называется *простой*, если множество ее значений $\mathrm{im}(F)$ есть гиперконечное множество. Как видно из доказательства теоремы 6.3.6, всякая измеримая по Лёбу функция имеет лифтинг, являющийся простой функцией. Очевидно, простая внутренняя функция F является $\mathscr{A}$-измеримой тогда и только тогда, когда $F^{-1}(\{t\}) \in \mathscr{A}$ для любого $t \in {}^*\mathbb{R}$. В этом случае для F определен внутренний интеграл

$$\int\limits_X F\, d\nu = \sum_{t \in \mathrm{im}(F)} F(t)\nu(F^{-1}(\{t\})).$$

Если $A \in \mathscr{A}$, то, как обычно, $\int_A F\,d\nu = \int_X F \cdot \chi_A\,d\nu$, где χ_A — характеристическая функция множества A.

Обозначим $A_N := \{x \in X : |F(x)| \geq N\}$. Внутренняя простая $\mathscr{A}$-измеримая функция $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ называется *$\mathscr{S}$-интегрируемой*, если $\int_{A_N} F\,d\nu \approx 0$ для любого бесконечно большого N. Можно показать, что каждое из следующих условий равносильно $\mathscr{S}$-интегрируемости функции F:

(1) $\int_X F\,d\nu$ — это доступное гипердействительное число и $\int_A F\,d\nu \approx 0$, как только $A \in \mathscr{A}$ и $\nu(A) \approx 0$;

(2) $\int_X {}^\circ|F|\,d\nu_L = {}^\circ(\int_X |F|\,d\nu) < +\infty$.

Две следующие теоремы относятся к случаю пространств Лёба с конечной мерой: $\nu_L(X) < +\infty$.

6.3.8. *Теорема.* *Пусть $(X, \mathscr{A}, \nu)$ — внутреннее пространство с конечно-аддитивной мерой, а $(X, S(\mathscr{A}), \nu_L)$ — соответствующее пространство Лёба. Функция $f : X \to {}^*\overline{\mathbb{R}}$ будет ν_L-интегрируемой тогда и только тогда, когда f имеет $\mathscr{S}$-интегрируемый лифтинг $F : X \to {}^*\mathbb{R}$. В этом случае имеет место равенство*

$$\int\limits_X f\,d\nu_L = {}^\circ\Bigl(\int\limits_X F\,d\nu\Bigr).$$

$\lhd$ Покажем сначала, что если функция f ограничена, измерима по Лёбу и имеет ограниченный лифтинг F, то $\int_X f\,d\nu_L = {}^\circ\!\int_X F\,d\nu$. В самом деле, возьмем простую измеримую по Лёбу функцию g с конечным числом значений $\{r_1, \dots, r_n\}$, причем $g \leq f$. Согласно теореме 6.3.4 для множества $B_k := g^{-1}(r_k)$ можно подобрать такое $A_k \in \mathscr{A}$, что $\nu_L(A_k \triangle B_k) = 0$. Функция G, равная r_k на A_k, служит лифтингом для g. Более того, $\int_X g\,d\nu_L = {}^\circ\!\int_X G\,d\nu$, так как в этом случае оба интеграла представляют собой конечные суммы, равные друг другу.

Если ограниченный лифтинг F_1 функции f удовлетворяет неравенству $G \leq F_1$, то, с одной стороны, $\int_X G\,d\nu_L \leq \int_X F_1\,d\nu$, а, с другой стороны, $|F(x) - F_1(x)| \leq 1/n$ для ν_L-почти всех $x \in X$ и для любого стандартного $n \in \mathbb{N}$, поэтому $\int_X F\,d\nu \approx \int_X F_1\,d\nu$. Таким образом,

$$\int\limits_X g\,d\nu_L = {}^\circ\Bigl(\int\limits_X G\,d\nu\Bigr) \leq {}^\circ\Bigl(\int\limits_X F_1\,d\nu)\Bigr) = {}^\circ\Bigl(\int\limits_X F\,d\nu\Bigr),$$

поэтому $\int_X f\,d\nu_L \le {}^\circ(\int_X F\,d\nu)$. Обратное неравенство получится, если заменить f на $-f$ и F на $-F$.

Предположим теперь, что функция f является ν_L-интегрируемой. Будем при этом считать, что $f \ge 0$, так как в общем случае можно воспользоваться представлением $f = f^+ - f^-$. Пусть F' — лифтинг функции f, существование которого гарантировано теоремой 6.3.6. Если $F_n := F' \wedge n$, то в силу уже доказанного будет

$$ {}^\circ\Bigl(\int\limits_X F_n\,d\nu\Bigr) = \int\limits_X (f\wedge n)\,d\nu_L \to \int\limits_X f\,d\nu_L. $$

Применив к последовательности $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ принципы продолжения и переполненности, найдем бесконечно большое натуральное число Ω, такое, что ${}^\circ(\int_X F_N\,d\nu) \approx \int_X f\,d\nu_L \to \int_X f\,d\nu_L$ для всех бесконечно больших $N \le \Omega$. Функция $F := F_\Omega$ служит $\mathscr{S}$-интегрируемым лифтингом функции f.

Наоборот, пусть задан $\mathscr{S}$-интегрируемый лифтинг F функции f. Используя принцип незаполненности, для произвольного $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ можно найти доступное натуральное число $n \in \mathbb{N}$ такое, что для доступного $m \ge n$ будет $\int_{F\ge m} F\,d\nu \le \varepsilon$. Вновь применив указанное выше утверждение для ограниченной функции, выводим

$$ \int\limits_X (f\wedge n)\,d\nu_L \approx \int\limits_X (F\wedge n)\,d\nu \le \int\limits_X F\,d\nu \le $$
$$ \le \int\limits_X (F\wedge n)\,d\nu + \varepsilon \approx \int\limits_X (f\wedge n)\,d\nu_L + \varepsilon. $$

Таким образом, число ${}^\circ(\int_X F\,d\nu)$ конечно и является пределом последовательности $\int_X (f\wedge n)$ при $n\to\infty$, что и требовалось. $\rhd$

6.3.9. *Теорема.* *Пусть $(X, \mathscr{A}, \nu)$ — внутреннее пространство с конечно-аддитивной мерой. Для любой внутренней простой $\mathscr{A}$-измеримой функции $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *F является $\mathscr{S}$-интегрируемой;*

(2) *${}^\circ\int_X |F|\,d\nu < +\infty$ и $\nu(A) \approx 0$ влечет $\int_A |F|\,d\nu \approx 0$ для любого $A \in \mathscr{A}$;*

(3) *$\int_X {}^\circ|F|\,d\nu_L = {}^\circ\int_X |F|\,d\nu$.*

$\lhd$ Доказательство использует соображения, аналогичные уже приведенным, и не содержит никаких новых трудностей. $\rhd$

6.3.10. Предположим, что X — гиперконечное множество, $\mathscr{A} := \mathscr{P}(X)$ и ν — ***считающая мера*** с весом Δ, т. е. $\nu(A) := \Delta|A|$ при любом $A \in \mathscr{A}$, где $|A|$ — число элементов множества A и $\Delta \in {}^*\mathbb{R}+$.

Соответствующее пространство Лёба обозначается $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$, а мера ν_Δ называется ***равномерной мерой Лёба.*** В случае равномерных мер Лёба всякая внутренняя функция $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ является простой и $\mathscr{A}$-измеримой, причем $\int_A F\,d\nu = \Delta \sum_{x\in A} F(x)$ для любого $A \in \mathscr{A}$.

Мера Лёба ν_Δ конечна при условии, что число $\Delta \cdot |X|$ доступно. Если $\Delta = |X|^{-1}$, то пространство Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$ называют ***каноническим*** и обозначают (X, S, ν_L) или (X, S^X, ν_L^X). В случае конечной меры Лёба, если $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ является $\mathscr{S}$-интегрируемым лифтингом функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, то в силу теоремы 6.3.8

$$\int\limits_X f\,d\nu_\Delta = {}^\circ\Bigl(\Delta \sum_{x\in X} F(x)\Bigr).$$

6.3.11. Докажем теперь обобщение теоремы 6.3.8 для случая пространств Лёба с бесконечной мерой ν_Δ.

Рассмотрим пространство Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$. Предположим, что множество $M \in S_\Delta$ удовлетворяет следующему условию: существует возрастающая последовательность внутренних множеств $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ и $\Delta \cdot |M_n| \ll +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

В этом случае символом S_Δ^M обозначаем σ-алгебру $\{A \cap M : A \in S_\Delta\}$ подмножеств множества M, а символом ν_Δ^M — ограничение ν_Δ на S_Δ^M.

Пространство $\Xi := (M, S_\Delta^M, \nu_\Delta^M)$ назовем ***σ-конечным подпространством пространства Лёба*** $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$. Будем считать также, что $\mathfrak{A} := {}^*\mathscr{P}(X)$ — это множество всех внутренних подмножеств X.

Внутреннюю функцию $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ называют ***$\mathscr{S}_M$-интегрируемой***, если выполнены следующие условия:

(1) $\Delta \sum_{\xi\in X} |F(\xi)| \ll \infty$;
(2) $(\forall A \in \mathfrak{A})(\Delta \cdot |A| \approx 0 \to \Delta \cdot \sum_{\xi\in A} |F(\xi)| \approx 0)$;
(3) $(B \in \mathfrak{A} \wedge B \subset X - M) \to \Delta \cdot \sum_{\xi\in B} |F(\xi)| \approx 0$.

Если $X = M$, то M — внутреннее множество и из ω_1-насыщенности следует, что $X = M_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. В частности, $\nu_\Delta(X) < +\infty$ и (в силу 6.3.7) понятие $\mathscr{S}_M$-интегрируемости совпадает с понятием $\mathscr{S}$-интегрируемости.

Внутреннюю функцию $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ называют *лифтингом* функции $f : X \to {}^*\overline{\mathbb{R}}$, если $f(\xi) = {}^\circ F(\xi)$ для ν_Δ^M-почти всех $\xi \in M$.

6.3.12. Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathscr{L}$ обозначает внутреннее гиперконечномерное векторное пространство функций $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ с нормой $\|F\| := \Delta \cdot \sum_{\xi \in X} |F(\xi)|$. Если $A \in \mathfrak{A}$, то $\|F\|_A := \|F \cdot \chi_A\| := \Delta \sum_{\xi \in A} |F(\xi)|$, где χ_A — характеристическая функция множества A.

Напомним, что $\mathrm{ltd}(\mathscr{L})$ — внешнее подпространство доступных элементов пространства $\mathscr{L}$, составленное точками с доступными нормами, а $\mathscr{L}_0 \subset \mathrm{ltd}(\mathscr{L})$ — множество элементов с бесконечно малой нормой (см. 6.1.1). Нестандартная оболочка $\mathscr{L}^\# := \mathrm{ltd}(\mathscr{L})/\mathscr{L}_0$ представляет собой несепарабельное банахово пространство (если внутренняя мощность $|X|$ множества X — бесконечно большое число). Обозначим символом $\mathscr{S}(M)$ подпространство $\mathrm{ltd}(\mathscr{L})$, состоящее из $\mathscr{S}_M$-интегрируемых функций.

В этом разделе всегда фиксировано множество M, так что вместо $\mathscr{S}(M)$ и $\mathscr{S}_M$ будем писать $\mathscr{S}$, а вместо ν_Δ^M — просто ν_Δ. Наконец, запись $F \sim G$ означает, что $\|F - G\| \approx 0$.

(1) *Для произвольной функции $F \in \mathscr{L}$ из соотношения $\|F\| \approx 0$ следует, что $F(\xi) \approx 0$ для ν_Δ-почти всех ξ.*

$\lhd$ Предположим, что имеется такое множество $A \in S_\Delta$, что $\nu_\Delta(A) > 0$ и ${}^\circ F(\xi) \neq 0$ для всех $\xi \in A$. Покажем, что тогда некоторое внутреннее $B \in \mathfrak{A}$ удовлетворяет тем же самым условиям.

В самом деле, если $\nu_\Delta(A) \le +\infty$, то по теореме 6.3.4 $\nu_\Delta(A) = \sup\{\nu_\Delta(B) : B \in \mathfrak{A},\ B \subset A\}$. Если $\nu_\Delta(A) = +\infty$, то по той же теореме либо существует внутреннее подмножество B множества A, для которого $\nu_\Delta(B) = +\infty$, либо можно подобрать последовательность (A_n) внутренних множеств так, чтобы $A \subset \bigcup_{n=0}^\infty A_n$ и $\nu_\Delta(A_n) < +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В последнем случае $\nu_\Delta(A \cap A_n) \to +\infty$, поэтому существует такой номер n, что $\nu_\Delta(A \cap A_n) > 0$, стало быть, вновь можно применить теорему 6.3.4.

Итак, для некоторого $B \in \mathfrak{A}$ выполняется $\nu_\Delta(B) > 0$. Так как $T := \{|F(\xi)| : \xi \in B\}$ — внутреннее множество, то $\alpha := {}^\circ(\inf T) > 0$ и ${}^\circ\|F\| \ge {}^\circ(\alpha\Delta|B|) = {}^\circ\alpha\nu_\Delta(B) > 0$. $\rhd$

(2) *Если $F \in \mathscr{S}$ и $G \sim F$, то $G \in \mathscr{S}$.*

$\lhd$ Если A удовлетворяет одному из условий (2) и (3) определения из 6.3.11, то $\|F\|_A \approx 0$ и, поскольку $\|F - G\| \approx 0$, будет также $\|F -$

$G\|_A \approx 0$. Таким образом, $\|G\|_A \approx 0$. $\triangleright$

Аналогичные соображения приводят к следующему утверждению.

(3) *Нестандартная оболочка $\mathscr{S}^\#$ представляет собой замкнутое подпространство банахова пространства $\mathscr{L}^\#$.*

6.3.13. Теорема. *Функция $f : X \to {}^*\overline{\mathbb{R}}$ будет ν_Δ^M-интегрируемой в том и только в том случае, если она имеет $\mathscr{S}_M$-интегрируемый лифтинг F. В этом случае имеет место равенство*

$$\int\limits_M f\, d\nu_\Delta^M = {}^\circ\Big(\Delta \sum_{\xi\in X} F(\xi)\Big).$$

$\triangleleft$ Ясно, что достаточно обосновать теорему для положительной функции f. В соответствии с этим предположим, что $f \in L_1(\nu_\Delta)$ и $f \geq 0$. Пусть $f_n := f \cdot \chi_{M_n}$. Последовательность (f_n) монотонно возрастает и сходится поточечно к интегрируемой функции f, следовательно,

(1) $\int\limits_M f_n\, d\nu_\Delta \to \int\limits_M f\, d\nu_\Delta$.

Но тогда верно также и предельное соотношение

(2) $\int\limits_M |f_n - f_m|\, d\nu_\Delta \to 0, \quad n, m \to +\infty$.

Носитель функции f_n содержится во внутреннем множестве M_n конечной меры, поэтому согласно теореме 6.3.8 существует $\mathscr{S}$-интегрируемый лифтинг F_n функции f_n, равный нулю вне M_n (ввиду условия 6.3.11 (3), $F_n(\xi) = 0$ при $\xi \in X - M_n$). Более того, имеет место равенство (см. 6.3.11)

(3) $\int\limits_M f_n\, d\nu_\Delta^M = {}^\circ\Big(\Delta \sum\limits_{\xi\in X} F_n(\xi)\Big)$.

Далее, установленное выше предельное соотношение (2) влечет, что ${}^\circ\|F_n - F_m\| \to 0$ при $m, n \to +\infty$. Тогда из предложения 6.3.12 (3) вытекает существование внутренней функции $F \in \mathscr{S}$ такой, что ${}^\circ\|F_n - F\| \to 0$. Как видно, ${}^\circ\|F_n\| \to {}^\circ\|F\|$. Предельный переход в (3) с учетом (1) приводит к тому, что (3) выполняется также для F и f. Остается показать, что $f(\xi) = {}^\circ F(\xi)$ для ν_Δ-почти всех ξ. Возьмем произвольное натуральное число $k > 0$. Понятно, что ${}^\circ\|F_n \cdot \chi_{M_k} - F \cdot \chi_{M_k}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Если $n > k$, то $M_n \supset M_k$, следовательно, $f_n \cdot \chi_{M_k} = f_k \cdot \chi_{M_k}$. Таким образом, ν_Δ-почти всюду $F_n \cdot \chi_{M_k} \approx F_k \cdot \chi_{M_k}$, и тогда ν_Δ-почти всюду $F_n \cdot \chi_{M_k} - F \cdot \chi_{M_k} \approx F_k \cdot \chi_{M_k} - F \cdot \chi_{M_k}$. Так как функции в последнем соотношении $\mathscr{S}$-интегрируемы и равны нулю вне множества M_k конечной меры, то $^\circ\|F_n \cdot \chi_{M_k} - F \cdot \chi_{M_k}\| = {}^\circ\|F_k \cdot \chi_{M_k} - F \cdot \chi_{M_k}\|$. Переходя в последнем равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим равенство $^\circ\|F_k \cdot \chi_{M_k} - F \cdot \chi_{M_k}\| = 0$, справедливое для всех k. Теперь из предложения 6.3.12 (1) выводим, что ν_Δ-почти всюду $F_k \cdot \chi_{M_k} \approx F \cdot \chi_{M_k}$. Итак, соотношение $f \cdot \chi_{M_k} \approx F \cdot \chi_{M_k}$ выполняется ν_Δ-почти всюду и, стало быть, $f \approx F|_M$ также ν_Δ-почти всюду, ибо $M = \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k$.

Предположим теперь, что $F \in \mathscr{S}$ и $f : M \to \mathbb{R}$ таковы, что $f(\xi) = {}^\circ F(\xi)$ для почти всех $\xi \in M$. Покажем, что тогда $f \in L_1(\nu_\Delta)$ и для F и f выполняется равенство (3). Пусть $F_n := F \cdot \chi_{M_k}$. Тогда ν_Δ-почти всюду $f_n := f \cdot \chi_{M_k} \approx F_n$, значит, применима теорема 6.3.8, так как $\nu_\Delta(M_n)$ конечно. Тем самым справедливы соотношения

$$\int\limits_M |f_n|\, d\nu_\Delta = {}^\circ\|F_n\| \leq {}^\circ\|F\|.$$

Поскольку последовательность $(|f_n|)$ монотонно возрастает и при этом сходится к $|f|$, то из теоремы Лебега о предельном переходе следует, что $f \in L_1(\nu_\Delta)$. В силу доказанного выше существует $\mathscr{S}$-интегрируемая внутренняя функция $G : X \to {}^*\mathbb{R}$, для которой выполняется равенство $\int_M |f_n|\, d\nu_\Delta = {}^\circ\|G\|$.

Чтобы доказать (3) для F и f, достаточно обосновать соотношение $\|F - G\| \approx 0$. Сначала заметим, что если $A \in \mathfrak{A}$ и $A \subset M$, то ввиду ω_1-насыщенности $A \subset M_n$ для некоторого номера n. Зафиксируем такое множество A и соответствующий ему номер n. Пусть $F_M := F \cdot \chi_M$. Тогда ν_Δ-почти всюду $f \approx G_M$ и ν_Δ-почти всюду $f \approx F_M$, следовательно, ν_Δ-почти всюду $F_{M_n} \approx G_{M_n}$. Но тогда $\|F - G\|_A \approx 0$, так как F и G являются $\mathscr{S}$-интегрируемыми.

Рассмотрим семейство формул $\Gamma_{m,n}(A) := \{A \in \mathfrak{A} \wedge M_n \subset A \wedge \|F - G\|_A \leq m^{-1}\}$. Для каждого натурального числа $N \in \mathbb{N}$ существует $A \in \mathfrak{A}$, для которого верна формула $\Gamma_{m,n}(A)$ при всех $n, m \leq N$. Следовательно, существует $A \in \mathfrak{A}$, для которого верны всех формулы $\Gamma_{m,n}(A)$. Но тогда $M \subset A$ и $\|F - G\|_A \approx 0$. Поскольку $F, G \in \mathscr{S}$, то будет $\|F - G\|_{X-A} \approx 0$. Следовательно, $\|F - G\| \approx 0$. $\rhd$

6.3.14. Пусть $p \in [1, +\infty)$, и рассмотрим внутреннее пространство $\mathscr{L}_p$, состоящее из функций $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ с нормой

$$\|F\|_p = {}^{\circ}\left(\Delta \sum_{\xi \in X} |F(\xi)|^p\right)^{1/p}.$$

Иногда применяются и более подробные обозначения для этого пространства и нормы в нем: $\mathscr{L}^X_{p,\Delta}$ и $\|\cdot\|_{p,\Delta}$. Для $F, G \in \mathscr{L}_p$ будем писать $F \underset{p}{\sim} G$, если $\|F - G\|_p \approx 0$. Пространство $\mathscr{L}^{\#}_p$ определяется так же, как и выше в параграфе 6.1. Для произвольного $A \in \mathfrak{A}$ выполняется $\|F\|_{p,A} = \|F \cdot \chi_A\|_p$. Обозначим символом $\mathscr{S}_p(M)$ подпространство $\mathscr{L}_p$, состоящее из функций $F \in \mathscr{L}_p$, для которых степень $|F|^p$ будет $\mathscr{S}_M$-интегрируемой. Для простоты будем писать $\mathscr{S}_p$, опуская M, когда это не ведет к путанице. Так как $\|F\|_{p,A} = \||F|^p\|_A$ для любой внутренней функции F и произвольного $A \in \mathfrak{A}$, то предложения 6.3.12 (1)–(3) остаются в силе, если заменить в них $\mathscr{L}$, $\mathscr{S}$ и $\|\cdot\|$ на $\mathscr{L}_p$, $\mathscr{S}_p$ и $\|\cdot\|_p$ соответственно.

Совершенно аналогичным образом вводятся комплексные пространства $\mathscr{L}_p$ и $\mathscr{S}_p$. Более того, если $F : X \to \mathbb{C}$ — внутренняя функция, то $F = \operatorname{Re} F + i \operatorname{Im} F$ и для каждого $A \in \mathfrak{A}$ будет

$$\|\operatorname{Re} F\|_{p,A}, \|\operatorname{Im} F\|_{p,A} \le \|F\|_{p,A} \le \|\operatorname{Re} F\|_{p,A} + \|\operatorname{Im} F\|_{p,A}.$$

Из этих неравенств следует, что $F \in \mathscr{L}_p\,(\mathscr{S}_p)$ в том и только в том случае, если $\operatorname{Re} F \in \mathscr{L}_p\,(\mathscr{S}_p)$ и $\operatorname{Im} F \in \mathscr{L}_p\,(\mathscr{S}_p)$.

Если $f : M \to \mathbb{F}$, где $\mathbb{F}$ — основное поле скаляров ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то $f \in L_p(\Xi)$ в том и только в том случае, если существует лифтинг $F : X \to {}^*\mathbb{F}$ функции f такой, что $F \in \mathscr{S}_p(M)$. Более того, $\|f\|_p = {}^{\circ}\|F\|_p$.

6.3.15. Примечания.

(1) Конструкция меры Лёба предложена в [405]. Материал, представленный в 6.3.1–6.3.10, хорошо известен, см. [5, 279]. Теорема 6.3.4 для случая конечной меры установлена Лёбом в [405]. Единственность в случае бесконечной меры, а также свойство 6.3.4 (4) установил Хенсон [330]; результаты 6.3.2 и 6.3.3 взяты из [330].

(2) Теорема 6.3.6 установлена Лёбом [405, 406]. Аналогичная характеризация имеется и для измеримых отображений со значениями в полном сепарабельном метрическом пространстве (см. [248, 405]). Данное в 6.3.7 определение $\mathscr{S}$-интегрируемости ввел Лёб [406]; несколько ранее Андерсон рассмотрел в [247] эквивалентное условие 6.3.7 (1).

(3) Понятие σ-конечного подпространства пространства Лёба ввел Е. И. Гордон в [47]. В этой же работе установлена теорема 6.3.13. В изложении 6.3.11–6.3.14 мы следуем монографии [317].

6.4. Гиперприближение пространств с мерой

Цель настоящего параграфа — показать, что всякое стандартное пространство с σ-конечной мерой погружается в пространство Лёба подходящего гиперконечного пространства с равномерной мерой. Некоторые рассуждения ниже предполагают, что используемый нестандартный универсум удовлетворяет принципу идеализации Нельсона.

6.4.1. Сейчас мы займемся доказательством того, что для каждого пространства $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ с σ-конечной мерой μ можно построить пространство Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$ и его σ-конечное подпространство $(M, S_\Delta^M, \nu_\Delta^M)$ такие, что $X \subset {}^*\mathfrak{X}$ и для каждого $p \in [1, \infty)$ существует изометрическое вложение $\jmath_p : L_p(\mu) \to L_p(\nu_\Delta^M)$. Далее, для любой функции $f \in L_p(\mu)$ внутренняя функция $F := {}^*f|_X$ содержится в $\mathscr{S}_p(M)$ и служит лифтингом $\jmath_p(f)$. Отсюда вытекает, в частности, что для любого $f \in L_p(\mu)$ (точнее, для любого представителя класса f)

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f\,d\mu = {}^\circ\Big(\Delta \sum_{\xi \in X} {}^*f(\xi)\Big).$$

Пусть (Y, Σ, μ) — стандартное пространство с мерой. Элемент ξ из ${}^*Y$ называют ***случайным***, если ξ не содержится ни в одном стандартном множестве нулевой меры. Итак, элемент $\xi \in {}^*Y$ случаен, если для любого стандартного $A \in \Sigma$ из $\mu(A) = 0$ следует $\xi \notin {}^*A$.

(1) *Почти все элементы ${}^*Y$ случайны. Точнее, существует внутреннее множество $B \in \Sigma$ такое, что $\mu({}^*Y - B) = 0$ и все элементы B случайны.*

$\lhd$ Пусть J — идеал множеств нулевой меры. По принципу идеализации существует гиперконечное множество $\mathscr{M} \subset {}^*J$ такое, что для любого стандартного $A \in J$ выполняется ${}^*A \in \mathscr{M}$. Пусть $X := \bigcup \mathscr{M}$. Тогда $X \in {}^*Y {}^*\mu(X) = 0$. Ясно, что если $\xi \in {}^*Y - X$, то ξ — случайный элемент, а $Y - X$ является множеством полной меры. $\rhd$

(2) *Пусть рассматриваемый нестандартный универсум удовлетворяет принципу направленности, а* $(X, \mathscr{Y}, \mu)$ *— стандартное пространство с мерой. Тогда существует такой элемент* $\xi \in {}^*X$*, что*

$$(\forall Y \in \mathscr{Y})(\mu(Y) = 0 \to \xi \in {}^*Y).$$

$\lhd$ Рассмотрим внутренний класс $\mathfrak{N} := \{Y \in \mathscr{Y} : {}^*\mu(Y) = 0\}$. Используя принцип направленности, можно показать, что найдется гиперконечное семейство $G := \{G_n : n < \lambda\}$, где $\lambda \in {}^*\mathbb{N}$, такое, что $G \subset \mathfrak{N}$ и ${}^*A \in \mathfrak{N} \leftrightarrow {}^*A \in G$. В силу принципа переноса $Y_0 := \bigcup\{G_n : n < \lambda\} \in {}^*\mathscr{Y}$. Следовательно, ${}^*\mu(Y_0) = 0$. Отсюда ${}^*\mu({}^*X - Y_0) = {}^*\mu({}^*X) = \mu(X)$, т. е. ${}^*X - Y_0 \neq \varnothing$ (предполагается, что $\mu(X) > 0$). Очевидно, любой элемент из ${}^*X - Y_0$ является искомым. $\rhd$

Понятие случайного элемента легко распространяется на случай τ-стандартного пространства с мерой.

Пусть τ — допустимый элемент и (Y, Σ, λ) — это τ-стандартное пространство с σ-конечной вероятностной мерой λ. Элемент $y \in Y$ назовем ***τ-случайным***, если для любого τ-стандартного множества $A \in \Sigma$ из $\lambda(A) = 0$ вытекает $y \notin A$.

В частности, если число τ стандартно, т. е. (Y, Σ, λ) — стандартное вероятностное пространство, то τ-случайный элемент $y \in {}^*Y$ случаен. Разумеется, τ-случайные элементы определяются и в стандартном пространстве (Y, Σ, λ) для нестандартного τ. Для τ-стандартного пространства предложение (1) остается в силе.

(3) *Существует внутреннее множество* $B \in \Sigma$ *такое, что* $\mu({}^*Y - B) = 0$ *и все элементы* B *являются* τ*-случайными.*

$\lhd$ Доказательство повторяет рассуждения из (1), однако вместо принципа идеализации следует применить релятивизированный принцип идеализации для τ-стандартных множеств. $\rhd$

6.4.2. Предположим, что (Y, Σ, λ) — произведение τ-стандартных вероятностных пространств $(Y_1, \Sigma_1, \lambda_1)$ и $(Y_2, \Sigma_2, \lambda_2)$. Легко видеть, что если $y = (y_1, y_2)$ — это τ-случайный элемент Y, то y_l — некоторый τ-стандартный элемент Y_l. Обратное неверно. Так, например, если $y_1 = y_2$ и мера диагонали $I_Y := \{(y, y) : y \in Y\}$ равна нулю, то элемент (y_1, y_2) не будет τ-случайным, даже если τ-случаен элемент y_1, так как (y_1, y_2) входит в τ-стандартное множество нулевой меры I_Y.

(1) *Если y_1 — это τ-случайный элемент Y_1, а y_2 — это (τ, y_1)-случайный элемент Y_2, то (y_1, y_2) будет τ-случайным элементом $Y = Y_1 \times Y_2$.*

$\lhd$ Пусть $A \subset Y_1 \times Y_2$ — такое τ-стандартное множество, что $\lambda(A) = 0$. Тогда для любого $z_1 \in Y_1$ множество $A_{z_1} := \{z_2 \in Y_2 : (z_1, z_2) \in A\}$ будет (τ, z_1)-стандартным. Обозначим $C := \{z_1 \in Y : \lambda_2(A_{z_1}) = 0\}$. Как видно, C — это τ-стандартное множество и $\lambda_1(C) = 1$ по теореме Фубини. По условию y_1 является τ-случайным элементом, поэтому $y_1 \in C$, следовательно, $\lambda_2(A_{y_1}) = 0$ и $y_2 \notin A_{y_1}$, поскольку множество A_{y_1} является (τ, y_1)-стандартным. Итак, $(y_1, y_2) \notin A$ и, стало быть, (y_1, y_2) — это τ-случайный элемент. $\rhd$

(2) Пусть (Y, Σ, λ) — некоторое τ-стандартное вероятностное пространство. Внутренняя последовательность $(y_n)_{n \in {}^*\mathbb{Z}}$ называется ***независимой последовательностью*** τ-случайных элементов в Y, если она представляет собой τ-случайный элемент τ-стандартного пространства $({Y^*}^{\mathbb{Z}}, \lambda^\infty)$, где λ^∞ — счетная степень меры λ.

6.4.3. Возьмем независимую последовательность $(y_n)_{n \in {}^*\mathbb{Z}}$ из τ-случайных элементов в Y. Нас будет интересовать представление

(1) $\int\limits_Y f\, d\lambda = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(y_k)$

для τ-стандартной функции f.

(2) *Пусть (Y, Σ, λ) — вероятностное пространство, а λ^∞ — счетная степень меры λ на множестве $Y^{\mathbb{Z}}$. Для любой интегрируемой функции $f : Y \to \mathbb{R}$ обозначим символом $\mathscr{A}_f$ множество тех последовательностей $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in Y^{\mathbb{Z}}$, для которых имеет место представление (1). Тогда $\lambda^\infty(\mathscr{A}_f) = 1$.*

$\lhd$ Пусть $T : Y^{\mathbb{Z}} \to Y^{\mathbb{Z}}$ — оператор сдвига — ***автоморфизм Бернулли***:

$$T((y_n)_{n \in \mathbb{Z}}) := (y'_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad y'_n := y_{n+1}.$$

Известно, что оператор T *эргодичен* (см. [97, глава 8, § 1, теорема 1]). Тем самым для каждой функции $\varphi \in L_1(\lambda^\infty)$ будет

$$\int\limits_{Y^{\mathbb{Z}}} \varphi\, d\lambda^\infty = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k \overline{y})$$

для почти всех $\overline{y} \in Y^{\mathbb{Z}}$. Пусть отображение $\Pi_0 : Y^{\mathbb{Z}} \to Y$ определяется формулой $\Pi_0((y_n)_{n\in\mathbb{Z}}) := y_0$. Из определения меры λ^∞ видно, что отображение Π_0 сохраняет меру, следовательно, $\int_{Y^{\mathbb{Z}}} \varphi\, d\lambda^\infty = \int_Y f\, d\lambda$, если $\varphi = f \circ \Pi_0$. Более того, $\varphi(T^k\overline{y}) = (f\circ\Pi_0)(T^k\overline{y}) = f(y_k)$, откуда и вытекает требуемое. $\triangleright$

(3) Теорема. *Если $(y_n)_{n\in{}^*\mathbb{Z}}$ — независимая последовательность τ-случайных элементов в Y, то для любой τ-стандартной функции $f : Y \to {}^*\mathbb{R}$, входящей в $L_1(\lambda)$, выполняется (1).*

$\triangleleft$ Применив релятивизированный принцип переноса к предложению (2), заключаем, что τ-стандартное множество $\mathscr{A}_f$ имеет полную меру, следовательно, любая независимая последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ τ-стандартных элементов содержится в $\mathscr{A}_f$. Тем самым выполнено (1). $\triangleright$

6.4.4. Теорема. *Если (Y,Σ,δ) — некоторое τ-стандартное пространство с конечной мерой δ, то существует внутреннее гиперконечное множество $Y_0 \subset Y$ такое, что для любой τ-стандартной интегрируемой функции $f : Y \to {}^*\mathbb{R}$ выполняется равенство*

$$\int\limits_Y f\, d\delta \overset{\tau}{\approx} \frac{\delta(Y)}{|Y_0|} \sum_{y\in Y_0} f(y).$$

$\triangleleft$ Отметим, прежде всего, что $\delta(Y)$ — это τ-стандартное гипердействительное число, не являющееся, вообще говоря, доступным, а конечность δ означает лишь справедливость соотношения $\delta(Y) \neq \infty$. Заменим пространство (Y,Σ,δ) на вероятностное пространство (Y,Σ,λ), полагая $\lambda := \frac{1}{\delta(Y)}\delta$. Тогда между интегралами по δ и λ имеется очевидная связь:

$$\int\limits_Y f\, d\delta = \delta(Y) \int\limits_Y f\, d\lambda.$$

Пусть $\overline{y} := (y_n)_{n\in{}^*\mathbb{Z}}$ — независимая последовательность τ-случайных элементов из (Y,Σ,λ), а N — некоторое $(\tau,\overline{y})$-бесконечно большое гипернатуральное число. Тогда поскольку последовательность в правой части формулы 6.4.3 (1) $(\tau,\overline{y})$-стандартна, то, используя 4.6.4 (1), приходим к соотношению

$$\int\limits_Y f\, d\lambda \overset{(\tau,\overline{y})}{\approx} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(y_k).$$

Положим $Y_0 := \{y_0, \dots, y_{N-1}\}$. Остается воспользоваться отмеченной выше связью между интегралами по δ и λ и тем фактом, что соотношение $\alpha \overset{(\tau,\overline{y})}{\approx} \beta$ влечет $\alpha \overset{\tau}{\approx} \beta$ (см. 4.6.2). $\triangleright$

6.4.5. Рассмотрим вновь стандартное пространство $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ с σ-конечной мерой μ. Итак, существует возрастающая последовательность множеств $\mathfrak{X}_n \in \Omega$ такая, что $\mu(\mathfrak{X}_n) < +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\mathfrak{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}_n$. Пусть Ω_n обозначает σ-алгебру $\{A \cap \mathfrak{X}_n : A \in \Omega\}$, а μ_n — это сужение μ на Ω_n. Тогда для любой интегрируемой функции $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ будет

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{X}_n} f_n\,d\mu_n,$$

где $f_n := f|_{\mathfrak{X}_n}$.

Теорема. *Существуют внутреннее гиперконечное множество $X \subset {}^*\mathfrak{X}$ и гипердействительное число $\Delta \in {}^*\mathbb{R}$ такие, что*

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f\,d\mu = {}^{\circ}\!\left(\Delta \sum_{\xi\in X} {}^*f(\xi)\right)$$

для любой стандартной функции $f \in L_1(\mu)$.

$\triangleleft$ Пусть τ — бесконечно большое гипернатуральное число.

Положим $(Y, \Sigma, \delta) := ({}^*\mathfrak{X}_\tau, {}^*\Omega_\tau, {}^*\mu_\tau)$. Тогда (Y, Σ, δ) удовлетворяет условиям теоремы 6.4.4. Как видно, ${}^*f_\tau$ — это τ-стандартная интегрируемая функция на ${}^*\mathfrak{X}_\tau$. Так как $Y_0 \subset {}^*\mathfrak{X}_\tau$ (определение Y_0 см. в 6.4.4), то ${}^*f_\tau|_{Y_0} = {}^*f|_{Y_0}$. Заметим также, что из отмеченного перед формулировкой предельного соотношения получаем

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f\,d\mu = {}^{\circ}\!\!\int\limits_{{}^*\mathfrak{X}_\tau} {}^*f_\tau\,d\mu_\tau.$$

Требуемое вытекает теперь из последнего соотношения и теоремы 6.4.4, если положить $\Delta := \delta(Y)|Y_0|^{-1}$ и $X := Y_0$ и учесть, что $\int_{\mathfrak{X}} f\,d\mu$ — стандартное число. $\triangleright$

6.4.6. Ниже нам потребуются некоторые факты из теории нормированных булевых алгебр. Все эти сведения имеются в книге [29].

Пусть $\mathscr{B}$ — булева алгебра и m — строго положительная конечно-аддитивная мера на $\mathscr{B}$. Тогда $\mathscr{B}$ удовлетворяет *условию счетности антицепей* или, как еще говорят, имеет *счетный тип*; т. е. каждое подмножество $E \subset \mathscr{B}$, состоящее из попарно дизъюнктных элементов, не более чем счетно. Всякая σ-алгебра счетного типа является полной. Полную булеву алгебру со строго положительной счетно-аддитивной мерой называют *нормированной*.

Пусть $(\mathscr{B}_1, m_1)$ и $(\mathscr{B}_2, m_2)$ — нормированные булевы алгебры. Каждый гомоморфизм $\varphi : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$, сохраняющий меру, является *вполне аддитивным*, т. е. $\varphi(\sup E) = \sup \varphi(E)$ для любого $E \subset \mathscr{B}_1$. Отсюда вытекает, что $\varphi(\mathscr{B}_1)$ — правильная подалгебра $\mathscr{B}_2$, т. е. точные верхние границы произвольного множества $E \subset \varphi(\mathscr{B}_1)$ в алгебрах $\varphi(\mathscr{B}_1)$ и $\mathscr{B}_2$ совпадают.

Предположим теперь, что (Y, Σ, δ) — пространство с конечной мерой и $n(\Sigma) := \{c \in \Sigma : \delta(c) = 0\}$. Тогда $\overline{\Sigma} := \Sigma / n(\Sigma)$ — нормированная булева алгебра со строго положительной мерой $\overline{\delta}$ такой, что $\overline{\delta}([c]) = \delta(c)$, где $[c]$ — класс эквивалентности элемента $c \in \Sigma$ в $\overline{\Sigma}$. Нормированную алгебру $\overline{\Sigma}$ принято называть *лебеговской алгеброй* пространства (Y, Σ, δ). С каждой измеримой функцией $f : Y \to \mathbb{R}$ свяжем монотонно возрастающее, непрерывное справа семейство $(e_f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ элементов $\overline{\Sigma}$, называемое *характеристикой* или *разложением единицы* для f и определяемое формулой $e_t^f := [\{y : f(y) \leq t\}]$. Заметим, что $\sup(e_t^f) = \mathbf{1}_{\mathscr{B}}$ и $\inf(e_t^f) = \mathbf{0}_{\mathscr{B}}$.

(1) *Измеримая функция f интегрируема в том и только в том случае, если интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} t\, d\overline{\delta}(e_f^t)$ сходится и*

$$\int\limits_Y f\, d\delta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t\, d\overline{\delta}(e_f^t).$$

$\lhd$ Это простой и хорошо известный факт, см., например, [29, глава VI, § 3]. $\rhd$

(2) *Если (Y, Σ, δ) — стандартное пространство с конечной мерой, $Y_0 \subset {}^*Y$ удовлетворяет условиям теоремы 6.4.4 (со стандартным τ), $\lambda := \delta(Y) \cdot |Y_0|^{-1}$ и $(Y_0, S_\lambda, \nu_\lambda)$ — соответствующее пространство Лёба, то отображение $\psi : \overline{\Sigma} \to \overline{S}_\lambda$, определяемое форму-*

лой $\psi([c]) = [{}^*c \cap Y_n]$ $(c \in \Sigma)$, представляет собой сохраняющий меру мономорфизм.

$\lhd$ Следует немедленно из теоремы 6.4.4, если применить указанную там формулу к характеристическим функциям множеств из Σ. $\rhd$

(3) *Пусть выполнены условия предыдущего утверждения 6.4.6 (2). Предположим дополнительно, что $h \in L_1(\delta)$ и $H := {}^*h|_{Y_0}$, а функция $\widetilde{h} : Y_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ такова, что $\widetilde{h}(y) = {}^{\circ *}h(y)$ для всех $y \in Y_0$. Тогда $\widetilde{h} \in L_1(\nu_\lambda)$, $\int_Y h\,d\delta = \int_{Y_0} \widetilde{h}\,d\nu_\lambda$ и функция H будет $\mathscr{S}$-интегрируемой.*

$\lhd$ Для любого стандартного $t \in \mathbb{R}$ положим $C_t := \{y \in Y : h(y) \le t\}$, $c_t := [C_t] \in \overline{\Sigma}$, $E_t := \{y \in Y_0 : \widetilde{h}(y) \le t\}$ и $e_t := [E_t] \in \overline{S}_\lambda$. Тогда $(c_t)_{t \in \mathbb{R}}$ — разложение единицы функции h в $\overline{\Sigma}$ и $(e_t)_{t\in\mathbb{R}}$ — разложение единицы, соответствующее элементу $\widetilde{h}$. Так как мономорфизм $\psi : \overline{\Sigma} \to \overline{S}_\lambda$, определенный в (2), сохраняет точные границы, то, полагая $\widetilde{e}_t := \psi(c_t)$, получим, что $(\widetilde{e}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ — разложение единицы. Из принципа переноса видно, что $\widetilde{e}_t = \{y \in Y_0 : {}^*h(y) \le t\}$. Используя определение $\widetilde{h}$, мы получим $e_{t_1} < \widetilde{e}_{t_2}$ и $\widetilde{e}_{t_1} < e_{t_2}$ для любых стандартных $t_1 < t_2$. Отсюда и из непрерывности справа семейств $(e_t)_{t\in\mathbb{R}}$ и $(\widetilde{e}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ вытекает $e_t = \widetilde{e}_t$ для любого t. Теперь из (1) получаем первые два утверждения требуемого предложения, так как ψ сохраняет меру. Третье утверждение вытекает из 6.3.7 (1). $\rhd$

6.4.7. Из 6.4.1 видно, что для любого стандартного $A \in \Omega$ выполняется формула

$$\mu(A) = {}^\circ(\Delta \cdot |X \cap {}^*A|).$$

(Здесь, как обычно, ${}^\circ t := +\infty$, если $t \in {}^*\mathbb{R}$ и $t \approx +\infty$.) Отсюда и из соотношения $\mu({}^*\mathfrak{X}_n) < +\infty$ вытекает, что тройка $\Xi = (M, S_\Delta^M, \nu_\Delta^M)$, где $M_n := X \cap {}^*\mathfrak{X}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, будет σ-конечным подпространством пространства Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$.

Теорема. *Пусть $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ — стандартное пространство с σ-конечной мерой, причем $\mathfrak{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}_n$ и $\mu(\mathfrak{X}_n) < +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $X \subset {}^*\mathfrak{X}$ и $\Delta \in {}^*\mathbb{R}$ удовлетворяют условиям теоремы 6.4.5. Положим $M_n := X \cap {}^*\mathfrak{X}_n$ и $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Тогда для любого $p \in [1, +\infty)$ и произвольной $f \in L_p(\mu)$ внутренняя функция $F(f) := {}^*f|_X$ входит в $\mathscr{S}_p(M)$ и $\jmath_p(f) = {}^\circ F(f)$, то*

$\jmath_p : L_p(\mu) \to L_p(\nu_\Delta^M)$ *— изометрическое вложение. В частности, если* $f \in L_1(\mu)$, *то*

$$\int_{\mathfrak{X}} f\,d\mu = \int_M \jmath_1(f)\,d\nu_\Delta^M.$$

$\lhd$ Достаточно провести доказательство при $p = 1$ и $f \geq 0$.

Рассмотрим пространство Лёба $(M_n, S_{\Delta_n}, \nu_{\Delta_n})$ с конечной мерой, где $\Delta_n = \mu(\mathfrak{X}_n) \cdot |M_n|^{-1} \approx \Delta \cdot |M_n| \cdot |M_n|^{-1} = \Delta$. При этом выполнены условия предложения 6.4.6 (3), если заменить в нем (Y, Σ, δ) на $(\mathfrak{X}_n, \Omega_n, \mu_n)$ и Y_0 на M_n.

Пусть $f_n := f \cdot \chi_{\mathfrak{X}_n} : \mathfrak{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ и $\overline{f}_n := f|_{\mathfrak{X}_n}$. В силу 6.4.6 (3) ${}^*f|_{M_n}$ служит $\mathscr{S}$-интегрируемым лифтингом функции ${}^\circ({}^*f|_{M_n})$ и выполняются равенства

$$\int_{\mathfrak{X}_n} \overline{f}_n\,d\mu_n = \int_{M_n} {}^\circ({}^*f|_{M_n})\,d\nu_{\Delta_n} =$$
$$= {}^\circ\!\left(\Delta_n \sum_{\xi \in M_n} {}^*\overline{f}_n(\xi)\right) = {}^\circ\!\left(\Delta_n \sum_{\xi \in X} {}^*f_n(\xi)\right).$$

Последнее равенство справедливо ввиду того, что $\frac{\Delta}{\Delta_n} \approx 1$ и ${}^*f_n(\xi) = 0$ при $\xi \in X - M_n$. Из сказанного следует также, что ${}^*f_n|_X$ — это $\mathscr{S}_M$-интегрируемый лифтинг функции $\jmath_1(f_n)$ и, стало быть, верно равенство $\int_{\mathfrak{X}} f_n\,d\mu = \int_M \jmath_1(f_n)\,d\nu_\Delta^M$. Поскольку последовательность $(\jmath_1(f_n))$ монотонно возрастает и сходится поточечно к $\jmath_1(f)$, то предельный переход в последнем равенстве приводит к выводу о том, что это же равенство справедливо для f и $\jmath_1(f) \in L_1(\nu_\Delta)$. По теореме 6.4.5 имеем

$${}^\circ\!\left(\Delta \sum_{\xi \in X} |{}^*f_n(\xi) - {}^*f(\xi)|\right) = \int_{\mathfrak{X}} |f_n - f|\,d\mu \to 0.$$

Используя замкнутость $\mathscr{S}(M)^\#$ в $\mathscr{L}^\#$ (см. 6.3.12 (3)), заключаем теперь, что ${}^*f|_X$ входит в $\mathscr{S}(M)$ и, следовательно, служит $\mathscr{S}_M$-интегрируемым лифтингом функции $\jmath_1(f)$. $\rhd$

6.4.8. Для многих конкретных пространств (X, Ω, μ) с σ-конечной мерой существуют вложения $L_p(\mu)$ в $L_p(\nu_\Delta^M)$, отличные от описанного выше вложения, связанного с σ-конечным подпространством

$(M, S_\Delta^M, \nu_\Delta^M)$ подходящего пространства Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$. Большинство из них основаны на построении отображения $\varphi : M \to \mathfrak{X}$, сохраняющего меру. Такое отображение φ индуцирует для каждого $p \in [1, \infty)$ вложение $\jmath_p^\varphi : L_p(\mu) \to L_p(\nu_\Delta^M)$ по формуле $\jmath_p^\varphi(f) := f \circ \varphi$ $(f \in L_p(\mu))$. По теореме 6.3.13 и ее следствию 6.3.14 $\jmath_p^\varphi(f)$ имеет лифтинг $F \in \mathscr{S}_p(M)$, который мы называем лифтингом f. В частности, верно следующее утверждение.

(1) *Если $f \in L_1(\mu)$ и F — это $\mathscr{S}_M$-интегрируемый лифтинг функции f, то*

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f\,d\mu = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{\xi \in X} F(\xi)\right).$$

Отметим также, что представляет интерес задача построения F при данном f. В предыдущих пунктах эта задача была решена весьма простым специальным образом, а именно: для подходящего гиперконечного множества $X \subset {}^*\mathfrak{X}$ выполняется

(2) $F = {}^*f|_X$ для всех $f \in L_1(\mu)$.

В общей ситуации равенство (2) не имеет места, даже если $X \subset {}^*\mathfrak{X}$. Ниже мы рассмотрим один вид вложения, для которого (2) выполняется для достаточно широкого класса интегрируемых функций. Но сначала разберем хорошо известный пример.

(3) Пусть $\mathfrak{X} := [0, 1]$ и μ — мера Лебега на $\mathfrak{X}$. Зафиксируем произвольное гипердействительное число $\Delta \approx 0$ и положим $N := [\Delta^{-1}]$ и $X := \{k\Delta : k = 1, \dots, N\}$. В этом случае пространство Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$ будет пространством с конечной мерой: $\nu_\Delta(X) = 1$, поэтому $M = X$. В качестве отображения $\varphi : X \to \mathfrak{X}$ возьмем st (напомним, что $\mathrm{st}(k\Delta) = {}^\circ(k\Delta)$). Можно показать, что множество $\mathscr{A} \subset [0, 1]$ будет измеримым по Лебегу в том и только в том случае, если $\mathrm{st}^{-1}(\mathscr{A})$ измеримо по Лёбу и при этом $\mu(\mathscr{A}) = \nu_\Delta(\mathrm{st}^{-1}(\mathscr{A}))$. Не для всякой интегрируемой по Лебегу функции f выполняется равенство (2). В этом можно легко убедиться, если взять $\Delta \in {}^*\mathbb{Q}$ и рассмотреть функцию Дирихле. Однако если f интегрируема по Риману на $[0, 1]$ и F определено как в (2), то выполняется (1) в силу 2.3.16. Покажем, что в этом случае $F := {}^*f|_X$ действительно является $\mathscr{S}$-интегрируемым лифтингом функции f.

Поскольку f ограничена, а внутренняя равномерная мера ν_Δ конечна, то F удовлетворяет условию 6.3.7 (1) и, следовательно, является $\mathscr{S}$-интегрируемой. Если $\mathscr{A}$ — множество точек разрыва функции f, то $\mu(\mathscr{A}) = 0$, так как f интегрируема по Риману. Если $k\Delta \in X - \mathrm{st}^{-1}(\mathscr{A})$, то f непрерывна в точке ${}^{\circ}(k\Delta)$, стало быть, ${}^{*}f(k\Delta) \approx f({}^{\circ}(k\Delta))$. Таким образом, ${}^{\circ}F(\xi) = f(\mathrm{st}(\xi))$ для почти всех $\xi \in X$, поэтому F служит лифтингом функции $f \circ \mathrm{st}$, а это означает, что F — лифтинг f.

6.4.9. Предположим теперь, что $\mathfrak{X}$ — сепарабельное локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, μ — борелевская мера на $\mathfrak{X}$, конечная на компактных множествах (μ будет регулярной из-за сепарабельности $\mathfrak{X}$) и Ω — пополнение борелевской σ-алгебры относительно меры μ. Предположим, далее, что $\mathfrak{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}_n$, где $\mathfrak{X}_n$ — компакт и $\mu(\mathfrak{X}_n) < +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathrm{nst}\,({}^{*}\mathfrak{X}) = \bigcup {}^{*}\mathfrak{X}_n$. Напомним, что отображение $\mathrm{st} : \mathrm{nst}\,({}^{*}\mathfrak{X}) \to \mathfrak{X}$ вводится формулой $\mathrm{st}(x) \approx x$ ($x \in \mathrm{nst}\,({}^{*}\mathfrak{X})$) (см. 4.3.4 и 4.3.6).

(1) Пусть X — гиперконечное множество, $\jmath : X \to {}^{*}\mathfrak{X}$ — внутреннее отображение, $\Delta \in {}^{*}\mathbb{R}$ и $M := \jmath^{-1}(\mathrm{nst}\,({}^{*}\mathfrak{X}))$.

Тройку $(X, \jmath, \Delta)$ назовем *гиперприближением* или *гиперконечной реализацией* пространства с мерой $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ при условии, что отображение $\varphi : (M, S_\Delta^M, \nu_\Delta^M) \to (\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$, определяемое как $\varphi := \mathrm{st} \circ \jmath|_M$, измеримо и сохраняет меру.

Заметим, что $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \jmath^{-1}({}^{*}\mathfrak{X}_n)$, поэтому в этой ситуации $(M, S_\Delta^M, \nu_\Delta^M)$ представляет собой σ-конечное подпространство пространства Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$.

Ниже сформулируем одно достаточное условие, когда функция $F := {}^{*}f \circ \jmath$ будет $\mathscr{S}_M$-интегрируемым лифтингом f. Для этой цели введем следующее условие, означающее, что функция f достаточно быстро убывает на бесконечности:

$$\textbf{(2)}\quad (\forall B \in {}^{*}\mathscr{P}(X))\Big(B \subset X - M \to \Delta \sum_{x\in B} |{}^{*}f(\jmath(x))| \approx 0\Big).$$

6.4.10. *Пусть $(X, \jmath, \Delta)$ — произвольное гиперприближение пространства $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$. Предположим, что функция $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ ограничена, μ-интегрируема, μ-почти всюду непрерывна и удовлетворяет условию 6.4.9 (2). Тогда функция $F := {}^{*}f \circ \jmath$ служит $\mathscr{S}_M$-интегрируемым лифтингом f и, следовательно,*

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f\, d\mu = {}^{\circ}\Big(\Delta \sum_{x\in X} {}^{*}f(\jmath(x))\Big).$$

◁ Покажем сначала, что F — это $\mathscr{S}_M$-интегрируемая функция. Условие 6.3.11 (2) выполняется из-за ограниченности f, а 6.3.11 (3) следует из условия 6.4.9 (2). Чтобы проверить 6.3.11 (1), обозначим $M_n := \jmath^{-1}({}^*\mathfrak{X}_n)$ и заметим, что ${}^*f \circ \jmath|_{M_n}$ является $\mathscr{S}$-интегрируемой функцией. Это следует из ограниченности f и конечности $\nu_\Delta(M_n)$ (см. 6.3.7 (1)). Рассуждая так же, как и в конце 6.4.8 (3), приходим к выводу о том, что ${}^*f \circ \jmath|_{M_n}$ — лифтинг функции $f|_{\mathfrak{X}_n}$, поэтому согласно 6.4.6 (2) будет

$$\int\limits_{\mathfrak{X}_n} |f|\,d\mu = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{x\in M_n} |{}^*f \circ \jmath|(x)\right) \leq \int\limits_{\mathfrak{X}} |f|\,d\mu.$$

Отсюда вытекает существование стандартной константы C такой, что для любого внутреннего множества $\mathscr{D} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ выполняется $\Delta \sum_{x\in\mathscr{D}} |F|(x) < C$. Привлекая счетное насыщение нестандартного универсума, получаем справедливость последнего неравенства для некоторого внутреннего множества $\mathscr{D} \supset M$. Требование 6.3.11 (1) следует из условия 6.4.9 (2) для множества $B := X - \mathscr{D}$. Так как ${}^*f \circ \jmath|_{M_n}$ — лифтинг функции $f|_{\mathfrak{X}_n}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, то ${}^*f \circ \jmath$ — лифтинг функции f. ▷

Аналогичное утверждение, разумеется, имеет место для ограниченной μ-почти всюду непрерывной функции $f \in L_p(\mu)$, где $p \in [1, \infty)$.

6.4.11. Рассмотрим пример. Пусть Ω — это σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств на вещественной прямой $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$, а μ — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Выберем гипернатуральное число $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ и гипердействительное число $\Delta \in {}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$ так, чтобы $\Delta \approx 0$ и $N\Delta \approx +\infty$. Для удобства обозначений предположим, что $N = 2L + 1$, и рассмотрим гиперконечное множество $X := \{k\Delta : k = -L, \dots, L\}$. Пусть $\mathfrak{X}_n := [-n, n]$ и $\jmath : X \to {}^*\mathbb{R}$ — тождественное вложение. Тогда $M_n = X \cap {}^*[-n, n]$ и $M = X \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^*[-n, n]$.

(1) Нетрудно видеть, что условие 6.4.9 (2) можно записать в виде

$$(\forall k, l)\left(|k| < |l| < L \wedge |k|\Delta \approx +\infty \to \Delta \sum_{n=k}^{l} |{}^*f(n\Delta)| \approx 0\right).$$

(2) Это соотношение верно для любых L, если только $L\Delta \approx +\infty$, поэтому оно равносильно равенству

$$\lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ A \to \infty}} \Delta \sum_{|k| > \frac{A}{\Delta}} |f(k\Delta)| = 0.$$

(3) Для функций, абсолютно интегрируемых по Риману, последнее равносильно, в свою очередь, предельному соотношению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{h \to 0} h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh).$$

Хорошо известно, что класс таких функций достаточно широк.

6.4.12. Примечания.

(1) Основные результаты этого параграфа, включая понятия σ-конечного подпространства пространства Лёба и $\mathscr{S}_M$-интегрируемости, принадлежат Е. И. Гордону [47, 317]. Значительная часть применений мер Лёба относится к теории вероятностей и в этой связи наибольшее внимание уделялось конечным мерам Лёба.

Конечные меры Радона, индуцированные мерами Лёба, а также отображение st изучались в [248] и других публикациях (см. обзор [279] и монографию [5]). Однако вопрос о том, когда $\jmath \circ {}^*f|_X$ служит лифтингом функции f, в этих источниках не рассматривался. Другую конструкцию лифтинга на интервале $[0,1]$ можно найти в [279]. Изучение σ-конечных мер Лёба существенно для наших дальнейших целей, так как в следующей главе конструкция меры Лёба применяется к изучению меры Хаара на локально компактной абелевой группе, а такие меры обычно не являются конечными.

(2) Условие 6.4.9 (2) выполняется автоматически для функций с компактным носителем; оно также излишне для пространств с конечной мерой. Недостаток этого условия состоит в том, что оно формулируется в терминах, зависящих от гиперприближения, хотя иногда (см. 6.4.11) может быть переформулировано в стандартных терминах. Более того, часто гиперприближение можно выбрать так, что условие 6.4.9 (2) окажется излишним.

(3) Еще раз вернемся к примеру 6.4.11 и выберем L и Δ следующим образом. Зафиксируем бесконечно большое $\tau \in {}^*\mathbb{R}$ и возьмем

$\Delta \overset{\tau}{\approx} 0$ и $L = \left[\frac{\tau}{\Delta}\right]$. Как и выше, тройка $(X, \jmath, \Delta)$ будет гиперприближением пространства с мерой $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$, где $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$, а Ω — это σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств и μ — мера Лебега. Предложение 4.6.13 показывает, что 6.4.10 выполняется для любой функции, абсолютно интегрируемой по Риману на $\mathbb{R}$ и непрерывной почти всюду. Если f — такая функция, то ${}^*f \circ \jmath$ будет $\mathscr{S}_M$-интегрируемой. Это можно без труда получить из $\mathscr{S}$-интегрируемости ${}^*f|_{{}^*[-n,n]} \circ \jmath$ при всех $n \in \mathbb{N}$, равенства из 6.4.10 и замкнутости $\mathscr{S}_M^\#$ в $\mathscr{L}^\#$ (см. доказательство теоремы 6.4.7).

(4) Соловей [475] (см. также [74]) ввел понятие случайного числа как числа, не принадлежащего никакому множеству нулевой меры, имеющему конструктивное описание в смысле Гёделя. Он удачно применил это понятие к доказательству того, что некоторые утверждения теории меры независимы от аксиом ZFC. В теории сложности А. Н. Колмогорова также встречается аналогичное понятие (принадлежащее Мартин-Лёфу [422]) случайной 0–1 последовательности как последовательности, не лежащей ни в одном множестве нулевой меры, имеющем конструктивное описание в смысле А. А. Маркова. Аналогичные понятия случайного элемента для $[0, 1]$ с мерой Лебега и независимой последовательности случайных элементов в этом случае были введены в [517], где была доказана в этой ситуации теорема 6.4.4. Доказательство использует закон больших чисел. Для стандартного пространства с конечной мерой теорема 6.4.4 была установлена в [327] с помощью совершенно иных соображений.

6.5. Гиперприближение интегральных операторов

В этом параграфе рассматривается вопрос о возможности приближения интегрального оператора гиперконечномерным оператором.

6.5.1. Напомним, что для гиперконечного множества X, стандартного $p \in [1, \infty]$ и $\Delta \in {}^*\mathbb{R}_+$ символом $\mathscr{L}_{p,\Delta}^X$ обозначается внутреннее пространство функций $F : X \to {}^*\mathbb{F}$ (где $\mathbb{F}$ — одно из полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с нормой

$$\|F\|_{p,\Delta} := {}^\circ\left(\Delta \sum_{\xi \in X} |F(\xi)|^p\right)^{1/p} \quad \left(F \in \mathscr{L}_{p,\Delta}^X\right).$$

Это пространство гиперконечномерно и $\dim(\mathscr{L}^X_{p,\Delta}) = |X|$. Нестандартная оболочка $(\mathscr{L}^X_{p,\Delta})^{\#}$ — внешнее банахово пространство, несепарабельное при условии, что $|X|$ — бесконечное гипернатуральное число. Для $p = 2$ норма $\|F\|_{2,\Delta}$ порождается скалярным произведением $(F, G) = \Delta \sum_{\xi \in X} F(\xi)\overline{G}(\xi)$, следовательно, $(\mathscr{L}^X_{2,\Delta})^{\#}$ — несепарабельное гильбертово пространство. Как и выше, мы пишем $\mathscr{L}_p$ вместо $\mathscr{L}^X_{p,\Delta}$, если это не приводит к путанице.

Если $(M, S^M_\Delta, \nu^M_\Delta)$ — это σ-конечное подпространство пространства Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$, то $\mathscr{S}_p(M)^{\#}$ — замкнутое подпространство $\mathscr{L}^{\#}_p$ (см. 6.3.12 (3)). Из 6.3.14 видно, что это подпространство изоморфно $L_p(\nu^M_\Delta)$. Изоморфизм устанавливается путем сопоставления каждой функции $f \in L_p(\nu^M_\Delta)$ класса эквивалентности $F^{\#}$ ее лифтинга $F \in \mathscr{S}_p(M)$. На этом основании будем считать в дальнейшем, что $L_p(\nu^M_\Delta) \subset \mathscr{L}^{\#}_p$.

Предположим, что $(\mathfrak{X}_k, \Omega_k, \mu_k)$ для $k := 1, 2$ — стандартные пространства с σ-конечными мерами. Допустим также, что заданы два пространства Лёба $(X_k, S_{\Delta_k}, \nu_{\Delta_k})$, их σ-конечные подпространства $(M_k, S^{M_k}_{\Delta_k}, \nu^{M_k}_{\Delta_k})$ и вложения

$$\jmath^{M_k}_{p_k} : L_{p_k}(\mu_k) \to L_{p_k}(\nu^{M_k}_{\Delta_k}) \subset \mathscr{L}^{\#}_{p_k}$$

для некоторых $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$.

Пусть $\mathscr{A} : L_{p_1}(\mu_1) \to L_{p_2}(\mu_2)$ — ограниченный линейный оператор. Доступный внутренний оператор $A : \mathscr{L}_{p_1} \to \mathscr{L}_{p_2}$ называют *гиперприближением* или, более подробно, *гиперконечномерным приближением* оператора $\mathscr{A}$, если для каждого $f \in \mathscr{L}_{p_1}(\mu_1)$ выполняется $\|G - A(F)\|_{p_2,\Delta_2} \approx 0$, где $F \in \mathscr{L}_{p_1}$ — лифтинг f и $G \in \mathscr{L}_{p_2}$ — лифтинг $\mathscr{A}(f)$. В подобных случаях широко применяют термины типа «A гиперприближает $\mathscr{A}$».

Пусть, как и в 6.4.8, вложение $\jmath^M_p$ индуцируется некоторым внутренним отображением $\jmath : X \to {}^*\mathfrak{X}$ и лифтингом f служит функция ${}^*f \circ \jmath$, т. е. последнюю можно рассматривать как таблицу значений f в узлах, образующих гиперконечное множество $\jmath(X)$ (равенство из 6.4.10 показывает, что именно так и естественно поступать). В этом случае оператор A приближает $\mathscr{A}$, если он переводит таблицу функции f в вектор, бесконечно близкий к таблице образа $\mathscr{A}(f)$ функции f.

(1) *Внутренний оператор $A : \mathscr{L}_{p_1} \to \mathscr{L}_{p_2}$ гиперприближает оператор $\mathscr{A} : L_{p_1}(\mu_1) \to L_{p_2}(\mu_2)$ в том и только в том случае,* *если коммутативна диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} L_{p_1}(\mu_1) & \xrightarrow{\mathscr{A}} & L_{p_2}(\mu_2) \\ {\scriptstyle \jmath_{p_1}^{M_1}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \jmath_{p_2}^{M_2}} \\ \mathscr{L}_{p_1}^{\#} & \xrightarrow{A^{\#}} & \mathscr{L}_{p_2}^{\#}. \end{array}$$

(2) *Допустим, что линейная оболочка множества* $\mathfrak{M} \subset L_{p_1}(\mu_1)$ *плотна в* $L_{p_1}(\mu_1)$. *Если оператор* A *гиперприближает оператор* $\mathscr{A}$ *на* $\mathfrak{M}$, *то* A *— гиперприближение* $\mathscr{A}$.

$\lhd$ Пусть $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$ обозначает линейную оболочку множества $\mathfrak{M}$. По условию диаграмма из (1) коммутативна, если заменить в ней $L_{p_1}(\mu_1)$ на $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$. Но тогда коммутативна и исходная диаграмма, ибо множество $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$ плотно в $L_{p_1}(\mu_1)$. $\rhd$

6.5.2. Напомним, что оператор $\mathscr{A}_k : L_{p_1}(\mu_1) \to L_{p_2}(\mu_2)$ называют ***интегральным***, если существует измеримая функция $k : \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \to \mathbb{F}$ такая, что для каждого $f \in L_{p_1}(\mu_1)$ значение $g := \mathscr{A}_k(f)$ представляет собой функцию, вычисляемую по формуле

$$g(s) = \int\limits_{\mathfrak{X}_1} k(s,t) f(t)\, d\mu_1(t).$$

При этом функцию $k(\cdot,\cdot)$ называют ***ядром*** интегрального оператора $\mathscr{A}_k$.

То обстоятельство, что $\mathscr{A}_k$ — интегральный оператор с ядром k, записывается короче в виде

$$\mathscr{A}_k(f)(s) = \int\limits_{\mathfrak{X}_1} k(s,t) f(t)\, d\mu_1(t) \quad (f \in L_{p_1}(\mu_1)).$$

Рассмотрим интегральный оператор $\mathscr{A}_k : L_{p_1}(\mu_1) \to L_{p_2}(\mu_2)$. Естественным образом возникает вопрос о том, можно ли построить гиперприближение оператора $\mathscr{A}$, используя лифтинг ядра k, если последний существует. Здесь следует иметь в виду, что, вообще говоря,

$$\left(M_1 \times M_2, S_{\Delta_1}^{M_1} \otimes S_{\Delta_2}^{M_2}, \nu_{\Delta_1}^{M_1} \otimes \nu_{\Delta_2}^{M_2}\right) \neq \left(M_1 \times M_2, S_{\Delta_1\Delta_2}^{M_1\times M_2}, \nu_{\Delta_1\Delta_2}^{M_1\times M_2}\right).$$

(Правая часть этого соотношения представляет собой σ-конечное подпространство пространства Лёба $(X_1 \times X_2, S^{X_1\times X_2}_{\Delta_1\Delta_2}, \nu^{X_1\times X_2}_{\Delta_1\Delta_2})$.)

Известно (см. [248]), что если M_1 и M_2 — пространства с конечными мерами Лёба (в этом случае можно считать M_1 и M_2 внутренними множествами), то $S^{M_1}_{\Delta_1} \otimes S^{M_2}_{\Delta_2} \subset S^{M_1\times M_2}_{\Delta_1\Delta_2}$, причем тождественное вложение сохраняет меру.

Этот же результат остается в силе для σ-конечных подпространств пространств Лёба, так как σ-конечное подпространство является дизъюнктным объединением счетного семейства пространств Лёба с конечными мерами.

Таким образом, $L_r(\nu^{M_1}_{\Delta_1} \otimes \nu^{M_2}_{\Delta_2})$ вложено с сохранением нормы в $L_r(\nu^{M_1\times M_2}_{\Delta_1\Delta_2})$ для каждого $r \in [1,\infty)$. Так как вложения $\jmath^{M_\imath}_r : L_r(\mu) \to L_r(\nu^{M_\imath}_{\Delta_\imath})$ для $\imath := 1,2$ индуцируют вложение $\jmath^{M_1\times M_2}_r : L_r(\mu_1 \otimes \mu_2) \to L_r(\nu^{M_1}_{\Delta_1} \otimes \nu^{M_2}_{\Delta_2}) \subset L_r(\nu^{M_1\times M_2}_{\Delta_1\Delta_2})$, то каждая функция $k \in L_r(\mu_1 \otimes \mu_2)$ имеет лифтинг $K \in \mathscr{S}_r(M_1 \times M_2)$.

Естественный интерес представляют в этой связи условия, при которых матрица K определяет гиперприближение A оператора $\mathscr{A}$. Ниже этот вопрос будут рассмотрен для операторов Гильберта — Шмидта.

До конца текущего параграфа зафиксируем следующие обозначения: $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ — пространство с σ-конечной мерой, $(M, S^M_\Delta, \nu^M_\Delta)$ символизирует σ-конечное подпространство пространства Лёба $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$ и, наконец, указано вложение $\jmath_2 : L_r(\mu) \to L_r(\nu^M_\Delta)$.

Интегральный оператор $\mathscr{A}_k : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ с ядром k называют ***оператором Гильберта — Шмидта***, если $k \in L_2(\mu\otimes\mu)$. Хорошо известно, что для оператора Гильберта — Шмидта имеет место оценка

$$\|\mathscr{A}_k\| \le \Bigg(\int\limits_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}} |k|^2\, d\mu \otimes d\mu\Bigg)^{1/2}.$$

Для внутренней функции $K \in \mathscr{S}_2(M \times M)$ определим внутренний оператор $A_K : \mathscr{L}_2 \to \mathscr{L}_2$ формулой

$$A_K(F)(\xi) := \Delta \sum_{\eta\in X} K(\xi,\eta)F(\eta) \quad (F \in \mathscr{L}_2,\ \xi \in X).$$

Легко видеть, что для нормы оператора A_K справедливо следующее неравенство:

$$\|A_K\| \le \left(\Delta^2 \sum_{\xi,\eta\in X} |K(\xi,\eta)|^2\right)^{1/2}.$$

6.5.3. Теорема. *Если $\mathscr{A}_k : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — оператор Гильберта — Шмидта с ядром $k \in L_2(\mu\otimes\mu)$ и $K \in \mathscr{S}_2(M\times M)$ — лифтинг k (или, точнее, K — лифтинг функции $\jmath_2^{M\times M}(k) \in L_2(\nu_{\Delta^2}^{M\times M})$), то оператор $A_K : \mathscr{L}_2 \to \mathscr{L}_2$ служит гиперприближением оператора $\mathscr{A}_k$.*

$\lhd$ Вначале покажем, что множество тех k, для которых имеет место сформулированная теорема, замкнуто в $L_2(\mu\otimes\mu)$. Допустим, что требуемое верно для каждого $k_n \in L_2(\mu\otimes\mu)$ $(n\in\mathbb{N})$ и $\|k-k_n\|_{L_2(\mu\otimes\mu)} \to 0$ при $n\to\infty$. Так как $\mathscr{A}_k - \mathscr{A}_{k_n} = \mathscr{A}_{k-k_n}$ по определению оператора $\mathscr{A}_k$, то из указанной в 6.5.2 оценки для нормы оператора $\mathscr{A}_k$ выводим $\|\mathscr{A}_k - \mathscr{A}_{k_n}\| \to 0$ при $n\to\infty$.

Пусть $K_n \in \mathscr{S}_2(M\times M)$ — лифтинг k_n и $K \in \mathscr{S}_2(M\times M)$ — лифтинг k. Тогда справедливы соотношения

$$\|A_K^{\#} - A_{K_n}^{\#}\| = {}^{\circ}\|A_K - A_{K_n}\| = {}^{\circ}\|A_{K-K_n}\| \le$$
$$\le {}^{\circ}\left(\Delta^2 \sum_{\xi,\eta\in X} |K(\xi,\eta) - K_n(\xi,\eta)|^2\right)^{1/2} = \|k-k_n\|_{L_2(\mu\otimes\mu)} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Воспользуемся теперь коммутативностью диаграммы 6.5.1 (2) для операторов $\mathscr{A}_{k_n}$ и A_{K_n}. Возьмем $f\in L_2(\mu)$. Тогда

$$\jmath_2(\mathscr{A}_k(f)) = \lim_{n\to\infty} \jmath_2(\mathscr{A}_{k_n}(f)) = \lim_{n\to\infty} A_{K_n}^{\#}(\jmath_2(f)) = A_K^{\#}(\jmath_2(f)).$$

Для завершения доказательства нужно показать, что требуемое верно для функций k вида $\varphi\otimes\psi$, где $\varphi\otimes\psi(s,t) := \varphi(s)\cdot\psi(t)$. Поскольку линейные комбинации таких функций плотны в $L_2(\mu\otimes\mu)$, то тем самым будет установлена сформулированная теорема ввиду предложения 6.5.1 (1).

Итак, пусть $k := \varphi\otimes\psi$, где $\varphi,\psi\in L_2(\mu)$. Пусть $\Phi,\Psi\in\mathscr{S}_2(M)$ — лифтинги φ и ψ соответственно. Предположим также, что $F \in \varphi_2(M)$ — лифтинг функции $f\in L_2(\mu)$ и $G\in\mathscr{S}_2(M)$ — лифтинг функции $\mathscr{A}_k(f)$. Как видно, $\eta\mapsto\Psi(\eta)\cdot F(\eta)$ будет лифтингом функции $t\mapsto\psi(t)\cdot f(t)$. Привлекая неравенство Коши — Буняковского и тот факт, что $\Psi, F \in \mathscr{S}_2(M)$, легко усмотреть вхождение $\Psi \cdot F \in \mathscr{S}(M)$, стало быть,

$$\alpha := \int\limits_{\mathfrak{X}} \psi(t)f(t)\,d\mu(t) \approx \sum_{\eta\in X} \Psi(\eta)F(\eta) =: \beta.$$

Лифтинг G функции $\mathscr{A}_k(f)$ совпадает с $\alpha\cdot\Phi$, поскольку $\mathscr{A}_k(f) = \alpha\cdot\varphi$. В то же время из определения оператора A_K вытекает равенство $A_K(F) = \beta\cdot\Phi$. Таким образом, $\|G - A_K(F)\|_2 = |\alpha - \beta|\cdot\|\Phi\|_2 \approx 0$, что и требовалось. $\triangleright$

6.5.4. Из доказанной теоремы и из 6.4.7 вытекает следующее утверждение.

(1) *Каждый оператор Гильберта — Шмидта, действующий в пространстве $L_2(\mu)$ с σ-конечной мерой μ, обладает гиперприближением.*

Предположим, что $\mathfrak{X}$ — это сепарабельное локально компактное пространство, μ — борелевская мера на $\mathfrak{X}$, а Ω — пополнение σ-алгебры борелевских множеств относительно μ.

Пусть $(X, \jmath, \Delta)$ — произвольное гиперприближение пространства с мерой $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ (см. 6.4.9 (1)). Рассмотрим пространство $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ с топологией произведения. Тогда $\mathrm{nst}\,({}^*\mathfrak{X}\times{}^*\mathfrak{X}) = \mathrm{nst}\,({}^*\mathfrak{X})\times\mathrm{nst}\,({}^*\mathfrak{X})$ и $\mathrm{st}((\xi,\eta)) = (\mathrm{st}(\xi), \mathrm{st}(\eta))$ для $\xi, \eta \in \mathrm{nst}\,({}^*\mathfrak{X})$. Отсюда непосредственно вытекает, что $(X\times X, \jmath\otimes\jmath, \Delta^2)$ — гиперприближение пространства $(\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}, \Omega\otimes\Omega, \mu\otimes\mu)$. Легко проверить, что

(2) Для ограниченной $\mu\otimes\mu$-почти всюду непрерывной функции $f : \mathfrak{X}\times\mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ условие 6.4.9 (2) того, что функция f достаточно быстро убывает на бесконечности, равносильно следующему:

$$(\forall B \in {}^*\mathscr{P}(X))(B \subset X - M) \to$$
$$\to \Delta^2\Biggl(\sum_{x\in B}\sum_{y\in X} |{}^*f(\jmath(x), \jmath(y))| + \sum_{x\in X}\sum_{y\in B} |{}^*f(\jmath(x), \jmath(y))|\Biggr) \approx 0.$$

(3) *Пусть $\mathfrak{X}$ — сепарабельное локально компактное топологическое пространство с борелевской мерой μ, пусть $(X, \jmath, \Delta)$ — гиперприближение пространства $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$. Тогда для любой ограниченной $\mu\otimes\mu$-почти всюду непрерывной функции $k \in L_2(\mu\otimes\mu)$, для которой $|k|^2$ удовлетворяет условию (2), оператор A_K, где $K := {}^*k|_{\jmath(X)\times\jmath(X)}$, представляет собой гиперприближение оператора $\mathscr{A}_k$.*

6.5.5. Дадим теперь простое достаточное условие, при котором функция $f : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет 6.5.4 (2).

(1) *Предположим, что функция $f : \mathfrak{X}^2 \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству*

$$|f(x,y)| \le \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y) \quad (x, y \in \mathfrak{X}),$$

где φ_1 и φ_2 — некоторые ограниченные интегрируемые μ-почти всюду непрерывные функции, удовлетворяющие условию достаточно быстрого убывания на бесконечности 6.4.9 (2). Тогда f удовлетворяет условию 6.5.4 (2).

$\triangleleft$ По условию φ_1 and φ_2 удовлетворяют 6.4.9 (2) и 6.4.10. Таким образом, если $B \subset X - M$, то

$$\Delta^2 \sum_{x \in B} \sum_{y \in X} |{}^*f(\jmath(x), \jmath(y))| \le$$

$$\le \Delta \sum_{x \in B} {}^*\varphi_1(\jmath(x)) \Delta \sum_{y \in X} {}^*\varphi_2(\jmath(y)) \approx \int_{\mathfrak{X}} \varphi_2 \, d\mu \cdot \Delta \sum_{x \in B} {}^*\varphi_1(\jmath(x)) \approx 0,$$

что и требовалось. $\triangleright$

Установленное предложение равносильно следующему.

(2) *Пусть $k \in L_2(\mu \otimes \mu)$ — ограниченная почти всюду непрерывная функция, причем $|k|^2$ удовлетворяет 6.5.4 (2) (или неравенству из (1)). Тогда для любой ограниченной почти всюду непрерывной функции $f \in L_2(\mu)$, достаточно быстро убывающей на бесконечности (см. 6.4.9 (2)), справедливо соотношение:*

$$\Delta \sum_{x \in X} \left| \int_{{}^*\mathfrak{X}} {}^*k(\jmath(x), \eta) {}^*f(\eta) \, d\,{}^*\mu(\eta) - \Delta \sum_{y \in X} {}^*k(\jmath(x), \jmath(y)) {}^*f(\jmath(y)) \right|^2 \approx 0.$$

6.5.6. В том частном случае, когда $\mathfrak{X} := \mathbb{R}$ (см. 6.4.11), получаем следующее следствие.

(1) *Пусть $k \in L_2(\mathbb{R}^2)$ — некоторая ограниченная почти всюду непрерывная функция, для которой $|k|^2$ удовлетворяет неравенству из 6.5.5 (1) для некоторых абсолютно интегрируемых функций φ_1 и φ_2 на $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию 6.4.11 (3) (перефразирующему требование достаточного быстрого убывания на бесконечности). Допустим, что $\Delta \approx 0$ и $L \in {}^*\mathbb{N}$ таковы, что $L\Delta \approx +\infty$.*

Тогда для любой ограниченной почти всюду непрерывной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию 6.4.11 (3), имеет место соотношение

$$\Delta \sum_{\alpha=-M}^{M} \left| \int_{-\infty}^{\infty} {}^*k(\alpha\Delta, y)^*f(y)\,dy - \Delta \sum_{\beta=-L}^{L} {}^*k(\alpha\Delta, \beta\Delta)^*f(\beta\Delta) \right|^2 \approx 0.$$

Если положить $X := \{k \in {}^*\mathbb{N} : |k| \leq L\}$, определить $\jmath : X \to {}^*\mathbb{R}$ правилом $\jmath(k) = k\Delta$ и задать функцию $K : X^2 \to {}^*\mathbb{R}$ формулой $K := {}^*k|_{\jmath(X)\times\jmath(X)}$, то соотношение из (1) равносильно тому, что A_K — гиперприближение оператора $\mathscr{A}_k$ (см. 6.5.5 (2)).

(2) *Если $\tau \approx +\infty$, $\Delta \overset{\tau}{\approx} 0$ и $L := \left[\frac{\tau}{\Delta}\right]$, то соотношение из (1) выполняется для любых ограниченных почти всюду непрерывных функций $k \in L_2(\mathbb{R}^2)$ и $f \in L_2(\mathbb{R})$.*

$\lhd$ Рассуждая аналогично тому, как это сделано в 4.6.13, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |k(x,y)|^2\,dx\,dy = {}^{\circ}\!\left(\Delta^2 \sum_{\alpha,\beta=-L}^{L} |{}^*k(\alpha\Delta,\beta\Delta)|^2\right).$$

Но тогда, как и выше, легко показать, что K входит в $\mathscr{S}_2(M \times M)$ и является лифтингом k, даже если $|k|^2$ не удовлетворяет 6.5.4 (2). $\rhd$

Утверждения (1) и (2) остаются в силе, если вместо $\mathbb{R}$ рассмотреть $\mathbb{R}^n$ для произвольного $n \geq 1$ (в этом случае $k \in L_2(\mathbb{R}^{2n})$).

6.5.7. Рассмотрим теперь стандартные варианты некоторых полученных выше результатов. Естественный подход здесь состоит в применении алгоритма Нельсона.

В качестве примера рассмотрим предложение 6.5.4 (1). В соответствии с теоремой 6.4.7 можно считать, что $X \subset {}^*\mathfrak{X}$ и что лифтингом функции $f \in L_2(\mu)$, содержащимся в $\mathscr{S}_2(M)$, служит ${}^*f|_X$. Заметим, что для лифтинга $K : X^2 \to {}^*\mathbb{R}$ в $\mathscr{S}_2(M)$ функции $k \in L_2(\mu\otimes\mu)$ аналогичное равенство, вообще говоря, не имеет места, так как пара (X^2, Δ) может не удовлетворять заключению теоремы 6.4.5 для пространства $(\mathfrak{X}^2, \Omega\otimes\Omega, \mu\otimes\mu)$. Тем не менее такой лифтинг K существует ввиду замечаний из 6.5.2.

Пусть $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ — *это пространство с* σ-*конечной мерой и* $k \in L_2(\mu \otimes \mu)$. *Тогда для любого конечного множества* $\Phi \subset L_2(\mu)$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *существуют* $X \subset \mathfrak{X}$, $\Delta \in \mathbb{R}$ *и* $K : X^2 \to \mathbb{R}$, *такие, что*

$$\left| \iint\limits_{\mathfrak{X}^2} |k|^2 \, d\mu - \Delta^2 \sum_{x,y} |K(x,y)|^2 \right| < \varepsilon,$$

и для каждого $f \in \Phi$ *выполняется*

$$\Delta \sum_{x \in X} \left| \int\limits_{\mathfrak{X}} k(x,\eta) f(\eta) \, d\mu(\eta) - \Delta \sum_{y \in X} K(x,y) f(y) \right|^2 < \varepsilon.$$

$\lhd$ Предложение 6.5.4 (1) можно записать в следующем виде.

Пусть $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ — стандартное пространство с σ-конечной мерой. Возьмем стандартную функцию $k \in L_2(\mu \otimes \mu)$. Тогда

$$(\exists^{\mathrm{fin}} X \subset \mathfrak{X})(\exists \Delta \in \mathbb{R}_+)(\exists K : X^2 \to \mathbb{R})(\forall^{\mathrm{st}} f \in L_2(\mu))(\forall^{\mathrm{st}} 0 < \varepsilon \in \mathbb{R})$$
$$\Bigg(\left| \iint\limits_{\mathfrak{X}^2} |k|^2 \, d\mu \otimes \mu - \Delta^2 \sum_{x,y \in X} |K(x,y)|^2 \right| < \varepsilon \wedge$$
$$\wedge \, \Delta \cdot \sum_{x \in X} \left| \int\limits_{\mathfrak{X}} k(x,\eta) f(\eta) \, d\mu(\eta) - \Delta \sum_{y \in X} K(x,y) f(y) \right|^2 < \varepsilon \Bigg).$$

Обозначим матрицу этой формулы символом $\mathscr{W}$ и применим к ней принцип идеализации. В результате получим эквивалентную формулу

$$(\forall^{\mathrm{st}} \Phi \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(L_2(\mu)))(\forall^{\mathrm{st}} \Xi \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R}_+))(\exists^{\mathrm{fin}} X \subset \mathfrak{X})(\exists \Delta \in \mathbb{R}_+)$$
$$(\exists K : X^2 \to \mathbb{R})(\forall f \in \Phi)(\forall \varepsilon \in \Xi) \, \mathscr{W}.$$

Так как $(\mathfrak{X}, \Omega, \mu)$ и k стандартны, то можно применить принцип переноса и убрать индекс st над первыми двумя кванторами в последней формуле. Переход от Ξ к $\varepsilon := \min(\Xi)$ позволяет, как легко видеть, заменить второй квантор следующим: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)$. Значит, мы можем вовсе опустить последний квантор. $\rhd$

Более тщательный анализ приведенного перевода показывает, что нестандартные X, Δ и K в 6.5.4 (1) зависят от элементов $L_2(\mu)$

и $L_2(\mu\otimes\mu)$, являющихся классами эквивалентности, а не от выбора конкретных представителей этих классов, а $k\in L_2(\mu\otimes\mu)$ в установленном предложении рассматривается как класс эквивалентности (т. е. X, Δ и K не зависят от выбора представителя из класса k). В то же время Φ в этом предложении представляет собой конечное множество функций, интегрируемых с квадратом.

Фактически предложение 6.5.7 не является полным аналогом 6.5.4 (1), так как первое неравенство в формулировке этого предложения лишь следствие того, что $K\in\mathscr{S}(M)$ служит лифтингом функции k. В утверждении «K из $\mathscr{S}(M)$ — это лифтинг функции k» участвуют внешние объекты, поэтому оно не формализуется на языке IST, но может иметь различные внутренние следствия, усиливающие 6.5.7.

6.5.8. Рассмотрим стандартный вариант предложения 6.5.6 (2). Обозначим символом $\mathscr{H}_m$ пространство ограниченных функций из $L_2(\mathbb{R}^m)$, непрерывных почти всюду относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^m$.

Для любых конечных множеств функций $\Phi\subset\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{K}\subset\mathscr{H}_2$ и произвольного $n\in\mathbb{N}$ существуют числа $L\in\mathbb{N}$ и $\Delta\in\mathbb{R}_+$ такие, что $L\Delta>n$, $\Delta<n^{-1}$ и

$$\Delta\sum_{\alpha=-L}^{L}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(\alpha\Delta,\eta)f(\eta)\,d\eta-\Delta\sum_{\beta=-L}^{L}k(\alpha\Delta,\beta\Delta)f(\beta\Delta)\right|^2<\frac{1}{n}$$

для любых функций $f\in\Phi$ и $k\in\mathscr{K}$.

$\lhd$ Предложение 6.5.6 (2) можно переписать в виде:

$$(\exists L\in\mathbb{N})(\exists\Delta\in\mathbb{R}_+)\Bigg(L\Delta\approx+\infty\wedge\Delta\approx 0\wedge(\forall^{\mathrm{st}}f\in\mathscr{H}_1)(\forall^{\mathrm{st}}k\in\mathscr{H}_2)$$
$$\Bigg(\Delta\sum_{\alpha=-M}^{M}\Bigg|\int\limits_{-\infty}^{\infty}{}^*k(\alpha\Delta,y)^*f(y)\,dy-$$
$$-\Delta\sum_{\beta=-L}^{L}{}^*k(\alpha\Delta,\beta\Delta)^*f(\beta\Delta)\Bigg|^2\approx 0\Bigg)\Bigg).$$

Расшифровывая в этой формуле знак $\approx$, получим

$$(\exists L \in \mathbb{N})(\exists \Delta \in \mathbb{R}_+)(\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(\forall^{\mathrm{st}} f \in \mathscr{H}_1)(\forall^{\mathrm{st}} k \in \mathscr{H}_2)$$
$$\Bigg(L\Delta > n \wedge \Delta < n^{-1} \wedge$$
$$\wedge \Bigg(\Delta \sum_{\alpha=-L}^{L} \Bigg| \int_{-\infty}^{\infty} k(\alpha\Delta, \eta) f(\eta)\, d\eta -$$
$$-\Delta \sum_{\beta=-L}^{L} k(\alpha\Delta, \beta\Delta) f(\beta\Delta) \Bigg|^2 < \frac{1}{n} \Bigg)\Bigg).$$

Как и в предыдущем пункте, эту формулу легко можно записать без использования предиката st. $\triangleright$

6.5.9. Еще проще формулируется стандартный вариант предложения 6.5.6 (1). Обозначим символом $\widetilde{\mathscr{H}_1}$ множество функций $f \in \mathscr{H}_1$, для которых $|f|^2$ удовлетворяет условию 6.4.11 (2), а символом $\widetilde{\mathscr{H}_2}$ — множество функций $k \in \mathscr{H}_2$ таких, что $|k|^2$ удовлетворяет неравенству из 6.5.5 (1) для некоторых φ_1 и φ_2, для которых выполнено 6.4.11 (2). (Множество $\widetilde{\mathscr{H}_m}$ определяется аналогично.)

Для любых $f \in \widetilde{\mathscr{H}_1}$ и $k \in \widetilde{\mathscr{H}_2}$ имеет место равенство

$$\lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ L\Delta \to \infty}} \Delta \sum_{\alpha=-L}^{L} \Bigg| \int_{-\infty}^{\infty} k(\alpha\Delta, \eta) f(\eta)\, d\eta - \Delta \sum_{\beta=-L}^{L} k(\alpha\Delta, \beta\Delta) f(\beta\Delta) \Bigg|^2 = 0.$$

$\triangleleft$ Как видно, соотношение из 6.5.6 (1) можно записать в IST в виде

$$(\forall L \in \mathbb{N})(\forall \Delta \in \mathbb{R}_+)\Bigg(L\Delta \approx +\infty \wedge \Delta \approx 0 \to (\forall^{\mathrm{st}} f \in \widetilde{\mathscr{H}_1})(\forall^{\mathrm{st}} k \in \widetilde{\mathscr{H}_2})$$
$$\Bigg(\Delta \sum_{\alpha=-L}^{L} \Bigg| \int_{-\infty}^{\infty} k(\alpha\Delta, \eta) f(\eta)\, d\eta - \Delta \sum_{\beta=-L}^{L} k(\alpha\Delta, \beta\Delta) f(\beta\Delta) \Bigg|^2 \approx 0 \Bigg)\Bigg).$$

Используя эквивалентность формул $a \approx 0$ и $(\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(|a| < 1/n)$ и правила логики предикатов, приходим к следующему предложению:

$$(\forall^{\mathrm{st}} f \in \widetilde{\mathscr{H}_1})(\forall^{\mathrm{st}} k \in \widetilde{\mathscr{H}_2})(\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N})(\forall L \in \mathbb{N})(\forall \Delta \in \mathbb{R}_+)$$
$$(L\Delta \approx +\infty \wedge \Delta \approx 0 \to \mathscr{W}),$$

где $\mathscr{W}$ обозначает неравенство из 6.5.5 (1).

Записывая предикаты $L\Delta \approx +\infty$ и $\Delta \approx 0$ в IST и используя принципы идеализации и переноса, получим предложение

$$(\forall f \in \widetilde{\mathscr{H}_1})(\forall k \in \widetilde{\mathscr{H}_2})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists^{\mathrm{fin}} \mathscr{N} \subset \mathbb{N})(\forall L \in \mathbb{N})(\forall \Delta \in \mathbb{R}_+)$$
$$(\forall m \in \mathscr{N})((\Delta < 1/m \wedge L\Delta > m) \to \mathscr{W}),$$

эквивалентное требуемому. $\rhd$

6.5.10. Рассмотрим стандартный вариант определения гиперприближения для ограниченного линейного оператора $\mathscr{A} : L_p(\mathbb{R}) \to L_q(\mathbb{R})$, где $p, q \geq 1$. Обозначим символом $\widetilde{\mathscr{H}^{(r)}}$ пространство ограниченных почти всюду непрерывных функций $f \in L_r(\mathbb{R})$, для которых $|f|^2$ удовлетворяет условию 6.4.11 (2). Заметим, что $\widetilde{\mathscr{H}^{(r)}}$ плотно в $L_r(\mathbb{R})$ $(r \geq 1)$. Предположим также, что $\mathscr{A}$ удовлетворяет условию:

(1) Множество $\{f \in \widetilde{\mathscr{H}^{(p)}} : \mathscr{A}(f) \in \widetilde{\mathscr{H}^{(q)}}\}$ плотно в пространстве $L_p(\mathbb{R})$.

Пусть $\mathbf{T} := \{T_{L,\Delta} : L \in \mathbb{N}, \Delta \in \mathbb{R}_+\}$ — пучок матриц $T_{L,\Delta} := (t_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=-L}^{L}$, зависящий от двух параметров и равномерно ограниченный по норме. Как видно, каждая из матриц $T_{L,\Delta}$ имеет размерность $N \times N$, где $N := 2L + 1$.

(2) Мы будем говорить, что пучок $\mathbf{T}$ *приближает* ограниченный оператор $\mathscr{A} : L_p(\mathbb{R}) \to L_q(\mathbb{R})$, удовлетворяющий условию (1), в том и только в том случае, если для любой функции $f \in \widetilde{\mathscr{H}^{(p)}} \cap \mathscr{A}^{-1}(\widetilde{\mathscr{H}^{(q)}})$ справедливо соотношение

$$\lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ L\Delta \to \infty}} \Delta \sum_{\alpha=-L}^{L} \left| \mathscr{A}(f)(\alpha\Delta) - \sum_{\beta=-L}^{L} t_{\alpha\beta} f(\beta\Delta) \right|^q = 0.$$

(3) *Если пучок матриц* $\mathbf{T}$ *удовлетворяет условиям определения 6.5.10 (2), то* $\mathbf{T}$ *приближает ограниченный оператор* $\mathscr{A}$:

$L_p(\mathbb{R}) \to L_q(\mathbb{R})$ в том и только в том случае, если для любых $L \in {}^*\mathbb{N}$ и $\Delta \in {}^*\mathbb{R}_+$ таких, что $\Delta \approx 0$ и $L\Delta \approx +\infty$, оператор ${}^*T_{L,\Delta} : \mathscr{L}^X_{\Delta,p} \to \mathscr{L}^X_{\Delta,q}$, где $X := \{-L, \dots, L\}$, представляет собой гиперприближение оператора $\mathscr{A}$.

$\lhd$ Немедленно следует из определения (1) и нестандартного критерия предела (см. 2.3.1). $\rhd$

(4) *Предположим, что равенство из (2) выполняется для всех функций f из некоторого множества $\mathfrak{M} \subset \widetilde{\mathscr{H}^{(p)}} \cap \mathscr{A}^{-1}(\widetilde{\mathscr{H}^{(q)}})$, линейная оболочка которого плотна в $L_p(\mathbb{R})$. Тогда это же самое равенство выполняется и для всех функций $f \in \widetilde{\mathscr{H}^{(p)}} \cap \mathscr{A}^{-1}(\widetilde{\mathscr{H}^{(q)}})$.*

$\lhd$ Это вытекает из предложения 6.5.1 (1). $\rhd$

6.5.11. Примечания.

(1) Результаты этого параграфа получены Е. И. Гордоном и опубликованы в [43, 317]. Наше изложение следует [317].

(2) Утверждение о том, что $\mathscr{A}$ допускает гиперприближение, выразимо в языке IST. Следовательно, с помощью алгоритма Нельсона можно получить эквивалентное предложение, сформулированное в стандартных математических терминах. В полной своей общности соответствующая формулировка весьма громоздка, но смысл ее состоит в том, что существует последовательность конечномерных нормированных пространств и операторов, действующих в этих пространствах, для которых существуют соответствующие последовательности конечных подмножеств (узлы таблиц в последовательных пространствах), последовательность множителей Δ таких, что таблица значений функции в каждом множестве узлов представляет собой вектор в соответствующем пространстве, интеграл функции приближается суммами значений функции в узлах с шагом Δ и значения конечномерного оператора на таблице значений функции f сходятся к таблице $\mathscr{A}(f)$, см. 6.5.10 (2).

(3) Результаты, аналогичные теореме 6.5.3 и ее приведенным выше следствиям, можно получить и для некоторых других классов интегральных операторов, налагая подходящие условия на функцию k, при которых интегральный оператор с ядром k ограниченно действует из L_p в L_q (см., например, [85]).

(4) Нестандартное определение гиперприближения (см. 6.5.1) является существенно более общим, чем определение 6.5.10 (2), даже в случае пространства $L_p(\mathbb{R})$, так как оно не предполагает, вообще говоря, существования стандартного семейства матриц, удовлетворяющих условиям определения 6.5.10 (2). Разница между этими определениями становится ясной при сравнении 6.5.8 и 6.5.9. Последнее можно усилить путем полного перевода предложения 6.5.6 (2) на стандартный язык с учетом соотношения $\Delta \overset{\mathcal{T}}{\approx} 0$. Однако такой перевод ведет к существенному усложнению формулировки.

(5) В дальнейшем нам потребуется ситуация, когда в процессе приближения оператора $\mathscr{A}$ таблица значений f дана с шагом Δ, в то время как таблица значений для $\mathscr{A}(f)$ составлена с шагом Δ_1. Разумеется, $\Delta_1 \to 0$ и $L\Delta_1 \to \infty$ (например, $\Delta_1 := ((2L+1)\Delta)^{-1}$). Общее определение из 6.5.10 охватывает и этот случай. Следовательно, после очевидных модификаций определения 6.4.9 (2) и предложений 6.5.10 (3, 4), последние два остаются справедливыми.

(6) Определение 6.4.9 (2) и предложения 6.5.10 (3, 4) допускают обобщение на случай, когда гиперприближение оператора $\mathscr{A} : L_p(\mu) \to L_q(\mu)$, где μ — некоторая σ-конечная мера на сепарабельном локально компактном топологическом пространстве $\mathfrak{X}$, строится на основе гиперприближения этого пространства (см. 6.5.4 (3)).

При этом необходимо дать стандартный вариант определения гиперприближения пространства с мерой как некоторого семейства X конечных множеств, отображений $\jmath : X \to \mathfrak{X}$ и чисел Δ, удовлетворяющих подходящим условиям. Как уже отмечалось, основные возникающие при этом трудности связаны с переводом условий 6.4.9 (2) и 6.5.4 (2) на стандартный язык.

Мы вернемся к подобным вопросам в следующей главе при рассмотрении проблемы гиперприближения общих локально компактных абелевых групп.

6.6. Дискретизация псевдоинтегральных операторов и случайные меры Лёба

Ниже нам потребуется более сильный вариант теоремы, сформулированной в 6.4.6. Именно, необходимо добиться, чтобы интеграл любой суммируемой функции приближался суммой по гиперконечному множеству с точностью до фиксированного бесконечно малого ε.

6.6.1. *Теорема.* *Пусть $(\mathscr{X}, \Omega, \mu)$ — стандартное пространство с σ-конечной мерой μ, а ε — положительное бесконечно малое ги-*

пердействительное число. Тогда найдутся внутреннее гиперконечное множество $X \subseteq {}^*\mathscr{X}$ и гипердействительное число $\Delta \in {}^*\mathbb{R}$ такие, что

$$\left| \int\limits_{\mathscr{X}} f\,d\mu - \Delta \sum_{\xi \in X} {}^*f(\xi) \right| < \varepsilon$$

для любой $f \in L_1(\mu)$.

$\lhd$ Пусть k — некоторое ε-бесконечно большое натуральное число. Тогда $({}^*\mathscr{X}_k, {}^*\Omega_k, {}^*\mu_k)$ удовлетворяет условиям теоремы 6.4.4, т. е. найдется внутреннее гиперконечное множество $X \subseteq {}^*\mathscr{X}_k$ такое, что для любой k-стандартной интегрируемой функции $h : {}^*\mathscr{X}_k \to {}^*\mathbb{R}$ выражение

$$\int\limits_{{}^*\mathscr{X}_k} h\,d\mu_k - \frac{\mu_k({}^*\mathscr{X}_k)}{|X|} \sum_{\xi \in X} h(\xi)$$

станет k-бесконечно малым. В частности, если $f \in L_1(\mu)$, то ${}^*f_k$ будет k-стандартной интегрируемой функцией на ${}^*\mathscr{X}_k$, поэтому выражение

$$\int\limits_{{}^*\mathscr{X}_k} {}^*f_k\,d\mu_k - \frac{\mu_k({}^*\mathscr{X}_k)}{|X|} \sum_{\xi \in X} {}^*f_k(\xi)$$

будет k-бесконечно малой величиной, а следовательно, и ε-бесконечно малой величиной. Далее, из соотношения

$$\int\limits_{\mathscr{X}} f\,d\mu = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\mathscr{X}_n} f_n\,d\mu_n$$

вытекает, что разность $\int_{\mathscr{X}} f\,d\mu - \int_{{}^*\mathscr{X}_k} {}^*f_k\,d\mu_k$ будет ε-бесконечно малой. Поскольку ${}^*f_k|_X = {}^*f|_X$, то выражение

$$\int\limits_{\mathscr{X}} f\,d\mu - \frac{\mu_k({}^*\mathscr{X}_k)}{|X|} \sum_{\xi \in X} {}^*f_k(\xi)$$

будет ε-бесконечно малой величиной, а, следовательно, по модулю оно не превышает ε. $\rhd$

6.6.2. В ситуации, описанной в теореме 6.6.1, мы будем говорить, что пара (X, Δ) *приближает меру* μ с точностью до ε.

Поскольку в доказательстве теоремы 6.6.1 были использованы только принципы переноса и насыщения, то стандартность может быть заменена на относительную стандартность. Точнее, если τ — фиксированное внутреннее множество, $(\mathscr{X}, \Omega, \mu)$ — это некоторое τ-стандартное пространство с σ-конечной мерой μ, а ε — положительное τ-бесконечно малое гипердействительное число, тогда найдутся внутреннее гиперконечное множество $X \subseteq {}^*\mathscr{X}$ и гипердействительное число $\Delta \in {}^*\mathbb{R}$ такие, что

$$\left| \int\limits_{{}^*\mathscr{X}} F \, d^*\mu - \Delta \sum_{\xi \in X} F(\xi) \right| < \varepsilon$$

для любой τ-стандартной интегрируемой функции F. В частности, утверждение верно для любого бесконечно малого ε.

6.6.3. Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное множество, $\mathscr{A}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств $\mathscr{X}$ и $(\lambda_y)_{y \in \mathscr{Y}}$ — семейство σ-конечных мер на $\mathscr{A}$. Семейство $(\lambda_y)_{y \in \mathscr{Y}}$ можно рассматривать как функцию $\lambda : \mathscr{A} \times \mathscr{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$ такую, что $\lambda_y(A) := \lambda(A, y)$ для $y \in \mathscr{Y}$ и $A \in \mathscr{A}$. Обозначим через $\mathscr{L}_1$ совокупность всех измеримых функций на $\mathscr{X}$, интегрируемых по всем мерам семейства $(\lambda_y)_{y \in \mathscr{Y}}$. Семейство $(\lambda_y)_{y \in \mathscr{Y}}$ порождает псевдоинтегральный оператор T на $\mathscr{L}_1$ следующим образом: пусть $f \in \mathscr{L}_1$, тогда Tf — функция из $\mathscr{Y}$ в $\mathbb{R}$, определенная как

$$(Tf)(y) = \int\limits_{\mathscr{X}} f \, d\lambda_y \quad (f \in \mathscr{L}_1).$$

Мы покажем в следующем пункте, что если функции представлять таблицами их значений на гиперконечном множестве, то псевдоинтегральный оператор можно приблизить с бесконечной точностью (т. е. с точностью до бесконечно малых) гиперконечной матрицей. Обозначим символом $\mathscr{F}(\mathscr{Y})$ пространство всех вещественных функций на $\mathscr{Y}$. Для гиперконечного набора $X := (x_1, \dots, x_n) \subseteq {}^*\mathscr{X}$ обозначим символом π_X «проектор» из $\mathscr{L}_1$ в ${}^*\mathbb{R}^n$, сопоставляющий функции $f \in \mathscr{L}_1$ таблицу значений $\big({}^*f(x_1), \dots, {}^*f(x_n)\big)$.

6.6.4. ***Теорема.*** *Существуют такие гиперконечные наборы* $X := (x_1, \dots, x_n) \subseteq {}^*\mathscr{X}$ *и* $Y := (y_1, \dots, y_m) \subseteq {}^*\mathscr{Y}$, *что* $\mathscr{Y} \subseteq Y$, *и* *для некоторой матрицы* $A = (a_{ıȷ})$ *размера* $n \times m$ *будет* $\pi_Y({}^*Tf) \approx A\pi_X({}^*f)$ *для каждой функции* $f \in \mathscr{L}_1$ *или, что то же самое,*

$$\int\limits_{{}^*\mathscr{X}} {}^*f\, d^*\lambda_{y_ı} \approx \sum_{ȷ=1}^{n} a_{ıȷ}{}^*f(x_ȷ) \quad (ı := 1, \dots, m).$$

Другими словами, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}_1(\mathscr{X}) & \xrightarrow{\quad T \quad} & \mathscr{F}(\mathscr{Y}) \\ {\scriptstyle \pi_X}\big\downarrow & & {\scriptstyle \pi_Y}\big\downarrow \\ {}^*\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad A \quad} & {}^*\mathbb{R}^m \end{array}$$

коммутативна с точностью до бесконечно малых.

$\lhd$ Зафиксируем произвольное бесконечно малое ε. Для любого $\lambda \in \mathscr{Y}$ теорема 6.6.1 обеспечивает существование гиперконечного набора $X(y)$ элементов ${}^*\mathscr{X}$ и положительного гипердействительного $\Delta(y)$ таких, что $|\int_{\mathscr{X}} f\, d\lambda_y - \Delta(y)\sum_{X(y)} f| \leq \varepsilon$ для всякой $f \in \mathscr{L}_1$. Тем самым у нас имеются (внешние) функции

$$X : \mathscr{Y} \to \bigcup_{n \in {}^*\mathbb{N}} {}^*\mathscr{X}^n \quad \text{и} \quad \Delta : \mathscr{Y} \to {}^*\mathbb{R}.$$

Пользуясь принципом продолжения, мы можем считать эти функции заданными на ${}^*\mathscr{Y}$. Зафиксировав элементы $y \in {}^*\mathscr{Y}$ и $F \in {}^*\mathscr{L}_1$, мы будем говорить, что выполнено свойство $\Phi(y, F)$, если

$$\left| \int\limits_{{}^*\mathscr{X}} F\, d^*\lambda_y - \Delta(y) \sum_{X(y)} F \right| \leq \varepsilon.$$

Для каждого $y \in \mathscr{Y}$ рассмотрим внутреннее множество $B_y := \{F \in {}^*\mathscr{L}_1 : \Phi(y, F)\}$. Заметим, что ${}^*f \in B_y$ для всех $f \in \mathscr{L}_1$ и $y \in \mathscr{Y}$. Далее, для любого конечного набора $(y_1, f_1), \dots, (y_k, f_k) \in \mathscr{Y} \times \mathscr{L}_1$ найдется внутреннее подмножество ${}^*\mathscr{L}_1$, содержащее все $f_ı$ и содержащееся в каждом $B_{y_ı}$ для $ı := 1, \dots, k$. В качестве такого множества достаточно взять $B_{y_1} \cap \dots \cap B_{y_k}$. Отсюда по принципу насыщения следует, что найдется внутреннее множество B такое, что $f \in B \subseteq F_y$

для всех $(y, f) \in \mathscr{Y} \times \mathscr{L}_1$. В частности, $\Phi(y, F)$ выполнено для всех $y \in \mathscr{Y}$ и всех $F \in \Phi$. Обозначим через Y_0 множество всех тех $y \in {}^*\mathscr{Y}$, для которых $\Phi(y, F)$ выполнено для каждого $F \in B$. Легко видеть, что Y_0 — внутреннее множество, содержащее $\mathscr{Y}$. С другой стороны, найдется внутреннее гиперконечное множество $Y_1 \subseteq {}^*\mathscr{Y}$, содержащее $\mathscr{Y}$. Положим $Y := Y_0 \cap Y_1$. Тогда Y — гиперконечное внутреннее подмножество ${}^*\mathscr{Y}$, содержащее $\mathscr{Y}$, и $\Phi(y, F)$ выполнено для всех $y \in Y$ и всех $F \in B$. В частности, $\Phi(y, {}^*f)$ выполнено для всех $y \in Y$ и всех $f \in \mathscr{L}_1$. Возьмем любое упорядочение $(y_1, \dots, y_m)$ набора Y. В качестве X возьмем конкатенацию наборов $X_{y_1}, \dots, X_{y_m}$, т. е. набор, образованный стоящими подряд элементами наборов $X_{y_1}, \dots, X_{y_m}$. Пусть $X := (x_1, \dots, x_n)$ и пусть элементы набора $X_{y_\imath}$ занимают в X позиции с $s_{\imath+1}$ по $s_{\imath+m}$. Определим «ступенчатую» матрицу A размера $m \times n$ следующим образом:

$$a_{\imath\jmath} := \begin{cases} \Delta_{y_\imath}, & \text{если } s_\imath < \jmath \le s_{\imath+1}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда для каждой $f \in \mathscr{L}_1$ и любого $\imath := 1, \dots, m$ будет

$$\left| \int\limits_{{}^*\mathscr{X}} {}^*f \, d^*\lambda_{y_\imath} - \sum_{\jmath=1}^{n} a_{\imath\jmath} {}^*f(x_\jmath) \right| = \left| \int\limits_{{}^*\mathscr{X}} {}^*f \, d^*\lambda_y - \Delta(y_\imath) \sum_{X(y_\imath)} {}^*f \right| \le \varepsilon,$$

т. е. $\int_{{}^*\mathscr{X}} {}^*f \, d^*\lambda_{y_\imath} \approx \sum_{\jmath=1}^{n} a_{\imath\jmath} {}^*f(x_\jmath)$. $\triangleright$

6.6.5. Рассмотрим теперь частный случай псевдоинтегрального оператора — интегральный оператор с ядром $K(x, y)$. Пусть в условиях теоремы 6.6.4 на σ-алгебре $\mathscr{A}$ задана фиксированная σ-конечная мера такая, что λ_y абсолютно непрерывна относительно μ для каждого $y \in \mathscr{Y}$ с плотностью $K_y := K(\cdot, y) \in \mathscr{L}_\infty(\mu)$. Тогда

$$(Tf)(y) = \int\limits_{\mathscr{X}} f \, d\lambda_y = \int\limits_{\mathscr{X}} f \cdot K_y \, d\mu.$$

В этом случае теорема 6.6.4 может быть несколько усилена. А именно, в качестве X может быть взят фиксированный набор, приближающий μ с точностью до ε (существование такого набора и веса Δ вытекает из теоремы 6.6.1), в качестве матрицы можно взять ядра на узлах дискретной решетки $X \times Y$ с весом Δ.

6.6.6. Теорема. *Пусть пара (X, Δ) приближает μ. Тогда существует конечный набор $Y := (y_1, \dots, y_m) \subseteq {}^*\mathscr{Y}$, причем $\mathscr{Y} \subseteq Y$, такой, что $\pi_Y({}^*Tf) \approx A\pi_X({}^*f)$, где $a_{\imath\jmath} := \Delta \cdot K(x_\imath, y_\jmath)$.*

$\lhd$ Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 6.6.4. Обозначим через $\Psi(y, F)$ внутреннюю формулу

$$\left| \int F\, d^*\lambda_y - \Delta \sum_X {}^*f \cdot {}^*K_y \right| \leq \varepsilon.$$

Тогда для любой $f \in \mathscr{L}_1$ и любого $y \in \mathscr{Y}$ мы имеем

$$\left| \int\limits_{\mathscr{X}} f\, d\lambda_y - \Delta \sum_X {}^*f \cdot {}^*K_y \right| = \left| \int\limits_{\mathscr{X}} f K_y\, d\mu - \Delta \sum_X {}^*f \cdot {}^*K_y \right| \leq \varepsilon,$$

т. е. $\Psi(y, {}^*f)$ выполнено для всех $y \in \mathscr{Y}$ и $f \in \mathscr{L}_1$.

Пусть $C_y := \{F \in \mathscr{L}_1 : \Psi(y, F)\}$. Тогда найдется внутреннее множество $C \subseteq {}^*\mathscr{L}_1$ такое, что $\Psi(y, F)$ выполнено для всех $y \in \mathscr{Y}$ и $F \in C$ и, кроме того, $\mathscr{L}_1 \subseteq C$. Найдется гиперконечный внутренний набор $Y := (y_1, \dots, y_m)$ такой, что $\mathscr{Y} \subseteq Y$ и $\Psi(y, {}^*f)$ для всех $y \in Y$ и $f \in \mathscr{L}_1$. Тогда

$$\int\limits_{{}^*\mathscr{X}} {}^*f\, d\lambda_{y_i} \approx \Delta \sum_X f \cdot K_{y_\imath} = \sum_{\jmath=1}^{n} a_{\imath\jmath} f(x_\jmath)$$

для каждого $\imath := 1, \dots, m$. $\rhd$

6.6.7. Следует заметить, что из доказательства теорем 6.6.4 и 6.6.6 следует несколько более сильный результат, а именно, построенная в теоремах матрица A приближает оператор T с точностью до фиксированного бесконечно малого ε. Кроме того, поскольку построенный там гиперконечный набор Y содержит $\mathscr{Y}$, то значения стандартной функции g на $\mathscr{Y}$ вполне определены значениями ${}^*g$ на Y. Из этого следует, например, что проектор π_Y сохраняет супремум ограниченной стандартной функции на $\mathscr{Y}$, т. е. $\sup_{y \in \mathscr{Y}} g(y) = {}^\circ\max \pi_Y(g)$. С другой стороны, проектор π_X в теореме 6.6.6 сохраняет L_1-норму функции f из $\mathscr{L}_1$, т. е. $\int_{\mathscr{X}} f\, d\mu = {}^\circ(\Delta \sum_X {}^*f)$. Таким образом, если мы введем sup-норму на ${}^*\mathbb{R}^m$, то теорема 6.6.6 означает, что для каждой пары (X, Δ), приближающей меру μ с точностью до ε, найдется гиперконечный набор Y такой, что $\mathscr{Y} \subseteq Y \subseteq {}^*\mathscr{Y}$ и $\|\pi_Y({}^*Tf) - A\pi_X({}^*f)\| \le \varepsilon$ для каждой $f \in \mathscr{L}_1$.

Следующая теорема дополняет теорему 6.6.6. Как и в теореме 6.6.6, T — интегральный оператор из L_1 в $\mathscr{F}(\mathscr{Y})$ с ядром K, а $\varepsilon > 0$ — фиксированное бесконечно малое.

6.6.8. Теорема. *Для любого гиперконечного набора $Y \subseteq {}^*\mathscr{Y}$ найдется пара (X, Δ), приближающая меру μ и удовлетворяющая условию $\|\pi_Y({}^*Tf) - A\pi_X({}^*f)\| \le \varepsilon$ для каждой $f \in \mathscr{L}_1$ (матрица A определяется так же, как и в теореме 6.6.4.)*

$\lhd$ Пусть $Y := \{y_1, \dots, y_m\}$. Для любого $\imath := 1, \dots, m$ функция $K_{y_\imath}$ принадлежит множеству $\{K_{y_1}, \dots, K_{y_m}\}$ и, следовательно, Y-стандартна. Пространство $(\mathscr{X}, \mathscr{A}, \mu)$ стандартно, а значит, и Y-стандартно. Замечание 6.6.2 обеспечивает существование гиперконечного набора $X \subseteq {}^*\mathscr{X}$ и положительного гипердействительного числа Δ таких, что для любой Y-стандартной интегрируемой функции F выполнено

$$\left| \int\limits_{{}^*\mathscr{X}} F \, d^*\mu - \Delta \sum_X F \right| \le \varepsilon.$$

Если $f \in \mathscr{L}_1$, то ${}^*f \cdot K_y$ — это Y-стандартная интегрируемая функция, поэтому

$$\left| \int\limits_{{}^*\mathscr{X}} {}^*f \, d^*\lambda_y - \Delta \sum_X f \cdot K_y \right| = \left| \int\limits_{{}^*\mathscr{X}} {}^*f \cdot K_y \, d^*\mu - \Delta \sum_X f \cdot K_y \right| \le \varepsilon,$$

откуда и следует требуемое. $\rhd$

6.6.9. Распространим теперь конструкцию Лёба на случайные меры. Напомним читателю определение случайной меры. Пусть X — произвольное множество, $\mathscr{A}$ — алгебра подмножеств X и пусть $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ — произвольное пространство с конечно-аддитивной мерой ν. Функция $\lambda : \mathscr{A} \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ называется ***случайной мерой*** (***случайной конечно-аддитивной мерой***), если выполнены следующие два условия:

(1) Функция $\lambda_A := \lambda(A, \cdot) : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ является $\mathscr{B}$-измеримой для любого $A \in \mathscr{A}$;

(2) Функция $\lambda_y := \lambda(\cdot, y)$ является мерой (соответственно конечно-аддитивной мерой) на $\mathscr{A}$ для почти всех $y \in Y$.

Пусть, далее, $(X, \mathscr{A})$ и $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ — внутренние множества, а λ — внутренняя конечно-аддитивная случайная мера на $\mathscr{A} \times Y$. По определению, в Y найдется подмножество полной меры Y_0 такое, что λ_y является конечно-аддитивной мерой для всех $y \in Y_0$. Далее, пусть $(Y, \mathscr{B}_L, \nu_L)$ — пространство Лёба для $(Y, \mathscr{B}, \nu)$. Для каждого λ_y $(y \in Y_0)$ рассмотрим соответствующую меру Лёба $(\lambda_y)_L$. Заметим, что по определению меры Лёба область определения $(\lambda_y)_L$ содержит $\sigma(\mathscr{A})$. Определим функцию $\lambda^L : \sigma(\mathscr{A}) \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ следующим образом: положим $\lambda^L(A, y) := (\lambda_y)_L(A)$ для $A \in \sigma(\mathscr{A})$ и $y \in Y_0$; на $Y - Y_0$ доопределим λ^L произвольно.

6.6.10. *Теорема.* *Построенная выше функция λ^L является случайной мерой относительно пространств $(X, \sigma(\mathscr{A}))$ и $(Y, \mathscr{B}_L, \nu_L)$.*

$\lhd$ По определению $\lambda_y^L := (\lambda_y)_L$ является счетно-аддитивной мерой для ν_L-почти всех $y \in Y$. Достаточно показать, что λ_A^L является $\mathscr{B}_L$-измеримой для каждого $A \in \sigma(\mathscr{A})$. Обозначим через M множество таких $A \in \sigma(\mathscr{A})$, что λ_A^L является $\mathscr{B}_L$-измеримой функцией. Легко видеть, что $\mathscr{A} \subseteq M$. Действительно, для всякого $A \in \mathscr{A}$ мы имеем $\lambda_A^L(y) = \lambda_y^L(A) = {}^\circ\lambda_y(A) = {}^\circ\lambda_A(y)$ для любого $y \in Y_0$. Тем самым λ_A является лифтингом λ_A^L, и по теореме о лифтинге функция λ_A^L является $\mathscr{B}_L$-измеримой. Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — монотонная последовательность множеств из M и $A := \lim_{n\to\infty} A_n$. Тогда $A \in \sigma(\mathscr{A})$. В силу того, что $\lambda_y^L(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda_y^L(A_n)$ для любого $y \in Y_0$, мы заключаем, что функция λ_A^L является пределом последовательности $\mathscr{B}_L$-измеримых функций $(\lambda_{A_n}^L)$ п. в., следовательно, и сама является $\mathscr{B}_L$-измеримой. Тем самым M — монотонный класс. Так как любой монотонный класс вместе со всякой алгеброй содержит и порожденную ею σ-алгебру, мы заключаем, что $M = \sigma(\mathscr{A})$. $\rhd$

6.6.11. Мы построили случайную меру Лёба на σ-алгебре $\sigma(\mathscr{A})$. Напомним, что, в конструкции скалярной меры Лёба, мера Лёба строится на σ-алгебре, порожденной исходной алгеброй, после чего продолжается на пополнение этой σ-алгебры. Как показывает следующий пример, в конструкции случайной меры Лёба переход к пополнению, вообще говоря, невозможен. Даже в случае, когда пополнения $\sigma(A)$ по всем мерам λ_y^L совпадают для всех $y \in Y$, продолжение λ^L на это пополнение может не быть случайной мерой.

Пусть Y — гиперконечное множество, ν — равномерная вероятностная мера на алгебре $\mathscr{B}$ всех внутренних подмножеств Y. Известно, что в этом случае $\mathscr{B}_L$ не совпадает со множеством всех подмножеств $\mathscr{P}(Y)$. Пусть N — это $\mathscr{B}_L$-неизмеримое подмножество Y. Положим $X := Y$ и $\mathscr{A} := \mathscr{B}$, и пусть для $y \in Y$ выполняется

$$\lambda(A, y) := \begin{cases} 1, & \text{если } y \in A, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что λ является случайной мерой относительно $(X, \mathscr{A})$ и $(Y, \mathscr{B}, \nu)$. Более того, для каждого $y \in Y$ соответствующая мера Лёба $(\lambda_y)_L$ определена на всем $\mathscr{P}(X)$. Тем самым функция λ^L может быть естественным образом продолжена на $\mathscr{P}(X) \times Y$, а именно, $\lambda^L(A, y) := (\lambda_y)_L(A)$. Однако на $\mathscr{P}(X) \times Y$ функция λ^L не является случайной мерой, поскольку $\lambda^L_N = \chi_N$ неизмерима относительно $\mathscr{B}_L$.

6.6.12. Далее мы покажем, что случайную меру можно интерпретировать как векторную меру, а построенное выше продолжение по Лёбу случайной меры является в определенном смысле продолжением по Лёбу векторной меры.

(1) Напомним, что под нестандартной оболочкой $V^{\#}$ внутреннего векторного пространства V подразумевают фактор-пространство V_1/V_2, где $V_1 := \operatorname{ltd}(V)$ и $V_2 := \mu(V)$, см. 6.1.1.

Например, нестандартная оболочка нормированного пространства, с которой мы уже сталкивались, получается факторизацией подпространства допустимых векторов по подпространству векторов с бесконечно малыми нормами.

Пусть F — внутренняя конечно-аддитивная V-значная мера на внутреннем измеримом пространстве $(X, \mathscr{A})$, причем образ F лежит в V_1. Тогда функция $F^{\#} : \mathscr{A} \to V^{\#}$, определенная как $F^{\#}(A) := F(V)^{\#}$, является счетно-аддитивной мерой на $\mathscr{A}$. Естественно было бы назвать векторной мерой Лёба продолжение $F^{\#}$ на пополнение $\sigma(\mathscr{A})$. Однако, в отличие от скалярного случая, мы не можем гарантировать, что $F^{\#}$ продолжается на $\sigma(\mathscr{A})$. Мы покажем ниже, что когда F — векторная мера, соответствующая случайной мере, такое продолжение всегда существует.

(2) Пусть $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ — внутреннее пространство с мерой, а $(Y, \mathscr{B}_L, \nu_L)$ — соответствующее пространство Лёба. Обозначим через $L_0(\nu)$ пространство $\mathscr{B}$-измеримых функций из Y в ${}^*\overline{\mathbb{R}}$. Как обычно, мы будем отождествлять функции, равные ν-почти всюду. Рассмотрим в $L_0(\nu)$ внешние подпространства V_1 и V_2, состоящие соответственно из ν_L-почти всюду доступных и ν_L-почти всюду бесконечно малых функций. То есть $f \in V_1$ (соответственно $f \in V_2$), если найдется $U \in \mathscr{B}_L$ такое, что $\nu_L(Y - U) = 0$ и $f(y)$ доступно (соответственно бесконечно мало) для каждого $y \in U$. Это определение корректно, поскольку если $f \in V_1$ (соответственно $f \in V_2$) и $g(y) = f(y)$ для ν-почти всех y, то $g(y) = f(y)$ для ν_L-почти всех y, так что g тоже лежит в V_1 (соответственно в V_2). Назовем ***нестандартной оболочкой*** $L_0(\nu)^{\#}$ фактор-пространство V_1/V_2. Оболочку $L_0(\nu)^{\#}$ можно отождествить с пространством $L_0(\nu_L)$ функций из Y в $\overline{R}$, измеримых относительно $\mathscr{B}_L$. А именно, фактор-класс $f + V_2 \in V_1/V_2$ отображается в ${}^\circ f$, из теоремы о лифтинге следует, что это взаимно-однозначное линейное отображение. Таким образом, $L_0(\nu)^{\#} = L_0(\nu_L)$.

(3) Пусть, как и ранее, λ — внутренняя случайная мера относительно $(X, \mathscr{A})$ и $(Y, \mathscr{B}, \nu)$. Предположим также, что $\lambda(A, y)$ доступно для всех $A \in \mathscr{A}$ и почти всех $y \in Y$. Пусть λ^L — продолжение λ, как в теореме 6.6.10. Заметим, что обе эти меры можно рассматривать как векторные меры. А именно, определим векторные меры $\Lambda : \mathscr{A} \to L_0(\nu)$ и $\Lambda^L : \sigma(\mathscr{A}) \to L_0(\nu_L)$ по правилам $\Lambda(A) := \lambda_A$ и $\Lambda^L(A) := \lambda_A^L$.

6.6.13. *Теорема.* *Мера $\Lambda^{\#}$ (см. 6.6.12 (1)) определена корректно и допускает продолжение на $\sigma(\mathscr{A})$; т. е. существует векторная мера Лёба для Λ. Более того, продолжение $\Lambda^{\#}$ совпадает с Λ^L на $\sigma(\mathscr{A})$.*

$\lhd$ Из условия доступности $\lambda(A, y)$ для всех $A \in \mathscr{A}$ и почти всех $y \in Y$ следует, что для каждого $A \in \mathscr{A}$ функция $\Lambda(A) = \lambda_A$ лежит в V_1. Отсюда следует, что $\Lambda^{\#}$ определена на $\mathscr{A}$. С учетом отождествления, упомянутого в 6.6.12 (2), для каждого $A \in \mathscr{A}$ мы имеем

$$\Lambda^{\#}(A) = \Lambda(A)^{\#} = (\lambda_A)^{\#} = {}^\circ\lambda_A = \lambda_A^L = \Lambda^L(A) \text{ п. в.},$$

так что $\Lambda^{\#}$ совпадает с Λ^L на $\mathscr{A}$. Но поскольку мера Λ^L определена на $\sigma(A)$, мы заключаем, что Λ^L является продолжением $\Lambda^{\#}$ на $\sigma(\mathscr{A})$. $\rhd$

6.6.14. Примечания.

(1) Псевдоинтегральные операторы введены Арвесоном [253] в связи с изучением операторных алгебр в L^2. Далее они изучались

Фахури [304] (операторы в L^1) и Кэлтоном [362] (операторы в L^p при $0 < p \leq 1$). Различные аспекты псевдоинтегральных операторов отражены в [227–229, 362–365, 477–481, 519–521]. Необходимые сведения о псевдоинтегральных операторах имеются в [387].

(2) Основные результаты этого параграфа получены В. Г. Троицким и опубликованы в [213].

Глава 7

Инфинитезимали в гармоническом анализе

В текущей главе изучается гиперприближение преобразования Фурье на локально компактной абелевой группе.

Вначале мы рассматриваем преобразование Фурье на вещественной прямой

$$\mathscr{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}).$$

В этом случае матрица дискретного преобразования Фурье применяется к таблице значений функции f в узлах $-L\Delta_1, \ldots, L\Delta_1$. Полученный вектор мы сравниваем с таблицей значений функции $\mathscr{F}(f)$ в узлах $-L\Delta, \ldots, L\Delta$.

При этом выясняются условия, при которых норма разности этих двух векторов стремится к нулю при условии $\Delta \to 0$, $\Delta_1 \to 0$ и $L\Delta, L\Delta_1 \to +\infty$ (или, что то же самое, эта норма является бесконечно малой, как только $\Delta \approx 0$, $\Delta_1 \approx 0$ и $L\Delta, L\Delta_1 \approx +\infty$). Ответ зависит от соотношений между L, Δ и Δ_1.

Результаты, изложенные в 7.1 для преобразования Фурье на вещественной прямой, носят теоретико-групповой характер и допускают распространение на случай произвольной сепарабельной локально компактной абелевой группы.

Исходя из гиперприближения локально компактной абелевой группы, мы строим дискретное приближение гильбертова пространства квадратично-суммируемых функций на этой группе.

В заключение главы мы применяем все изложенные ранее конструкции к построению конечномерных приближений операторов на основе аппроксимации их символов, устанавливая попутно результаты о предельном поведении спектров для операторов Гильберта — Шмидта и операторов типа Шрёдингера.

7.1. Гиперприближение преобразования Фурье на прямой

Здесь посредством дискретного преобразования Фурье изучается возможность построения приближений для преобразования Фурье $\mathscr{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$.

7.1.1. Всюду в этом параграфе используются следующие обозначения: $X := \{k \in {}^*\mathbb{Z} : -L \le k \le L\}$ и $N := 2L+1$, где L — бесконечно большое число (т. е. $L \approx +\infty$); Δ и Δ' — строго положительные бесконечно малые числа ($0 < \Delta, \Delta' \approx 0$), причем $N\Delta$, $N\Delta' \approx +\infty$; функции $\jmath : X \to {}^*\mathbb{R}$ и $\jmath' : X \to {}^*\mathbb{R}$ вводятся равенствами $\jmath(k) := k\Delta$ и $\jmath'(k) := k\Delta'$. Тем самым $(X, \jmath, \Delta)$ и $(X, \jmath', \Delta')$ — гиперприближения пространства $(\mathbb{R}, \Omega, dx)$, где Ω — это σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств и dx — мера Лебега на прямой $\mathbb{R}$ (см. 6.4.9 (1)).

Рассмотрим гиперконечномерное пространство $\mathbb{C}^X$ с фиксированным базисом $\{E_k : k \in X\}$, где $E_k(m) := \delta_{km}$ для $k, m \in X$. Все внутренние линейные операторы, действующие в $\mathbb{C}^X$, задаются матрицами в этом базисе. В пространстве $\mathbb{C}^X$ вводится скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_\Delta$ (или $(\cdot,\cdot)_{\Delta'}$), определяемое соотношением $(E_k, E_m)_\Delta := \Delta\delta_{km}$ (соответственно $(E_k, E_m)_{\Delta'} := \Delta'\delta_{km}$). Символом $\mathscr{L}_{2\Delta}$ (или $\mathscr{L}_{2\Delta'}$) обозначают пространство $\mathbb{C}^X$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_\Delta$ (соответственно $(\cdot,\cdot)_{\Delta'}$).

Дискретным преобразованием Фурье называют оператор $\Phi : \mathbb{C}^X \to \mathbb{C}^X$, определяемый матрицей $(\exp(-2\pi i\alpha\beta/N))_{\alpha,\beta=-L}^{L}$. Ниже мы рассматриваем дискретное преобразование Фурье $\Phi_\Delta := \Delta\Phi : \mathscr{L}_{2\Delta} \to \mathscr{L}_{2\Delta'}$. Легко проверить, что

$$(\Phi_\Delta(F), \Phi_\Delta(G))_{\Delta'} = N\Delta\Delta'(F, G)_\Delta.$$

Тем самым $\|\Phi_\Delta\| = N\Delta\Delta'$ и, стало быть, определен ненулевой оператор $\Phi_\Delta^\# : \mathscr{L}_{2\Delta}^\# \to \mathscr{L}_{2\Delta'}^\#$ при условии, что $0 < N\Delta\Delta' < +\infty$.

В этом параграфе, если не оговорено противное, мы предполагаем, что $N\Delta\Delta' \approx 1$.

Случай точного равенства выделяется особо, при этом используется обозначение $\widehat{\Delta} := (N\Delta)^{-1}$. При этом гиперприближение пространства $(\mathbb{R}, \Omega, dx)$ обозначается через $(X, \widehat{\jmath}, \widehat{\Delta})$.

Положим $M := \jmath^{-1}(\mathrm{nst}\,({}^*\mathbb{R}))$ и $\varphi := \mathrm{st} \circ \jmath|_M : M \to \mathbb{R}$. Тогда φ порождает отображение $\jmath_2 : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\nu_\Delta^M) \subset \mathscr{L}^{\#}_{2,\Delta}$.

Напомним, что если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то $\jmath_2(f) = F^{\#}$, где $F \in \mathscr{S}_2(M)$ — лифтинг функции $f \circ \varphi$ (называемый также лифтингом функции f). Более того, если функция f ограничена и непрерывна почти всюду, а $|f|^2$ удовлетворяет условиям 6.4.11 (2), то в качестве F можно взять вектор $X_\Delta(f)$ из $\mathbb{C}^X$, где $X_\Delta(f)_k := {}^*f(k\Delta)$ для $k \in X$ (см. 6.4.11).

Величины M', φ', $\jmath_2'$ и $X_{\Delta'}(f)$ (а также $\widehat{M}$, $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\jmath}_2$ и $X_{\widehat{\Delta}}(f)$) определяются аналогичным образом с помощью параметра Δ' (соответственно $\widehat{\Delta}$).

Наконец, символом $\mathscr{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ мы будем обозначать преобразование Фурье:

$$\mathscr{F}(f)(y) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi i x y)\, dx.$$

7.1.2. Теорема. *Если $N\Delta\Delta' \approx 1$, то дискретное преобразование Фурье $\Phi_\Delta : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta'}$ является гиперприближением оператора $\mathscr{F} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$.*

$\triangleleft$ Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество характеристических функций всех отрезков вида $[0, a]$ и $[-a, 0]$, где $a > 0$. Тогда линейная оболочка $\mathfrak{M}$ плотна в $L_2(\mathbb{R})$ и можно воспользоваться 6.5.1 (2). Пусть $f := \chi_{[0,a]}$ и T — бесконечно большое натуральное число, такое что

$$(T-1)\Delta \le a < T\Delta.$$

В силу определения гиперприближения в 6.5.1 достаточно доказать, что

$$\Delta' \sum_{k=-L}^{L} \left| \Delta \sum_{n=0}^{T-1} \exp(-2\pi i n k/N) - \int\limits_0^a \exp(-2\pi i x k \Delta')\, dx \right|^2 \approx 0.$$

Ясно, что в последнем соотношении достаточно рассмотреть слагаемые под знаком суммы $\sum_{k=1}^{L}$. Более того, $\int_0^a$ можно заменить на

$\int_0^{T\Delta}$, так как $N\Delta\Delta' \approx 1$ по условию и, следовательно,

$$\Delta' \sum_{k=-L}^{L} \left| \int_a^{T\Delta} \exp(-2\pi i x k \Delta')\, dx \right|^2 \leq N\Delta^2\Delta' \approx \Delta \approx 0.$$

Таким образом, осуществив необходимые элементарные вычисления, мы видим, что нам требуется обосновать лишь соотношение

$$\Delta' \sum_{k=-L}^{L} |\Delta(1 - \exp(-2\pi i k T/N))(1 - \exp(-2\pi i k/N))^{-1} - \\ -(2\pi i k \Delta')^{-1}(1 - \exp(-2\pi i k T\Delta\Delta'))|^2 \approx 0.$$

Заменив в этом соотношении Δ' на $\widehat{\Delta} := (N\Delta)^{-1}$, получим

$$\frac{\Delta}{N} \sum_{k=1}^{L} |1 - \exp(-2\pi i k T/N)|^2 |(1 - \exp(-2\pi i k/N))^{-1} - N/(2\pi i k)|^2 \approx 0.$$

Возникшее соотношение очевидно. В самом деле, для каждого $k \in [1, L]$ будет $0 < 2\pi k/N < \pi$. Стало быть, функция $(1 - \exp(-i\varphi))^{-1} - (i\varphi)^{-1}$ имеет конечный предел при $\varphi \to 0$ и, следовательно, ограничена на $[0, \pi]$. Из сказанного ясно, что искомое соотношение вытекает из приближенного равенства

$$\Delta' \sum_{k=1}^{L} |(2\pi i k \Delta')^{-1}(1 - \exp(-2\pi i k T\Delta\Delta')) - \\ -N\Delta(2\pi i k)^{-1}(1 - \exp(-2\pi i k T/N))|^2 \approx 0,$$

которое, в свою очередь, является следствием следующих двух формул:

$$\frac{1}{\Delta'} \sum_{k=1}^{L} k^{-2} |(N\Delta\Delta' - 1)(1 - \exp(2\pi i k T/N))|^2 \approx 0$$

и

$$\frac{1}{\Delta'} \sum_{k=1}^{L} k^{-2} |\exp(-2\pi i k T\Delta\Delta') - \exp(-2\pi i k T/N)|^2 \approx 0.$$

Докажем только первую формулу, так как вторая доказывается аналогично.

Пусть $\alpha := N\Delta\Delta' - 1 \approx 0$ и $\overline{a} := T\Delta \approx a$. Тогда нужная нам формула эквивалентна соотношению

$$\frac{\alpha^2}{\Delta'} \sum_{k=1}^{L} \frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{\pi k \overline{a}}{N\Delta} \approx 0.$$

Если $\alpha^2 M\Delta' \approx 0$, то последнее соотношение немедленно вытекает из доступности $\overline{a}$ и неравенства $\sin^2 x \le x^2$. Если же $\alpha^2 M\Delta' \not\approx 0$, то полагаем $S := \left[\frac{1}{\alpha\Delta'}\right]$. В этом случае число $S\Delta'$ доступно, $\alpha^2 S\Delta' \approx 0$ и, стало быть, $S < M$. Отсюда выводим:

$$\frac{\alpha^2}{\Delta'} \sum_{k=1}^{L} \frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{\pi k \overline{a}}{N\Delta} = \frac{\alpha^2}{\Delta'} \sum_{k=1}^{S} \frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{\pi k \overline{a}}{N\Delta} + \frac{\alpha^2}{\Delta'} \sum_{k=S+1}^{L} \frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{\pi k \overline{a}}{N\Delta}.$$

Первый член в правой части равенства бесконечно мал, так как $\alpha^2 S\Delta' \approx 0$. То же самое верно и для второго члена, поскольку

$$\frac{\alpha^2}{\Delta'} \sum_{k=S+1}^{L} \frac{1}{k^2} \le \frac{\alpha^2}{\Delta'}(S^{-1} - M^{-1}),$$

причем $S\Delta'$ и $M\Delta'$ — бесконечно большие числа. $\triangleright$

7.1.3. Рассмотрим два следствия доказанной теоремы.

(1) *Если $N\Delta\Delta' \approx 2\pi h$, где $h > 0$ — стандартная константа, то дискретное преобразование Фурье $\Phi_\Delta : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta'}$ является гиперприближением преобразования Фурье $\mathscr{F}_h : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, заданного формулой*

$$\mathscr{F}_h(f)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ixy/h)\, dx.$$

$\triangleleft$ Для доказательства нужно перейти от функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ к функции φ, заданной соотношением $\varphi(t) := f(2\pi h t)$, и заменить Δ на $\Delta/2\pi h$. $\triangleright$

(2) *Предположим, что функции f и $\mathscr{F}(f)$ ограничены и непрерывны почти всюду, а функции $|f|^2$ и $|\mathscr{F}(f)|^2$ удовлетворяют условию*

$$\lim_{\substack{\Delta\to 0\\ A\to\infty}} \Delta \sum_{|k|>\frac{A}{\Delta}} \bigl|f(k\Delta)\bigr| = 0.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \Delta'_n \sum_{k=-n}^{n} \Biggl| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-2\pi i x k\Delta'_n)\,dx -$$
$$-\Delta_n \sum_{m=-n}^{n} f(m\Delta_n)\exp(-2\pi i k m/n)\Biggr|^2 = 0$$

для любых последовательностей (Δ_n) и (Δ'_n) таких, что $\Delta_n \to 0$, $\Delta'_n \to 0$ и $n\Delta_n \cdot \Delta'_n \to 1/2$ при $n \to \infty$.

$\lhd$ Это стандартный вариант теоремы 7.1.2, который немедленно вытекает из 6.5.10 (3) (см. также 6.5.11 (5)). $\rhd$

(3) Сравним полученные выше результаты, относящиеся к гиперприближению преобразования Фурье, с аналогичными результатами о гиперприближении операторов Гильберта — Шмидта (см. 6.5).

Преобразование Фурье $\mathscr{F}$ — оператор с ограниченным аналитическим ядром $k_{\mathscr{F}}(x,y) := \exp(-2\pi i x y)$. Если рассматривается оператор Гильберта — Шмидта с ограниченным и почти всюду непрерывным ядром $k \in L_2(\mathbb{R}^2)$, для которого $|k|^2$ удовлетворяет условию из 6.5.5 (1) (т. е. $k \in \widetilde{\mathscr{H}_2}$), то оператор $A_k : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta}$ с матрицей $(\Delta^* k(\alpha\Delta, \beta\Delta))^L_{\alpha,\beta=-L}$ будет гиперприближением интегрального оператора с ядром k.

Дискретное преобразование Фурье Φ_Δ, рассматриваемое в качестве оператора из $\mathscr{L}_{2,\Delta}$ в $\mathscr{L}_{2,\Delta}$, станет гиперприближением преобразования Фурье $\mathscr{F}$, если потребовать, чтобы $N\Delta^2 = 1$ (или $N\Delta^2 \approx 1$), см. теорему 7.1.2. При этом матрица оператора Φ_Δ принимает вид

$$\mathscr{A}_k := \Delta \cdot k_{\mathscr{F}}(\alpha\Delta, \beta\Delta)^L_{\alpha,\beta=-L}.$$

Следующее предложение показывает, что при других соотношениях между N и Δ матрица $\mathscr{A}_k$ может перестать быть гиперприближением оператора $\mathscr{F}$.

7.1.4. *Если* $N\Delta^2 = 2$, *то оператор* $B : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta}$, *определяемый матрицей* $\mathscr{A}_k$, *не будет гиперприближением преобразования Фурье* $\mathscr{F}$.

$\lhd$ Матрицу оператора B можно записать в виде

$$(\Delta \exp(-4\pi inm/N))_{n,m=-L}^{L}.$$

Положим $f := \chi_{\left[0;\sqrt{3/2}\right]}$ и покажем, что выполняется неравенство

$$^{\circ}(\|B(X_\Delta(f)) - X_\Delta(\mathscr{F}(f))\|_\Delta) > 0.$$

Выберем бесконечно большое натуральное число T, для которого $(T-1)\Delta \le \sqrt{3/2} < T\Delta$. Элементарные преобразования показывают, что требуемое вытекает из неравенства

$$^{\circ}\Bigg(\Delta^3 \sum_{m=L-T}^{L} |1 - \exp(-4\pi imT/N)|^2 \times$$
$$\times |(1 - \exp(-4\pi im/N))^{-1} - N/(4\pi im)|^2\Bigg) > 0.$$

Так как $T/N \approx 0$, то можно без труда показать, что сумма под знаком стандартной части больше или равняется выражению

$$\left(\Delta^3 \sum_{m=L-T}^{L} \sin^2 \frac{2\pi mT}{N}\right)\left(\sin^2 \frac{2\pi m}{N}\right)^{-1}.$$

Покажем, что стандартная часть последнего числа строго положительна.

Как видно, $\sin^2(2\pi m/N)$ убывает по m при $L - T \le m \le L$. Пусть $S := [2T/3]$. Тогда для некоторых бесконечно малых γ и δ будет $\pi T - 3\pi/4\pi - \gamma \le 2\pi mT/N \le \pi T - \pi/2 - \delta$ при всех $M - T \le m \le M - S$, следовательно, $\sin^2(2\pi mT/N)$ возрастает на указанном интервале. Отсюда вытекает, что в рассматриваемой сумме члены с выделенными номерами возрастают. Далее, член с номером $m := L - T$ больше или равен $\mathscr{D} \cdot \Delta^{-2}$ при некотором стандартном $\mathscr{D} > 0$. Теперь ясно, что вся сумма больше или равняется положительному числу $\mathscr{D}(T - S)\Delta$. Последнее число не инфинитезималь. $\rhd$

7.1.5. Распространим теперь теорему 7.1.2 на некоторый класс обобщенных функций умеренного роста. Предположим, что $N := 2L+1$ и Δ удовлетворяет дополнительному условию $0 < {}^\circ(N\Delta^2) < +\infty$. Заметим, что это условие выполнено также для N и Δ', если $0 < {}^\circ(N\Delta\Delta') < +\infty$.

Прежде всего выясним, как сопоставить обобщенной функции элемент из ${}^*\mathbb{C}^X$. Для этой цели рассмотрим оператор $\mathscr{D}_d : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta}$, определяемый матрицей $((2\Delta)^{-1}d_{nk})_{n,k=-L}^{L}$, где

$$d_{nk} := \begin{cases} 1, & \text{если } k = n \dotplus 1, \\ -1, & \text{если } k = n \dot{-} 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В этом параграфе символы $\dotplus$ и $\dot{-}$ обозначают операции сложения и вычитания в аддитивной группе кольца ${}^*\mathbb{Z}/N{}^*\mathbb{Z}$ с основным множеством $\{-L, \dots, L\}$. Иными словами, если $G := \mathscr{D}_d F$, то $G(k) = (F(k+1) - F(k-1))(2\Delta)^{-1}$.

Ясно, что $\|\mathscr{D}_d\| \approx +\infty$, что не позволяет определить оператор $\mathscr{D}_d^\#$. Чтобы продвинуться дальше, приведем несколько вспомогательных утверждений.

(1) *Если* $G^{(n)} = \mathscr{D}_d^n F$, *то*

$$G^{(n)}(k) = \frac{1}{(2\Delta)^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} F(k \dotplus n \dot{-} 2r).$$

Более того, если $|k| \le L - n$, *то в этом равенстве* $\dotplus$ *и* $\dot{-}$ *можно заменить на* $+$ *и* $-$ *соответственно.*

(2) *Если* $\Delta^{-2}F(\pm(L-t)) \approx 0$ *для произвольных стандартных* s *и* t, *то* $G^{(n)}(\pm(L-m)) \approx 0$ *для стандартных* n *и* m.

(3) *Если* $f \in S(\mathbb{R})$, *то* $\Delta^{-s}{}^*f(\pm(L-t)\Delta) \approx 0$ *для любых стандартных* s *и* t.

$\lhd$ Так как $L\Delta \approx +\infty$ и t стандартно, то $(L-t)\Delta \approx +\infty$. Учитывая также, что $f \in S(\mathbb{R})$, получим $[(L-t)\Delta]^{-s}\,{}^*f(\pm(L-t)\Delta) \approx 0$. Таким образом, $0 \approx \Delta^{-s}[(L-t)\Delta^2]^s\,{}^*f(\pm(L-t)\Delta)$. Остается использовать условие $0 < {}^\circ(N\Delta^2) < +\infty$. $\rhd$

(4) *Если f принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R})$ и n — стандартное натуральное число, то*

$$\|\mathscr{D}_d^n X_\Delta(f) - X_\Delta(f^{(n)})\|_{2,\Delta} \approx 0.$$

$\lhd$ В силу (2) и (3) будет

$$\Delta \sum_{|k|>L-n} |(\mathscr{D}_d^n X_\Delta(f))(k) - X_\Delta(f^{(n)})(k)|^2 \approx 0,$$

поэтому ввиду (1) достаточно показать, что

$$0 \approx S = \Delta \sum_{k=-L+n}^{L-n} \left| \frac{1}{(2\Delta)^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} {}^*f((k+n-2r)\Delta) - {}^*f^{(n)}(k\Delta) \right|^2.$$

По формуле Тейлора

$$f(k\Delta + (n-2r)\Delta) = \sum_{s=0}^{n} \frac{f^{(s)}(k\Delta)}{s!}(n-2r)^s \Delta^s + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi r)}{(n+1)!}(n-2r)^{n+1}\Delta^{n+1}.$$

Отсюда выводим

$$\frac{1}{(2\Delta)^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f((k+n-2r)\Delta) = \\ = \frac{1}{(2\Delta)^n} \sum_{s=0}^{n} \frac{f^{(s)}(k\Delta)}{s!} \Delta^s \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} (n-2r)^s + \\ + \frac{\Delta}{2^n} \sum_{r=0}^{n} \frac{f^{(n+1)}(\xi r)}{(n+1)!}(n-2r)^{n+1}.$$

Используя легко проверяемую формулу

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r r^s \binom{n}{r} = \begin{cases} 0, & \text{если } s < n, \\ (-1)^n n!, & \text{если } s = n, \end{cases}$$

получаем, что первый член правой части полученной формулы равен $f^{(n)}(k\Delta)$. Модуль же второго члена ограничен сверху числом $B\Delta$ для некоторой стандартной константы B, поскольку $f^{(n+1)}$ ограничена на $\mathbb{R}$. Таким образом, $S \leq \Delta \cdot 2(L-n)B^2\Delta^2$ и остается привлечь (1). $\rhd$

7.1.6. Определим последовательность $(\mathscr{L}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ внешних подпространств пространства $\mathscr{L}_{2,\Delta}$ следующими формулами:

$$\mathscr{L}^{(0)} := \left\{F \in \mathscr{L}_{2,\Delta} : (\forall^{\mathrm{st}} a)(\exists^{\mathrm{st}} C)\left(\Delta \sum_{k=-[a/\Delta]}^{[a/\Delta]} |F(k)|^2 < C\right)\right\};$$

$$\mathscr{L}^{(n+1)} := \mathscr{D}_d(\mathscr{L}^{(n)});$$

$$\mathscr{L}^{(\sigma)} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{L}^{(n)}.$$

Пусть $F \in {}^*\mathbb{C}^X$ таков, что

$$^\circ\left(\Delta \sum_{k=-L}^{L} F(k)^* f(k\Delta)\right) = {}^\circ(F, \overline{X_\Delta(f)}) < +\infty$$

для любой стандартной $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Определим линейный (но не обязательно непрерывный) функционал $\psi_F^\Delta : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ по формуле:

$$\psi_F^\Delta(f) := {}^\circ(F, X_\Delta(f))_\Delta.$$

Теорема. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) $\psi_F^\Delta \in (C_0^\infty(\mathbb{R}))'$ *для любого* $F \in \mathscr{L}^{(\sigma)}$*;*

(2) *если* $f \in (C_0^\infty(\mathbb{R}))'$ *и* $f = \varphi^{(k)}$ *для некоторой регулярной обобщенной функции* φ $(k \geq 0)$*, то существует* $F \in \mathscr{L}^{(\sigma)}$ *такой, что* $\psi_F^\Delta = f$*;*

(3) $\psi_{\mathscr{D}_d F}^\Delta = (\psi_F^\Delta)'$ *для любого* $F \in \mathscr{L}^{(\sigma)}$.

$\lhd$ Пусть $(F,G)_\Delta^A := \Delta \sum_{k=-A}^{A} F(k)\overline{G(k)}$ для произвольного $A \leq L$. Предположим, что $f, f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $f_n \to f$ в $C_0^\infty(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$. Тогда для подходящего стандартного числа $a > 0$ носители $\operatorname{supp}(f_n)$ и $\operatorname{supp}(f)$ содержатся в отрезке $[-a, a]$ и последовательность (f_n) сходится к f равномерно. Компактность носителей влечет доступность чисел $\|f_n\|_{L_2}$ и $\|f\|_{L_2}$, а также сходимость $\|f - f_n\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $A := [a/2]$. Тогда имеют место соотношения

$$\|f\|_{L_2} = {}^\circ\|X_\Delta(f)\|_{2,\Delta}^A, \quad \|f_n\|_{L_2} = {}^\circ\|X_\Delta(f_n)\|_{2,\Delta}^A,$$

$$^\circ\|X_\Delta(f - f_n)\|_{2,\Delta}^A \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Если теперь $F \in \mathscr{L}^{(0)}$, то выполнены соотношения

$$|\psi_F^\Delta(f)| = |{}^\circ(F, \overline{X_\Delta(f)})_\Delta| = |{}^\circ(F, \overline{X_\Delta(f)})_\Delta^A| \leq {}^\circ\|F\|_{2,\Delta}^A \cdot {}^\circ\|X_\Delta(f)\|_{2,\Delta}^A.$$

Из определения $\mathscr{L}^{(0)}$ вытекает доступность ${}^\circ\|F\|_{2,\Delta}^A$ и, как установлено выше, число ${}^\circ\|X_\Delta(f)\|_{2,\Delta}^A$ также доступно. Таким образом, значение $\psi_F^\Delta(f)$ доступно для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Аналогично доказывается, что $\psi_F^\Delta(f_n - f) \to 0$ при $n \to \infty$, стало быть, $\psi_F^\Delta \in (C_0^\infty(\mathbb{R}))'$.

Далее, заметим, что $(\mathscr{D}_d^n F, \overline{X_\Delta(f)}) = (-1)^n (F, \overline{\mathscr{D}_d^n X_\Delta(f)})$. Из 7.1.5 (4) вытекает равенство $\mathscr{D}_d^n X_\Delta(f) = X_\Delta(f^{(n)}) + T$, где $\|T\|_{2,\Delta} \approx 0$. Более того, $X_\Delta(f^{(n)})(k) = 0$ при $|k| > A$, поскольку $\operatorname{supp} f^{(n)} \subset [-a, a]$. Как видно из 7.1.5 (1), $\mathscr{D}_d^n X_\Delta(f)(k) = 0$ при $|k| > A + n$. Так как n стандартно, то мы заключаем, что $T(k) = 0$ при $|k| > [b/\Delta]$ для любых стандартных $b > a$. Таким образом, если $B = [b/\Delta]$, то $(F, T)_\Delta = (F, T)_\Delta^B \approx 0$, ибо $\|F\|_{2,\Delta}^B$ доступно и $\|T\|_{2,\Delta}^B = \|T\|_{2,\Delta} \approx 0$. Тем самым $(\mathscr{D}_d^n F, \overline{X_\Delta(f)}) \approx (-1)^n (F, \overline{X_\Delta(f^{(n)})})$. Но это означает справедливость равенства $\psi_{\mathscr{D}_d^n F}^\Delta(f) = \psi_F^{\Delta(n)}(f)$, доказывающего утверждения (1) и (3).

Для доказательства (2) нужно лишь заметить, что без ограничения общности можно предполагать функцию φ непрерывной и тогда $X_\Delta(\varphi) \in \mathscr{L}^{(0)}$. ▷

7.1.7. Пусть $\mathfrak{C}^{(0)} := \operatorname{ltd}(\mathscr{L}_{2,\Delta})$; $\mathfrak{C}^{(n+1)} := \mathscr{D}_d \mathfrak{C}^{(n)}$ и

$$\mathfrak{C}^{(\sigma)} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{C}^{(n)}.$$

Понятно, что $\mathfrak{C}^{(0)} \subset \mathscr{L}^{(0)}$, следовательно, $\mathfrak{C}^{(n)} \subset \mathscr{L}^{(n)}$ для всех n и, стало быть, $\mathfrak{C}^{(\sigma)} \subset \mathscr{L}^{(\sigma)}$. Следующие два предложения устанавливаются так же, как и предыдущая теорема:

(1) *Если $F \in \mathfrak{C}^{(\sigma)}$, то ψ_F^Δ — обобщенная функция умеренного роста.*

(2) *Если $f = \varphi^{(k)}$ и $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, то существует такой элемент $F \in \mathfrak{C}^{(\sigma)}$, что $f = \psi_F^\Delta$.*

Предположим теперь, что Δ' удовлетворяет условию $N\Delta\Delta' \approx 1$, и рассмотрим, как и выше, дискретное преобразование Фурье $\Phi_\Delta : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta'}$. Так как оператор Φ_Δ имеет доступную норму, то $\Phi_\Delta(\mathfrak{C}^{(0)}) = \mathrm{ltd}(\mathscr{L}_{2,\Delta'}) = \widehat{\mathfrak{C}}^{(0)}$ и $\Phi_\Delta^{-1}(\widehat{\mathfrak{C}}^{(0)}) = \mathfrak{C}^{(0)}$.

Положим $\mathscr{M}_d := \Phi_\Delta \mathscr{D}_d \Phi_\Delta^{-1} : \mathscr{L}_{2,\Delta'} \to \mathscr{L}_{2,\Delta'}$ и определим последовательность $(\widehat{\mathfrak{C}}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ внешних подпространств пространства $\mathscr{L}_{2,\Delta'}$ формулой $\widehat{\mathfrak{C}}^{(n+1)} := \mathscr{M}_d(\widehat{\mathfrak{C}}^{(n)})$. Очевидно, что $\Phi_\Delta(\mathfrak{C}^{(n)}) = \widehat{\mathfrak{C}}^{(n)}$ и $\widehat{\mathfrak{C}}^{(\sigma)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathfrak{C}}^{(n)} = \Phi_\Delta \mathfrak{C}^{(\sigma)}$.

Прямой подсчет показывает, что оператор $\mathscr{M}_d$ порожден матрицей

$$\left(\frac{i}{\Delta}\sin\frac{2\pi\beta}{N}\delta_{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta=-L}^{L}.$$

Для произвольных $G \in \mathbb{C}^X$ и $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ величина $\psi_G^{\Delta'}(f)$ определяется так же, как и в 7.1.6, но с заменой Δ на Δ' и F на G.

7.1.8. *Для произвольной $f \in S(\mathbb{R})$ имеет место равенство*

$$^\circ\|\mathscr{M}_d^n(X_{\Delta'}(f)) - X_{\Delta'}(\mathscr{M}^n(f))\| = 0.$$

$\triangleleft$ Как видно из указанного в 7.1.7 выражения для матрицы оператора $\mathscr{M}_d$, нужно лишь обосновать соотношение

$$\Delta' \sum_{\beta=-L}^{L} \left| \left(\frac{1}{\Delta}\sin\frac{2\pi\beta}{N}\right)^n f(\beta\Delta') - (2\pi\beta\Delta')^n f(\beta\Delta') \right|^2 \approx 0.$$

Покажем сначала, что если $T < L$, но $T\Delta' \approx +\infty$, то

$$\mathscr{W} := \Delta' \sum_{|\beta|>T} |f(\beta\Delta')|^2 \cdot \frac{1}{\Delta^{2n}} \left| \left(\sin\frac{2\pi\beta}{N}\right)^n - (2\pi\beta\Delta\Delta')^n \right|^2 \approx 0.$$

В самом деле, привлекая условие $N\Delta\Delta' \approx 1$, мы можем подыскать стандартное число C так, чтобы

$$\left| \left(\sin\frac{2\pi\beta}{N}\right)^n - (2\pi\beta\Delta\Delta')^n \right|^2 =$$
$$= \left|\frac{\beta}{N}\right|^{2n} \left| \left(\frac{\beta}{N}\right)^{-n} \left(\sin\frac{2\pi\beta}{N}\right)^n - (2\pi N\Delta\Delta')^n \right|^2 \le C\left|\frac{\beta}{N}\right|^{2n}.$$

Отсюда получаем оценку для $\mathscr{W}$:

$$\mathscr{W} \leq C_1 \Delta' \sum_{|\beta|>T} |f(\beta\Delta')|^2 |\beta\Delta'|^{2n}.$$

Если $\varphi(x) := x^{2n} f(x)$, то $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, поскольку $f \in S(\mathbb{R})$. Более того, функция φ непрерывна, ограничена и удовлетворяет равенству из формулировки предложения. Тем самым внутренняя функция $G : X \to \mathbb{C}$, определяемая формулой $G(\beta) := {}^*f(\beta\Delta')(\beta\Delta')^n$, представляет собой лифтинг φ и $G \in \mathscr{S}_2(M)$. Отсюда выводим, что правая часть полученной выше оценки для $\mathscr{W}$ бесконечно мала и, стало быть, $\mathscr{W} \approx 0$.

В силу 4.6.11 найдется такое $a \approx +\infty$, что $N\Delta' \overset{a}{\approx} +\infty$ и $N\Delta\Delta' - 1 \overset{a}{\approx} 0$. Пусть $T := [a/\Delta']$. Тогда T удовлетворяет тем же условиям, что и выше, следовательно, ввиду ограниченности f достаточно показать, что

$$\mathscr{W}_1 := \Delta' \sum_{\beta=1}^{T} \left| \left(\frac{1}{\Delta} \sin \frac{2\pi\beta}{N} \right)^n - (2\pi\beta\Delta')^n \right|^2 \approx 0.$$

Если $1 \leq \beta \leq T$, то $0 < \beta/N < a/(N\Delta') \overset{a}{\approx} 0$. Тем самым будет

$$\left(\sin \frac{2\pi\beta}{N} \right) \left(\frac{2\pi\beta}{N} \right)^{-1} = 1 - \alpha_\beta,$$

где $\alpha_\beta \overset{a}{\approx} 0$. Отсюда $\Delta^{-n} \big(\sin \frac{2\pi\beta}{N} \big)^n = (1 - \alpha_\beta)(2\pi\beta\Delta')^n (N\Delta\Delta')^{-n}$. В силу выбора a выполняется $(N\Delta\Delta')^{-n} = 1 + \delta$ для некоторого $\delta \overset{a}{\approx} 0$. Наконец, $\Delta^{-n} \big(\sin \frac{2\pi\beta}{N} \big)^n = (1 + \gamma_\beta)(2\pi\beta\Delta')^n$, где $\gamma_\beta \overset{a}{\approx} 0$. Если $\gamma = \max\{|\gamma_\beta| : 1 \leq \beta \leq T\}$, то $\gamma \overset{a}{\approx} 0$, поэтому

$$\mathscr{W}_1 \leq \Delta'\gamma^2 \sum_{\beta=1}^{T} (2\pi\beta\Delta')^{2n} \leq \Delta'\gamma^2 (2\pi)^n (T\Delta')^{2n} \leq (2\pi)^n \gamma^2 a^{2n} \Delta' \approx 0,$$

что и требовалось. $\triangleright$

7.1.9. *Теорема.* *Справедливы следующие утверждения:*

(1) $\psi_G^{\Delta'} \in (S(\mathbb{R}))'$ *для любого* $G \in \widehat{\mathfrak{C}}^{(\sigma)}$;

(2) $\mathscr{F}(\psi_F^{\Delta}) = \psi_{\Phi_\Delta(F)}^{\Delta'}$ *для любого* $F \in \mathfrak{C}^{(\sigma)}$.

$\lhd$ (1): Первое утверждение можно доказать так же, как и теорему из 7.1.6.

(2): Обозначим символом $\mathscr{D}$ оператор дифференцирования в $S(\mathbb{R})$, и пусть $\mathscr{M} := \mathscr{F}\mathscr{D}\mathscr{F}^{-1}$. Тогда $\mathscr{M}(f)(x) := 2\pi i x f(x)$. Второе утверждение достаточно обосновать для $F := \mathscr{D}_d^n G$, где $G \in \mathfrak{C}^{(\sigma)}$. Как видно, требуемое содержится в следующих выкладках:

$$\begin{aligned}
\psi_{\Phi_\Delta(F)}^{\Delta'}(f) &= {}^\circ(\Phi_\Delta(\mathscr{D}_d^n G), \overline{X_{\Delta'}(f)}) = {}^\circ(\mathscr{D}_d^n G, \Phi_\Delta^{-1}(X_{\Delta'}(\overline{f}))) = \\
&= (-1)^n {}^\circ(G, \mathscr{D}_d^n \Phi_\Delta^{-1} X_{\Delta'}(\overline{f})) = \\
&= (-1)^n {}^\circ(G, \Phi_\Delta^{-1} \mathscr{M}_d X_{\Delta'}(\overline{f})) = \\
&= (-1)^n {}^\circ(G, \Phi_\Delta^{-1} X_{\Delta'}(\mathscr{M}^n(\overline{f}))) = \\
&= (-1)^n {}^\circ(G, X_{\Delta'}(\mathscr{F}^{-1}\mathscr{M}^n(\overline{f}))) = \\
&= (-1)^n {}^\circ(G, X_\Delta(\mathscr{D}^n\mathscr{F}^{-1}(\overline{f}))) = \\
&= (-1)^n {}^\circ(G, \mathscr{D}_d^n X_\Delta(\mathscr{F}^{-1}(\overline{f}))) = \\
&= {}^\circ(\mathscr{D}_d^n G, X_\Delta(\mathscr{F}^{-1}(\overline{f}))) = {}^\circ(F, X_\Delta(\mathscr{F}^{-1}(\overline{f}))) = \\
&= \psi_F^\Delta(\mathscr{F}^{-1}(\overline{f})) = (\mathscr{F}\psi_F^\Delta)(f).
\end{aligned}$$

Теорема доказана. $\rhd$

7.1.10. Примечания.

(1) Условие $N\Delta\Delta' \approx 1$ из теоремы 7.1.2 возникает в другой ситуации в хорошо известной *теореме Котельникова*, утверждающей, что если спектр ограниченной функции f лежит в интервале $[-a, a]$, то f полностью определяется своими значениями на множестве $\{n\lambda : -\infty < n < +\infty\}$, где $\lambda \leq (2a)^{-1}$, в соответствии с формулой

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\lambda) \frac{\sin 2\pi a(t - k\lambda)}{2\pi a(t - k\lambda)}\,.$$

В нашем случае значения функции вычисляются в точках $k\Delta$, где $\Delta \approx 1/(N\Delta')$, и нетрудно видеть, что $N\Delta'$ — это в точности длина интервала, на котором рассматривается $\mathscr{F}(f)$.

(2) Условие $N\Delta\Delta' \approx 2\pi h$ из предложения 7.1.3 (1) тесно связано также с ***принципом неопределенности*** из квантовой механики. Рассмотрим однопараметрические группы унитарных операторов $U(u) := \exp(-iuP)$ и $V(v) := \exp(-ivQ)$, где Q и P — операторы координаты и импульса соответственно, т. е. Q — оператор умножения на независимую переменную и $P := \frac{h}{i}\frac{d}{dx}$, где $h > 0$ — фиксированное стандартное число, (***постоянная Планка***). Напомним, что $U(u)\varphi(x) = \varphi(x - uh)$, $V(v)\varphi(x) = \exp(-ivx)\varphi(x)$ и выполняется равенство

$$U(u)V(v) = \exp(ihuv)V(v)U(u),$$

которое по размышлению можно рассматривать как одну из форм соотношения неопределенности.

Введем гиперконечномерные операторы $U_d, V_d : \mathbb{C}^X \to \mathbb{C}^X$ так, что $(U_dF)(k) := F(k \dot{-} 1)$ и V_d — диагональная матрица

$$(\exp(-2\pi ink/N)\delta_{nk})_{n,k=-L}^{L}.$$

Легко проверить, что операторы U_d^r и V_d^m удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$U_d^r V_d^m = \exp(2\pi irm/N)V_d^m U_d^r \quad (r, m \in {}^*\mathbb{Z}/N{}^*\mathbb{Z}).$$

Если $\exp(2\pi irm/N) \approx \exp(\pi ihuv)$, то последнее соотношение превращается в указанное выше коммутационное соотношение для операторов U и V. Однако справедливость условия $\exp(2\pi irm/N) \approx \exp(\pi ihuv)$ требует определенной связи между величинами r, m, u и v; подробности см. в следующем предложении.

(3) *Если $r, m \in {}^*\mathbb{Z}/N{}^*\mathbb{Z}$ таковы, что $r\Delta \approx uh$ и $2\pi m\widehat{\Delta} \approx v$, где u и v — стандартные числа, то U_d^r и $V_d^m : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta}$ будут гиперприближениями операторов $U(u)$ и $V(v)$ соответственно.*

$\lhd$ В качестве множества $\mathfrak{M}$ из 6.5.1 (2) возьмем совокупность характеристических функций замкнутых интервалов. Как видно из определения, $U(u)(\chi_{[a,b]}) = \chi_{[a+uh,b+uh]}$. Заметим, что если $k\Delta$ и $m\Delta$ околостандартны, то $|k|, |m|, |k - m| < L$, поэтому $k \dot{-} m = k - m$ и $U_d^r(F)(k) = F(k - r)$. Понятно также, что для $f = \chi_{[a,b]}$ будет

$$X_\Delta(f)(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n\Delta \notin {}^*[a,b], \\ 1, & \text{если } n\Delta \in {}^*[a,b]. \end{cases}$$

Значит, в силу этого наблюдения,

$$U_d^r(X_\Delta(f))(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n\Delta \notin {}^*[a+r\Delta, b+r\Delta], \\ 1, & \text{если } n\Delta \in {}^*[a+r\Delta, b+r\Delta]. \end{cases}$$

Аналогично

$$X_\Delta(U(u)(f))(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n\Delta \notin {}^*[a+uh, b+uh], \\ 1, & \text{если } n\Delta \in {}^*[a+uh, b+uh]. \end{cases}$$

Теперь ясно, что

$$\Delta \sum_{k=-L}^{L} |U_d^r(X_\Delta(f))(n) - X_\Delta(U(u)(f))(n)|^2 = 2\Delta\big[|(uh - r\Delta)/\Delta|\big] \approx 0,$$

ибо $uh \approx r\Delta$.

Непосредственно проверяются равенства $V(v) = \mathscr{F}_h^{-1} U^{-1}(v) \mathscr{F}_h$ (см. 7.1.3 (1)) и $V_d = \Phi_\Delta^{-1} U_d^{-1} \Phi_\Delta$. Положим $\Delta_1 := 2\pi p\widehat{\Delta}$ и рассмотрим U_d^{-1} как оператор, действующий из $\mathscr{L}_{2,\Delta_1}$ в $\mathscr{L}_{2,\Delta_1}$.

В силу наших предположений $m\Delta_1 \approx vh$, а ввиду доказанного выше U_d^{-m} будет гиперприближением оператора $U^{-1}(v)$. Согласно 7.1.3 (1) оператор $\Phi_\Delta : \mathscr{L}_{2,\Delta} \to \mathscr{L}_{2,\Delta_1}$ представляет собой гиперприближение оператора $\mathscr{F}_h$, т. е. $V_d^m := \Phi_\Delta^{-1} U_d^{-m} \Phi_\Delta$ — гиперприближение оператора $\mathscr{F}_h^{-1} U^{-1}(v) \mathscr{F}_h = V(v)$. $\triangleright$

(4) Теорема 7.1.9 может послужить основой для построения приближения преобразования Фурье обобщенных функций умеренного роста с помощью дискретного преобразования Фурье. К сожалению, такой подход оказывается успешным только для тех функций, которые являются производными функций из $L_2(\mathbb{R})$. В то же время этот класс может быть расширен, как показывает следующий пример.

Пусть $\varphi = 1$. Тогда φ — регулярная обобщенная функция и ввиду 7.1.8 $\varphi = \psi_F^\Delta$, где $F := X_\Delta(f)$, т. е. $F(k) = 1$ для всех $k \in X$. Так как $\mathscr{F}(1) = \delta$, то $\Phi_\Delta(F)(k) = N\Delta\delta_{k0}$. Таким образом, если $G := \Phi_\Delta(F)$, то $\psi_G^{\Delta'}(f) = {}^\circ(G, X_\Delta(f))_{\Delta'} = {}^\circ(N\Delta\Delta'{}^* f(0)) = f(0) = \delta(f)$, поэтому $\mathscr{F}(\psi_F) = \psi_{\Phi_\Delta(F)}^{\Delta'}$.

7.2. Нестандартная оболочка гиперконечной группы

Здесь изучается конструкция, сопоставляющая каждой гиперконечной группе некоторую локально компактную группу.

7.2.1. Рассмотрим аддитивную группу G кольца

$$^*\mathbb{Z}/N^*\mathbb{Z} := \{-L, \dots, L\}$$

(см. 7.1.1). Ясно, что G — внутренняя гиперконечная абелева группа. Выделим в ней две внешние подгруппы $G_0 := \{k \in G : k\Delta \approx 0\}$ и $G_f := \{k \in G : {}^\circ|k\Delta| < +\infty\}$.

Очевидно, что G_0 и G_f можно представить в виде соответственно пересечения и объединения счетных семейств внутренних множеств:

$$G_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \jmath^{-1}({}^*(-n^{-1}, n^{-1})), \quad G_f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \jmath^{-1}({}^*[-n, n]).$$

Далее, отображение $\mathrm{st} : G_f \to \mathbb{R}$ является эпиморфизмом и $\ker(\mathrm{st}) = G_0$, т. е. $\mathbb{R} \simeq G_f/G_0$.

Допустим, что внутреннее множество A совпадает с $\jmath^{-1}({}^*(a, b))$ для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathrm{st}(A) = [a, b]$. Определим внешнее множество $A^\circ := \{c \in A : c + G_0 \subset A\}$. Легко проверить, что $\mathrm{st}(A^\circ) = (a, b)$.

Аналогичным образом можно определить A° для любого внутреннего множества A. В этом случае без труда устанавливается, что множество $\mathrm{st}(A)$ замкнуто, а $\mathrm{st}(A^\circ)$ — открыто.

Тем самым семейство

$$\{\mathrm{st}(A^\circ) : A \text{ — внутреннее подмножество } G_f\}$$

образует базу топологии в $\mathbb{R}$. Выполняется также очевидное равенство ${}^\circ(\Delta \cdot |\jmath^{-1}({}^*[a, b])|) = b - a$. Отсюда видно, что $(G_f, S_\Delta^{G_f}, \nu_\Delta^{G_f})$ — это σ-конечное подпространство пространства Лёба $(G, S_\Delta, \nu_\Delta)$ (см. 6.3.11).

В этом случае $\nu_\Delta^{G_f}$ — инвариантная мера на G_f и, как видно из предыдущего равенства, отображение $\mathrm{st} : G_f \to \mathbb{R}$ сохраняет меру, если в качестве меры Хаара в $\mathbb{R}$ берется мера Лебега.

Пусть $\widehat{G}$ — группа характеров группы G. Тогда внутреннее отображение $n \mapsto \chi_n$, где $\chi_n(m) := \exp(2\pi i m n/N)$ для всех $n, m \in G$, будет изоморфизмом G в $\widehat{G}$. Это утверждение следует из принципа переноса, так как оно справедливо для каждого стандартного N.

Легко видеть, что характер $\chi_n : G \to {}^*\mathbb{C}$ индуцирует с помощью гомоморфизма st характер $\varkappa : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ в том и только в том случае, если $\chi_n|_{G_0} \approx 1$. Поэтому естественно выделить в $\widehat{G}$ внешнюю подгруппу $H_f := \{\chi \in \widehat{G} : \chi|_{G_0} \approx 1\}$ и определить мономорфизм $\widehat{\mathrm{st}} : H_f \to \widehat{\mathbb{R}}$ формулой $\widehat{\mathrm{st}}(\chi)(n) := {}^\circ\chi({}^\circ(n\Delta))$ для $n \in \mathbb{N}$ и $\chi \in \widehat{G}$. Далее, $\ker(\widehat{\mathrm{st}}) = H_0 := \{\chi \in H_f : \chi|_{G_f} \approx 1\}$ и очевидным образом $H_f/H_0 \subset \widehat{\mathbb{R}}$.

(1) Для любого $n \in G$ имеют место эквивалентности:

$$\chi_n \in H_f \leftrightarrow {}^\circ(|n \cdot \widehat{\Delta}|) < +\infty,$$
$$\chi_n \in H_0 \leftrightarrow n \cdot \widehat{\Delta} \approx 0,$$

где $\widehat{\Delta} := (N\Delta)^{-1}$.

$\lhd$ В самом деле, если число $n\widehat{\Delta}$ доступно, то справедливы соотношения:

$$\chi_n(m) = \exp(2\pi i m n/N) = \exp(2\pi i m\Delta \cdot n\widehat{\Delta}) \approx 1,$$

ибо $m\Delta \approx 0$.

Наоборот, предположим, что число $n\widehat{\Delta}$ недоступно. Пусть $m := [N/(2\pi)]$. Тогда будет $m\widehat{\Delta} \approx 0$. В этом случае $\chi_n(m) = \exp 2\pi\left(\frac{N}{2\pi}\right)\Delta \cdot \frac{n}{N\Delta} \approx -1$, так как $0 \leq \alpha < 1$. Получили противоречие.

Доказательство второй эквивалентности проводится аналогично. $\rhd$

Таким образом, группы $\widehat{G}_f$ и $\widehat{G}_0$ устроены так же, как и группы G_f и G_0. Стало быть, $\widehat{G}_f/\widehat{G}_0 \simeq \widehat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$.

Для произвольной локально компактной абелевой группы $\mathfrak{G}$ преобразование Фурье $\mathscr{F} : L_2(\mathfrak{G}) \to L_2(\widehat{\mathfrak{G}})$ определяется формулой $\mathscr{F}(f)(\chi) := (f, \widehat{\chi})$, поэтому, как легко видеть, теорема 7.1.2 имеет групповую интерпретацию. Приступим к рассмотрению общего случая.

Пусть G — внутренняя гиперконечная абелева группа и G_0 и G_f — две подгруппы G такие, что $G_0 \subset G_f$ и выполнены следующие условия:

(A) существует такая последовательность $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ внутренних множеств, что $A_n \subset G_f$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $G_0 = \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$;

(Б) существует такая последовательность $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ внутренних множеств, что $B_n \supset G_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $G_f = \bigcup\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Таким образом, подгруппы G_0 и G_f могут быть либо внутренними, либо внешними.

(2) *Если подгруппы G_0 и G_f группы G, где $G_0 \subset G_f$, удовлетворяют условиям* (А) *и* (Б), *то существует счетное семейство $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ симметричных внутренних множество в G такое, что выполнены утверждения:*

(а) $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} C_n = G_0$;

(б) $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} C_n = G_f$;

(в) $C_n + C_n \subset C_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Если, сверх того, F — внутреннее подмножество G, то

(г) $F \subset G_f \leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})(F \subset C_n)$;

(д) $F \supseteq G_0 \leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})(F \supseteq C_n)$.

$\lhd$ Требуемое легко следует из принципа насыщения. $\rhd$

Ниже мы будем работать с фиксированным счетным семейством $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющим условиям (2). Если $F \subset G_f$, то полагаем $\overset{\circ}{F} := \{g \in G_f : g + G_0 \subset F\}$. Следующее утверждение следует из (2).

(3) *Если F — внутреннее подмножество G_f, то $(\forall g \in G)$ $(g \in \overset{\circ}{F} \leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{Z})(g + C_m \subset F))$.*

Обозначим семейство всех внутренних множеств в G_f символом $\mathrm{In}(G_f)$ и положим $\mathrm{In}_0(G_f) := \{F \in \mathrm{In}(G_f) : G_0 \subset F\}$. Пусть $G^\# := G_f/G_0$ и $\jmath : G_f \to G^\#$ — канонический фактор-гомоморфизм. Если $g \in G_f$ и $A \subset G_f$, то вместо $\jmath(g)$ и $\jmath(A)$ будем писать $g^\#$ и $A^\#$ соответственно.

7.2.2. Теорема. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) *семейство $\mathfrak{U} := \{\overset{\circ}{F}{}^\# : F \in \mathrm{In}(G_f)\}$ образует базу окрестностей нуля некоторой равномерной топологии согласованной с групповой структурой на $G^\#$ и называемой ниже* ***канонической;***

(2) *если $F \in \mathrm{In}(G_f)$, то множество $F^\#$ замкнуто;*

(3) *топологическая группа $G^\#$ полна.*

$\lhd$ (1): Как известно из общей теории топологических групп (см., например, [191]), семейство $\mathfrak{U}$ подмножеств абелевой группы $G^\#$ будет базой фильтра окрестностей нуля некоторой групповой топологии, как только выполнены следующие условия:

(а) $\bigcap\{U : U \in \mathfrak{U}\} = \{e\}$;

(б) $(\forall U, V \in \mathfrak{U}))(\exists W \in \mathfrak{U})(W \subset U \cap V)$;

(в) $(\forall U \in \mathfrak{U})(\exists V \in \mathfrak{U})(V - V \subset U)$;

(г) $(\forall U \in \mathfrak{U})(\forall \xi \in U)(\exists V \in \mathfrak{U})(V + \xi \subset U)$.

Проверим (а). Если $g^\# \in \bigcap\{\overset{\circ}{F}{}^\# : F \in \mathrm{In}_0(G_f)\}$, то для каждого $F \in \mathrm{In}_0(G_f)$ будет $((g + G_0) \cap \overset{\circ}{F} \neq \varnothing)$. Здесь используется тот факт, что $\jmath^{-1}(g^\#) = g + G_0$ и $\jmath^{-1}(\overset{\circ}{F}{}^\#) = \overset{\circ}{F} + G_0 = \overset{\circ}{F}$ (см. определение $\overset{\circ}{F}$). Следовательно, существует $g_1 \in G_0$, для которого $(g + g_1 + G_0 \subset F)$, т. е. $g \in F$. Тем самым $g \in \bigcap \mathrm{In}_0(G_f) = G_0$.

Условие (б) вытекает из включения $(F_1 \cap F_2)^{\circ\#} \subset \overset{\circ}{F}{}_1^\# \cap \overset{\circ}{F}{}_2^\#$, которое проверяется аналогично.

Проверим условие (в). Если $F \in \mathrm{In}_0(G_f)$, то в силу 7.2.1 (2) существует $n \in \mathbb{Z}$ такой, что $C_n + C_n + C_n \subset F$, значит, $C_n + C_n + G_0 \subset F$. Таким образом, $\overset{\circ}{C}_n + \overset{\circ}{C}_n \subset \overset{\circ}{F}$, следовательно, $(\overset{\circ}{C}_n + \overset{\circ}{C}_n)^\# = \overset{\circ}{C}{}_n^\# + \overset{\circ}{C}{}_n^\# \subset \overset{\circ}{F}{}^\#$. Так как множество C_n симметрично, то $\overset{\circ}{C}{}_n^\# = -\overset{\circ}{C}{}_n^\#$.

Условие (г) проверяется аналогично.

(2): Пусть $F \in \mathrm{In}(G_f)$. Покажем, что множество $F^\#$ замкнуто. Если $g^\# \notin F^\#$, то $(g + G_0) \cap F = \varnothing$, значит, $(g + C_n) \cap F = \varnothing$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. (Здесь использована ω^+-насыщенность.) Тем самым $(g + C_{n-1} + G_0) \cap F = \varnothing$ ввиду 7.2.1 (2), поэтому $(g^\# + C_{n-1}^\#) \cap F^\# = \varnothing$. Но тогда $(g^\# + \overset{\circ}{C}{}_{n-1}^\#) \cap F^\# = \varnothing$, так как $\overset{\circ}{C}_{n-1} \subset C_{n-1}$. Это доказывает, что множество $F^\#$ замкнуто, поскольку $\overset{\circ}{C}{}_{n-1}^\# \in \mathfrak{U}$.

(3): Как видно из 7.2.1 (2), каноническая топология на $G^\#$ удовлетворяет первой аксиоме счетности. Поэтому нам достаточно установить только, что всякая последовательность Коши в $G^\#$ имеет предел.

Если $(g_n^\#)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность Коши в $G^\#$, то по определению для всякого $m \in \mathbb{Z}$ найдется $\nu(m) \in \mathbb{N}$ так, что для любых $n_1, n_2 > \nu(m)$ выполняется $g_{n_1}^\# - g_{n_2}^\# \in \overset{\circ}{C}{}_m^\#$. Рассмотрим счетное семейство

$$\Gamma := \{A_{m,n} : n > \nu(m),\ n, m \in \mathbb{N}\},$$

где

$$A_{m,n} := \{g : g_n - g \in C_{m+1}\},$$

и покажем, что Γ — центрированное семейство.

Пусть

$$S := \{A_{m_1,n_1}, \dots, A_{m_k,n_k}\},$$

и выберем $n > \max\{\nu(m_1), \dots, \nu(m_k)\}$. Тогда $g_{n_\imath}^{\#} - g_n^{\#} \in \overset{\circ}{C}{}_{m_\imath}^{\#}$, поэтому $g_{n_\imath} - g_n + g \in \overset{\circ}{C}_{m_\imath}$ для некоторого $g \in G_0$.

Итак, $g_{n_\imath} - g_n + g + G_0 \subset C_{m_\imath}$. Так как $g + G_0 = G_0$, то $g_{n_\imath} - g_n \in C_{m_\imath}$ $(\imath := 1, \dots, k)$, значит, $g_n \in \bigcap S$. Теперь из ω^+-насыщенности получаем существование элемента $g \in \bigcap \Gamma$. Учитывая включение $C_{m+1} \subset \overset{\circ}{C}_{m+2}$, очевидно вытекающее из 7.2.1 (2), выводим, что $g_n^{\#} \to g^{\#}$ при $n \to \infty$. $\triangleright$

Напомним, что внутреннее множество называют *стандартно-конечным* (см. 3.7.7), если его мощность — стандартное натуральное число. Условимся также символом $(*)$ обозначать следующее условие:

$$(\forall\, F_1, F_2 \in \mathrm{In}_0(G_f))(F_1 \subset F_2 \to (\exists\, B \subset F_2)(|B| \in \mathbb{N} \wedge F_1 + B \supseteq F_2)).$$

7.2.3. *Теорема.* *Справедливы утверждения:*

(1) *группа $G^{\#}$ с канонической топологией локально компактна и сепарабельна в том и только в том случае, если выполнено условие $(*)$;*

(2) *если выполнено условие $(*)$, то группа $G^{\#}$ компактна (дискретна) в том и только в том случае, если G_f (соответственно G_0) является внутренней подгруппой группы G.*

$\triangleleft$ (1): Предполагая справедливость условия $(*)$, покажем, что $G^{\#}$ локально компактна. Достаточно установить компактность $F^{\#}$ для любого $F \in \mathrm{In}_0(G_f)$. Замкнутость $F^{\#}$ была показана в 7.2.2. Докажем, что для любой окрестности U нуля в $G^{\#}$ существует конечное множество $\{v_1, \dots, v_k\} \subset F^{\#}$, для которого $\bigcup_{i=1}^{k}(v_i + U) \supset F^{\#}$. Согласно 7.2.1 (2) можно подобрать $n \in \mathbb{Z}$ так, чтобы $C_n \subset F$ и $\overset{\circ}{C}{}_n^{\#} \subset U$. Тогда $C_{n-1} \subset \overset{\circ}{C}_n$, так как $C_{n-1} + C_{n-1} \subset C_n$ и $G_0 \subset C_{n-1}$. Из условия $(*)$ вытекает существование конечного множества $B \subset F$, обеспечивающего включение $C_{n-1}+B\supset F$. Но тогда $\overset{\circ}{C}_n+B\supset F$ и $\overset{\circ}{C}{}_n^{\#}+B^{\#}\supset F^{\#}$. Множество $B^{\#}$ конечно, поскольку B стандартно-конечно. Сепарабельность группы $G^{\#}$ следует из ее метризуемости и соотношения $G^{\#}=\bigcup\{C_n^{\#}:n\in\mathbb{Z}\}$, так как каждое из множеств $C_n^{\#}$ компактно.

Наоборот, предположим, что $G^{\#}$ локально компактна и сепарабельна. Как видно, существует $n_0\in\mathbb{Z}$ такой, что $C_n^{\#}$ компактно для всех $n\le n_0$. Покажем компактность $F^{\#}$ для произвольного $F\in\mathrm{In}(G_f)$. Если $V:=\overset{\circ}{C}{}^{\#}_{n_0-1}$, то $\bigcup\{g^{\#}+V:g\in G_f\}=G^{\#}$. Ввиду предположения о сепарабельности существует такая последовательность $\{g_n\}$, что $G^{\#}=\bigcup_n(g_n^{\#}+V)$, откуда

$$G_f=\bigcup_n(g_n+\overset{\circ}{C}_{n_0-1}+G_0)\subset\bigcup_n(g_n+C_{n_0})\subset G_f.$$

Следовательно, $F\subset\bigcup_n(g_n+C_{n_0})$ и в силу ω_1-насыщенности существует конечное множество $\{n_1,\dots,n_k\}$ со свойством $F\subset\bigcup_{i=1}^k g_{n_i}+C_{n_0}$. Тем самым приходим к включению $F^{\#}\subset\bigcup_{i=1}^k g_{n_i}+C_{n_0}$, из которого вытекает компактность $F^{\#}$. Возьмем теперь $G_0\subset F_1\subset F_2$ и подберем $n\le n_0$ так, чтобы $C_n\subset F_1$. Существуют $g_1,\dots,g_k$, для которых $g_1^{\#},\dots,g_k^{\#}\in F_2^{\#}$ и $\bigcup_{i=1}^k g_i+\overset{\circ}{C}_{n-1}\supset F_2$. Пусть $h_1,\dots,h_k\in F_2$ и $h_i-g_i\in G_0$, т. е. $h_i+G_0=g_i+G_0$. Тогда

$$F_2+G_0\subset\bigcup_{i=1}^k\big(g_i+\overset{\circ}{C}_{n-1}+G_0\big)\subset\bigcup_{i=1}^k(h_i+C_n)\subset\{h_1,\dots,h_k\}+F_1.$$

Полагая $B=\{h_1,\dots,h_k\}$, приходим к условию $(*)$.

(2): Пусть теперь группа $G^{\#}$ компактна. Для произвольного $F\in\mathrm{In}_0(G_f)$ подберем $g_1,\dots,g_k\in G_f$ так, чтобы

$$G^{\#}=\bigcup_{i=1}^k(g_i^{\#}+\overset{\circ}{F}{}^{\#})=\left(\bigcup_{i=1}^k(g_i+\overset{\circ}{F})\right)^{\#}=\left(\bigcup_{i=1}^k(F+g_i)\right)^{\#}(\overset{\circ}{F}\subset F\subset G_f).$$

Множество $K:=\bigcup_{i=1}^k(F+g_i)\subset G_f$ является внутренним. Ясно, что $K^{\#}=G^{\#}$, поэтому $G_f=K+G_0\subset K+F\subset G_f$. Значит, $G_f=K+F$ также внутреннее множество.

Наоборот, пусть G_f — внутренняя подгруппа группы G. Покажем компактность $G^\#$, предполагая справедливость $(*)$. Достаточно установить следующее утверждение:

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\exists B \subset G_f)\left(|B| \in \mathbb{N} \wedge G^\# = \bigcup_{g \in B}\left(g^\# + \overset{\circ}{C}{}_n^\#\right)\right).$$

В силу 7.2.1 (2) $C_{n-1} \subset \overset{\circ}{C}_n$, а согласно условию $(*)$ существует стандартно-конечное множество B такое, что

$$G_f = B + C_{n-1} = B + \overset{\circ}{C}_n = \bigcup_{g \in B}\left(g + \overset{\circ}{C}_n\right).$$

Отсюда $G^\# = \bigcup_{g \in B}(g^\# + \overset{\circ}{C}{}_n^\#)$. На этом мы завершаем доказательство, опуская простую проверку второй части утверждения (2). $\rhd$

Подчеркнем, что из доказанной теоремы 7.2.3 следует компактность $F^\#$ для любого $F \in \mathrm{In}(G_f)$.

7.2.4. Приведем несколько необходимых для дальнейшего вспомогательных фактов о введенных выше объектах.

(1) *Если* $F \subset G_f$, *то* $g + \overset{\circ}{F} = (g + F)^\circ$, $\jmath^{-1}(\jmath(\overset{\circ}{F})) = \overset{\circ}{F}$, $(g + \overset{\circ}{F})^\# = g^\# + \overset{\circ}{F}{}^\#$ *и* $\overset{\circ}{F}{}^\# = {}^c(G_f - F)^\#$, *где* ${}^cA$ *обозначает дополнение множества* A.

(2) *Если* $F \in \mathrm{In}(G_f)$, *то множество* $\overset{\circ}{F}{}^\#$ *открыто, а семейство* $\{\overset{\circ}{F}{}^\# : F \in \mathrm{In}(G_f)\}$ *образует базу канонической топологии на* $G^\#$.

Всюду ниже мы предполагаем, что выполнены условия теоремы 7.2.3.

(3) *Для любых* $F_1, F_2 \in \mathrm{In}_0(G_f)$ *выполняются соотношения* $0 < {}^\circ(|F_1|/|F_2|) < +\infty$.

$\lhd$ По теореме 7.2.3 существует стандартно-конечное множество B (т. е. $|B| \in \mathbb{N}$) такое, что $F_1 + B \supset F_1 \cup F_2 \supset F_2$. Тогда $|F_2| \le |F_1 + B| \le |F_1| \cdot |B|$, значит, ${}^\circ(|F_2|/|F_1|) < +\infty$. Аналогично ${}^\circ(|F_1|/|F_2|) < +\infty$, что и требовалось. $\rhd$

(4) Гипердействительное число $\Delta \in {}^*\mathbb{R}_+$ называют ***нормирующим множителем*** тройки (G, G_0, G_f), если $0 < {}^\circ(\Delta \cdot |F|) < +\infty$ для каждого $F \in \mathrm{In}_0(G_f)$. Как видно из (3), число $\Delta := |F|^{-1} \in {}^*\mathbb{R}_+$ является нормирующим множителем для каждого $F \in \mathrm{In}_0(G_f)$. Таким образом, для любой тройки (G, G_0, G_f) существует нормализующий множитель, удовлетворяющий условиям теоремы 7.2.3. Ясно также, что если Δ — нормирующий множитель, то Δ' будет нормирующим множителем в том и только в том случае, если $0 < {}^\circ\big(\frac{\Delta}{\Delta'}\big) < +\infty$. Кроме того, из (3) видно, что если Δ — нормирующий множитель для (G, G_0, G_f), то $(G_f, S_\Delta^{G_f}, \nu_\Delta^{G_f})$ — σ-конечное подпространство пространства Лёба $(G, S_\Delta, \nu_\Delta)$. Всюду ниже мы пишем просто S вместо $S_\Delta^{G_f}$ и ν_Δ вместо $\nu_\Delta^{G_f}$.

(5) *Для любых $A \in S$ и $g \in G_f$ выполняется $g + A \in S$ и $\nu_\Delta(g + A) = \nu_\Delta(A)$.*

$\lhd$ Очевидно. $\rhd$

(6) *Для каждого элемента B σ-алгебры борелевских множеств $\mathscr{B}$ группы $G^\#$ имеет место соотношение $\jmath^{-1}(B) \in S$.*

$\lhd$ В силу (1) достаточно показать, что $\jmath^{-1}((G_f - F)^\#) \in S$ для произвольного $F \in \mathrm{In}(G_f)$. Это утверждение вытекает из следующих равенств:

$$\jmath^{-1}((G_f - F)^\#) = G_f - F + G_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (C_n - F) + \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} C_m,$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (C_n - F) + \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} C_m = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (C_n - F + \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} C_m),$$

$$C_n - F + \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} C_m = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} (C_n - F + C_m).$$

Обоснование последнего равенства использует ω^+-насыщенность нестандартного универсума. $\rhd$

Определим теперь меру μ_Δ на $\mathscr{B}$, полагая

$$\mu_\Delta(B) := \nu_\Delta(\jmath^{-1}(B)).$$

Непосредственно из (5) следует, что мера μ_Δ инвариантна. Она также регулярна ввиду сепарабельности $G^\#$. Таким образом, μ_Δ — мера Хаара на $G^\#$. Обозначим буквой L пополнение σ-алгебры $\mathscr{B}$ относительно μ_Δ. Продолжение μ_Δ на L будем обозначать тем же символом μ_Δ.

7.2.5. Теорема. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *множество $A \subset G^{\#}$ содержится в L в том и только в том случае, если $\jmath^{-1}(A) \in S$;*

(2) *$\mu_{\Delta}(B) = \nu_{\Delta}(\jmath^{-1}(B))$ для любого $B \in L$.*

$\triangleleft$ Тот факт, что для $A \in L$ выполняются соотношения $\jmath^{-1}(A) \in S$ и $\mu_{\Delta}(A) = \nu_{\Delta}(\jmath^{-1}(A))$, вытекает непосредственно из полноты меры Лёба ν_{Δ}. Поэтому достаточно доказать обратное утверждение для такого множества $A \subset G^{\#}$, что $\jmath^{-1}(A) \subset F \in \mathrm{In}_0(G_f)$. Пусть выполнено последнее включение и $\jmath^{-1}(A) \in S$. Чтобы доказать соотношения $A \in L$ и $\mu_{\Delta}(A) = \nu_{\Delta}(\jmath^{-1}(A))$, достаточно установить, что $\mu_{\mathrm{in}}(A) = \mu_{\mathrm{out}}(A) = \nu_{\Delta}(\jmath^{-1}(A))$, где $\mu_{\mathrm{in}}(A)$ и $\mu_{\mathrm{out}}(A)$ — внутренняя и внешняя меры (в смысле теории меры) Хаара множества A.

Так как $\nu_{\Delta}(F)$ — доступное гиперчисло, значит, $\nu_{\Delta}(\jmath^{-1}(A))$ также доступно. Поэтому для любого стандартного $\varepsilon > 0$ существует внутреннее множество $\mathscr{D} \subset \jmath^{-1}(A)$ такое, что справедливо соотношение $\nu_{\Delta}(\mathscr{D}) \geq \nu_{\Delta}(\jmath^{-1}(A)) - \varepsilon$. Теперь из включения $\mathscr{D}^{\#} \subset A$ и замкнутости множества $\mathscr{D}^{\#}$ выводим $\mu_{\mathrm{in}}(A) \geq \nu_{\Delta}(\jmath^{-1}(A))$.

Предположим, что $A \subset \overset{\circ}{H}{}^{\#}$ для некоторого $H \in \mathrm{In}_0(G_f)$ (в качестве H можно взять, например, $F + F$), и пусть $B := \overset{\circ}{H}{}^{\#} - A$. Тогда $\jmath^{-1}(B) = \overset{\circ}{H} - \jmath^{-1}(A)$ и $\nu_{\Delta}(\jmath^{-1}(A)) + \nu_{\Delta}(\jmath^{-1}(B)) = \nu_{\Delta}(\overset{\circ}{H}) = \mu_{\Delta}(\overset{\circ}{H}{}^{\#})$, ибо $\jmath^{-1}(\overset{\circ}{H}{}^{\#}) = \overset{\circ}{H}$ в силу 7.2.4 (1). Отсюда следует, что $\mu_{\mathrm{in}}(A) + \mu_{\mathrm{in}}(B) \geq \mu_{\Delta}(\overset{\circ}{H}{}^{\#})$. В то же время ввиду регулярности меры μ_{Δ} мы можем выписать следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
\mu_{\Delta}(\overset{\circ}{H}{}^{\#}) &= \sup\{\mu_{\Delta}(E) : E \subset \overset{\circ}{H}{}^{\#},\ E \text{ замкнуто}\} \geq \\
&\geq \sup\{\mu_{\Delta}(C) + \mu_{\Delta}(\mathscr{D}) : C \subset A,\ \mathscr{D} \subset B, C, \mathscr{D} \text{ замкнуты}\} = \\
&= \sup\{\mu_{\Delta}(C) : C \subset A,\ C \text{ замкнуто}\} + \\
&+ \sup\{\mu_{\Delta}(\mathscr{D}) : \mathscr{D} \subset B,\ \mathscr{D} \text{ замкнуто}\} = \\
&= \mu_{\mathrm{in}}(A) + \mu_{\mathrm{in}}(B).
\end{aligned}
$$

Таким образом, $\mu_{\mathrm{in}}(A) + \mu_{\mathrm{in}}(B) = \mu_{\Delta}(\overset{\circ}{H}{}^{\#})$. Если теперь $\varepsilon > 0$, то существует замкнутое множество $C \subset B$ такое, что $\mu_{\Delta}(C) \geq \mu_{\mathrm{in}}(B) - \varepsilon$, и поскольку A содержится в открытом множестве $\overset{\circ}{H}{}^{\#} - C$, то получаем

$$\mu_{\text{out}}(A) \le \mu_\Delta(\overset{\circ}{H}{}^{\#} - C) = \mu_\Delta(\overset{\circ}{H}{}^{\#}) - \mu_\Delta(C) \le$$
$$\le \mu_\Delta(\overset{\circ}{H}{}^{\#}) - \mu_{\text{in}}(B) + \varepsilon = \mu_{\text{in}}(A) + \varepsilon.$$

Тем самым $\mu_{\text{out}}(A) = \mu_{\text{in}}(A)$. Из сказанного выше теперь без труда выводится $\mu_\Delta(A) = \nu_\Delta(\jmath^{-1}(A))$. $\rhd$

7.2.6. Теорема 7.2.5 показывает, что отображение $\jmath : G_f \to G^{\#}$ сохраняет меру. Если $f : G^{\#} \to \mathbb{R}$ является μ_Δ-измеримой функцией, то функция $f \circ \jmath : G_f \to \mathbb{R}$ также будет ν_Δ-измеримой. Ее лифтинг φ будем называть лифтингом f. Таким образом, внутренняя функция $\varphi : G \to {}^*\mathbb{R}$ будет лифтингом f, если $f(g^{\#}) = {}^\circ\varphi(g)$ для ν_Δ-почти всех $g \in G_f$.

Если $\varphi \in \mathscr{S}_p(G_f)$, то функцию φ мы будем называть *$\mathscr{S}_p$-интегрируемым лифтингом* f. Иногда употребляют и более точное выражение: φ — это *$\mathscr{S}_{p,\Delta}$-лифтинг* функции f.

Функция f входит в $L_p(\mu_\Delta)$, где $p \in [1, \infty]$, в том и только в том случае, если f имеет $\mathscr{S}_{p,\Delta}$-интегрируемый лифтинг $\varphi : G \to {}^*\mathbb{R}$. Более того,

$$\int\limits_{G^{\#}} f\, d\mu_\Delta = {}^\circ\Big(\Delta \sum_{g \in G} \varphi(g)\Big),$$

и для любого $p \in [1, \infty]$ имеет место равенство

$$\int\limits_{G^{\#}} |f|^p\, d\mu_\Delta = {}^\circ\Big(\Delta \sum_{g \in G} |\varphi(g)|^p\Big).$$

7.2.7. Пусть $G^\wedge := \widehat{G}$ — внутренняя группа характеров группы G. Гиперконечность G и принцип переноса влекут, что $G^\wedge$ изоморфна G, стало быть, $G^\wedge$ — внутренняя гиперконечная абелева группа.

Следуя [191], будем представлять группу S^1 (ее несущее множество — единичная окружность) как интервал $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ со сложением по модулю 1. В S^1 возьмем счетную систему $\{\Lambda_k : k = 1, 2, \dots\}$ окрестностей нуля, где $\Lambda_k := (-\frac{1}{3k}, \frac{1}{3k})$. Ниже потребуется несколько вспомогательных фактов.

(1) *Если* $\gamma \in \Lambda_1, 2\gamma \in \Lambda_1, \dots, k\gamma \in \Lambda_1$, *то* $\gamma \in \Lambda_k$.

$\lhd$ Очевидно, см. [191]. $\rhd$

Введем две внешние подгруппы $H_0 \subset H_f$ группы $G^\wedge$, определяемые формулами

$$\alpha \in H_0 \leftrightarrow (\forall g \in G_f)(\alpha(g) \approx 0);$$
$$\alpha \in H_f \leftrightarrow (\forall g \in G_0)(\alpha(g) \approx 0).$$

Нам потребуется также счетное семейство $\{W(C_n, \Lambda_k) : n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$, где внутреннее множество $W(C_n, \Lambda_k) \subset G^\wedge$ вводится формулой

$$\alpha \in W(C_n, \Lambda_k) \leftrightarrow (\forall g \in C_n)(\alpha(g) \in \Lambda_k).$$

Аналогично определяется $W(F, \Lambda_k)$ для $F \in \mathrm{In}(G_f)$.

(2) *Имеют место представления* $H_0 = \bigcap_{n,k} W(C_n, \Lambda_k)$ *и* $H_f = \bigcup_n W(C_n, \Lambda_1)$.

$\lhd$ Первое равенство почти очевидно. Докажем второе равенство.

Пусть $\alpha \in W(C_n, \Lambda_1)$, а $m \in \mathbb{Z}$ таково, что $k \cdot C_m \subset C_n$. В этом случае если $g \in C_m$, то $\alpha(g), 2\alpha(g), \dots, k\alpha(g) \in \Lambda_1$ и, стало быть, $\alpha(g) \in \Lambda_k$ ввиду (1). Следовательно, $\alpha(g) \in \Lambda_k$ для всех k и $g \in G_0$, т. е. $\alpha(g) \approx 0$ и $\alpha \in H_f$.

Наоборот, пусть $\alpha \in H_f$. Предположим, что $\alpha \notin W(C_n, \Lambda_1)$ для всех n. Тогда для любого n существует $g \in C_n$ такой, что $(|\alpha(g)| \geq \frac{1}{3})$. Из ω_1-насыщенности вытекает существование $g \in G_0$ со свойством $(|\alpha(g)| \geq \frac{1}{3})$, что противоречит вхождению $\alpha \in H_f$. $\rhd$

Таким образом, тройка $(G^\wedge, H_0, H_f)$ удовлетворяет тем же условиям, что и (G, G_0, G_f), следовательно, мы можем определить каноническую топологию на группе $G^{\wedge\#} := H_f/H_0$. Из теоремы 7.2.3 видно, что $G^{\wedge\#}$ полна относительно соответствующей равномерности. Если $\alpha \in H_f$, то образ α в $G^{\wedge\#}$ при каноническом гомоморфизме обозначается символом $\alpha^\#$.

(3) *Пусть внутренняя функция* $f : G \to {}^*\mathbb{C}$ *такова, что* $f(g_1) \approx f(g_2)$ *как только* g_1, g_2 *и* $g_1 - g_2 \in G_0$, *и* ${}^\circ|f(g)| < +\infty$ *при* $g \in G_f$. *Тогда функция* $\widetilde{f} : G^\# \to \mathbb{C}$, *определяемая формулой* $\widetilde{f}(g^\#) := {}^\circ f(g)$ *для* $g \in G_f$, *будет равномерно непрерывной на* $G^\#$.

$\lhd$ Простое доказательство этого предложения опускается. $\rhd$

Определим теперь отображение $\psi : G^{\wedge\#} \to G^{\#\wedge}$, полагая

$$\psi(\alpha^\#)(g^\#) := {}^\circ(\alpha(g))$$

для произвольных $\alpha \in H_f$ и $g \in G_f$. Тот факт, что $\psi(\alpha^\#) \in G^{\#\wedge}$, следует из (3). Непосредственно устанавливается, что ψ — корректно определенный мономорфизм.

7.2.8. *Теорема.* *Отображение $\psi : G^{\wedge\#} \to \psi(G^{\wedge\#}) \subset G^{\#\wedge}$ является топологическим изоморфизмом.*

$\lhd$ Напомним (см., например, [191]), что топология на двойственной к $G^\#$ группе $G^{\#\wedge}$ определяется базой окрестностей нуля, составленной множествами вида $\mathscr{W}(\mathscr{F}, \Lambda_k)$, где

$$\mathscr{W}(\mathscr{F}, \Lambda_k) := \{h \in G^{\#\wedge} : (\forall \xi \in \mathscr{F})(h(\xi) \in \Lambda_k)\},$$

причем $\mathscr{F}$ — компактное множество в $G^\#$ и $k \in \mathbb{N}$.

Легко видеть, что семейство $\{\mathscr{W}(C_n^\#, \Lambda_k) : n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ также будет базой окрестностей нуля в $G^{\#\wedge}$. Непрерывность ψ и ψ^{-1} вытекает из следующих легко проверяемых включений:

$$\begin{gathered}{}^\circ\psi(\overset{\circ}{W}(C_n, \Lambda_{k+1})) \subset \mathscr{W}(C_n^\#, \Lambda_k);\\ \psi^{-1}(\mathscr{W}(C_n^\#, \Lambda_{k+1})) \subset W(C_n, \Lambda_k)^\#.\end{gathered}$$

Теорема доказана. $\rhd$

7.2.9. Отметим два следствия установленной теоремы 7.2.8.

(1) *Образ $\psi(G^{\wedge\#})$ отображения ψ представляет собой замкнутую подгруппу группы $G^{\#\wedge}$.*

$\lhd$ Доказательство следует из полноты $G^{\wedge\#}$ и равномерной непрерывности ψ. $\rhd$

(2) *Топологическая группа $G^{\#\wedge}$ локально компактна и сепарабельна.*

Гипотеза. *Если (G, G_0, G_f) удовлетворяет условиям теоремы 7.2.3, то отображение $\psi : G^{\wedge\#} \to G^{\#\wedge}$ будет топологическим изоморфизмом, т. е.*

$$\psi(G^{\wedge\#}) = G^{\#\wedge}.$$

7.2.10. Обозначим для краткости $H := G^\wedge$ и отождествим $H^\#$ с $\psi(H^\#)$, полагая $h^\#(g^\#) := {}^\circ(h(g))$ для всех $h \in H_f$ и $g \in G_f$. Тогда $G^{\wedge\#} = H^\#$ и $H^\#$ — замкнутая подгруппа группы $G^{\#\wedge}$. Пусть

$$G'_0 := \{g \in G : (\forall \alpha \in H_f)(\alpha(g) \approx 0)\};$$
$$G'_f := \{g \in G : (\forall \alpha \in H_0)(\alpha(g) \approx 0)\}.$$

Очевидно, что $G'_0 \supset G_0$ и $G'_f \supset G_f$. Положим $G^{\#\prime} := G'_f/G'_0$.

(1) ***Теорема.*** *При указанных выше обозначениях имеет место эквивалентность*

$$H^\# = G^{\#\wedge} \leftrightarrow G'_0 \cap G_f = G_0.$$

$\lhd$ Так как $G = H^\wedge$, то можно применить теорему 7.2.8 и ее следствие 7.2.9 (1) к паре (G'_0, G'_f) и получить, что $G^{\#\prime}$ — замкнутая подгруппа группы $H^{\#\wedge}$. Но $H^\#$ также замкнутая подгруппа группы $G^{\#\wedge}$, поэтому из теоремы двойственности Понтрягина (см. [191]) выводим

$$H^{\#\wedge} = G^\# / \operatorname{Ann} H^\#,$$

где $\operatorname{Ann}(H^\#) := \{\xi \in G^\# : (\forall h \in H^\#)(h(\xi) = 0)\}$.

Канонический образ элемента $g \in G'_f$ в $G^{\#\prime}$ обозначим символом $g^{\#\prime}$. Так как $g^{\#\prime}$ — характер группы $H^\#$, то существует элемент $g_1 \in G_f$ такой, что $g^{\#\prime}(h^\#) = g_1^\#(h^\#)$ для всех $h \in H_f$. Тем самым $h(g - g_1) \approx 0$ для всех $h \in H_f$, поэтому $g - g_1 \in G'_0$. Таким образом, $\forall g \in G'_f (\exists g_1 \in G_f)(g - g_1 \in G'_0)$, следовательно, $G^{\#\prime} = G_f / G_f \cap G'_0$.

Предположим теперь, что $G_f \cap G'_0 = G_0$. Тогда $G^{\#\prime} = G^\#$, значит, $\operatorname{Ann}(H^\#) = 0$ в силу равенства $H^{\#\wedge} = G^\# / \operatorname{Ann}(H^\#)$, поэтому $H^\# = G^{\#\wedge}$.

Наоборот, допустим, что $H^\# = G^{\#\wedge}$, т. е. $H^{\#\wedge} = G^{\#\wedge\wedge}$ и тем самым $H^{\#\wedge} = G^\#$. Тогда $\operatorname{Ann}(H^\#) = 0$. Если в то же время $g \in G'_0 \cap G_f - G_0$, то $g^\# \in \operatorname{Ann}(H^\#)$ и $g^\# \neq 0$. Получено противоречие. $\rhd$

(2) *Имеет место равенство* $G^{\#\prime} = H^{\#\wedge}$.

$\lhd$ Так как $G_f \subset G'_f$, то группа $H'_0 = \{h \in H : (\forall g \in G'_f)\ (h(g) \approx 0)\}$ содержится в H_0. Остается применить (1). $\rhd$

7.2.11. Пусть, как обычно, S^1 — единичная окружность. Пусть, далее, $\chi : G \to {}^*S^1$ — внутренний характер группы G такой, что $\chi|_{G_0} \approx 0$. Тогда существует характер $\widetilde{\chi} : G^{\#} \to S^1$ такой, что $\widetilde{\chi}(g^{\#}) = {}^{\circ}\chi(g)$ для всех $g \in G_f$. Заметим, что равенство $G^{\#\wedge} = G^{\wedge\#}$ означает, что каждый характер $h : G^{\#} \to S^1$ имеет вид $\widetilde{\chi}$. Выведем некоторые достаточные условия, при которых такое равенство справедливо. Начнем с одного вспомогательного предложения.

(1) *Если K — внутренняя гиперконечная абелева группа и $\chi : K \to S^1$ — внутренний характер K, причем $\chi(g) \approx 1$ для всех $g \in K$, то $\chi \equiv 1$.*

$\lhd$ Пусть $|K| = N$. Тогда $\chi(g)^N = 1$, т. е. имеет место равенство $\chi(g) = \exp(2\pi i m_X(g)/N)$.

Очевидно, что отображение $m_X : G \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ — групповой гомоморфизм. Поэтому $m_X(G)$ представляет собой циклическую подгруппу группы $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Следовательно, существует число d, которое делится на N, и при этом $Nm_X(G) = \{kd : 0 \leq k < N/d\}$.

Если N/d — четное число, то, полагая $k = N/2d$, мы получим $\exp(2\pi ikd/N) = \exp \pi i = -1$, что противоречит условию предложения. Если же величина N/d нечетна, то полагаем $k = (N/d - 1)/2$. В этом случае $\exp(2\pi ikd/N) = -\exp(-\pi id/N) \approx -1$ при условии $d/N \approx 0$. Если $d/N \not\approx 0$, то N/d — некоторое стандартное число, скажем, m и $\exp(2\pi ikd/N) = -\exp(-\pi i/m) \not\approx 1$ при $m \neq 1$. Итак, $N = d$. Следовательно, можно заключить, что $m_X(G) = 0$, т. е. $X \equiv 1$. $\rhd$

(2) *Если группа $G^{\#}$ дискретна или компактна, то имеет место равенство $G^{\#\wedge} = G^{\wedge\#}$.*

$\lhd$ Пусть $G^{\#}$ — дискретная группа. Тогда ввиду второй части теоремы 7.2.3 G_0 будет внутренней подгруппой группы G. Согласно (1) $H_f = \{h \in G^{\wedge} : (\forall g \in G_0)(h(g) = 0)\}$. Значит, H_f — внутренняя подгруппа группы $H := G^{\wedge}$. При этом $G_0' := \{g \in G : (\forall h \in H_f)\,(h(g) = 0)\}$ будет внутренней подгруппой группы G. Далее, $H_f = \mathrm{Ann}(G_0)$ и $G_0' = \mathrm{Ann}(H_f)$. По теореме о двойственности аннуляторов в силу принципа переноса имеем $G_0 = G_0'$. Случай компактной группы $G^{\#}$ (т. е. G_f — внутренняя группа) рассматривается в следующем параграфе. $\rhd$

(3) *Если существует подгруппа $K \in \mathrm{In}_0(G_f)$, то имеет место равенство $G^{\#\wedge} = G^{\wedge\#}$.*

$\lhd$ Прежде всего заметим, что тройки (G_0, K, G) и (K, G_f, G) удовлетворяют всем условиям теоремы 7.2.3. В силу этой теоремы $K^\# := K/G_0$ — компактная подгруппа группы $G^\#$, а G_f/K — дискретная группа. Тем самым к этим группам можно применить (2). Покажем, что $G_0' \cap G_f = G_0$. Если это не так, то существует элемент $g_0 \in G_0' \cap G_f - G_0$, для которого возможны два случая:

(а): $g_0 \in K$: В этом случае согласно (2) существует внутренний характер $\chi : K \to {}^*S^1$ такой, что $\chi|_{G_0} \approx 0$ и $\chi(g_0) \not\approx 0$. Согласно принципу переноса χ можно продолжить до внутреннего характера $\varkappa \in H_f$. Как видно, $\varkappa(g_0) \not\approx 0$, что противоречит включению $g_0 \in G_0'$.

(б): $g_0 \notin K$: Вновь в соответствии с (1) существует внутренний характер $h : G \to {}^*S^1$ такой, что $h|_K \approx 1$ и $h(g_0) \not\approx 1$. Таким образом, $h \in H_f$, что опять противоречит включению $g_0 \in G_0'$. В обоих случаях используется тот факт, что характеры локально компактной абелевой группы разделяют точки. $\rhd$

В дальнейшем мы оперируем с тройкой групп (G, G_0, G_f), устроенных так, как описано в преамбуле к теореме 7.2.3.

7.2.12. *Теорема.* *Группа $G^\#$ содержит компактную и открытую подгруппу в том и только в том случае, если существует внутренняя подгруппа K из $\mathrm{In}_0(G_f)$. Более того, $K^\#$ будет компактной и открытой подгруппой группы $G^\#$.*

$\lhd$ Если $K \in \mathrm{In}_0(G_f)$, то $K + G_0 = K$, откуда следует открытость множества $K^\#$. Компактность $K^\#$ была установлена в 7.2.3. Очевидно, что если K — подгруппа G, то $K^\#$ — подгруппа $G^\#$.

Наоборот, допустим теперь, что имеется компактная и открытая подгруппа $U \subset G^\#$. Покажем, что $\jmath^{-1}(U)$ — внутреннее множество. Рассмотрим множество $F \in \mathrm{In}_0(G_f)$, удовлетворяющее условию $F^\# \subset U$. Можно, например, взять C_{n-1} в качестве F, если $\overset{\circ}{C}{}_n^\# \subset U$ (см. 7.2.1 (2)), ибо такое C_n существует из-за открытости U. Так как U компактно, то существуют $g_1^\#, \dots, g_n^\# \in U$ такие, что $U = \bigcup_{i=1}^n (g_i^\# + \overset{\circ}{F}{}^\#)$. Тогда имеет место равенство $U = \bigcup_{i=1}^n (g_i^\# + F^\#)$, поскольку U — подгруппа и $F^\# \subset U$. Итак, $\jmath^{-1}(U) = (\bigcup_{i=1}^n g_i + \overset{\circ}{F}) \subset \bigcup_{i=1}^n g_i + F \subset \jmath^{-1}(U)$, что и требовалось. $\rhd$

7.2.13. Пусть Δ — это нормирующий множитель для тройки (G, G_0, G_f), см. 7.2.4 (4). Как и выше в 7.1.1, положим $\widehat{\Delta} := (\Delta \cdot$

$|G|)^{-1}$. Напомним, что $\mathscr{L}_{2,\Delta}(G)$ — внутреннее гиперконечномерное пространство в ${}^*\mathbb{C}^G$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_\Delta := \Delta \sum_{g \in G} \varphi(g)\overline{\psi(g)}$$

для внутренних $\varphi, \psi \in {}^*\mathbb{C}^G$. Аналогично определяется пространство $\mathscr{L}_{2,\widehat{\Delta}}(\widehat{G})$.

Дискретное преобразование Фурье $\Phi_\Delta^G : \mathscr{L}_{2,\Delta}(G) \to \mathscr{L}_{2,\widehat{\Delta}}(\widehat{G})$ определяется формулой

$$\Phi_\Delta^G(\varphi)(\chi) := (\varphi, \chi)_\Delta \quad (\varphi \in \mathscr{L}_{2,\Delta}(G),\ \chi \in \widehat{G}).$$

Нетрудно проверить, что дискретное преобразование Фурье Φ_Δ^G сохраняет скалярное произведение.

Тройку групп (G, G_0, G_f) называют *допустимой*, если выполнены следующие условия:

(1) $G^{\#\wedge} = G^{\wedge\#}$;

(2) $\widehat{\Delta}$ — нормирующий множитель тройки $(\widehat{G}, H_0, H_f)$ из 7.2.7;

(3) Φ_Δ^G — это гиперприближение преобразования Фурье $\mathscr{F}_\Delta^{G^\#} : L_2(\mu_\Delta) \to L_2(\mu_{\widehat{\Delta}})$, определяемого формулой

$$\mathscr{F}_\Delta^{G^\#}(f)(\varkappa) := \int f(g)\overline{\varkappa(g)}\, d\mu(g) \quad (\varkappa \in G^{\#\wedge}).$$

Из теоремы 7.1.2 видно, что тройка (G, G_0, G_f), рассмотренная в 7.1.1, является допустимой.

7.2.14. Теорема. *Если существует подгруппа $K \in \mathrm{In}_0(G_f)$, то (G, G_0, G_f) — допустимая тройка.*

$\lhd$ Сначала покажем, что $\widehat{\Delta}$ — нормирующий множитель для $\widehat{G}$. С этой целью рассмотрим подгруппу $K^\perp := \{\chi \in \widehat{G} : \chi|_K = 1\}$. Из 7.2.11 (1) вытекает, что $H_0 \subset K^\perp \subset H_f$. Поэтому достаточно обосновать неравенства $0 < {}^\circ(\widehat{\Delta} \cdot |K^\perp|) < +\infty$. Заметим, что $\widehat{K} = \widehat{G}/K^\perp$ (см. 7.2.4 (3)), следовательно, $|K^\perp| = |\widehat{G}|/|\widehat{K}| = |G|/|K|$, так что $\widehat{\Delta} \cdot |K^\perp| = (\Delta \cdot |K|)^{-1}$. В то же время $0 < {}^\circ(\Delta \cdot |K|) < +\infty$, поскольку Δ — нормирующий множитель для тройки (G, G_0, G_f) и $K \in \mathrm{In}_0(G_f)$.

Как нам известно из теоремы 7.2.12, $K^{\#}$ — компактная и открытая подгруппа группы $G^{\#}$, поэтому $G^{\#}/K^{\#}$ — дискретная счетная группа ввиду сепарабельности $G^{\#}$. Пусть $\{\xi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — полная система представителей классов смежности группы $G^{\#}/K^{\#}$ и $\varkappa \in K^{\#\wedge}$. Определим функцию $f_{k\varkappa} : G^{\#} \to \mathbb{C}$, полагая для каждого $\eta \in G^{\#}$ по определению

$$f_{k\varkappa}(\eta) := \begin{cases} 0, & \text{если } \eta \notin \xi_k + K^{\#}, \\ \varkappa(\eta - \xi_k), & \text{если } \eta \in \xi_k + K^{\#}. \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{M} := \{f_{k\varkappa} : k \in \mathbb{N},\, \varkappa \in K^{\#\wedge}\}$. Так как линейные комбинации характеров плотны в $L_2(K^{\#})$ и $L_2(G^{\#}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} L_2(\xi_k + K^{\#})$, то линейная оболочка множества $\mathfrak{M}$ плотна в $L_2(G^{\#})$ и можно применить 6.5.1 (2).

Пусть последовательность $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в G_f такова, что $x_k^{\#} = \xi_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Выберем $\varkappa_0 \in K^{\#\wedge}$ и характер $\chi_0 \in \widehat{K}$ так, чтобы $\chi_0|_{G_0} \approx 1$ и $\widetilde{\chi}_0 = \varkappa_0$ (см. теорему 7.2.11 (2)). Определим внутреннюю функцию $\varphi_{k\chi_0} : G \to {}^*\mathbb{C}$, полагая

$$\varphi_{k\chi_0}(y) := \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin x_k + K, \\ \chi_0(y - x_k), & \text{если } y \in x_k + K \end{cases}$$

для каждого $y \in G$.

Из равенства $K + G_0 = K$ легко выводится, что ${}^\circ\varphi_{k\chi_0}(y) = f_{k\varkappa_0}(y^{\#})$ для всех $y \in G_f$. Значит, $\varphi_{i\chi_0}$ — лифтинг функции $f_{k\varkappa_0}$. Так как функция $\varphi_{k\chi_0}$ ограничена и ее носитель содержится во внутреннем множестве $x_k + K \subset G_f$, то $\varphi_{k\chi_0} \in \mathscr{S}_{2,\Delta}(G)$. Как видно из предложения 6.5.1 (2), достаточно показать, что $\Phi_{\Delta}^{G}(\varphi_{k\chi_0})$ является $\mathscr{S}_{2,\widehat{\Delta}}$-интегрируемым лифтингом функции $\mathscr{F}_{\Delta}^{G^{\#}}(f_{k\varkappa_0})$. Прямым подсчетом устанавливается, что для любых $\varkappa \in G^{\#\wedge}$ и $\chi \in G^{\wedge}$ выполняются равенства:

$$\mathscr{F}_{\Delta}^{G^{\#}}(f_{k\varkappa_0})(\varkappa) = \begin{cases} \overline{\varkappa(\xi_k)} \cdot \mu_{\Delta}(K^{\#}), & \text{если } \varkappa|K^{\#} = \varkappa_0, \\ 0, & \text{если } \varkappa|K^{\#} \neq \varkappa_0; \end{cases}$$

$$\Phi_{\Delta}^{G}(\varphi_{k\chi_0})(\chi) = \begin{cases} \overline{\chi(x_k)} \cdot \Delta|K|, & \text{если } \chi|K = \chi_0, \\ 0, & \text{если } \chi|K \neq \chi_0. \end{cases}$$

Так как $\jmath^{-1}(K^{\#}) = K$, то $\mu_\Delta(K^{\#}) = {}^\circ(\Delta \cdot |K|)$. Если $\varkappa := \widetilde{\chi}$, то очевидным образом выполняется $\varkappa|K^{\#} = \varkappa_0 \leftrightarrow \chi|K = \chi_0$ (см. 7.2.11 (1)).

Теперь ясно, что ${}^\circ\Phi^G_\Delta(\varphi_{k\chi_0}) = \mathscr{F}^{G^{\#}}_\Delta(f_{k\varkappa_0})(\widetilde{\varkappa})$ и $\Phi^G_\Delta(\varphi_{k\chi})$ — лифтинг $\mathscr{F}^{G^{\#}}_\Delta(f_{k\varkappa})$, ибо $\widetilde{\chi}$ совпадает с $\chi^{\#}$.

Внутренняя функция $\Phi^G_\Delta(\varphi_{k\chi_0})$ ограничена и ее носитель содержится во внутреннем множестве $\{\chi \in G^\wedge : \chi|_K = \chi_0\} \subset H_f$, стало быть, $\Phi^G_\Delta(\varphi_{k\chi_0}) \in \mathscr{S}_{2,\widehat{\Delta}}(H_f)$. $\rhd$

7.3. Случай компактной нестандартной оболочки

Этот параграф посвящен изучению таких G, что нестандартная оболочка $G^{\#}$ — компактная группа.

7.3.1. Пусть G — внутренняя гиперконечная группа. Рассмотрим подгруппу G_0 группы G, которая представляет собой пересечение счетного множества внутренних подмножеств и обладает следующим свойством: для любого внутреннего множества F, удовлетворяющего соотношению $G_0 \subset F \subset G$, существует стандартно-конечное множество $B \subset G$ такое, что $F + B = G$. В этом случае группа $G^{\#}$ компактна согласно теореме 7.2.3.

Внутреннюю функцию $\varphi : G \to {}^*\mathbb{C}$ называют *S-непрерывной*, если для любых $g_1, g_2 \in G$ из $g_1 - g_2 \in G_0$ следует $\varphi(g_1) \approx \varphi(g_2)$.

Согласно 7.2.7 (3), если S-непрерывная функция $\varphi : G \to {}^*\mathbb{C}$ *доступна поточечно* (последнее означает, что ${}^\circ|\varphi(g)| < +\infty$ для всех $g \in G$), то функция $\widetilde{\varphi} : G^{\#} \to \mathbb{C}$, определяемая формулой $\widetilde{\varphi}(g^{\#}) = {}^\circ\varphi(g)$ для всех $g \in G$, будет непрерывной. Ниже (см. 7.3.4) мы покажем, что всякая непрерывная функция из $G^{\#}$ в $\mathbb{C}$ может быть представлена в таком виде, но для этого необходимы два вспомогательных факта.

Обозначим символом $CS(G)$ множество всех поточечно доступных S-непрерывных внутренних функций $\varphi : G \to {}^*\mathbb{C}$. Понятно, что $CS(G)$ — внешняя подалгебра внутренней алгебры ${}^*\mathbb{C}^G$.

Положим $\mathfrak{G} := \{\widetilde{\varphi} : \varphi \in CS(G)\}$. Как видно, $\mathfrak{G}$ — подалгебра алгебры $C(G^{\#})$. Следующий результат представляет собой «дискретную» версию теоремы Урысона.

7.3.2. *Если $x, y \in G$ и $x - y \notin G_0$, то существует элемент $\varphi \in CS(G)$, для которого $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(y) = 1$.*

$\lhd$ Из ω^+-насыщенности нестандартного универсума следует, что $y \notin x + C_k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ (см. 7.2.1 (2)). Пусть $V_0 := C_k$ и $V_n := C_{k-n}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность симметричных внутренних множеств такая, что $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$. В силу ω^+-насыщенности существует внутренняя последовательность $(B_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ симметричных подмножеств группы G, для которой $B_{n+1} + B_{n+1} \subset B_n$ для всех $n \in {}^*\mathbb{N}$ и $B_k = V_k$ для всех стандартных $k \in \mathbb{N}$.

Возьмем фиксированное бесконечное $N \in {}^*\mathbb{N}$. Пусть $0 \leq m < n \leq N$ и положим $V_{m,n} := B_{m+1} + \ldots + B_n$. Индукцией по n из включения $B_{n+1} + B_{n+1} \subset B_n$ легко выводится, что $V_{m,n} + B_n \subset B_m$. Рассмотрим теперь рациональные числа

$$r = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n}, \quad a_\imath \in \{0, 1\}.$$

Для произвольного числа $a \in \{0, 1\}$ положим

$$B^a := \begin{cases} B, & \text{если } a = 1, \\ 0, & \text{если } a = 0. \end{cases}$$

Пусть $W_r := B_1^{a_1} + B_2^{a_2} + \ldots + B_n^{a_n}$. Тогда $W_r \subset B_1 + B_2 + \ldots + B_n = V_{0N} \subset B_0 = V_0 = C_k$, следовательно, $y \notin x + B_0$ и, значит, $y \notin x + W_r$. Легко проверить, что $W_r \subset W_{r'}$ при $r < r'$. Определим внутреннюю функцию $\varphi : G \to {}^*\mathbb{R}$, полагая $\varphi(g) := \min\{r : g \in x + W_r\}$. Если $g \notin W_r + x$ для каждого рационального r указанного выше вида, то $\varphi(g) = 1$ и, в частности, $\varphi(y) = 1$. Так как $x \in x+0$, то $\varphi(x) = 0$. Покажем теперь, что для любого $k \in [0, N]$ выполняется $|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, если только $u - v \in B_k$. Отсюда вытекает S-непрерывность φ, поскольку $u - v \in G_0$ влечет $u - v \in B_k$ для каждого стандартного k. Так как множество B_k симметрично, то можно предположить, что $\varphi(u) < \varphi(v)$, и доказать, что $\varphi(v) - \varphi(u) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Заметим также, что $\varphi(u) < 1$, ибо $\max \varphi = 1$. Пусть $q \in \{1, 2, \ldots, 2^k\}$, где $k \leq N$, таково, что $\frac{q-1}{2^k} \leq \varphi(u) < \frac{q}{2^k}$. Если $q = 2^k$ или $q = 2^k - 1$, то $1 - \varphi(u) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ и $\varphi(v) - \varphi(u) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, поскольку $\varphi(v) \leq 1$.

Допустим теперь, что $q < 2^{k-1} - 1$ и $r = \frac{q}{2^k}$. Тогда $\varphi(u) < r$ или, что то же в силу определения φ, $u \in W_r + x$. Но $v - u \in B_k$, поэтому будет $v \in W_r + B_k + x$. В нашем случае $r = \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_k}{2^k}$, где $a_m \in \{0, 1\}$, причем существует m, для которого $a_m = 0$, ибо

$q < 2^k - 1$. Выберем наибольший номер m с указанным свойством. Тогда с учетом включения $B_s + B_s \subset B_{s-1}$ можно написать

$$W_r + B_k = B_1^{a_1} + \ldots + B_{m+1}^{a_{m+1}} + \ldots + B_k^{a_k} + B_k \subset B_1^{a_1} + \ldots + B_{m-1}^{a_{m-1}} + B_m.$$

В то же время $r' := r + \frac{1}{2^k} = \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^k}$. Таким образом, $W_r + B_k = W_{r'}$, значит, $v \in W_{r'} + x$ и $\varphi(v) \le r + \frac{1}{2^k}$. Наконец, $r - \frac{1}{2^k} \le \varphi(u) < \varphi(v) \le r + \frac{1}{2^k}$ и, стало быть, $\varphi(v) - \varphi(u) \le \frac{1}{2^{k-1}}$. $\rhd$

7.3.3. *Подалгебра $\mathfrak{G}$ равномерно плотна в $C(G^\#)$.*

$\lhd$ Прежде всего заметим, что для каждого $\psi \in CS(G)$ очевидным образом выполняется

$$\sup\{\widetilde{\psi}(\xi) : \xi \in G^\#\} = {}^\circ\max\{\psi(g) : g \in G\}.$$

Таким образом, если последовательность $\{\widetilde{\varphi}_n\}$ сходится в $C(G^\#)$ к некоторой функции f, то ${}^\circ\max\{|\varphi_n(g) - \varphi_m(g)| : g \in G\} \to 0$ при $n, m \to \infty$. Поэтому существует стандартная функция N такая, что

$$\max\big\{|\varphi_{n_1}(g) - \varphi_{n_2}(g)| : g \in G\big\} < \frac{1}{m}$$

для всех $n_1, n_2 > N(m)$. Рассмотрим семейство внутренних множеств

$$\big\{\{\varphi : \max\{|\varphi_n(g) - \varphi(g)| : g \in G\} < 1/m\} : n > N(m)\big\}.$$

В силу выбора функции N любое конечное подсемейство указанного семейства имеет непустое пересечение.

Привлекая ω^+-насыщенность нестандартного универсума, найдем внутреннюю функцию $\varphi : G \to {}^*\mathbb{C}$ такую, что

$${}^\circ\max\{|\varphi_n(g) - \varphi(g)| : g \in G\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поточечная доступность и S-непрерывность функции φ устанавливаются без труда. Итак, $\widetilde{\varphi}_n \to \widetilde{\varphi}$ при $n \to \infty$, поэтому $\widetilde{\varphi} = f$. $\rhd$

7.3.4. *Теорема.* *Каждая непрерывная функция $f : G^\# \to \mathbb{C}$ представима в виде $f = \widetilde{\varphi}$ для некоторой S-непрерывной поточечно доступной функции $\varphi : G \to {}^*\mathbb{C}$.*

$\lhd$ Для доказательства теоремы достаточно показать, что алгебра $\mathfrak{G}$ равномерно замкнута и разделяет точки $G^{\#}$. Первое утверждение содержится в 7.3.3, а второе без труда выводится из 7.3.2.

В самом деле, допустим, что $\xi, \eta \in G^{\#}$ и $\xi \neq \eta$. Если $\xi = x^{\#}$ и $\eta = y^{\#}$, то $x - y \notin G_0$ и в силу 7.3.2 существует $\varphi \in CS(G)$, для которой $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(y) = 1$. Но тогда $\widetilde{\varphi}(\xi) = 0$, в то время как $\widetilde{\varphi}(\eta) = 1$. $\rhd$

7.3.5. Рассмотрим еще несколько вспомогательных утверждений.

(1) *Если теорема 7.3.4 применима к каждой тройке групп (G', G'_0, G'_f) и (G'', G''_0, G''_f), то это же самое верно и для тройки $(G' \times G'', G'_0 \times G''_0, G'_f \times G''_f)$. Более того, группа $(G' \times G'')^{\#}$ топологически изоморфна группе $G'^{\#} \times G''^{\#}$.*

$\lhd$ Тривиальное доказательство опускается. $\rhd$

Из этого предложения следует, что если в рассматриваемом случае $G_f = G$, то группа $(G \times G)^{\#} := (G \times G)/(G_0 \times G_0)$ будет топологически изоморфна группе $G^{\#} \times G^{\#} := (G/G_0) \times (G/G_0)$.

(2) *Пусть $K : G^{\#2} \to \mathbb{C}$ — это непрерывная функция и $K := \widetilde{k}$, где внутренняя функция $k : G \times G \to {}^*\mathbb{C}$ является S-непрерывной. Для произвольного $g \in G$ определим функцию $K_{g^{\#}} : G^{\#} \to \mathbb{C}$ формулой $K_{g^{\#}}(\cdot) := K(g^{\#}, \cdot)$. Пусть внутренняя функция $k_g : G \to {}^*\mathbb{C}$ определяется формулой $k_g(\cdot) := k(g, \cdot)$. Тогда k_g будет S-непрерывной и $K_{g^{\#}} = \widetilde{k}_g$.*

$\lhd$ Очевидно. $\rhd$

(3) *Если $f : G^{\#} \to \mathbb{C}$ — непрерывная четная функция, то существует внутренняя S-непрерывная четная функция φ такая, что $f = \widetilde{\varphi}$. Если, сверх того, функции $K : G^{\#2} \to \mathbb{C}$ и $k : G^2 \to {}^*\mathbb{C}$ определены формулами $K(\xi, \eta) = f(\xi - \eta)$ и $k(g_1, g_2) = \varphi(g_1 - g_2)$ соответственно, то $K = \widetilde{k}$.*

$\lhd$ Если $f = \widetilde{\psi}$, где $\psi : G \to {}^*\mathbb{C}$ — внутренняя S-непрерывная функция, то следует положить $\varphi(g) := \frac{1}{2}(\psi(g) + \psi(-g))$. $\rhd$

7.3.6. Перейдем теперь к изучению взаимосвязи между интегральными уравнениями на группе $G^{\#}$ и соответствующими системами линейных алгебраических уравнений на группе G.

Напомним, что раз топологическая группа $G^{\#}$ компактна, то мера Хаара μ конечна и можно предположить, что $\mu(G^{\#}) = 1$. Эта мера связана с равномерной мерой Лёба на G с весом $\Delta := |G|^{-1}$. Из определения лифтинга измеримой функции $f : G^{\#} \to \mathbb{C}$ (см. 7.2.5 и 7.2.6) следует, что если $f = \widetilde{\varphi}$ для некоторой поточечно доступной S-непрерывной функции φ, то φ будет лифтингом f. Более того, $\varphi \in \mathscr{S}_p(G)$ для любого $p \in [1, \infty)$.

В рассматриваемом случае $\Delta = |G|^{-1}$ вместо $\mathscr{L}_{2,\Delta}(G)$ мы будем писать $\mathscr{L}_2(G)$. Зафиксируем в $\mathscr{L}_2(G)$ канонический ортонормальный базис $(e_h)_{h \in G}$, где $e_h(g) := |G|^{1/2}\delta_{hg}$, и рассмотрим уравнения вида

$$\textbf{(1)}\quad \varphi(g) = \lambda \cdot |G|^{-1} \sum_{h \in G} k(g,h)\varphi(h),$$

где k — поточечно доступная симметричная внутренняя функция.

Те λ, для которых указанное уравнение имеет ненулевое решение, будем называть ***собственными значениями*** уравнения (1), а решения, им соответствующие, — ***собственными функциями*** уравнения (1), отвечающими собственному значению λ. Таким образом, собственные значения (1) представляют собой обратные величины ненулевых собственных значений оператора A, определяемого в каноническом ортонормальном базисе матрицей $(a_{gh})_{g,h \in G}$ со следующими элементами $a_{gh} := |G|^{-1}k(g,h)$.

Рассмотрим также соответствующее интегральное уравнение на группе $G^{\#}$:

$$\textbf{(2)}\quad f(\xi) = \gamma \int_{G^{\#}} \widetilde{k}(\xi,\eta) f(\eta)\, d\mu(\eta),$$

где γ — стандартное число.

7.3.7. *Предположим, что $k : G^2 \to {}^*\mathbb{C}$ — внутренняя поточечно доступная S-непрерывная функция, $\varphi : G \to {}^*\mathbb{C}$ — внутренняя поточечно доступная функция и внутренняя функция $\psi : G \to {}^*\mathbb{C}$ определяется формулой*

$$\psi(g) := |G|^{-1} \sum_{h \in G} k(g,h)\varphi(h) \quad (g \in G).$$

Тогда ψ поточечно доступна и S-непрерывна. Более того, если φ является S-непрерывной функцией, то имеет место представление

$$\widetilde{\psi}(\xi) = \int_{G^{\#}} \widetilde{\varphi}(\eta)\widetilde{k}(\xi,\eta)\, d\mu(\eta) \quad (\xi \in G^{\#}).$$

$\lhd$ Функция ψ поточечно доступна потому, что таковы k и φ. Ввиду 7.3.5 (3) и S-непрерывности k будет $k(g_1, h) - k(g_2, h) \approx 0$ для всех $h \in G$, если только $g_1 - g_2 \in G_0$. Иными словами, существует $\alpha \approx 0$ такое, что $|k(g_1, h) - k(g_2, h)| \le \alpha$ для всех $h \in G$. Пусть $C > 0$ — стандартное число, для которого $|\varphi(h)| \le C$ при всех $h \in G$. Тогда $|\psi(g_1) - \psi(g_2)| \le C\alpha \approx 0$, откуда немедленно следует S-непрерывность ψ. Второе утверждение следует из теоремы 6.5.3. $\rhd$

7.3.8. Приведем теперь несколько полезных свойств собственных значений уравнения 7.3.6 (1).

(1) *Уравнение 7.3.6 (1) не имеет бесконечно малых собственных значений. Если λ — доступное собственное значение этого уравнения и R_λ — подпространство собственных функций, отвечающих λ, то $\dim(R_\lambda) \in \mathbb{N}$, т. е. $\dim(R_\lambda)$ — стандартное число.*

$\lhd$ Из поточечной доступности k следует, что ${}^\circ\sum_{g,h\in G} |a_{gh}|^2 < +\infty$. Тем самым A удовлетворяет условиям предложения 6.1.11, откуда и следует требуемое. $\rhd$

Ниже предполагается, что поточечно симметричная внутренняя функция k из 7.3.6 (1) S-непрерывна.

(2) *Если λ — доступное собственное значение, то для каждой собственной $\varphi \in R_\lambda$ существует S-непрерывная поточечно доступная функция, кратная φ.*

$\lhd$ Если $\varphi \in R_\lambda$ и $\varphi \ne 0$, то функция $\varphi_1 := \varphi / \max\{|\varphi(g)| : g \in G\}$ ограничена и $\varphi_1 \in R_\lambda$. Остается применить 7.3.7. $\rhd$

Если $\varphi \in \mathscr{L}_2(G)$, то

$$\|\varphi\|^2 = |G|^{-1} \sum_{g\in G} |\varphi(g)|^2$$

и, кроме того, $\|\varphi\|_\infty = \max\{|\varphi(g)| : g \in G\}$. Стало быть, $\|\varphi\| \le \|\varphi\|_\infty$. Тем не менее справедливо утверждение.

(3) *Если φ — собственная функция уравнения 7.3.6 (1), принадлежащая доступному собственному значению λ, и $\|\varphi\| = 1$, то φ будет S-непрерывной.*

$\lhd$ Пусть $\varphi_1 := C\varphi$ такая S-непрерывная собственная функция уравнения 7.3.6 (1), что $\|\varphi_1\|_\infty = 1$ (см. (2)). Тогда $\|\widetilde{\varphi}\|_\infty = 1$ и, следовательно, $\int_{G^\#} |\widetilde{\varphi}_1|^2 \, d\mu > 0$. Однако φ_1 — лифтинг функции $\widetilde{\varphi}_1$

и ${}^{\circ}\|\varphi_1\|^2 = \int_{G^{\#}} |\widetilde{\varphi}_1|^2\, d\mu$ ввиду поточечной доступности этих функций и 7.2.6. Итак, $0 < {}^{\circ}\|\varphi_1\| < +\infty$. Теперь функция $\varphi_2 = \varphi_1/\|\varphi_1\|$ будет S-непрерывной и поточечно доступной, причем $\|\varphi_2\| = 1$. Так как $\varphi_2 = C_1\varphi$, $\|\varphi\| = 1$ и $C_1 > 0$, то приходим к равенству $C_1 = 1$, значит, $\varphi_2 = \varphi$. $\triangleright$

Утверждение последнего предложения остается в силе для любой собственной функции φ с ненулевой доступной нормой: $0 < {}^{\circ}\|\varphi\| < +\infty$.

7.3.9. *Пусть непрерывная функция $f : G^{\#} \to \mathbb{C}$ является решением интегрального уравнения 7.3.6 (2), где γ — стандартное число, $\gamma \neq 0$.*

Тогда существует стандартное натуральное число n, собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ уравнения 7.3.5 (1) и S-непрерывные доступные собственные функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ такие, что $\lambda_\imath \approx \gamma$ и $\varphi_\imath \in R_{\lambda_i}$ для всех $\imath := 1, \dots, n$, причем f будет линейной комбинацией $\widetilde{\varphi}_1, \dots, \widetilde{\varphi}_n$.

$\triangleleft$ Согласно теореме 6.5.3 (см. также предложение 7.3.7) описанный выше оператор A с матрицей $a_{gh} := |G|^{-1/2}k(g,h)$ в каноническом ортонормальном базисе пространства $\mathscr{L}_2(G)$ будет гиперприближением интегрального оператора $\mathscr{A}$ с ядром $\widetilde{k} : G^{\#2} \to \mathbb{C}$. Это означает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L_2(G^{\#}) & \xrightarrow{\mathscr{A}} & L_2(G^{\#}) \\ {\scriptstyle \jmath_2}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \jmath_2} \\ \mathscr{L}_2(G)^{\#} & \xrightarrow{A} & \mathscr{L}_2(G)^{\#} \end{array}$$

коммутативна.

Напомним, что отображение $\jmath_2$ сопоставляет каждой функции $f \in L_2(G^{\#})$ класс эквивалентности ее $\mathscr{S}_2(G)$-лифтинга, т. е. $\mathscr{S}_2(G)$-лифтинг функции $f \circ \jmath$, где $\jmath : G \to G^{\#}$ — фактор-гомоморфизм.

Из диаграммы видно, что $\jmath_2(f)$ — это собственный вектор $A^{\#}$, принадлежащий собственному значению γ^{-1}. В соответствии с 6.1.10 существует число $\lambda^{-1} \approx \gamma^{-1}$, являющееся собственным значением A. В силу 7.3.8 (3) каждая нормированная собственная функция φ оператора A, принадлежащая λ^{-1}, будет S-непрерывной ($0 < {}^{\circ}|\lambda^{-1}| < +\infty$), причем $\widetilde{\varphi}$ будет собственной функцией $\mathscr{A}$, принадлежащей γ^{-1} ввиду 7.3.7.

Оператор $\mathscr{A}$ компактен, поэтому собственное значение γ^{-1} этого оператора имеет конечную кратность. Следовательно, существует лишь стандартно-конечное число собственных значений оператора A, которые бесконечно близки к γ^{-1}, причем каждое из них имеет стандартно-конечную кратность. Тем самым выполнены условия 6.1.12.

Значит, для некоторого стандартного n существуют $\lambda_1, \dots, \lambda_n \approx \gamma^{-1}$ и ортонормальный набор $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathscr{L}_2(G)$ такие, что $\varphi_k \in R_{\lambda_k^{-1}}$ для каждого $k \leq n$ и $\jmath_2(f) = \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k^{\#}$. Функция φ_k является S-непрерывной, поэтому φ_k служит $\mathscr{S}_2(G)$-лифтингом $\widetilde{\varphi}_k$, следовательно, $\varphi_k^{\#} = \jmath_2(\widetilde{\varphi}_k)$ и мы приходим к соотношению $f = \sum_{k=1}^{n} C_k \widetilde{\varphi}_k$, равносильному требуемому утверждению. $\triangleright$

В заключение параграфа рассмотрим общий вид неприводимых унитарных представлений группы $G^{\#}$. Пусть V — внутреннее гильбертово пространство. Унитарное представление T группы G в пространстве V (т. е. гомоморфизм T группы G в пространство $B(V)$ ограниченных эндоморфизмов V, для которого $T(g)$ — унитарный оператор для любого $g \in G$) будем называть *S-непрерывным*, если $\|T(g) - I_V\| \approx 0$ для всех $g \in G_0$ (здесь I_V — тождественный оператор в V). Представление $T : G \to B(V)$ назовем *гиперпредставлением*, если внутреннее гильбертово пространство V конечномерно, т. е. если $\dim(V) = n \in {}^*\mathbb{N}$.

Ниже рассматриваются только гиперпредставления. Если размерность $\dim(V)$ — стандартное число, то каждое неприводимое S-непрерывное унитарное представление $T : G \to {}^*B(V)$ определяет непрерывное представление $\widetilde{T}$ группы $G^{\#}$ по формуле $\widetilde{T}(g^{\#}) := {}^{\circ}T(g)$. Такое представление будет, разумеется, унитарным. Более того, характер $\varkappa$ представления $\widetilde{T}$ может быть представлен в виде $\widetilde{\chi}$, где χ — характер представления T. Таким образом, $\|\varkappa\| = {}^{\circ}\|\chi\| = 1$, поскольку представление T неприводимо. Отсюда видно, что $\widetilde{T}$ — неприводимое представление. Оказывается, что верно и обратное утверждение. Точнее, имеет место следующий факт, частным случаем которого является теорема 7.2.11 (2) для коммутативных групп.

7.3.10. Теорема. *Произвольное S-непрерывное гиперконечномерное неприводимое унитарное представление T группы G порождает неприводимое унитарное представление $\widetilde{T}$ группы $G^{\#}$ по формуле $\widetilde{T}(g^{\#}) := {}^{\circ}T(g)$ для $g \in G$. Наоборот, всякое неприводимое* *унитарное представление группы $G^{\#}$ имеет вид $\widetilde{T}$ для некоторого S-непрерывного неприводимого унитарного представления T группы G.*

$\lhd$ Для проверки первой части теоремы нужно только показать, что каждое S-непрерывное неприводимое унитарное представление имеет стандартную размерность. Последний факт устанавливается в 7.3.11. Справедливость этой теоремы следует из 7.3.12 ввиду хорошо известных свойств неприводимых унитарных представлений компактной группы, см., например, [178, глава 6, § 32]. $\rhd$

7.3.11. *Каждое S-непрерывное неприводимое унитарное представление группы G имеет стандартную размерность.*

$\lhd$ Для фиксированного вектора $\xi \in V$ рассмотрим полуторалинейную форму

$$\varphi_\xi(\eta, \zeta) := |G|^{-1} \cdot \sum_{g \in G} (T(g)\xi, \eta) \cdot \overline{(T(g)\xi, \zeta)}.$$

Пусть $B_\xi : V \to V$ — линейный оператор, определяемый формулой $\varphi_\xi(\eta, \zeta) := (B_\xi \eta, \zeta)$.

Простой подсчет показывает, что оператор B_ξ коммутирует с каждым оператором вида $T(g)$. Следовательно, по лемме Шура $B_\xi = \alpha(\xi) \cdot I$, где $\alpha(\xi) \in {}^*\mathbb{C}$.

Итак, $\varphi_\xi(\eta, \zeta) = \alpha(\xi)(\eta, \zeta)$. Полагая $\eta| := \zeta$, получаем $\varphi_\xi(\zeta, \zeta) = \alpha(\xi) \cdot \|\zeta\|^2 = \alpha(\zeta) \cdot \|\xi\|^2$. Отсюда следует существование такого $D \in {}^*\mathbb{R}$, что $\alpha(\xi) = D \cdot \|\xi\|^2$ для любого $\xi \in V$. Пусть вектор ξ имеет единичную норму. Тогда $\varphi_\xi(\xi, \xi) = \alpha(\xi) = D$. Таким образом, для любого вектора $\xi \in V$ с единичной нормой будет

$$D = |G|^{-1} \cdot \sum_{g \in G} |(T(g)\xi, \xi)|^2.$$

Покажем, что ${}^\circ D > 0$. Рассмотрим внутреннюю функцию $\psi : G \to {}^*\mathbb{R}$, определяемую формулой $\psi(g) = |(T(g)\xi, \xi)|^2$. Легко проверить, что эта функция S-непрерывна. Следовательно, $\|\widetilde{\psi}\|^2 = {}^\circ\|\psi\|^2 = D$, где в левой части имеется в виду норма в $L_2(G^{\#})$. Из определения ψ видно, что $\psi(e) = 1$, где e — единица группы G. Но тогда $\widetilde{\psi}(e^{\#}) = 1$ и, поскольку функция $\widetilde{\psi}$ непрерывна, верно также неравенство $\|\psi\| > 0$, что и требовалось.

Пусть теперь $\theta_1, \dots, \theta_n \in V$ — произвольный ортонормальный базис. Тогда

$$|G|^{-1} \cdot \sum_{g \in G} |(T(g)\theta_k, \theta_1)|^2 = \varphi_{\theta_k}(\theta_1, \theta_1) = \alpha(\theta_k) \cdot \|\theta_1\|^2 = D.$$

Так как оператор $T(g)$ унитарен, система $\{T(g)\theta_k : k := 1, \dots, n\}$ образует ортонормальный базис, т. е. выполняются равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} |(T(g)\theta_k, \theta_1)|^2 = \|\theta_1\|^2 = 1.$$

Просуммировав последнее равенство по g и умножив на $|G|^{-1}$, мы получим в силу предыдущего, что $n \cdot D = 1$. Стандартность n следует теперь из неравенства ${}^{\circ}D > 1$. $\triangleright$

7.3.12. *Множество всех линейных комбинаций функций вида $\widetilde{\psi}$, где $\psi(g)$ — матричный элемент некоторого S-непрерывного неприводимого унитарного представления группы G, плотно в $C(G^{\#})$.*

$\triangleleft$ В доказательстве теоремы 32 из [191] установлено, что пространство линейных комбинаций собственных функций всех интегральных уравнений с ядрами вида $f(x-y)$, где $f : G^{\#} \to \mathbb{C}$ — непрерывная четная функция, плотно в $C(G^{\#})$. Отсюда, привлекая 7.3.5 (3) и 7.3.9, выводим, что пространство линейных комбинаций функций вида $\widetilde{\varphi}$, где φ — это S-непрерывная собственная функция уравнения вида 7.3.6 (1) с $0 < {}^{\circ}|\lambda| < +\infty$ и $k(g,h) := f(g-h)$ для некоторой S-непрерывной четной функции $f : G \to {}^{*}\mathbb{C}$, плотно в $C(G^{\#})$.

По существу оставшаяся часть доказательства повторяет доказательство теоремы 32 из [191] и приводится здесь ради полноты. Ниже мы предполагаем, что $k(g,h) := f(g-h)$ для некоторой непрерывной четной функции $f : G^{\#} \to \mathbb{C}$. Согласно 7.3.8 (1) размерность R_λ — стандартное число. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ составляют полную ортонормальную систему собственных значений уравнения 7.3.6 (1), которые можно выбрать S-непрерывными. Очевидно, если $\varphi(g) \in R_\lambda$, то $\varphi(a+g) \in R_\lambda$ для каждого $a \in G$. Тем самым $\varphi_1(a+g), \dots, \varphi_n(a+g)$ также составляют полную ортонормальную систему собственных функций уравнения 7.3.6 (1). Следовательно, существует унитарная матрица $U(a) := (u_{kl}(a))_{k,l=1}^n$ такая, что

$$\varphi_k(a+g) = \sum_{l=1}^n u_{kl}(a)\varphi_l(g).$$

Покажем, что $\{U(a) : a \in G\}$ — представление группы G. Действительно, $u_{kl}(a+b) = \sum_{k=1}^n u_{kl}(a)u_{kl}(b)$. Из ортонормальности системы $\{\varphi_k : k = 1, \dots, n\}$ видно, что

$$u_{kl}(a) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \varphi_k(a+g)\varphi_l(g).$$

Учитывая последнее равенство, а также доступность и S-непрерывность функций φ_i, заключаем, что $u_{ij}(a)$ также S-непрерывны. Так как $U(\cdot)$ — унитарное представление группы G, то существует унитарная матрица V такая, что $U(a) = VX(a)V^{-1}$ для всех $a \in G$, где

$$X(a) := \begin{pmatrix} T_1(a) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_n(a) \end{pmatrix},$$

причем T_k — неприводимое унитарное представление группы G для $k := 1, \dots, n$. Так как $X(a) = V^{-1}U(a)V$, то все матричные элементы представлений T_k будут стандартно-конечными линейными комбинациями S-непрерывных функций, так что представления T_k сами являются S-непрерывными. Аналогично, u_{kl} являются стандартно-конечными линейными комбинациями матричных элементов T_k с доступными коэффициентами. Полагая $g := 0$ в указанном выше выражении для $\varphi_k(a+g)$, получим, что φ_k будет стандартно-конечной линейной комбинацией функций u_{kl} с доступными коэффициентами, следовательно, и некоторых матричных элементов ψ_k представления T_k. Ясно, что если $\varphi_k = \sum_{l=1}^n C_l \cdot \psi_l$, то $\widetilde{\varphi}_k = \sum_{l=1}^n {}^\circ(C_l) \cdot \widetilde{\psi}_l$. $\triangleright$

7.3.13. Примечания.

(1) По теореме 7.2.3 группа $G^\#$ компактна в том и только в том случае, если G_f — внутренняя подгруппа группы G. Поэтому можно предположить без ограничения общности, что $G_f = G$. В силу 7.2.11 достаточно доказать, что всякий характер $\varkappa \in G^{\#\wedge}$ имеет вид $\widetilde{\chi}$ для некоторого $\chi \in G^\wedge$, удовлетворяющего условию $\chi|_{G_0} \approx 1$ (см.

7.2.7 (3)). Последнее утверждение легко следует из полноты системы характеров вида $\widetilde{\chi}$. Полнота, в свою очередь, доказывается посредством некоторой модификации доказательства теоремы Петера — Вейля о полноте системы характеров неприводимых представлений компактной группы (см. [191]).

(2) Отметим, что все рассмотрения этого параграфа, за исключением результатов, относящихся к группе характеров, остаются в силе, если G — внутренняя гиперконечная некоммутативная группа, а внешние подгруппы $G_0 \subset G_f$, удовлетворяющие условиям (А) и (Б) из 7.2.1, являются нормальными подгруппами G.

(3) Доказательство предложения 7.3.11 аналогично доказательству теоремы 22.13 из [223], утверждающей, что всякое неприводимое представление компактной группы конечномерно. Вместе с тем рассматриваемая в 7.3.11 ситуация несколько проще, так как здесь мы работаем с гиперконечными группами, с которыми во многих отношениях можно обращаться как с конечными группами.

7.4. Гиперприближение локально компактных абелевых групп

В этом параграфе рассматривается проблема *гиперприближения* топологической группы — центральная тема текущей главы. Все основные результаты относятся к случаю локально компактных абелевых групп.

7.4.1. Напомним, что если $\mathfrak{G}$ — топологическая группа, то монада нуля $\mu_{\mathfrak{G}}(0)$ и множество околостандартных элементов $\operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})$ определяются формулами:

$$\mu_{\mathfrak{G}}(0) := \bigcap\{{}^*U : 0 \in U,\ U \subset \mathfrak{G},\ U \text{ открыто}\},$$
$$\operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G}) := \{\xi \in {}^*\mathfrak{G} : (\exists \eta \in \mathfrak{G})(\xi \approx \eta)\},$$

где $\xi_1 \overset{\mathfrak{G}}{\approx} \xi_2 := \xi_1 \approx \xi_2$ означает, что $\xi_1 - \xi_2 \in \mu_{\mathfrak{G}}(0)$.

Отображение $\operatorname{st} : \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G}) \to \mathfrak{G}$, очевидным образом определяемое правилом $\operatorname{st}(\xi) \approx \xi$ для $\xi \in \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})$, будет эпиморфизмом с ядром $\mu_{\mathfrak{G}}(0)$, так что $\mathfrak{G} \simeq \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})/\mu_{\mathfrak{G}}(0)$. Будем писать $\mu(0)$ и $\xi_1 \approx \xi_2$ вместо $\mu_{\mathfrak{G}}(0)$ и $\xi_1 \overset{\mathfrak{G}}{\approx} \xi_2$ соответственно, поскольку не приводит к путанице. Дадим теперь основное определение.

Пусть $\mathfrak{G}$ — стандартная топологическая группа, G — внутренняя гиперконечная группа и $\jmath : G \to {}^*\mathfrak{G}$ — внутреннее отображение. Пару $(G, \jmath)$ называют ***гиперприближением*** группы $\mathfrak{G}$, если выполнены следующие условия:

(1) для любого $\xi \in \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})$ существует $g \in G$, для которого $\jmath(g) \approx \xi$;

(2) если $g_1, g_2 \in \jmath^{-1}(\operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G}))$, то $\jmath(g_1 + g_2) \approx \jmath(g_1) + \jmath(g_2)$;

(3) если $g \in \jmath^{-1}(\operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G}))$, то $\jmath(-g) \approx -\jmath(g)$;

(4) $\jmath(0) = 0$.

Можно было бы взять четвертое условие в виде $\jmath(0) \approx 0$, однако если изменить отображение так, чтобы выполнялось точное равенство, то условия (1)–(3) останутся в силе.

Подчеркнем, что в данном определении ни сама группа, ни ее гиперприближение не предполагаются коммутативными, хотя мы и используем знаки $+$ и 0 для обозначения групповой операции и нейтрального элемента. Однако если группа коммутативна, то и приближающая ее гиперконечная группа по определению коммутативна.

Обозначим $G_f := \jmath^{-1}(\operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G}))$, $G_0 := \jmath^{-1}(\mu(0))$ и $\widetilde{\jmath} := \operatorname{st} \circ \jmath|_{G_f}$. Тогда условия (1)–(4) равносильны требованию о том, что $\widetilde{\jmath} : G_f \to \mathfrak{G}$ — эпиморфизм с ядром $\ker(\widetilde{\jmath}) = G_0$. Изоморфизм между $G^{\#} := G_f/G_0$ и $\mathfrak{G}$, индуцированный эпиморфизмом $\widetilde{\jmath}$, будем обозначать символом $\overline{\jmath}$, а фактор-гомоморфизм из G_f на $G^{\#}$ — символом $\#$.

7.4.2. Гиперприближение $(G, \jmath)$ локально компактной абелевой группы $\mathfrak{G}$ называется ***хорошим*** при условии, что соответствующая тройка (G, G_0, G_f) будет допустимой в смысле определения из 7.2.13.

В качестве важного примера хорошего гиперприближения рассмотрим аддитивную группу $G := \{-L, \dots, L\}$ кольца ${}^*\mathbb{Z}/N{}^*\mathbb{Z}$, где $N := 2L+1$ — бесконечно большое гипернатуральное число, $\Delta \approx 0$ — бесконечно малое положительное число, причем $N\Delta \approx +\infty$. Рассмотрим отображение $\jmath : G \to {}^*\mathbb{R}$, определяемое формулой $\jmath(k) := k\Delta$ для $k \in G$. Очевидно, что $(G, \jmath)$ — гиперприближение аддитивной группы поля $\mathbb{R}$. Эквивалентности 7.2.1 (1) и теорема 7.1.2 показывают, что $(G, \jmath)$ — хорошее гиперприближение.

7.4.3. *Если $\mathfrak{G}$ — сепарабельная локально компактная группа, а $(G, \jmath)$ — ее гиперприближение, то тройка (G, G_0, G_f) удовлетворяет условиям теоремы 7.2.3. Более того, $\overline{\jmath} : G^{\#} \to \mathfrak{G}$ — топологический* *изоморфизм.*

$\lhd$ Ввиду предположений о локальной компактности и сепарабельности можно считать, что $\mathfrak{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, где каждое U_n — открытое и относительно компактное множество. Отсюда легко усмотреть, что $G_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} \jmath^{-1}({}^*U_n)$. Совершенно аналогично, если $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — счетная база относительно компактных окрестностей нуля группы $\mathfrak{G}$, то $G_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \jmath^{-1}({}^*V_n)$. Таким образом, G_f и G_0 представимы соответственно в виде счетного объединения и счетного пересечения внутренних множеств. Значит, на группе $G^{\#}$ определена каноническая топология согласно теореме 7.2.2. Выполнение условий теоремы 7.2.3 обеспечено локальной компактностью группы $G^{\#}$. Остается показать, что $\overline{\jmath}$ и $\overline{\jmath}^{-1}$ непрерывны в нуле.

Для данной окрестности нуля $V \subset \mathfrak{G}$ подберем относительно компактную окрестность нуля V^1 так, чтобы $V^1 \subset V$, и рассмотрим внутреннее множество $F := \jmath^{-1}({}^*V^1)$. Как видно, $G_0 \subset F$, так что $\overset{\circ}{F}{}^{\#}$ — окрестность нуля в $G^{\#}$. Непрерывность $\overline{\jmath}$ в нуле следует теперь из легко проверяемого соотношения $\overline{\jmath}(\overset{\circ}{F}{}^{\#}) \subset V^1 \subset V$.

Возьмем окрестность нуля в $G^{\#}$ вида $\overset{\circ}{F}{}^{\#}$, где F — внутреннее подмножество группы G_f, содержащее G_0.

Так как $G_0 = \bigcap\{\jmath^{-1}({}^*U) : U$ — окрестность нуля в $\mathfrak{G}\}$, то из ω^+-насыщенности нестандартного универсума выводим существование относительно компактной окрестности нуля U в $\mathfrak{G}$ такой, что $\jmath^{-1}({}^*U) \subset F$. Пусть окрестность нуля $V \subset \mathfrak{G}$ удовлетворяет условию $V + V + V \subset U$. Используя очевидное включение $V \subset V + V$, получаем $\jmath^{-1}({}^*V) + \jmath^{-1}({}^*V) \subset \jmath^{-1}({}^*U)$. Из этого включения вытекает, что если $\xi \in V$ и $\overline{\jmath}^{-1}(\xi) = g^{\#}$ (или, что то же, $\jmath(g) \approx \xi$), то $g \in \overset{\circ}{F}$, значит, $\overline{\jmath}^{-1}(V) \subset \overset{\circ}{F}{}^{\#}$. $\rhd$

7.4.4. Теорема. *Сепарабельная локально компактная абелева группа, содержащая компактную и открытую подгруппу, допускает хорошее гиперприближение.*

$\lhd$ Из теорем 7.2.12 и 7.2.14 видно, что в условиях сформулированной теоремы всякое гиперприближение будет хорошим, поэтому нужно лишь доказать существование какого-либо гиперприближения.

(1) Пусть G — сепарабельная локально компактная абелева группа и U — ее компактная и открытая подгруппа. Обозначим символом $\mathscr{D}$ фактор-группу $\mathfrak{G}/U$ и рассмотрим короткую точную последовательность $U \subset \mathfrak{G} \xrightarrow{\pi} \mathscr{D}$, где π — фактор-гомоморфизм. В силу ω^+-насыщенности нестандартного универсума и счетности $\mathscr{D}$ существует гиперконечное множество $T \subset {}^*\mathscr{D}$, для которого $\mathscr{D} \subset T$. Обозначим символом ${}^*\mathscr{D}(T)$ внутреннюю подгруппу группы ${}^*\mathscr{D}$, порожденную множеством T, и пусть $\mathscr{H} := {}^*\pi^{-1}({}^*\mathscr{D}(T))$. Тогда коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\ \subset\ } & \mathfrak{G} & \xrightarrow{\ \pi\ } & \mathscr{D} \\ {\scriptstyle\mathrm{id}}\downarrow & & {\scriptstyle\mathrm{id}}\downarrow & & {\scriptstyle\mathrm{id}}\downarrow \\ U & \xrightarrow{\ \subset\ } & \mathscr{H} & \xrightarrow{\ \varepsilon\ } & {}^*\mathscr{D}(T)\,, \end{array}$$

где $\varepsilon = {}^*\pi|_{{}^*\mathscr{H}}$ — внутреннее отображение и нижняя сторона диаграммы представляет собой короткую точную последовательность.

Напомним, что конечно-порожденная абелева группа разлагается в прямую сумму свободной подгруппы и конечной подгруппы (см. [150; § 10, теорема 8]). Применив к этому утверждению принцип переноса, получим ${}^*\mathscr{D}(T) = \mathscr{D}_1 \oplus \mathscr{D}_2$, где $\mathscr{D}_1$ — гиперконечная абелева группа и $\mathscr{D}_2$ — свободная (в нестандартном универсуме) абелева группа с гиперконечным множеством образующих. Полагая $\mathscr{H}_\imath := \varepsilon^{-1}(\mathscr{D}_\imath)$ для $\imath := 1, 2$, получим, что $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ и $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 = {}^*U$ и, кроме того, последовательности

$${}^*U \subset \mathscr{H}_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} \mathscr{D}_1;\ {}^*U \subset \mathscr{H}_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} \mathscr{D}_2,$$

где $\varepsilon_\imath := \varepsilon|_{\mathscr{H}_\imath}$ для $\imath := 1, 2$ являются точными.

Рассмотрим указанные точные последовательности несколько более подробно. Сначала займемся первой из них. Применим принцип переноса к теореме ван Кампена (см. [223, глава 2, теорема 9.5]). Тогда для любой бесконечно малой окрестности нуля V (т. е. такой, что $V \subset \mu(0)$), содержащейся в ${}^*U$, подберем гипернатуральное число k, гиперконечную группу R и непрерывный эпиморфизм $\varphi : {}^*U \to {}^*S^k \oplus R$ такие, что $\ker(\varphi) \subset V$. Здесь S — единичная окружность.

(2) Пусть R — это нормальная подгруппа группы L и фактор-группа L/R изоморфна группе H. В этой ситуации говорят, что L — *расширение* подгруппы R посредством H, и пишут $\mathrm{Ext}(H, R) = L$.

Сказанное выше означает, что $\mathscr{H}_1$ является расширением ${}^*U$ посредством $\mathscr{D}_1$. Но так как φ — эпиморфизм, то существует расширение L группы ${}^*S^k \oplus R$ посредством $\mathscr{D}_1$, так что можно подыскать внутреннюю группу L и внутренний гомоморфизм $\gamma : \mathscr{H}_1 \to L$, для которых коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} {}^*U & \xrightarrow{\subset} & \mathscr{H}_1 & \xrightarrow{\varepsilon_1} & \mathscr{D}_1 \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ {}^*S^k \oplus R & \xrightarrow{\varkappa} & L & \xrightarrow{\delta} & \mathscr{D}_1, \end{array}$$

причем нижняя сторона диаграммы является короткой точной последовательностью. Из коммутативности диаграммы также ясно, что γ — эпиморфизм. Из легко проверяемого равенства $\mathrm{Ext}(\mathscr{D}_1, S^k \oplus R) = \mathrm{Ext}(\mathscr{D}_1, S^k) \oplus \mathrm{Ext}(\mathscr{D}_1, R)$ вытекает существование двух коротких точных последовательностей

$$ {}^*S^k \overset{\varkappa_1}{\to} L_1 \overset{\delta_1}{\to} \mathscr{D}_1, $$
$$ R \overset{\varkappa_2}{\to} L_2 \overset{\delta_2}{\to} \mathscr{D}_1, $$

из которых нижняя строка указанной диаграммы получается (с точностью до изоморфизма) следующим образом: $L := \{(l_1, l_2) \in L_1 \oplus L_2 : \delta_1(l_1) = \delta_2(l_2)\}$, $\varkappa := (\varkappa_1, \varkappa_2)$, $\delta(l_1, l_2) := \delta_1(l_1) = \delta_2(l_2)$. Поскольку ${}^*S^k$ — делимая группа, то первая из двух указанных точных последовательностей расщепляется, т. е. существует мономорфизм $\chi : \mathscr{D}_1 \to L_1$, который будет правым обратным к δ_1.

Группа L_2 гиперконечна ввиду гиперконечности групп R и $\mathscr{D}_1$. Заметим, что непрерывный эпиморфизм φ компактных групп является открытым отображением, следовательно, $\varphi(V)$ будет окрестностью нуля в ${}^*S^k \oplus R$, так что $\varphi(V) \cap {}^*S^k$ — окрестность нуля в ${}^*S^k$. Так как единичная окружность S при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ содержит конечную подгруппу, которая служит ε-сетью, то существует гиперконечная подгруппа $F \subset {}^*S^k$ такая, что $F + (\varphi(V) \cap {}^*S^k) = {}^*S^k$. Рассмотрим гиперконечную подгруппу $M \subset L$, определяемую формулой

$$ M := \{(\varkappa_1(f) + \chi(d), l) : f \in F,\, d \in \mathscr{D}_1,\, l \in L_2,\, \delta_2(l) = d\}. $$

Поскольку γ — эпиморфизм, то $\gamma^{-1}(m) \neq \varnothing$ для всех $m \in M$. Из каждого множества $\gamma^{-1}(m)$ выберем по одному элементу g_m так, чтобы получилось внутреннее отображение, и положим $G_1 := \{g_m : m \in M\}$. Операция $+_1$ определяется формулой $g_{m_1} +_1 g_{m_2} := g_{m_1+m_2}$. Тем самым $\gamma(g_{m_1} +_1 g_{m_2}) = \gamma(g_{m_1}) + \gamma(g_{m_2}) = m_1 + m_2$. Очевидно, что $(G_1, +_1)$ — гиперконечная абелева группа. Нам потребуются некоторые свойства этой группы.

(3) *Для любых $m, m_1, m_2 \in M$ имеют место соотношения $g_{m_1} +_1 g_{m_2} \approx g_{m_1} + g_{m_2}$ и $-_1 g_m \approx -g_m$.*

$\lhd$ Поскольку $\gamma(g_{m_1} +_1 g_{m_2}) = \gamma(g_{m_1}) + \gamma(g_{m_2})$, то коммутативность диаграммы из (2) влечет справедливость равенства $\varepsilon_1(g_{m_1} +_1 g_{m_2} - g_{m_1} - g_{m_2}) = 0$, так что $g_{m_1} +_1 g_{m_2} - g_{m_1} - g_{m_2} \in {}^*U$. Используя левый квадрат этой же диаграммы и тот факт, что $\varkappa$ — мономорфизм, приходим к равенству $\varphi(g_{m_1} +_1 g_{m_2} - g_{m_1} - g_{m_2}) = 0$. Последнее можно записать в эквивалентной форме $g_{m_1} +_1 g_{m_2} - g_{m_1} - g_{m_2} \in V \subset \mu(0)$, что и доказывает первое из требуемых соотношений. Второе соотношение доказывается аналогично. $\rhd$

(4) *Для любого $h \in \mathscr{H}_1$ существует $g \in G_1$ такой, что $g \approx h$.*

$\lhd$ Возьмем произвольный элемент $h \in \mathscr{H}_1$. Привлекая строение группы L и указанное в (2) расщепление точной последовательности ${}^*S^k \xrightarrow{\varkappa_1} L_1 \xrightarrow{\delta_1} \mathscr{D}_1$, получим $\gamma(h) = (\varkappa_1(s) + \chi(d), l)$, где $l \in L_2$ и $\delta_2(l) = d$. Ввиду равенства $F + (\varphi(V) \cap {}^*S^k) = {}^*S^k$ можно подобрать $f \in F$ так, чтобы $s - f \in \varphi(V) \cap {}^*S^k$. Но тогда $m = (\varkappa_1(f) + \chi(d), l) \in M$. Покажем справедливость соотношения $g_m \approx h$. Заметим, что $\varepsilon_1(h) = \varepsilon_1(g_m) = d$ и, стало быть, $l - g_m \in {}^*U$. Более того, $\gamma(l) - \gamma(g_m) = (\varkappa_1(f - s), 0) = \varkappa((f - s, 0)) = \varkappa\varphi(l - g_m)$. Тем самым $\varphi(l - g_m) = (f - s, 0) \in \varphi(V) \cap {}^*S^k \subset \varphi(V)$. Но тогда будет $l - g_m \in \varphi^{-1}(\varphi(V)) = V + \ker(\varphi) \subset V + V \subset \mu(0)$. $\rhd$

(5) *Группа $G_U := {}^*U \cap G_1$ представляет собой подгруппу G_1. Пара $(G_U, \hookrightarrow)$, где $\hookrightarrow$ — тождественное вложение G_U в ${}^*U$, будет гиперприближением группы U.*

$\lhd$ Доказательство следует из (3), (4) и того, что U — компактная и открытая подгруппа группы $\mathfrak{G}$. $\rhd$

(6) Переходим к изучению точной последовательности ${}^*U \hookrightarrow \mathscr{H}_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} \mathscr{D}_2$, см. (1).

Пусть $\nu_\imath : {}^*\mathscr{D}(T) \to \mathscr{D}_\imath$ — фактор-гомоморфизм. Выберем гипернатуральное число m так, чтобы $(\nu_2(T) - \nu_2(T)) \cap m\mathscr{D}_2 = 0$. Чтобы установить существование такого m, осталось применить принцип переноса к следующему вполне очевидному утверждению: «Если P — конечное подмножество свободной конечно-порожденной абелевой группы H, то существует натуральное число m такое, что $P \cap mH \subset 0$».

Пусть $Q := \mathscr{D}_2/m\mathscr{D}_2$. Тогда Q — гиперконечная абелева группа. Фактор-гомоморфизм из $\mathscr{D}_2$ на Q обозначим буквой λ. По построению $\nu_2(T)$ инъективно. Осуществим внутренний выбор одного элемента d_q из каждого множества $\lambda^{-1}(q)$ при $q \in Q$ таким образом, что если $\lambda^{-1}(q) \cap \nu_2(T) \neq \varnothing$, то $d_q \in \nu_2(T)$ (здесь такой элемент d_q единствен, так как λ — инъективное отображение на $\nu_2(T)$). Пусть $G_3 := \{d_q : q \in Q\}$. Определим операцию $+_3$ на G_3 правилом $d_{q_1} +_3 d_{q_2} := d_{q_1+q_2}$. Таким образом, $\lambda(d_{q_1} +_3 d_{q_2}) = \lambda(d_{q_1}) + \lambda(d_{q_2})$.

(7) *Для любого* $d \in \mathscr{D}$ *существует* $q \in Q$ *такой, что* $\nu_2(d) = d_q$. *Если* $d_{q_1}, d_{q_2} \in \nu_2(\mathscr{D})$, *то* $d_{q_1} +_3 d_{q_2} = d_{q_1} + d_{q_2}$.

В правой части последнего равенства знак $+$ обозначает операцию сложения в группе $\mathscr{D}_2$; множество $\nu_2(\mathscr{D})$, вообще говоря, — внешняя подгруппа группы $\mathscr{D}_2$.

$\lhd$ Первое утверждение следует из определения d_q и включения $\nu_2(\mathscr{D}) \subset \nu_2(T)$. Если $d_{q_1}, d_{q_2} \in \nu_2(\mathscr{D})$, то $d_{q_1} + d_{q_2} \in \nu_2(\mathscr{D})$. Пусть $d_{q_1} + d_{q_2} = d_{q_3}$. Поскольку λ — гомоморфизм, то $q_3 = \lambda(d_{q_1} + d_{q_2}) = \lambda(d_{q_1}) + \lambda(d_{q_2}) = q_1 + q_2$. В то же время $\lambda(d_{q_1} +_3 d_{q_2}) = \lambda(d_{q_1}) + \lambda(d_{q_2}) = q_1 + q_2 = q_3$. Таким образом, $\lambda^{-1}(q_3) \cap \nu_2(T) = \{d_{q_1} + d_{q_2}\}$, следовательно, $d_{q_3} = d_{q_1} + d_{q_2} = d_{q_1} +_3 d_{q_2}$. $\rhd$

(8) Ограничение групповой операции $+_1$ на подгруппу G_U обозначим символом $+_U$. Так как $\mathscr{D}_2$ — свободная абелева группа, то последовательность ${}^*U \subset \mathscr{H}_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} \mathscr{D}_2$ расщепляется, т. е. существует мономорфизм $\mu_2 : \mathscr{D}_2 \to \mathscr{H}_2$ — правое обратное отображение к ε_2. Рассмотрим множество $G_2 := \{g + \mu(d_q) : g \in G_U, q \in Q\}$ и введем операцию $+_2$ в G_2 правилом $(g_1 + \mu(d_{q_1})) +_2 (g_2 + \mu(d_{q_2})) := g_1 +_U g_2 + m(d_{q_1} +_3 d_{q_2})$. Учитывая соотношения $\mathscr{H}_2 = {}^*U \oplus \mu_2(\mathscr{D}_2)$ и $G_U \subset {}^*U$, легко получить, что $(G_2, +_2)$ — гиперконечная абелева группа, причем $G_2 \cap {}^*U = G_U$.

(9) *Пусть* $\mathfrak{G} = G_1 \times G_2$. *Определим* $\jmath : G \to {}^*\mathfrak{G}$ *формy-*

лой $\jmath((g_1, g_2)) := g_1 + g_2$. Тогда $(G, \jmath)$ — гиперприближение группы $\mathfrak{G}$.

$\lhd$ Возьмем $\xi \in \mathfrak{G}$. В силу соотношения (см. (1)) $\mathfrak{G} \subset \mathscr{H} = \mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ имеет место представление $\xi = h_1 + h_2$, где $h_1 \in \mathscr{H}_1$ и $h_2 \in \mathscr{H}_2$. Отсюда, согласно коммутативной диаграмме из (1), $d := \pi(\xi) = \varepsilon_1(h_1) + \varepsilon_2(h_2)$. Таким образом, $\varepsilon_2(h_2) = \nu_2(d) \in \nu_2(\mathscr{D})$, поскольку $d \in \mathscr{D}$. В соответствии с (7) $\nu_2(d) = d_q$, поэтому существует $g \in {}^*U$, для которого $h_2 = g + \mu(d_q)$. В силу предложения (5) G_U приближает ${}^*U$, но так как U компактна, то найдется $g_0 \in G_U$ такой, что $g_0 \approx g$. Тогда $g_2 = g_0 + \mu(d_q) \approx g + \mu(d_q) = h_2$ и $g_2 \in G_2$. Согласно (3) существует $g_1 \in G_1$, удовлетворяющий соотношению $g_1 \approx h_1$, следовательно, $g_1 + g_2 \approx h_1 + h_2 = \xi$. Это устанавливает первое условие из определения гиперприближения (см. 7.4.1 (1)). Так как четвертое условие очевидно, то остается обосновать условия 7.4.1 (2) и 7.4.1 (3).

Предположим, что $g_1 + g_2 \approx \xi \in \mathfrak{G}$ и $g_1' + g_2' \approx \xi' \in \mathfrak{G}$, где $g_1, g_1' \in G_1$ и $g_2, g_2' \in G_2$. Нужно показать справедливость соотношения $g_1 +_1 g_1' + g_2 +_2 g_2' \approx \xi + \xi'$. Как видно из (3), $g_1 +_1 g_1' \approx g_1 + g_1'$. Следовательно, достаточно обосновать, что $g_2 +_2 g_2' \approx g_2 + g_2'$. Положим $d := \pi(\xi)$. Так как $g_1 + g_2 \approx \xi$, то $g_1 + g_2 - \xi \in {}^*U$ и, стало быть, $\varepsilon(g_1 + g_2) = d$ (см. диаграмму из (1)). Из включения $g_\imath \in \mathscr{H}_\imath$ вытекает $\varepsilon_2(g_2) = \nu_2(d) \in \nu_2(\mathscr{D})$. Аналогично $\varepsilon_2(g_2') = \nu_2(d_2') \in \nu_2(\mathscr{D})$, где $d' := \pi(\xi')$. Из этих равенств мы немедленно выводим $g_2 = \widetilde{g} + \mu(\nu_2(d))$ и $g_2' = \widetilde{g}' + \mu(\nu_2(d'))$. Тогда ввиду (7) будет $g_2 +_2 g_2' = \widetilde{g} +_U \widetilde{g}' + \mu(\nu_2(d) + \nu_2(d')) = \widetilde{g} +_U \widetilde{g}' + \mu(\nu_2(d)) + \mu(\nu_2(d'))$. Но согласно (5) $\widetilde{g} +_U \widetilde{g}' \approx \widetilde{g} + \widetilde{g}'$, что и доказывает 7.4.1 (2).

Условие 7.4.1 (3) устанавливается совершенно аналогично. $\rhd$

Тем самым доказательство теоремы 7.4.4 завершено. $\rhd$

7.4.5. *Теорема.* *Сепарабельная локально компактная абелева группа допускает хорошее гиперприближение.*

$\lhd$ Известно, что локально компактная абелева группа может быть представлена в виде прямого произведения $\mathbb{R}^m$ для некоторого $m \geq 0$ и группы, имеющей компактную и открытую подгруппу (см., например, [54, глава 2, § 10.3, теорема 1]). В то же время очевидно, что если сепарабельные локально компактные абелевы группы $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ допускают хорошие гиперприближения, то $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ также допускает хорошее гиперприближение. Остается привлечь теорему 7.4.4

и пример из 7.4.2. $\triangleright$

7.4.6. Пусть $(G, \jmath)$ — гиперприближение группы $\mathfrak{G}$. Если $U \subset \mathfrak{G}$ — некоторая окрестность нуля с компактным замыканием, то $G_0 \subset \jmath^{-1}({}^*U) \subset G_f$, так что $\Delta := |\jmath^{-1}({}^*U)|^{-1}$ будет нормирующим множителем тройки (G, G_0, G_f) (см. определение 7.2.4 (4)). Внешние подгруппы G_0 и G_f, определяемые гиперприближением $(G, \jmath)$ группы $\mathfrak{G}$, определяют, в свою очередь, внешние подгруппы $H_0, H_f \subset \widehat{G}$ (определения см. в 7.2.7).

Если $(G, \jmath)$ — гиперприближение группы $\mathfrak{G}$, то представляется естественным приближать двойственную группу $\widehat{\mathfrak{G}}$ посредством группы $\widehat{G}$. Если $(\widehat{G}, \imath)$ — гиперприближение $\widehat{\mathfrak{G}}$, то $\widehat{G}_f = \imath^{-1}(\operatorname{nst}({}^*\widehat{\mathfrak{G}}))$ и $\widehat{G}_0 = \imath^{-1}\mu_{\widehat{\mathfrak{G}}}(\mathbf{1})$. Здесь $\mathbf{1}$ — нейтральный элемент группы $\widehat{\mathfrak{G}}$, т. е. характер, тождественно равный 1.

Пусть $(G, \jmath)$ и $(\widehat{G}, \imath)$ — гиперприближения сепарабельных локально компактных абелевых групп $\mathfrak{G}$ и $\widehat{\mathfrak{G}}$ соответственно. Будем говорить, что $(\widehat{G}, \imath)$ *двойственна* к $(G, \jmath)$, если выполнены следующие условия:

(1) $H_0 \subset \widehat{G}_0$;

(2) $\imath(h)(\jmath(g)) \approx h(g)$ для всех $h \in \widehat{G}_f$ и $g \in G_f$.

Заметим, что если группа $\mathfrak{G}$ компакта, то $G_f = G$ и первое условие из сформулированного определения выполняется автоматически ввиду 7.2.11 (1).

Мера Лёба ν_Δ на G индуцирует меру Хаара μ_Δ на $G^\#$. Топологический изоморфизм $\overline{\jmath}$ преобразует меру μ_Δ в меру Хаара $\overline{\mu}_\Delta$ на $\mathfrak{G}$. Очевидно, что любая мера Хаара на $\mathfrak{G}$ имеет такой вид.

Если $f : \mathfrak{G} \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, то лифтинг функции $f \circ \overline{\jmath}$ мы будем называть *лифтингом* f (см. 7.2.6).

7.4.7. *Пусть $(G, \jmath)$ — гиперприближение некоторой сепарабельной локально компактной абелевой группы $\mathfrak{G}$ и Δ — нормирующий множитель тройки (G, G_0, G_f). Пусть $p \in [1, \infty)$ — стандартное число и $f : \mathfrak{G} \to \mathbb{C}$. Тогда $f \in L_p(\mathfrak{G})$ в том и только в том случае, когда f имеет $\mathscr{S}_{p,\Delta}$-интегрируемый лифтинг. Если $p = 1$ и $\varphi : G \to {}^*\mathbb{C}$ — это $\mathscr{S}_{1,\Delta}$-интегрируемый лифтинг f, то*

$$\int f \, d\overline{\mu}_\Delta = {}^\circ\Bigl(\Delta \sum_{g \in G} \varphi(g)\Bigr).$$

◁ Это просто переформулировка предложения 7.2.6. ▷

Как видно из определения 6.4.9 (1), тройка $(G, \jmath, \Delta)$ будет гиперпредставлением пространства $(\mathfrak{G}, \mu_\Delta)$, и предложение 6.4.10 станет выглядеть следующим образом.

7.4.8. *Если в предположениях 7.4.7 функция $f \in L_1(\mathfrak{G})$ ограничена, непрерывна почти всюду относительно меры Хаара и удовлетворяет условию*

$$(\forall B \in {}^*\mathscr{P}(G))\left(B \subset G - G_f \to \Delta \sum_{g \in G} |{}^*f(\jmath(g))| \approx 0\right),$$

то функция $\varphi := {}^*f \circ \jmath$ будет $\mathscr{S}_{1,\Delta}$-интегрируемым лифтингом функции f и

$$\int f \, d\mu_\Delta = {}^\circ\left(\Delta \sum_{g \in G} {}^*f(\jmath(g))\right).$$

7.4.9. *Пусть $\chi \in {}^*\widehat{\mathfrak{G}}$ и $\varkappa \in \widehat{\mathfrak{G}}$. Тогда $\chi \overset{\widehat{\mathfrak{G}}}{\approx} \varkappa$ в том и только в том случае, если $\chi(\xi) \approx \varkappa(\xi)$ для всех $\xi \in \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})$.*

◁ Пусть $\chi \approx {}^*\varkappa$. Если $\xi \in \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})$, то $\xi \approx \eta \in \mathfrak{G}$. Если u — относительно компактная окрестность точки η в $\mathfrak{G}$, то $\xi \in \overline{u}$. По предположению для любого стандартного k будет $(\chi - {}^*\varkappa \in {}^*\mathscr{W}(\overline{u}, \Lambda_k))$ (см. доказательство теоремы 7.2.8), но это и означает, что $\chi(\xi) \approx {}^*\varkappa(\xi)$.

Наоборот, допустим, что $\chi(\xi) \approx {}^*\varkappa(\xi)$ для всех $\xi \in \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})$. В этом случае для компактного подмножества F группы $\mathfrak{G}$ будет ${}^*F \subset \operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G})$, следовательно, $(\chi(\xi) \approx {}^*\varkappa(\xi))$ для всех $\xi \in {}^*F$. Таким образом, $\chi - {}^*\varkappa \in {}^*\mathscr{W}(F, \Lambda_k)$ для каждого стандартного k. ▷

7.4.10. *Теорема.* *Пусть $(G, \jmath)$ — хорошее гиперприближение сепарабельной локально компактной абелевой группы $\mathfrak{G}$, а $(\widehat{G}, \imath)$ — двойственное к нему гиперприближение группы $\widehat{\mathfrak{G}}$. Пусть Δ — нормирующий множитель тройки (G, G_0, G_f), определяемой $(G, \jmath)$. Тогда справедливы утверждения:*

(1) *$(|G| \cdot \Delta)^{-1}$ — это нормирующий множитель тройки $(\widehat{G}, \widehat{G}_0, \widehat{G}_f)$, определяемой $(\widehat{G}, \imath)$;*

(2) *если $\mathscr{F} : L_2(\mathfrak{G}, \overline{\mu}_\Delta) \to L_2(\widehat{\mathfrak{G}}, \overline{\mu}_{\widehat{\Delta}})$ — преобразование Фурье, то $\mathscr{F}$ сохраняет скалярное произведение;*

(3) *дискретное преобразование Фурье* $\Phi^G_\Delta : \mathscr{L}_{2,\Delta}(G) \to \mathscr{L}_{2,\widehat{\Delta}}(\widehat{G})$ *будет гиперприближением* $\mathscr{F}$.

$\lhd$ (1): Покажем сначала, что $H_0 = \widehat{G}_0$ и $H_f = \widehat{G}_f$. Если $h \in \widehat{G}_0$, то $\imath(h) \approx \mathbf{1}$, значит, в силу 7.4.9 $\imath(h)(\xi) \approx 1$ для всех $\xi \in \mathrm{nst}\,({}^*\mathfrak{G})$. Отсюда $\imath(h)(\jmath(g)) \approx 1$ для всех $g \in G_f$, поэтому $h(g) \approx 1$ согласно 7.4.6 (2), следовательно, $h \in H_0$. Тем самым $\widehat{G}_0 \subset H_0$, а обратное включение совпадает с 7.4.6 (1).

Включение $\widehat{G}_f \subset H_f$ — это тривиальное следствие из 7.2.6 (2) и 7.4.9. Обратное включение доказывается несколько сложнее.

Возьмем $h \in H_f$ и заметим, что $\widetilde{h} \in G^{\#\wedge}$ (напомним, что $\widetilde{h}(g^\#) = {}^\circ h(g)$). Если отображение $\bar{\imath}$ определяется по $\imath$ так же, как $\bar{\jmath}$ по $\jmath$, то $\bar{\imath} : \widehat{G}^\# \to \widehat{\mathfrak{G}}$ — топологический изоморфизм в силу 7.4.3.

Пусть $\varkappa := \widetilde{h} \circ \bar{\jmath}^{-1} \in \widehat{\mathfrak{G}}$. Так как $\widehat{G}^\# = \widehat{G}_f / \widehat{G}_0$, то существует $h_1 \in \widehat{G}_f$, для которого $\bar{\imath}(h_1^\#) = \widetilde{h} \circ \bar{\jmath}^{-1}$. Если $g \in G_f$, то $\bar{\imath}(h_1^\#)(\bar{\jmath}(g^\#)) = \mathrm{st}\,\imath(h_1)(\mathrm{st}\,\jmath(g)) \approx \imath(h_1)\jmath(g) \approx h_1(g)$ в силу 7.4.6 (2).

В то же время $\bar{\imath}(h_1^\#)(\bar{\jmath}(g^\#)) = \widetilde{h}\bar{\jmath}^{-1}(\bar{\jmath}(g^\#)) = \widetilde{h}(g^\#) \approx h(g)$. Итак, $h(g) \approx h_1(g)$ для любых $g \in G_f$. Это означает, что $h \cdot \overline{h_1} \in H_0 = \widehat{G}_0 \subset \widehat{G}_f$. Поскольку $h_1 \in \widehat{G}_f$, то $h \in \widehat{G}_f$, что и доказывает второе из требуемых равенств.

Первое утверждение теоремы следует теперь из того, что гиперприближение $(G, \jmath)$ предполагается хорошим.

(2): Второе утверждение следует непосредственно из третьего.

(3): Обозначим символом

$$\gamma : L_2(G^\#, \mu) \to \mathscr{L}_{2,\Delta}(G)^\#$$

вложение, индуцированное фактор-гомоморфизмом $\# : G_f \to G^\#$. Точнее, γ сопоставляет функции $f \in L_2(G^\#, \mu_\Delta)$ класс $\mathscr{L}_{2,\Delta}(G_f)$-лифтинга функции f, т. е. функции $f \circ \#$ в $\mathscr{L}_{2,\Delta}(G)^\#$.

Аналогично, обозначим символом

$$\widetilde{\gamma} : L_2(G^{\#\wedge}, \mu_{\widehat{\Delta}}) \to \mathscr{L}_{2,\widehat{\Delta}}(\widehat{G})^\#$$

вложение, индуцированное фактор-гомоморфизмом $\widehat{\#} : \widehat{G}_f \to \widehat{G}^\#$. Так как $(G, \jmath)$ — хорошее гиперприближение, то равенства, установленные выше при доказательстве (1), показывают, что $\widehat{G}^\#$ канонически изоморфна $G^{\#\wedge}$, причем изоморфизм устанавливается путем сопоставления характера $\widetilde{h}$ элементу $h^{\#} \in G^{\#\wedge}$, где $h \in \widehat{G}_f = H_f$. Более того, учитывая определение допустимой тройки из 7.2.13, легко усмотреть коммутативность диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} L_2(G^{\#}, \mu_\Delta) & \xrightarrow{\mathscr{F}_\Delta^{G^{\#}}} & L_2(G^{\#\wedge}, \mu_\Delta^{\#}) \\ {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\widehat{\gamma}} \\ \mathscr{L}_{2,\Delta}(G)^{\#} & \xrightarrow{(\Phi_\Delta^G)^{\#}} & \mathscr{L}_{2,\widehat{\Delta}}(\widehat{G})^{\#}. \end{array}$$

Топологические изоморфизмы $\overline{\jmath}$ и $\overline{\imath}$ переносят меры μ_Δ на $G^{\#}$ и $\mu_{\widehat{\Delta}}$ на $G^{\#\wedge}$ в меры $\overline{\mu}_\Delta$ на $\mathfrak{G}$ и $\overline{\mu}_{\widehat{\Delta}}$ на $\widehat{\mathfrak{G}}$ соответственно. Иначе говоря, имеются изоморфизмы $\jmath_* : L_2(\mathfrak{G}, \overline{\mu}_\Delta) \to L_2(G^{\#}, \mu_\Delta)$ и $\imath_* : L_2(\widehat{\mathfrak{G}}, \overline{\mu}_{\widehat{\Delta}}) \to L_2(\widehat{G}^{\#}, \mu_{\widehat{\Delta}})$, определяемые правилами $\jmath_*(f) := f \circ \jmath$ и $\imath_*(\varphi) := \varphi \circ \imath$. Более того, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L_2(\mathfrak{G}, \overline{\mu}_\Delta) & \xrightarrow{\mathscr{F}} & L_2(\widehat{\mathfrak{G}}, \overline{\mu}_{\widehat{\Delta}}) \\ {\scriptstyle\jmath_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\imath_*} \\ L_2(G^{\#}, \mu_\Delta) & \xrightarrow{\mathscr{F}_\Delta^{G^{\#}}} & L_2(G^{\#\wedge}, \mu_{\widehat{\Delta}}) \end{array}$$

коммутативна.

Непосредственно из определений видно, что $\gamma \circ \jmath_*(f)$ — класс $\mathscr{S}_{2,\Delta}$-лифтинга функции f, т. е. $\gamma \circ \jmath_*(f) = \jmath_{2,\Delta}(f)$. Аналогично, $\widehat{\gamma} \circ \imath_* = \jmath_{2,\widehat{\Delta}}$, причем $\jmath_{2,\Delta}$ и $\jmath_{2,\widehat{\Delta}}$ индуцированы $\jmath$ и $\imath$ соответственно. Теперь из предыдущих двух диаграмм вытекает коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} L_2(\mathfrak{G}, \overline{\mu}_\Delta) & \xrightarrow{\mathscr{F}} & L_2(\widehat{\mathfrak{G}}, \overline{\mu}_{\widehat{\Delta}}) \\ {\scriptstyle\jmath_{2,\Delta}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\jmath_{2,\widehat{\Delta}}} \\ \mathscr{L}_{2,\Delta}(G^{\#}, \mu_\Delta) & \xrightarrow{(\Phi_\Delta^G)^{\#}} & \mathscr{L}_{2,\widehat{\Delta}}(G^{\#\wedge}). \end{array}$$

Это и доказывает (3). $\triangleright$

7.4.11. Заметим, что пара $(G, \jmath)$ из определения 7.4.1 является нестандартным объектом, поэтому алгоритм Нельсона нельзя напрямую применить к предложениям вида «$(G, \jmath)$ — гиперприближение группы $\mathfrak{G}$», так как он применяется лишь к предложениям, содержащим стандартные параметры. Чтобы обойти эту трудность, дадим следующее определение.

Стандартную последовательность $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$, где G_n — конечная абелева группа, а $\jmath_n$ — отображение из G_n в $\mathfrak{G}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, назовем ***приближающей последовательностью*** сепарабельной локально компактной абелевой группы $\mathfrak{G}$, если $(G_N, \jmath_N)$ — гиперприближение группы $\mathfrak{G}$ для всех $N \approx +\infty$.

Пусть $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность для группы $\widehat{\mathfrak{G}}$. Эту последовательность будем называть *двойственной* к $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$, если гиперприближение $(\widehat{G}_N, \widehat{\jmath}_N)$ двойственно к гиперприближению $(G_N, \jmath_N)$ для любого $N \approx +\infty$.

Функцию $f : \mathfrak{G} \to \mathbb{C}$ называют *быстро убывающей* относительно приближающей последовательности $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ группы $\mathfrak{G}$, если для любой относительно компактной окрестности нуля $U \subset \mathfrak{G}$ и любого бесконечного $N \in {}^*\mathbb{N}$ выполнено условие (см. 7.4.8)

$$(\forall B \in {}^*\mathscr{P}(G))\Bigl(B \subset G - G_f \;\to\; \Delta \sum_{g\in G} |{}^*f(\jmath(g))| \approx 0\Bigr),$$

где $\Delta := |\jmath_N^{-1}({}^*U)| \cdot |G_n|^{-1}$.

К этим определениям уже можно применить алгоритм Нельсона. Подчеркнем, что далеко не каждое гиперприближение можно получить из какой-либо приближающей последовательности, особенно если нестандартный универсум ${}^*V(\mathbb{R})$ не является ультрастепенью $V(\mathbb{R})$ относительно некоторого ультрафильтра на $\mathbb{N}$. Тем не менее внимательный анализ доказательства теоремы 7.4.4 показывает, что для любой сепарабельной локально компактной абелевой группы существует приближающая последовательность.

В следующих ниже предложениях $\mathscr{K}$ (соответственно $\widehat{\mathscr{K}}$) обозначает семейство всех компактных подмножеств группы $\mathfrak{G}$ (соответственно группы $\widehat{\mathfrak{G}}$), а $\mathbf{T}_0$ и $\widehat{\mathbf{T}}_0$ — базы относительно компактных окрестностей нейтрального элемента в $\mathfrak{G}$ и $\widehat{\mathfrak{G}}$ соответственно.

7.4.12. *Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ заданы конечная абелева группа G_n и отображение $\jmath_n : G_n \to \mathfrak{G}$, где $\mathfrak{G}$ — сепарабельная* *локально компактная абелева группа. Пусть* $\mathbf{T}_0$ — *база относительно компактных окрестностей нуля в* $\mathfrak{G}$. *Тогда последовательность* $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *будет приближающей для* $\mathfrak{G}$ *в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:*

(1) $(\forall \xi \in \mathfrak{G})(\forall U \in \mathbf{T}_0)(\exists f \in \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)$ $(\xi - \jmath_n(f_n) \in U)$;

(2) $(\forall K \subset \mathscr{K})(\forall U \in \mathbf{T}_0)(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n > m)(\forall g, h \in G_n)$ $((\jmath_n(g), \jmath_n(h) \in K \to (\jmath_n(g+h) - \jmath_n(g) - \jmath_n(h) \in U) \land$ $(\jmath_n(g) + \jmath_n(-g) \in U))$.

$\triangleleft$ Доказывается простым применением алгоритма Нельсона с учетом того факта, что $\operatorname{nst}({}^*\mathfrak{G}) = \bigcup\{{}^*K : K \subset \mathfrak{G}$ — компакт$\}$. $\triangleright$

7.4.13. *Пусть* $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — *приближающая последовательность сепарабельной локально компактной абелевой группы* $\mathfrak{G}$. *Тогда имеют место утверждения:*

(1) *функция* $f : \mathfrak{G} \to \mathbb{C}$ *быстро убывает относительно этой последовательности в том и только в том случае, если*
$(\forall U \in \mathbf{T}_0)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\exists K \in \mathscr{K})(\forall n > n_0)$
$(\forall B \subset \jmath_n^{-1}(\mathfrak{G} - K))\frac{1}{|\jmath_n^{-1}(U)|}\sum_{g\in B}|f(\jmath_n(g))| < \varepsilon$;

(2) *для любой меры Хаара* μ *на* $\mathfrak{G}$ *существует* $U \in \mathbf{T}_0$ *такой, что равенство*

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\jmath_n^{-1}(U)|} \sum_{g\in G_n} |f(\jmath_n(g))|$$

выполнено для любой ограниченной функции $f : \mathfrak{G} \to \mathbb{C}$, μ*-почти всюду непрерывной и быстро убывающей относительно* $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

$\triangleleft$ Первое утверждение выводится непосредственным применением алгоритма Нельсона к определению быстро убывающей функции, а второе — к предложению 7.4.8. $\triangleright$

7.4.14. *Пусть последовательности* $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *те же, что и в 7.4.11. Тогда* $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *двойственна к* $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *в том и только в том случае, если выполнены следующие два условия:*

(1) $(\forall V \in \widehat{\mathbf{T}}_0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\exists K \in \mathscr{K})(\exists \varepsilon > 0)$
$(\forall n > n_0)(\forall \chi \in \widehat{G}_n)(\forall g \in \jmath_n^{-1}(K)(|\chi(g) - 1| < \varepsilon \to \widehat{\jmath}_n(\chi) \in V)$;

(2) $(\forall K \in \mathscr{K})(\forall L \in \widehat{\mathscr{K}})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)$
$(\forall g \in \jmath_n^{-1}(K))(\forall \chi \in \widehat{\jmath}_n^{-1}(L)(|\widehat{\jmath}_n(\chi)(\jmath_n(g)) - \chi(g)| < \varepsilon)$.

◁ Доказывается применением алгоритма Нельсона к определению двойственного гиперприближения, см. 7.4.6. ▷

7.4.15. *Пусть $((G_n, \jmath_n))_{n \in \mathbb{N}}$ — приближающая последовательность сепарабельной локально компактной абелевой группы $\mathfrak{G}$, а $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ — двойственная к ней приближающая последовательность для $\widehat{\mathfrak{G}}$. Пусть μ — мера Хаара на $\mathfrak{G}$ и $\mathscr{F} : L_2(\mathfrak{G}) \to L_2(\widehat{\mathfrak{G}})$ — преобразование Фурье. Предположим, что $U \in \mathbf{T}_0$ соответствует μ в силу предложения 7.4.13 (2). Тогда если f и $|\mathscr{F}(f)|$ ограничены и почти всюду непрерывны относительно меры Хаара, а $|f|^2$ и $|\mathscr{F}(f)|^2$ быстро убывают относительно рассматриваемых приближающих последовательностей, то*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\jmath_n^{-1}(U)|}{|G_n|} \sum_{\chi \in \widehat{G}_n} \Bigg| \int_{\mathfrak{G}} f(\xi) \widehat{\jmath}_n(\chi)(\xi)\, d\mu(\xi) - $$
$$- \frac{1}{|\jmath_n^{-1}(U)|} \sum_{g \in G_n} f(\jmath_n(g))\chi(g) \Bigg|^2 = 0.$$

◁ Для доказательства нужно применить алгоритм Нельсона к теореме 7.4.10. ▷

7.4.16. Примечания.

(1) Результаты этого параграфа получены Е. И. Гордоном, см. [43, 45, 46, 317].

(2) Если группа $\mathfrak{G}$ компактна, то $G_f = G$, и каждое стандартно-конечномерное S-непрерывное унитарное представление G определяет (как это было указано в предыдущем параграфе) унитарное представление $\widetilde{T}$ группы $G^{\#}$ той же самой размерности. Из этого представления можно сконструировать эквивалентное ему представление $\widetilde{T} \circ \overline{\jmath}$ группы $\mathfrak{G}$. Теорема 7.3.10 показывает, что если $\mathfrak{G}$ имеет гиперприближение $(G, \jmath)$, то всякое ее неприводимое унитарное представление имеет такой же вид для некоторого S-непрерывного неприводимого унитарного представления T группы G.

(3) Основные результаты данного параграфа относятся к сепарабельным локально компактным абелевым группам. Однако в большинстве случаев предположение о сепарабельности можно опустить, если вместо ω^+-насыщенности нестандартного универсума потребовать его λ^+-насыщенность, где λ — вес группы $\mathfrak{G}$ (= наименьший кардинал из мощностей баз топологии $\mathfrak{G}$).

(4) Двойственное приближение группы характеров можно построить непосредственно в случае единичной окружности и дискретной группы. Это обстоятельство и тщательный анализ доказательства теоремы 7.4.4 показывают, что всякая сепарабельная локально компактная абелева группа, содержащая компактную и открытую подгруппу, допускает двойственную пару гиперприближений. Но тогда это верно и для всех сепарабельных локально компактных абелевых групп, так как для $\mathbb{R}$ двойственная пара гиперприближений может быть построена непосредственно (см. параграф 7.1).

(5) Если $|f|^2$ удовлетворяет условиям 7.4.8, а $|\mathscr{F}(f)|^2$ удовлетворяет тем же условиям с заменой $\mathfrak{G}, G, \Delta, G_f$ на $\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{G}, \widehat{\Delta}, \widehat{G}_f$ соответственно, то третье утверждение теоремы 7.4.10 эквивалентно соотношению

$$(\Delta|G|)^{-1} \sum_{h\in\widehat{G}} |\mathscr{F}(f)(i(h)) - \Phi_\Delta({}^*f \circ \jmath)(h)|^2 \approx 0,$$

которое более детально можно записать в виде:

$$(\Delta|G|)^{-1} \sum_{h\in\widehat{G}} \left| \int\limits_{{}^*\mathfrak{G}} {}^*f(\xi) \cdot \overline{i(h)(\xi)}\, d\mu_\Delta(\xi) - \Delta \sum_{g\in G} {}^*f(\jmath(g)) \cdot \overline{h(g)} \right|^2 \approx 0.$$

7.5. Примеры гиперприближений

Здесь мы рассмотрим гиперприближения аддитивной группы поля $\mathbb{R}$, единичной окружности, проконечных абелевых групп, аддитивной группы τ-адических целых, τ-адического соленоида, аддитивной группы поля p-адических чисел.

7.5.1. В качестве первого примера рассмотрим хорошее гиперприближение аддитивной группы поля $\mathbb{R}$, указанное в 7.4.2.

В этом примере $G := \{-L, \dots, L\}$ — аддитивная группа кольца ${}^*\mathbb{Z}/N{}^*\mathbb{Z}$, где $N := 2L+1$, $N\Delta \approx +\infty$, $\Delta \approx 0$ и $\jmath : G \to {}^*\mathbb{R}$ определяется формулой $\jmath(k) := k\Delta$. В этом случае двойственная группа

$\widehat{G}$ изоморфна G. Изоморфизм осуществляется сопоставлением каждому $n \in G$ характера χ_n, где $\chi_n(m) := \exp(2\pi i n m/N)$. Группа $\widehat{\mathbb{R}}$ изоморфна $\mathbb{R}$, причем изоморфизм можно осуществить, сопоставляя каждому $t \in \mathbb{R}$ характер $\varkappa_t$ по формуле $\varkappa_t(x) := \exp(2\pi i t x)$.

Двойственное гиперприближение $(\widehat{G}, \imath)$ определено равенством $\imath(n) := \frac{n}{N\Delta}$ или, точнее, $\imath(\chi_n)(x) := \exp(\frac{2\pi i n}{N\Delta} x)$.

Из 7.2.1 (1) видно, что выполнено 7.4.1 (1). Условие 7.4.1 (2) почти очевидно. В самом деле, $\jmath(m) = m\Delta \approx x$ и $\imath(m) = \frac{m}{N\Delta} \approx t$, так что $\exp(2\pi i t x) = \exp 2\pi i \imath(m)(\jmath(n)) \approx \exp(2\pi i m n/N)$. Соответствующее гиперприближение преобразования Фурье изучалось на протяжении всего параграфа 7.1.

7.5.2. Рассмотрим теперь гиперприближение для случая единичной окружности S (она же S^1), которую, как и выше, удобно представлять в виде интервала $[-1/2, 1/2)$. Групповая операция $+_S$ — сложение по модулю 1. Двойственная группа $\widehat{S}$ изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$. Изоморфизм может быть осуществлен сопоставлением каждому $n \in \mathbb{Z}$ характера $\varkappa_n(x) := \exp(2\pi i n x)$.

Пусть G та же группа $\{-L, \dots, L\}$, что и в 7.5.1, где $N := 2L + 1 \approx +\infty$, и определим отображение $\jmath : G \to {}^*S$ формулой $\jmath(m) := m/N$ для $m \in G$. Отображение $\imath : \widehat{G} \to {}^*\mathbb{Z}$ определено на двойственном гиперприближении $(\widehat{G}, \imath)$ правилом $\imath(n) := n$ или, точнее, $\imath(\chi_n) := \varkappa_n$, где характер χ_n определен как в 7.5.1. Так как группа $\mathbb{Z}$ дискретна, то $\widehat{G}_0 = 0$ и $\widehat{G}_f = \mathbb{Z}$. Ввиду компактности окружности S в проверке нуждается лишь условие 7.4.1 (2), которое столь же просто, как и в 7.5.1.

Применив теорему 7.4.10 к рассматриваемому случаю, получим следующий факт.

(1) *Пусть функция $f : [-1/2, 1/2) \to \mathbb{C}$ интегрируема по Риману. Тогда для бесконечно большого гипернатурального числа $N := 2L + 1$ выполняется*

$$\sum_{n=-L}^{L} \Bigg| \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \exp(-2\pi i n x)\, dx -$$

$$- \frac{1}{N} \sum_{m=-L}^{L} f(m/N) \exp(-2\pi i m n/N) \Bigg|^2 \approx 0.$$

Посредством подходящей замены переменной из этого предложения выводится следующее утверждение.

(2) *Для любой интегрируемой по Риману функции f, заданной на $[-l, l]$, будет*

$$\sum_{n=-L}^{L} \left| \int_{-l}^{l} f(x) \exp(\pi i n x/l)\, dx - \Delta \sum_{m=-L}^{L} f(m\Delta) \exp(-2\pi i m n/N) \right|^2 \approx 0,$$

как только N и Δ таковы, что $N = 2L + 1 \approx +\infty$ и ${}^\circ(N\Delta) = 2l$.

7.5.3. В следующих двух пунктах построим гиперприближение проконечных абелевых групп. Рассмотрим стандартную последовательность $((K_n, \varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$, где K_n — конечная абелева группа, а $\varphi_n : K_{n+1} \to K_n$ — эпиморфизм для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пусть (K, ψ) — ***проективный предел*** указанной последовательности, обозначаемый $\varprojlim (K_n, \varphi_n)$. Это означает, что существуют группа K и последовательность эпиморфизмов $\psi := (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где $\psi_n : K \to K_n$ таковы, что $\varphi_n \circ \psi_{n+1} = \psi_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Топология в (K, ψ) индуцируется из $\prod_n K_n$. Для фиксированного $N \approx +\infty$ положим $G := {}^*K_N$. Тогда ${}^*\psi_N : K \to {}^*K_N = G$ — эпиморфизм.

(1) *Пусть внутреннее отображение (вообще говоря, не гомоморфизм) $\jmath : G \to {}^*K$ служит правым обратным к ${}^*\psi_N$ и $\jmath(0) = 0$. Тогда пара $(G, \jmath)$ будет гиперприближением группы K.*

$\triangleleft$ По определению топологии в K имеет место следующее описание бесконечной близости в ${}^*K$:

$$(\forall \alpha, \beta \in {}^*K)(\alpha \overset{K}{\approx} \beta \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} n)({}^*\psi_n(\alpha) = {}^*\psi_n(\beta))).$$

Группа K компактна, поэтому имеет место 7.4.1 (1) и достаточно обосновать 7.4.1 (2) и 7.4.1 (3), ибо 7.4.1 (4) выполнено по определению. Для $n > m$ определим гомоморфизм $\varphi_{nm} : K_n \to K_m$ формулой $\varphi_{nm} := \varphi_{n-1} \circ \ldots \circ \varphi_m$. Тогда $\varphi_{n,n-1} = \varphi_{n-1}$ и $\varphi_{nm} \circ \psi_n = \psi_m$, следовательно, для любого стандартного $n \in \mathbb{N}$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} {}^*\psi_n(\jmath(a+b)) &= {}^*\varphi_{Nn} \circ {}^*\psi_N(\jmath(a+b)) = \\ &= {}^*\varphi_{Nn}(a+b) = {}^*\varphi_{Nn}(a) + {}^*\varphi_{Nn}(b). \end{aligned}$$

Аналогично

$$^*\psi_n(\jmath(a)+\jmath(b)) = {}^*\psi_n(\jmath(a)) + {}^*\psi_n(\jmath(b)) = {}^*\varphi_{Nn}(a) + {}^*\varphi_{Nn}(b),$$

что и доказывает 7.4.1 (2) в силу указанного выше описания бесконечной близости в $^*K$. Аналогичные соображения приводят к 7.4.1 (3). $\triangleright$

(2) *Если выполнены условия предложения (1), то*

$$G_0 = \{a \in G : (\forall^{\mathrm{st}} n)({}^*\varphi_{Nn}(a) = 0)\},$$

где $\varphi_{nm} : K_n \to K_m$. Более того, $K \simeq G/G_0 = G^\#$.

7.5.4. Если $(K,\psi) := \varprojlim(K_n,\varphi_n)$, то двойственная группа $\widehat{K}$ имеет вид $\varprojlim(\widehat{K}_n,\widehat{\varphi}_n)$, где $\widehat{\varphi}_n : \widehat{K}_n \to \widehat{K}_{n+1}$ определяется формулой $\widehat{\varphi}_n(\chi) := \chi\circ\varphi_n$ $(\chi \in \widehat{K}_n)$. Вложения $\widehat{\psi}_n : \widehat{K}_n \to \widehat{K}$ определяются аналогично. Из этих определений видно, что если для $n > m$ ввести $\widehat{\varphi}_{nm} : \widehat{K}_m \to \widehat{K}_n$ формулой $\widehat{\varphi}_{nm}(\chi) := \chi\circ\varphi_{nm}$ $(\chi \in \widehat{K}_n)$, то выполняются равенства $\widehat{\varphi}_{nm} = \widehat{\varphi}_m \circ \ldots \circ \widehat{\varphi}_{n-1}$ и $\widehat{\psi}_m = \widehat{\psi}_n \circ \widehat{\varphi}_{nm}$.

(1) *Если гиперприближение $(G,\jmath)$ группы K определено как в 7.5.3 (1) (т. е. $G := K_N$ и $\jmath : G \to {}^*K$ — правое обратное отображение к $^*\psi_N$), то $(\widehat{K},\widehat{\psi}_N)$ — гиперприближение группы $\widehat{K}$, двойственное к $(G,\jmath)$.*

$\triangleleft$ Прежде всего заметим, что условия 7.4.1 (2)–(4) выполнены автоматически, так как $\widehat{\psi}_N$ — гомоморфизм. Поскольку $\widehat{K}$ — индуктивный предел последовательности групп $(\widehat{K}_n)$, то $\widehat{K} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, где $A_n := \{\chi\circ\psi_n : \chi \in \widehat{K}_n\}$. По принципу переноса $^*\widehat{K} = \bigcup_{n\in{}^*\mathbb{N}} A_n$. Но $\widehat{K}_n$ — стандартное конечное множество, поэтому $^*A_n = \{\chi\circ{}^*\psi_n : \chi \in \widehat{K}_n\}$. Таким образом, каждый стандартный элемент $\varkappa \in {}^*\widehat{K}$ имеет вид $\varkappa = \chi\circ{}^*\psi_n$ для некоторых стандартных n и $\chi \in \widehat{K}_N$. Отсюда $^*\widehat{\varphi}_{nM}(\chi) \in \widehat{K}_n$ и $\widehat{\psi}_N({}^*\widehat{\varphi}_{nN}(\chi)) = \varkappa$. Тем самым обосновано условие 7.4.1 (1). Условие 7.4.6 (1) выполнено автоматически ввиду компактности K. Если $\chi \in \widehat{K}_n$, то $^*\widehat{\psi}_N(\chi)(\jmath(a)) = \chi({}^*\psi_N(\jmath(a))) = \chi(a)$, следовательно, 7.4.6 (2) также верно. $\triangleright$

(2) *Если в условиях 7.5.3 (1) и (1) функция $f : K \to \mathbb{C}$ ограничена и непрерывна почти всюду относительно меры Хаара, то*

$$\sum_{\chi\in\widehat{K}_N} \left| \int\limits_{^*K} f(\alpha)\overline{\chi(\psi_N(\alpha))}\,d^*\mu_K(\alpha) - |K_N|^{-1} \sum_{a\in K_N} f(\jmath(a))\overline{\chi(a)} \right|^2 \approx 0,$$

где μ_K — мера Хаара на K, для которой $\mu_K(K) = 1$.

$\triangleleft$ Следует из 7.4.10 и 7.4.16 (5). $\triangleright$

7.5.5. Применим результаты предыдущего пункта к построению гиперприближения кольца τ-адических целых Δ_τ (см. [54, 223]). Символ $a \mid b$ обозначает тот факт, что b делит a без остатка. Пусть, кроме того, $\mathrm{rem}(a, b)$ — остаток от деления a на b.

Пусть $\tau := (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — стандартная последовательность натуральных чисел такая, что $a_n > 1$ и $a_n \mid a_{n+1}$. Обозначим символом A_n кольцо $\mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}$, которое в нашем случае рассматривается как кольцо наименьших положительных вычетов по модулю a_n, т. е. $A_n := \{0, 1, \dots, a_n - 1\}$. Пусть $\varphi_n : A_{n+1} \to A_n$ — эпиморфизм, который сопоставляет элементу $a \in A_{n+1}$ остаток при делении a на a_n, т. е. $\varphi_n(a) := \mathrm{rem}(a, a_n)$. Кольцо $\Delta_\tau := \varprojlim(A_{n+1}, \varphi_n)$ называют ***кольцом τ-адических целых.***

Определим вложение $\nu : \mathbb{Z} \to \Delta_\tau$, полагая $\nu(a)_n := \mathrm{rem}(a, a_n)$ для всех $a \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{Z}$. Тогда последовательность $\nu(a)$ содержится в $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ и $\varphi_n(\nu(a)_{n+1}) = \nu(a)_n$, стало быть, $\nu(a) \in \Delta_\tau$. Легко проверить, что множество $\nu(\mathbb{Z})$ плотно в Δ_τ. Пусть $\jmath_n := \nu|_{A_n} : A_n \to \Delta_\tau$. Тогда $\jmath_n$ — правое обратное к отображению $\psi_n : \Delta_\tau \to A_n$. В самом деле, если $\xi := (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Delta_\tau$, то $\psi_n(\xi) = \xi$. Принимая во внимание, что $\mathrm{rem}(a, a_n) = a$ для $a \in A_n$, получаем $\psi_n(\nu(a)) = a$.

Если $N \approx +\infty$, то пара $({}^*A_N, {}^*\jmath_N)$ представляет собой гиперприближение кольца Δ_τ. Более того, группа Δ_τ топологически изоморфна ${}^*A_N/G_0$, где

$$G_0 := \{a \in {}^*A_N : (\forall^{\mathrm{st}} n)\,(a_n \mid a)\}.$$

$\triangleleft$ Следует из 7.5.3 (1, 2). $\triangleright$

7.5.6. Опишем теперь двойственную группу $\widehat{\Delta}_\tau$ (см. [223]).

Пусть $\mathbb{Q}^{(\tau)} := \{\frac{m}{a_n} : m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\}$. Так как $a_n \mid a_m$ при $n \le m$, то $\mathbb{Q}^{(\tau)}$ — подгруппа аддитивной группы $\mathbb{Q}$. Очевидно, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}^{(\tau)}$. Пусть $\mathbb{Z}^{(\tau)} := \mathbb{Q}^{(\tau)}/\mathbb{Z}$. Известно при этом, что $\widehat{\Delta}_\tau \simeq \mathbb{Z}^{(\tau)}$. Для описания этого изоморфизма нужно ввести некоторые обозначения. Если $\xi := (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Delta_\tau$, то пишем $\xi_n := \mathrm{rem}(\xi, a_n)$. Это обозначение согласуется с тем случаем, когда $\xi = \nu(a)$ для некоторого $a \in \mathbb{Z}$, т. е. $\mathrm{rem}(a, a_n) = \mathrm{rem}(\nu(a), a_n)$. Ниже $\nu(a)$ отождествляется с a

и, значит, предполагается, что $\mathbb{Z} \subset \Delta_\tau$. Тогда для некоторого $\eta \in \Delta_\tau$ выполняется равенство $\xi = \eta a_n + \operatorname{rem}(\xi, a_n)$. Пусть $\{\xi/a_n\} = (\operatorname{rem}(\xi, a_n))/a_n \in \mathbb{Q}^{(\tau)}$. Тогда легко проверить формулы $\{C\xi/a_n\} \equiv C\{\xi/a_n\} \pmod{\mathbb{Z}}$ и $\{\xi/a_n + \eta\} = \{\xi/a_n\}$, где $C \in \mathbb{Z}$ и $\eta \in \Delta_\tau$. Если теперь (C/a_n) — класс элемента $C/a_n \in \mathbb{Q}^{(\tau)}$ в $\mathbb{Z}^{(\tau)}$, то характер $\chi_{(C/a_n)} \in \widehat{\Delta}_\tau$ определяется формулой

$$\chi_{(C/a_n)}(\xi) := \exp(2\pi i\{\xi/a_n\}) \quad (\xi \in \Delta_\tau).$$

Опишем вложение $\widehat{\psi}_n : \widehat{A}_n \to \widehat{\Delta}_\tau$.

В рассматриваемом случае $\widehat{A}_n$ изоморфна A_n. Изоморфизм можно осуществить, сопоставляя каждому m характер $\chi_m \in \widehat{A}_n$ по правилу $\chi_m(a) := \exp(2\pi i m a/a_n)$ для $a \in A_n$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_n(\chi_m)(\xi) = \chi_m(\psi_n(\xi)) = \chi_n(\operatorname{rem}(\xi, a_n)) = \\ = \exp(2\pi i m \operatorname{rem}(\xi, a_n)/a_n) = \exp(2\pi i\{m\xi/a_n\}). \end{aligned}$$

После подходящего отождествления мы можем предположить, что $\widehat{\psi}_n : A_n \to \mathbb{Z}^{(\tau)}$ определяется формулой $\widehat{\psi}_n(m) = (m/a_n)$.

Для произвольного $N \approx +\infty$ пара $({}^*A_N, {}^*\widehat{\psi}_N)$ служит гиперприближением группы $\widehat{\Delta}_\tau$, двойственным к $({}^*A_N, {}^*\jmath_N)$.

$\lhd$ Следует из 7.4.10. $\rhd$

(1) *Если $N \approx +\infty$ и стандартная ограниченная функция $f : \Delta_\tau \to \mathbb{C}$ непрерывна почти всюду относительно меры Хаара μ_τ, где $\mu_\tau(\Delta_\tau) = 1$, то*

$$\sum_{k=0}^{{}^*a_N - 1} \Bigg| \int\limits_{{}^*\Delta_\tau} {}^*f(\xi) \exp(-2\pi i\{k\xi/{}^*a_N\})\, d\mu_\tau(\xi) - \\ - a_N^{-1} \sum_{n=0}^{{}^*a_N - 1} {}^*f(n) \exp(-2\pi i k n/{}^*a_N) \Bigg|^2 \approx 0.$$

$\lhd$ Следует из 7.4.4 (5). $\rhd$

7.5.7. Два следующих пункта посвящены построению гиперприближения *τ-адического соленоида*. Напомним (см. [54, 223]), что τ-адический соленоид Σ_τ представляется в виде $[0,1)\times\Delta_\tau$, где групповая операция $+_\tau$ определяется соотношением

$$(x,\xi)+_\tau(y,\eta)=(\{x+y\},\xi+\eta+[x+y]),$$

а $[a]$ и $\{a\}$ — *целая* и *дробная части* числа a. Топология в Σ_τ задается системой $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ окрестностей нуля, причем

$$V_n:=\{(x,\xi):0\le x<1/a_n,\ (\forall k\le n)\,(\mathrm{rem}(x,a_k)=0)\}\cup$$
$$\cup\{(x,\xi):1-1/a_n<x<1,\ (\forall k\le n)\,(\mathrm{rem}(x+1,a_k)=0)\}$$

(напомним, что $\tau:=\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$).

Из сказанного нетрудно усмотреть следующее описание бесконечно малых элементов в Σ_τ.

(1) *Если $(x,\xi)\in{}^*\Sigma_\tau$, то имеет место эквивалентность*

$$(x,\xi)\overset{\Sigma_\tau}{\approx}0\leftrightarrow x\approx 0\wedge\xi\overset{\Delta_\tau}{\approx}0\vee x\approx 1\wedge\xi+1\overset{\Delta_\tau}{\approx}0.$$

Зафиксируем некоторое $N\approx+\infty$, положим $G:={}^*\mathbb{Z}/{}^*a_N^2{}^*\mathbb{Z}=\{0,1,\dots,{}^*a_N^2-1\}$ и введем отображение $\jmath:G\to\Sigma_\tau$ формулой

$$\jmath(a)=(\{a/a_N\},[a/a_N])\quad(a\in G).$$

Как и выше, предполагаем, что $\mathbb{Z}\subset\Delta_\tau$. Заметим, что при этом $[a/a_N]<a_N$.

(2) *Пара $(G,\jmath)$ служит гиперприближением τ-адического соленоида Σ_τ.*

$\lhd$ Так как $a+_G b\equiv a+b\pmod{a_N^2}$, то $a+_G b\equiv a+b\pmod{a_N}$, следовательно,

$$\{(a+_G b)/a_N\}=(\mathrm{rem}(a+_G b,a_N))/a_N=$$
$$=(\mathrm{rem}(a+b,a_N))/a_N=\{\{a/a_N\}+\{b/a_N\}\}.$$

Покажем, что $[(a+_G b)/a_N]\overset{\Delta_\tau}{\approx}[(a+b)/a_N]=[a/a_N]+[b/a_N]+[\{a/a_N\}+\{b/a_N\}]$. Отсюда в силу (1) $\jmath(a+_G b)\overset{\Sigma_\tau}{\approx}\jmath(a)+\jmath(b)$.

Пусть $a := q(a)a_N + r(a)$ и $b := q(b)a_N + r(b)$, т. е. $q(a) = [a/a_N]$ и $q(b) = [b/a_N]$. Пусть $a + b := q(a+b)a_N + r(a+b)$. Если $q(a+b) = sa_N + r$, то $a+b = sa_N^2 + ra_N + r(a+b)$ и $ra_N + r(a+b) \le (a_N - 1)a_N + a_N - 1 = a_N^2 - 1$. Таким образом, $a +_G b = \mathrm{rem}((a+b), a_N^2) = ra_N + r(a+b)$, откуда $q(a +_G b) = r$, поэтому $q(a+b) \equiv q(a +_G b) \pmod{a_N}$. Поскольку $a_n \mid a_N$ для всех стандартных n, то $q(a+b) \approx q(a +_G b)$.

Для обоснования соотношения $\jmath(-_G a) \approx \jmath(a)$ нужно лишь представить a в виде $a = qa_N + r$, использовать равенство $-_G a = a_N^2 - a$ и рассмотреть два случая: $r = 0$ и $r \ne 0$.

Для доказательства того, что $(G, \jmath)$ — это гиперприближение группы Σ_τ, остается показать (см. 7.4.1), что для любой пары $(x, \xi) \in \Sigma_\tau$ существует такой $a \in G$, что $\jmath(a) \approx (x, \xi)$. Выберем $r < a_N$ так, чтобы $r/a_N \le x < (r+1)/a_N$, и положим $q := \mathrm{rem}({}^*x, a_N)$. Тогда $q < a_N$ и мы приходим к требуемому при $a := qa_N + r$. $\triangleright$

Согласно 7.5.5 и (1) $\Sigma_\tau \simeq G/G_0$, где

$$G_0 = \big\{a \in G : \{a/a_N\} \approx 0 \wedge [a/a_N] \overset{\Delta_\tau}{\approx} 0 \vee \\ \vee \{a/a_N\} \approx 1 \wedge [a/a_N] + 1 \overset{\Delta_\tau}{\approx} 0\big\}.$$

Можно получить более обозримое описание G_0.

(3) *Имеет место представление*

$$G_0 = \{a \in G : (\forall^{\mathrm{st}} n)(\exp(2\pi i a/(a_N a_n))) \approx 1\}.$$

$\triangleleft$ Пусть $\exp(2\pi i a/(a_N a_n)) \approx 1$ для любого стандартного n.

Тогда для любого стандартного n существует такой элемент $k \in \mathbb{Z}$, что $(a/(a_N a_n) \approx k)$. Если $a = qa_N + r$, то $a/(a_N a_n) = (q + r/a_N)/a_n \approx k \in {}^*\mathbb{Z}$. Так как a_n стандартно, то $q + r/a_N \approx ka_n \in {}^*\mathbb{Z}$, где $q \in {}^*\mathbb{Z}$ и $0 \le r/a_N < 1$, следовательно, возможны лишь два случая $r/a_N \approx 0$ и $r/a_N \approx 1$.

В первом случае $q \approx ka_n$ и $q = ka_n$, поскольку оба этих числа целые. Но тогда $r/a_N \approx 0$ и $q \overset{\Delta_\tau}{\approx} 0$, стало быть, $a \in G_0$. Во втором случае при $q \not\equiv -1 \pmod{a_n}$ будет $q + 1 = ta_n + s$, где $0 < s < a_n$, поэтому $q + r/a_N = s - 1 + ta_n + r/a_N \approx s + ta_n \approx ka_n$. Тем самым приходим к соотношению $s/a_n + t \approx k$, невозможному при $s \ne 0$. Итак, $q \equiv -1 \pmod{a_n}$ и вновь $a \in G_0$.

Наоборот, предположим, что $a \in G_0$ и $a = qa_N + r$. Необходимо рассмотреть два случая: (а) $r/a_N \approx 0$, $q \overset{\Delta_\tau}{\approx} 0$; (б) $r/a_N \approx 1$, $q \overset{\Delta_\tau}{\approx} 0$. В первом случае $\exp(2\pi ia/(a_N a_n)) = \exp(2\pi i(a/a_n + r/(a_N a_n))) = \exp(2\pi ia/(a_N a_n)) \approx 1$, ибо $q/a_n \in {}^*\mathbb{Z}$. Второй случай рассматривается аналогично. $\rhd$

(4) *Пусть τ — стандартная последовательность $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ натуральных чисел, причем $a_n > 1$ и $a_n \mid a_{n+1}$. Пусть, далее, $G := \{0, 1, \dots, a_N^2 - 1\}$ — аддитивная группа кольца ${}^*\mathbb{Z}/a_N^2{}^*\mathbb{Z}$ и $G_0 := \{a \in G : (\forall^{\mathrm{st}} n)(\exp(2\pi ia/(a_N a_n)) \approx 1\}$. Тогда τ-адический соленоид Σ_τ топологически изоморфен группе $G^\# := G/G_0$.*

7.5.8. Займемся теперь построением двойственного гиперприближения группы $\widehat{\Sigma}_\tau$. Известно, что $\widehat{\Sigma}_\tau \simeq \mathbb{Q}^{(\tau)} := \{m/a_n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Изоморфизм можно осуществить, сопоставляя каждому $\alpha = m/a_n \in \mathbb{Q}^{(\tau)}$ характер $\varkappa_\alpha \in \widehat{\Sigma}_\tau$ по формуле:

$$\varkappa_\alpha(x, \xi) = \exp(2\pi i\alpha(x + \mathrm{rem}(\xi, a_n))) \quad (x \in [0,1],\ \xi \in \Delta_\tau)$$

(см. [54, 223]). Как и в случае произвольной конечной группы, $\widehat{G} \simeq G$, причем изоморфизм осуществляется сопоставлением каждому $b \in G$ характера χ_b по формуле $\chi_b(a) := \exp(2\pi iab/a_N^2)$ для всех $a \in G$. В качестве двойственного к гиперприближению группы Σ_τ, построенному в предыдущем пункте, рассмотрим пару $(G, \imath)$, где $\imath : G \to {}^*\mathbb{Q}^{(\tau)}$ определяется формулой $\imath(b) := b/a_N$. Точнее, отображение $\imath : \widehat{G} \to \widehat{\Sigma}_\tau$ каждому $\chi_b \in \widehat{G}$ сопоставляет характер $\varkappa_{b/a_n} \in {}^*\widehat{\Sigma}_\tau$, причем группу G мы представляем в виде наименьших по абсолютной величине наименьших вычетов, т. е. $G = \{-\frac{1}{2}a_N^2, \dots, \frac{1}{2}a_N^2 - 1\}$.

Проверка условий 7.4.1 (1–4) тривиальна. В 7.4.6 (1, 2) вновь нужно лишь проверить второе условие, причем здесь мы даже получим точное равенство. В самом деле, если $a \in G$ и $a := qa_N + r$, то $[a/a_N] = q < a_N$, т. е. $\mathrm{rem}([a/a_N], a_N) = [a/a_N] = q$. Теперь $\varkappa_{\imath(b)}(\jmath(a)) = \exp(2\pi i(b/a_N)(r/a_N + q)) = \exp(2\pi iab/a_N^2) = \chi_b(a)$.

Пусть $f : \Sigma_\tau \to \mathbb{C}$ — ограниченная функция, непрерывная почти всюду относительно меры Хаара μ_{Σ_τ} причем $\mu_{\Sigma_\tau}(\Sigma_\tau) = 1$. Для любого $N \approx +\infty$ справедливы формулы

(1) $\displaystyle\int_{\Sigma_\tau} f\, d\mu_\tau = {}^\circ\!\left(\frac{1}{a_N^2}\sum_{k=0}^{a_N^2-1} f(\{k/a_N\}, [k/a_N])\right);$

$$\text{(2)}\ \sum_{m=-a_N^2/2}^{a_N^2/2-1}\Big|\int_{\Sigma_\tau} f(x,\xi)\exp(-2\pi i(m/a_N)(x+\operatorname{rem}(\xi,a_N)))d\mu_{\Sigma_\tau}-$$

$$-\frac{1}{a_N^2}\sum_{k=0}^{a_N^2-1} f(\{k/a_N\},[k/a_N])\exp(-2\pi ikm/a_N^2)\Big|^2\approx 0.$$

$\lhd$ Следует из 7.4.10 и 7.4.16 (5). $\rhd$

7.5.9. Сейчас мы займемся построением гиперприближения аддитивной группы поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, где p — стандартное простое число.

Пусть фиксированы M и N, причем $M, N, N-M\approx+\infty$. В качестве гиперконечной абелевой группы G рассмотрим аддитивную группу кольца ${}^*\mathbb{Z}/p^N{}^*\mathbb{Z}$, которое будем представлять как систему наименьших положительных вычетов $G:=\{0,1,\dots,p^N-1\}$. Определим также отображение $\jmath: G\to{}^*\mathbb{Q}_p$, полагая $\jmath(n):=n/p^M\in{}^*\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}_p$ для $n\in G$.

(1) *Если $n\in G$, то справедлива эквивалентность*

$$\jmath(n)\in\operatorname{nst}({}^*\mathbb{Q}_p)\leftrightarrow(\exists^{\mathrm{st}}k\in\mathbb{N})\,(p^{M-k}\mid n).$$

Если при этом

$$n=a_{-k}p^{M-k}+a_{-k+1}p^{M-k+1}+\ldots+a_{N-M-1}p^{N-1},$$

где $0\le a_i<p$, то

$$\widetilde{\jmath}(n)=\operatorname{st}(\jmath(n))=\sum_{i:=l}^{\infty}a_ip^i.$$

(Напомним, что $\widetilde{\jmath}:=\operatorname{st}\circ\jmath|_{G_f}$, см. 7.4.1.)

$\lhd$ Если $p^{M-k}\mid n$, то n имеет указанный в формулировке вид, поэтому требуемое следует из бесконечности числа $N-M-1$. Наоборот, предположим, что $np^{-M}\approx\xi\in\mathbb{Q}_p$ и $|\xi|_p=p^k$, где $k\in\mathbb{Z}$. Так как $|np^{-M}-\xi|_p\approx 0$, то существует бесконечное $b\in{}^*\mathbb{N}$ такое, что $np^{-M}-\xi=p^b\varepsilon_1$, где ε_1 — единица кольца ${}^*\mathbb{Z}_p$. По условию $\xi=p^{-k}\varepsilon_2$, где ε_2 — единица кольца $\mathbb{Z}_p$. Отсюда следует, что $n=p^{M-k}\varepsilon_2+p^{M+b}\varepsilon_1$. Из стандартности k вытекает $M-k<M+b$, значит, $p^{M-k}\mid n$ в ${}^*\mathbb{Z}_p$, но тогда и в $\mathbb{Z}$. $\rhd$

(2) *Пара $(G, \jmath)$ служит гиперприближением аддитивной группы $\mathbb{Q}_p^+$ поля $\mathbb{Q}_p$. Более того,*

$$G_f = \{n \in G : (\exists^{\mathrm{st}} k)(p^{M-k} \mid n)\},$$
$$G_0 = \{n \in G : (\forall^{\mathrm{st}} k)(p^{M+k} \mid n)\}.$$

$\lhd$ Требуемые равенства вытекают из (1). Для обоснования условий 7.4.1 (1–4) достаточно показать, что $\widetilde{\jmath} : G_f \to \mathbb{Q}_p$ — эпиморфизм. Обозначим символом $\oplus$ групповую операцию в G. Пусть $n = n_1 \oplus n_2$ или, что то же, $n_1 + n_2 = n + tp^M$. Тогда $|n_1 p^{-M} + n_2 p^{-M} - np^{-M}|_p \leq p^{N-M}$, следовательно, $\widetilde{\jmath}(n_1 + n_2) = \widetilde{\jmath}(n_1 \oplus n_2)$ ввиду бесконечности $N - M$. Поскольку $\mathrm{st} : \mathrm{nst}\,({}^*\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Q}_p$ — гомоморфизм, то получаем $\widetilde{\jmath}(n_1 + n_2) = \widetilde{\jmath}(n_1) + \widetilde{\jmath}(n_2)$. Тем самым $\widetilde{\jmath}$ — гомоморфизм. Для обоснования сюръективности $\widetilde{\jmath}$ заметим, что если $\xi = \sum_{l=-k}^{\infty} a_l p^l$, то, определив n как в формулировке предложения (1), получим $\jmath(n) \approx \xi$. $\rhd$

(3) *Имеет место изоморфизм топологических групп $\mathbb{Q}_p^+ \simeq G_f/G_0 = G^\#$.*

Пусть $G^{(0)} := \{n \in G : p^M \mid n\}$. Тогда $G^{(0)}$ — внутренняя подгруппа группы G такая, что $G_0 \subset G^{(0)} \subset G_f$. Так как $|G^{(0)}| = p^{N-M}$, то число $\Delta := p^{M-N}$ можно взять в качестве нормирующего множителя тройки (G, G_0, G_f).

(4) *Имеет место равенство $\widetilde{\jmath}(G^{(0)}) = \mathbb{Z}_p$. Более того, нормирующий множитель $\Delta = p^{M-N}$ индуцирует на $\mathbb{Q}_p$ меру Хаара $\overline{\mu}_\Delta$, для которой $\overline{\mu}_\Delta(\mathbb{Z}_p) = 1$ (эту меру ниже обозначаем символом μ_p).*

7.5.10. Выведем теперь стандартный эквивалент условия существования $\mathscr{S}_{1,\Delta}$-интегрируемого лифтинга из 7.4.8.

(1) *Функция $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию (см. 7.4.8)*

$$(\forall B \in {}^*\mathscr{P}(G))\Bigg(B \subset G - G_f \ \to\ \Delta \sum_{g \in G} |{}^*f(\jmath(g))| \approx 0\Bigg)$$

в том и только в том случае, если

$$\lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{p^n} \sum_{\substack{0 \leq k < p^{m+n+l} \\ p^l \nmid k}} |f(k/p^{m+l})| = 0$$

равномерно по l.

$\lhd$ Если $B \subset G - G_f$, то для каждого $n \in B$ и для каждого стандартного k будет $p^{M-k} \nmid L$. Это равносильно условию $p^{M-L} \nmid n$ для некоторого бесконечного L. Таким образом, $B \subset G - B_f$ в том и только в том случае, когда $B \subset B_L := \{n : p^{M-L} \nmid n\}$. Как видно, B_L — внутреннее множество для любого бесконечного L. Следовательно, условие предложения можно переформулировать следующим образом: для любых бесконечных $L < M < N$ таких, что $N - M$ также бесконечно, выполняется

$$\frac{1}{p^{N-M}} \sum_{\substack{0 \le k < p^N \\ p^{M-L} \nmid k}} |{}^*f(k/p^M)| \approx 0.$$

Обозначив $n := N - M$, $m := L$ и $l := M - L$, мы приходим к утверждению о том, что для любых бесконечных m и n и для любого l верно

$$\frac{1}{p^n} \sum_{\substack{0 \le k < p^{m+n+l} \\ p^l \nmid k}} |{}^*f(k/p^{m+l})| \approx 0.$$

Последнее равносильно требуемому. $\rhd$

(2) *Если ограниченная и непрерывная почти всюду относительно меры Хаара функция $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ удовлетворяет заключению предложения (1), то f интегрируема и*

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f\, d\mu_p = {}^\circ\!\left(\frac{1}{p^{N-M}} \sum_{0 \le k < p^N} {}^*f(k/p^M)\right),$$

или же в стандартных терминах

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f\, d\mu_p = \lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{p^n} \sum_{0 \le k < p^{m+n}} {}^*f(k/p^m).$$

7.5.11. Займемся теперь двойственным гиперприближением $\widehat{\mathbb{Q}}_p^+$. Напомним, что $\widehat{\mathbb{Q}}_p^+ \simeq \mathbb{Q}_p^+$. Изоморфизм осуществляется сопоставлением каждому $\xi \in \mathbb{Q}_p^+$ характера $\varkappa_\xi(\eta) := \exp(2\pi i\{\xi\eta\})$, где $\{\zeta\}$ — дробная часть p-адического числа ζ. Отождествляя $\widehat{\mathbb{Q}}_p^+$ и $\mathbb{Q}_p^+$ указанным способом, рассмотрим гиперприближение $(G, \widehat{\jmath})$ группы $\mathbb{Q}_p$, определяемое формулой $\widehat{\jmath}(n) := n/p^{N-M}$ для $n \in G$.

(1) *Пара* $(G, \widehat{\jmath})$ *служит гиперприближением группы* $\widehat{\mathbb{Q}}_p^+$, *двойственным к* $(G, \jmath)$.

$\triangleleft$ Из 7.5.9 (2) видно, что $(G, \widehat{\jmath})$ — действительно гиперприближение. Проверим, что $(G, \widehat{\jmath})$ двойственно к $(G, \jmath)$ (см. 7.4.6). Условие 7.4.6 (2) проверяется просто:

$$\varkappa_{\jmath(m)}(\widehat{\jmath}(n)) = \exp(2\pi i\{\widehat{\jmath}(n)\jmath(m)\}) = \exp(2\pi i\{nm/p^N\}) = \\ = \exp(2\pi inm/p^N) = \chi_m(n).$$

Для обоснования условия 7.4.6 (1) достаточно показать справедливость формулы

$$(\forall m)(((\exists^{\mathrm{st}} k)(p^{M-k} \mid m) \to \exp(2\pi imn/p^N) \approx 1) \to \\ \to (\forall^{\mathrm{st}} k)\,(p^{N-M+k} \mid n)).$$

Если эта формула неверна, то существует k, для которого выполнены соотношения $n = qp^{N-M+k} + r$ и $0 < r < p^{N-M+k}$. Возможны два случая.

(1): ${}^\circ(r/p^{N-M+k}) = 0$. Пусть $a := [p^{N-M+k}/(2r)]$ и $m := ap^{M-k}$ (очевидно, $m < p^N$). Тогда

$$\exp(2\pi imn/p^N) = \\ = \exp(2\pi i[p^{N-M+k}/(2r)](r/p^{N-M+k})) \approx \exp(\pi i) = -1,$$

что невозможно.

(2): ${}^\circ(r/p^{N-M+k}) = \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$. Полагая $m := p^{M-k-1}$, выводим, что $\exp(2\pi imn/p^N) \approx \exp(2\pi i\alpha/p) \neq 1$, получаем противоречие. $\triangleright$

(2) *Рассмотрим преобразование Фурье* $\mathscr{F} : L_2(\mathbb{Q}_p) \to L_2(\mathbb{Q}_p)$, *где*

$$\mathscr{F}(f)(\xi) := \int\limits_{\mathbb{Q}_p} f(\eta)\exp(-2\pi i\{\xi\eta\})\,d\mu_p(\eta).$$

Пусть $f \in L_2(\mathbb{Q}_p)$ такова, что $|f|^2$ и $|\mathscr{F}(f)|^2$ ограничены, непрерывны почти всюду и удовлетворяют условию из 7.5.10 (1). Тогда

$$\frac{1}{p^M}\sum_{k=0}^{p^N-1}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{Q}_p} f(\eta)\exp(-2\pi i\{\eta k/p^{N-M}\})\,d\mu_p(\eta) -$$

$$-\frac{1}{p^{N-M}}\sum_{n=0}^{p^N-1} f(n/p^M)\exp(-2\pi i kn/p^N)\Bigg|^2 \approx 0,$$

если только $N, M, N-M \approx +\infty$.

$\lhd$ Следует из 7.4.10 и 7.4.16 (5). $\rhd$

7.5.12. Обобщением поля p-адических чисел служит кольцо $\mathbb{Q}_\alpha$ α-адических чисел, где $\alpha = \{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$ — двусторонняя бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что $a_n \mid a_{n+1}$ при $n \geq 0$ и $a_{n+1} \mid a_n$ при $n < 0$. Кольцо $\mathbb{Q}_\alpha$ детально рассмотрено в [54, глава 2, § 3.7]. В [223] показано, что группа $\widehat{\mathbb{Q}}_\alpha^+$ изоморфна $\mathbb{Q}_{\widehat{\alpha}}^+$, где $\widehat{\alpha}(n) := \alpha(-n)$.

Пусть $M, N \approx +\infty$, а $G := \{0, 1, \dots, {}^*a_M{}^*a_N - 1\}$ — аддитивная группа кольца ${}^*\mathbb{Z}/{}^*(a_M a_N){}^*\mathbb{Z}$. Предположим, что отображения $\jmath : G \to \mathbb{Q}_\alpha^+$ и $\widehat{\jmath} : G \to \mathbb{Q}_{\widehat{\alpha}}^+$ определены формулами $\jmath(a) := a a_{-M}^{-1}$ и $\widehat{\jmath}(a) := a a_N^{-1}$ для $a \in G$.

Тогда пара $(G, \jmath)$ будет гиперприближением группы $\mathbb{Q}_\alpha^+$, а пара $(\widehat{G}, \widehat{\jmath})$ — двойственным гиперприближением группы $\mathbb{Q}_{\widehat{\alpha}}^+$. Более того,

$$G_f := \{a \in G : (\exists^{\mathrm{st}} k \in \mathbb{Z})(a_{-M} a_k^{\operatorname{sgn} k} \mid a)\},$$
$$G_0 := \{a \in G : (\forall^{\mathrm{st}} k \in \mathbb{Z})(a_{-M} a_k^{\operatorname{sgn} k} \mid a)\},$$

причем $\Delta = a_N^{-1}$ — нормирующий множитель тройки (G, G_0, G_f). Аналогичные соотношения верны и для $\widehat{G}_f$, $\widehat{G}_0$, и для нормирующего множителя $\widehat{\Delta} = a_{-M}^{-1}$ тройки $(G, \widehat{G}_0, \widehat{G}_f)$.

$\lhd$ Доказательство повторяет рассуждения из 7.5.9–7.5.11. $\rhd$

7.5.13. Примечания.

(1) Гиперприближение на единичной окружности (см. 7.5.2) весьма подробно изучалось Люксембургом в [413], однако само понятие гиперприближения не было введено. В [413] получено, в частности, предложение 7.5.2 (2) для непрерывных функций. В этой же работе имеется много интересных приложений инфинитезимального анализа к теории рядов Фурье. Однако возможности разработанного там подхода были ограничены отсутствием теории меры Лёба, а также тем, что свойство насыщения моделей в то время мало использовалось в инфинитезимальном анализе.

(2) Предложения 7.5.3 (1, 2) остаются в силе и в том случае, когда K_n — кольцо. В этом случае K и G также будут кольцами, а отображение из G в ${}^*K$ будет «почти гомоморфизмом», т. е. помимо уже доказанных свойств справедливо равенство $\jmath(ab) \approx \jmath(a)\jmath(b)$ для всех a, b. Более того, объект G_0, определенный в 7.5.3 (2), будет двусторонним идеалом.

(3) Предложение 7.4.8 показывает, что для функции f, удовлетворяющей условиям 7.5.6 (1), будет

$$\int\limits_{\Delta_\tau} f(\xi)\, d\mu_\tau(\xi) = {}^\circ\!\left(\frac{1}{a_N} \sum_{n=0}^{{}^*a_N - 1} {}^*f(n)\right),$$

что эквивалентно стандартному равенству

$$\int\limits_{\Delta_\tau} f(\xi)\, d\mu_\tau(\xi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{a_N} \sum_{n=0}^{a_N - 1} f(n).$$

(4) Для непрерывной функции имеет место более сильное равенство

$$\int\limits_{\Delta_\tau} f(\xi)\, d\mu_\tau(\xi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n).$$

Это следует из строгой эргодичности сдвига на 1 в Δ_τ, которая следует, в свою очередь, из того, что $\chi(1) \neq 1$ для любого нетривиального характера $\chi \in \widetilde{\Delta}_\tau$ (см. [97, глава 4, § 1, теорема 1]). Для последовательности $\tau := \{(n+1)! : n \in \mathbb{N}\}$ указанное равенство было получено ранее в работах по аналитической теории чисел для несколько более широкого класса функций, включающего все функции из 7.5.6 (1) (см., например, [192]). Этот результат показывает, что условия ограниченности и непрерывности почти всюду не являются необходимыми для функции f, чтобы ${}^*f \circ \jmath$ была лифтингом f

(здесь f определена на компактной абелевой группе $\mathfrak{G}$ и $(G, \jmath)$ — гиперприближение группы $\mathfrak{G}$).

(5) Если в качестве τ взять последовательность $(p^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, то Δ_τ — кольцо $\mathbb{Z}_p$ p-адических целых. Следовательно (см. 7.5.5), $\mathbb{Z}_p \simeq K_p/K_{p0}$, где $K_p := {}^*\mathbb{Z}/p^N{}^*\mathbb{Z}$, $K_{p0} := \{a \in K_p : (\forall^{\mathrm{st}} n)(p^n \mid a)\}$ и $N \approx +\infty$.

(6) Весьма важную роль в теории чисел играет кольцо $\Delta := \Delta_{\{(n+1)!:n\in\mathbb{N}\}}$, которое иногда называют ***кольцом полиадических целых***. Из 7.5.5 вытекает, что $\Delta \simeq K/K_0$, где

$$K := {}^*\mathbb{Z}/N!{}^*\mathbb{Z},$$
$$K_0 := \{a \in K : (\forall^{\mathrm{st}} n)(n \mid a)\}$$

и $N \approx +\infty$.

Используя гиперприближение, можно дать простое доказательство того, что $\Delta \simeq \prod_{p\in P} \mathbb{Z}_p$, где P — множество всех простых чисел (см. [317]).

(7) Легко видеть, что, в отличие от случая $\mathbb{Z}_p$, отображение, построенное в 7.5.11, не приближает умножение в $\mathbb{Q}_p$.

Действительно, пусть $m, n \in G$ представимы в виде $m := p^{M-1}$ и $n := p^{M+1}$. Тогда $\jmath(m) = p^{-1}$ и $\jmath(n) = p$ и, значит, $\jmath(m)\jmath(n) = 1$. Возможны два случая. Если $2M \le N$, то $\jmath(mn) = p^M \approx 0$. Если же $2M > N$, то, поскольку речь идет об умножении в $\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}$, получим $mn = p^{M-(N-M)}$. Поэтому $mn \notin G_f$, ибо $N - M$ является бесконечно большим числом.

Аналогично доказывается, что ни при каком Δ гиперприближение аддитивной группы поля $\mathbb{R}$ из 7.5.1 не будет приближать умножение в $\mathbb{R}$.

(8) А. М. Вершик и Е. И. Гордон [26] доказали аппроксимируемость нильпотентных групп Ли, алгебры Ли которых допускают базис с рациональными структурными константами, и подробно изучили класс дискретных групп, аппроксимируемых конечными группами.

В [26] поставлен также вопрос об аппроксимируемости простых классических групп Ли, в частности, группы $SO(3)$. Отрицательный ответ на этот вопрос получили М. А. Алексеев, Л. Ю. Глебский и Е. И. Гордон в работе [4], где доказано, что компактная группа Ли G аппроксимируема конечными группами в том и только в том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная подгруппа H группы G, которая служит ε-сетью в G относительно какой-нибудь метрики, определяющей топологию G. В [4] также дано дано определение аппроксимируемости коммутативных нормируемых алгебр Хопфа конечномерными биалгебрами и доказано, что компактная группа приближается конечными группами в том и только в том случае, если ее коммутативная алгебра Хопфа приближается конечномерными коммутативными алгебрами Хопфа.

7.6. Дискретное приближение функциональных пространств на локально компактной абелевой группе

Используя результаты параграфа 7.4, можно осуществить дискретное приближение функционального гильбертова пространства на локально компактной абелевой группе.

Всюду ниже основная локально компактная группа обозначается буквой G, а двойственная группа — символом $\widehat{G}$.

7.6.1. Пусть ρ — некоторая (лево)инвариантная метрика на G. В этом случае определение приближающей последовательности из 7.4.11 имеет следующий вид.

Последовательность $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ конечных групп G_n и отображений $\jmath_n : G_n \to G$ называют ***приближающей*** для G, если для любого $\varepsilon > 0$ и произвольного компакта $K \subset G$ существует $N > 0$ такой, что для всех $n > N$ выполнены условия:

(1) $\jmath_n(G_n)$ представляет собой ε-сеть для K;

(2) если $\circ_n$ — умножение в G_n, то $\rho(\jmath_n(g_1 \circ_n g_2^{\pm 1}), \jmath_n(g_1) \cdot \jmath_n(g_2)^{\pm 1}) < \varepsilon$ для любых $g_1, g_2 \in \jmath_n^{-1}(K)$;

(3) $\jmath_n(e_n) = e$, где e_n и e — единицы в группах G_n и G соответственно.

Локально компактную группу, которая обладает приближающей последовательностью, называют *аппроксимируемой.*

Напомним, если μ — мера Хаара на G, а $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность для G, то любая ограниченная μ-почти всюду непрерывная быстро убывающая функция $f : G \to \mathbb{C}$ суммируема и имеет место равенство

$$\int\limits_G f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \Delta_n \sum_{g\in G_n} f(\jmath_n(g)),$$

где $\Delta_n := \frac{\mu(U)}{|\jmath_n^{-1}(U)|}$ (см. предложение 7.4.13 (1), в котором выбрана такая компактная окрестность нуля U, что $\mu(U) = 1$). Последовательность чисел (Δ_n) будем называть ***нормирующим множителем*** приближающей последовательности $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

В качестве нормирующего множителя можно взять любую другую последовательность (Δ'_n), эквивалентную (Δ_n). Для компактной группы G полагаем $\Delta_n := |G_n|^{-1}$, а для дискретной группы G считаем, что $\Delta_n := 1$.

Рассмотрим двойственную пару приближающих последовательностей $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ и $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ для группы G, см. 7.4.14. Если (Δ_n) — нормирующий множитель для $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (относительно μ), то $(\widehat{\Delta}_n)$, где $\widehat{\Delta}_n := (|G_n| \cdot \Delta_n)^{-1}$, — нормирующий множитель для $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (относительно меры Хаара $\widehat{\mu}$). Заметим, что для конечной абелевой группы G_n двойственная группа $\widehat{G}_n$ изоморфна G_n, поэтому $|G_n| = |\widehat{G}_n|$.

Преобразование Фурье $\mathscr{F}_n : L_2(G_n) \to L_2(\widehat{G}_n)$ вводится формулой

$$\mathscr{F}_n(\varphi)(\chi) := \Delta_n \cdot \sum_{g\in G_n} \varphi(g)\overline{\chi(g)},$$

а обратное преобразование Фурье $\mathscr{F}_n^{-1}$ имеет вид

$$\mathscr{F}_n^{-1}(\psi)(g) = \widehat{\Delta}_n \cdot \sum_{\chi\in\widehat{G}_n} \psi(\chi)\chi(g).$$

Для преобразования Фурье функции f мы будем использовать также символ $\widehat{f}$.

Для $p \geq 1$ обозначим через $\mathscr{S}_p(G)$ пространство функций $f : G \to \mathbb{C}$ таких, что функция $|f|^p$ ограничена, μ-почти всюду непрерывна и быстро убывает. Для $f \in \mathscr{S}_2(G)$ положим $T_n f := f \circ \jmath_n : G_n \to \mathscr{C}$ и $\widehat{T}_n\widehat{f} := \widehat{f} \circ \widehat{\jmath}_n : \widehat{G}_n \to \mathscr{C}$. (Итак, $T_n f$ — таблица значений функции f в точках $\jmath_n(G_n)$, а $\widehat{T}_n\widehat{f}$ — таблица значений функции $\widehat{f}$ в точках $\widehat{\jmath}_n(\widehat{G}_n)$.) Тогда согласно 7.4.15 имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\Delta}_n \cdot \sum_{\chi\in\widehat{G}_n} |\widehat{T}_n\widehat{f}(\chi) - \mathscr{F}_n(T_n f)(\chi)|^2 = 0.$$

7.6.2. Ниже под $L_p(G_n)$ и $L_p(\widehat{G}_n)$ мы понимаем пространства $\mathbb{C}^{G_n}$ и $\mathbb{C}^{\widehat{G}_n}$, снабженные соответственно нормами

$$\|\varphi\|_n^{(p)} := \Big(\Delta_n \sum_{g\in G_n} |\varphi(g)|^p\Big)^{1/p}, \quad \|\psi\|_n^{(p)} := \Big(\widehat{\Delta}_n \sum_{\chi\in \widehat{G}_n} |\psi(\chi)|^p\Big)^{1/p}.$$

При $p=2$ эти пространства обозначаются через X_n и $\widehat{X}_n$, причем нижний индекс у норм опускается. Аналогично, полагаем $X := L_2(G)$ и $\widehat{X} := L_2(\widehat{G})$.

Наконец, пусть Y (соответственно $\widehat{Y}$) — некоторое плотное в X подпространство $\mathscr{S}_2(G)$ (соответственно плотное в $\widehat{X}$ подпространство $\mathscr{S}_2(\widehat{G})$). При этом всегда имеется в виду фиксированная двойственная пара приближающих последовательностей $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ и $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Последовательности $((L_p(G_n), T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ и $((L_p(\widehat{G}_n), \widehat{T}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ служат дискретными приближениями пространств $L_p(\mu)$ и $L_p(\widehat{\mu})$ соответственно.

$\lhd$ Этот факт следует непосредственно из 7.4.10 и 7.4.13 (2). $\rhd$

7.6.3. Далее мы ограничимся рассмотрением групп с компактной и открытой подгруппой. Начнем с дискретной группы G. В этом случае $X = l_2(G)$ и определение приближающей последовательности существенно упрощается.

Если G — дискретная группа и $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность (см. 7.4.11 и 7.4.12), то имеют место утверждения:

(1) $\varinjlim \jmath_n(G_n) = G$;

(2) $(\forall a, b \in G)(\exists n_0 \in \mathscr{N})(\forall n > n_0)(\forall g, h \in G_n)$
$(\jmath_n(g) = a,\ \jmath_n(h) = b \to \jmath_n(g \circ_n h^{\pm 1}) = a \cdot b^{\pm 1})$;

(3) $\jmath_n(e_n) = e$.

Так как для дискретной группы интеграл по мере Хаара совпадает с суммой значений функций, то можно написать условие суммируемости

(4) $(\forall f \in l_1(G))(\forall \varepsilon > 0)(\exists^{\mathrm{fin}} K \subset G)\Big(\sum_{\xi\in G-K} |f(\xi)| < \varepsilon\Big)$.

Из (1) без труда выводится, что имеет место утверждение

(5) $(\forall^{\text{fin}} K \subset G)(\exists n_0 \in \mathscr{N})(\forall n > n_0)(\jmath_n(G_n)) \supset K$.

Подмножество дискретной группы компактно лишь в том случае, когда оно конечно, следовательно, для нормирующего множителя будет $\Delta_n = 1$. Из (4) и (5) видно, что всякая суммируемая функция является быстро убывающей. Тем самым $Y = X$, значит, дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ будет сильным. Нетрудно построить сохраняющее норму вложение $\imath_n : X_n \to X$, служащее правым обратным к T_n и удовлетворяющее условию

$$\sup_n \sup_{\|z\|=1} (\inf\{\|x\|_n : T_n x = z\}) < +\infty.$$

В самом деле, такое вложение можно определить формулой

$$\imath_n(\varphi)(\xi) := \begin{cases} \varphi(g), & \xi = \jmath_n(g), \\ 0, & \xi \notin \jmath_n(G_n). \end{cases}$$

7.6.4. Рассмотрим теперь общий случай локально компактной абелевой группы G с компактной и открытой подгруппой K. Положим $L := G/K$. Тогда L — дискретная группа и $\widehat{L} \subset \widehat{G}$, ибо $\widehat{L} = \{p \in \widehat{G} : p|_K = 1\}$. Пусть μ — мера Хаара на G такая, что $\mu(K) = 1$. Тогда двойственная мера Хаара $\widehat{\mu}$ на $\widehat{G}$ удовлетворяет условию $\widehat{\mu}(\widehat{L}) = 1$. Дискретная группа $\widehat{K}$ изоморфна $\widehat{G}/\widehat{L}$. Пусть $\{a_l : l \in L\}$ — полная система попарно различных представителей смежных классов из G/K и $\{p_h : h \in \widehat{K}\}$ — полная система попарно различных представителей смежных классов из $\widehat{G}/\widehat{L}$. Заметим, что $p_h(k) = h(k)$ при $k \in K$.

(1) Если $a \in G$ и $p \in \widehat{G}$, то существует единственная четверка элементов $l \in L$, $k \in K$, $h \in \widehat{K}$ и $s \in \widehat{L}$ такая, что

$$a = a_l + k, \quad p = p_h + s, \quad p(a) = p_h(a_l) \cdot s(l) \cdot h(k).$$

Пусть $\varphi \in L_2(G)$ и $l \in L$. Обозначим символом φ_l такую функцию из $L_2(K)$, что $\varphi_l(k) = \varphi(a_l + k)$. Тогда, очевидно, $\|\varphi\|^2 = \sum_{l\in L} \|\varphi_l\|^2$. Используя преобразование Фурье на компактной группе K, приходим к представлению $\varphi_l(k) = \sum_{h\in\widehat{K}} c_{lh} h(k)$. Соответствие

$\varphi \leftrightarrow (c_{lh})_{l\in L, h\in\widehat{K}}$, обозначаемое ниже символом $\imath$, является унитарным изоморфизмом гильбертовых пространств $L_2(G)$ и $l_2(L\times\widehat{K})$, где

$$l_2(L\times\widehat{K}) := \Big\{(c_{lh})_{l\in L, h\in\widehat{K}} : \sum_{l\in L, h\in\widehat{K}} |c_{lh}|^2 < +\infty\Big\}.$$

Понятно, что изоморфизм $\imath$ зависит от выбора системы представителей $\{a_l : l\in L\}$ для G/K.

Аналогично, для любых функции $\psi\in L_2(\widehat{G})$ и характера $h\in\widehat{K}$ определим функцию $\psi_h\in L_2(\widehat{L})$ соотношением $\psi_h(s) := \psi(p_h+s)$. Тогда $\psi_h(s) = \sum_{l\in L} d_{lh}s(l)$ и соответствие $\psi \leftrightarrow (d_{lh})_{l\in L, h\in\widehat{K}}$, обозначаемое символом $\widehat{\imath}$, вновь будет унитарным изоморфизмом гильбертовых пространств $L_2(\widehat{L})$ и $l_2(L\times\widehat{K})$. И опять этот изоморфизм зависит от выбора полной системы представителей смежных классов $\{p_h : h\in\widehat{K}\}$ из $\widehat{G}/\widehat{L}$. Итак, для $\psi\in L_2(\widehat{G})$ имеет место представление

$$\psi(p_h+s) = \sum_{l\in L} d_{hl}s(l).$$

Рассмотрим $\varphi\in L_2(G)$ и в преобразование Фурье

$$\widehat{\varphi}(p) = \int_G \varphi(g)\overline{p(g)}\,d\mu(g)$$

подставим отмеченное в 7.6.4 (1) выражение для $p(a)$. Тогда

$$\widehat{\varphi}(p_h+s) = \sum_{l\in L}\int_K \varphi_l(k)\overline{p_h(a_l)\cdot s(l)\cdot h(k)}\,d\mu(k).$$

Учитывая равенства $\int_K \varphi_l(k)\overline{h(k)}\,d\mu(k) = c_{lh}$ и $\overline{s(l)} = s(-l)$, отсюда получаем

$$\widehat{\varphi}(p_h+s) = \sum_{l\in L}\overline{p_h(a_{-l})}c_{-lh}s(l).$$

Сравнивая эту формулу с полученным выше представлением для $\psi(p_h+s)$, приходим к следующему заключению.

(2) *Преобразование Фурье* $\mathscr{F} : L_2(G) \to L_2(\widehat{G})$ *эквивалентно унитарному оператору в* $l_2(L \times \widehat{K})$, *определяемому матрицей*

$$f(h, l, h', l') = \overline{p_{h'}(l')} \cdot \delta_{h,h'} \delta_{-l,l'}.$$

Обозначим символом D_{test} подпространство функций $\varphi \in L_2(G)$ таких, что φ и $\widehat{\varphi}$ имеют компактные носители, и пусть $\widehat{D}_{test}$ — подпространство $L_2(\widehat{G})$, определяемое тем же самым условием. Очевидно, что $\mathscr{F}(D_{test}) = \widehat{D}_{test}$.

7.6.5. *Пусть* $\varphi \in L_2(G), \imath(f) = (c_{lh})_{l \in L, h \in \widehat{K}}$ *и* $\widehat{\imath}(\widehat{f}) = (d_{lh})_{l \in L, h \in \widehat{K}}$. *Тогда* $\varphi \in D_{test}$ *в том и только в том случае, если существуют конечные множества* $A \subset L$ *и* $B \subset \widehat{K}$, *для которых* $c_{lh} = 0$ *при* $(l, h) \notin A \times B$. *В этом случае существуют также конечные множества* $R \subset L$ *и* $S \subset \widehat{K}$ *такие, что* $d_{lh} = 0$ *при* $(l, h) \notin R \times S$.

$\lhd$ Это утверждение следует из того, что матрица $f(h, l, h', l')$ имеет лишь по одному ненулевому элементу в каждой строке и каждом столбце. $\rhd$

Пусть $((G_n, \jmath_n))_{n \in \mathbb{N}}$ и $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ — двойственная пара приближающих последовательностей для G.

7.6.6. *Существует такой номер* $n_0 \in \mathbb{N}$, *что для всех* $n > n_0$ *множества* $K_n := \jmath_n^{-1}(K)$ *и* $\widehat{L}_n := \widehat{\jmath}_n^{-1}(\widehat{L})$ *— подгруппы групп* G_n *и* $\widehat{G}_n$ *соответственно, последовательности* $((K_n, \jmath_n|_{K_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ *и* $((\widehat{L}_n, \widehat{\jmath}_n|_{\widehat{L}_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ *— приближающие последовательности для* K *и* $\widehat{L}$ *соответственно и* $\widehat{L}_n$ *— двойственная группа для* $L_n := G_n / K_n$.

$\lhd$ Возьмем фиксированное число $N \approx +\infty$. Нужно доказать, что $K_N := \jmath_N^{-1}({}^*K)$ — подгруппа группы G_N. Пусть $\jmath_N(a) \in {}^*K$ и $\jmath_N(b) \in {}^*K$. Тогда $\jmath_N(a \pm b) \approx \jmath_N(a) \pm \jmath_N(b) \in {}^*K$, значит, $\jmath_N(a \pm b) \in {}^*K$, так как K — компактная и открытая подгруппа. Тем самым K_N — подгруппа и, далее, $(K_N, \jmath_N|_{K_N})$ очевидным образом удовлетворяет условиям 7.4.1 (1,2). Это доказывает, что $((K_n, \jmath_n|_{K_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ — приближающая последовательность для K, см. 7.4.11. Доказательство для двойственной приближающей последовательности аналогично.

Остается показать, что группа $\widehat{L}_N$ двойственна к $L_N := G_N / K_N$. Это означает справедливость эквивалентности

$$\widehat{\jmath}_N(\kappa) \in {}^*\widehat{L} \leftrightarrow \kappa|_{K_N} \equiv 1$$

для всех $\kappa \in \widehat{G}_N$. Если $\widehat{\jmath}_N(\kappa) \in {}^*\widehat{L}$, то $\widehat{\jmath}_N(\kappa)|_{^*K} \equiv 1$. Отсюда $1 = \widehat{\jmath}_N(\kappa)(\jmath_N(g)) \approx \kappa(g)$ при $g \in K_N$. Заметим, что κ и g околостандартны ввиду компактности $\widehat{L}$ и K. Итак, $\kappa|_{K_N} \approx 1$ и согласно 7.2.11 (1) $\kappa|_{K_N} \equiv 1$.

Пусть теперь $\kappa|_{K_N} \equiv 1$. Тогда $\kappa(g) = 1$ для всех $g \in G_N$, удовлетворяющих условию $\jmath_N(g) \approx 0$. Отсюда, так же как и в доказательстве 7.4.10, выводим $\widehat{\jmath}_N(\kappa) \in \operatorname{nst} {}^*\widehat{G}$. Пусть $k \in {}^*K$. Тогда существует $g \in K_N$ такой, что $\jmath_N(g) \approx k$. Таким образом, $\widehat{\jmath}_N(\kappa)(k) \approx \widehat{\jmath}_N(\kappa)(\jmath_N(g)) \approx \kappa(g) = 1$, следовательно, $\jmath_N(\kappa)|_{^*K} \approx 1$. Так как группа $\widehat{K}$ дискретна, то $\jmath_N(\kappa)|_{^*K} \equiv 1$. $\rhd$

7.6.7. Всюду ниже K_n и $\widehat{L}_n$ — подгруппы соответственно групп G_n и $\widehat{G}_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Скажем, что приближающая последовательность $((L_n, \jmath'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ дискретной группы L ***совместима*** с приближающей последовательностью $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$, если для любого конечного множества $B \subset L$ существует такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любых $n > n_0$, $\lambda \in L_n$ из $\jmath'_n(\lambda) = l \in B$ вытекает $\jmath_n^{-1}(l) = \lambda$.

Можно дать следующее эквивалентное определение.

Приближающая последовательность $((L_n, \jmath'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ для дискретной группы L совместима с приближающей последовательностью $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ в том и только в том случае, если для любого $N \approx +\infty$ и для любого стандартного $l \in L$ выполняется эквивалентность $\jmath'_N(\lambda) = l \leftrightarrow \jmath_N^{-1}(l) = \lambda$ при всех $\lambda \in L_N$.

Приближающая последовательность $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ группы $\widehat{G}$ является двойственной к некоторой приближающей последовательности $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ группы G в том и только в том случае, если для любого $N \approx +\infty$ выполнены условия:

(1) *если $\chi \in \widehat{G}_N$ обладает тем свойством, что $\chi(g) \approx 1$ для всех $g \in \jmath_n^{-1}(\operatorname{nst} {}^*G)$, то $\widehat{\jmath}_N(\chi) \approx 0$;*

(2) *если $\jmath_N(g) \in \operatorname{nst} {}^*G$ и $\widehat{\jmath}_N(\chi) \in \operatorname{nst} {}^*\widehat{G}$, то $\widehat{\jmath}_N(\chi)(\jmath_N(g)) \approx \chi(g)$.*

$\lhd$ Это следует непосредственно из 7.4.6 и 7.4.11. $\rhd$

7.6.8. *Приближающая последовательность $((L_n, \jmath'_n))_{n\in\mathbb{N}}$, двойственная к приближающей последовательности $((\widehat{L}_n, \widehat{\jmath}_n|_{\widehat{L}_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ для группы $\widehat{L}$, совместима с $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$.*

Аппроксимирующая последовательность $((\widehat{K}_n, \widehat{\jmath}'_n))_{n\in\mathbb{N}}$, двойственная к приближающей последовательности $((K_n, \jmath_n|_{K_n}))_{n\in\mathbb{N}}$, сов-

местима с приближающей последовательностью $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *(напомним, что* $\widehat{K}_n := \widehat{G}_n/\widehat{L}_n$*).*

$\lhd$ Возьмем $\lambda \in L_N$ и $\jmath'_N(\lambda) = l \in L$. По определению двойственной приближающей последовательности из 7.6.7 $\widehat{\jmath}_N(\kappa)(l) \approx \kappa(\lambda)$ при $\kappa \in \widehat{L}_N$. Нужно доказать соотношение $\jmath_N^{-1}(l) = \lambda$. Заметим, что существует лишь один элемент $\lambda' \in G_N$, для которого $\jmath_N(\lambda') = l$. В самом деле, если $\jmath_N(\lambda') = \jmath_N(\lambda'') = l$, то $\jmath_N(a-b) \approx \jmath_N(a) - \jmath_N(b) \in {}^*K$ для $a \in \lambda'$ и $b \in \lambda''$. Так как K — компактная и открытая подгруппа, то $\jmath_N(a-b) \in K$, следовательно, $a - b \in K_N$ и $\lambda' = \lambda''$. Как видно, $\kappa(\lambda) \approx \kappa(\lambda')$ для всех $\kappa \in \widehat{L}_N$ и так же, как и в доказательстве теоремы 7.4.10, получаем равенство $\lambda' = \lambda$. $\rhd$

7.6.9. *Пусть* $\{a_l : l \in L\}$ *— полная система попарно различных представителей смежных классов фактор-группы* G/K*. Тогда для любого числа* $\varepsilon > 0$ *и конечного множества* $B \subset L$ *при достаточно больших* $n \in \mathbb{N}$ *существует полная система* $\{\alpha_\lambda : \lambda \in L_n\}$ *попарно различных представителей смежных классов фактор-группы* G_n/K_n *такая, что* $\rho(a_{\jmath'_n(\lambda)}, \alpha_\lambda) < \varepsilon$ *для всех* $\lambda \in {\jmath'}_n^{-1}(B)$*. Здесь* $((L_n, \jmath'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *— приближающая последовательность для* L*, совместимая с* $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$*.*

$\lhd$ Ясно, что данное предложение имеет следующую нестандартную формулировку.

Пусть $\{a_l : l \in L\}$ — полная система попарно различных представителей смежных классов фактор-группы G/K. Тогда для каждого $N \approx +\infty$ существует полная система $\{\alpha_\lambda : \lambda \in L_N\}$ из попарно различных представителей смежных классов фактор-группы G_N/K_N и такая, что $\jmath_N(\alpha_\lambda) \approx a_l$ для всех $\lambda \in {\jmath'}_N^{-1}(L)$, где $\jmath'_N(\lambda) = l$.

Пусть $R := \jmath_N^{-1}({}^*\{a_l : l \in L\}) \subset G_N$. Определим внутреннее отношение эквивалентности $\sim$ на R формулой $g \sim h \leftrightarrow g - h \in K_N$ и положим $R' := R/\sim$. Введем также внутреннее множество $S \subset R'$ так, что $S := \{r \in R' : |r| = 1\}$ и положим $S' := \bigcup S$. Тогда $\jmath_N^{-1}(a_l) \in S'$ для любого стандартного $l \in L$.

Пусть $S'' := \{\lambda \in L_N : (\exists g \in S')\,(g \in \lambda)\}$ и T — полная система попарно различных представителей смежных классов из множества $L - S''$. Тогда, очевидно, $S' \cap T = \varnothing$ и $S' \cup T$ — полная система попарно различных представителей смежных классов из L_N. $\rhd$

7.6.10. Пример. Пусть G — аддитивная группа поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Выберем две последовательности целых чисел

$r, s \to \infty$, и пусть $n := r + s$. Пусть, далее, G_n — аддитивная группа кольца $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} := \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ (такое представление кольца существенно для наших рассмотрений). Определим $\jmath_n : G_n \to \mathbb{Q}_p$ формулой $\jmath_n(k) := \frac{k}{p^r}$. Тогда $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность для G, см. 7.5.9.

Двойственная группа $\widehat{G} := \widehat{\mathbb{Q}}_p$ изоморфна $\mathbb{Q}_p$: произвольный характер $\mathbb{Q}_p$ имеет вид $\chi_\xi(\eta) = \exp(2\pi i\{\xi\eta\})$ для $\xi \in \mathbb{Q}_p$, причем $\xi \mapsto \chi_\xi$ — топологический изоморфизм. Таким образом, мы можем отождествить $\mathbb{Q}_p$ и $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ и рассматривать двойственную приближающую последовательность как некоторую приближающую последовательность для $\mathbb{Q}_p$. Отождествим также G_n с $\widehat{G}_n$. Тогда двойственная приближающая последовательность $((G_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ определяется формулой $\widehat{\jmath}_n(m) := \frac{m}{p^s}$, см. 7.5.10.

В качестве компактной и открытой подгруппы K группы G возьмем аддитивную группу кольца p-адических целых $\mathbb{Z}_p$. Тогда $K_n := \jmath_n^{-1}(K) = p^r G_n := \{k \cdot p^r : k := 0, 1, \dots, p^s - 1\}$.

Чтобы определить фактор-группу $L := G/K$, обозначим символом $\mathbb{Q}^{(p)}$ аддитивную группу рациональных чисел вида $\frac{m}{p^l}$, где $l > 0$. Как видно, L изоморфна группе $\mathbb{Q}^{(p)}/\mathbb{Z}$. Фактор-группа $L_n := G_n/K_n$ будет изоморфна $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} := \{0, 1, \dots, p^r - 1\}$. Определим вложение $\jmath'_n : L_n \to L$ формулой $\jmath'_n(t) := \frac{t}{p^r}$. Легко проверить, что $((L_n, \jmath'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность для L, совместимая с приближающей последовательностью $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Множества $\{\frac{k}{p^l} : k < p^l,\ k|p\}$ и $\{0, 1, \dots, p^r - 1\}$ будут полными системами попарно различных представителей смежных классов из фактор-групп G/K и $L_n := G_n/K_n$ соответственно, удовлетворяющими предложению 7.6.9. Простое доказательство этого факта опускается.

В соответствии с нашими отождествлениями будет $\widehat{L} = \mathbb{Z}_p = K$ и $\widehat{K} = L$. Таким образом,

$$\widehat{L}_n = \{0, 1, \dots, p^r - 1\} \simeq \{k \cdot p^s : k = 0, 1, \dots, p^r - 1\};$$
$$\widehat{K}_n = \{0, 1, \dots, p^s - 1\}.$$

Если при этом $\widehat{\jmath}'_n : \widehat{K}_n \to L$ определяется формулой $\widehat{\jmath'}_n(u) := \frac{u}{p^s}$, то $((\widehat{K}_n, \widehat{\jmath'}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность фактор-группы $\widehat{G}/\widehat{L} := \widehat{K} = L$, совместимая с приближающей последовательностью $((G_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Множество $\{0, 1, \dots, p^s - 1\}$ представляет собой полную систему попарно различных представителей смежных классов из фактор-группы $\widehat{K}_n = G_n/\widehat{L}_n$, удовлетворяющей 7.6.9 для этой приближающей последовательности.

(1) *Матрица преобразования Фурье в рассматриваемом случае (см. 7.6.4 (2)) имеет вид*

$$f((m,l),(u,v),(m',l'),(u',v')) =$$
$$= \exp\left(-\frac{2\pi i m'u'}{p^{l'+v'}}\right)\delta_{(m,l),(m',l')}\delta_{(p^v-u,v),(u',v')}.$$

$\lhd$ Пусть $\Gamma_p := \{(m,l) : m|p, 0 \le m < p^l\}$. Тогда по очевидным соображениям $l_2(L \times \widehat{K})$ мы можем отождествить с $l_2(\Gamma_p^2)$ и, используя справедливое в $\mathbb{Q}^{(p)}$ равенство $\frac{u}{p^v} = \frac{p^v-u}{p^v}$, приходим к требуемому. $\rhd$

Аналогичные соображения применимы и к конечному преобразованию Фурье $\mathscr{F}_n : L_2(G_n) \to L_2(\widehat{G}_n)$. Точнее, имеет место утверждение.

(2) *Матрица 7.6.4 (2) для конечного преобразования Фурье $\mathscr{F}_n$ имеет вид*

$$f(l,v,l',v') = \exp\left(-\frac{2\pi i l'v'}{p^n}\right)\delta_{p^r-l,l'}\delta_{vv'}.$$

$\lhd$ Отождествим $L_2(G_n)$ с $l_2(L_n \times \widehat{K}_n)$ по формуле

$$\varphi(l+kp^r) := \sum_{h=0}^{p^s-1} c_{lh}\exp\frac{2\pi i k h}{p^s}$$
$$(\varphi \in L_2(G_n),\ 0 \le l < p^r - 1,\ 0 \le k < p^s - 1)$$

и отождествим $L_2(\widehat{G}_n)$ с $l_2(L_n \times \widehat{K}_n)$ по формуле

$$\psi(v+tp^s) := \sum_{l=0}^{p^r-1} d_{lv}\exp\frac{2\pi i t l}{p^r}$$
$$(\psi \in L_2(\widehat{G}_n),\ 0 \le v < p^s - 1,\ 0 \le t < p^r - 1).$$

Тогда имеет место цепочка равенств

$$\mathscr{F}_n(\varphi) = \widehat{\varphi}(v + tp^s) = \frac{1}{p^s}\sum_{u=0}^{p^n-1} \varphi(u) \exp\left(-\frac{2\pi i u(v+tp^s)}{p^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{p^s}\sum_{l=0}^{p^r-1}\sum_{k=0}^{p^s-1}\sum_{h=0}^{p^s-1} c_{lh} \exp\frac{2\pi i k h}{p^s} \exp\left(-\frac{2\pi i(l+kp^r)(v+tp^s)}{p^n}\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{p^r-1} c_{lv} \exp\left(-\frac{2\pi i l v}{p^n}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i l t}{p^r}\right),$$

откуда следует требуемое. $\triangleright$

7.6.11. Обычно дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ не является сильным, но его можно несколько изменить, чтобы оно стало сильным. В этом пункте мы построим сильное дискретное приближение $((X_n, S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ пространства X, удовлетворяющее условию 6.2.6 (1) и соотношению $\|T_n f - S_n f\|_n \to 0$, справедливому для всех f из некоторого плотного подмножества Y. Очевидно, что в этом случае дискретное приближение S_n определяет то же самое вложение $\mathbf{t} : X \to \mathscr{X}$, что и дискретное приближение T_n.

Сильное дискретное приближение для случая $\mathbb{R}^n$ было построено в [290]. Здесь мы рассмотрим только группу с компактной и открытой подгруппой. Как было отмечено в 7.6.3, если G — дискретная группа, то дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ будет сильным и выполнено 6.2.6 (1).

(1) Пусть группа G компактна. В этом случае нормирующий множитель имеет вид $\Delta_n := |G_n|^{-1}$. В этой ситуации дискретное приближение $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ может не быть сильным. Плотное подпространство $Y \subseteq X$ состоит из ограниченных почти всюду непрерывных функций и, как легко проверить, оператор T_n не может быть продолжен на все X в общем случае. Определим $S_n : X \to X_n$ следующей формулой:

$$S_n(f)(g) := \sum_{\chi\in\widehat{G}_n} \widehat{f}(\jmath_n(\chi))\chi(g).$$

(2) Пусть теперь G — некоторая локально компактная абелева группа с компактной и открытой подгруппой K. Пусть, далее, $L := G/K$, а $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — двойственная пара приближающих последовательностей для G.

Предположим, что K_n удовлетворяет условиям предложения 7.6.6, $L_n := G_n/K_n$ и $((L_n, \jmath'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ — приближающая последовательность для L, совместимая с $((G_n, \jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Зафиксируем полную систему $\{a_l : l \in L\}$ попарно различных представителей смежных классов из L. Переходя к подпоследовательностям, если необходимо, мы можем предположить в силу 7.6.9, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует полная система $\{\alpha_\lambda : \lambda \in L_n\}$ попарно различных представителей смежных классов из L_n такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \jmath_n(\alpha_{\jmath'^{-1}_n(l)}) = a_l \quad (l \in L).$$

Обозначим символом S'_n оператор из $L_2(K)$ в $L_2(K_n)$, определяемый как в (1). Оператор $S_n : X \to X_n$ введем формулой

$$S_n\varphi(\alpha_\lambda + \xi) := S'_n\varphi_{\jmath'_n(\lambda)}(\xi) \quad (\xi \in K_n,\ \lambda \in L_n).$$

Здесь, как и выше, $\varphi_l(k) := \varphi(a_l + k)$.

7.6.12. *В случае, когда группа компактна, последовательность* $((X_n, S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *представляет собой сильное дискретное приближение* X, *для которого* $\|T_n f - S_n f\|_n \to 0$ *при всех* $f \in Y$ *и выполнено условие 6.2.6 (1).*

$\triangleleft$ Поскольку $\{\chi(g) : \chi \in \widehat{G}_n\}$ — ортонормальный базис в X_n, то будет $\|S_n(f)\|^2 = \sum_{\chi\in\widehat{G}_n} |\widehat{f}(\widehat{\jmath}_n(\chi))|^2$. Группа $\widehat{G}_n$ дискретна, поэтому дискретное приближение $((\widehat{X}_n, \widehat{T}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ пространства $\widehat{X}$ будет сильным. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\chi\in\widehat{G}_n} |\widehat{f}(\widehat{\jmath}_n(\chi))|^2 = \|\widehat{f}\|^2 = \|f\|^2,$$

следовательно, $\|S_n(f)\| \to \|f\|$.

Если $f \in Y$, то, применив теорему 7.4.15 к обратному преобразованию Фурье, получим $\|T_n(f) - \mathscr{F}_n^{-1}\widehat{T}_n\widehat{f}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Но тогда по определению обратного преобразования Фурье $\mathscr{F}_n^{-1}\widehat{T}_n\widehat{f} = S_n(f)$.

Чтобы показать справедливость условия 6.2.6 (1) для дискретного приближения $((X_n, S_n))_{n\in\mathbb{N}}$, определим вложение $\imath_n : X_n \to X$ правилом

$$\imath_n(\varphi)(\xi) := \sum_{\chi\in\widehat{G}_n} \mathscr{F}_n(\varphi)(\chi)\widehat{\jmath}_n(\chi)(\xi).$$

Тогда $\imath_n(X_n) = \{\sum_{\chi\in\widehat{G}_n} c_\chi\widehat{\jmath}_n(\chi)\}$. При этом для всех $f \in \imath_n(X_n)$ легко проверяется равенство $\imath_n(S_n(f)) = f$ Отсюда видно, что если $p_n : X \to \imath_n(X_n)$ — ортопроектор, то $S_n = \imath_n^{-1} \circ p_n$, что и устанавливает 6.2.6 (1). $\triangleright$

7.6.13. *В случае локально компактной группы с компактной и открытой подгруппой последовательность $((X_n, S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ представляет собой сильное дискретное приближение X, для которого выполнено условие 6.2.6 (1). Более того, $\|T_n\varphi - S_n\varphi\|_n \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $\varphi \in \mathscr{S}_2(G)$.*

$\triangleleft$ Как мы видели выше, соответствие $\varphi \leftrightarrow \{\varphi_l : l \in L\}$ — это унитарный изоморфизм между гильбертовыми пространствами X и $\prod_{l\in L} X^{(l)}$, где каждое $X^{(l)}$ совпадает с $L_2(K)$. Аналогично, соответствие $\psi \leftrightarrow \{\psi_\lambda : \lambda \in L_n\}$, где $\psi_\lambda(\xi) := \psi(\alpha_\lambda + \xi)$, осуществляет унитарный изоморфизм гильбертовых пространств X_n и $\prod_{l\in L} X_n^{(\lambda)}$, где каждое $X_n^{(\lambda)}$ совпадает с $L_2(K_n)$. Отождествляя унитарно изоморфные гильбертовы пространства, получим

$$S_n\left(\{\varphi_l : l \in L\}\right) = \left\{S'_n\varphi_{\jmath_n(\lambda)} : \lambda \in L_n\right\}.$$

Отсюда вытекает первая часть требуемого утверждения, так как S'_n удовлетворяет 7.6.12.

Докажем вторую часть. Сначала предположим, что φ — непрерывная функция с компактным носителем. Тогда существует стандартное конечное множество $A \subset L$ такое, что для всех $k \in K$ верно $\varphi(a_l + k) = 0$, если только $l \notin A$. Зафиксируем $N \approx +\infty$. Нужно лишь установить, что $\|T_N\varphi - S_N\varphi\| \approx 0$. Пусть $\{\alpha_\lambda : \lambda \in L_N\}$ — полная система попарно различных представителей смежных классов из L_N, удовлетворяющая нестандартной версии предложения 7.6.9. Тогда для любого $g \in K_N$ будет $T_N\varphi(\alpha_\lambda + g) = \varphi \circ \jmath_N(\alpha_\lambda + g) \neq 0$ в том и только в том случае, когда $\jmath'_N(\lambda) \in A$.

Если $\jmath'_N(\lambda) = l \in A$, то, учитывая определение гиперприближения (см. 7.4.1 (2)) и соотношение $\jmath_N(\alpha_\lambda) \approx a_l$, можно написать

$T_N\varphi(\alpha_\lambda + g) = \varphi(\jmath_N(\alpha_\lambda + g)) \approx \varphi(\jmath_N(\alpha_\lambda) + \jmath_N(g)) \approx \varphi(a_l + \jmath_M(g)) = T_N\varphi_l(g)$.

Здесь использовано также и то, что непрерывная функция φ с компактным носителем равномерно непрерывна, стало быть, даже для нестандартных α и β соотношение $\alpha \approx \beta$ влечет $\varphi(\alpha) \approx \varphi(\beta)$ (см. 2.3.12). Теперь определение S_n из 7.6.11 (2) дает $S_N\varphi(\alpha_\lambda + g) = S'_N\varphi_l(g)$.

Если ${\jmath'}_N(\lambda) = l \in A$, то согласно 7.6.12 $T_N\varphi_l \approx S'_n\varphi_l$, а если ${\jmath'}_N(\lambda) = l \notin A$, то $\varphi_l = 0$ и тем самым $S'_N\varphi_l = 0$. Так как мощность A стандартно-конечна, то $\|T_N\varphi - S_N\varphi\|_N \approx 0$.

Пусть φ — произвольная функция из $\mathscr{S}_2(G)$. Зафиксируем произвольное стандартное число $\varepsilon > 0$. Тогда существует непрерывная функция ψ с компактным носителем такая, что $\|\varphi - \psi\| < \varepsilon$. Из определения дискретного приближения следует $\|T_N(\varphi) - T_N(\psi)\|_N = \|T_N(\varphi - \psi)\|_N \approx \|\varphi - \psi\|$.

По той же самой причине $\|S_N(\varphi) - S_N(\psi)\|_N \approx \|\varphi - \psi\|$, следовательно, $\|T_N(\varphi) - T_N(\psi)\|_N + \|S_N(\varphi) - S_N(\psi)\|_N < 2\varepsilon$. Далее, $\|T_N\varphi - S_N\varphi\|_N \leq \|T_N(\varphi) - T_N(\psi)\|_N + \|T_N(\psi) - S_N(\psi)\|_N + \|S_N(\varphi) - S_N(\psi)\|_N < 5\varepsilon$, поскольку $\|T_N(\psi) - S_N(\psi)\|_N \approx 0$. Так как стандартное $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\|T_N\varphi - S_N\varphi\|_N \approx 0$. $\rhd$

Аналогично можно ввести отображение $\widehat{S}_n : L_2(\widehat{G}) \to L_2(G_n)$, удовлетворяющее доказанному предложению.

Пусть $\{\pi_\nu : \nu \in \widehat{K}_n\}$ — полная система попарно различных представителей смежных классов из $\widehat{G}_n/\widehat{L}_n$, удовлетворяющая условиям 7.6.9 для приближающей последовательности $((\widehat{G}_n, \widehat{\jmath}_n))_{n\in\mathbb{N}}$, а $\widehat{S}'_n : L_2(\widehat{L}) \to L_2(\widehat{L}_n)$ — оператор, удовлетворяющий 7.6.11 для приближающей последовательности $((\widehat{L}_n, \widehat{\jmath}_n|_{\widehat{L}_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ группы $\widehat{L}$. Тогда $\widehat{S}_n\psi(\pi_\nu + \eta) = \widehat{S}'_n\psi_{\widehat{\jmath'}_n(\nu)}(\eta)$ для всех $\nu \in \widehat{K}_n$ и $\eta \in \widehat{L}_n$.

7.6.14. Вернемся к примеру 7.6.10. Для почти всюду непрерывной функции $\varphi \in L_2(\mathbb{Q}_p)$ справедлива цепочка равенств

$$(T_n\varphi)(\jmath + kp^r) = \varphi(\jmath_n(\jmath + kp^r)) = \varphi(\frac{\jmath}{p^r} + k) =$$

$$= \varphi_{(l,m)}(k) = \sum_{(u,v)\in\Gamma_p} c_{(l,m)(u,v)} \exp\frac{2\pi iku}{p^v}.$$

Здесь $(l,m) \in \Gamma_p$ и $l/p^m = \jmath/p^r$.

Чтобы подсчитать $S_n\varphi$, заметим, что в нашем случае $L = \widehat{\mathbb{Z}}_p$, поэтому $\widehat{\jmath'_n} : \widehat{K}_n \to L$ — двойственное к $\jmath_n|_{K_n}$ приближение. Используя 7.6.11 (1), получим

$$S_n\varphi(j + kp^r) = S'_n\varphi_{\jmath'_n(j)}(\jmath_n(kp^r)) = S'_n\varphi_{(l,m)}(k) =$$
$$= \sum_{w\in\widehat{K}_n} c_{(l,m)\widehat{\jmath'_n}(w)} \exp\frac{2\pi iwk}{p^s} = \sum_{v\le s}\sum_{(u,v)\in\Gamma_p} c_{(l,m)(u,v)} \exp\frac{2\pi iku}{p^v}.$$

Если $\varphi \in D_{test}$ (см. предложение 7.6.5), а r, s удовлетворяют соотношениям $m > r$, $v > s$, $c_{(l,m)(u,v)} = 0$, $n = r + s$, то указанные выше выражения для S_n и T_n дают $S_n\varphi = T_n\varphi$.

Сравнив 7.6.10 (1) и 7.6.10 (2) с выражением для S_n, получаем $\widehat{S}_n(\widehat{f}) = F_n(S_n f)$ для любого $f \in L_2(\mathbb{Q}_p)$, и если $f \in D_{test}$, то $\widehat{T}_n(\widehat{f}) = F_n(T_n f)$. Поскольку D_{test} плотно в X, то тем самым установлена теорема 7.4.15 для рассматриваемого случая.

7.6.15. Для $N \approx +\infty$ определим пространство $\mathscr{X} := X_N^\#$ и оператор $\mathbf{t} : X \to \mathscr{X}$ как в 6.2.3. Здесь $X_N := L_2(G_N)$ и $X := L_2(G)$ (см. 7.6.2). Предложение 6.2.4 показывает, что для $\varphi \in X_N^{(b)}$ важно знать, при каких условиях $\varphi^\# \in \mathbf{t}X$.

Говорят, что элемент $\varphi \in X_N^{(b)}$ ***проксистандартен***, и пишут $\varphi \in \mathrm{proxy}(X_N^{(b)})$, если существует элемент $f \in X$ такой, что $\varphi^\# = \mathbf{t}(f)$. Будем использовать обозначения:

$$H(G_N) := G_N - \jmath_N^{-1}(\mathrm{proxy}(^*G)), \quad H(\widehat{G}_N) := G_N - \widehat{\jmath}_N^{-1}(\mathrm{proxy}(^*\widehat{G})),$$
$$H(L_N) := L_N - \jmath'^{-1}_N(L), \quad H(\widehat{K}_N) := \widehat{K}_N - \widehat{\jmath'}^{-1}_N(\widehat{K}).$$

Теорема. *Элемент $\varphi \in X_N^{(b)}$ является проксистандартным в том и только в том случае, если выполнены следующие два условия:*

(1) *$\Delta_N \sum_{g\in B} |\varphi(g)|^2 \approx 0$ для любого внутреннего множества $B \subset H(G_N)$;*

(2) *$\widehat{\Delta}_N \sum_{\chi\in C} |\mathscr{F}_N(\varphi)(\chi)|^2 \approx 0$ для любого внутреннего множества $C \subset H(\widehat{G}_N)$.*

$\lhd$ $\rightarrow$: Пусть $\varphi := \mathbf{t}(f)$. Так как D_{test} плотно в X, то можно предположить, что для каждого стандартного $\varepsilon > 0$ существует $\psi \in D_{test}$ такой, что

$$\Delta_N \sum_{g \in G_N} |\varphi(g) - \psi(\jmath_N(g))|^2 < \varepsilon.$$

Преобразование Фурье сохраняет норму, а по теореме 7.4.10 $\widehat{\psi} \circ \widehat{\jmath}_N \approx \mathscr{F}_N(\psi \circ \jmath_N)$, поэтому верно

$$\widehat{\Delta}_N \sum_{\chi \in \widehat{G}_N} |\mathscr{F}_N(\varphi)(\chi) - \widehat{\psi}(\widehat{\jmath}_N(\chi))|^2 < \varepsilon.$$

Разумеется, те же оценки справедливы, если суммирование ведется по некоторым внутренним подмножествам множеств G_N и $\widehat{G}_N$ соответственно. Функции ψ и $\widehat{\psi}$ имеют компактные носители, поэтому ${}^*\operatorname{supp}\psi \subset \operatorname{proxy}({}^*G)$ и ${}^*\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset \operatorname{proxy}({}^*\widehat{G})$. Следовательно, для произвольных внутренних множеств $B \subset H(G_N)$ и $C \subset H(\widehat{G}_N)$ будет $\psi \circ \jmath_N|_B = 0$ и $\widehat{\psi} \circ \jmath_N|_C = 0$. Теперь из наших оценок вытекает, что

$$\Delta_N \sum_{g \in B} |\varphi(g)|^2 < \varepsilon, \quad \widehat{\Delta}_N \sum_{\chi \in C} |\mathscr{F}_N(\varphi)(\chi)|^2 < \varepsilon.$$

Поскольку стандартное число $\varepsilon > 0$ произвольно, то необходимость обоснована.

$\leftarrow$: Пусть φ удовлетворяет условиям (1) и (2). Зафиксируем полные системы $\{\alpha_\lambda : \lambda \in L_N\}$ и $\{\pi_\nu : \nu \in \widehat{K}_N\}$ попарно различных представителей смежных классов из групп L_N и $\widehat{G}_N/\widehat{L}_N$ соответственно, которые удовлетворяют нестандартной версии предложения 7.6.9 (см. доказательства предложений 7.6.8 и 7.6.9). Для $\lambda \in L_N$ и $k \in K_N$ выполняется

$$\varphi(\alpha_\lambda + k) = \sum_{\nu \in \widehat{K}_N} \sigma_{\lambda,\nu}\nu(k).$$

Для завершения доказательства необходимы два вспомогательных факта.

(A) Для любых внутренних $P \subset H(L_N)$ и $Q \subset H(\widehat{K}_N)$

$$\sum_{\lambda \in P} \sum_{\nu \in \widehat{K}_N} |\sigma_{\lambda\nu}|^2 \approx 0, \quad \sum_{\nu \in Q} \sum_{\lambda \in L_N} |\sigma_{\lambda,\nu}|^2 \approx 0.$$

$\lhd$ Заметим, что в рассматриваемом случае нормирующие множители имеют вид $\Delta_N := |K_N|^{-1}$ и $\widehat{\Delta}_N := |L_N|^{-1}$, см. 7.6.1 (в качестве K берем относительно компактную открытую окрестность нуля в G). Возьмем внутреннее множество $P \subset H(L_N)$. Тогда $B = P + K_N \subset H(G_N)$. Учитывая, что $\{\nu(k) : \nu \in K_N\}$ — ортонормальный базис в $L_2(K_N)$, из условия (A) мы выводим:

$$0 \approx |K_N|^{-1} \sum_{g \in B} |\varphi(g)|^2 = |K_N|^{-1} \sum_{\lambda \in P} \sum_{k \in K_N} |\varphi(\alpha_\lambda + k)|^2 =$$
$$= |K_N|^{-1} \sum_{\lambda \in P} \sum_{k \in K_N} \Big| \sum_{\nu \in \widehat{K}_N} \sigma_{\lambda\nu} \nu(k) \Big|^2 = \sum_{\lambda \in P} \sum_{\nu \in \widehat{K}_N} |\sigma_{\lambda\nu}|^2.$$

Аналогично, для $\nu \in \widehat{K}_N$ и $\gamma \in \widehat{L}_N$ верно

$$\mathscr{F}_N(\varphi)(\pi_\nu + \gamma) = \sum_{\lambda \in \widehat{L}_N} \widehat{\sigma}_{\lambda,\nu} \gamma(\lambda).$$

Следовательно, для внутреннего множества $Q \subset H(\widehat{K}_N)$ выполняется

$$\sum_{\nu \in Q} \sum_{\lambda \in L_N} |\widehat{\sigma}_{\lambda,\nu}|^2 \approx 0.$$

Повторив вычисления, приводящие к формуле 7.6.4 (2), для преобразования Фурье $\mathscr{F}_N$ получим $\widehat{\sigma}_{\lambda,\nu} = \pi_\nu(\alpha_\lambda)\sigma_{-\lambda\nu}$. Стало быть, $|\widehat{\sigma}_{\lambda,\nu}| = |\sigma_{-\lambda\nu}|$, откуда немедленно вытекает второе из требуемых равенств. $\rhd$

Группы L и K счетны ввиду сепарабельности группы G. Поэтому существуют возрастающие последовательности конечных подмножеств $A'_m \subset L$ и $B'_m \subset \widehat{K}$ такие, что $L = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A'_m$ и $\widehat{K} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B'_m$. Положим $A_m := {\jmath'}_N^{-1}(A'_m)$ и $B_m := \widehat{\jmath'}_N^{-1}(B'_m)$. Определим последовательность $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset X_N$ формулой

$$\varphi_m(\alpha_\lambda + k) := \begin{cases} \sum\limits_{\nu \in B_m} \sigma_{\lambda\nu} \nu(k), & \text{если } \lambda \in A_m, \\ 0, & \text{если } \lambda \notin A_m. \end{cases}$$

(Б) Установим, что в $\mathscr{X}$ выполняется $\varphi^{\#} = \lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m^{\#}$.

$\lhd$ Достаточно проверить, что для любого стандартного $\varepsilon > 0$ существует стандартное натуральное число m_0 такое, что $\|\varphi - \varphi_m\| < \varepsilon$ для всех $m > m_0$. Аналогично тому, как это делается для $L_2(G)$, можно без труда показать, что соответствие $\varphi \leftrightarrow \{\sigma_{\lambda,\nu} : \lambda \in L_N, \nu \in \widehat{K}_N\}$ представляет собой унитарный изоморфизм между гильбертовыми пространствами $L_2(G_N)$ и $l_2(L_N \times \widehat{K}_N)$. Таким образом,

$$\|\varphi - \varphi_m\|^2 = \sum_{(\lambda,\nu)\in L_N\times\widehat{K}_N - A_m\times B_m} |\sigma_{\lambda\nu}|^2.$$

Легко видеть, что $L \subset A'_M \subset {}^*L$ и $\widehat{K} \subset B'_M \subset {}^*\widehat{K}$ для каждого $M \approx +\infty$. Нетрудно заметить, что $P := L_N - A_M \subset H(L_N)$ и $Q := \widehat{K}_N - B_M \subset H(\widehat{K}_N)$. Если взять $S \subset L_N \times \widehat{K}_N - A_M \times B_M$, то

$$\sum_{(\lambda,\nu)\in S} |\sigma_{\lambda\nu}|^2 \leq \sum_{(\lambda,\nu)\in P\times\widehat{K}_N} |\sigma_{\lambda\nu}|^2 + \sum_{(\lambda,\nu)\in L_N\times Q} |\sigma_{\lambda\nu}|^2.$$

Обе суммы в правой части этого неравенства бесконечно малы в силу (А), поэтому $\|\varphi - \varphi_M\|^2 \approx 0$. Введем внутреннее множество $C := \{m \in {}^*\mathbb{N} : \|\varphi - \varphi_m\| < \varepsilon\}$. Как было только что установлено, C содержит все бесконечные гипернатуральные числа M. По принципу незаполненности 3.5.11 (2), существует стандартное натуральное число m_0 такое, что в C содержатся все $m > m_0$, что и требовалось. $\rhd$

Так как число $\|\varphi\|$ доступно, то $\sum_{\lambda\in\widehat{L}_N} |\sigma_{\lambda\nu}|^2$ — доступное число, поэтому каждое $\sigma_{\lambda\nu}$ также доступно. Для $l \in L$ и $h \in \widehat{K}$ положим $c_{lh} := {}^\circ\sigma_{\jmath'^{-1}_N(l)\widehat{\jmath'}^{-1}_N(k)}$ и определим $f_m \in D_{test}$ для $m \in \mathbb{N}$ формулой

$$f_m(a_l + \xi) := \begin{cases} \sum\limits_{h\in B'_m} c_{lh} h(\xi), & \text{если } l \in A'_m, \\ 0, & \text{если } l \notin A'_m. \end{cases}$$

Тогда из предложений 7.6.9 и 7.6.12 выводим

$$S_N(f_m)(\alpha_\lambda + k) = \begin{cases} \sum\limits_{\nu\in B_m} c_{\jmath_N(\lambda)\widehat{\jmath'}_N(\nu)} \nu(k), & \text{если } \lambda \in A_m, \\ 0, & \text{если } \lambda \notin A_m, \end{cases}$$

и $S_N(f_m) \approx T_N(f_m)$. Таким образом, $S_N(f_m)^{\#} = \mathbf{t}(f_m)$. В то же время

$$\|S_N(f_m) - \varphi_m\|^2 = \sum_{\lambda \in A_m} \sum_{\nu \in B_m} |\sigma_{\lambda\nu} - c_{\jmath_N(\lambda)\widehat{\jmath'}_N(\nu)}|^2.$$

Эта величина бесконечно мала, так как $\sigma_{\lambda\nu} \approx c_{\jmath_N(\lambda)\widehat{\jmath'}_N(\nu)}$ и мощность множества $A_m \times B_m$ стандартно-конечна. Теперь из (Б) вытекает $\varphi^{\#} = \lim_{m\to\infty} \mathbf{t}(f_m)$, значит, $\varphi^{\#} \in \mathbf{t}(X)$. $\rhd$

7.6.16. Примечания.

(1) Результаты этого параграфа взяты из работы С. Альбеверио, Е. И. Гордона и А. Ю. Хренникова [243].

(2) В связи с 7.6.10 (2) отметим, что известный алгоритм Кули — Тьюки для быстрого преобразования Фурье основан в точности на тех же вычислениях, см. [257].

(3) Аналогичные примеру 7.6.10 рассмотрения возможны и для каждой из групп $\mathbb{Q}_{\mathbf{a}}$, где $\mathbf{a} := (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — произвольная последовательность положительных целых чисел (см. определения в [223], где эти группы обозначены символом $\Omega_{\mathbf{a}}$). Двойственная пара приближающих последовательностей для $\mathbb{Q}_{\mathbf{a}}$ описана во введении к книге [317]. Хорошо известно (см., например, [54]), что всякая вполне несвязная локально компактная абелева группа изоморфна группе $\mathbb{Q}_{\mathbf{a}}$ для подходящей последовательности $\mathbf{a}$.

(4) Теорема 7.4.15 вместе с конструкцией сильного дискретного приближения и предложением 7.6.12 влечет теорему 6.1 из [289] о приближении локально компактных абелевых групп конечными группами в смысле систем Вейля для случая групп с компактной и открытой подгруппой. Чтобы вывести теорему 6.1 из [289] из теоремы 7.4.15 в случае группы $\mathbb{R}^n$, необходимо использовать сильное дискретное приближение $L_2(\mathbb{R}^n)$, введенное в [290].

7.7. Гиперприближение псевдодифференциальных операторов

В этом параграфе займемся гиперприближением псевдодифференциальных операторов на локально компактной абелевой группе с компактной и открытой подгруппой.

7.7.1. Пусть G — локально компактная абелева группа, а $\widehat{G}$ — двойственная группа.

(1) Для достаточно хорошей функции $f : G \times \widehat{G} \to \mathbb{C}$ можно определить линейный оператор (возможно, неограниченный) $A_f : L_2(G) \to L_2(G)$ по формуле

$$A_f\psi(x) := \int\limits_{\widehat{G}} f(x,\chi)\widehat{\psi}(\chi)\chi(x)d\widehat{\mu}(\chi) \quad (\psi \in L_2(G)).$$

При этом говорят, что A_f — *псевдодифференциальный оператор с символом* f.

(2) Приближающий оператор (или приближение с номером n) $A_f^{(n)} : \mathbb{C}^{(G_n)} \to \mathbb{C}^{(G_n)}$ для A_f определяется формулой

$$A_f^{(n)}\varphi(x) := \widehat{\Delta}_n \sum_{\chi \in \widehat{G}_n} f(\jmath_n(x), \widehat{\jmath}_n(\chi))\mathscr{F}_n(\varphi)(\chi)\chi(x) \quad (\varphi \in X_n, x \in G_n).$$

Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь случая группы G с компактной и открытой подгруппой K. Как и выше, $L := G/K$, причем фиксированы полные системы $\{a_l : l \in L\}$ и $\{p_h : h \in \widehat{K}\}$ попарно различных представителей смежных классов L и $\widehat{K} := \widehat{G}/\widehat{L}$.

(3) Очевидно, что отображения $(\jmath_n, \widehat{\jmath}_n) : G_n \times \widehat{G}_n \to G \times \widehat{G}$ задают приближающую последовательность для $G \times \widehat{G}$. Обозначим символом $S_n^{(2)} : L_2(G_n \times \widehat{G}_n) \to L_2(G \times \widehat{G})$ отображение, определенное в предложении 7.6.13 для этой приближающей последовательности. Таким образом, $((L_2(G_n \times \widehat{G}_n), S_n^{(2)}))_{n\in\mathbb{N}}$ — сильное дискретное приближение пространства $L_2(G \times \widehat{G})$ и можно определить еще один приближающий оператор для A_f формулой:

$$B_f^{(n)}\varphi(x) := \widehat{\Delta}_n \sum_{\chi \in \widehat{G}_n} (S_n^{(2)} f)(x,\chi)\mathscr{F}_n(\varphi)(\chi)\chi(x).$$

7.7.2. *Оператор A_f будет оператором Гильберта — Шмидта в том и только в том случае, если $f \in L_2(G \times \widehat{G})$. В этом случае имеет место оценка*

$$\|A_f\| \le \iint\limits_{G\times\widehat{G}} |f(x,\chi)|^2 \, d\mu \otimes \widehat{\mu}(x,\chi).$$

$\lhd$ Сформулированное утверждение хорошо известно в классической теории псевдодифференциальных операторов (см., например, [9]) и почти очевидно в нашем случае.

Доказательство легко следует из того наблюдения, что ядро оператора A_f имеет вид $K(x,y) := (\mathscr{F}_{\widehat{G}} f)(x, x-y)$, где $\mathscr{F}_{\widehat{G}}$ — преобразование Фурье по второй переменной, поэтому $\|K(x,y)\|_{L_2(G^2)} = \|f(x,\chi)\|_{L_2(G\times\widehat{G})}$. $\rhd$

7.7.3. Теорема. *Если A_f является оператором Гильберта — Шмидта, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *последовательность $(B_f^{(n)})$, введенная в 7.7.1 (3), равномерно ограничена, т. е.*

$$(\exists n_0)(\forall n > n_0)\Big(\|B_n\| \leq \|f(x,\chi)\|_{L_2(G\times\widehat{G})}\Big);$$

(2) *последовательность $(B_f^{(n)})$ дискретно сходится к элементу A_f относительно сильного дискретного приближения $((X_n, S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ из 7.6.13 и эта сходимость равномерная;*

(3) *если $f \in \mathscr{S}_2(G\times\widehat{G})$ (обозначение см. в 7.6.1), то $\|A_n - B_n\| \to 0$, следовательно, утверждения (1) и (2) выполняются также и для последовательности $(A_f^{(n)})$.*

$\lhd$ Доказательство разобьем на несколько шагов.

(а): Зафиксируем $N \approx +\infty$. Очевидно, что $\|B_n\| \leq \|S_n^{(2)} f\|_n$ для любого $n \in {}^*\mathbb{N}$. Здесь использовано, в частности, то, что $\|\mathscr{F}_n\| = 1$ и $|\chi(x)| = 1$. По определению дискретного приближения $\|S_N^{(2)} f\|_N \approx \|f\|$. Если $f \in \mathscr{S}_2(G\times\widehat{G})$, то $\|S_N^{(2)} f - T_N f\|_N \approx 0$. Это доказывает утверждения (1) и (3), стало быть, остается установить (2).

(б): *Если $\imath$ и $\widehat{\imath}$ обозначают указанные в 7.6.4 (1) унитарные изоморфизмы соответственно между $L_2(G)$ и $l_2(L\times\widehat{K})$ и между $L_2(\widehat{G})$ и $l_2(L\times\widehat{K})$, то A_f, рассматриваемый как оператор в $l_2(L\times\widehat{K})$, имеет вид*

$$(\imath A_f \varphi)(l,h) = \sum_{h',l'} (\widetilde{\imath} f)(l,h',l+l',h-h') p_{h'}(a_l)(\widehat{\imath}\varphi)(l',h').$$

$\lhd$ В самом деле, в указанных обозначениях для $\varphi \in L_2(G)$ будет

$$\widehat{\varphi}(p_h s) = \sum_{l \in L} (\widehat{\imath\varphi})(l,h)s(l),$$
$$A_f\varphi(a_l + k) = \sum_{h \in \widehat{K}} (\imath A_f \varphi)(l,h)h(k).$$

Аналогично

$$f(a_l + k, p_h + s) = \sum_{h' \in \widehat{K}} \sum_{l' \in L} (\widetilde{\imath} f)(l,h,l',h')s(\bar{l}')h'(k),$$

где $\widetilde{\imath} f := (\imath \otimes \widehat{\imath})f$. Теперь простые вычисления, использующие 7.6.4 (1) и 7.7.1 (1), приводят к требуемому. $\rhd$

(в): *Зафиксируем полные системы попарно различных представителей смежных классов* $\{\alpha_\lambda : \lambda \in L_N\}$ *и* $\{\pi_\nu : \nu \in \widehat{K_N}\}$, *удовлетворяющие нестандартной формулировке предложения 7.6.9 (см. доказательство этого предложения). Тогда имеет место представление*

$$(\imath B_f^{(N)}\varphi)(\lambda,\nu) = \sum_{\nu',\lambda'} (\widetilde{\imath} f)(\jmath'_N(\lambda), \widehat{\jmath}'_N(\nu'), \jmath'_N(\lambda + \lambda'), \widehat{\jmath}'_N(\nu - \nu'))\times$$
$$\times p\imath_{\nu'}(\alpha_\lambda)(\widehat{\imath}_N F_N(\varphi))(\lambda',\nu').$$

$\lhd$ В самом деле, очевидно, что $K \times \widehat{L}$ — компактная и открытая подгруппа группы $G \times \widehat{G}$, причем $L \times \widehat{K} = G \times \widehat{G}/K \times \widehat{L}$ и семейство $\{(a_l, p_h) : l \in L, h \in \widehat{K}\}$ представляет собой полную систему попарно различных представителей смежных классов. Более того, семейство $\{(\alpha_\lambda, \pi_\nu) : \lambda \in L_N, \nu \in \widehat{K}_N\}$ — полная система попарно различных представителей смежных классов из группы $L_N \times \widehat{K}_N = G_N \times \widehat{G}_N/K_N \times \widehat{L}_N$, удовлетворяющая нестандартной версии предложения 7.6.9. Легко понять, что тогда

$$S_N^{(2)} f(\alpha_\lambda + \xi, \pi_\nu + \eta) =$$
$$= \sum_{\lambda' \in L_N} \sum_{\nu' \in \widehat{K}_N} (\widetilde{\imath} f)(\jmath'_N(\lambda), \widehat{\jmath}'_N(\nu), \jmath'_N(\lambda')\widehat{\jmath}'_N(\nu'))\overline{\eta(\lambda')}\nu'(\xi),$$

где $((L_N, \jmath'_N))_{n\in\mathbb{N}}$ — некоторая приближающая последовательность для L, совместимая с $((G_N, \jmath_N))_{n\in\mathbb{N}}$ (определение см. в 7.6.7), а $((\widehat{K}_N, \widehat{\jmath'}_N))_{n\in\mathbb{N}}$ — это приближающая последовательность для $\widehat{K}$, двойственная к последовательности $((K_N, \jmath_N|_{K_N}))_{n\in\mathbb{N}}$, приближающей группу K.

Как и выше, унитарные изоморфизмы $\imath_N : L_2(G_N) \to l_2(L_N \times \widehat{K}_N)$ и $\widehat{\imath}_N : L_2(\widehat{G}_N) \to l_2(L_N \times \widehat{K}_N)$ определяются формулами

$$\varphi(\alpha_\lambda + \xi) := \sum_{\nu\in\widehat{K}_N} (\imath_N\varphi)(\lambda,\nu)\nu(\xi),$$

$$\psi(\pi_\nu + \eta) := \sum_{\lambda\in L_N} (\widehat{\imath}_N\psi)(\lambda,\nu)\eta(\lambda).$$

Теперь так же, как и в (б) получаем требуемое представление. $\rhd$

(г): *Для любого* $\psi \in L_2(G)$ *верно* $\|\imath_N B_f^{(N)} S_N\psi - \imath_N S_N A_f\psi\| \approx 0.$

$\lhd$ Вначале проведем некоторые необходимые вычисления. Непосредственно из определений видно, что

(г$_1$) $(\imath_N S_N\psi)(\lambda,\nu) = (\imath\psi)(\jmath'_N(\lambda), \widehat{\jmath'}_N(\nu)).$

Из 7.6.4 (2) вытекает формула

(г$_2$) $\widehat{\imath}\widehat{\psi}(\jmath'_N(\lambda), \widehat{\jmath'}_N(\nu)) = \imath\psi(-\jmath'_N(la), \widehat{\jmath'}_N(\nu))\overline{p_{\widehat{\jmath'}_N(\nu)}(a_{-\jmath'_N(\lambda)})}.$

Аналогичные вычисления с использованием (г$_1$) приводят к равенству

(г$_3$) $(\widehat{\imath}_N\mathscr{F}_N(S_N\psi))(\lambda,\nu) = (\imath\psi)(\jmath'_N(-\lambda), \widehat{\jmath'}_N(\nu))\overline{\pi_\nu(\alpha_{-\lambda})}.$

Далее, из (б), (г$_1$), (в) и (г$_3$) выводим следующие две формулы:

(г$_4$) $\imath_N S_N A_f\psi)(\lambda,\nu) = \sum_{l',h'}(\widetilde{\imath}f)(\jmath'_N(\lambda), h', \jmath'_N(\lambda)+$

$+l', \widehat{\jmath'}_N\,(\nu) - h')p_{h'}(a_{\jmath'_N(\lambda)})\widehat{\imath}\widehat{\psi}(l',h');$

(г$_5$) $(\imath B_f^{(N)} S_N\psi)(\lambda,\nu) =$

$= \sum_{\nu',\lambda'}(\widetilde{\imath}f)(\jmath'_N(\lambda), \widehat{\jmath'}_N(\nu'), \jmath'_N(\lambda+\lambda'), \widehat{\jmath'}_N(\nu-\nu'))\pi_{\nu'}(\alpha_\lambda)$

$(\imath\psi)(\jmath'_N(-\lambda'), \widehat{\jmath'}_N(\nu'))\overline{\pi_{\nu'}(\alpha_{-\lambda'})}.$

Предположим теперь, что $f \in D_{test}^{(2)}$. Это означает существование стандартных конечных множеств $A \subset L$ и $B \subset \widehat{K}$ таких, что $(\widetilde{\imath}f)(l,h,l',h') = 0$, как только $(l,h,l',h') \notin (A\times B)^2$. Пространство $D_{test}^{(2)}$ плотно в $L_2(G\times\widehat{G})$. Выберем стандартные конечные множества A_1, B_1, для которых $(A-A)\cup A \subset A_1 \subset L$ и $(B-B)\cup B \subset$

$B_1 \subset \widehat{K}$. Пусть $C := \jmath'^{-1}_N(A_1)$ и $D := \widehat{\jmath'}^{-1}_N(B_1)$. Тогда из (г$_4$) видно, что $(\imath_N S_N A_f \psi)(\lambda,\nu) = 0$ при $(\lambda,\nu) \notin C \times D$, следовательно, область изменения переменных l и h' можно ограничить множествами A_1 и B_1 соответственно. Так как конечные множества A_1 и B_1 стандартны, то в силу 7.6.3 будет $\jmath'_N(\alpha \pm \alpha') = \jmath'_N(\alpha) \pm \jmath'_N(\alpha')$ и $\widehat{\jmath'}_N(\beta \pm \beta') = \widehat{\jmath'}_N(\beta) \pm \widehat{\jmath'}_N(\beta')$ для $\alpha, \alpha' \in C$ и $\beta, \beta' \in D$. Эти замечания вместе с (б) показывают, что (г$_4$) можно переписать в виде

(г$_6$) $(\imath_N S_N A_f \psi)(\lambda,\nu) =$

$$= \sum_{\lambda' \in C} \sum_{\nu' \in D} (\widetilde{\imath} f)(\jmath'_N(\lambda), \widehat{\jmath'}_N(\nu'), \jmath'_N(\lambda+\lambda'), \widehat{\jmath'}_N(\nu-\nu')) \times$$
$$\times (\imath\psi)(-\jmath'_N(\lambda), \widehat{\jmath'}_N(\nu)) p_{\widehat{\jmath'}_N(\nu')}(a_{\jmath'_N(\lambda)}) \overline{p_{\widehat{\jmath'}_N(\nu')}(a_{-\jmath'_N(\lambda')})}.$$

По той же самой причине можно предположить, что переменные λ' и ν' в сумме в правой части (г$_5$) пробегают множества C и D соответственно и $(\imath B_f^{(N)} S_N \psi)(\lambda,\nu) = 0$ при $(\lambda,\nu) \notin C \times D$.

Сравнив теперь (г$_4$) и (г$_6$), видим, что члены под знаком суммы различаются коэффициентами $\pi_{\nu'}(\alpha_\lambda)\overline{\pi_{\nu'}(\alpha_{-\lambda'})}$ в (г$_5$) и

$$p_{\widehat{\jmath'}_N(\nu')}(a_{\jmath'_N(\lambda)}) \overline{p_{\widehat{\jmath'}_N(\nu')}(a_{-\jmath'_N(\lambda')})}$$

в (г$_6$). Однако эти коэффициенты бесконечно близки в силу нестандартной версии предложения 7.6.9. Таким образом, левые части равенств (г$_5$) и (г$_6$) бесконечно близки, ибо суммы в правых частях имеют лишь стандартное число ненулевых членов. Отсюда вытекает (г), а вместе с тем и второе утверждение теоремы для $f \in D^{(2)}_{test}$. $\rhd$

Общий случай получается из следующего вспомогательного утверждения.

(д): *Если 7.7.3 (2) выполняется для всех A_f, где f пробегает некоторое плотное подмножество $Y \subset L_2(G \times \widehat{G})$, то оно выполняется для всех $f \in L_2(G \times \widehat{G})$.*

$\lhd$ Нужно доказать, что $\|S_N A_f - B_f^{(N)} S_N\| \approx 0$. Зафиксируем произвольное стандартное $\varepsilon > 0$ и выберем $\psi \in Y$ так, чтобы $\|f - \psi\| < \varepsilon$. Тогда

$$\|S_N A_f - B_f^{(N)} S_N\| \leq \|S_N A_f - S_N A_\psi\| +$$
$$+ \|S_N A_\psi - B_\psi^{(N)} S_N\| + \|B_\psi^{(N)} S_N - B_f^{(N)} S_N\|.$$

Далее, $\|S_N A_\psi - B_\psi^{(N)} S_N\| \approx 0$ по условию. В силу 6.2.2 величина $\|S_N\|$ доступна, поэтому

$$\|S_N A_f - S_N A_\psi\| \le {}^\circ\|S_N\| \cdot \|A_{f-\psi}\| \le {}^\circ\|S_N\| \cdot \|f-\psi\| \le {}^\circ\|S_N\|\varepsilon,$$
$$\|B_\psi^{(N)} S_N - B_f^{(N)} S_N\| \le \|B_{\psi-f}^{(N)}\|^\circ\|S_N\| \le {}^\circ\|S_N\| \cdot \|f-\psi\| \le {}^\circ\|S_N\|\varepsilon.$$

Произвол в выборе $\varepsilon > 0$ завершает доказательство. $\triangleright$

Тем самым мы завершили доказательство теоремы. $\triangleright$ $\triangleright$

7.7.4. *Если A_f — это эрмитов оператор Гильберта — Шмидта, то справедливы утверждения:*

(1) *спектр $\sigma(A_f)$ совпадает с множеством неизолированных предельных точек множества $\bigcup_n \sigma(B_f^{(n)})$;*

(2) *если $0 \ne \lambda \in \sigma(A_f)$ и J — окрестность λ, не содержащая других точек множества $\sigma(A_f)$, то λ — единственная неизолированная предельная точка множества $J \cap \bigcup_n \sigma(B_f^{(n)})$.*

$\triangleleft$ Вытекает из 7.7.3 и 6.2.8, а также 6.2.3 (1) и 7.6.13. $\triangleright$

7.7.5. Операторы $A_f^{(n)}$ и $B_f^{(n)}$ могут не быть эрмитовыми, даже если оператор A_f самосопряжен, так что оставшаяся часть теоремы 6.2.8 в рассматриваемом случае будет формулироваться следующим образом.

Если выполнены условия предложения 7.7.4 и, сверх того, A_f самосопряжен и последовательность из эрмитовых операторов $C^{(n)} : X_n \to X_n$ такова, что $\|B_f^{(n)} - C^{(n)}\|_n \to 0$ при $n \to \infty$, то имеют место утверждения:

(1) *если $M_n^\lambda = \sum_{\nu \in \sigma(C^{(n)}) \cap J} {C^{(n)}}^{(\nu)}$ (см. 7.7.4 (2)), то $\dim(M_n^\lambda) = \dim({A_f}^{(\lambda)}) = s$ для достаточно больших n и существует последовательность ортонормальных базисов $(f_1^n, \dots, f_s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ в M_n^λ, дискретно сходящаяся к ортонормальному базису $(f_1, \dots, f_s)$ в ${A_f}^{(\lambda)}$ относительно дискретного приближения $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$;*

(2) *если в условиях (1) $f_1, \dots, f_s \in \mathscr{S}_2(G)$, то последовательность ортонормальных базисов $((f_1^n, \dots, f_s^n))_{n\in\mathbb{N}}$ дискретно сходится к $(f_1, \dots, f_s)$ относительно дискретного приближения $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$.*

7.7.6. Рассмотрим теперь операторы типа Шрёдингера. Пусть функция $f : G \times \widehat{G} \to \mathbf{C}$ имеет вид

$$f(x,\chi) := a(x) + b(\chi) \quad (x \in G,\ \chi \in \widehat{G}).$$

Если в этом выражении $a(x) \geq 0$ и $a(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то оператор A_f называют *оператором типа Шрёдингера.*

До конца параграфа $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ — вещественные почти всюду непрерывные локально ограниченные функции на G и $\widehat{G}$ соответственно, причем $a(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ и $b(\chi) \to \infty$ при $\chi \to \infty$. Рассматриваемая группа G и ее приближающая последовательность удовлетворяют всем предположениям пункта 7.7.5.

Легко видеть, что определение оператора A_f из 7.7.1 (1) в рассматриваемом случае дает

$$A_f \psi(x) = a(x) \cdot \psi(x) + \overset{\vee}{b} * \psi(x),$$

где $*$ — свертка в $L_1(G)$ и $\overset{\vee}{b}$ — обратное преобразование Фурье функции b, которое рассматривается здесь как распределение на $\widehat{G}$.

Аналогично, дискретное приближение 7.7.1 (2) удовлетворяет в этом случае формуле

$$A_f^{(n)} \varphi(x) = a(\jmath_n(x)) \cdot \varphi(x) + \mathscr{F}_n^{(-1)}(b \circ \widehat{\jmath}_n) * \varphi(x).$$

При наших предположениях оператор типа Шрёдингера для абелевой группы с компактной и открытой подгруппой имеет дискретный спектр, состоящий из вещественных собственных значений

$$\alpha_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \ldots \to \infty; \quad k \to \infty,$$

причем кратность каждого собственного значения конечна. Такое утверждение можно установить аналогично [28], где оно доказано для группы $\mathbb{Q}_p$. Также легко понять, что в рассматриваемой ситуации операторы $A_f^{(n)}$ самосопряжены.

7.7.7. *Теорема.* *Пусть A_f — оператор типа Шрёдингера, причем a и b удовлетворяют указанным в 7.7.6 условиям, а область приближения A_f последовательностью $(A_f^{(n)})$ из 7.7.1 (2) является существенной областью A_f. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *спектр* $\sigma(A_f)$ *совпадает с множеством неизолированных предельных точек множества* $\bigcup_n \sigma(A_f^{(n)})$*;*

(2) *если* J *— окрестность* λ*, не содержащая других точек из* $\sigma(A_f)$*, то* λ *— единственная неизолированная предельная точка множества* $J \cap \bigcup_n \sigma(A_f^{(n)})$*;*

(3) *если в условиях (2)* $M_n^\lambda = \sum_{\nu\in\sigma(A_f^{(n)})\cap J} {A_f^{(n)}}^{(\nu)}$*, то* $\dim(M_n^\lambda) = \dim({A_f}^{(\lambda)}) = s$ *для всех достаточно больших* n *и существует последовательность из ортонормальных базисов* $(f_1^n, \dots, f_s^n)$ *в* M_n^λ*, которая дискретно сходится к ортонормальному базису* $(f_1, \dots, f_s)$ *в пространстве* ${A_f}^{(\lambda)}$ *относительно дискретного приближения* $((X_n, S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *(и, кроме того, относительно дискретного приближения* $((X_n, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$*, если все собственные функции* A_f *входят в* $\mathscr{S}(G)$*).*

$\triangleleft$ Без ограничения общности можно предположить,что функции a и b положительны. Тогда операторы A_f и $A_f^{(n)}$ положительны, $-1 \notin \mathrm{cl}(\sigma(A_f) \cup \bigcup_n \sigma(A_f^{(n)})$ и ввиду предложения 6.2.10 достаточно показать квазикомпактность последовательности $(R_{-1}(A_f^{(n)}))$. Итак, для любых $N \approx +\infty$ и $\psi \in X_n$ нужно доказать, что если число $\|(A_f^{(N)} + I)\psi\|_N$ доступно, то ψ удовлетворяет условиям теоремы 7.6.15. Так как $\|R_{-1}(A_f^{(N)})\| \le 1$, то число $\|\psi\|_N$ доступно, поэтому доступно и $((A_f^{(N)} + I)\psi, \psi)$. Однако

$$((A_f^{(N)} + I)\psi, \psi) = (a \cdot \psi, \psi) + (\mathscr{F}_N^{(-1)}(b) * \psi, \psi) + (\psi, \psi),$$
$$(\mathscr{F}_N^{(-1)}(b) * \psi, \psi) = (b \cdot \mathscr{F}_N(\psi), \mathscr{F}_N(\psi)),$$

следовательно, числа $(a \cdot \psi, \psi)$ и $(b \cdot F_N(\psi), F_N(\psi))$ доступны. Предположим теперь, что первое условие теоремы 7.6.15 не выполняется. Тогда существуют внутреннее множество $B \subset H(G_N)$ и стандартное число $c > 0$ такие, что $\Delta_N \sum_{x\in B} |\psi(x)|^2 > c$. Так как $a(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то найдется $L \approx \infty$, для которого $a(x) > L$ при всех $x \in B$. Из сказанного вытекает, что

$$(a \cdot \psi, \psi) \ge \Delta_N \sum_{x\in B} a(x)|\psi(x)|^2 \ge Lc,$$

что противоречит доступности $(a \cdot \psi, \psi)$. Второе условие теоремы 7.6.15 устанавливается аналогичными рассуждениями. $\triangleright$

Опишем один класс операторов типа Шрёдингера, удовлетворяющих условиям установленной теоремы. Будем пользоваться унитарными изоморфизмами $\imath$ и $\widehat{\imath}$, определенными в ходе доказательства теоремы 7.7.3. Несмотря на то, что $a \notin L_2(G)$ и $b \notin L_2(\widehat{G})$, будем обозначать символами $\imath a$ и $\widehat{\imath} b$ функции из $l_2(L \times \widehat{K})$, удовлетворяющие равенствам:

$$a(a_l + k) = \sum_{h \in \widehat{K}} (\imath a)(l, h) h(k);$$

$$b(p_h + s) = \sum_{l \in L} (\widehat{\imath} b)(l, h) s(l).$$

7.7.8. *Пусть A_f — оператор типа Шрёдингера, функции a и b удовлетворяют указанным выше предположениям и, сверх того, множества $S(l) := \{h \in \widehat{K} : (\imath a)(l, h) \neq 0\}$ и $T(h) := \{l \in L : (\widehat{\imath} b)(l, h) \neq 0\}$ конечны для любых $l \in L$ и $h \in \widehat{K}$. Тогда D_{test} — существенная область A_f, которая служит областью приближения A_f последовательностью $(A_f^{(n)})$.*

$\triangleleft$ Напомним, что пространство D_{test} состоит из таких функций $\varphi \in L_2(G)$, что φ и $\widehat{\varphi}$ имеют компактные носители. Это означает существование конечных множеств $A[\varphi] \subset L$ и $B[\varphi] \subset \widehat{K}$ таких, что $(\imath\varphi)(l, h) = 0$ при $(l, h) \notin A[\varphi] \times B[\varphi]$. Далее, простые вычисления с применением 7.6.4 (2) дают

$$(1)\ (\imath A_f \varphi)(l, h) = \sum_{h' \in B[\varphi]} (\imath a)(l, h' - h) \cdot (\imath\varphi)(l, h') +$$
$$+ \sum_{l' \in A[\varphi]} (\widehat{\imath} b)(l - l', h) \cdot (\imath\varphi)(l', h) \cdot p_h(a_{-l}) \cdot \overline{p_h(a_{l'})}.$$

Из этой формулы видно, что $A_f \varphi \in D_{test}$ и, кроме того,

$$A[A_f \varphi] \subset A[\varphi] \cup \Big(A[\varphi] + \bigcup_{h \in B[\varphi]} T(h)\Big) = A'[\varphi];$$

$$B[A_f \varphi] \subset B[\varphi] \cup \Big(B[\varphi] - \bigcup_{l \in A[\varphi]} S(l)\Big) = B'[\varphi].$$

Если $\varphi \in D(A_f)$, то функция $\imath A_f \varphi$ удовлетворяет формуле (1) при $A[\varphi] = L$ и $B[\varphi] = \widehat{K}$. Для конечных множеств $A \subset L$ и $B \subset \widehat{K}$

обозначим символом $P(A,B)$ ортопроектор в $L_2(G)$ на подпространство функций φ, для которых $A[\varphi]\subset A$ и $B[\varphi]\subset B$. Тогда из (1) легко усмотреть, что $P(A,B)A_f\varphi = A_fP(A',B')\varphi$, где

$$A' := A\cup\Big(A-\bigcup_{h\in B}T(h)\Big),\quad B' := B\cup\Big(B+\bigcup_{l\in A}S(l)\Big).$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ мы можем найти конечные множества $A\subset L$ и $B\subset\widehat{K}$, для которых $\|P(A,B)\varphi-\varphi\|<\varepsilon$ и $\|P(A,B)A_f\varphi-A_f\varphi\|<\varepsilon$. Так как $A\subset A'$ и $B\subset B'$, то будет $\|P(A',B')\varphi-\varphi\|<\varepsilon$. Таким образом, если $\psi:=P(A',B')\varphi$, то $\psi\in D_{test}$ и, кроме того, $\|\varphi-\psi\|<\varepsilon$ и $\|A_f\varphi-A_f\psi\|<\varepsilon$. Тем самым доказано, что D_{test} — существенная область A_f.

Остается показать, что $S_N(A_f\psi)\approx A_f^{(N)}S_N\psi$ для $N\approx+\infty$ и произвольного стандартного $\psi\in D_{test}$. С этой целью удобно переписать определения A_f и $A_f^{(n)}$ из 7.7.6 в виде:

$$\begin{gathered}A_f\psi(x)=a(x)\cdot\psi(x)+\mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi})(x),\\ A_f^{(N)}\varphi(x)=a(\jmath_N(x))\cdot\varphi(x)+\mathscr{F}_N^{-1}(b\cdot\mathscr{F}_N\varphi)(x).\end{gathered}$$

Для носителей ψ и $\widehat{\psi}$ имеют место очевидные соотношения:

$$\operatorname{supp}\psi\subset\bigcup_{l\in A[\psi]}a_l+K=C,\quad \operatorname{supp}\widehat{\psi}\subset\bigcup_{h\in B[\psi]}p_h+\widehat{L}=D.$$

Из формул 7.7.3 (г$_1$), (г$_2$) вытекает

(2) $\operatorname{supp}S_N\psi\subset\bigcup\{\alpha_\lambda+K_N:\lambda\in {\jmath'}_N^{-1}(A[\psi])\}=C_N$,

$\operatorname{supp}\mathscr{F}_NS_N\psi\subset\bigcup\{\pi_\nu+\widehat{L}_N:\nu\in\widehat{\jmath'}_N^{-1}(B[\psi])\}=D_N$.

Однако $S_NA_f\psi=S_N(a\cdot\psi)+S_N\mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi})$ и

$$A_f^{(N)}S_N\psi=a\circ\jmath_N\cdot S_N\psi+\mathscr{F}_N^{-1}(b\circ\widehat{\jmath}_N\cdot\mathscr{F}_NS_N\psi).$$

Так как ψ имеет компактный носитель, то $a\cdot\psi$ входит в подпространство Y, фигурирующее в 7.6.12, поэтому $S_N(a\cdot\psi)\approx T_N(a\cdot\psi)=a\circ\jmath_N\cdot\psi\circ\jmath_N$. Далее, поскольку a ограничена на C, то

$$\begin{gathered}\|a\circ\jmath_N\cdot S_N\psi-a\circ\jmath_N\cdot\psi\circ\jmath_N\|_N^2=\\ =\Delta_N\sum_{x\in C_N}|a(\jmath_N(x))(S_N\psi(x)-\psi(\jmath_N(x))|^2\approx 0.\end{gathered}$$

Таким образом, $S_N(a\cdot\psi)\approx a\circ\jmath_N\cdot S_N\psi$, и остается доказать, что $S_N\mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi})\approx\mathscr{F}_N^{-1}(b\circ\widehat{\jmath}_N\cdot\mathscr{F}_N S_N\psi)$.

Так как $A_f\psi\in D_{test}\subset Y$ и, как только что было установлено, $a\cdot\psi\in Y$, выполняется $\mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi})\in Y$, следовательно, $S_N\mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi})\approx T_N\mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi})=\mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi})\circ\jmath_N$. Верно также, что $\mathscr{F}_N S_N\psi\approx\mathscr{F}_N T_N\psi\approx\widehat{\psi}\circ\widehat{\jmath}_N$, ибо $S_N\psi\approx T_N\psi$ и $\mathscr{F}_N$ ограничен. Как видно, $\operatorname{supp}\widehat{\psi}\circ\widehat{\jmath}_N\subset D_N$. Наконец, используя (2) и ограниченность b на D, получаем $b\circ\widehat{\jmath}_N\cdot\mathscr{F}_N S_N\psi\approx b\circ\widehat{\jmath}_N\cdot\widehat{\psi}\circ\widehat{\jmath}_N$, откуда выводим $\mathscr{F}_N^{-1}(b\circ\widehat{\jmath}_N\cdot\mathscr{F}_N S_N\psi)\approx\mathscr{F}_N^{-1}(b\circ\widehat{\jmath}_N\cdot\widehat{\psi}\circ\widehat{\jmath}_N)\approx\mathscr{F}^{-1}(b\cdot\widehat{\psi})\circ\jmath_N$. $\triangleright$

7.7.9. Вернемся к примеру 7.6.10, где $G=\mathbb{Q}_p$ и $\widehat{G}=\mathbb{Q}_p$ с точностью до изоморфизма. В [28] рассмотрен оператор типа Шрёдингера с символом вида

$$f(x,\chi)|:=a(|x|_p)+b(|\chi|_p).$$

Если $a(|x|_p)\to\infty$ при $x\to\infty$ и $b(|\chi|_p)\to\infty$ при $\chi\to\infty$, то такие операторы удовлетворяют условиям предложения 7.7.8, так как функции a и b постоянны на смежных классах $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, стало быть, множества $S(l)$ и $T(h)$ из 7.7.8 содержат по одной точке. Используя двойственную пару приближающих последовательностей для $\mathbb{Q}_p$, описанную в 7.6.10, можно для этого случая без труда выписать приближения $A_f^{(n)}$, определенные в 7.7.6. Именно, для $n=r+s$ будет

$$A_f^{(n)}\varphi(k)=a(p^r|k|_p)+\frac{1}{p^n}\sum_{j,m=0}^{n-1}b(p^s|m|_p)\varphi(k-j)\exp\frac{2\pi ijm}{n}.$$

7.7.10. Понятие символа Вейля можно обобщить на случай локально компактной абелевой группы G, если в ней определено деление на два. Это означает, что для каждого $x\in G$ существует $y\in G$, для которого $y+y=x$ и соотношение $y+y=0$ влечет $y=0$ для любого $y\in G$. При этом элемент y будем обозначать символом $\frac{1}{2}y:=y/2$ и предполагать, что оператор $x\mapsto\frac{1}{2}x$ непрерывен в G. Заметим, что если G допускает деление на два, то $\widehat{G}$ также допускает деление на два: $\frac{1}{2}\chi(x):=\chi(\frac{1}{2}x)$.

Оператор W_f с символом Вейля $f:G\times\widehat{G}\to\mathbb{C}$ определяется формулой

$$W_f:=\iint\limits_{G\times\widehat{G}}\widetilde{f}(y,\gamma)U_yV_\gamma\overline{\gamma y/2}\,d\mu\otimes\widehat{\mu}(y,\gamma),$$

где

$$\widetilde{f}(y,\gamma) := \iint\limits_{G\times\widehat{G}} f(x,\chi)\overline{\chi}(\gamma)\overline{\gamma}(x)\,d\mu\otimes\widehat{\mu}(x,\chi).$$

Легко видеть, что этот оператор симметричен тогда и только тогда, когда функция f вещественна. Если f имеет вид $a(x)+b(\chi)$, то $A_f = W_f$.

Без труда можно вычислить ядро $K_f(x,y)$ оператора W_f. Обозначим символом $f^{(2)}(x,y)$ обратное преобразование Фурье $f(\cdot,\cdot)$ относительно второй переменной, т. е. $f^{(2)}(x,y) := \int_{\widehat{G}} f(x,\chi)\chi(y)d\widehat{\mu}(\chi)$. Тогда $K_f(x,y) = f^{(2)}(\frac{x+y}{2}, y-x)$.

В том случае, когда группы G_n из нашей приближающей последовательности $((G_n,\jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ также допускают деление на два, то мы будем говорить, что деление на два в G приближается последовательностью $((G_n,\jmath_n))_{n\in\mathbb{N}}$ при условии, что

$$(\forall\varepsilon>0)(\forall K\in\mathscr{K})(\exists N>0)(\forall n>N)(\forall g\in\jmath_N^{(-1)}(K))$$
$$\rho(\jmath_n(g/2),\jmath_n(x)/2)<\varepsilon.$$

Легко видеть, что если p — нечетное простое число, то деление на два в $\mathbb{Q}_p$ приближается последовательностью, описанной в 7.6.10.

Если деление на два допускает приближение, то можно определить последовательность приближений $W_f^{(n)}$ следующим образом. Введем функцию $f_n : G_n\times\widehat{G}_n\to\mathbb{C}$ формулой

$$f_n(g,\kappa) := f(\jmath_n(g),\widehat{\jmath}_n(\kappa)),$$

и пусть $\widehat{f_n}$ — дискретное преобразование Фурье функции f_n, т. е.

$$\widehat{f}_n(h,\chi) := \frac{1}{|G_n|}\sum_{g,\kappa} f_n(g,\kappa)\overline{\chi(g)\kappa(h)}.$$

Тогда

$$W_f^{(n)} := \frac{1}{|G_n|}\sum_{h,\chi}\widehat{f}_n(h,\chi)U_hV_\chi\overline{\chi(h/2)},$$

где $(U_h\varphi)(g) := \varphi(g+h)$ и $(V_\chi\varphi)(g) := \chi(g)\cdot\varphi(g)$.

Пусть $f_n^{(2)}$ обозначает обратное преобразование Фурье функции f_n по второй переменной, т. е.

$$f_n^{(2)}(g,s) := \widehat{\Delta}_n \sum_{\kappa} f_n(g,\kappa)\kappa(s).$$

Тогда

$$(W_f^{(n)}\varphi)(s) = \Delta_n \sum_{g} f_n^{(2)}\left(\frac{s+g}{2}, g-s\right)\varphi(g).$$

7.7.11. *Если $f \in \mathscr{S}_2(G\times\widehat{G})$, то последовательность $(W_f^{(n)})$ дискретно сходится к W_f относительно сильной дискретной приближающей последовательности $((X_n,S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ из 7.6.13 и эта сходимость равномерная.*

$\lhd$ Доказательство аналогично рассуждениям из 7.7.3. $\rhd$

Следствия 7.7.4 и 7.7.5 также применимы в рассматриваемом случае. Более того, утверждение из 7.7.5 выполняется для последовательности $(W_f^{(n)})$, так как эти операторы эрмитовы, ибо функция f_n вещественна.

7.7.12. Примечания.

(1) Обычно псевдодифференциальный оператор A_f с символом f вводится формулой

$$A_f := \int\limits_{G\times\widehat{G}}\int \widetilde{f}(h,\xi)V_hU_\xi d\widehat{\mu}(h)d\mu(\xi),$$

где $\widetilde{f} = \mathscr{F}_G \otimes \mathscr{F}_{\widehat{G}}(f)$. Простые вычисления, использующие формулу $\int_{\widehat{G}}\chi(\xi)d\widehat{\mu}(\chi) = \delta(\xi)$, где $\int_G \varphi(\xi)\delta(\xi)d\mu(\xi) = \varphi(0)$, хорошо известную в теории распределений на локально компактных абелевых группах, показывают, что при $\psi \in L_2(G)$ значение $A_f\psi$ можно вычислять по формуле, указанной в 7.7.1. Несложно дать строгое обоснование таким вычислениям, однако в этом нет никакой необходимости для целей данного параграфа, поэтому мы пользуемся определением, данным в 7.7.1.

(2) Сходные вычисления приводят к аналогичной формуле для приближающих операторов:

$$A_f^{(n)} = \frac{1}{|G_n|}\sum_{g\in G_n,\chi\in\widehat{G}_n} \widetilde{f}_n(\gamma\chi, g)X(g,\chi),$$

где $\widetilde{f}_n := \mathscr{F}_{G_n} \otimes \mathscr{F}_{\widehat{G}_n}(f_n)$ и $f_n(g, \chi) := f(\jmath_n(g), \widehat{\jmath}_n(\chi))$.

(3) Заметим, что в случае $G = \mathbb{R}$ символ, введенный в (1), не является символом Вейля (симметричным символом) оператора — он является так называемым qp-символом. О qp-символах для операторов в пространствах $L_2(\mathbf{Q}_p^n)$ см. [28]. Взаимосвязь между qp-символами операторов A и A^* непроста, а условия на символ f, при которых A_f самосопряжен, весьма сложны, причем они не влекут самосопряженности $A_f^{(n)}$ или $B_f^{(n)}$ для самосопряженного A_f. В теории псевдодифференциальных операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$ рассматриваются также симметрические символы или символы Вейля. Оператор W_f с символом Вейля f самосопряжен в том и только в том случае, если f — вещественная функция [9].

(4) Материал этого параграфа взят из статьи С. Альбеверио, Е. И. Гордона и А. Ю. Хренникова [243].

Глава 8

Упражнения и нерешённые задачи

В этом разделе собраны как несложные упражнения и задачи учебного характера, так и темы для серьезного исследования, предназначенные, главным образом, для студентов-дипломников и аспирантов. Некоторые вопросы нуждаются в творческой переработке с целью дальнейшего уточнения и детализации. Отбор задач в значительной мере случаен и осуществлен in statu nascendi.

Отметим, что основу изложения составляют задачи из [119–124, 389, 391, 392].

8.1. Нестандартные оболочки и меры Лёба

8.1.1. Понятие нестандартной оболочки, введенное в работах Люксембурга, — предмет интенсивного изучения.

Накоплено великое множество интересных результатов о строении нестандартных оболочек банаховых и топологических векторных пространств (см. [281, 347, 348, 487]). Однако остаются неясными взаимосвязи разнообразных конструкций и понятий из теории банаховых пространств с понятием нестандартной оболочки. Отсутствуют также детальные описания нестандартной оболочки многих встречающихся в анализе функциональных пространств и пространств операторов. Ниже приведем несколько формулировок. Символом $X^{\#}$, как обычно, обозначается нестандартная оболочка нормированного пространства X, т. е. фактор-пространство внешнего пространства доступных элементов $\mathrm{ltd}(X)$ по монаде фильтра окрестностей нуля $\mu(X)$ топологии пространства X, см. 6.1.1. Нужные сведения из функционального анализа имеются в [63, 85, 188, 288].

Задача 1. *При каких условиях на X пространство $X^{\#}$ обладает свойством Крейна — Мильмана?*

Близкий круг задач, связанных с теоремой Крейна — Мильмана и ее обобщениями на K-пространства, см. в [123].

Задача 2. *При каких условиях на X пространство $X^{\#}$ обладает свойством Радона — Никодима?*

Задача 3. *Изучить различные геометрические свойства нестандартной оболочки: гладкость, равномерную выпуклость, асплундовость и т. д.*

Задача 4. *Что представляет из себя послойная нестандартная оболочка непрерывного (измеримого) банахова расслоения? То же для соответствующего пространства непрерывных (измеримых) сечений.*

Задача 5. *Описать нестандартные оболочки различных классов ограниченных операторов: операторов Радона — Никодима, радонифицирующих, порядково суммирующих, p-абсолютно суммирующих и тому подобных операторов.*

8.1.2. В векторном пространстве $M(\nu)$ классов эквивалентности измеримых функций на пространстве $(\Omega, \mathscr{B}, \nu)$ с конечной мерой имеется метрика:

$$\rho(f,g) := \int\limits_{\Omega} \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\nu.$$

Снабженное топологией этой метрики пространство $M(\nu)$ становится топологическим векторным пространством.

Рассмотрим нестандартную оболочку $M(\nu)^{\#} := \mathrm{ltd}(M(\nu))/\mu_\rho(0)$, где $\mu_\rho(0) := \{f \in M(\nu) : \rho(f,0) \approx 0\}$, $\mathrm{ltd}(M(\nu)) := \{f \in M(\nu) : \varepsilon f \in \mu_\rho(0)$ при $\varepsilon \approx 0\}$. Пусть $(\Omega, \mathscr{B}_L, \nu_L)$ — соответствующее пространство Лёба. Тогда пространства $M(\nu)^{\#}$ и $M(\nu_L)$ изометричны.

Задача 6. *Как обстоит дело в случае пространства измеримых по Бохнеру вектор-функций $M(\nu, X)$? То же для вектор-функций, измеримых по Гельфанду или Петтису.*

Пусть E — порядковый идеал в $M(\nu)$, т. е. E — подпространство $M(\nu)$ и для $f \in M(\nu)$ и $g \in E$ из неравенства $|f| \leq |g|$ следует $f \in E$. Обозначим через $E(X)$ пространство тех $f \in M(\nu, X)$, для которых функция $v(f) : t \mapsto \|f(t)\|$ $(t \in Q)$ входит в E (эквивалентные функции отождествляются). Если E — банахова решетка, то $E(X)$ — банахово пространство в смешанной норме $|||f||| = \|v(f)\|_E$.

Задача 7. *Описать нестандартную оболочку $E(X)$.*

8.1.3. Предположим, что (X, Σ, μ) — пространство с конечной мерой. Рассмотрим такое гиперконечное множество $M \subset {}^*X$, что $\mu(A) = |A \cap M|/|M|$. Пусть (M, S_L, ν_L) — соответствующее пространство Лёба.

Задача 8. *Верно ли, что при соответствующем вложении $\varphi : \Sigma/\mu \to S_L/\nu_L$ правильная подалгебра $\varphi(\Sigma/\mu)$ выделится сомножителем? Если это так, то описать внутренние множества, соответствующие другому сомножителю (так сказать, «чисто нестандартные» элементы S_L/ν_L).*

Задача 9. *Та же задача для вложения отрезка с мерой Лебега в пространство Лёба.*

Задача 10. *Та же задача для пространств из приведенных ниже задач 70 и 71.*

8.1.4. Пусть $(X, \mathscr{A}, \lambda)$ и $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ — стандартные пространства с конечными мерами. Функция $\mu : \mathscr{A} \times Y \to \mathbb{R}$ называется ***случайной мерой***, если

(1) для любого элемента $A \in \mathscr{A}$ функция $\mu(A, \cdot)$ является $\mathscr{B}$-измеримой;

(2) для ν-почти всех $y \in Y$ функция $\mu(\cdot, y)$ является положительной конечной мерой на $\mathscr{A}$.

Задача 11. *Дать понятие случайной меры Лёба μ_L так, чтобы она оказалась случайной мерой для пары $(X, \mathscr{A}_L, \lambda_L)$, $(Y, \mathscr{B}_L, \nu_L)$.*

Задача 12. *Какова связь между интегральными операторами $\int f(x)\, d\mu(x, \cdot)$ и $\int f(x)\, d\mu_L(x, \cdot)$? Что является аналогом S-интегрируемости в данном случае?*

Вариант решения задач 11 и 12, полученный В. Г. Троицким [213], представлен в параграфе 6.6.

Задача 13. *Дать понятие меры Лёба со значениями в векторной решетке (без топологии). При этом случайная мера Лёба из задачи 11 должна быть согласована с понятием меры Лёба для векторной меры* $A \mapsto \mu(A, \cdot)$.

8.1.5. Следующие три задачи навеяны работой [251] и относятся к теории пространств дифференцируемых функций (см. [51, 52, 58, 162, 163]).

Задача 14. *Развить нелинейную теорию потенциала на основе меры Лебега — Лёба.*

Задача 15. *Развить нестандартную теорию емкости.*

Задача 16. *Ввести и исследовать пространства дифференциальных форм на основе меры Лебега — Лёба (см. [51, 52]).*

8.2. Гиперприближения и спектры

8.2.1. В главе 7 мы видели, что у каждой локально компактной абелевой группы имеются гиперприближения, которые сохраняются при переходе к двойственным группам, причем преобразование Фурье приближается своим дискретным аналогом. В этой связи интересно исследовать случай некоммутативных групп. Возникает новый класс «гипераппроксимируемых» локально компактных групп. По-видимому, этот класс включает аменабельные группы, однако полное его описание неизвестно.

Задача 17. *Для локально компактной (не обязательно абелевой) группы* G *построить гиперприближения ограниченных эндоморфизмов* $L_2(G)$.

8.2.2. Используя приближения локально компактных абелевых групп, можно строить гиперприближения псевдодифференциальных операторов в гильбертовом пространстве функций на локально компактной абелевой группе. Для операторов типа Шрёдингера и операторов Гильберта — Шмидта, в случае специального класса групп, это было проделано в [26]. Другой подход развит в [450, 451, 524].

Этот подход является более общим, так как он не ограничивается пространствами функций на локально компактной группе. В то же время первый подход приводит к более детализированным результатам. Взаимодействие указанных подходов также представляется плодотворным. Возникает интересная задача перенесения полученных результатов на другие псевдодифференциальные операторы и построения аналогичных приближений для операторов в функциональных пространствах на других аппроксимируемых группах.

Следующая группа задач состоит в исследовании предельного поведения спектров и собственных значений конечномерных приближений псевдодифференциального оператора на локально компактной абелевой группе.

Задача 18. *Изучить предельное поведение спектров и собственных значений конечномерных приближений оператора типа Шрёдингера с положительным потенциалом, возрастающим на бесконечности.*

Задача 19. *Исследовать ту же задачу для оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом.*

Задача 20. *Изучить связь между гиперприближениями локально компактной абелевой группы и ее боровской компактификацией.*

Задача 21. *Построить приближения оператора типа Шрёдингера с почти периодическим потенциалом на основе задачи 20 и исследовать их сходимость.*

Задача 22. *Изучить предельное поведение спектров приближающих операторов в краевой задаче для оператора Шрёдингера в прямоугольной области конечномерного пространства.*

8.2.3. Теперь приведем группу задач, относящихся к построению приближений операторов в функциональных пространствах на некоммутативной локально компактной группе и сходимости таких приближений.

Задача 23. *Изучить приближение неприводимых представлений группы Гейзенберга посредством представлений приближающих ее конечных групп.*

Задача 24. *Рассматривая гильбертово пространство функций на группе Гейзенберга, построить приближения операторов, содержащихся в алгебре, порожденной операторами умножения на матричные элементы неприводимых представлений и сдвигами.*

Задача 25. *Изучить тот же вопрос, что и в задаче 24 для других аппроксимируемых нильпотентных групп и некоторых матричных групп над локальными полями.*

Задача 26. *Исследовать проблему аппроксимируемости простых групп Ли.*

Задача 27. *Изучить метод суммирования расходящихся рядов на группе, основанной на гиперприближении.*

Задача 28. *Исследовать связь между нестандартными методами суммирования расходящихся рядов с нестандартными расширениями не всюду определенных операторов.*

8.2.4. Гиперприближение оператора в функциональном пространстве на локально компактной группе не обязательно определяется гиперприближением этой группы. Более того, если область определения оператора — пространство функций, определенных не на группе, то такой метод гиперприближений вообще неприменим. Однако, используя ту или иную структуру области определения оператора, можно строить иные приближения гиперконечномерными операторами. Приведем несколько задач в этом направлении (задачи 30 и 31 сформулированы с участием В. Т. Плиева).

Задача 29. *Развить теорию определителей Фредгольма на основе подходящих гиперприближений.*

Задача 30. *Доказать теорему Лидского о совпадении матричного и спектрального следов ядерных операторов с помощью техники гиперприближений.*

Задача 31. *Применить нестандартные методы дискретизации к изучению спектральных свойств операторных пучков. В частности, получить обобщения теоремы Келдыша о полноте производных цепочек операторных пучков (см. [91]).*

Задача 32. *Построить какое-либо разумное гиперприближение преобразования Радона [220] в духе [43, 45, 46, 317] (см. главу 7).*

Задача 33. *Применить возможные гиперприближения преобразования Радона к анализу дискретных схем сканирования в компьютерной томографии [179].*

8.3. Комбинирование нестандартных методов

8.3.1. Мыслимы различные способы комбинирования нестандартных методов: можно строить инфинитезимальные конструкции в булевозначном универсуме или же искать булевозначные интерпретации в рамках теории внутренних и внешних множеств (см. [120, 391], а также параграфы 4.8–4.11). Однако на этих путях возникают серьезные сложности и не всегда ясно, как их обойти. В то же время последовательное применение нестандартных методов часто приводит к успеху, как, например, в [138, 390, 392, 393].

Задача 34. *Развить комбинированную технику, унифицирующую последовательное применение нестандартных методов.*

Задача 35. *Развить булевозначный вариант меры Лёба и соответствующую теорию интеграла. Изучить возникающий при этом класс операторов. В частности, построить теорию меры Лёба со значениями в пространстве Канторовича.*

Задача 36. *Построить булевозначную интерпретацию нестандартной оболочки. Изучить соответствующую конструкцию «спущенной» нестандартной оболочки.*

Задача 37. *Используя различные нестандартные методы, построить комбинированный принцип переноса с конечномерных нормированных алгебр на подходящие классы банаховых алгебр.*

Задача 38. *Используя комбинированную технику «скаляризации-дискретизации», получить гиперприближения представлений локально компактных групп в гильбертовом пространстве.*

8.3.2. Замена логической части ZF законами интуиционистской логики (см. [309, 318, 498]) приводит к интуиционистской теории множеств $\mathrm{ZF_I}$. Модели $\mathrm{ZF_I}$ также можно строить по той же схеме, что и булевозначные модели, см. [119, 125]. Именно, если Ω — полная гейтингова решетка, то универсум $\mathbf{V}^{(\Omega)}$ станет гейтинговозначной моделью теории $\mathrm{ZF_I}$, если определить соответствующие функции истинности $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ и $[\![\cdot = \cdot]\!]$ из $\mathbf{V}^{(\Omega)} \times \mathbf{V}^{(\Omega)}$ в $\mathbf{V}^{(\Omega)}$. Подробности см. в [309, 318, 498, 499]. Другие варианты моделирования интуиционистской теории множеств дают топосы и категории пучков, см. [38, 61, 219].

Задача 39. *Исследовать числовые системы в гейтинговозначных моделях и соответствующие им алгебраические структуры, см. [38, 61, 219].*

Задача 40. *Исследовать классические банаховы пространства в гейтинговозначных моделях, см. [269].*

Задача 41. *Приводит ли к какой-нибудь содержательной теории гильбертовых модулей интерпретация теории гильбертовых пространств в гейтинговозначной модели?*

8.3.3. *Пусть X и Y — нормированные пространства, X_0 — подпространство X и T_0 — ограниченный линейный оператор из X_0 в Y. Для любого $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ существует продолжение T оператора T_0 на все X с сохранением линейности и ограниченности, такое что $\|T\| \leq (1+\varepsilon)\|T_0\|$.*

В конструктивной математике теорема Хана — Банаха не выполняется. Однако устанавливается (см. [265]), что сформулированное утверждение верно для функционалов ($Y = \mathbb{R}$). Следовательно, данное утверждение для функционалов выполняется в гейтинговозначной модели.

Это же утверждение верно также и в классическом смысле (т. е. в универсуме фон Неймана) для компактных операторов, принимающих свои значения в пространстве $C(Q)$ непрерывных функций на компакте Q (см. [401]).

Задача 42. *Является ли схожесть упомянутых двух теорем о продолжении функционалов и операторов следствием какого-нибудь принципа переноса для гейтинговозначных моделей?*

Задача 43. *Для каких объектов и задач функционального анализа и теории операторов существует эффективный принцип переноса, использующий технику гейтинговозначных моделей? Топосов? Пучков? (Ср. [310] и сборник [340].)*

8.3.4. Пусть B — (квантовая) логика (см. [125]). Если определить функции $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ и $[\![\cdot = \cdot]\!]$ по формулам 2.1.4 и ввести оценки истинности формул как в 2.1.7, то в универсуме $\mathbf{V}^{(B)}$ истинными окажутся аксиомы ZF_2–ZF_6 и AC. Таким образом, в $\mathbf{V}^{(B)}$ можно развивать теорию множеств. В частности, вещественные числа внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ будут соответствовать наблюдаемым в математической модели квантово-механической системы (см. [495]).

В [495] показано, что если B — квантовая логика (см. [125]), то универсум $\mathbf{V}^{(B)}$ служит моделью для определенной квантовой теории множеств. Изучение квантовых теорий как логических систем, построение квантовой теории множеств и развитие соответствующей квантовой математики — интересная и актуальная проблематика, но в этом направлении сделано немного. Адекватные математические средства и правильные ориентиры намечаются, возможно, в теории алгебр фон Неймана и выросших из нее различных «некоммутативных» направлений (некоммутативная теория вероятностей, некоммутативное интегрирование и т. п.).

Задача 44. *Возможен ли какой-нибудь вариант принципа переноса из теории интеграла (меры) в некоммутативную теорию интеграла (меры) на основе модели $\mathbf{V}^{(B)}$ для квантовой теории множеств?*

Задача 45. *Построить некоммутативную теорию меры Лёба, т. е. применить конструкцию меры Лёба к мере, определенной на квантовой логике.*

Задача 46. *Построить теорию некоммутативного векторного (центрозначного) интегрирования на алгебре фон Неймана (AW^*-алгебре) и соответствующие пространства измеримых и интегрируемых элементов, используя метод булевозначных реализаций.*

Задача 47. *Какие свойства квантовых комплексных чисел (т. е. комплексных чисел в модели $\mathbf{V}^{(B)}$ для квантовой логики B) соответствуют содержательным свойствам алгебр фон Неймана (AW^*-алгебр)?*

8.3.5. Пусть E — векторная решетка. Оператор T из E в произвольное векторное пространство F называют *ортогонально аддитивным*, если $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in E$ таких, что $x_1 \perp x_2$ (т. е. $x_1 \wedge x_2 = 0$). Множество всех ортогонально аддитивных порядково ограниченных операторов из E в F обозначают символом $\mathscr{U}(E,F)$; элементы $\mathscr{U}(E,F)$ называют *абстрактными операторами Урысона* (см. [423]).

Пусть F — пространство Канторовича. В [423] установлено, что пространство $\mathscr{U}(E,F)$ станет пространством Канторовича, если задать в $\mathscr{U}(E, F)$ порядок следующим образом: $S \geq 0$ тогда и только тогда, когда $S(x) \geq 0$ для всех $x \in E$, а $S_1 \geq S_2$ означает $S_1 - S_2 \geq 0$.

Ортогонально аддитивный эндоморфизм некоторого пространства Канторовича, перестановочный со всеми порядковыми проекторами, назовем *абстрактным оператором Немыцкого*.

Задача 48. *Применить метод «скаляризации-дискретизации» к нелинейным интегральным операторам Урысона, а также к их абстрактным аналогам — ограниченным ортогонально аддитивным операторам.*

Задача 49. *Дать булевозначную интерпретацию ортогонально аддитивного функционала и изучить соответствующий класс нелинейных операторов.*

Задача 50. *На основе задачи 49 описать компоненту, порожденную положительным ортогонально аддитивным оператором.*

Задача 51. *Дать булевозначную реализацию абстрактного оператора Немыцкого и получить его функциональное представление.*

8.3.6. Следующая задача по виду относится к выпуклому анализу. Однако она отражает принципиальную трудность, связанную с неоднозначностью операции стандартной части и других инфинитезимальных конструкций внутри булевозначного универсума.

Задача 52. *Пусть E — стандартное пространство Канторовича. Изучить субдифференциал ∂p оператора p, определенного формулой $p(e) := \inf{}^*\{f \in E : f \geq e\}$ для $e \in E$.*

8.4. Выпуклый анализ и экстремальные задачи

8.4.1. Начнем с задач о крайних точках.

Задача 53. *Изучить точки, бесконечно близкие к крайним того или иного субдифференциала.*

Задача 54. *Выяснить булевозначный статус о-крайних точек субдифференциалов [122].*

Задача 55. *Описать внешние эквивалентности, сохраняемые преобразованием Юнга — Фенхеля (см. [122]).*

8.4.2. Пусть (Q, Σ, μ) — пространство с мерой, X — банахово пространство, а E — банахова решетка. Обозначим буквой Y некоторое пространство измеримых вектор-функций $u : Q \to X$. Эквивалентные функции отождествляются. Допустим, что отображение $f : Q \times X \to E \cup \{+\infty\}$ выпукло по второй переменной $x \in X$ при почти всех $t \in Q$, а суперпозиция $t \mapsto f\big(t, u(t)\big)$ измерима при всех $u \in Y$. Тогда можно определить интегральный оператор I_f на Y формулой

$$I_f(u) := \int\limits_Q f\big(t, u(t)\big)\, d\mu(t) \quad (u \in Y).$$

При этом считается $I_f(u) := +\infty$ в том случае, когда вектор-функция $f\big(\cdot, u(\cdot)\big)$ не суммируема. Очевидно, что оператор $I_f : Y \mapsto E \cup \{+\infty\}$ выпуклый. В выпуклом анализе значительное внимание уделяется изучению операторов указанного вида.

В частности, рассматриваются вопросы о строении субдифференциала $\partial I_f(u_0)$ и преобразования Юнга — Фенхеля $(I_f)^*$. Общие свойства выпуклых операторов см. в [122, 145], а интегральных выпуклых функционалов ($E = \mathbb{R}$) — в [145, 239, 272].

В соответствии с результатами параграфов 6.3 и 6.4 для интегрального функционала I_f получаем представление

$$I_f(u) = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{k=1}^{N} f\big(t_k, u(t_k)\big)\right) \quad (u \in Y).$$

Задача 56. *Изучить выпуклый интегральный функционал I_f, используя указанное выше представление. В частности, вывести формулы для вычисления субдифференциала $\partial I_f(u_0)$.*

Задача 57. *Изучить выпуклые и невыпуклые интегранты и соответствующие нелинейные интегральные функционалы методом инфинитезимальной дискретизации.*

8.4.3. При изучении функционалов типа I_f часто используют различные теоремы о селекторах. Приведем точные формулировки двух результатов (см. [145, 239, 272]).

Пусть Q — топологическое (соответственно измеримое) пространство, X — банахово пространство. Соответствие $\Gamma \subset Q \times X$ называют *полунепрерывным снизу* (соответственно *измеримым*), если

$\Gamma^{-1}(G)$ открыто (соответственно измеримо) для каждого открытого $G \subset X$. Отображение $\gamma : \mathrm{dom}(f) \to X$ называют ***селектором*** Γ, если $\gamma(q) \in \Gamma(q)$ для всех $q \in \mathrm{dom}(\Gamma)$.

Теорема Майкла. *Пусть Q паракомпактно, соответствие Γ полунепрерывно снизу и для каждого $q \in Q$ множество $\Gamma(q)$ непусто, выпукло и замкнуто. Тогда существует непрерывный селектор соответствия Γ.*

Теорема Рохлина — Куратовского — Рыль-Нардзевского. *Пусть Q — измеримое пространство, X — польское (= полное сепарабельное метрическое) пространство и $\Gamma \subset Q \times X$ — измеримое соответствие, причем $\Gamma(q)$ замкнуто при всех $q \in Q$. Тогда существует измеримый селектор соответствия Γ.*

Задача 58. *Провести дискретизацию паракомпактного топологического пространства и дать нестандартное доказательство теоремы Майкла.*

Задача 59. *Разработать нестандартный подход к задаче о существовании измеримого селектора и, в частности, дать нестандартное доказательство теоремы Рохлина — Куратовского — Рыль-Нардзевского.*

8.4.4. Следующие задачи связаны с концепцией инфинитезимального оптимума (см. параграф 5.7). Соответствующие понятия из выпуклого анализа см. в [121, 200, 211, 239].

Задача 60. *Развить концепцию инфинитезимального решения для задач оптимального управления и вариационного исчисления.*

Задача 61. *Построить нестандартное расширение нелинейной абстрактной экстремальной задачи с операторными ограничениями и изучить инфинитезимальный оптимум.*

Задача 62. *Применить инфинитезимальный анализ к релаксации невыпуклых вариационных задач.*

Задача 63. *Построить субдифференциальное исчисление для функций на булевых алгебрах и изучить экстремальные задачи оптимального выбора элемента булевой алгебры.*

8.5. Разное

В этом параграфе собраны несколько групп задач, относящихся к различным разделам математики.

8.5.1. Относительная стандартность.

Задача 64. *Используя ломаные Эйлера с шагом, бесконечно малым относительно бесконечно малого параметра ε в уравнении Ван дер Поля, дать непосредственное доказательство существования «уток», не использующее замены переменных (переход к плоскости Льенара) (см. [68]).*

Рассмотрим еще одно определение относительной стандартности:

$$x : \mathrm{st} : y \iff (\exists^{\mathrm{st}} f)(x = f(y)).$$

При таком определении оказывается, что существует натуральное число $n : \mathrm{s}t : y$, для которого имеются меньшие натуральные числа, но нестандартные относительно y. Таким образом, построена модель инфинитезимального анализа, в которой стандартный натуральный ряд «дырявый», однако принцип переноса и импликация $\rightarrow$ в принципе идеализации сохраняются.

Задача 65. *Построить какую-либо разумную аксиоматику такой версии инфинитезимального анализа.*

Предположим, что y — допустимое множество и (X, Σ, μ) является y-стандартным пространством с σ-аддитивной мерой μ. Элемент $x \in X$ назовем ***y*-случайным**, если для любого y-стандартного множества $A \in \Sigma$, такого, что $\mu(A) = 0$, выполнено $x \notin A$.

Из 6.4.2 (1) вытекает следующее утверждение:

Если (X_1, Σ_1, μ_1) и (X_2, Σ_2, μ_2) — стандартные пространства с конечными мерами, ξ_1 является случайным элементом X_1, а ξ_2 является ξ_1-случайным элементом X_2, то (ξ_1, ξ_2) является случайным элементом в произведении пространств $X_1 \times X_2$.

Задача 66. *Верно ли утверждение, обратное к приведенному?*

Задача 67. *Изучить свойства «размерной» («неоднородной») числовой прямой.*

Задача 68. *Можно ли оправдать физические манипуляции с дробными размерностями?*

8.5.2. Топология и меры Радона. Предположим, что X — внутреннее гиперконечное множество, $\mathscr{R} \subset X^2$ — отношение эквивалентности, представимое в виде пересечения подходящего семейства мощности κ внутренних множеств, где κ — некоторый кардинал. Нестандартный универсум мы будем предполагать κ^+-насыщенным (как обычно, κ^+ — наименьший кардинал, больший, чем κ). В множестве $X^\# := X/\mathscr{R}$ определим топологию, приняв $\{F^\# : F \subset X,$ F — внутреннее$\}$ за базу замкнутых множеств. Тогда топологическое пространство $X^\#$ компактно в том и только в том случае, если для любого внутреннего $A \supset \mathscr{R}$ найдется стандартно-конечное множество $K \subset X$ такое, что $X = A(K)$, где $A(K) := \{y \in X : (x, y) \in A$ для некоторого $x \in K\}$. При этом любой компакт может быть получен таким образом.

Задача 69. *Описать в этих терминах связные, односвязные, вполне несвязные и экстремально несвязные компакты.*

Задача 70. *Всякая ли мера Радона на $X^\#$ индуцируется некоторой мерой Лёба на X? Иными словами, верно ли, что для любой меры Радона μ на $X^\#$ найдется такая мера Лёба ν_L на X, что множество $A \subset X^\#$ является μ-измеримым тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(A)$ будет ν_L-измеримым (здесь $\pi : X \to X^\#$ — естественная проекция), причем $\mu(A) = \nu_L(\pi^{-1}(A))$.*

Известно, что для любого компакта $\mathscr{X}$ найдутся внутреннее гиперконечное множество X и внутреннее отображение $\Phi : X \to {}^*\mathscr{X}$ такие, что

$$(\forall^{\mathrm{st}}\xi \in {}^*\mathscr{X})(\exists x \in \mathscr{X})(\Phi(x) \approx \xi),$$

и если $\mathscr{R} := \{(x, y) : \Phi(x) \approx \Phi(y)\}$, то $X/\mathscr{R}$ гомеоморфно ${}^*\mathscr{X}$.

Задача 71. *Верно ли, что для любой меры Радона μ на $\mathscr{X}$ найдутся такое Φ, удовлетворяющее предыдущим условиям (или для любого такого Φ), и такая мера Лёба ν_L на X (индуцированная внутренней функцией $\nu : X \to {}^*\mathbb{R}$ — мерой на атомах), что для любой ограниченной почти всюду непрерывной функции f*

$$\int\limits_{\mathscr{X}} f\, d\mu = {}^\circ\Big(\sum_{x \in X} {}^*f\big(\Phi(x)\big)\nu(x)\Big)?$$

Задача 72. *Описать в терминах свойств $\mathscr{R}$ другие топологические свойства $X^\#$ (регулярность, локальную компактность и т. д.).*

Какие еще пространства можно получить указанным выше способом?

Задача 73. *Изучить монады, рассмотрев их как внешние отношения предпорядка (= квазиравномерные пространства).*

8.5.3. Теория целых функций.

Задача 74. *Описать класс нестандартных многочленов, тени которых являются целыми функциями; целыми функциями конечной степени σ.*

Напомним, что если f — внутренняя функция из ${}^*X$ в ${}^*\mathbb{R}$ такая, что значение $f({}^*x)$ доступно для $x \in X$, то ***тень*** или ***стандартная часть*** f — это функция ${}^\circ f$ из X в $\mathbb{R}$, определяемая правилом $({}^\circ f)(x) := {}^\circ(f({}^*x))$ для $x \in X$.

Задача 75. *Дать интерпретацию теоремы Винера — Пэли [201] в терминах задачи 74.*

Задача 76. *Дать нестандартные доказательства теоремы Котельникова и других интерполяционных теорем для целых функций [144, 222].*

Задача 77. *Используя разложение многочленов на множители, получить теоремы о разложении целых функций в бесконечное произведение (аналогично эйлеровскому разложению для синуса) [75, 412].*

8.5.4. Эргодическая теория. Эта серия задач (78–83) предложена А. Г. Качуровским (см. [124]).

Пусть N — бесконечно большое натуральное число. Числовая последовательность $x[N]$, как известно, называется ***микросходящейся***, если для некоторого числа $(\overline{x})$ выполняется $x_M \approx (\overline{x})$ при всех бесконечно больших $M \leq N$. Пусть последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в обычном смысле. Следующие три случая определяют три типа сходимости:

(1) *Белая сходимость*: для любого бесконечно большого N последовательность начального участка $x[N]$ микросходится.

(2) *Цветная сходимость*: существуют такие два бесконечно больших натуральных числа N и M, что последовательность $x[N]$ является микросходящейся, а последовательность $x[M]$ — нет.

(3) *Черная сходимость*: для любого бесконечно большого натурального числа N последовательность $x[N]$ не является микросходящейся.

Статистическая эргодическая теорема Неймана. *Пусть U — изометрический оператор в комплексном гильбертовом пространстве H, а H_U — подпространство инвариантных относительно U элементов H, т. е. $H_U := \{f \in H : Uf = f\}$, P_U — ортопроектор H_U. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U^k f - P_U f \right\|_H = 0$$

для любого $f \in H$.

Следствие. *Пусть (Ω, λ) — пространство с (конечной) мерой, T — его автоморфизм, $f \in L_2(\Omega)$. В этом случае последовательность $(\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(T^k x)\})_{n=0}^{\infty}$ сходится по норме $L_2(\Omega)$.*

Символом $\hat{L}_1(\Omega)$ обозначается внешнее множество таких элементов $f \in L_1(\Omega)$, что $\|f\|_1 \ll \infty$ и для всех $E \subset \Omega$ из $\lambda(E) \approx 0$ следует $\int_E f\, d\lambda \approx 0$. Введем также обозначение $\hat{L}_2(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) : f^2 \in \hat{L}_1(\Omega)\}$. О следующем результате см. в [89], а также [71, 72].

Теорема об ограниченной флуктуации. *Для любого элемента из $\widehat{L}_2(\Omega)$ соответствующая последовательность средних имеет ограниченную флуктуацию (и, следовательно, сходимость такой последовательности либо белая, либо цветная, т. е. нечерная).*

Задача 78. *Указать другие (возможно более слабые) достаточные признаки ограниченности флуктуации (и нечерной сходимости) последовательности средних.*

Задача 79. *Найти необходимые признаки для ограниченности флуктуации и нечерной сходимости, возможно более близкие к достаточному (указанному в формулировке теоремы об ограниченной флуктуации или получаемому при решении задачи 78).*

Задача 80. *Вопрос задачи 78 для статистической эргодической теоремы Неймана.*

Задача 81. *Вопрос задачи 79 для статистической эргодической теоремы Неймана и задачи 80.*

Задача 82. *Вопрос задачи 79 для эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина.*

Задача 83. *Вопрос задачи 79 для эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина и задачи 82.*

8.5.5. Приведем еще несколько задач, не попавших ни в один из предыдущих разделов.

Задача 84. *Сформулировать признаки околостандартности и предстандартности элементов классических банаховых пространств.*

Задача 85. *Построить теорию борнологических пространств, основываясь на монаде борнологии [342].*

Задача 86. *Сформулировать признаки сравнения для конечных сумм с бесконечно большим числом слагаемых.*

Задача 87. *Построить схемы гиперприближения общих алгебраических систем (булевозначных систем).*

Пусть X — банахово пространство, а B — полная булева алгебра. Обозначим через $B[X]$ пополнение внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ метрического пространства $X^{\wedge}$ — стандартного имени X.

Задача 88. *Для каких банаховых пространств X и булевых алгебр B внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ имеет место соотношение $B[X'] = B[X]'$?*

Приложение

Здесь мы даем эскиз построения булевозначных моделей теории множеств. Полное изложение имеется в [112, 119, 125, 261].

П.1. Пусть B — фиксированная полная булева алгебра. *Булевозначной интерпретацией* n-местного предиката P на классе X называют отображение $R : X^n \to B$. Предположим, что $\mathscr{L}$ — язык первого порядка с предикатами $P_0, P_1, \dots, P_n$, а $R_0, R_1, \dots, R_n$ — фиксированные булевозначные интерпретации этих предикатов на класс X.

Для формулы $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ языка $\mathscr{L}$ и $x_1, \dots, x_m \in X$ обычной рекурсией по длине φ определяется элемент $[\![\, \varphi(x_1, \dots, x_m) \,]\!]$ из B, называемый *оценкой истинности* φ.

Для атомных формул полагают

$$[\![\, P_k(x_1, \dots, x_m) \,]\!] := R_k(x_1, \dots, x_m).$$

На шагах индукции применяют правила:

$$[\![\, \varphi \vee \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \vee [\![\, \psi \,]\!],$$
$$[\![\, \varphi \wedge \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \wedge [\![\, \psi \,]\!],$$
$$[\![\, \varphi \to \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \Rightarrow [\![\, \psi \,]\!],$$
$$[\![\, \neg\varphi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!]^*,$$
$$[\![\, (\forall x)\, \varphi \,]\!] := \bigwedge_{x \in X} [\![\, \varphi(x) \,]\!],$$
$$[\![\, (\exists x)\, \varphi \,]\!] := \bigvee_{x \in X} [\![\, \varphi(x) \,]\!],$$

где в правых частях равенств знаки $\vee, \wedge, \Rightarrow, (\,\cdot\,)^*, \bigwedge, \bigvee$ обозначают булевы операции в B, причем $a \Rightarrow b := a^* \vee b$.

П.2. Говорят, что утверждение $\varphi(x_1,\dots,x_m)$, где $x_1,\dots,x_m \in X$, а $\varphi(u_1,\dots,u_m)$ — формула, ***истинно*** (верно, справедливо и т. п.) в алгебраической системе $\mathbb{X} := (X, R_0,\dots,R_n)$, и используют запись $\mathbb{X} \models \varphi(x_1,\dots,x_m)$, если $[\![\,\varphi(x_1,\dots,x_m)\,]\!] = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — наибольший элемент полной булевой алгебры B.

Все логически истинные утверждения верны в $\mathbb{X}$. Если предикат P_0 есть равенство, то требуют, чтобы в B-системе $\mathbb{X} := (X, =, R_1,\dots,R_n)$ выполнялись аксиомы равенства. При выполнении этого требования в B-системе $\mathbb{X}$ будут справедливы все логически истинные предложения логики первого порядка с равенством, выразимые в языке $\mathscr{L} := \{=, P_1,\dots,P_n\}$.

П.3. Рассмотрим теперь булевозначную интерпретацию языка теории множеств Цермело — Френкеля с аксиомой выбора на классе X. Напомним, что язык этой теории $\mathscr{L} := \{=, \in\}$ есть язык первого порядка с двумя двуместными предикатами $=$ и $\in$. Интерпретации этих предикатов обозначим через $[\![\,\cdot = \cdot\,]\!]$ и $[\![\,\cdot \in \cdot\,]\!]$ соответственно. Таким образом, $[\![\,\cdot = \cdot\,]\!], [\![\,\cdot \in \cdot\,]\!] : X \times X \to B$, причем

$$[\![= (x,y)\,]\!] = [\![\,x = y\,]\!], \quad [\![\in (x,y)\,]\!] = [\![\,x \in y\,]\!] \quad (x, y \in X).$$

Наша ближайшая цель — охарактеризовать B-системы $\mathbb{X} := (X, [\![\,\cdot = \cdot\,]\!], [\![\,\cdot \in \cdot\,]\!])$, являющиеся моделями теории ZFC, т. е. такие, что $\mathbb{X} \models \mathrm{ZFC}$. Последнее равносильно тому, что в $\mathbb{X}$ выполняются все аксиомы ZFC. Так, например, согласно правилам 1.1.1 справедливость аксиомы экстенсиональности 1.1.4 (1) означает, что для любых $x, y \in X$ верно

$$[\![\,x = y\,]\!] = \bigwedge_{z \in X} ([\![\,z \in x\,]\!] \Leftrightarrow [\![\,z \in y\,]\!]),$$

где $a \Leftrightarrow b := (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ для $a, b \in B$.

П.4. B-систему $\mathbb{X}$ называют отделимой, если для любых элементов $x, y \in X$ соотношение $[\![\,x = y\,]\!] = \mathbf{1}$ влечет $x = y$. Произвольную B-систему $\mathbb{X}$ можно преобразовать в отделимую путем факторизации по отношению эквивалентности $\sim := \{(x,y) \in X^2 : [\![\,x = y\,]\!] = \mathbf{1}\}$ (фактор-класс вводится с помощью хорошо известного приема Фреге — Рассела — Скотта, см. [119]).

Говорят, что B-система $\mathbb{X}$ изоморфна $\mathbb{X}' := (X', [\![\,\cdot = \cdot\,]\!]', [\![\,\cdot \in \cdot\,]\!]')$, если существует биекция $\beta : X \to X'$, для которой $[\![\,x = y\,]\!] = [\![\,\beta x = \beta y\,]\!]$ и $[\![\,x \in y\,]\!] = [\![\,\beta x \in \beta y\,]\!]$ при всех $x, y \in X$.

П.5. *Теорема.* *Существует единственная с точностью до изоморфизма B-система $\mathbb{X}$, удовлетворяющая следующим требованиям:*

(1) *$\mathbb{X}$ — отделимая B-система (см. 1.1.4);*

(2) *аксиомы равенства истинны в $\mathbb{X}$;*

(3) *аксиомы экстенсиональности 1.1.4 (1) и фундирования 1.1.4 (5) истинны в $\mathbb{X}$ (см. 1.1.3);*

(4) *если функция $f : \operatorname{dom}(f) \to B$ такова, что $\operatorname{dom}(f) \in \mathbf{V}$ и $\operatorname{dom}(f) \subset \mathbb{X}$, то существует $x \in \mathbb{X}$ такой, что*

$$[\![y \in x]\!] = \bigvee_{z \in \operatorname{dom}(f)} f(z) \wedge [\![z = y]\!] \quad (y \in \mathbb{X});$$

(5) *если $x \in \mathbb{X}$, то существует функция $f : \operatorname{dom}(f) \to B$ такая, что $\operatorname{dom}(f) \in \mathbf{V}$, $\operatorname{dom}(f) \subset \mathbb{X}$, и выполнено равенство из (4) для каждого $y \in \mathbb{X}$.*

П.6. B-систему, удовлетворяющую требованиям 1.1.5 (1–5), называют ***булевозначной моделью*** теории множеств и обозначают символом $\mathbf{V}^{(B)} := (\mathbf{V}^{(B)}, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$. Класс $\mathbf{V}^{(B)}$ именуют также ***булевозначным универсумом.*** Основные свойства $\mathbf{V}^{(B)}$ выражены в следующих принципах.

(1) ***Принцип переноса.*** *Каждая теорема теории множеств ZFC истинна в $\mathbf{V}^{(B)}$; символически $\mathbf{V}^{(B)} \models \mathrm{ZFC}$.*

(2) ***Принцип перемешивания.*** *Если $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы в B, $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство элементов $\mathbf{V}^{(B)}$, то существует единственный элемент $x \in \mathbf{V}^{(B)}$ такой, что $b_\xi \leq [\![x = x_\xi]\!]$ для всех $\xi \in \Xi$.*

Элемент x называют ***перемешиванием семейства*** $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ ***относительно*** $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и обозначают $\operatorname{mix}_{\xi \in \Xi} b_\xi x_\xi$.

(3) ***Принцип максимума.*** *Для любой формулы $\varphi(u)$ теории ZFC (возможно, с константами из $\mathbf{V}^{(B)}$) существует элемент $x_0 \in \mathbf{V}^{(B)}$ такой, что*

$$[\![(\exists u)\varphi(u)]\!] = [\![\varphi(x_0)]\!].$$

Отсюда, в частности, следует, что если $[\![(\exists ! x)\, \varphi(x)]\!] = \mathbf{1}$, то существует, и притом единственный, элемент x_0 из $\mathbf{V}^{(B)}$, для которого выполняется $[\![\varphi(x_0)]\!] = \mathbf{1}$.

П.7. *Существует единственное отображение* $x \mapsto x^\wedge$ *из* $\mathbf{V}$ *в* $\mathbf{V}^{(B)}$*, удовлетворяющее требованиям:*

(1) $x = y \leftrightarrow [\![x^\wedge = y^\wedge]\!] = \mathbf{1}$;
$x \in y \leftrightarrow [\![x^\wedge \in y^\wedge]\!] = \mathbf{1} \quad (x, y \in \mathbf{V})$,

(2) $[\![z \in y^\wedge]\!] = \bigvee_{x \in y} [\![x^\wedge = z]\!] \quad (z \in \mathbf{V}^{(B)},\ y \in \mathbf{V})$.

Это отображение называют ***каноническим вложением*** универсума всех множеств в булевозначный универсум.

(3) ***Ограниченный принцип переноса.*** *Пусть формула* $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ *ограничена, т. е. в ее построении все кванторы имеют вид* $(\forall u)(u \in v \to \dots)$ *и* $(\exists u)(u \in v \wedge \dots)$*, или же в сокращенной записи* $(\forall u \in v)$ *и* $(\exists u \in v)$*. Тогда для произвольных* $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{V}$ *выполняется*

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \mathbf{V}^{(B)} \models \varphi(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge).$$

П.8. Для элемента $X \in \mathbf{V}^{(B)}$ его *спуск* $X{\downarrow}$ задается правилом $X{\downarrow} := \{x \in \mathbf{V}^{(B)} : [\![x \in X]\!] = \mathbf{1}\}$. Множество $X{\downarrow}$ является *циклическим*, т. е. выдерживает всевозможные перемешивания своих элементов.

П.9. *Пусть* F *— соответствие из* X *в* Y *внутри* $\mathbf{V}^{(B)}$*, т. е.* $X, Y, F \in \mathbf{V}^{(B)}$ *и* $[\![F \subset X \times Y]\!] = [\![F \neq \varnothing]\!] = \mathbf{1}$*. Существует, и притом единственное, соответствие* $F{\downarrow}$ *из* $X{\downarrow}$ *в* $Y{\downarrow}$ *такое, что для любого множества* $A \subset X{\downarrow}$ *внутри* $\mathbf{V}^{(B)}$ *будет* $F(A){\downarrow} = F{\downarrow}(A{\downarrow})$*. При этом* $[\![F$ *— отображение из* X *в* $Y]\!] = \mathbf{1}$ *в том и только в том случае, если* $F{\downarrow}$ *— отображение из* $X{\downarrow}$ *в* $Y{\downarrow}$*.*

В частности, отображение $f : Z^\wedge \to Y$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$, где $Z \in \mathbf{V}$, определяет единственную функцию $f{\downarrow} : Z \to Y{\downarrow}$, удовлетворяющую условию $f{\downarrow}(z) = f(z^\wedge)$ для всех $z \in Z$.

П.10. Пусть $X \in \mathscr{P}(\mathbf{V}^{(B)})$. Определим функцию $f : \mathrm{dom}(f) \to B$ формулами: $\mathrm{dom}(f) = X$ и $\mathrm{im}(f) = \{\mathbf{1}\}$. Согласно 1.1.5 (4) существует элемент $X{\uparrow} \in \mathbf{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![y \in X]\!] = \bigvee_{x \in X} [\![x = y]\!] \quad (y \in \mathbf{V}^{(B)}).$$

Элемент $X{\uparrow}$ (единственный в силу аксиомы экстенсиональности) называют *подъемом* X. При этом справедливы формулы:

(1) $Y{\downarrow}{\uparrow} = Y \quad (Y \in \mathbf{V}^{(B)})$,

(2) $X{\uparrow}{\downarrow} = \mathrm{mix}(X) \quad (X \in \mathscr{P}(\mathbf{V}^{(B)}))$,

где $\mathrm{mix}(X)$ — множество всех перемешиваний вида $\mathrm{mix}\, b_\xi x_\xi$, $(x_\xi) \subset X$, а (b_ξ) — разбиение единицы в B.

П.11. *Пусть* $X, Y \in \mathscr{P}(\mathbf{V}^{(B)})$ *и* F — *соответствие из* X *в* Y. *Равносильны утверждения:*

(1) *существует, и притом единственное, соответствие* $F{\uparrow}$ *из* $X{\uparrow}$ *в* $Y{\uparrow}$ *внутри* $\mathbf{V}^{(B)}$ *такое, что имеет место равенство* $\mathrm{dom}(F{\uparrow}) = \mathrm{dom}(F){\uparrow}$ *и для каждого подмножества* A *множества* $\mathrm{dom}(F)$ *выполнено*

$$F{\uparrow}(A{\uparrow}) = F(A){\uparrow};$$

(2) *соответствие* F ***экстенсионально***, *т. е.*

$$y_1 \in F(x_1) \to [\![\, x_1 = x_2 \,]\!] \leq \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![\, y_1 = y_2 \,]\!].$$

Соответствие F будет отображением из X в Y в том и только в том случае, если $[\![\, F{\uparrow} : X{\uparrow} \to Y{\uparrow} \,]\!] = \mathbf{1}$. В частности, отображение $f : Z \to Y{\downarrow}$ порождает функцию $f{\uparrow} : Z^{\wedge} \to Y$ такую, что $f{\uparrow}(x^{\wedge}) = f(x)$ для всех $x \in Z$.

П.12. Предположим, что на непустом множестве X задана B-***структура***, т. е. определено отображение $d : X \times X \to B$, удовлетворяющее «аксиомам метрики»:

(1) $d(x, y) = \mathbf{0} \leftrightarrow x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) \vee d(z, y)$.

Тогда существуют элемент $\mathscr{X} \in \mathbf{V}^{(B)}$ и инъекция $\iota : X \to X' := \mathscr{X}{\downarrow}$ такие, что $d(x, y) = [\![\, \iota(x) \neq \iota(y) \,]\!]$ и любой элемент $x' \in X'$ имеет представление $x' = \mathrm{mix}\, b_\xi \iota x_\xi$, где $(x_\xi) \subset X$, а (b_ξ) — разбиение единицы в B. Этот факт позволяет рассматривать множества с B-структурой как подмножества $\mathbf{V}^{(B)}$ и оперировать с ними с помощью описанных выше правил.

П.13. Примечания.

(1) Такеути назвал булевозначным анализом раздел функционального анализа, который использует одноименные модели теории множеств [492, 494]. В последнее время этот термин трактуют расширительно, включая в него методы, основанные на одновременном использовании двух различных булевозначных моделей теории множеств.

(2) Стоит подчеркнуть, что создание булевозначных моделей не было связано с теорией векторных решеток. Необходимые для этого языковые и технические средства окончательно сформировались в рамках математической логики уже к 1960 г. Однако все еще не было той генеральной идеи, которая впоследствии привела к бурному прогрессу в теории моделей.

Такая идея пришла с открытием Коэна, который в 1963 г. установил абсолютную неразрешимость (в точном математическом смысле) классической континуум-проблемы [99, 420]. Именно в связи с осмыслением метода форсинга Коэна возникли булевозначные модели теории множеств, создание которых принято связывать с именами Вопенки, Скотта, Соловея (см. [74, 119, 261, 463, 512]).

Подробный материал этого раздела представлен в [50, 119, 125, 261]. Изложенные приемы в разных вариантах широко используются в исследованиях по теории булевозначных моделей. Форма спусков и подъемов наиболее приспособлена к задачам анализа [112, 119, 125]. Погружение множеств с булевой структурой в булевозначный универсум использует метод Соловея — Тенненбаума, предложенный ими ранее для погружения полных булевых алгебр [476].

Литература

1. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.
2. Александров А. Д. Общий взгляд на математику // Математика, ее содержание, методы и значение.—М.: Изд-во АН СССР, 1956.—Т. 1.—С. 5–78.
3. Александров А. Д. Проблемы науки и позиция ученого.—Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1988.—512 с.
4. Алексеев М. А., Глебский Л. Ю., Гордон Е. И. Об аппроксимациях групп, групповых действий и алгебр Хопфа // В кн: Теория представления, динамические системы, комбинаторика и алгебра. Методы. 3 / Записки научн. семин. С.-Петербург. отдел. мат. ин-та Стеклова (ПОМИ) 256.—1999.—С. 224–262.
5. Альбеверио С., Фенстад Й., Хёэг-Крон Р., Линдстрём Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике.—М.: Мир, 1990.—616 с.
6. Андреев П. В. О принципе стандартизации в теории ограниченных множеств // Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, мат., мех.—1997.—№ 1.—С. 68–70.
7. Андреев П. В., Гордон Е. И. Нестандартная теория классов // Владикавказский мат. журн. — 1999. — Т. 1, № 4. — С. 2–16. (http://alanianet.ru/omj/journal/htm)
8. Архимед. Сочинения.—М.: Физматгиз, 1962.—639 с.
9. Березин Ф. А., Шубин М. А. Уравнение Шрёдингера. — М.: Изд-во МГУ, 1983.—392 с.
10. Беркли Дж. Сочинения.—М.: Мысль, 2000.—556 с.
11. Биркгоф Г. Теория решеток.—М.: Наука, 1984.—566 с.

12. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко А. Г. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики.—М.: Наука, 1983.—328 с.

13. Боголюбов А. Н. «Читайте, читайте Эйлера: он учитель всех нас» // Наука в СССР.—1984.—№ 6.—С. 98–104.

14. Борель Э. Вероятность и достоверность.—М.: Физматгиз, 1961. —119 с.

15. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.— М.: Мир, 1982.—511 с.

16. Бурбаки Н. Теория множеств.—М.: Мир, 1965.—455 с.

17. Бухвалов А. В. Порядково ограниченные операторы в векторных решетках и пространствах измеримых функций // Итоги науки и техники. Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1988.—Т. 26.—С. 3–63.

18. Бухвалов А. В., Векслер А. И., Гейлер В. А. Нормированные решетки // Итоги науки и техники. Математический анализ.— М.: ВИНИТИ, 1980.—Т. 18.—С. 125–184.

19. Бухвалов А. В., Векслер А. И., Лозановский Г. Я. Банаховы решетки — некоторые банаховы аспекты теории // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, вып. 2.—С. 137–183.

20. Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М. Векторные решетки и интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1991.—214 с.

21. Ван Хао, Мак-Нотон Р. Аксиоматические системы теории множеств.—М.: Изд-во иностр. лит., 1963.—54 с.

22. Векслер А. И. О новой конструкции дедекиндова пополнения векторных структур и l-групп с делением // Сиб. мат. журн.— 1969.—Т. 10, № 6.—С. 70–73.

23. Векслер А. И. Банаховы циклические пространства и банаховы структуры // Докл. АН СССР.—1973.—Т. 213, № 4.—С. 770–773.

24. Векслер А. И., Гейлер В. А. О порядковой и дизъюнктной полноте линейных полуупорядоченных пространств // Сиб. мат. журн.—1972.—Т. 13, № 1.—С. 43–51.

25. Векслер А. И., Гордон Е. И. Нестандартное расширение не всюду определенных положительных операторов // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 4.—С. 720–727.

26. Вершик А. М., Гордон Е. И. Группы, локально вложимые в класс конечных групп // Алгебра и анализ. — 1997. — № 1. — С. 72–86.

27. Виленкин Н. Командор «Лузитании» // Знание — сила. — 1984.—№ 1.—С. 27–29.

28. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. p-Адический анализ и математическая физика.—М.: Наука, 1994.—352 с.

29. Владимиров Д. А. Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.—318 с.

30. Вольтер Стихи и проза.—М.: Изд. «Московский рабочий», 1997.—382 с.

31. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств. —М.: Мир, 1983.—150 с.

32. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.—407 с.

33. Выгодский М. Я. Основы исчисления бесконечно малых.—М.; Л.: ГТТИ, 1933.—464 с.

34. Гёдель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 8, вып. 1.—С. 96–149.

35. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики.—М.: Наука, 1979.— 558 с.

36. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ.—М.: Наука, 1969.—475 с.

37. Гоббс Т. Избранные произведения. Т. 1.—М.: Мысль, 1965.— 583 с.

38. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики.—М.: Мир, 1983.—488 с.

39. Гордон Е. И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР.— 1977.—Т. 237, № 4.—С. 773–775.

40. Гордон Е. И. K-пространства в булевозначных моделях теории множеств // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 258, № 4.—С. 777–780.

41. Гордон Е. И. К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 5.—С. 55–65.

42. Гордон Е. И. Рационально полные полупервичные коммутативные кольца в булевозначных моделях теории множеств.— Горький: ВИНИТИ, № 3286-83Деп, 1983.—35 с.

43. Гордон Е. И. Нестандартные конечномерные аналоги операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$// Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 2.—С. 45–59.

44. Гордон Е. И. Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Э. Нельсона // Сиб. мат. журн.—1989. —Т. 30, № 1.—С. 89–95.

45. Гордон Е. И. Гиперконечные аппроксимации локально компактных абелевых групп // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 314, № 5.—С. 1044–1047.

46. Гордон Е. И. Нестандартный анализ и компактные абелевы группы // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 2.—С. 26–40.

47. Гордон Е. И. О мерах Лёба // Известия вузов.—1991.—№ 2.— С. 25–33.

48. Гордон Е. И. Элементы булевозначного анализа. Учебное пособие.—Горький: Горьковск. ун-т, 1991.

49. Гордон Е. И., Любецкий В. А. Некоторые применения нестандартного анализа в теории булевозначных мер // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 256, № 5.—С. 1037–1041.

50. Гордон Е. И., Морозов С. Ф. Булевозначные модели теории множеств.—Горький: Горьковск. ун-т, 1982.—72 с.

51. Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А. О формуле Кюннета для L_p-когомологий искривленных произведений // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 5.—С. 29–42.

52. Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А. Об аппроксимации точных и замкнутых дифференциальных форм финитными // Сиб. мат. журн.—1992.—Т. 33, № 2.—С. 49–65.

53. Гретцер Г. Общая теория решеток.—М.: Мир, 1982.—454 с.

54. Гурарий В. П. Групповые методы коммутативного гармонического анализа// Итоги науки и техники: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.—М.: ВИНИТИ, 1988.—Т. 25.—С. 5–311.

55. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.— Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.—С. 63–211.

56. Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартный анализ и векторные решетки. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.—380 с.

57. Девис М. Прикладной нестандартный анализ.—М.: Мир, 1980. —236 с.

58. Деллашери К. Емкости и случайные процессы.—М.: Мир, 1972.

59. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация.—М.: Наука, 1981.

60. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы гладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.—М.: Наука, 1990.

61. Джонстон П. Т. Теория топосов.—М.: Наука, 1986.—438 с.

62. Диксмье Ж. C^*-алгебры и их представления. — М.: Наука, 1974.—399 с.

63. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств.—Киев: Вища школа, 1980.—215 с.

64. Емельянов Э. Ю. Инвариантные гомоморфизмы нестандартного расширения булевых алгебр и векторных решеток // Сиб. мат. журн.—1997.—Т. 38, № 2.—С. 286–296.

65. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика.—М.: Наука, 1987.—320 с.

66. Есенин-Вольпин А. С. Анализ потенциальной осуществимости // Логические исследования.—М.: Изд-во АН СССР, 1959.—С. 218–262.

67. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений.—М.: Мир, 1976.—165 с.

68. Звонкин А. К., Шубин М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.—1984.—Т. 39, вып. 2.—С. 77–127.

69. Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д. Фрактали, подобие, промежуточная асимптотика // Успехи физ. наук.—1985.—Т. 146, № 3.—С. 493–506.

70. Зорич В. А. Математический анализ.—М.: Наука, 1981.—Ч. 1. —543 с.

71. Иванов В. В. Геометрические свойства монотонных функций и вероятности случайных колебаний//Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37, № 1.—С. 117–150.

72. Иванов В. В. Колебания средних в эргодической теореме// Докл. РАН.—1996.—Т. 347, № 6.—С. 736–738.

73. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ.—М.: Наука, 1979.—719 с.

74. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.—М.: Мир, 1973.—150 с.

75. Кановей В. Г. О корректности эйлерова метода разложения синуса в бесконечное произведение // Успехи мат. наук.—1988.—Т. 43, вып. 4.—С. 57–81.

76. Кановей В. Г. Неразрешимые гипотезы в теории внутренних множеств Нельсона // Успехи мат. наук.—1991.—Т. 46, вып. 6.—С. 3–50.

77. Кант И. Сочинения. Т. 3.—М.: Мысль, 1964.—799 с.

78. Кантор Г. Труды по теории множеств.—М.: Наука, 1985.—430 с.

79. Канторович Л. В. О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР.—1935.—Т. 4, № 1–2.—С. 11–14.

80. Канторович Л. В. К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 1, № 7.—С. 271–274.

81. Канторович Л. В. О некоторых классах линейных операций // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 3, № 1.—С. 9–13.

82. Канторович Л. В. Об одном классе функциональных уравнений // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 4, № 5.—С. 211–216.

83. Канторович Л. В. Общие формы некоторых классов линейных операций // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 3, № 9.—С. 101–106.

84. Канторович Л. В. О функциональных уравнениях // Труды ЛГУ.—1937.—Т. 3, № 7.—С. 17–33.

85. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.

86. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.

87. Карно Л. Размышления о метафизике бесконечно малых.—М.: ОНТИ, 1933.

88. Качуровский А. Г. Ограниченность флуктуации средних в статистической эргодической теореме // Оптимизация.—1990.—Вып. 48(65).—С. 71–77.

89. Качуровский А. Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи мат. наук.—1996.—Т. 51, вып. 4.—С. 73–124.

90. Кейслер Г., Чен Ч. Теория моделей.—М.: Мир, 1977.—614 с.

91. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов // Успехи мат. наук.—1971.—Т. 26, вып. 4.—С. 15–41.

92. Клини С. Математическая логика.—М.: Мир, 1973.—480 с.

93. Колесников Е. В., Кусраев А. Г., Малюгин С. А. О мажорируемых операторах.—Новосибирск, 1988.—32 с. (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 26).

94. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика.—М.: Мир, 1969.—417 с.

95. Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика. Дополнительные главы.—М.: Изд-во Московск. ун-та, 1984.—119 с.

96. Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы.—М.: Наука, 1984.—320 с.

97. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.—М.: Наука, 1980.—383 с.

98. Король А. М., Чилин В. И. Измеримые операторы в булевозначной модели теории множеств // Докл. АН УзССР.—1989.— № 3.—С. 7–9.

99. Коэн П. Дж. Теория моделей и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1973.—347 с.

100. Коэн П. Дж. Об основании теории множеств // Успехи мат. наук.—1974.—Т. 29, вып. 5.—С. 169–176.

101. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений.—М.: Физматгиз, 1962.

102. Кузьмина И. С. Лузитания и ее создатель // Наука в СССР.—1985.—№ 1.—С. 107–110.

103. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления.—М.: Наука, 1967.—Т. 1.—804 с.

104. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов.—М.: Просвещение, 1967.—665 с.

105. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств.—М.: Мир, 1970.—416 с.

106. Кусраев А. Г. Субдифференциалы негладких операторов и необходимые условия экстремума // Оптимизация/Ин-т математики СО АН СССР.—Новосибирск, 1980.—Вып. 24.—С. 75–117.

107. Кусраев А. Г. Об одном общем методе субдифференцирования // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 257, № 4.—С. 822–826.

108. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 267, № 5.—С. 1049–1052.

109. Кусраев А. Г. Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1312–1316.

110. Кусраев А. Г. О субдифференциалах композиции множеств и функций // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 2.—С. 116–127.

111. Кусраев А. Г. О субдифференциале суммы // Сиб. мат. журн. —1984.—Т. 25, № 4.—С. 107–110.

112. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.— Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.

113. Кусраев А. Г. Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии в «целом» и математическому анализу. — Новосибирск: Наука, 1987.— С. 84–123.

114. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ и JB-алгебры // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 1.—С. 124–134.

115. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.—С. 212–292.

116. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ инволютивных банаховых алгебр.—Владикавказ: Изд-во Северо-Осетинского ун-та, 1996.—96 с.

117. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Анализ субдифференциалов с помощью булевозначных моделей // Докл. АН СССР.— 1982.—Т. 265, № 5.—С. 1061–1064.

118. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Записки по булевозначному анализу.—Новосибирск: Новосибирск. ун-т, 1984.—80 с.

119. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.—344 с.; Dordrecht: Kluwer

Academic Publishers, 1994.—435 p.

120. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. О комбинировании нестандартных методов // Сиб. мат. журн.—1990.—Т. 31, № 5.—С. 111–119.

121. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992. — 270 с.; Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1995.—398 p.

122. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992.—270 с.

123. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Теорема Крейна — Мильмана и пространства Канторовича // Оптимизация.— 1992.— № 51 (68).—С. 5–18.

124. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. 55 нерешенных задач из нестандартного анализа.—Новосибирск: Изд-во НГУ, 1993.—16 с.

125. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Булевозначный анализ. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.—398 с.

126. Кутателадзе С. С. Инфинитезимальные касательные конусы // Сиб. мат. журн.—1985.—Т. 27, № 6.—С. 67–76.

127. Кутателадзе С. С. Микропределы, микросуммы и теплицевы матрицы // Оптимизация.—1985.—Вып. 35.—С. 16–23.

128. Кутателадзе С. С. Нестандартный анализ касательных конусов // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 284, № 3.—С. 525–527.

129. Кутателадзе С. С. Вариант нестандартного выпуклого программирования // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. 27, № 4. —С. 84–92.

130. Кутателадзе С. С. Основы нестандартного математического анализа.—Новосибирск: Изд-во НГУ.—Ч. 1: Наивное обоснование инфинитезимальных методов.—1986.—44 с.; Ч. 2: Теоретико-множественное обоснование нестандартного анализа. — 1986.—34 с.; Ч. 3: Монады в общей топологии.—1986.—34 с.

131. Кутателадзе С. С. О нестандартных методах в субдифференциальном исчислении // Дифференциальные уравнения с частными производными.—Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986.—С. 116–120.

132. Кутателадзе С. С. Циклические монады и их применения // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 1.—С. 100–110.

133. Кутателадзе С. С. Инфинитезимали и исчисление касательных // Исследования по геометрии «в целом» и математическому анализу.—Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.—С. 123–135.

134. Кутателадзе С. С. О топологических понятиях, близких к непрерывности // Сиб. мат. журн.—1987.—Т. 28, № 1.—С. 143–147.

135. Кутателадзе С. С. Эпипроизводные, определяемые набором инфинитезималей // Сиб. мат. журн.—1987.—Т. 28, № 4.—С. 140–144.

136. Кутателадзе С. С. Монады ультрафильтров и экстенсиональных фильтров // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 1.—С. 129–133.

137. Кутателадзе С. С. Установки нестандартного анализа // Современные проблемы анализа и геометрии.—Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.—С. 153–182. (Труды Ин-та математики СО АН СССР. Т. 14.)

138. Кутателадзе С. С. Об осколках положительных операторов // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 5.—С. 111–119.

139. Кутателадзе С. С. Формализмы нестандартного анализа.— Новосибирск: Новосибирск. ун-т, 1999.—52 с.

140. Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2000.—336 с.

141. Лаврентьев М. А. Николай Николаевич Лузин // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 29, вып. 5.—С. 177–182.

142. Лаврентьев М. А. Наука. Технический прогресс. Кадры. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.—287 с.

143. Ламбек И. Кольца и модули.—М.: Мир, 1971.—279 с.

144. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.

145. Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике.—М.: Наука, 1985.—352 с.

146. Леге Ж.-М. Наука, техника и мир // Наука и жизнь.—1986.—№ 11.—С. 3–11.

147. Лейбниц Г. В. Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, вып. 1. — С. 166–173.

148. Лейбниц Г. В. Сочинения. Т. 1.—М.: Мысль, 1983.—688 с.

149. Лейбниц Г. В. Сочинения. Т. 2.—М.: Мысль, 1984.—736 с.

150. Ленг С. Алгебра.—М.: Мир, 1968.—564 с.

151. Лузин Н. Н. Современное состояние теории функций действительного переменного // Труды Всероссийского съезда математиков в Москве 27 апреля–4 мая 1927 г.—М.-Л.: Главнаука, 1928.—С. 11–32.

152. Лузин Н. Н. Теория функций действительного переменного.—М.: Учпедгиз, 1940.—302 с.

153. Лузин Н. Н. Собрание сочинений.—М.: Изд-во АН СССР, 1959.—Т. 3.—507 с.

154. Лузин Н. Н. Дифференциальное исчисление.—М.: Высш. шк., 1961.—477 с.

155. Лузин Н. Н.—Выдающийся математик и педагог // Вестн. АН СССР.—1984.—№ 11.—С. 95–102.

156. Любецкий В. А. О некоторых алгебраических вопросах нестандартного анализа // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 280, № 1.—С. 38–41.

157. Любецкий В. А., Гордон Е. И. Булевы расширения равномерных структур // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам.—М.: Наука, 1983.—С. 82–153.

158. Любецкий В. А., Гордон Е. И. Вложение пучков в гейтинговозначный универсум и теоремы переноса // Докл. АН СССР.—1983.—Т. 268, № 4.—С. 794–798.

159. Лянце В. Э. Возможно ли игнорировать нестандартный анализ // Общая теория граничных задач.—Киев: Наук. думка, 1983.—С. 108–112.

160. Лянце В. Э. О нестандартном анализе // Математика сегодня.—Киев: Вища школа, 1986.—С. 26–44.

161. Лянце В. Э., Кудрик Т. С. О функциях дискретного переменного // Математика сегодня.—Киев: Вища школа, 1987.—19 с.

162. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева.—Ленинград, 1985.

163. Мазья В. Г., Хавин В. П. Нелинейная теория потенциала // Успехи мат. наук.—1972.—Т. 27, вып. 6.—С. 67–138.

164. Мальцев А. И. Алгебраические системы.—М.: Наука, 1970.—392 с.

165. Малыхин В. И. Новые моменты в общей топологии, связанные с форсингом // Успехи мат. наук.—1988.—Т. 43, вып. 4.—С. 83–94.

166. Малыхин В. И., Пономарев В. И. Общая топология (теоретико-множественное направление) // Алгебра. Топология. Геометрия.—М.: ВИНИТИ, 1975.—Т. 13.—С. 149–229.

167. Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое.—М.: Сов. радио, 1979.—168 с.

168. Медведев Ф. А. Канторовская теория множеств и теология // Историко-математические исследования.—М.: Наука, 1985.—Вып. 29. —С. 209–240.

169. Медведев Ф. А. Нестандартный анализ и история классического анализа // Закономерности развития современной математики.—М.: Наука, 1987.—С. 75–84.

170. Мендельсон Э. Введение в математическую логику.—М.: Наука, 1971.—320 с.

171. Мерфи Дж. C^*-алгебры и теория операторов.—М.: Факториал, 1997.—332 с.

172. Молчанов В. А. Одномерный математический анализ в нестандартном изложении. — Саратов: СГПИ им. К. А. Федина, 1989.—80 с.

173. Молчанов В. А. О применении повторных нестандартных расширений в топологии // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 3.—С. 64–71.

174. Молчанов В. А. Введение в нестандартный анализ.—Саратов: СГПИ им. К. А. Федина, 1990.—89 с.

175. Молчанов В. А. Нестандартные сходимости в пространствах отображений.—Саратов: СГПИ им. К. А. Федина, 1991.—96 с.

176. Мостовский А. Конструктивные множества и их приложения. —М.: Мир, 1973.—256 с.

177. Наймарк М. А. Нормированные кольца.—М.: Наука, 1968. —664 с.

178. Наймарк М. А. Теория представления групп.—М.: Наука, 1976.

179. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии.—М.: Мир, 1990.

180. Начала Евклида. Книги VII–X.—М.; Л.: Гостехиздат, 1949.—511 с.

181. фон Нейман Дж. Избранные труды по функциональному анализу. Т. 1, 2.—М.: Наука, 1987.

182. Нельсон Э. Радикально элементарная теория вероятностей. —Новосибирск: Изд-во Института математики им. С. Л. Соболева, 1995.—120 с.

183. Непейвода Н. Н. Прикладная логика.—Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000.—491 с..

184. Новиков П. С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической.—М.: Наука, 1977.—328 с.

185. Ньютон И. Математические работы.—М.; Л.: ОНТИ, 1937.—452 с.

186. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ.—М.: Мир, 1988.—510 с.

187. Перэр И. Общая теория бесконечно малых // Сиб. мат. журн. —1990.—Т. 31, № 3.—С. 103–124.

188. Пич А. Операторные идеалы.—М.: Мир, 1982.

189. Понтрягин Л. С. Анализ бесконечно малых.—М.: Наука, 1980. —256 с.

190. Понтрягин Л. С. Математический анализ для школьников.—М.: Наука, 1980.—88 с.

191. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы.—М.: Наука, 1984.

192. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел.—М.: Наука, 1971.

193. Проблемы Гильберта.—М.: Наука, 1969.—240 с.

194. Расева Е., Сикорский Р. Метаматематика математики.—М.: Наука, 1972.—592 с.

195. Ревуженко А. Ф. Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ.—Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000.—430 с.

196. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. Ч. I, кн. 1.—Новосибирск: Изд-во Института математики, 1991.—454 с.

197. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики.—М.: Мир, 1977–1982.—Т. 1: Функциональный анализ. —1977.—357 с. Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. — 1978.—395 с. Т. 3: Теория рассеяния.—1982.—443 с. Т. 4: Анализ операторов.—1982.—428 с.

198. Рисс Ф., Сёкефальви–Надь Б. Лекции по функциональному анализу.—М.: Мир, 1979.—587 с.

199. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры.—М.: Наука, 1967.—376 с.

200. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ.—М.: Мир, 1973.—470 с.

201. Рудин У. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1975.

202. Рузавин Г. И. Философские проблемы оснований математики. —М.: Наука, 1983.—302 с.

203. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И. Упорядоченные алгебры.—Ташкент: Фан, 1983.

204. Севери Ф. Итальянская алгебраическая геометрия, ее строгость, методы и проблемы // Математика.—1959.—Т. 3, № 1.—С. 111–141.

205. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике.—М.: Мир, 1990.—240 с.

206. Секст Эмпирик. Сочинения.—М.: Мысль, 1976.—Т. 1.—399 с.

207. Сикорский Р. Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—376 с.

208. Соболев В. И. О полуупорядоченной мере множеств, измеримых функциях и некоторых абстрактных интегралах // Докл. АН СССР.—1953.—Т. 91, № 1.—С. 23–26.

209. Соловьёв Ю. П., Троицкий Е. В. C^*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии.—М.: Факториал, 1996.—352 с.

210. Строян К. Д. Инфинитезимальный анализ кривых и поверхностей // Справочная книга по математической логике.—М.: Наука, 1982.—Ч. 1.—С. 199–234.

211. Тихомиров В. М. Выпуклый анализ // Итоги науки и техники: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.—М.: ВИНИТИ, 1987.—Т. 14.—С. 5–102.

212. Треногин В. А. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1980.—496 с.

213. Троицкий В. Г. Нестандартная дискретизация и продолжение по Лёбу семейства мер // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 3.—С. 190–198.

214. Успенский В. А. Семь размышлений на темы философии математики // Закономерности развития современной математики. —М.: Наука, 1987.—С. 106–155.

215. Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ.—М.: Наука, 1987.—128 с.

216. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977.—688 с.

217. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств.— М.: Мир, 1966.—555 с.

218. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы.— М.: Мир, 1965.—342 с.

219. Фурман М. П. Логика топосов // Справочная книга по математической логике.—М.: Наука, 1983.—Ч. 4.—С. 241–277.

220. Хелгасон С. Преобразование Радона.—М.: Мир, 1983.

221. Хрестоматия по истории математики. — М.: Просвещение, 1977.—234 с.

222. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике.—М.: Наука, 1971.

223. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. —М.: Наука, 1975.—664 с.

224. Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Ф. Основы теории категорий. —М.: Наука, 1974.—256 с.

225. Чёрч А. Введение в математическую логику. — М.: Изд-во иностр. лит., 1965.—488 с.

226. Чилин В. И. Частично упорядоченные бэровские инволютивные алгебры // Современные проблемы математики. Новейшие достижения.—М.: ВИНИТИ, 1985.—Т. 27.—С. 99–128.

227. Шамаев И. И. О разложении и представлении регулярных операторов // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 2.— С. 192–202.

228. Шамаев И. И. Оператор, дизъюнктный решеточным гомоморфизмам, операторам Магарам и интегральным операторам // Оптимизация.—1990.— Вып. 46.— С. 154–159.

229. Шамаев И. И. Топологические методы в теории регулярных операторов в пространствах Канторовича (Докт. дис.). — Якутск, 1994.

230. Шварц Л. Анализ.—М.: Мир, 1972.—Т. 1.—824 с.

231. Шенфильд Дж. Р. Математическая логика.—М.: Наука, 1975. —520 с.

232. Шенфильд Дж. Р. Аксиомы теории множеств // Справочная книга по математической логике.—М.: Наука, 1982.—Ч. 2.— С. 9–34.

233. Шотаев Г. Н. О билинейных операторах в решеточно нормированных пространствах // Оптимизация.—1986.—Вып. 37.—С. 38–50.

234. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. —М.: ОНТИ, 1936.—Т. 1.—352 с.

235. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление.—Л.: Гостехиздат, 1949.—580 с.

236. Эйлер Л. Интегральное исчисление.—М.: Гостехиздат, 1950.—Т. 1.—415 с.

237. Эклоф П. Теория ультрапроизведений для алгебраистов // Справочная книга по математической логике. — М.: Наука, 1982.—Ч. 1.—С. 109–140.

238. Энгелер Э. Метаматематика элементарной математики.—М.: Мир, 1987.—127 с.

239. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. —М.: Мир, 1979.

240. Юшкевич А. П. Лейбниц и основание исчисления бесконечно малых // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 3, вып. 1.—С. 150–164.

241. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.—М.: Мир, 1974.—488 с.

242. Aksoy A. G. and Khamsi M. A. Nonstandard Methods in Fixed Point Theory.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1990.—139 p.

243. Albeverio S., Gordon E. I., and Khrennikov A. Yu. Finite dimensional approximations of operators in the Hilbert spaces of functions on locally compact abelian groups // Acta Appl. Math.—2000.—V. 64, No. 1.—P. 33–73.

244. Albeverio S., Luxemburg W. A. J., and Wolff M. P. H. (eds.) Advances in Analysis, Probability and Mathematical Physics: Contributions of Nonstandard Analysis. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (1995). — x+ 251 p.

245. Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Locally Solid Riesz Spaces.—New York etc.: Academic Press, 1978.

246. Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Positive Operators.—New York: Academic Press, 1985.—367 p.

247. Anderson R. M. A nonstandard representation of Brownian motion and Itô integration // Israel J. Math. Soc.—1976.—V. 25.—P. 15–46.

248. Anderson R. M. Star-finite representations of measure spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1982.—V. 271.—P. 667–687.

249. Anselone P. M. Collectively Compact Operator Approximation Theory and Applications to Integral Equations. —Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1971.

250. Arens R. F. and Kaplansky I. Topological representation of algebras // Trans. Amer. Math. Soc.—1948.—V. 63, No. 3.—P. 457–481.

251. Arkeryd L. and Bergh J. Some properties of Loeb–Sobolev spaces // J. London Math. Soc.—1986.—V. 34, No. 2.—P. 317–334.

252. Arkeryd L. O., Cutland N. J., and Henson W. (eds.) Nonstandard Analysis. Theory and Applications (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Nonstandard Analysis and Its Applications, International Centre for Mathematical Studies, Edinburgh, Scotland, 30 June–13 July).—Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1997.—380 p.

253. Arveson W. Operator algebras and invariant subspaces// Ann. of Math.—1974.—V. 100, No. 2.—P. 433–532.

254. Arveson W. An Invitation to C^*-Algebras.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1976.—106 p.

255. Attouch H. Variational Convergence for Functions and Operators. —Boston etc.: Pitman, 1984.

256. Aubin J.-P. and Frankowska H. Set-Valued Analysis. — Boston: Birkhäuser, 1990.

257. Auslander L. and Tolimieri R. Is computing with finite Fourier transform pure or applied mathematics? // Bull. Amer. Math. Soc.—1979.—V. 1, No. 6.—P. 847–897.

258. Bagarello F. Nonstandard variational calculus with applications to classical mechanics. I: An existence criterion// Internat. J. Theoret. Phys.—1999.—V. 38, No. 5.—P. 1569–1592.

259. Bagarello F. Nonstandard variational calculus with applications to classical mechanics. II: The inverse problem and more // Internat. J. Theoret. Phys.—1999.—V. 38, No. 5.—P. 1593–1615.

260. Ballard D. Foundational Aspects of “Non” Standard Mathematics. —Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.—135 p.

261. Bell J. L. Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—New York etc.: Clarendon Press, 1985.—xx+165 p.

262. Bell J. L. and Slomson A. B. Models and Ultraproducts: an Introduction.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1969.—ix+322 p.

263. Berberian S. K. Baer $*$-Rings.—Berlin: Springer-Verlag, 1972.—xii+296 p.

264. Bigard A., Keimel K., and Wolfenstein S. Groupes et Anneaux Réticulés, —Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977.—xi+334 p. (Lecture Notes in Math., **608**.)

265. Bishop E. and Bridges D. Constructive Analysis.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1985.

266. Blumenthal L. M. Theory and Applications of Distance Geometry. —Oxford: Clarendon Press, 1953.—xi+347 p.

267. Boole G. An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.—New York: Dover, 1957.—xi+424 p.

268. Boole G. Selected Manuscripts on Logic and Its Philosophy.—Basel: Birkhäuser-Verlag, 1997.—xiv+236 p. (Science Networks. Historical Studies, **20**.)

269. Burden C. W. and Mulvey C. J. Banach spaces in categories of sheaves // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., University of Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 169–196.

270. Canjar R. M. Complete Boolean ultraproducts // J. Symbolic Logic.—1987.—V. 52, No. 2.—P. 530–542.

271. Capinski M. and Cutland N. J. Nonstandard Methods for Stochastic Fluid Mechanics.—Singapore etc.: World Scientific Publishers, 1995.—xii+227 p. (Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, Vol. 27.)

272. Castaing C. and Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977. (Lecture Notes in Math., **580**).—278 p.

273. Ciesielski K. Set Theory for the Working Mathematician. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997.—xi+236 p.

274. Clarke F. H. Generalized gradients and applications // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—V. 205, No. 2.—P. 247–262.

275. Clarke F. H. Optimization and Nonsmooth Analysis.—Wiley: New York, 1983.

276. Cozart D. and Moore L. C. Jr. The nonstandard hull of a normed Riesz space // Duke Math. J.—1974.—V. 41.—P. 263–275.

277. Cristiant C. Der Beitrag Gödels für die Rechfertigung der Leibnizschen Idee von der Infinitesimalen // Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II.—1983.—Bd 192, No. 1–3.—S. 25–43.

278. Curtis T. Nonstandard Methods in the Calculus of Variations.—London: Pitman, 1993.—94 p. (Pitman Research Notes in Mathematics, **297**.)

279. Cutland N. J. Nonstandard measure theory and its applications // Bull. London Math. Soc.—1983.—V. 15, No. 6.—P. 530–589.

280. Cutland N. J. Infinitesimal methods in control theory, deterministic and stochastic // Acta Appl. Math.—1986.—V. 5, No. 2.—P. 105–137.

281. Cutland N. J. (ed.) Nonstandard Analysis and Its Applications.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.

282. Dacunha-Castelle D. and Krivine J.-L. Applications des ultraproduits a l'etude des espaces et des algebres de Banach // Studia Math.—1972.—V. 41.—P. 315–334.

283. Dales H. and Woodin W. An Introduction to Independence for Analysts. — Cambridge: Cambridge University Press, 1987. — viii+242 p.

284. Dauben J. W. Abraham Robinson. The Creation of Nonstandard Analysis, a Personal and Mathematical Odyssey. — Princeton: Princeton University Press, 1995.— xix+559 p.

285. Day M. Normed Linear Spaces.—New York and Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.—viii+211 p.

286. Diener F. and Diener M. Les applications de l'analyse non standard // Recherche.—1989.—V. 20, No. 1.—P. 68–83.

287. Diener F. and Diener M. (eds.) Nonstandard Analysis in Practice. —Berlin etc.: Springer-Verlag, 1995.—250 p.

288. Diestel J. and Uhl J. J. Vector Measures.—Providence, RI: Amer. Math. Soc, 1977. (Math. Surveys; **15**.)

289. Digernes T., Husstad E., and Varadarajan V. Finite approximations of Weyl systems // Math. Scand.—1999.—V. 84.—P. 261–283.

290. Digernes T., Varadarajan V., and Varadhan S. Finite approximations to quantum systems // Rev. Math. Phys.—1994.—V. 6, No. 4.—P. 621–648.

291. Dinculeanu N. Vector Measures.—Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.—432 p.
292. Dixmier J. C^*-Algebras.—Amsterdam, New York, and Oxford: North-Holland, 1977.—xiii+492 p.
293. Dixmier J. Les Algebres d'Operateurs dans l'Espace Hilbertien (Algebres de von Neumann).—Paris: Gauthier–Villars, 1996.—x+367 p.
294. Dolecki S. A general theory of necessary optimality conditions // J. Math. Anal. Appl.—1980.—V. 78, No. 12.—P. 267–308.
295. Dolecki S. Tangency and differentiation: marginal functions // Adv. in Appl. Math.—1990.—V. 11.—P. 388–411.
296. Dragalin A. G. An explicit Boolean-valued model for nonstandard arithmetic // Publ. Math. Debrecen.—1993.—V. 42, No. 3–4.—P. 369–389.
297. Dunford N. and Schwartz J. T. Linear Operators. Vol. 1: General Theory.—New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.—xiv+858 p.
298. Dunford N. and Schwartz J. T. Linear Operators. Vol. 2: Spectral Theory. Selfadjoint Operators in Hilbert Space–New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.—P. i–x, 859–1923 and 1–7.
299. Dunford N. and Schwartz J. T. Linear Operators. Vol. 3: Spectral Operators.—New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.—P. i–xx and 1925–2592.
300. Eda K. A Boolean power and a direct product of abelian groups // Tsukuba J. Math.—1982.—V. 6, No. 2.—P. 187–194.
301. Eda K. On a Boolean power of a torsion free abelian group // J. Algebra.—1983.—V. 82, No. 1.—P. 84–93.
302. Ellis D. Geometry in abstract distance spaces // Publ. Math. Debrecen.— 1951.—V. 2.—P. 1–25.
303. Espanol L. Dimension of Boolean valued lattices and rings // J. Pure Appl. Algebra.—1986.—No. 42.—P. 223–236.
304. Fakhoury H. Représentations d'opérateurs à valeurs dans $L^1(X, \Sigma, \mu)$ // Math. Ann.—1979.—V. 240, No. 3.—P. 203–212.
305. Farkas E. and Szabo M. On the plausibility of nonstandard proofs in analysis // Dialectica.—1974.—V. 38, No. 4.—P. 297–310.
306. Fattorini H. O. The Cauchy Problem.—Addison-Wesley, 1983.
307. Foster A. L. Generalized 'Boolean' theory of universal algebras. I. Subdirect sums and normal representation theorems // Math. Z. —1953.—V. 58, No. 3.—P. 306–336.

308. Foster A. L. Generalized ‘Boolean’ theory of universal algebras. II. Identities and subdirect sums of functionally complete algebras // Math. Z.—1953.—V. 59, No. 2.—P. 191–199.

309. Fourman M. P. and Scott D. S. Sheaves and logic // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 302–401.

310. Fourman M. P., Mulvey C. J., and Scott D. S. (eds.) Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977), Springer-Verlag, Berlin, 1979.

311. Fuller R. V. Relations among continuous and various noncontinuous functions // Pacific J. Math.—1968.—V. 25, No. 3.—P. 495–509.

312. Gandy R. O. Limitations to mathematical knowledge // Logic Colloquium-80.—New York and London: North-Holland, 1982.—P. 129–146.

313. Georgescu G. and Voiculescu I. Eastern model theory for Boolean-valued theories // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1985.—No. 31.—P. 79–88.

314. Gödel K. What is Cantor’s continuum problem // Amer. Math. Monthly.—1947.—V. 54, No. 9.—P. 515–525.

315. Goldblatt R. Lectures on the Hyperreals: An Introduction to Nonstandard Analysis.—New York etc.: Springer-Verlag, 1998.—303 p.

316. Goodearl K. R. Von Neumann Regular Rings.— London: Pitman, 1979.

317. Gordon E. I. Nonstandard Methods in Commutative Harmonic Analysis.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997.

318. Grayson R. J. Heyting-valued models for intuitionistic set theory // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 402–414.

319. Gutman A. E. Locally one-dimensional K-spaces and σ-distributive Boolean algebras // Siberian Adv. Math.—1995.—V. 5, No. 2.—P. 99–121.

320. Hallet M. Cantorian Set Theory and Limitation of Size.—Oxford: Clarendon Press, 1984.—xix+343 p.

321. Halmos P. R. Lectures on Boolean Algebras.—Toronto, New York, and London: Van Nostrand, 1963.—147 p.
322. Hanshe-Olsen H. and Störmer E. Jordan Operator Algebras.—Boston etc.: Pitman Publ. Inc., 1984.
323. Harnik V. Infinitesimals from Leibniz to Robinson time—to bring them back to school // Math. Intelligencer.—1986.—V. 8, No. 2.—P. 41–47.
324. Hatcher W. Calculus is algebra // Amer. Math. Monthly.—1989.—V. 89, No. 6.—P. 362–370.
325. Heinrich S. Ultraproducts of L_1-predual spaces // Fund. Math.—1981.—V. 113, No. 3.—P. 221–234.
326. Henle J. M. and Kleinberg E. M. Infinitesimal Calculus.—Cambridge and London: Alpine Press, 1979.—135 p.
327. Henson C. W. On the nonstandard representation of measures // Trans. Amer. Math. Soc.—1972.—V. 172, No. 2.—P. 437–446.
328. Henson C. W. When do two Banach spaces have isometically isomorphic nonstandard hulls? // Israel J. Math.—1975.—V. 22.—P. 57–67.
329. Henson C. W. Nonstandard hulls of Banach spaces // Israel J. Math.—1976.—V. 25.—P. 108–114.
330. Henson C. W. Unbounded Loeb measures // Proc. Amer. Math. Soc.—1979.—V. 74, No. 1.—P. 143–150.
331. Henson C. W. Infinitesimals in functional analysis //Nonstandard Analysis and Its Applications.—Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 1988.—P. 140–181.
332. Henson C. W. and Keisler H. J. On the strength of nonstandard analysis // J. Symbolic Logic.—1986.—V. 51, No. 2.—P. 377–386.
333. Henson C. W. and Moore L. C. Jr. Nonstandard hulls of the classical Banach spaces // Duke Math. J.—1974.—V. 41, No. 2.—P. 277–284.
334. Henson C. W. and Moore L. C. Jr. Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces // Nonstandard Analysis. Recent Developments.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1983.—P. 27–112.—(Lecture Notes in Math., **983**.)
335. Henson C. W., Kaufmann M., and Keisler H. J. The strength of nonstandard methods in arithmetic // J. Symbolic Logic.—1984.—V. 49, No. 34.—P. 1039–1057.

336. Hermann R. Supernear functions // Math. Japon.—1986.—V. 31, No. 2.—P. 320.

337. Hernandez E. G. Boolean-valued models of set theory with automorphisms // Z. Math. Logik Grundlag. Math.—1986.—V. 32, No. 2.—P. 117–130.

338. Hiriart-Urruty J.-B. Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces // Math. Oper. Res.—1979.—V. 4, No. 1.—P. 79–97.

339. Hoehle U. Almost everywhere convergence and Boolean-valued topologies / Topology, Proc. 5th Int. Meet., Lecce/Italy 1990, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. 29.—1992.—P. 215–227.

340. Hofman K. H. and Keimel K. Sheaf theoretical concepts in analysis: bundles and sheaves of Banach spaces, Banach $C(X)$-modules // Applications of Sheaves, 1979, Springer-Verlag, Berlin.

341. Hofstedter D. R. Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.—New York: Vintage Books, 1980.—778 p.

342. Hogbe-Nlend H. Theorie des Bornologie et Applications.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.

343. Horiguchi H. A definition of the category of Boolean-valued models // Comment. Math. Univ. St. Paul.—1981.—V. 30, No. 2.—P. 135–147.

344. Horiguchi H. The category of Boolean-valued models and its applications // Comment. Math. Univ. St. Paul.—1985.—V. 34, No. 1.—P. 71–89.

345. Hrbaček K. Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fund. Math.—1978.—V. 98, No. 1.—P. 1–24.

346. Hrbaček K. Nonstandard set theory // Amer. Math. Monthly.—1979.—V. 86, No. 8.—P. 659–677.

347. Hurd A. E. (ed.) Nonstandard Analysis. Recent Developments.—Berlin: Springer-Verlag, 1983.—213 p.

348. Hurd A. E. and Loeb H. An Introduction to Nonstandard Analysis.—Orlando etc.: Academic Press, 1985.—232 p.

349. Ionescu Tulcea A. and Ionescu Tulcea C. Topics in the Theory of Lifting.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1969.—190 p.

350. Jaffe A. Ordering the universe: the role of mathematics // SIAM Rev.—1984.—V. 26, No. 4.—P. 473–500.

351. Jarnik V. Bolzano and the Foundations of Mathematical Analysis. —Prague: Society of Czechosl. Math. Phys., 1981.—89 p.

352. Jech T. J. The Axiom of Choice.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1973.—xi+202 p.

353. Jech T. J. Abstract theory of abelian operator algebras: an application of forcing // Trans. Amer. Math. Soc.—1985.—V. 289, No. 1.—P. 133–162.

354. Jech T. J. First order theory of complete Stonean algebras (Boolean-valued real and complex numbers) // Canad. Math. Bull.—1987.—T. 30, No. 4.—P. 385–392.

355. Jech T. J. Boolean-linear spaces // Adv. in Math.—1990.—V. 81, No. 2.—P. 117–197.

356. Jech T. J. Set Theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1997. — xiv+634 p.

357. Johnstone P. T. Stone Spaces.—Cambridge and New York: Cambridge University Press, 1982.—xxii+370 p.

358. de Jonge E. and van Rooij A. C. M. Introduction to Riesz Spaces.—Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977.

359. Jordan P., Neumann J., and Wigner E. On an algebraic generalization of the quantum mechanic formalism // Ann. Math.—1944.—V. 35.—P. 29–64.

360. Kadison R. V. and Ringrose J. R. Fundamentals of the Theory of Operator Algebras.—Vol. 1, 2.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. Vol. 3, 4.—Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 1991–1992.

361. Kalina M. On the ergodic theorem within nonstandard models // Tatra Mt. Math. Publ.—1997.—V. 10.—P. 87–93.

362. Kalton N. J. The endomorphisms of L_p $(0 \leq p \leq 1)$// Indiana Univ. Math. J.—1978.—V. 27, No. 3.—P. 353–381.

363. Kalton N. J. Linear operators on L_p for $0 < p < 1$// Trans. Amer. Math. Soc.—1980.—V. 259, No. 2.—P. 319–355.

364. Kalton N. J. Representation of operators between function spaces // Indiana Univ. Math. J.—1984.—V. 33, No. 5.—P. 639–665.

365. Kalton N. J. Endomorphisms of symmetric function spaces// Indiana Univ. Math. J.—1985.—V. 34, No. 2.—P. 225–247.

366. Kamo S. Nonstandard natural number systems and nonstandard models // J. Symbolic Logic.—1987.—V. 46, No. 2.—P. 365–376.

367. Kanovei V. and Reeken M. Internal approach to external sets and universes // Studia Logica, part 1: **55**, 227–235 (1995); part II: **55**, 347–376 (1995); part III: **56**, 293–322 (1996).

368. Kanovei V. and Reeken M. Mathematics in a nonstandard world. I // Math. Japon.—1997.— V. 45, No. 2.— P. 369–408.

369. Kanovei V. and Reeken M. A nonstandard proof of the Jordan curve theorem // Real Anal. Exchange.—1998.—V. 24, No. 1.— P. 161–169.

370. Kanovei V. and Reeken M. Extending standard models of ZFC to models of nonstandard set theories // Studia Logica.—2000.— V. 64, No. 1.—P. 37–59.

371. Kaplansky I. Projections in Banach algebras // Ann. of Math. (2).—1951.—V. 53.—P. 235–249.

372. Kaplansky I. Algebras of type I // Ann. of Math. (2).—1952.— V. 56.—P. 460–472.

373. Kaplansky I. Modules over operator algebras // Amer. J. Math.— 1953.—V. 75, No. 4.—P. 839–858.

374. Kawai T. Axiom systems of nonstandard set theory // Logic Symposia, Proc. Conf. Hakone 1979, 1980.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1981.—P. 57–65.

375. Kawebuta Sh. A “non-standard” approach to the field equations in the functional form // Osaka J. Math.—1986.—V. 23, No. 1.— P. 55–67.

376. Keisler H. J. Elementary Calculus: An Approach Using Infinitesimals.—Boston, Mass.: Prindle, Weber, and Schmidt, 1976.—71 p.

377. Keisler H. J. An infinitesimal approach to stochastic analysis // Mem. Amer. Math. Soc.—1984.—V. 48.—184 p.

378. Kopperman R. Model Theory and Its Applications.—Boston: Allyn and Bacon, 1972.—333 p.

379. Kramosil I. Comparing alternative definitions of Boolean-valued fuzzy sets // Kybernetika.—1992.—V. 28, No. 6.—P. 425–443.

380. Kreisel G. Observations of popular discussions on foundations // Axiomatic Set Theory. Proc. Symposia in Pure Math.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1971.—V. 1.—P. 183–190.

381. Krupa A. On various generalizations of the notion of an $\mathscr{F}$-power to the case of unbounded operators // Bull. Polish Acad. Sci. Math.—1990.—V. 38.—P. 159–166

382. Kudryk T. S. and Lyantse V. E. Operator-valued charges on finite sets// Mat. Stud.—1997.—V. 7, No. 2.—P. 145-156.

383. Kudryk T. S., Lyantse V. E., and Chujko G. I. Nearstandardness of finite set// Mat. Stud.—1993.—V. 2.—P. 25-34.

384. Kuribayashi Y. Fourier transform using nonstandard analysis // RIMS Kokyuroku.—1996.—V. 975.—P. 132-144.

385. Kudryk T. S., Lyantse V. E., and Chujko G. I. Nearstandard operators// Mat. Stud.—1994.—V. 3.—P. 29-40.

386. Kusraev A. G. On Boolean valued convex analysis // Mathematische Optimiering. Theorie und Anwendungen. Wartburg/Eisenach, 1983, P. 106–109.

387. Kusraev A. G. Dominated Operators.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. —405 p.

388. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods for Kantorovich spaces // Siberian Adv. Math.—1992.—V. 2, No. 2. —P. 114–152.

389. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods in geometric functional analysis // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.—1992.—V. 151.—P. 91–105.

390. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Boolean-valued introduction to the theory of vector lattices // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.—1995.—V. 163.—P. 103–126.

391. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods in functional analysis // Interaction Between Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability Theory.—New York: Marcel Dekker Inc., 1995.—P. 301–306.

392. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. On combined nonstandard methods in the theory of positive operators // Matematychni Studii.—1997.—V. 7, No. 1.—C. 33–40.

393. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. On combined nonstandard methods in functional analysis // Владикавказский мат. журн. (Полнотекст. база данных, номер гос. регистр. 0229905212).—2000.—T. 2. No. 1. (http://alanianet.ru/omj/journal.htm)

394. Kutateladze S. S. Credenda of nonstandard analysis // Siberian Adv. Math.— 1991.—V.1, No. 1.—P. 109–137.

395. Kutateladze S. S. Nonstandard tools for convex analysis//Math. Japon.—1996.—V. 43, No. 2.—P. 391–410.

396. Lacey H. E. The Isometric Theory of Classical Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—x+270 p.

397. Langwitz D. Nicht-standard-mathematik, begründel durch eine Verallgemeinerung der Körpererweiterung // Exposit. Math.—1983.—V. 1.—P. 307–333.

398. Larsen R. Banach Algebras, an Introduction.—New York: Dekker, 1973.—xi+345 p.

399. Levy A. Basic Set Theory.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—xiv+391 p.

400. Li N. The Boolean-valued model of the axiom system of GB // Chinese Sci. Bull.—1991.—V. 36, No. 2.—P. 99–102.

401. Lindenstrauss J. Extension of compact operators // Mem. Amer. Math. Soc.—1964.—V. 48.—112 p.

402. Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 1: Sequence Spaces. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1977. — xiii+188 p.

403. Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 2: Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—x+243 p.

404. Locher J. L. (ed.) The World of M. C. Escher.—New York: Abradale Press, 1988.

405. Loeb P. A. Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications to probability theory // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—V. 211.—P. 113–122.

406. Loeb P. A. An introduction to nonstandard analysis and hyperfinite probability theory // Probabilistic Analysis and Related Topics. V. 2. (Ed. A. T. Bharucha–Reid).—New York: Academic Press, 1979.—P. 105–142.

407. Loeb P. and Wolff M. P. H. (eds.) Nonstandard Analysis for the Working Mathematician.—Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 2000.—336 p.

408. Lowen R. Mathematics and fuzziness // Fuzzy Sets Theory and Applications (Louvain-la-Neuve, 1985), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., 177.—Reidel, Dordrecht, and Boston, 1986.—P. 3–38.

409. Loewen P. D. Optimal Control via Nonsmooth Analysis.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993.—ix+153 p.

410. Lutz R. and Gose M. Nonstandard Analysis. A Practical Quide with Applications.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1981.—261 p.—(Lecture Notes in Math., **881**.)

411. Luxemburg W. A.J. (ed.) Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability.—New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1969.—307 p.

412. Luxemburg W. A. J. A general theory of monads // Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability.—Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1969.—P. 18–86.

413. Luxemburg W. A. J. A nonstandard approach to Fourier analysis // Contributions to Nonstandard Analysis.—Amsterdam: North-Holland, 1972.—P. 16–39.

414. Luxemburg W. A. J. and Robinson A. (eds.) Contribution to Non-Standard Analysis.—Amsterdam: North-Holland, 1972.—289 p.

415. Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 1.—Amsterdam and London: North-Holland, 1971.—514 p.

416. Lyantse V. E. Nearstandardness on a Finite Set. Diss. Math. 369 (1997).—63 p.

417. Lyantse W. and Kudryk T. Introduction to Nonstandard Analysis. —Lviv: VNTL Publishers, 1997.—253 p.

418. Lyantse V. E. and Yavorskyj Yu. M. Nonstandard Sturm–Liouville difference operator//Mat. Stud.—1998.—V. 10, No. 1.—P. 54–68.

419. Lyantse V. E. and Yavorskyj Yu. M. Nonstandard Sturm–Liouville difference operator. II // Mat. Stud.—1999.—V. 11, No. 1.—P. 71-82.

420. MacLane S. Categories for the Working Mathematician.—New York: Springer-Verlag, 1971.—ix+262 p.

421. Marinakis K. The infinitely small in space and in time // Trans. Hellenic Inst. Appl. Sci.—1970.—No. 8.—62 p.

422. Martin–Löf P. The definition of random sequences // Inform. and Control.—1966.—V. 9.—P. 602–619.

423. Mazon J. M. and Segura de León S. Order bounded orthogonally additive operators // Rev. Roumaine Math. Pures Appl.—1990.—T. 35, № 4.—P. 329–354.

424. Mckee T. Monadic characterizable in nonstandard topology // Z. Math. Logik.—1940.—V. 26, No. 5.—P. 395–397.

425. Melter R. Boolean valued rings and Boolean metric spaces // Arch. Math.—1964.—No. 15.—P. 354–363.

426. Milvay C. J. Banach sheaves // J. Pure Appl. Algebra.—1980.—V. 17, No. 1.—P. 69–84.

427. Mochover M. and Hirschfeld J. Lectures on Non-Standard Analysis. —Berlin etc.: Springer-Verlag, 1969.—79 p.—(Lecture Notes in Math., **94**.)

428. Molchanov I. S. Set-valued estimators for mean bodies related to Boolean models // Statistics 28.—1996.—No. 1.—P. 43–56.

429. Monk J. D. and Bonnet R. (eds.) Handbook of Boolean Algebras. Vol. 1–3.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1989.

430. Moore L. C. Jr. Hyperfinite extensions of bounded operators on a separable Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc.—1976.—V. 218.—P. 285–295.

431. Namba K. Formal systems and Boolean valued combinatorics // Southeast Asian Conference on Logic (Singapore, 1981), P. 115–132. Stud. Logic Found. Math., 111, Amsterdam and New York: North-Holland, 1983.

432. Nelson E. Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc.—1977.—V. 83, No. 6.—P. 1165–1198.

433. Nelson E. Radically Elementary Probability Theory.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1987.—98 p.

434. Nelson E. The syntax of nonstandard analysis // Ann. Pure Appl. Logic.—1988.—V. 38, No. 2.—P. 123–134.

435. Neubrunn I., Riećan B., and Riecanou Z. An elementary approach to some applications of nonstandard analysis // Rend. Circl. Math. Palermo.—1984.—No. 3.—P. 197–200.

436. Neumann J. Collected Works. Vol. 1: Logic, Theory of Sets and Quantum Mechanics.—Oxford etc.: Pergamon Press, 1961.—654 p.

437. Neumann J. Collected Works. Vol. 3: Rings of Operators.—New York, Oxford, London, and Paris: Pergamon Press, 1961.—ix+574 p.

438. Neumann J. Collected Works. Vol. 4: Continuous Geometry and Other Topics.—Oxford, London, New York, and Paris: Pergamon Press, 1962.—x+516 p.

439. Nishimura H. Boolean valued and Stone algebra valued measure theories // Math. Logic Quart.—1994.—V. 40, No. 1.—P. 69–75.

440. Ozawa M. Boolean valued analysis approach to the trace problem of AW^*-algebras // J. London Math. Soc. (2).—1986.—V. 33, No. 2.—P. 347–354.

441. Ozawa M. Embeddable AW^*-algebras and regular completions // J. London Math. Soc.—1986.—V. 34, No. 3.—P. 511–523.

442. Ozawa M. Boolean-valued interpretation of Banach space theory and module structures of von Neumann algebras // Nagoya Math. J.—1990.—V. 117.—P. 1–36.

443. Pedersen G. K. Analysis Now. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1995.—277 p.

444. Penot J.-P. Compact nets, filters and relations // J. Math. Anal. Appl.—1983.—V. 93, No. 2.—P. 400–417.

445. Péraire Y. Une nouvelle théorie des infinitesimaux// C. R. Acad. Aci. Paris Ser. I.—1985.—V. 301, No. 5.—P. 157–159.

446. Péraire Y. Théorie relative des ensembles internes//Osaka J. Math. —1992.—V. 29, No. 2.—P. 267–297.

447. Péraire Y. Some extensions of the principles of idealization transfer and choice in the relative internal set theory // Arch. Math. Logic.—1995.—V. 34.—P. 269–277.

448. Pinus A. G. Boolean Constructions in Universal Algebras.—Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1993.—vii+350 p.

449. Pirce R. S. Modules over commutative regular rings // Mem. Amer. Math. Soc.—1967.—No. 70.

450. Raebiger F. and Wolff M. P. H. On the approximation of positive operators and the behaviour of the spectra of the approximants // Integral Equations Operator Theory.—1997.—V. 28.—P. 72–86.

451. Raebiger F. and Wolff M. P. H. Spectral and asymptotic properties of dominated operators // J. Austral. Math. Soc. (Series A).—1997.—V. 63.— P. 16–31.

452. Reinhardt H.-J. Analysis of Approximation Methods for Differential and Integral Equations.—New York, Berlin, Heidelberg, and Tokyo: Springer-Verlag, 1985.

453. Rema P. S. Boolean metrization and topological spaces // Math. Japon.—1964.—V. 9, No. 9.—P. 19–30.

454. Repicky M. Cardinal characteristics of the real line and Boolean-valued models // Comment. Math. Univ. Carolin.—1992.—V. 33, No. 1.—P. 184.

455. Rickart Ch. General Theory of Banach Algebras.—Princeton: Van Nostrand, 1960.—xi+394 p.

456. Robert A. Analyse Non-Standard.—Kingston: Queen's University Press, 1984.—119 p.

457. Robert A. One approache naive de l'analyse non-standard // Dialectica. —1984.—V. 38.—P. 287–290.

458. Robinson A. The metaphysics of the calculus // Problems in the Philosophy of Mathematics.—Amsterdam: North-Holland, 1967. —V. 1.—P. 28–46.

459. Robinson A. Non-Standard Analysis.—Princeton: Princeton University Press, 1996.—293 p.

460. Rockafellar R. T. The Theory of Subgradients and Its Applications to Problems of Optimization: Convex and Nonconvex Functions.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1981.

461. Rockafellar R. T. and Wets R. J.-B. Variational Analysis.—Birkhäuser: Springer-Verlag, 1998.—xiii+733 p.

462. Rosser J. B. Logic for Mathematicians.—New York etc.: McGraw-Hill voon Company, Inc., 1953.—530 p.

463. Rosser J. B. Simplified Independence Proofs. Boolean Valued Models of Set Theory.—New York and London: Academic Press, 1969.—xv+217 p.

464. Rubio J. E. Optimization and Nonstandard Analysis.—New York and London: Marcel Dekker, 1994.—376 p. (Pure and Applied Mathematics, **184**.)

465. Sakai S. C^*-Algebras and W^*-Algebras.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.—256 p.

466. Salbany S. and Todorov T. Nonstandard analysis in topology: nonstandard and standard compactifications // J. Symbolic Logic.—2000.—V. 65, No. 4.—P. 1836–1840.

467. Saracino D. and Weispfenning V. On algebraic curves over commutative regular rings // Model Theory and Algebra (a Memorial Tribute to Abraham Robinson).—New York etc.: Springer-Verlag, 1969. (Lecture Notes in Math., **498**.)

468. Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—376 p.

469. Schröder J. Das Iterationsverfahren bei allgemeinierem Abshtandsbegriff // Math. Z.—1956.—Bd 66.—S. 111–116.

470. Schwarz H.-U. Banach Lattices and Operators.—Leipzig: Teubner, 1984.—208 p.

471. Schwinger J. Unitary operator bases. The special canonical group // Proc. Natl. Acad. Sci. USA.—1960.—V. 46.—P. 570–579, 1401–1405.

472. Sikorskiĭ M. R. Some applications of Boolean-valued models to study operators on polynormed spaces // Sov. Math.—1989.—V. 33, No. 2.—P. 106–110.

473. Smith K. Commutative regular rings and Boolean-valued fields // J. Symbolic Logic.—1984.—V. 49, No. 1.—P. 281–297.

474. Smithson R. Subcontinuity for multifunctions // Pacific J. Math.—1975.—V. 61, No. 4.—P. 283–288.

475. Solovay R. M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. of Math. (2).—1970.—V. 92, No. 2.—P. 1–56.

476. Solovay R. and Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math.—1972.—V. 94, No. 2.—P. 201–245.

477. Sourour A. R. Operators with absolutely bounded matrices // Math. Z. —1978.—V. 162, No. 2.—P. 183–187.

478. Sourour A. R. The isometries of $L^p(\Omega, X)$ // J. Funct. Anal.—1978.—V. 30, No. 2.—P. 276–285.

479. Sourour A. R. A note on integral operators // Acta Sci. Math.—1979.—V. 41, No. 43.—P. 375–379.

480. Sourour A. R. Pseudo-integral operators // Trans. Amer. Math. Soc.—1979.—V. 253.—P. 339–363.

481. Sourour A. R. Characterization and order properties of pseudo-integral operators // Pacific J. Math.—1982.—V. 99, No. 1.—P. 145–158.

482. Stern J. Some applications of model theory in Banach space theory // Ann. Math. Logic.—1976.—V. 9, No. 1.—P. 49–121.

483. Stern J. The problem of envelopes for Banach spaces // Israel J. Math.—1976.—V. 24, No. 1.—P. 1–15.

484. Stewart I. Frog and Mouse revisited // Math. Intelligencer.—1986.—V. 8, No. 4.—P. 78–82.

485. Stroyan K. D. Infinitesimal calculus in locally convex spaces. I // Trans. Amer. Math. Soc.—1978.—V. 240.—P. 363–384; Locally convex infinitesimal calculus. II // J. Funct. Anal.—1983.—V. 53, No. 1.—P. 1–15.

486. Stroyan K. D. and Bayod J. M. Foundations of Infinitesimal Stochastic Analysis.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1986.—478 p.

487. Stroyan K. D. and Luxemburg W. A. J. Introduction to the Theory of Infinitesimals.—New York etc.: Academic Press, 1976.—326 p.

488. Stummel F. Diskrete Konvergenz Linearer Operatoren. I // Math. Ann.—1970.—V. 190.—P. 45–92.

489. Stummel F. Diskrete Konvergenz Linearer Operatoren. II // Math. Z.—1971.—V. 120.—P. 231–264.

490. Sunder V. S. An Invitation to Von Neumann Algebras.—New York etc.: Springer-Verlag, 1987.—171 p.

491. Tacon D. G. Nonstandard extensions of transformations between Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1980.—V. 260, No. 1.—P. 147–158.

492. Takeuti G. Two Applications of Logic to Mathematics.—Tokyo and Princeton: Iwanami and Princeton Univ. Press, 1978.—137 p.

493. Takeuti G. A transfer principle in harmonic analysis // J. Symbolic Logic.—1979.—V. 44, No. 3.—P. 417–440.

494. Takeuti G. Boolean valued analysis // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977).—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—P. 714–731. (Lecture Notes in Math., **753**.)

495. Takeuti G. Quantum set theory // Current Issues in Quantum Logic (Erice, 1979).—New York and London: Plenum Press, 1981. —P. 303–322.

496. Takeuti G. C^*-algebras and Boolean valued analysis // Japan. J. Math. (N.S.).—1983.—V. 9, No. 2.—P. 207–246.

497. Takeuti G. Von Neumann algebras and Boolean valued analysis // J. Math. Soc. Japan.—1983.—V. 35, No. 1.—P. 1–21.

498. Takeuti G. and Titani S. Heyting-valued universes of intuitionistic set theory // Logic Symposia, Hakone 1979, 1980 (Hakone, 1979/1980).—Berlin and New York: Springer-Verlag, 1981.—P. 189–306. (Lecture Notes in Math., **891**.)

499. Takeuti G. and Titani S. Globalization of intuitionistic set theory // Ann. Pure Appl. Logic.—1987.—V. 33, No. 2.—P. 195–211.

500. Takeuti G. and Zaring W. M. Introduction to Axiomatic Set Theory.—New York etc.: Springer-Verlag, 1971.—348 p.

501. Takeuti G. and Zaring W. M. Axiomatic Set Theory.—New York: Springer-Verlag, 1973.—238 p.

502. Tall D. The calculus of Leibniz—an alternative modern approach // Math. Intelligencer.—1979/80.—V. 2, No. 1.—P. 54–60.

503. Tanaka K. and Yamazaki T. A nonstandard construction of Haar measure and weak Koenig's lemma// J. Symbolic Logic.—2000.—V. 65, No. 1.—P. 173-186.

504. Thibault L. Epidifferentielles de fonctions vectorielles // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.—1980.—V. 290, No. 2.—P. A87–A90.

505. Thibault L. Subdifferentials of nonconvex vector-valued mappings // J. Math. Anal. Appl.—1982.—V. 86, No. 2.

506. Topping D. M. Jordan algebras of self-adjoint operators // Mem. Amer. Math. Soc.—1965.—Vol. 53.—48 p.

507. Van de Berg I. Nonstandard Asymptotic Analysis.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1987.—187 p.

508. van der Hoeven J. On the computation of limsups//J. Pure Appl. Algebra.—1997.—V. 117–118.—P. 381–394.

509. Varadarajan V. Quantization of Semisimple Groups and some Applications.—Preprint.—1996.

510. Venkataraman K. Boolean valued almost periodic functions: existence of the mean // J. Indian Math. Soc. (N.S.).—1979.—V. 43, No. 1–4.—P. 275–283.

511. Venkataraman K. Boolean valued almost periodic functions on topological groups // J. Indian Math. Soc. (N.S.).—1984.—V. 48, No. 1–4.—P. 153–164.

512. Vopěnka P. General theory of $\bigtriangledown$-models // Comment. Math. Univ. Carolin.—1967.—V. 7, No. 1.—P. 147–170.

513. Vopěnka P. The limits of sheaves over extremally disconnected compact Hausdorff spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.—1967.—V. 15, No. 1.—P. 1–4.

514. Ward D. E. Convex subcones on the contingent cone in nonsmooth calculus and optimization // Trans. Amer. Math. Soc.—1987.—V. 302, No. 2.—P. 661–682.

515. Ward D. E. The quantification tangent cones // Canad. J. Math.—1988.—V. 40, No. 3.—P. 666–694.

516. Ward D. E. Corrigendum to 'Convex subcones of the contingent cone in nonsmooth calculus and optimization' // Trans. Amer.

Math. Soc.—1989.—V. 311, No. 1.—P. 429–431.

517. Wattenberg F. Nonstandard measure theory: Avoiding pathological sets // Trans. Amer. Math. Soc.—1979.—V. 250.—P. 357–368.

518. Weil A. Euler // Amer. Math. Monthly.—1984.—V. 91, No. 9.—P. 537–542.

519. Weis L. Decompositions of positive operators and some of their applications// Functional Analysis: Survey and Recent Results. Vol. 3: Proc. 3rd Conf., Paderborn, 24–29 May, 1983.—Amsterdam.—1984.

520. Weis L. On the representation of order continuous operators by random measures// Trans. Amer. Math. Soc.—1984.—V. 285, No. 2.—P. 535–563.

521. Weis L. The range of an operator in $C(X)$ and its representing stochastic kernel// Arch. Math.—1986,—V. 46.—P. 171–178.

522. Weispfenning V. Model-completeness and elimination of quantifiers for subdirect products of structures // J. of Algebra.—1975.—V. 36, No. 2.—P. 252–277.

523. Westfall R. Never at Rest. A Bibliography of Isaak Newton.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982.—908 p.

524. Wolff M. P. H. An introduction to nonstandard functional analysis // L. O. Arkeryd, N. J. Cutland, C. Ward Henson (eds): Nonstandard Analysis, Theory and Applications.—Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.—P. 121–151.

525. Wolff M. P. H. On the approximation of operators and the convergence of the spectra of approximants // Operator Theory: Advances and Applications.—1998.—V. 103.—P. 279–283.

526. Wright J. D. M. Vector lattice measures on locally compact spaces // Math. Z.—1971.—V. 120, No. 3.—P. 193–203.

527. Yamaguchi J. Boolean $[0,1]$-valued continuous operators // Internat. J. Comput. Math.—1998.—V. 68, No. 1–2.—P. 71–79.

528. Yessenin-Volpin A. S. The ultra intuitionistic criticism and the traditional program for foundations of mathematics // Intuitionism and Proof Theory.—Amsterdam and London: North-Holland, 1970.—P. 3–45.

529. Yood B. Banach Algebras. An Introduction.—Ottawa: Carleton Univ., 1988.—174 p.

530. Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 2.— Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—xi+720 p.

531. Zaanen A. C. Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces.— Berlin etc.: Springer-Verlag, 1997.—312 p.

532. Zhang Jin-wen. A unified treatment of fuzzy set theory and Boolean valued set theory fuzzy set structures and normal fuzzy set structures // J. Math. Anal. Appl.—1980.—V. 76, No. 1.— P. 297–301.

533. Zivaljevic R. Infinitesimals, microsimplexes and elementary homology theory // Amer. Math. Monthly.—1986.—V. 93, No. 7.— P. 540–544.

Указатель обозначений

Предметный указатель

Гордон Евгений Израилевич
Кусраев Анатолий Георгиевич
Кутателадзе Семён Самсонович

Инфинитезимальный анализ
Часть 2
Серия «Нестандартные методы анализа»

Ответственный редактор
академик *Ю. Г. Решетняк*

Редактор серии
С. С. Кутателадзе

Редактор издательства *И. И. Кожанова*

Издание подготовлено с использованием макропакета $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX,
the American Mathematical Society'sTEX macro system.

Подписано в печать 07.06.01. Формат $60 \times 84\,{}^1\!/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 14,8. Уч.-изд. л. 14,8. Тираж 200 экз. Заказ № 37.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики.
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

Лицензия ПЛД № 57–43 от 22 апреля 1998 г.
Отпечатано на полиграфическом участке ИМ СО РАН.
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.