Глава 1

Нестандартные методы и пространства Канторовича

А. Г. Кусраев,
С. С. Кутателадзе

Общепризнанным фактом является особая роль тридцатых годов двадцатого столетия в развитии современной науки. В эти годы проявилась наметившаяся на рубеже веков тенденция к коренной перестройке математики, приведшая к созданию ряда новых математических дисциплин и, прежде всего, оформлению функционального анализа. В последнее время стало осознаваться и специфическое место семидесятых годов, в которые произошли существенные перемены как в объеме, так и в существе математических теорий. В указанный период отмечается качественный скачок в уровне понимания взаимосвязей и взаимозависимостей, связанный как с выработкой новых синтетических подходов, так и с решением глубоких проблем, долго неподдававшихся решению.

Упомянутые процессы коснулись и теории упорядоченных векторных пространств — одного из актуальных и привлекательных разделов функционального анализа. Это направление, возникшее на рубеже тридцатых годов под влиянием работ Ф. Рисса, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др., переживает сейчас известный период обновления, связанный с освоением математических идей, относящихся к нестандартным моделям теории множеств.

Булевозначные интерпретации, приобретшие значительную популярность в связи с окончательным решением проблемы континуума, данным П. Дж. Коэном, открыли новые возможности в реализации эвристического принципа переноса Л. В. Канторовича в теории K-пространств.

Возрождение инфинитезимальных методов, легитимизированное нестандартным анализом А. Робинсона, обосновало логическую мечту Г. В. Лейбница и открыло перспективы общей монадологии векторных решеток. Новые нестандартные методы в теории K-пространств находятся в процессе становления.

Расширяя известные строки Н. С. Гумилёва [17, с. 309], можно сказать, что в настоящее время K-пространства «...сбрасывают кожи, чтоб душа старела и росла...». Многие возникающие лакуны еще не заполнены и не только в связи с отсутствием должного понимания, но и просто из-за недолгого периода разработки соответствующих проблем. В то же время ряд принципиальных вопросов все еще ждет своего осмысления и привлечения новых идей.

В этой главе представлены необходимые сведения как по адаптации, так и по применению аппарата нестандартных моделей теории множеств к изучению K-пространств и классов действующих в них линейных операторов.

В параграфах 1.1–1.4 собраны необходимые для дальнейшего сведения о формальных теориях множеств, используемых в современных работах по функциональному анализу.

Прежде всего речь идет о классической аксиоматике Цермело — Френкеля. Помимо этого, освещены булевозначные модели, восходящие к работам Д. Скотта, Р. Соловея и П. Вопенки. Кроме того, представлены теория внутренних множеств Э. Нельсона и один из наиболее сильных и удачных вариантов теории внешних множеств, предложенный Т. Каваи. Эти теоретико-множественные формализмы широко применяются в современном инфинитезимальном анализе. Наконец, эскизно излагается теория относительно внутренних множеств Е. И. Гордона и И. Пэрера.

Параграфы 1.5–1.8 посвящены булевозначному анализу векторных решеток. Как известно, принципиально новая — нестандартная — возможность, открытая в теории упорядоченных пространств, состоит в формализации *эвристического принципа Л. В. Канторовича*, состоящего в том, что элементы произвольного K-пространства — это аналоги вещественных чисел. Булевозначный анализ строго показывает, что точки K-пространства служат изображениями чисел в подходящим образом выбранной модели теории множеств. Излагаемый нами формализм относится сейчас к числу фундаментальных и обязательных концепций теории упорядоченных пространств.

Параграфы 1.9–1.12 посвящены инфинитезимальным конструкциям. Апология инфинитезимали, данная А. Робинсоном, немедленно открыла новые возможности в теории банаховых пространств. Центральной конструкцией здесь стало понятие *нестандартной оболочки* пространства, т. е. результата факторизации внешнего подпространства элементов с конечной нормой по монаде пространства (= набору элементов с бесконечно малой нормой). Об адаптации нестандартных оболочек к теории решеток идет речь в параграфе 1.9. Другая важная конструкция нестандартного анализа — мера Лёба — рассмотрена в параграфе 1.10.

Параграфы 1.11 и 1.12 посвящены мало разработанной теме о комбинировании булевозначных и инфинитезимальных методов.

Теоретически здесь мыслимы два подхода. Первый может состоять в изучении булевозначной модели, реализованной во внутреннем мире теории внешних множеств. Этот подход намечен в параграфе 1.11. Другой подход состоит в изучении подходящего фрагмента нестандартной теории множеств (например, в форме ультрапроизведения или ультрапредела), размещенного внутри соответствующего булевозначного универсума. Такой подход изложен в параграфе 1.12.

Важно подчеркнуть, что при внешней схожести рассматриваемые формализмы приводят к принципиально различным конструкциям в теории K-пространств. Возникающие особенности аппарата иллюстрируются анализом «циклических» топологических понятий, имеющих важное значение в прикладном булевозначном анализе.

Параграфы 1.13–1.16 посвящены нестандартному анализу в теории операторов. Прежде всего, мы обращаемся к положительным линейным операторам, относящимся к центральным объектам теории упорядоченных векторных пространств. Принципиальная возможность, доставляемая нестандартными методами, состоит в том, что возникающие формализмы позволяют существенно упростить анализ операторов и векторных мер, сводя дело к функционалам и скалярным мерам, а иногда даже и к обыкновенным числам.

В параграфах 1.13–1.16 общие приемы нестандартного анализа операторов демонстрируются в связи с проблемами продолжения и разложения операторов, с анализом устройства гомоморфизмов и операторов Магарам. Мы также выделяем новый класс циклически компактных операторов. Известное место отведено проблеме порождения осколков положительного оператора. Дело в том, что осуществить их полное описание удается последовательным использованием нестандартного анализа как в булевозначном, так и в инфинитезимальном вариантах. Завершает текущую главу булевозначный анализ одного из важнейших фактов классической теории уравнений — альтернативы Фредгольма. Мы приводим ее интерпретацию для нового класса уравнений с циклически компактными ядрами.

1.1. Теория множеств Цермело — Френкеля

В качестве аксиоматического обоснования математики в настоящее время широко используется теория множеств Цермело — Френкеля, сокращенно ZF. Напомним вкратце некоторые ее понятия и введем необходимые обозначения. Подробности можно найти в [18, 25].

1.1.1. Язык теории множеств ZF использует следующие символы (совокупность которых называют *алфавитом* ZF): символы переменных $x, y, z, \dots$; скобки (,); пропозициональные связки (= знаки алгебры высказываний) $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\neg$; кванторы $\forall$, $\exists$; знак равенства $=$ и символ специального двуместного предиката $\in$. Область изменения переменных ZF мыслят как мир — универсум множеств. Вместо $\in (x, y)$ пишут $x \in y$ и говорят, что «x — элемент y».

1.1.2. Формулы теории множеств ZF определяются обычной рекурсивной процедурой. Иначе говоря, *формулы* ZF — это конечные тексты, получающиеся из атомарных формул вида $x = y$ и $x \in y$, где x, y — переменные ZF, с помощью разумной расстановки скобок, кванторов и пропозициональных связок. При этом теория множеств ZF — это наименьшее множество формул, содержащее аксиомы ZF и замкнутое относительно правил вывода (см. ниже 1.1.4).

1.1.3. При работе с ZF для удобства привлекаются широко распространенные в математике сокращения. Вот некоторые из них:

$$(\forall x \in y)\, \varphi(x) := (\forall x)\, (x \in y \to \varphi(x));$$
$$(\exists x \in y)\, \varphi(x) := (\exists x)\, (x \in y \wedge \varphi(x));$$
$$\bigcup x := \{z : \ (\exists y \in x)\, z \in y\};$$
$$\bigcap x := \{z : \ (\forall y \in x)\, z \in y\};$$
$$x \subset y := (\forall z)\, (z \in x \to z \in y);$$
$$\mathscr{P}(x) := \text{«класс всех подмножеств } x\text{»} := \{z : z \subset x\};$$
$$\mathbf{V} := \text{«класс всех множеств»} := \{x : \ x = x\};$$
$$\text{«класс } A \text{ является множеством»} :=$$
$$:= A \in \mathbf{V} := (\exists x)\, (\forall y)\, (y \in A \leftrightarrow y \in x);$$
$$f : X \to Y := \text{«} f \text{ есть функция из } X \text{ в } Y\text{»};$$
$$\mathrm{dom}(f) := \text{«область определения } f\text{»};$$
$$\mathrm{im}(f) := \mathrm{rng}(f) := \text{«область значения } f\text{»}.$$

1.1.4. Теория множеств ZF включает обычные аксиомы и правила вывода теорий первого порядка с равенством, фиксирующие стандартные способы классических умозаключений (силлогизмы, исключенное третье, modus ponens и т. п.). Помимо этого, приняты шесть специальных или собственных аксиом (записанные с общепринятыми сокращениями, см. 1.1.3):

(1) Аксиома экстенсиональности:
$(\forall x)\,(\forall y)\,((x \subset y \wedge y \subset x) \leftrightarrow x = y)$.

(2) Аксиома объединения:
$(\forall x)\,(\bigcup x \in \mathbf{V})$.

(3) Аксиома множества подмножеств:
$(\forall x)\,\big(\mathscr{P}(x) \in \mathbf{V}\big)$.

(4) Схема аксиом подстановки:
$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)(\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \to y = z) \to$
$\to (\forall a)\,(\{v : (\exists u \in a)\,\varphi(u,v)\} \in \mathbf{V})$.

(5) Аксиома фундирования:
$(\forall x)\,(x \neq \varnothing \;\to\; (\exists y \in x)\,(y \cap x = \varnothing))$.

(6) Аксиома бесконечности:
$(\exists \omega)\,((\varnothing \in \omega) \wedge (\forall x \in \omega)\,\big(x \cup \{x\} \in \omega)\big)$.

Теория множеств ZFC (Цермело — Френкеля с аксиомой выбора) получается из ZF добавлением еще следующей аксиомы:

(7) Аксиома выбора:
$(\forall F)\,(\forall x)\,(\forall y)\,\big((x \neq \varnothing \wedge F : x \to \mathscr{P}(y)\big) \to$
$\to \big((\exists f)\,(f : x \to y) \wedge (\forall z \in x)\,f(z) \in F(z)\big)$.

1.1.5. *Теория множеств Цермело* Z получается из ZFC путем удаления аксиомы фундирования 1.1.4 (5) и замены схемы аксиом подстановки 1.1.4 (4) следующими ее следствиями:

(1) Схема аксиом выделения:
$(\forall x)\,\{y \in x :\ \psi(y)\} \in \mathbf{V}$,
где ψ — формула ZF;

(2) Аксиома пары:
$(\forall x)\,(\forall y)\{x, y\} \in \mathbf{V}$.

Тем самым специальные аксиомы теории Z — аксиомы 1.1.4 (1–3, 6, 7), 1.1.5 (1, 2).

Итак, теории Z, ZF и ZFC имеют один и тот же язык, одни и те же логические аксиомы и отличаются лишь набором специальных аксиом.

1.1.6. Примечания.

(1) Теория множеств Цермело — Френкеля несколько ограничивает математика-«филистера» аксиомой фундирования, по сути, предложенной Дж. фон Нейманом в 1925 г. В то же время именно она обеспечивает фундамент общепринятого теоретико-множественного взгляда на мир множеств как на «универсум фон Неймана», иерархически вырастающий из пустого множества — математического проатома.

(2) Аксиоматика Цермело — Френкеля не закрыла пути поиска альтернативных программ теоретико-множественного обоснования. По этому поводу см., в частности, [6].

1.2. Булевозначные модели теории множеств

Здесь мы эскизно изложим способ построения булевозначных моделей теории множеств. Полное изложение имеется в [38, 63, 115].

1.2.1. Пусть B — фиксированная полная булева алгебра. Булевозначной интерпретацией n-местного предиката P на классе X называют отображение $R : X^n \to B$. Предположим, что $\mathscr{L}$ — язык первого порядка с предикатами $P_0, P_1, \dots, P_n$, а $R_0, R_1, \dots, R_n$ — фиксированные булевозначные интерпретации этих предикатов на класс X. Для формулы $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ языка $\mathscr{L}$ и $x_1, \dots, x_m \in X$ обычной рекурсией по длине φ определяется оценка (истинности) $[\![\, \varphi(x_1, \dots, x_m) \,]\!] \in B$. Для атомных формул полагают

$$[\![\, P_k(x_1, \dots, x_m) \,]\!] := R_k(x_1, \dots, x_m).$$

На шагах индукции применяют правила:

$$\begin{gathered}
[\![\, \varphi \vee \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \vee [\![\, \psi \,]\!], \\
[\![\, \varphi \wedge \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \wedge [\![\, \psi \,]\!], \\
[\![\, \varphi \to \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \Rightarrow [\![\, \psi \,]\!], \\
[\![\, \neg\varphi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!]^*, \\
[\![\, (\forall x)\, \varphi \,]\!] := \bigwedge_{x \in X} [\![\, \varphi(x) \,]\!], \\
[\![\, (\exists x)\, \varphi \,]\!] := \bigvee_{x \in X} [\![\, \varphi(x) \,]\!],
\end{gathered}$$

где в правых частях равенств знаки $\vee, \wedge, \Rightarrow, (\,\cdot\,)^*, \bigwedge, \bigvee$ обозначают булевы операции в B, причем $a \Rightarrow b := a^* \vee b$.

1.2.2. Говорят, что утверждение $\varphi(x_1,\dots,x_m)$, где $x_1,\dots,x_m \in X$, а $\varphi(u_1,\dots,u_m)$ — формула, истинно (верно, справедливо и т. п.) в алгебраической системе $\mathbb{X} := (X, R_0, \dots, R_n)$, и используют запись $\mathbb{X} \models \varphi(x_1,\dots,x_m)$, если $[\![\, \varphi(x_1,\dots,x_m) \,]\!] = \mathbf{1}$. Все логически истинные утверждения верны в $\mathbb{X}$. Если предикат P_0 есть равенство, то требуют, чтобы в B-системе $\mathbb{X} := (X, =, R_1, \dots, R_n)$ выполнялись аксиомы равенства. При выполнении этого требования в B-системе $\mathbb{X}$ будут справедливы все логически истинные предложения логики первого порядка с равенством, выразимые в языке $\mathscr{L} := \{=, P_1, \dots, P_n\}$.

1.2.3. Рассмотрим теперь булевозначную интерпретацию языка теории множеств Цермело — Френкеля с аксиомой выбора на классе X. Напомним, что язык этой теории $\mathscr{L} := \{=, \in\}$ есть язык первого порядка с двумя двуместными предикатами $=$ и $\in$. Интерпретации этих предикатов обозначим через $[\![\, \cdot = \cdot \,]\!]$ и $[\![\, \cdot \in \cdot \,]\!]$, соответственно. Таким образом, $[\![\, \cdot = \cdot \,]\!], [\![\, \cdot \in \cdot \,]\!] : X \times X \to B$, причем

$$[\![\, = (x,y) \,]\!] = [\![\, x = y \,]\!], \quad [\![\, \in (x,y) \,]\!] = [\![\, x \in y \,]\!] \quad (x, y \in X).$$

Наша ближайшая цель — охарактеризовать B-системы $\mathbb{X} := (X, [\![\, \cdot = \cdot \,]\!], [\![\, \cdot \in \cdot \,]\!])$, являющиеся моделями теории ZFC, т. е. такие, что $\mathbb{X} \models \mathrm{ZFC}$. Последнее равносильно тому, что в $\mathbb{X}$ выполняются все аксиомы ZFC. Так, например, согласно правилам 1.1.1 справедливость аксиомы экстенсиональности 1.1.4 (1) означает, что для любых $x, y \in X$ верно

$$[\![\, x = y \,]\!] = \bigwedge_{z \in X} ([\![\, z \in x \,]\!] \Leftrightarrow [\![\, z \in y \,]\!]),$$

где $a \Leftrightarrow b := (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ для $a, b \in B$.

1.2.4. B-систему $\mathbb{X}$ называют отделимой, если для любых элементов $x, y \in X$ соотношение $[\![\, x = y \,]\!] = \mathbf{1}$ влечет $x = y$. Произвольную B-систему $\mathbb{X}$ можно преобразовать в отделимую путем факторизации по отношению эквивалентности $\sim := \{(x,y) \in X^2 : [\![\, x = y \,]\!] = \mathbf{1}\}$ (фактор-класс вводится с помощью хорошо известного приема Фреге — Рассела — Скотта, см. [38]).

Говорят, что B-система $\mathbb{X}$ изоморфна $\mathbb{X}' := (X', [\![\, \cdot = \cdot \,]\!]', [\![\, \cdot \in \cdot \,]\!]')$, если существует биекция $\beta : X \to X'$, для которой $[\![\, x = y \,]\!] = [\![\, \beta x = \beta y \,]\!]$ и $[\![\, x \in y \,]\!] = [\![\, \beta x \in \beta y \,]\!]$ при всех $x, y \in X$.

1.2.5. *Теорема.* *Существует единственная с точностью до изоморфизма B-система $\mathbb{X}$, удовлетворяющая следующим требованиям:*

(1) *$\mathbb{X}$ — отделимая B-система (см. 1.1.4);*

(2) *аксиомы равенства истинны в $\mathbb{X}$;*

(3) *аксиомы экстенсиональности 1.1.4 (1) и фундирования 1.1.4 (5) истинны в $\mathbb{X}$ (см. 1.1.3);*

(4) *если функция $f : \mathrm{dom}(f) \to B$ такова, что $\mathrm{dom}(f) \in \mathbf{V}$ и $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{X}$, то существует $x \in \mathbb{X}$ такой, что*

$$[\![\, y \in x \,]\!] = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(f)} f(z) \wedge [\![\, z = y \,]\!] \quad (y \in \mathbb{X});$$

(5) *если $x \in \mathbb{X}$, то существует функция $f : \mathrm{dom}(f) \to B$ такая, что $\mathrm{dom}(f) \in \mathbf{V}$, $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{X}$, и выполнено равенство из (4) для каждого $y \in \mathbb{X}$.*

1.2.6. B-систему, удовлетворяющую требованиям 1.1.5 (1–5), называют *булевозначной моделью* теории множеств и обозначают символом $\mathbf{V}^{(B)} := (\mathbf{V}^{(B)}, [\![\, \cdot = \cdot \,]\!], [\![\, \cdot \in \cdot \,]\!])$. Класс $\mathbf{V}^{(B)}$ именуют также *булевозначным универсумом.* Основные свойства $\mathbf{V}^{(B)}$ выражены в следующих принципах.

(1) ***Принцип переноса.*** *Любая аксиома, а значит, и любая теорема теории множеств* ZFC *истинны в $\mathbf{V}^{(B)}$; символически $\mathbf{V}^{(B)} \models \mathrm{ZFC}$.*

(2) ***Принцип перемешивания.*** *Если $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в B, $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов $\mathbf{V}^{(B)}$, то существует единственный элемент $x \in \mathbf{V}^{(B)}$ такой, что $b_\xi \leq [\![\, x = x_\xi \,]\!]$ для всех $\xi \in \Xi$.*

Элемент x называют *перемешиванием семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и обозначают $\mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}\, b_\xi x_\xi$.

(3) ***Принцип максимума.*** *Для любой формулы $\varphi(u)$ теории* ZFC *(возможно, с константами из $\mathbf{V}^{(B)}$) существует элемент $x_0 \in \mathbf{V}^{(B)}$ такой, что*

$$[\![\, (\exists u)\varphi(u) \,]\!] = [\![\, \varphi(x_0) \,]\!].$$

Отсюда, в частности, следует, что если $[\![\, (\exists! x)\, \varphi(x) \,]\!] = \mathbf{1}$, то существует, и притом единственный, элемент x_0 из $\mathbf{V}^{(B)}$, для которого выполняется $[\![\, \varphi(x_0) \,]\!] = \mathbf{1}$.

1.2.7. *Существует единственное отображение $x \mapsto x^\wedge$ из $\mathbf{V}$ в $\mathbf{V}^{(B)}$, удовлетворяющее требованиям:*

(1) $x = y \leftrightarrow [\![x^\wedge = y^\wedge]\!] = \mathbf{1}$;
$x \in y \leftrightarrow [\![x^\wedge \in y^\wedge]\!] = \mathbf{1} \quad (x, y \in \mathbf{V})$,

(2) $[\![z \in y^\wedge]\!] = \bigvee_{x \in y} [\![x^\wedge = z]\!] \quad (z \in \mathbf{V}^{(B)},\ y \in \mathbf{V})$.

Это отображение называют *каноническим вложением* универсума всех множеств в булевозначный универсум.

(3) ***Ограниченный принцип переноса.*** *Пусть формула $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ ограничена, т. е. в ее построении все кванторы имеют вид $(\forall u)\,(u \in v \to \dots)$ и $(\exists u)\,(u \in v \wedge \dots)$, или же в сокращенной записи $(\forall u \in v)$ и $(\exists u \in v)$. Тогда для произвольных $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{V}$ выполняется*

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \mathbf{V}^{(B)} \models \varphi(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge).$$

1.2.8. Для элемента $X \in \mathbf{V}^{(B)}$ его *спуск* $X{\downarrow}$ задается правилом $X{\downarrow} := \{x \in \mathbf{V}^{(B)} : [\![x \in X]\!] = \mathbf{1}\}$. Множество $X{\downarrow}$ является *циклическим*, т. е. выдерживает всевозможные перемешивания своих элементов.

1.2.9. *Пусть F — соответствие из X в Y внутри $\mathbf{V}^{(B)}$, т. е. $X, Y, F \in \mathbf{V}^{(B)}$ и $[\![F \subset X \times Y]\!] = [\![F \neq \varnothing]\!] = \mathbf{1}$. Существует, и притом единственное, соответствие $F{\downarrow}$ из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$ такое, что для любого множества $A \subset X{\downarrow}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ будет $F(A){\downarrow} = F{\downarrow}(A{\downarrow})$. При этом $[\![F$ — отображение из X в $Y]\!] = \mathbf{1}$ в том и только в том случае, если $F{\downarrow}$ — отображение из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$.*

В частности, отображение $f : Z^\wedge \to Y$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$, где $Z \in \mathbf{V}$, определяет единственную функцию $f{\downarrow} : Z \to Y{\downarrow}$, удовлетворяющую условию $f{\downarrow}(z) = f(z^\wedge)$ для всех $z \in Z$.

1.2.10. Пусть $X \in \mathscr{P}(\mathbf{V}^{(B)})$. Определим функцию $f : \operatorname{dom}(f) \to B$ формулами: $\operatorname{dom}(f) = X$ и $\operatorname{im}(f) = \{\mathbf{1}\}$. Согласно 1.1.5 (4) существует элемент $X{\uparrow} \in \mathbf{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![y \in X]\!] = \bigvee_{x \in X} [\![x = y]\!] \quad (y \in \mathbf{V}^{(B)}).$$

Элемент $X{\uparrow}$ (единственный в силу аксиомы экстенсиональности) называют *подъемом* X. При этом справедливы формулы:

(1) $Y{\downarrow}{\uparrow} = Y \quad (Y \in \mathbf{V}^{(B)})$,

(2) $X{\uparrow}{\downarrow} = \mathrm{mix}(X) \quad (X \in \mathscr{P}(\mathbf{V}^{(B)}))$,

где $\mathrm{mix}(X)$ — множество всех перемешиваний вида $\mathrm{mix}\, b_\xi x_\xi$, $(x_\xi) \subset X$, а (b_ξ) — разбиение единицы в B.

1.2.11. *Пусть $X, Y \in \mathscr{P}(\mathbf{V}^{(B)})$ и F — соответствие из X в Y. Равносильны утверждения:*

(1) *существует, и притом единственное, соответствие $F{\uparrow}$ из $X{\uparrow}$ в $Y{\uparrow}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ такое, что имеет место равенство $\mathrm{dom}(F{\uparrow}) = \mathrm{dom}(F){\uparrow}$ и для каждого подмножества A множества $\mathrm{dom}(F)$ выполнено $F{\uparrow}(A{\uparrow}) = F(A){\uparrow}$;*

(2) *соответствие F экстенсионально, т. е.*

$$y_1 \in F(x_1) \to [\![x_1 = x_2]\!] \leq \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![y_1 = y_2]\!].$$

Соответствие F будет отображением из X в Y в том и только в том случае, если $[\![F{\uparrow} : X{\uparrow} \to Y{\uparrow}]\!] = \mathbf{1}$.

В частности, отображение $f : Z \to Y{\downarrow}$ порождает функцию $f{\uparrow} : Z^\wedge \to Y$ такую, что $f{\uparrow}(x^\wedge) = f(x)$ для всех $x \in Z$.

1.2.12. Предположим, что на непустом множестве X задана B-*структура*, т. е. определено отображение $d : X \times X \to B$, удовлетворяющее «аксиомам метрики»:

(1) $d(x, y) = \mathbf{0} \leftrightarrow x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) \vee d(z, y)$.

Тогда существуют элемент $\mathscr{X} \in \mathbf{V}^{(B)}$ и инъекция $\iota : X \to X' := \mathscr{X}{\downarrow}$ такие, что $d(x, y) = [\![\iota(x) \neq \iota(y)]\!]$ и любой элемент $x' \in X'$ имеет представление $x' = \mathrm{mix}\, b_\xi \iota x_\xi$, где $(x_\xi) \subset X$, а (b_ξ) — разбиение единицы в B. Этот факт позволяет рассматривать множества с B-структурой как подмножества $\mathbf{V}^{(B)}$ и оперировать с ними с помощью описанных выше правил.

1.2.13. Примечания.

(1) Г. Такеути назвал булевозначным анализом раздел функционального анализа, который использует одноименные модели теории множеств. В последнее время этот термин трактуют расширительно,

включая в него методы, основанные на одновременном использовании двух различных булевозначных моделей теории множеств.

Стоит подчеркнуть, что создание булевозначных моделей не было связано с теорией векторных решеток. Необходимые для этого языковые и технические средства окончательно сформировались в рамках математической логики уже к 1960 г. Однако все еще не было той генеральной идеи, которая впоследствии привела к бурному прогрессу в теории моделей.

Такая идея пришла с открытием П. Дж. Коэна, установившего в 1963 г. абсолютную неразрешимость (в точном математическом смысле) классической континуум-проблемы. Именно в связи с осмыслением метода форсинга Коэна возникли булевозначные модели теории множеств, создание которых принято связывать с именами П. Вопенки, Д. Скотта, Р. Соловея (см. [18, 25, 38, 63, 115]).

(2) Метод форсинга естественно делится на две части — общую и специальную.

Общая часть — аппарат булевозначных моделей теории множеств. Здесь полная булева алгебра B совершенно произвольна.

Специальная часть состоит в построении специфической булевой алгебры B, обеспечивающей нужные (чаще патологические, экзотические) свойства объектов (например, K-пространства), получаемых из B. Обе части имеют самостоятельный интерес, но наиболее впечатляющие результаты дает их сочетание. В большинстве исследований по булевозначному анализу используется лишь общая часть метода форсинга. Можно ожидать, что дальнейший прогресс в булевозначном анализе будет связан с применением метода форсинга в полном объеме.

(3) Подробное изложение материала этого раздела имеется в [29, 36, 38, 63, 115], см. также [18, 56]. Приемы, изложенные в 1.2.8–1.2.11, в разных вариантах широко используются в исследованиях по теории булевозначных моделей. В [28, 48] им придана форма спусков и подъемов, более приспособленная к задачам анализа. Погружение 1.2.12 множеств с булевой структурой в булевозначный универсум осуществлено в [23]. В основе такого погружения лежит метод Соловея — Тенненбаума, предложенный ими ранее для погружения полных булевых алгебр [72].

1.3. Теории внутренних и внешних множеств

Удобное обоснование инфинитезимальных методов анализа дает теория внутренних множеств, предложенная Э. Нельсоном в конце семидесятых годов, теория IST. Формализм этой теории мгновенно приобрел широкую популярность. Причина этого в том, что подход Э. Нельсона развеял бытовавшие до него представления об особом «идеальном» характере актуальных бесконечно больших и малых величинах.

1.3.1. Алфавит формальной теории IST получается добавлением к алфавиту теории ZFC одного-единственного нового символа — символа одноместного предиката St, выражающего свойство быть *стандартным множеством.* Иначе говоря, в число допустимых фрагментов текстов IST мы включаем записи вида $\mathrm{St}(x)$ или, более развернуто, «x стандартно», или, наконец, «x — стандартное множество». Итак, содержательной областью изменения переменных IST служит мир Цермело — Френкеля — универсум фон Неймана, в котором теперь выделены стандартные и нестандартные множества.

Формулы IST определяются обычной процедурой. При этом к числу атомарных формул добавляются тексты: $\mathrm{St}(x)$, где x — переменная. Каждая формула ZFC является формулой IST, обратное утверждение очевидно не верно. Для различения формул используют следующую терминологию: формулы ZFC называют *внутренними*, формулы IST, не являющиеся формулами ZFC, называют *внешними.* Таким образом, текст «x стандартно» — это внешняя формула теории IST.

Классификация формул IST приводит к вычленению внешних и внутренних классов. Если φ — внешняя формула IST, то текст $\varphi(y)$ описывают словами: «y — элемент *внешнего класса* $\{x : \varphi(x)\}$». Термин *внутренний класс* используется в том же смысле, что термин *класс* в теории Цермело — Френкеля. В случаях, когда это не может привести к недоразумениям, внешние и внутренние классы называют просто классами. Внешние классы, составленные из элементов некоторого внутреннего множества, мы называем *внешними множествами*, или, более полно, внешними подмножествами данного множества.

Полезно вновь обратить внимание на то, что внутренний класс, составленный из элементов внутреннего множества, — это снова внут-

реннее множество. Помимо сокращений, принятых в ZFC, в теории внутренних множеств используются дополнительные соглашения.

Вот некоторые из них:

$$
\begin{gathered}
x \in \mathbf{V}^{\mathrm{st}} := x \text{ стандартно} := (\exists\, y)\ \mathrm{St}(y) \wedge y = x;\\
(\forall^{\mathrm{st}} x)\, \varphi := (\forall\, x)\, (x \text{ стандартно} \to \varphi);\\
(\exists^{\mathrm{st}} x)\, \varphi := (\exists\, x)\, (x \text{ стандартно} \wedge \varphi);\\
(\forall^{\mathrm{st\,fin}} x)\, \varphi := (\forall^{\mathrm{st}} x)\, (x \text{ конечно} \to \varphi);\\
(\exists^{\mathrm{st\,fin}} x)\, \varphi := (\exists^{\mathrm{st}} x)\, (x \text{ конечно} \wedge \varphi);\\
{}^{\circ}x := \{y \in x : y \text{ стандартно}\}.
\end{gathered}
$$

Внешнее множество ${}^{\circ}x$ часто называют *стандартным ядром* x.

1.3.2. Аксиомы IST получаются добавлением к перечню аксиом ZFC следующих трех новых схем, носящих, как указывалось ранее, название принципов нестандартной теории множеств:

(1) Принцип переноса:
$(\forall^{\mathrm{st}} x_1)\, (\forall^{\mathrm{st}} x_2) \ldots (\forall^{\mathrm{st}} x_n)\, ((\forall^{\mathrm{st}} x)\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to$
$\to (\forall\, x)\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n))$
для каждой внутренней формулы φ;

(2) Принцип идеализации:
$(\forall\, x_1)\, (\forall\, x_2)\ \ldots (\forall\, x_n)$
$((\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)\, (\exists\, x)\, (\forall\, y \in z)\, \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists\, x)\, (\forall^{\mathrm{st}} y)\, \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)),$
где φ — произвольная внутренняя формула;

(3) Принцип стандартизации:
$(\forall\, x_1) \ldots (\forall\, x_n)$
$\big((\forall^{\mathrm{st}} x)\, (\exists^{\mathrm{st}} y)\, (\forall^{\mathrm{st}} z) z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, x_1, \ldots, x_n)\big)$
для всякой формулы φ.

1.3.3. *Теорема Поуэлла.* *Теория* IST *является консервативным расширением теории* ZFC.

Приведенная теорема означает, что внутренние теоремы теории внутренних множеств IST являются теоремами теории Цермело — Френкеля. Иначе говоря, при доказательстве «стандартных» теорем о множествах из универсума фон Неймана мы вправе пользоваться формализмом IST с той же степенью надежности, которую мы имеем при работе в рамках теории ZFC.

1.3.4. Выразительные возможности, которыми обладает аксиоматическая теория множеств IST, весьма значительны, но имеется все же существенное ограничение, связанное с отсутствием в ней переменных для внешних множеств. Этот недостаток не позволяет, например, работать с такими важными инфинитезимальными конструкциями, как нестандартная оболочка и мера Лёба.

В настоящее время имеется несколько вариантов формального обоснования инфинитезимальных методов в рамках аксиоматических теорий внешних множеств, см. [62, 68, 76, 86, 87]. С точки зрения приложений все эти формализмы практически равнозначны. Здесь мы приведем один из наиболее сильных вариантов теории внешних множеств NST, предложенный Т. Каваи [86, 87].

Алфавит теории NST получается обогащением алфавита ZFC двумя постоянными $\mathbf{V}^S$ и $\mathbf{V}^I$. Содержательно $\mathbf{V}^S$ мыслят как *универсум стандартных множеств*, а $\mathbf{V}^I$ — как *мир внутренних множеств* (в любой содержательной интерпретации).

При этом стоит подчеркнуть, что $\mathbf{V}^S$ и $\mathbf{V}^I$ рассматриваются как конкретные внешние множества, т. е. $\mathbf{V}^S \in \mathbf{V}^E$ и $\mathbf{V}^I \in \mathbf{V}^E$, где $\mathbf{V}^E := \{x : x = x\}$ — *класс* всех *внешних множеств*. Иногда вместо $x \in \mathbf{V}^S$ пишут $\mathrm{St}(x)$ или «x — стандартное множество». Аналогичным образом вводят предикат $\mathrm{Int}(\,\cdot\,)$, выражающий свойство быть внутренним множеством.

Обычным способом определяются формулы. При этом для формулы φ теории ZFC символом φ^S (соответственно φ^I) обозначается *релятивизация* φ на $\mathbf{V}^S$ (соответственно на $\mathbf{V}^I$), т. е. формула, получающаяся заменой всех переменных в φ на переменные, пробегающие стандартные (соответственно внутренние) множества.

Если φ — формула теории ZFC, то, рассматривая ее как формулу теории NST, иногда пишут φ^E и применяют термин *E-формула.* Аналогичный смысл вкладывают в понятия *S-формулы* и *I-формулы.*

Используют обычные сокращения типа $(\forall^{\mathrm{st}} x)\,\varphi := (\forall x \in \mathbf{V}^S)\,\varphi$; $(\exists^{\mathrm{Int}} x)\,\varphi := (\exists x \in \mathbf{V}^I)\,\varphi$; $\mathrm{fin}(x) := x$ конечно ($=$ не имеет взаимно однозначного отображения на собственное подмножество) и т. п.

1.3.5. *Специальные аксиомы* NST делятся на три группы (так же обстоит дело и в иных вариантах теории внешних множеств). Первую группу составляют так называемые *правила образования внешних множеств.* Вторую — *аксиомы связи миров множеств* $\mathbf{V}^S$, $\mathbf{V}^I$ и $\mathbf{V}^E$. Наконец, в третью группу входят обычные *постула-*

ты нестандартного анализа — принципы переноса, идеализации и стандартизации.

1.3.6. Начнем с устройства универсума $\mathbf{V}^E$.

(1) Суперправило для образования внешних множеств: *если* φ — *аксиома* ZFC, *за исключением аксиомы фундирования, то* φ^E — *аксиома* NST.

Таким образом, в NST действуют аксиомы теории Цермело и выполнена схема аксиом подстановки. Более того, принимается

(2) Суженная аксиома фундирования:
$(\forall A)\,(A = \varnothing \vee A \cap \mathbf{V}^I = \varnothing) \to (\exists x \in A)\, x \cap A = \varnothing$.

Иными словами, регулярность постулируется у внешних множеств, не имеющих внутренних элементов.

Подчеркнем, что $\mathbf{V}^S \in \mathbf{V}^E$. Иначе говоря, выполнена обычная *аксиома приемлемости* в [38, 3.4.17].

Напомним в этой связи, что внешнее множество A имеет *приемлемый размер* (или S-*размер*), если существует некоторая внешняя функция, отображающая $\mathbf{V}^S$ на A. При этом пишут $A \in \mathbf{V}^{\text{a-size}}$.

1.3.7. Вторая группа аксиом NST содержит следующие утверждения:

(1) принцип моделирования для мира стандартных множеств: $\mathbf{V}^S$ — *это универсум фон Неймана*, т. е. для каждой аксиомы φ теории ZFC стандартизация φ^S — аксиома NST;

(2) аксиома транзитивности для внутренних множеств: $(\forall x \in \mathbf{V}^I) x \subset \mathbf{V}^I$, т. е. внутренние множества составлены только из внутренних элементов;

(3) аксиома вложения: $\mathbf{V}^S \subset \mathbf{V}^I$, т. е. стандартные множества являются внутренними.

1.3.8. Третью группу постулатов NST составляют такие схемы аксиом:

(1) принцип переноса:
$(\forall^{\rm st} x_1) \dots (\forall^{\rm st} x_n) \varphi^S(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^I(x_1, \dots, x_n)$
для каждой формулы $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ теории ZFC;

(2) ПРИНЦИП СТАНДАРТИЗАЦИИ:
$(\forall A)\,(\exists^{\mathrm{st}\,t})\,({}^{\circ}A \subset t) \to (\exists^{\mathrm{st}\,a})\,(\forall^{\mathrm{st}\,x})\,(x \in A \leftrightarrow x \in a)$,
где ${}^{\circ}A := A \cap \mathbf{V}^S$ — *стандартное ядро* A.

Возникающее a, очевидно, единственно. Его обозначают ${}^*A$ и называют *стандартизацией* A.

(3) ПРИНЦИП ИДЕАЛИЗАЦИИ (схема аксиом насыщения):
$(\forall^{\mathrm{Int}} x_1)\ldots(\forall^{\mathrm{Int}} x_n)\,(\forall A \in \mathbf{V}^{\mathrm{a-size}})$
$\Big(\big((\forall z)\, z \subset A \wedge \mathrm{fin}^E(z) \to$
$\to (\exists^{\mathrm{Int}} x)\,(\forall y \in z)\,\varphi^I(x, y, x_1, \ldots, x_n)\big) \to$
$\to (\exists^{\mathrm{Int}} x)\,(\forall^{\mathrm{Int}} y \in A)\,\varphi^I(x, y, x_1, \ldots, x_n)\Big)$
для произвольной формулы $\varphi = \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$ теории ZFC.

1.3.9. *Теорема Каваи.* *Теория* NST *является консервативным расширением теории* ZFC.

1.3.10. Как обычно, в $\mathbf{V}^E$ можно выделить универсум $\mathbf{V}^C$, составленный *классическими* (= стандартными или обычными в робинсоновском формализме) множествами, используя класс стандартных ординалов $\mathrm{On}^{\mathrm{St}}$. Именно,

$$\mathbf{V}^C_\beta := \{x : (\exists^{\mathrm{st}} \alpha \in \beta)\, x \in \mathscr{P}(\mathbf{V}^C_\alpha)\},$$
$$\mathbf{V}^C := \bigcup_{\beta \in \mathrm{On}^{\mathrm{St}}} \mathbf{V}^C_\beta.$$

При этом возникает робинсоновская стандартизация $* : \mathbf{V}^C \to \mathbf{V}^S$, определенная схемой рекурсии:

$$*\varnothing := \varnothing, \quad *A := {}^*\{*a : a \in A\}.$$

Робинсоновская стандартизация обеспечивает справедливость *принципа Лейбница* в форме

$$(\forall x_1 \in \mathbf{V}^C)\ldots(\forall x_n \in \mathbf{V}^C)\,\varphi^C(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^S(x_1, \ldots, x_n)$$

для произвольной формулы $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ теории ZFC и ее релятивизаций φ^C и φ^S на $\mathbf{V}^C$ и $\mathbf{V}^S$ соответственно.

1.3.11. Мир радикальной (и классической) установки нестандартного анализа также допускает аксиоматическое описание.

Опишем теорию UNST, проанализированную Т. Каваи. В UNST переменные изображают внешние множества. Имеются выделенные константы $\mathbf{V}^C$, $\mathbf{V}^I$ и $*$. Соответствующие внешние множества, естественно, называют *классическим миром, универсумом внутренних множеств* и *робинсоновской стандартизацией.* Специальные аксиомы UNST аналогичны NST.

1.3.12. Устройство универсума UNST определяют следующие постулаты:

(1) Суперправило образования внешних множеств
(аналогичное 1.3.3 (1));

(2) Суженная аксиома фундирования
(ср. 1.3.3 (2)).

1.3.13. Аксиомы связи миров множеств:

(1) Принцип моделирования для классических множеств:
мир $\mathbf{V}^C$ *— это универсум фон Неймана*;

(2) Аксиома транзитивности для внутренних множеств
в форме 1.3.12 (2);

(3) Аксиома транзитивности для классических множеств:
$(\forall x \in \mathbf{V}^C)\, x \subset \mathbf{V}^C$ *— классические множества составлены из классических элементов*;

(4) Аксиома внешней сборки:
внешние подмножества классического множества являются классическими;

(5) Аксиома робинсоновской стандартизации:
$*$ *является (внешним) отображением* $\mathbf{V}^C$ в $\mathbf{V}^I$.

Очевидно, что в связи с 1.3.13 (5) существует единственное множество $\mathbf{V}^S$, составленное из стандартизаций $\mathbf{V}^S := *(\mathbf{V}^C)$. В UNST элементы $\mathbf{V}^S$ называют *стандартными множествами.* По аналогии с 1.3.5 (2), говорят, что множество A имеет *классический размер* (или *c-размер*), если существует внешняя функция из $\mathbf{V}^C$ на A. При этом пишут $A \in \mathbf{V}^{\text{c-size}}$.

1.3.14. Постулаты нестандартного анализа в UNST имеют следующий вид:

(1) принцип переноса в форме Лейбница (см. 1.3.10);
(2) принцип идеализации в виде схемы аксиом насыщения для множеств классического размера (см. 1.3.8 (3)).

Наконец, *стандартизация* $^*A$ в UNST множества A (представляющего собой подмножество элемента $\mathbf{V}^S$) состоит в процедуре

$$^*A := *(*^{-1}(A \cap \mathbf{V}^S)).$$

Из 1.3.12 непосредственно вытекает следующее утверждение.

1.3.15. *Теорема.* *Теория* UNST *является консервативным расширением теории* ZFC.

В дальнейшем при работе с аналитическими объектами мы будем придерживаться свободной точки зрения, близкой к неоклассической и радикальной установкам нестандартного анализа. В частности, поле вещественных чисел нами часто рассматривается как стандартный элемент мира внутренних множеств, а классическая реализация $\mathbb{R}$ отождествляется со стандартным ядром $^{\circ}\mathbb{R}$. Символика, принятая в нестандартном анализе для бесконечно малых, монад и т. п., совпадает с представленной в [38].

1.3.16. Примечания.

(1) Аксиоматический подход к нестандартному анализу стал завоевывать популярность после работ Э. Нельсона [95, 96], предложившего аксиоматику теории внутренних множеств IST. При этом произошло существенное изменение взглядов на существо инфинитезимальных методов (см. [38, 52]). Главное в произошедших переменах — отказ от «стыдливого» взгляда на инфинитезимали как на монстров, имеющих некоторое экзотическое значение. Теорему 1.3.3 см. в [95].

(2) Аксиоматические теории внешних множеств были предложены К. Хрбачеком [76] и Т. Каваи [86]. Излагаемый вариант теории следует [87]. Из последних работ отметим также [14, 57], предлагающие, по сути, удобные формализмы «градуированной» теории внешних множеств, связанные с концепцией относительной стандартности. Нестандартную теорию классов, расширяющую теорию Гёделя — Бернайса, предложил Е. И. Гордон, см. [68].

(3) В. Кановей и М. Рейкен [82] предложили теорию ограниченных множеств BST, которая отличается от IST добавлением аксиомы ограниченности $(\forall x)\,(\exists y)\,x \in y$ и необходимой модификацией принципа идеализации (принцип идеализации IST явно противоречит аксиоме ограниченности). Ясно, что теории BST достаточно для приложений, в то же время некоторые конструкции в ней упрощаются.

1.4. Теория относительно стандартных множеств

В этом параграфе мы рассмотрим теорию относительно стандартных множеств в рамках теории внутренних множеств Э. Нельсона.

1.4.1. Наличие актуальных бесконечно малых чисел в нестандартном анализе дает возможность формировать новые (а по существу узаконивает давно отвергнутые) понятия для изучения классических объектов анализа. В частности, интересным приобретением являются новые математические понятия — микропредел конечной последовательности и микронепрерывность функции в точке. Число a называют *микропределом* последовательности $a[N] := (a_1, \dots, a_N)$, где N — бесконечно большое натуральное число, если для всех бесконечно больших M, меньших N, будет $a_M \approx a$. Функцию $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ называют *микронепрерывной в точке* x из $\mathrm{dom}(f)$, если при $x' \in \mathrm{dom}(f)$ и $x' \approx x$ выполняется $f(x') \approx f(x)$. Эти определения оправданы следующими нестандартными критериями непрерывности:

(1) *стандартное число $a \in \mathbb{R}$ будет пределом стандартной последовательности (a_n) тогда и только тогда, когда a — микропредел $a[N]$, где N — бесконечно большое натуральное число;*

(2) *стандартная числовая функция f непрерывна в стандартной точке x стандартной области определения* $\mathrm{dom}(f)$ *тогда и только тогда, когда f микронепрерывна в точке x.*

Здесь, как и в других эквивалентностях такого рода, существенно, что (a_n), a, f, x и $\mathrm{dom}(f)$ стандартны. Встает вопрос о наличии простых нестандартных критериев в общем случае, когда в данное определение входят произвольные нестандартные элементы. Ситуация, когда это необходимо, возникает довольно часто.

Наиболее простой пример получается при попытке дать нестандартное определение того, что $\lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = a$, даже в случае стандартных f и a. В самом деле, из (1) получаем эквивалентное условие $(\forall N \approx +\infty)\lim_{n\to+\infty} f(x_N, y_n) \approx a$. Однако $f(x_N, \cdot)$, вообще говоря, — нестандартная функция при $N \approx +\infty$ и эквивалентность (1) к ней не применима. Этот пример наводит на мысль о необходимости введения бесконечно малых существенно более высокого порядка, чем данное $\alpha := x_N$, т. е. таких, которые остаются бесконечно малыми, даже если считать α конечным.

1.4.2. Ниже для обозначения предикатов «f — функция», «f — конечное множество», области определения и области значений f, а также формулы (f — функция) $\wedge(\forall x \in \operatorname{rng}(f))$ (x конечно) используются сокращения $\mathrm{Fn}(f)$, $\mathrm{Fin}(f)$, $\mathrm{dom}(f)$, $\mathrm{rng}(f)$, $\mathrm{Ffin}(f)$, соответственно. Отметим, что $\mathrm{Fin}(x)$ означает лишь, что мощность x есть элемент ω (т. е. натуральное число), возможно, и бесконечно большой, если x нестандартно.

Назовем элемент x *допустимым* ($\mathrm{Su}(x)$), если $(\exists^{\mathrm{st}} X)\,(x \in X)$. Введем определимый в IST предикат «x стандартно относительно y» формулой:

$$x \operatorname{st} y \rightleftharpoons (\exists^{\mathrm{st}}\varphi)\,\bigl(\mathrm{Ffin}(\varphi) \wedge y \in \operatorname{dom}\varphi \wedge x \in \varphi(y)\bigr).$$

Двуместный предикат $x \operatorname{st} y$ обладает следующими свойствами:

(1) $x \operatorname{st} y \ \to\ \mathrm{Su}(x) \wedge \mathrm{Su}(y)$.

(2) $x \operatorname{st} y \wedge y \operatorname{st} z \ \to\ x \operatorname{st} z$.

(3) $x \operatorname{st} y \wedge \mathrm{Fin}(x) \ \to\ (\forall z \in x)\, z \operatorname{st} y$.

(4) $\mathrm{Su}(y) \wedge \mathrm{St}(x) \ \to\ x \operatorname{st} y$.

В последнем утверждении St — одноместный предикат быть «стандартным» из теории внутренних множеств Э. Нельсона, см. 1.3.

1.4.3. Ниже для обозначения предикатов аналогично сокращениям 1.3.1 вводятся сокращения:

$$(\forall^{\mathrm{st}\,y} x)\,\varphi := (\forall\, x)\,(x \text{ стандартно относительно } y \to \varphi);$$
$$(\exists^{\mathrm{st}\,y} x)\,\varphi := (\exists\, x)\,(x \text{ стандартно относительно } y \wedge \varphi);$$
$$(\forall^{\mathrm{st\,fin}\,y} x)\,\varphi := (\forall^{\mathrm{st}\,y} x)\,(x \text{ конечно} \to \varphi);$$
$$(\exists^{\mathrm{st\,fin}\,y} x)\,\varphi := (\exists^{\mathrm{st}\,y} x)\,(x \text{ конечно} \wedge \varphi).$$

1.4.4. *Релятивизованный принцип переноса.* *Если φ — это внутренняя формула, содержащая в качестве свободных переменных только $x, t_1, \dots, t_k$ $(k \geq 1)$, то для любого допустимого τ имеет место формула*

$$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau})\, t_1 \dots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t_k) \big((\forall^{\mathrm{st}\,\tau} x)\, \varphi(x, t_1, \dots, t_k) \;\rightarrow\; (\forall x)\, \varphi(x, t_1, \dots, t_k) \big).$$

1.4.5. *Релятивизованный принцип идеализации.* *Пусть некоторая внутренняя формула такова, что $\psi(x, y)$, наряду с x, y, может содержать еще какие-нибудь свободные переменные. Тогда для любого допустимого τ выполняется*

$$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau\,\mathrm{fin}}\ z)\, (\exists x)\, (\forall y \in z)\, \psi(x, y) \;\leftrightarrow\; (\exists x)\, (\forall^{\mathrm{st}\,\tau} y)\, \psi(x, y).$$

1.4.6. Можно показать, что релятивизованный принцип стандартизации теперь не имеет места. Однако уже установленные принципы 1.4.4 и 1.4.5 достаточны для решения класса задач, о которых говорилось в 1.4.1. Приведем несколько результатов в этом направлении.

Пусть $x \in \mathbb{R}$ — произвольное (не обязательно стандартное) число. Будем говорить, что x — τ-бесконечно малое и писать $x \overset{\tau}{\sim} 0$, если $(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} y \in \mathbb{R}_+)\, |x| < y$. Естественны также следующие определения: x — τ-бесконечно большое, если $1/x$ — τ-бесконечно малое; x — τ-конечное, если x не является τ-бесконечно большим.

1.4.7. *Теорема.* *Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $a, b \in \mathbb{R}$ — произвольные (не обязательно стандартные) элементы, $\tau = (f, a, b)$, то*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \;\leftrightarrow\; (\forall \alpha \overset{\tau}{\sim} 0)\, f(a + \alpha) - b \overset{\tau}{\sim} 0.$$

$\lhd$ Ввиду 1.4.2 f, a, b стандартны относительно τ. Теперь в силу принципа переноса 1.4.4 будет

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}\,\tau} \varepsilon)(\exists^{\mathrm{st}\,\tau} \delta)(|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Если $\alpha \overset{\tau}{\sim} 0$, $x = a + \alpha$, то $(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} \delta)\, |x - a| < \delta$, т. е. $(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} \varepsilon)\, |f(x) - b| < \varepsilon$ и $f(x) - b \overset{\tau}{\sim} 0$.

Обратно, зафиксируем произвольное стандартное $\varepsilon\, \mathrm{st}\, \tau$ и рассмотрим внутреннее множество M тех α, для которых $|f(a + \alpha) - b| < \varepsilon$. По условию M содержит все τ-бесконечно малые. Рассмотрим множество $M_1 := \{\delta : (0, \delta] \subset M\}$. Оно также внутреннее множество, содержащее все τ-бесконечно малые. Следовательно, $\sup M_1$ не может быть τ-бесконечно малым и, стало быть, существует τ-стандартное $\delta \in M_1$. Остается применить принцип переноса. $\rhd$

1.4.8. *Теорема.* *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ стандартны и для любого x из некоторой окрестности нуля существует $\lim_{y\to 0} f(x,y)$. Тогда*

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = a \leftrightarrow (\forall \alpha \sim 0)\,(\forall \beta \overset{\alpha}{\sim} 0)\, f(\alpha,\beta) - a \sim 0.$$

$\lhd$ Пусть $a := \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$.

Положим $g(x) := \lim_{y\to 0} f(x,y)$. Тогда $g(\alpha) \sim a$ для любого $\alpha \sim 0$. Отметим, что g — стандартная функция, следовательно, $g(\alpha)\,\mathrm{st}\,\alpha$. Теперь ввиду теоремы 1.4.7 и 1.4.2 (2) равенство $g(\alpha) = \lim_{y\to 0} f(\alpha,y)$ эквивалентно утверждению

$$(\forall \beta \overset{\alpha}{\sim} 0)\, f(\alpha,\beta) \overset{\alpha}{\sim} g(\alpha).$$

В силу предложения 1.4.2 (4) $f(\alpha,\beta) \overset{\alpha}{\sim} \varphi(\alpha) \to f(\alpha,\beta) \sim g(\alpha)$. Но так как $g(\alpha) \sim a$, то $f(\alpha,\beta) \sim a$.

Докажем обратное утверждение. При этом достаточно установить предложение

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta)(\forall x)\big(|x| < \delta \to (\exists \gamma)(\forall y)(|y| < \gamma \to |f(x,y) - a| < \varepsilon)\big).$$

Зафиксируем произвольное стандартное ε и рассмотрим внутреннее множество

$$M := \Big\{\delta > 0 : (\forall x)\big(|x| < \delta \to (\exists \gamma)(\forall y)(|y| < \gamma \to |f(x,y) - a| < \varepsilon)\big)\Big\}.$$

Легко понять, что M содержит все бесконечно малые числа. В самом деле, если $\delta \sim 0$ и $|x| < \delta$, то $x \sim 0$. Если $\gamma \overset{x}{\sim} 0$, то $(\forall y)\,(|y| < \gamma \to y \overset{x}{\sim} 0)$. Отсюда $|f(x,y) - a| < \varepsilon$. Теперь очевидно, что M содержит и некоторый стандартный элемент. $\rhd$

1.4.9. Рассмотрение предыдущих двух пунктов без труда переносится на случай произвольного топологического пространства. Пусть X — топологическое пространство, τ — допустимый элемент и $X\,\mathrm{st}\,\tau$. Для элемента $x \in X$, стандартного относительно τ, определим τ-монаду $\mu^\tau(x)$ как пересечение всех τ-стандартных окрестностей x:

$$\mu^\tau(x) := \{y : (\forall^{\mathrm{st}\,\tau} u)\,\big((u \text{ открыто} \land x \in u) \to y \in u\}).$$

(1) При указанных предположениях множество $U \subset X$, стандартное относительно τ, открыто в том и только в том случае, если $\mu^\tau(x) \subset U$ для любого $x \in U$, стандартного относительно τ.

(2) Пусть X и Y — допустимые топологические пространства, $f : X \to Y$, $a \in X$ и $b \in Y$. Если $\tau := (X, Y, f, a, b)$, то имеет место следующая эквивалентность:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \leftrightarrow (\forall x \in \mu^\tau(a))\, f(x) \in \mu^\tau(b).$$

1.4.10. В заключение этого параграфа мы представим вкратце аксиоматическую теорию RIST относительно внутренних множеств. Язык этой теории получается из языка теории Цермело — Френкеля добавлением одного двуместного предиката st. Как и выше, выражение $x \,\mathrm{st}\, y$ читается как «x стандартно относительно y». Формула теории RIST внутренняя, если она не содержит предиката st. Так же, как и в 1.4.3 определяются внешние кванторы $\forall^{\mathrm{st}\,\alpha}$, $\exists^{\mathrm{st}\,\alpha}$, $\forall^{\mathrm{st\,fin}\,\alpha}$, $\exists^{\mathrm{st\,fin}\,\alpha}$.

Аксиомы RIST включают все аксиомы теории Цермело — Френкеля. Предикат st удовлетворяет следующим трем аксиомам:

(1) $(\forall x)\, x \,\mathrm{st}\, x$;

(2) $(\forall x)\,(\forall y)\, x \,\mathrm{st}\, y \vee y \,\mathrm{st}\, x$;

(3) $(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,\big(x \,\mathrm{st}\, y \wedge y \,\mathrm{st}\, z \to x \,\mathrm{st}\, y\big)$.

Кроме того, теория RIST (как и IST) включает три новые схемы. Схемы аксиом переноса и идеализации те же, что и в 1.4.4 и 1.4.5, а в схеме аксиом стандартизации необходимо ограничить класс формул в соответствии с замечанием 1.4.6.

1.4.11. *Схема аксиом переноса.* *Если $\varphi(x, t_1, \dots, t_k)$ — внутренняя формула со свободными переменными $x, t_1, \dots, t_k$ и τ — фиксированное множество, то*

$$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t_k)\, \big((\forall^{\mathrm{st}\,\tau} x)\, \varphi(x, t_1, \dots, t_k) \to (\forall x)\, \varphi(x, t_1, \dots, t_k)\big).$$

1.4.12. Схема аксиом идеализации. Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ — внутренняя формула со свободными переменными $x_1, \dots, x_k, y$, причем, возможно, есть и другие свободные переменные. Пусть $\tau_1, \dots, \tau_k$ — фиксированные множества и β не является стандартным относительно $(\tau_1, \dots, \tau_k)$. Тогда выполняются следующие утверждения.

(1) Принцип ограниченной идеализации:
$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau_1\,\mathrm{fin}} z_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau_k\,\mathrm{fin}} z_k)$
$(\exists^{\mathrm{st}\,\beta} y)\,(\forall x_1 \in z_1) \dots (\forall x_k \in z_k)\, \psi(x_1, \dots, x_k, y) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists^{\mathrm{st}\,\beta} y)\,(\forall^{\mathrm{st}\,\tau_1} x_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}\,\tau_k} x_k)\, \psi(x_1, \dots, x_k, y)$.

(2) Принцип неограниченной идеализации:
$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau\,\mathrm{fin}} z_1)\dots(\forall^{\mathrm{st}\,\tau\,\mathrm{fin}} z_k)$
$(\exists y)\,(\forall x_1 \in z_1)\dots(\forall x_k \in z_k)\,\psi(x_1,\dots,x_k,y) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists y)\,(\forall^{\mathrm{st}\,\tau_1} x_1)\dots(\forall^{\mathrm{st}\,\tau_k} x_k)\,\psi(x_1,\dots,x_k,y).$

1.4.13. Для формулировки схемы аксиом стандартизации введем класс τ-внешних формул $\mathscr{F}_\tau$, где τ — фиксированное множество. Если $\mathscr{F}$ — класс формул теории RIST, то $\mathscr{F}_\tau$ определяется как наименьший его подкласс, удовлетворяющий следующим условиям:

(1) атомарная формула $x \in y$, где x и y — переменные или константы, входит в $\mathscr{F}_\tau$;

(2) если формулы φ и ψ входят в $\mathscr{F}_\tau$, то и формулы $\neg\varphi$ и $\varphi \to \psi$ входят в $\mathscr{F}_\tau$;

(3) если формула $\varphi(x,y)$ входит в $\mathscr{F}_\tau$, то при этом и формула $(\exists y)\,\varphi(x,y)$ входит в $\mathscr{F}_\tau$;

(4) если формула $\varphi(x,y)$ входит в $\mathscr{F}_\tau$, а β — такое множество, что множество τ стандартно относительно β, то и формула $(\exists^{\mathrm{st}\,\beta} y)\,\varphi(x,y)$ входит в $\mathscr{F}_\tau$.

1.4.14. ***Схема аксиом стандартизации.*** *Если τ — фиксированное множество и φ — некоторая τ-внешняя формула, то*

$$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} y)\,(\exists^{\mathrm{st}\,\tau} z)\,(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t)\,\big(t \in z \leftrightarrow (t \in y \land \varphi(t))\big).$$

1.4.15. ***Теорема.*** *Теория* RIST *является консервативным расширением теории* ZFC.

1.4.16. Примечания.

(1) Материал, вошедший в пункты 1.4.2–1.4.9, взят из статьи Е. И. Гордона [14], см. также [68]. В этой же работе установлено, что существуют такое бесконечно большое натуральное число N и такое число $x \in [0,\,1]$, что любое число, N-бесконечно близкое к x, не является N-стандартным. Поскольку существование стандартной части числа является следствием принципа стандартизации, отсюда выводится, что релятивизованный принцип стандартизации не имеет места. В частности, можно сделать вывод, что принцип стандартизации теории IST не является следствием остальных аксиом этой теории (подробности см. в [14, 68]).

(2) Аксиоматическая теория RIST, изложенная в 1.4.10–1.4.14, была предложена И. Пэрером [104]. Там же установлена теорема

1.4.15. Ранее И. Пэрер осуществил (непротиворечивое относительно ZFC) расширение теории IST посредством добавления последовательности не определимых в IST предикатов $\mathrm{St}_p(x)$ (x стандартно степени $1/p$), см. [102]. Другие результаты в этом направлении см. в [103, 105].

1.5. Пространства Канторовича

Теория векторных решеток изложена в ряде превосходных монографий, см. [2, 21, 22, 61, 92, 106, 107, 118]. Векторные решетки принято называть также пространствами Рисса. Здесь мы коротко рассмотрим порядково полные векторные решетки.

1.5.1. Пусть $\mathbb{F}$ — линейно упорядоченное поле. *Упорядоченное векторное пространство* над $\mathbb{F}$ — пара $(E, \leq)$, где E — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а $\leq$ — *векторный порядок* в E, т. е. отношение порядка в E, согласованное со структурой векторного пространства. Последнее означает, что неравенства в E можно складывать и умножать на положительные элементы поля $\mathbb{F}$. Задание векторного порядка в векторном пространстве E над полем $\mathbb{F}$ равносильно указанию подмножества $E_+ \subset E$ — *положительного конуса* пространства E — со свойствами: $E_+ + E_+ \subset E_+$; $\lambda E_+ \subset E_+$ $(0 \leq \lambda \in \mathbb{F})$; $E_+ \cap E_+ = \{0\}$. При этом порядок $\leq$ и конус E_+ связаны соотношением

$$x \leq y \leftrightarrow y - x \in E_+ \quad (x, y \in E).$$

Упорядоченное векторное пространство, являющееся решеткой, называют *векторной решеткой*. Для элементов x, y векторной решетки E и приняты обозначения: $x \vee y := \sup\{x, y\}$, $x \wedge y := \inf\{x, y\}$, $|x| := \sup\{x, -x\}$, $x^+ := \sup\{x, 0\}$, $x^- := (-x)^+$.

Пространством Канторовича или, короче, K-*пространством* называют такую векторную решетку, в которой всякое порядково ограниченное множество имеет точные границы. Если же в векторной решетке имеются точные границы лишь у счетных множеств, то ее называют K_σ-*пространством*. Всюду ниже E символизирует произвольное K-пространство.

Элементы $x, y \in E$ называют *дизъюнктными* и пишут $x \perp y$, если $|x| \wedge |y| = 0$. Множество

$$M^\perp := \{x \in E : (\forall y \in M)\, x \perp y\},$$

где $M \subset E$, именуют *дизъюнктным дополнением* множества M. Отметим некоторые простые свойства дизъюнктного дополнения:

(1) $M \subset N \to N^\perp \subset M^\perp$;

(2) $M \subset M^{\perp\perp}$;

(3) $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$;

(4) $\left(\bigcup_\alpha M_\alpha\right)^\perp = \bigcap_\alpha M_\alpha^\perp$.

Компонентой (или *полосой*) в E называют множество вида $M^\perp$, где $M \subset E$, $M \neq \varnothing$. Совокупность всех компонент, упорядоченная по включению, образует полную булеву алгебру $\mathfrak{B}(E)$, в которой булевы операции выглядят так:

$$L \wedge K = L \cap K, \quad L \vee K = (L \cup K)^{\perp\perp}, \quad L^* = L^\perp \quad (L, K \in \mathfrak{B}(E)).$$

Алгебра $\mathfrak{B}(E)$ носит название *базы* E.

1.5.2. Для каждой компоненты K в K-пространстве E имеет место представление $E = K \oplus K^\perp$. Тем самым однозначно определен оператор проектирования $[K]$ на подпространство K параллельно $K^\perp$, называемый *порядковым проектором* на K (или просто проектором на K, если контекст исключает путаницу). При этом выполняются неравенства $0 \le [K]x \le x$ для всех $0 \le x \in E$. Наоборот, если линейный проектор π в E удовлетворяет неравенствам $0 \le \pi x \le x$ для всех $0 \le x \in E$, то $K := \pi(E)$ является компонентой, а π — порядковым проектором на K. В множестве всех порядковых проекторов $\mathfrak{P}(E)$ вводят порядок, полагая $\rho \le \pi \leftrightarrow \operatorname{im}(\rho) \subset \operatorname{im}(\pi)$. Полезно иметь в виду равносильное определение $\rho \le \pi \leftrightarrow \rho\pi = \pi\rho = \rho$. Упорядоченное множество $\mathfrak{P}(E)$ является полной булевой алгеброй, в которой булевы операции имеют вид:

$$\pi \wedge \rho = \pi\rho = \rho\pi, \quad \pi \vee \rho = \pi + \rho - \pi\rho, \quad \pi^* = I_E - \pi \quad (\pi, \rho \in \mathfrak{P}(E)).$$

Пусть $\mathbf{1}$ — (*слабая порядковая*) *единица* в E, т. е. $\{\mathbf{1}\}^{\perp\perp} = E$. Элемент $e \in E$ называют *единичным*, или *осколком единицы*, если $e \wedge (\mathbf{1} - e) = 0$. Множество $\mathfrak{E}(E) := \mathfrak{E}(\mathbf{1})$ всех единичных элементов снабжают индуцированным из E порядком. Упорядоченное множество $\mathfrak{E}(E)$ является полной булевой алгеброй, в которой булево дополнение имеет вид: $e^* := \mathbf{1} - e$ для $e \in \mathfrak{E}(\mathbf{1})$.

1.5.3. *Теорема.* *Отображение $K \mapsto [K]$ есть изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{B}(E)$ и $\mathfrak{P}(E)$. Если же в E имеется порядковая единица, то отображения $\pi \mapsto \pi\mathbf{1}$ из $\mathfrak{P}(E)$ в $\mathfrak{E}(E)$ и $e \mapsto \{e\}^{\perp\perp}$ из $\mathfrak{E}(E)$ в $\mathfrak{B}(E)$ также являются изоморфизмами булевых алгебр.*

1.5.4. K-пространство E называют *расширенным*, если в нем любое непустое множество попарно дизъюнктных положительных элементов имеет супремум. Перечислим важнейшие примеры расширенных K-пространств. Для экономии места ограничимся вещественным случаем (за исключением примера (4)).

(1) Пространство $M(\Omega, \Sigma, \mu) := L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ классов эквивалентности почти всюду конечных измеримых функций на Ω, где (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой μ, причем μ предполагается σ-конечной (или, более общо, μ должна обладать свойством прямой суммы, см. [21]). База K-пространства $M(\Omega, \Sigma, \mu)$ изоморфна булевой фактор-алгебре $\Sigma/\mu^{-1}(0)$ — булевой алгебре измеримых множеств по модулю множеств нулевой меры.

(2) Пространство $C_\infty(Q)$ непрерывных функций, определенных на экстремально несвязном компакте Q, со значениями в расширенной числовой прямой и принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах [2, 22]. База этого K-пространства изоморфна булевой алгебре открыто-замкнутых множеств компакта Q.

(3) Пространство $\mathrm{Bor}(Q)$ классов эквивалентности борелевских функций, определенных на топологическом пространстве Q. Две функции *эквивалентны*, если они совпадают на дополнении к множеству первой категории. База K-пространства $\mathrm{Bor}(Q)$ изоморфна булевой алгебре борелевских подмножеств Q по модулю множеств первой категории.

(4) Пространство $\overline{\mathfrak{A}}$ самосопряженных (не обязательно ограниченных) операторов в гильбертовом пространстве, присоединенных к коммутативной алгебре фон Неймана $\mathfrak{A}$ (см. [9]). База K-пространства $\overline{\mathfrak{A}}$ изоморфна булевой алгебре всех проекторов, входящих в $\mathfrak{A}$.

1.5.5. Пусть E и F — векторные решетки. Оператор $T : E \to F$ называют *положительным*, если $Tx \geq 0$ для каждого $0 \leq x \in E$, и *регулярным*, если $T = T_1 - T_2$, где T_1, T_2 — положительные операторы. Говорят, что оператор T *порядково ограничен* или *o-ограничен*,

если $T(M)$ — порядково ограниченное множество в F для любого порядково ограниченного $M \subset E$. Если F — это K-пространство, то классы регулярных и порядково ограниченных операторов совпадают. Более того, справедливо следующее утверждение.

1.5.6. *Теорема Рисса — Канторовича.* *Если E — векторная решетка и F — это произвольное K-пространство, то пространство $L^{\sim}(E,F)$ всех регулярных операторов из E в F само является K-пространством.*

1.5.7. Оператор $T : E \to F$ называют порядково непрерывным или *o*-непрерывным (секвенциально *o*-непрерывным или порядково σ-непрерывным), если $Tx_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$ в F для любой сети (x_α), *o*-сходящейся к нулю в E (соответственно, $Tx_n \xrightarrow{(o)} 0$ в F) для любой последовательности (x_n), *o*-сходящейся к нулю в E. Множества всех порядково непрерывных и порядково σ-непрерывных операторов из E в F обозначают соответственно символами $L_n^{\sim}(E,F)$ и $L_\sigma^{\sim}(E,F)$.

Теорема. *Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полно. Тогда множества $L_n^{\sim}(E,F)$ и $L_\sigma^{\sim}(E,F)$ являются полосами в $L^{\sim}(E,F)$.*

1.5.8. *Пространством Канторовича — Пинскера* называют K-пространство, в котором существует фундамент с достаточным числом порядково непрерывных функционалов (или, что то же самое, если на его базе может быть определена существенно положительная локально конечная вполне аддитивная мера).

Теорема. *Если пространство с мерой $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ обладает свойством прямой суммы, то $L^0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ будет пространством Канторовича — Пинскера. Наоборот, произвольное пространство Канторовича — Пинскера линейно и порядково изоморфно фундаменту в $L^0(\Omega)$ для подходящего пространства с мерой (Ω, Σ, μ) со свойством прямой суммы.*

Отметим дополнительно, что если в E фиксирована порядковая единица $\mathbf{1}$, то существует единственный такой изоморфизм, переводящий $\mathbf{1}$ в класс эквивалентности функции, тождественно равной единице на Ω. Пространство E будет расширенным в том и только в том случае, если его образ при указанном изоморфизме совпадает с $L^0(\Omega)$.

1.5.9. Примечания.

(1) Создание теории векторных решеток принято связывать с исследованиями Г. Биркгофа, Л. В. Канторовича, М. Г. Крейна, Х. Накано, Ф. Рисса, Г. Фрейденталя и др. В наше время теория и приложения векторных решеток — обширная область математики, хорошо представленная в монографической литературе [9, 21, 22, 71, 92, 106, 107, 118].

Необходимые сведения из теории булевых алгебр см. в [7, 58, 69].

(2) Класс порядково полных векторных решеток, иначе говоря, K-пространств, был выделен Л. В. Канторовичем в его первой основополагающей работе [19]. Здесь же он выдвинул *эвристический принцип переноса* для K-пространств, состоящий в том, что элементы K-пространства суть обобщенные числа.

Принцип Канторовича нашел многочисленные подтверждения в исследованиях как самого автора, так и его последователей. По существу, этот принцип стал одной из тех стержневых идей, которые, играя организующую и направляющую роль в развитии нового направления, привели в конечном итоге к глубокой и изящной теории K-пространств, богатой разнообразными приложениями.

(3) Уже в начальный период развития теории предпринимались попытки формализации указанных эвристических соображений. На этом пути появились так называемые теоремы о сохранении соотношений, которые утверждают, что если некоторое высказывание, включающее конечное число функциональных соотношений, доказано для вещественных чисел, то аналогичный факт автоматически оказывается верным и для элементов K-пространства (см. [9, 22]). Однако оставались неясными внутренний механизм, управляющий феноменом сохранения соотношений, границы применимости подобных утверждений, а также общие причины многих аналогий и параллелей с классической теорией функций. Вся глубина и универсальный характер принципа Канторовича были раскрыты в рамках булевозначного анализа (см. 1.6, 1.7, а также [5, 29, 38]).

(4) Определения порядково непрерывного и порядково σ-непрерывного оператора, равно как и теорема 1.5.7 принадлежат Т. Огасаваре.

1.6. Действительные числа в булевозначных моделях

Булевозначный анализ начинается с изображения поля действительных чисел в булевозначной модели. Последнее оказывается расширенным K-пространством. В зависимости от того, какая булева алгебра B положена в основу построения булевозначной модели $\mathbf{V}^{(B)}$ (алгебра измеримых множеств, или регулярных открытых множеств, или проекторов в гильбертовом пространстве и т. п.), будут получаться различные K-пространства (пространства измеримых функций, или полунепрерывных функций, или самосопряженных операторов). Тем самым открывается удивительная возможность перенесения всей совокупности знаний о числах на многие классические объекты современного анализа.

1.6.1. Под полем действительных чисел мы понимаем алгебраическую систему, на которой выполняются аксиомы архимедова упорядоченного поля (с различными нулем и единицей) и аксиома полноты. Напомним два известных утверждения:

(1) *Существует, и притом единственное с точностью до изоморфизма, поле действительных чисел* $\mathbb{R}$.

(2) *Если* $\mathbb{P}$ *— архимедово упорядоченное поле, то найдется изоморфное вложение* h *поля* $\mathbb{P}$ *в* $\mathbb{R}$ *такое, что образ* $h(\mathbb{P})$ *есть подполе* $\mathbb{R}$, *содержащее подполе рациональных чисел. В частности,* $h(\mathbb{P})$ *плотно в* $\mathbb{R}$.

1.6.2. Применив к 1.6.1 (1) последовательно принципы переноса и максимума, найдем элемент $\mathscr{R} \in \mathbf{V}^{(B)}$, для которого $[\![\,\mathscr{R}$ — поле действительных чисел$\,]\!] = \mathbf{1}$. Более того, для любого $\mathscr{R}' \in \mathbf{V}^{(B)}$, такого что $[\![\,\mathscr{R}'$ — поле действительных чисел$\,]\!] = \mathbf{1}$, справедливо равенство $[\![$ упорядоченные поля $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}'$ изоморфны $]\!] = \mathbf{1}$. Иными словами, в модели $\mathbf{V}^{(B)}$ существует поле действительных чисел $\mathscr{R}$, единственное с точностью до изоморфизма.

1.6.3. Отметим также, что формула $\varphi(\mathbb{R})$, представляющая собой формальную запись аксиом архимедова упорядоченного поля, ограничена, поэтому $[\![\,\varphi(\mathbb{R}^\wedge)\,]\!] = \mathbf{1}$, т. е. $[\![\,\mathbb{R}^\wedge$ — архимедово упорядоченное поле$\,]\!] = \mathbf{1}$. «Пропустив» утверждение 1.6.1 (2) через принцип переноса, заключаем, что $[\![\,\mathbb{R}^\wedge$ изоморфно плотному подполю поля $\mathscr{R}\,]\!] = \mathbf{1}$. На этом основании будем считать в дальнейшем, что $\mathscr{R}$ —

поле действительных чисел в модели $\mathbf{V}^{(B)}$, причем $\mathbb{R}^{\wedge}$ — плотное его подполе.

Рассмотрим теперь спуск $\mathscr{R}{\downarrow}$ алгебраической системы $\mathscr{R}$. Иными словами, спуск несущего множества системы $\mathscr{R}$ рассматриваем вместе со спущенными операциями и порядком. Для простоты операции и порядок в $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}{\downarrow}$ обозначим одинаковыми символами $+, \cdot, \leq$.

1.6.4. *Теорема Гордона.* *Пусть $\mathscr{R}$ — упорядоченное поле действительных чисел в модели $\mathbf{V}^{(B)}$. Тогда $\mathscr{R}{\downarrow}$ (со спущенными операциями и порядком) представляет собой расширенное K-пространство с единицей $\mathbf{1} := 1^{\wedge}$. При этом существует изоморфизм χ булевой алгебры B на базу $\mathfrak{P}(\mathscr{R}{\downarrow})$ такой, что справедливы эквивалентности*

$$\chi(b)x = \chi(b)y \leftrightarrow b \leq [\![x = y]\!],$$
$$\chi(b)x \leq \chi(b)y \leftrightarrow b \leq [\![x \leq y]\!]$$

для всех $x, y \in \mathscr{R}$ и $b \in B$.

1.6.5. Расширенное K-пространство $\mathscr{R}{\downarrow}$ является в то же время точной f-алгеброй с кольцевой единицей $\mathbf{1} := 1^{\wedge}$, причем для каждого $b \in B$ проектор $\chi(b)$ есть оператор умножения на единичный элемент $\chi(b)\mathbf{1}$. Из сказанного выше видно, что отображение $b \mapsto \chi(b)\mathbf{1}$ для $b \in B$ также есть булев изоморфизм B на алгебру единичных элементов $\mathfrak{E}(\mathscr{R}{\downarrow})$. Этот изоморфизм обозначают той же буквой χ.

1.6.6. Напомним, что если E — это K-пространство с единицей и $x \in E$, то проекцию единицы на компоненту $\{x\}^{\perp\perp}$ называют *следом* x и обозначают символом e_x. Для вещественного числа λ символом e_λ^x обозначают след положительной части элемента $\lambda\mathbf{1} - x$, т. е. $e_\lambda^x := e_{(\lambda\mathbf{1}-x)^+}$. Отображение $\lambda \mapsto e_\lambda^x$ для $\lambda \in \mathbb{R}$ называют *спектральной функцией* или *характеристикой* элемента x.

Для каждого элемента $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ имеют место соотношения:

$$e_x = \chi([\![x \neq 0]\!]), \quad e_\lambda^x = \chi([\![x < \lambda^{\wedge}]\!]) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Следующий результат утверждает, что всякая архимедова векторная решетка реализуется как подрешетка $\mathscr{R}$ в подходящей булевозначной модели.

1.6.7. *Теорема.* *Пусть E — архимедова векторная решетка, $\jmath$ — изоморфизм булевой алгебры B на базу $\mathfrak{B}(E)$ и пусть $\mathscr{R}$ — поле действительных чисел в модели $\mathbf{V}^{(B)}$. Существует элемент $\mathscr{E} \in \mathbf{V}^{(B)}$, удовлетворяющий условиям:*

(1) $\mathbf{V}^{(B)} \models \mathscr{E}$ *— векторная подрешетка поля $\mathscr{R}$, рассматриваемого как векторная решетка над $\mathbb{R}^\wedge$;*

(2) $E' := \mathscr{E}{\downarrow}$ *— векторная подрешетка $\mathscr{R}{\downarrow}$, инвариантная относительно каждого проектора $\chi(b)$ при $b \in B$, в которой всякое множество положительных попарно дизъюнктных элементов имеет супремум;*

(3) *существует o-непрерывный решеточный изоморфизм $\iota : E \to E'$ такой, что $\iota(E)$ — минорантная подрешетка в $\mathscr{R}{\downarrow}$, т. е. имеет место утверждение $(\forall 0 < x \in \mathscr{R}{\downarrow})\,(\exists y \in E)(\,0 < \iota(y) \le x)$;*

(4) *для каждого $b \in B$ оператор проектирования на компоненту, порожденную в $\mathscr{R}{\downarrow}$ множеством $\iota(\jmath(b))$, совпадает с $\chi(b)$.*

1.6.8. Элемент $\mathscr{E} \in \mathbf{V}^{(B)}$ из теоремы 1.6.7 называют *булевозначной реализацией векторной решетки E*. Следовательно, булевозначными реализациями архимедовых векторных решеток служат векторные подрешетки поля действительных чисел $\mathscr{R}$, рассматриваемого как векторная решетка над полем $\mathbb{R}^\wedge$.

Укажем теперь несколько следствий из 1.6.4 и 1.6.7, сохранив те же обозначения:

(1) *Если E — это K-пространство, то $\mathscr{E} = \mathscr{R}$, $E' = \mathscr{R}{\downarrow}$ и $\iota(E)$ — фундамент K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$. При этом $\iota^{-1} \circ \chi(b) \circ \iota$ — проектор на компоненту $\jmath(b)$ для каждого $b \in B$.*

(2) *Образ $\iota(E)$ совпадает со всем $\mathscr{R}{\downarrow}$ тогда и только тогда, когда E — расширенное K-пространство.*

(3) *Расширенные K-пространства бывают изоморфны в том и только в том случае, если изоморфны их базы.*

(4) *Пусть E — расширенное K-пространство с единицей* $\mathbf{1}$. *Тогда в E можно, и притом единственным образом, определить умножение так, что E превращается в точную f-алгебру, а* $\mathbf{1}$ *— в единицу умножения.*

1.6.9. К подсистемам поля $\mathscr{R}$ приводят булевозначные реализа-

ции не только архимедовых векторных решеток, см. 1.6.7. Сформулируем, например, несколько утверждений из [31].

Теорема. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) *Булевозначной реализацией архимедовой решеточно упорядоченной группы служит подгруппа аддитивной группы поля $\mathscr{R}$.*

(2) *Архимедово f-кольцо содержит две взаимно дополнительные компоненты, одна из которых есть группа с ненулевым умножением и реализуется как в (1), а другая имеет в качестве булевозначной реализации подкольцо кольца $\mathscr{R}$.*

(3) *Архимедова f-алгебра содержит две взаимно дополнительные компоненты, одна из которых есть векторная решетка с нулевым умножением и реализуется как в 1.6.7, а другая — как подкольцо и подрешетка поля $\mathscr{R}$, рассматриваемого как f-алгебра над $\mathbb{R}^\wedge$.*

1.6.10. *Комплексной векторной решеткой* называют *комплексификацию* $E \oplus iE$, где i — *мнимая единица*, вещественной векторной решетки E. Часто при этом требуют дополнительно существование *модуля*

$$|z| := \sup\{Re(e^{i\theta}z) : 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

у любого элемента $z \in E \oplus iE$. В случае K-пространства это требование избыточное, так что *комплексное K-пространство* — комплексификация вещественного K-пространства. Говоря о порядковых свойствах комплексной векторной решетки $E \oplus iE$, имеют в виду ее вещественную часть E. Понятия подрешетки, идеала, компоненты проектора и т. п. естественно распространяются на случай комплексной векторной решетки путем надлежащей комплексификации.

1.6.11. Примечания.

(1) Булевозначный статус понятия K-пространства устанавливает теорема Гордона 1.6.4, полученная в [10]. Этот факт можно сформулировать так: *расширенное K-пространство есть интерпретация поля вещественных чисел в подходящей булевозначной модели.* При этом оказывается, что любая теорема (в рамках теории ZFC) о вещественных числах имеет свой аналог для соответствующего K-пространства. Перевод одних теорем в другие осуществляется

посредством точно определенных процедур: подъем, спуск, каноническое вложение, т. е., по сути дела, алгоритмически.

Тем самым установка Канторовича «элементы K-пространства — суть обобщенные числа» обретает в булевозначном анализе четкую математическую формулировку.

С другой стороны, эвристический принцип переноса, игравший вспомогательную наводящую роль во многих исследованиях в добулевозначной теории K-пространств, превращается с помощью булевозначного анализа в точный исследовательский метод.

(2) Если в 1.6.4 B — это σ-алгебра измеримых множеств по модулю множеств ненулевой меры μ, то $\mathscr{R}{\downarrow}$ изоморфно расширенному K-пространству измеримых функций $M(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Этот факт (для лебеговой меры на отрезке) был известен еще Скотту и Соловею (см. [108]). Если B — полная булева алгебра проекторов в гильбертовом пространстве, то $\mathscr{R}{\downarrow}$ изоморфно пространству тех самосопряженных операторов, у которых спектральная функция действует в B.

Указанные два частных случая теоремы Гордона интенсивно и плодотворно эксплуатировал Г. Такеути, см. [112], а также библиографию в [38]. Объект $\mathscr{R}{\downarrow}$ для общих булевых алгебр рассмотрел также Т. Йех [79, 80], переоткрыв по существу теорему Гордона. Отличие состоит в том, что в [79] (комплексное) расширенное K-пространство с единицей определяется другой системой аксиом и именуется полной стоуновой алгеброй.

(3) Реализационную теорему 1.6.7 получил А. Г. Кусраев [31]. Близкий результат (в других терминах) имеется в работе [81], в которой развивается булевозначная интерпретация теории линейно упорядоченных множеств. Следствия 1.6.8 $(3, 4)$ хорошо известны (см. [9, 22]).

Понятие максимального расширения для K-пространства другим способом ввел А. Г. Пинскер. Им же доказано существование единственного с точностью до изоморфизма максимального расширения для произвольного K-пространства. А. И. Юдин установил существование порядкового пополнения архимедовой векторной решетки. Соответствующие ссылки имеются в [9, 22]. Все эти факты без труда выводятся из 1.6.4 и 1.6.7 (подробности см. в [5]).

(4) Как уже отмечалось в 1.6.11 (1), первоначально попытки формализации эвристического принципа Канторовича приводили к

теоремам о сохранении соотношений (см. [9, 22]). Современные формы теорем о сохранении соотношений, использующих метод булевозначных моделей, можно найти в [12, 80], см. также [38].

1.7. Функциональное исчисление в K-пространствах

Важнейшие структурные свойства векторных решеток — представление пространствами функций, спектральная теорема, функциональное исчисление и т. п. — являются изображениями свойств поля действительных чисел в подходящей булевозначной модели. Остановимся коротко на булевозначном подходе к функциональному исчислению в K-пространствах.

1.7.1. Ниже нам потребуется понятие интеграла по спектральной мере. Пусть (Ω, Σ) — измеримое пространство, т. е. Ω — непустое множество и Σ — фиксированная σ-алгебра подмножества множества Ω. Отображение $\mu : \Sigma \to B$ называют *спектральной мерой*, если $\mu(\Omega \setminus A) = \mathbf{1} - \mu(A)$ и

$$\mu\biggl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\biggr) = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

для любой последовательности (A_n) элементов σ-алгебры Σ.

Пусть $B := \mathfrak{E}(E)$ — булева алгебра единичных элементов K-пространства E с фиксированной единицей $\mathbf{1}$. Возьмем измеримую функцию $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Для произвольного разбиения числовой прямой $\beta := (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ $(k \in \mathbb{Z})$, $\lim_{n\to\pm\infty} \lambda_n = \pm\infty$, положим $A_k := f^{-1}([\lambda_k, \lambda_{k+1}))$ и составим интегральные суммы

$$\underline{\sigma}(f, \beta) := \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k \mu(A_k), \quad \overline{\sigma}(f, \beta) := \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{k+1} \mu(A_k),$$

где суммы вычисляются в E. Если существует такой элемент $x \in E$, что $\sup\{\underline{\sigma}(f, \beta)\} = x = \inf\{\overline{\sigma}(f, \beta)\}$, где точные границы берутся по всевозможным разбиениям $\beta := (\lambda_k)$ числовой прямой, то говорят, что функция f интегрируема по спектральной мере μ или существует *спектральный интеграл* $I_\mu(f)$, и пишут при этом

$$I_\mu(f) := \int\limits_\Omega f\, d\mu := \int\limits_\Omega f(t)\, d\mu(t) := x.$$

1.7.2. Теорема. *Пусть $E := \mathscr{R}{\downarrow}$, а μ — спектральная мера со значениями в $B := \mathfrak{E}(E)$. Тогда для любой измеримой функции f интеграл $I_\mu(f)$ — единственный элемент K-пространства E, удовлетворяющий условию*

$$[\![\, I_\mu(f) < \lambda^{\wedge} \,]\!] = \mu(\{f < \lambda\}) \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

где $\{f < \lambda\} := \{t \in \Omega : f(t) < \lambda\}$.

Из этой теоремы видно, что если существует интеграл $I_\mu(f) \in E$, то отображение $\lambda \mapsto \mu(\{f < \lambda\})$ совпадает со спектральной функцией элемента $I_\mu(f)$. В частности, если E расширено, то $I_\mu(f)$ существует для любой измеримой функции f. Более того, из теоремы 1.6.4, используя элементарные свойства поля $\mathscr{R}$, можно легко получить следующий результат.

1.7.3. Теорема. *Пусть E — расширенное K-пространство, а $\mu : \Sigma \to B := \mathfrak{E}(E)$ — некоторая спектральная мера. Спектральный интеграл $I_\mu(\cdot)$ — это секвенциально о-непрерывный (линейный мультипликативный и решеточный) гомоморфизм из f-алгебры измеримых функций $M(\Omega, \Sigma)$ в E.*

1.7.4. Пусть $e_1, \dots, e_n : \mathbb{R} \to B$ — конечный набор спектральных функций со значениями в σ-алгебре B. Тогда существует единственная B-значная спектральная мера μ, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, для которой

$$\mu\left(\prod_{k=1}^{n} (-\infty, \lambda_k) \right) = \bigwedge_{k=1}^{n} e_k(\lambda_k),$$

каковы бы ни были $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

1.7.5. Возьмем упорядоченный набор элементов $x_1, \dots, x_n$, лежащих в K-пространстве E с единицей $\mathbf{1}$. Пусть $e^{x_k} : \mathbb{R} \to B := \mathfrak{E}(E)$ — спектральная функция элемента x_k. В соответствии с доказанным предложением существует спектральная мера $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to B$, для которой

$$\mu\left(\prod_{k=1}^{n} (-\infty, \lambda_k) \right) = \bigwedge_{k=1}^{n} e^{x_k}(\lambda_k).$$

Как видно, мера μ однозначно определяется упорядоченным набором $\mathfrak{X} := (x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Поэтому пишут $\mu_{\mathfrak{X}} := \mu$ и говорят, что $\mu_{\mathfrak{X}}$ — спектральная мера набора $\mathfrak{X}$. Для интеграла от измеримой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по спектральной мере $\mu_{\mathfrak{X}}$ приняты обозначения

$$\widehat{\mathfrak{X}}(f) := f(\mathfrak{X}) := f(x_1, \dots, x_n) := I_\mu(f).$$

Если $\mathfrak{X} := (x)$, то пишут также $\widehat{x}(f) := f(x) := I_\mu(f)$, а $\mu_x := \mu_{\mathfrak{X}}$ именуют *спектральной мерой элемента* x. Для функции $f(t) = t$ при $t \in \mathbb{R}$ из 1.7.2 вытекает *спектральная теорема Фрейденталя*:

$$x = \int\limits_{\mathbb{R}} t \, d\mu_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, de_\lambda^x.$$

Напомним, что пространство $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ всех борелевских функций на $\mathbb{R}^n$ является расширенным K_σ-пространством и точной f-алгеброй.

1.7.6. *Теорема.* *Спектральные меры набора $\mathfrak{X} := (x_1, \dots, x_n)$ и элемента $f(x_1, \dots, x_n)$ связаны соотношением*

$$\mu_{f(\mathfrak{X})} = \mu_{\mathfrak{X}} \circ f^{\leftarrow},$$

где $f^{\leftarrow} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ — гомоморфизм, действующий по правилу $A \mapsto f^{-1}(A)$. В частности, для измеримых функций $f \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ и $g \in \mathscr{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ будет $(g \circ f)(\mathfrak{X}) = g(f(\mathfrak{X}))$, если только существуют $f(\mathfrak{X})$ и $g(f(\mathfrak{X}))$.

$\lhd$ Согласно 1.7.2 для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ верно

$$\mu_{\mathfrak{X}}(-\infty, \lambda) = e_\lambda^{f(\mathfrak{X})} = [\![\, f(\mathfrak{X}) < \lambda^\wedge \,]\!] = \mu_{\mathfrak{X}} \circ f^{-1}(-\infty, \lambda).$$

Значит, спектральные меры $\mu_{f(\mathfrak{X})}$ и $\mu_{\mathfrak{X}} \circ f^{-1}$, определенные на $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, совпадают на интервалах вида $(-\infty, \lambda)$. Отсюда обычными в теории меры рассуждениями выводится, что эти меры совпадают везде. Для обоснования второй части нужно лишь заметить, что $(g \circ f)^{\leftarrow} = f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}$ и применить дважды уже установленное. $\rhd$

Из 1.7.3 и 1.7.6 получаем следующий факт.

1.7.7. Теорема. *Для упорядоченного набора $\mathfrak{X} := (x_1, \dots, x_n)$ элементов расширенного K-пространства E отображение*

$$\widehat{\mathfrak{X}} : f \mapsto \widehat{\mathfrak{X}}(f) \quad (f \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$$

представляет собой единственный секвенциально o-непрерывный гомоморфизм f-алгебры $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ в E, удовлетворяющий условию

$$\widehat{\mathfrak{X}}(d\lambda_k) = x_k \quad (k := 1, \dots, n),$$

где $d\lambda_k : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \lambda_k$ — координатная функция в $\mathbb{R}^n$.

1.7.8. Вкратце остановимся на двух реализациях расширенного K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$, которые можно получить с помощью 1.6.4. Напомним, что для компакта Q символом $C_\infty(Q)$ обозначается множество всех непрерывных функций из Q в $\overline{\mathbb{R}}$, принимающих бесконечные значения лишь на нигде не плотных множествах (см. 1.5.4 (2)).

Пусть $\mathfrak{R}(B)$ — множество всех разложений единицы в B.

1.7.9. Теорема. *Пусть B — полная булева алгебра. Множество $\mathfrak{R}(B)$ с подходящими операциями и порядком представляет собой расширенное K-пространство. Отображение, сопоставляющее элементу $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ разложение единицы $\lambda \mapsto [\![x < \lambda^\wedge]\!]$ для $\lambda \in \mathbb{R}$, является изоморфизмом K-пространств $\mathscr{R}{\downarrow}$ и $\mathfrak{R}(B)$.*

1.7.10. Теорема. *Пусть Q — стоунов компакт полной булевой алгебры B, а $\mathscr{R}$ — поле действительных чисел в модели $\mathbf{V}^{(B)}$. Векторная решетка $C_\infty(Q)$ изоморфна расширенному K-пространству $\mathscr{R}{\downarrow}$. Изоморфизм устанавливается сопоставлением элементу $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ функции $\widehat{x} : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ по формуле*

$$\widehat{x}(q) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : [\![x < \lambda^\wedge]\!] \in q\}.$$

1.7.11. Примечания.

(1) Понятия единицы, единичного элемента и характеристики (спектральной функции элемента) ввел Г. Фрейденталь. Им же установлена спектральная теорема, см. 1.7.5, а также [9, 22]. Из теоремы 1.7.9 вытекает, что для полной булевой алгебры B множество разложений единицы является расширенным K-пространством, база

которого изоморфна B. Этот факт принадлежит Л. В. Канторовичу [22]. Реализацию произвольного K-пространства в виде фундамента в $\mathfrak{R}(B)$ получил А. Г. Пинскер (см. [22]). Из 1.6.8 (1) и 1.7.10 вытекает реализация произвольного пространства в виде фундамента $C_\infty(Q)$. Этот факт впервые установили независимо Б. З. Вулих и Т. Огасавара (см. [9, 22]).

(2) Из 1.7.4 вытекает, что всякая спектральная функция со значениями в σ-алгебре определяет спектральную меру на борелевской σ-алгебре действительной прямой.

Этот факт впервые указал В. И. Соболев в [59]. Однако в [59] предполагалось, что такую меру можно получить методом продолжения Каратеодори. Как показал Д. А. Владимиров, для полной булевой алгебры счетного типа продолжение по Каратеодори возможно лишь в том случае, когда она регулярна. Итак, метод продолжения, приводящий к 1.7.4, существенно отличается от продолжения по Каратеодори и основан на представлении Люмиса — Сикорского булевых σ-алгебр. М. Райт получил утверждение 1.7.4 как следствие из установленной им теоремы Рисса для операторов со значениями в K-пространстве.

(3) Борелевские функции от элементов произвольного K-пространства с единицей, по всей видимости, впервые были рассмотрены В. И. Соболевым (см. [9, 59]). Теорема 1.7.6 в приведенной общности получена в [41]. В [41] строится также борелевское функциональное исчисление (счетных и несчетных) наборов элементов произвольного K-пространства. Булевозначное доказательство теоремы 1.7.7 приводится также в [79].

(4) Другие аспекты булевозначного анализа векторных решеток см. в [11, 12, 29, 38, 56, 79, 81, 112, 113].

1.8. Решеточно нормированные пространства

Функциональные пространства часто допускают естественную нормировку посредством элементов векторной решетки. Это обстоятельство определяет некоторые структурные свойства изучаемых пространств. Помимо этого, норма со значениями в векторной решетке позволяет выделить интересный класс мажорируемых операторов. Начальные сведения об указанных объектах излагаются в текущем параграфе. Подробности можно найти в [29, 34, 36].

1.8.1. Рассмотрим векторное пространство X и вещественную векторную решетку E. Не оговаривая каждый раз, будем считать, что все рассматриваемые векторные решетки архимедовы. Отображение $p : X \to E_+$ назовем *векторной* (*E-значной*) *нормой*, если оно удовлетворяет аксиомам:

(1) $p(x) = 0 \leftrightarrow \ x = 0 \quad (x \in X)$;

(2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad (x \in X,\ \lambda \in \mathbb{R})$;

(3) $p(x + y) \le p(x) + p(y) \quad (x, y \in X)$.

Векторную норму p именуют *разложимой* или *нормой Канторовича*, если

(4) для любых $e_1, e_2 \in E_+$ и $x \in X$ из $p(x) = e_1 + e_2$ следует существование таких $x_1, x_2 \in X$, что $x = x_1 + x_2$ и $p(x_l) = e_l$ $(l := 1,\ 2)$.

Тройку (X, p, E) (или проще $X, (X, p)$, опуская подразумеваемые параметры) называют *решеточно нормированным пространством*, если p есть E-значная норма на векторном пространстве X. Если норма p разложима, то и само пространство X называют разложимым.

Если (X, p, E) — решеточно нормированное пространство, причем E — нормированная решетка, то на X можно ввести смешанную норму: $|\!|\!| x |\!|\!| := \| p(x) \|$ $(x \in X)$. Нормированное пространство $X := (X, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ в этой ситуации называют также *пространством со смешанной нормой.* В силу неравенства $|p(x) - p(y)| \le p(x - y)$ и монотонности нормы в E векторная норма p будет непрерывным оператором из $(X, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ в E.

1.8.2. Возьмем сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ в пространстве X. Говорят, что она *bo-сходится* к элементу $x \in X$ и пишут $bo\text{-}\lim x_\alpha = x$, если существует убывающая сеть $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ в E_+ такая, что $\inf\, e_\gamma = 0$ и для любого $\gamma \in \Gamma$ найдется индекс $\alpha\,(\gamma) \in \mathrm{A}$, для которого $p\,(x - x_\alpha) \le e_\gamma$ при всех $\alpha \ge \alpha\,(\gamma)$. Сеть (x_α) назовем *bo-фундаментальной,* если сеть $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha,\,\beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{A}}$ является bo-сходящейся к нулю. Решеточно нормированное пространство называют *bo-полным*, если всякая o-фундаментальная сеть в нем o-сходится к элементу этого пространства. Аналогично определяется полнота относительно сходимости с регулятором. Нетрудно показать, что если E — банахова решетка, то пространство со смешанной нормой $(X, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ банахово в том и только в том случае, когда (X, p, E) полно относительно сходимости с регулятором.

Разложимое bo-полное решеточно нормированное пространство называют *пространством Банаха — Канторовича.*

Пусть (Y, q, F) — пространство Банаха — Канторовича, причем $F = q(Y)^{\perp\perp}$. Говорят, что Y *расширено*, если $mF = F$, т. е. если расширенным является нормирующее пространство F. Это равносильно тому, что Y разложимо, bo-полно и всякое дизъюнктное семейство в нем bo-суммируемо. Пространство Y называют *максимальным расширением* решеточно нормированного пространства (X, p, E) при соблюдении условий:

(1) $F = mE$ (и, в частности, Y расширено);

(2) существует линейная изометрия $\imath : X \to Y$;

(3) если Z — разложимое bo-полное подпространство Y и $\imath(X) \subset Z$, то $Z = Y$.

1.8.3. *Теорема.* *Пусть $(\mathscr{X}, \rho)$ — банахово пространство в модели $\mathbf{V}^{(B)}$. Положим $X := \mathscr{X}{\downarrow}$ и $p := \rho{\downarrow}$. Имеют место утверждения:*

(1) *$(X, p, \mathscr{R}{\downarrow})$ — это расширенное пространство Банаха — Канторовича;*

(2) *на пространстве X можно ввести структуру точного унитарного модуля над кольцом $\Lambda := \mathscr{C}{\downarrow}$ так, что*

(a) $(\lambda\mathbf{1})x = \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{C},\ x \in X)$,

(b) $p(ax) = |a|p(x) \quad (a \in \mathscr{C}{\downarrow},\ x \in X)$,

(c) $b \leq [\![x = \mathbf{0}]\!] \leftrightarrow \chi(b)x = \mathbf{0} \quad (b \in B,\ x \in X)$, *где χ — изоморфизм из B на $\mathfrak{E}(\mathscr{R}{\downarrow})$.*

Возникшее таким образом расширенное пространство Банаха — Канторовича $\mathscr{X}{\downarrow} := (\mathscr{X}, \rho){\downarrow} := (\mathscr{X}{\downarrow}, \rho{\downarrow}, \mathscr{R}{\downarrow})$ называют *спуском банахова пространства* $(\mathscr{X}, \rho)$.

1.8.4. *Теорема.* *Для любого решеточно нормированного пространства (X, p, E) существует единственное с точностью до линейной изометрии банахово пространство $\mathscr{X}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$, где $B \simeq \mathfrak{B}(p(X)^{\perp\perp})$, для которого спуск $\mathscr{X}{\downarrow}$ является максимальным расширением (X, p, E).*

1.8.5. Банахово пространство $\mathscr{X}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ называют *булевозначной реализацией* рассматриваемого решеточно нормированного пространства X, если $\mathscr{X}{\downarrow}$ есть максимальное расширение X.

Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — булевозначные реализации пространств Банаха — Канторовича X и Y соответственно, нормированных посредством

одного и того же расширенного K-пространства E. Пусть, далее, $\mathscr{L}^{(B)}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ — пространство линейных ограниченных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$, где $B \simeq \mathfrak{B}(E)$. Обозначим через $\mathscr{L}_b(X,Y)$ множество линейных операторов из $T : X \to Y$, ограниченных в следующем смысле: существует $\pi \in \mathrm{Orth}(E)$ такой, что $|Tx| \leq \pi|x|$ при всех $x \in X$. Спуск операторов $\mathscr{T} \mapsto \mathscr{T}{\downarrow}$ осуществляет линейную изометрию решеточно нормированных пространств $\mathscr{L}^{(B)}(\mathscr{X},\mathscr{Y}){\downarrow}$ и $\mathscr{L}_b(X,Y)$.

1.8.6. Пусть X — нормированное пространство. Допустим, что в $\mathscr{L}(X)$ имеется полная булева алгебра $\mathscr{B}$ проекторов единичной нормы, изоморфная B. В этой ситуации мы будем отождествлять булевы алгебры $\mathscr{B}$ и B и писать $B \subset \mathscr{L}(X)$. Назовем X *нормированным B-пространством*, если $B \subset \mathscr{L}(X)$ и для любого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в B выполнены два условия:

(1) если для некоторого $x \in X$ верно $b_\xi x = 0$ для всех $\xi \in \Xi$, то $x = 0$;

(2) если для $x \in X$ и семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в X верно $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$, то $\|x\| \leq \sup\{\|b_\xi x_\xi\| : \xi \in \Xi\}$.

Условия (1) и (2) равносильны следующим условиям ($1'$) и ($2'$) соответственно:

($1'$) для каждого $x \in X$ существует наибольший проектор $b \in B$ такой, что $bx = 0$;

($2'$) если x, (x_ξ) и (b_ξ) те же, что и в (2), то мы имеем $\|x\| = \sup\{\|b_\xi x_\xi\| : \xi \in \Xi\}$.

Из ($2'$) следует, в частности, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} b_k x\right\| = \max_{k:=1,\dots,n} \|b_k x\|$$

для $x \in X$ и попарно дизъюнктных проекторов $b_1,\dots,b_n \in B$.

Элемент $x \in X$, удовлетворяющий условию $b_\xi x = b_\xi x_\xi$, где (b_ξ) — разбиение единицы, будем называть *перемешиванием* семейства (x_ξ) (относительно (b_ξ)). При соблюдении условия (1) перемешивание единственно. Условие (2) допускает такую эквивалентную формулировку: единичный шар B_X замкнут относительно перемешиваний.

Нормированное B-пространство назовем *B-циклическим*, если в нем существует перемешивание любого ограниченного по норме

семейства относительно любого разбиения единицы в B. Учитывая сказанное выше, можем утверждать, что нормированное пространство X будет B-циклическим тогда и только тогда, когда для любого разбиения единицы $(b_\xi) \subset B$ и произвольного семейства $(x_\xi) \subset B_X$ существует единственный элемент $x \in B_X$ такой, что $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ для всех ξ.

Изометрию нормированных B-пространств назовем B-изометрией, если она линейна и перестановочна с каждым проектором из B. Будем говорить, что Y — это B-циклическое расширение B-пространства X, если Y является B-циклическим и существует B-изометрия $\imath : X \to Y$ такая, что всякое B-циклическое подпространство в Y, содержащее $\imath(X)$, совпадает с Y. Можно показать, что для банахова B-пространства существует единственное с точностью до B-изометрии B-циклическое расширение.

Возьмем банахово пространство $(\mathscr{X}, \rho)$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Пусть Λ — ограниченная часть K-пространства $\mathscr{C}{\downarrow}$ (= порядковый идеал в $\mathscr{C}{\downarrow}$, порожденный единицей). Ограниченную $\mathscr{R}{\downarrow}$, порожденный единицей). Ограниченную часть пространства $\mathscr{X}{\downarrow}$, т. е. множество $\{x \in \mathscr{X}{\downarrow} : \rho{\downarrow}(x) \in \Lambda\}$, называют *ограниченным спуском* $\mathscr{X}$ и обозначают иногда символом $\mathscr{X}{\downarrow}^\infty$. Ограниченный спуск банахова пространства является банаховым пространством со смешанной нормой $|\!|\!| x |\!|\!| := \|p(x)\|_\infty$, где $\|z\|_\infty := \inf\{0 < \alpha \in \mathbb{R} : |z| \le \alpha\mathbf{1}\}$ для $z \in \Lambda$.

1.8.7. *Теорема.* *Для банахова пространства X равносильны следующие утверждения:*

- **(1)** *X — разложимое пространство со смешанной нормой, причем нормирующая решетка является K-пространством ограниченных элементов;*
- **(2)** *X — банахово B-пространство;*
- **(3)** *B-циклическое расширение пространства X является B-изометричным ограниченному спуску некоторого банахова пространства из модели $\mathbf{V}^{(B)}$.*

1.8.8. Предположим, что X — нормированное B-пространство и Y — B-циклическое банахово пространство. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ обозначают булевозначные реализации X и Y.

Пространство $\mathscr{L}_B(X, Y)$ всех ограниченных линейных операторов, перестановочных с проекторами из B, является B-изометричным ограниченному спуску пространства $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ ограниченных

линейных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Более того, оператору $T \in \mathscr{L}_B(X,Y)$ соответствует элемент $\mathscr{T} := T{\uparrow}$ из $\mathbf{V}^{(B)}$, определяемый формулами $[\![\mathscr{T} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}]\!] = \mathbf{1}$ и $[\![\mathscr{T}\imath x = \imath Tx]\!] = \mathbf{1}$ для всех $x \in X$, где $\imath$ одновременно обозначает вложения X в $\mathscr{X}{\downarrow}$ и Y в $\mathscr{Y}{\downarrow}$.

1.8.9. Пространство $X^{\#} := \mathscr{L}_B(X,\Lambda)$ будем называть *B-сопряженным* к X.

Пусть $\mathscr{X}^*$ — пространство, сопряженное к $\mathscr{X}$. Обозначим через $\simeq$ и $\simeq_B$ отношения изометрического изоморфизма и изометрического B-изоморфизма между банаховыми пространствами. Предположим дополнительно, что X, Y, $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ таковы же, как и в 1.8.8.

(1) $X^{\#}\simeq_B Y \leftrightarrow [\![\mathscr{X}^* \simeq \mathscr{Y}]\!] = \mathbf{1}$.

(2) *Если $\overline{X}$ — это B-циклическое пополнение X, то имеет место равенство $X^{\#} = \overline{X}^{\#}$.*

1.8.10. Пусть A — *стоунова алгебра* (= коммутативная AW^*-алгебра) и B — полная булева алгебра ее проекторов. Рассмотрим унитарный A-модуль X. Отображение $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle :\ X \times X \to A$ называют *A-значным скалярным произведением*, если для любых $x,y,z \in X$ и $a \in A$ выполнены условия:

(1) $\langle x\,|\,x\rangle \geq \mathbf{0}$; $\langle x\,|\,x\rangle = \mathbf{0} \leftrightarrow x = \mathbf{0}$;

(2) $\langle x\,|\,y\rangle = \langle y,\ x\rangle^*$;

(3) $\langle ax\,|\,y\rangle = a\langle x\,|\,y\rangle$;

(4) $\langle x+y\,|\,z\rangle = \langle x\,|\,z\rangle + \langle y\,|\,z\rangle$.

Располагая A-значным скалярным произведением, можно ввести в X норму по формуле

(5) $|\!|\!| x |\!|\!| := \sqrt{\|\langle x|x\rangle\|} \quad (x \in X)$,

а также векторную норму

(6) $\boldsymbol{|} x \boldsymbol{|} := \sqrt{\langle x|x\rangle} \quad (x \in X)$.

При этом $|\!|\!| x |\!|\!| = \|\boldsymbol{|} x \boldsymbol{|}\|$ $(x \in X)$, т. е. (5) определяет смешанную норму на X.

Можно показать, что пара $(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ представляет собой B-циклическое банахово пространство в том и только в том случае, если $(X, \boldsymbol{|}\cdot\boldsymbol{|})$ — пространство Банаха — Канторовича [36].

Модулем Капланского — Гильберта или *AW^*-модулем* (*над* A) называют унитарный A-модуль с A-значным скалярным произведением, удовлетворяющий любому из этих двух эквивалентных условий.

1.8.11. *Теорема.* *Ограниченный спуск произвольного гильбертова пространства в модели $\mathbf{V}^{(B)}$ является модулем Капланского — Гильберта над стоуновой алгеброй Λ. Наоборот, если X — модуль Капланского — Гильберта над Λ, то существует гильбертово пространство $\mathscr{X}$ в $\mathbf{V}^{(B)}$, ограниченный спуск которого унитарно эквивалентен X. Это пространство единственно с точностью до унитарной эквивалентности внутри $\mathbf{V}^{(B)}$.*

1.8.12. Как обычно, элемент $\mathscr{X} \in \mathbf{V}^{(B)}$ называют *булевозначной реализацией* модуля Капланского — Гильберта X.

Предположим, что $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ — пространство ограниченных линейных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Пусть $\mathrm{Hom}(X, Y)$ обозначает пространство всех ограниченных Λ-линейных операторов из X в Y, где X и Y — модули Капланского — Гильберта над стоуновой алгеброй Λ. Легко видеть, что $\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathscr{L}_B(X, Y)$.

Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — гильбертовы пространства внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Пусть X и Y обозначают ограниченные спуски $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$. Для каждого ограниченного Λ-линейного оператора $\Phi : X \to Y$ элемент $\varphi := \Phi{\uparrow}$ является ограниченным линейным оператором из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Более того, $[\![\, \|\varphi\| \le c^{\wedge} \,]\!] = \mathbf{1}$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. Отображение $\Phi \mapsto \varphi$ является B-линейной изометрией между B-циклическими банаховыми пространствами $\mathrm{Hom}(X, Y)$ и $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}){\downarrow}^{\infty}$.*

1.8.13. Примечания.

(1) Впервые понятие решеточно нормированного пространства появилось в работе Л. В. Канторовича [19]. Аксиома разложимости 1.8.1 (4) необычна и в последующем иногда опускалась как несущественная. Ее принципиальное значение выяснилось в рамках булевозначного анализа (см. [29]). В упомянутой работе Л. В. Канторовича были введены также мажорируемые операторы, см. также [20]. Продвинутая теория мажорируемых операторов построена лишь в последние 10–15 лет (см. [29, 34, 39]).

(2) Пространства со смешанной нормой в смысле этого параграфа изучались в [32], см. также [34]. Там же имеются различные

приложения концепции смешанной нормы к геометрии банаховых пространств и теории линейных операторов. Ограниченный спуск ранее изучал Г. Такеути в связи с алгебрами фон Неймана и C^*-алгебрами в булевозначных моделях [112, 113].

(3) Современная структурная теория AW^*-алгебр и AW^*-модулей начинается с работ И. Капланского [83–85]. Такие объекты естественно возникают на пути алгебраизации теории операторных алгебр фон Неймана. Результаты о булевозначной реализации AW^*-алгебр и AW^*-модулей получил М. Озава [97–100].

1.9. Нестандартные оболочки

В геометрической теории банаховых пространств важное место занимает понятие нестандартной оболочки.

1.9.1. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — внутреннее нормированное пространство. Элемент $x \in E$ называют *конечным* (*бесконечно малым*), если $\|x\|$ — конечное (бесконечно малое) число. Обозначим через $\operatorname{fin}(E)$ и $\mu(E)$ внешние множества соответственно всех конечных и всех бесконечно малых элементов пространства E. Тогда $\operatorname{fin}(E)$ — (внешнее) векторное пространство над полем ${}^\circ\mathbb{R}$, а $\mu(E)$ — его подпространство. Фактор-пространство $\operatorname{fin}(E)/\mu(E)$ обозначают символом $\widehat{E}$. На $\widehat{E}$ вводят норму формулой

$$\|\pi x\| = \operatorname{st}(\|x\|) \in {}^\circ\mathbb{R} \quad (x \in \operatorname{fin}(E)),$$

где $\pi : \operatorname{fin}(E) \to \widehat{E}$ — фактор-гомоморфизм. При этом $(\widehat{E}, \|\cdot\|)$ — внешнее нормированное пространство, именуемое *нестандартной оболочкой* E. Если внутренняя размерность E конечна, то пространство $\widehat{E}$ называют *гиперконечномерным*. Если пространство $(E, \|\cdot\|)$ стандартно, то ${}^\circ E$ с индуцированной из E нормой будет внешним нормированным пространством, а ограничение π на ${}^\circ E$ — изометрическим вложением ${}^\circ E$ в $\widehat{E}$. Обычно считают, что ${}^\circ E \subset \widehat{E}$.

1.9.2. *Теорема.* *Пространство $\widehat{E}$ банахово для каждого внутреннего (не обязательно полного) нормированного пространства E.*

$\lhd$ Пусть $B_X(a, r)$ — замкнутый шар в X с центром в a радиуса r. Возьмем последовательность вложенных шаров $B_{\widehat{E}}(\widetilde{x}_n, r_n)$, где $(x_n)_{n \in {}^\circ\mathbb{N}} \subset E$, $\widetilde{x}_n = \pi x_n$, $(r_n)_{n \in {}^\circ\mathbb{N}} \subset {}^\circ\mathbb{R}$ и $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Можно считать, что r_n убывает. Тогда последовательность внутренних замкнутых шаров $B_E(x_n, r_n + r_n/2^{n+1}) \subset E$ вложенная. В силу принципа

идеализации существует элемент $x \in E$, содержащийся в каждом из этих шаров. Элемент $\widetilde{x} = \pi x$ — общая точка шаров $B_{\widehat{E}}(\widetilde{x}_n, r_n)$. $\triangleright$

1.9.3. Допустим, что E — внутренняя нормированная решетка. Тогда в $\widehat{E}$ можно ввести отношение порядка так, чтобы фактор-гомоморфизм π оказался положительным. Точнее, если $\widetilde{x} := \pi x$ и $y := \pi y$, то полагают по определению

$$\widetilde{x} \leq \widetilde{y} \leftrightarrow (\exists z \in \mu(E))(x \leq y + z).$$

Теорема. *Нестандартная оболочка $\widehat{E}$ — банахова решетка с секвенциально o-непрерывной нормой. Более того, всякая возрастающая и ограниченная по норме последовательность в $\widehat{E}$ будет порядково ограниченной.*

В то же время следует подчеркнуть, что нестандартная оболочка внутренней нормированной решетки может и не являться K-пространством (и даже K_σ-пространством; например, $\widehat{c}_0$, где c_0 — решетка сходящихся к нулю последовательностей).

1.9.4. ***Теорема.*** *Для любой внутренней нормированной решетки E равносильны утверждения:*

(1) *$\widehat{E}$ есть K-пространство;*

(2) *$\widehat{E}$ есть K_σ-пространство;*

(3) *$\widehat{E}$ имеет o-непрерывную норму;*

(4) *в $\widehat{E}$ не существует замкнутой подрешетки, изометрически и порядково изоморфной c_0.*

1.9.5. Говорят, что нормированная решетка *богата конечномерными подрешетками*, если выполняется следующее условие: для каждого конечного набора $x_1, \dots, x_n \in {}^\circ E, n \in {}^\circ\mathbb{N}$, и произвольного $0 < \varepsilon \in {}^\circ\mathbb{R}$ существуют конечномерная подрешетка $E_0 \subset {}^\circ E$ и элементы $y_1, \dots, y_n \in E_0$ такие, что $\|x_k - y_k\| < \varepsilon$ $(k := 1, \dots, n)$.

Стандартная банахова решетка E богата конечномерными подрешетками в том и только в том случае, если ${}^\circ E$ содержится в некотором гиперконечномерном подпространстве оболочки $\widehat{E}$.

1.9.6. Предположим теперь, что E и F — внутренние нормированные пространства и $T : E \to F$ — внутренний линейный ограниченный оператор. Множество

$$c(T) := \{C \in \mathbb{R} : (\forall x \in E) \|Tx\| \leq C\|x\|\}$$

внутреннее и ограничено снизу. Поэтому существует $\|T\| := \inf c(T)$. Если $\|T\|$ — конечное число, то из неравенства $\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|$ для всех $x \in E$ видно, что $T(\mathrm{fin}(E)) \subset \mathrm{fin}(E)$ и $T(\mu(E)) \subset \mu(E)$. Стало быть, корректно определен внешний оператор $\widehat{T} : \widehat{E} \to \widehat{F}$ формулой

$$\widehat{T}\pi x = \pi T x \quad (x \in E).$$

Оператор $\widehat{T}$ линеен (над ${}^{\circ}\mathbb{R}$) и ограничен, причем $\|\widehat{T}\| = \mathrm{st}(\|T\|)$. Естественно называть $\widehat{T}$ *нестандартной оболочкой* T.

Если E и F — нормированные решетки, а оператор T положителен, то $\widehat{T}$ — положительный секвенциально o-непрерывный оператор.

1.9.7. Нетрудно видеть, что для ограниченных операторов S и T выполняется $(S \circ T)^{\wedge} = \widehat{S} \circ \widehat{T}$, а кроме того, $\widehat{I_E} = I_{\widehat{E}}$, где I_X — тождественный оператор на X. Таким образом, операция нестандартной оболочки представляет собой ковариантный функтор (в подходящих категориях нормированных пространств). Возникает огромное число вопросов относительно общих свойств этого функтора. Как взаимодействует функтор нестандартной оболочки с другими функторами теории банаховых пространств (решеток)? Как преобразуются известные в геометрической теории банаховых пространств свойства (Радона — Никодима, Крейна — Мильмана и т. п.) при действии этого функтора? Как устроены оболочки конкретных пространств? Аналогичные вопросы можно сформулировать и для операторов. С основными идеями и методами можно ознакомиться по обзорам [70, 73, 75]. Здесь же мы вкратце упомянем три направления исследования и сформулируем простые утверждения иллюстративного характера.

1.9.8. Вопрос об аналитическом описании нестандартных оболочек наиболее полно изучен для случая классических банаховых пространств, см. [75].

Теорема. *Справедливы утверждения:*

(1) *Если E — внутреннее AL_p-пространство, где p, $p \ge 1$, — конечный элемент $\mathbb{R}$, то $\widehat{E}$ — это AL_r-пространство для $r = \mathrm{st}(p)$.*

(2) *Если E — внутреннее AL_p-пространство, где p, $p \ge 1$, — бесконечный элемент $\mathbb{R}$, или если E — внутреннее AM-пространство, то $\widehat{E}$ — это AM-пространство.*

(3) *Если Q — внутренний компакт, а $C(Q)$ — внутреннее пространство непрерывных функций из Q в $\mathbb{R}$, то $C(Q)^\wedge$ линейно изометрично $C(\widehat{Q})$, где $\widehat{Q}$ — внешнее пополнение Q в некоторой равномерности.*

В аксиоматической теории внешних множеств можно получать лишь общие результаты такого рода. Однако если работать в классической установке нестандартного анализа (т. е. в конечном фрагменте универсума фон Неймана), то возможно детальное описание нестандартных оболочек. Так, например, если нестандартная суперструктура ω_0-насыщена (ограничение снизу) и при этом обладает свойством ω_0 -изоморфизма (ограничение сверху), то нестандартная оболочка банаховой решетки L_p ([0,1]) изометрически изоморфна $\mathfrak{l}_p$-сумме k экземпляров пространства $L_p([0,1]^k)$, где $k = 2^{\omega_0}$.

1.9.9. Обратимся к локальной геометрии нормированных пространств. Напомним, что некоторые свойства нормированного пространства являются «локальными» в том смысле, что они определяются устройством и расположением конечномерных подпространств изучаемого пространства. В этом смысле нестандартные оболочки устроены намного лучше. Так, например, часто случается, что если какое-то свойство выполнено «приближенно» на конечномерных подпространствах, то это же свойство в нестандартной оболочке выполняется уже «точно».

Пусть E и F — банаховы решетки. Говорят, что E *финитно представима* в F (как банахова решетка), если для каждой конечномерной подрешетки $E_0 \subset E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует линейный и решеточный изоморфизм $T : E_0 \to F$ такой, что $\|x\| \leq \|Tx\| \leq (1 + \varepsilon)\|x\|$ для всех $x \in E_0$.

Теорема. *Предположим, что E — стандартная банахова решетка, богатая конечномерными подрешетками (1.9.5), а F — внутренняя банахова решетка. Тогда ${}^\circ E$ финитно представима в $\widehat{F}$ в том и только в том случае, если стандартное ядро ${}^\circ E$ линейно изометрично и решеточно изоморфно подрешетке в $\widehat{F}$.*

1.9.10. Обратимся теперь к некоторым теоретико-модельным свойствам банаховых пространств.

Введем следующий язык первого порядка $\mathbb{L}_B$. Сигнатура этого языка — $\{=, +, p, Q\} \cup \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.

Всякое банахово пространство E можно рассматривать как модель $\mathbb{L}_B$, интерпретируя $=$ и $+$ соответственно как равенство и сложение, p — как $\{x \in E : \|x\| \le 1\}$, Q — как $\{x \in E : \|x\| \ge 1\}$ и, наконец, каждое $r \in \mathbb{Q}$ — как операцию умножения на r.

Формулу φ языка $\mathbb{L}_B$ вида $(Sx_1)\dots(Sx_n)(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$, где S — ограниченный квантор, а φ_k — конъюнкция формул вида $u = v, p(u), Q(u)$, называют *ограниченной позитивной*.

Если φ — формула и m — натуральное число ($\ne 0$), то φ^m — новая формула, которая строится следующим образом. В подформулах $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ заменяют $u = v$ на $p(m(u - v))$, $p(u)$ на $p((1 - 1/m)u)$, $Q(u)$ на $Q((1 + 1/m)u)$. Если φ^m выполняется в E для всех $m \in \mathbb{N}$, то говорят, что φ *выполнено в E аппроксимативно*.

Банаховы пространства E и F называются *аппроксимативно эквивалентными*, если в них выполняются аппроксимативно одни и те же ограниченные позитивные формулы.

Теорема. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Банаховы пространства являются аппроксимативно эквивалентными в том и только в том случае, если они имеют изометричные нестандартные оболочки.*

(2) *Пусть $1 \le p < \infty$, а μ и ν — конечные меры. Пространства $L_p(\mu)$ и $L_p(\nu)$ являются аппроксимативно эквивалентными в том и только в том случае, если меры μ и ν имеют одно и то же конечное число атомов или же обе имеют бесконечное число атомов.*

1.9.11. Примечания.

(1) Нестандартная оболочка банахова пространства была введена Люксембургом [90]. Разновидностью нестандартной оболочки является ультрапроизведение банаховых пространств, введенное Дакуня–Кастелем и Кривиным [66]. О роли этих понятий в теории банаховых пространств и важнейших результатах, а также соответствующую библиографию см. в [70, 73, 75].

(2) Язык первого порядка, описанный в 1.9.10, применил Хенсон [71], а затем Штерн [111, 110]. Понятия финитной представимости возникли в теории банаховых пространств задолго до привлечения теоретико-модельной техники. Оно введено А. Дворецким (термин принадлежит Джеймсу).

(3) Относительно 1.9.4, 1.9.5 и 1.9.9 см. [44, 52]. Результаты из 1.9.8 установлены в [72] и [74], а 1.9.10 — в [72].

1.10. Мера Лёба

Одной из наиболее важных конструкций нестандартного анализа является мера Лёба, нашедшая применение в ряде разделов функционального анализа, теории вероятностей и стохастическом моделировании, см. [3, 65]. В этом параграфе мы приведем несколько результатов о строении меры Лёба.

1.10.1. Пусть $(X, \mathscr{A}, \nu)$ — внутреннее пространство с конечно аддитивной положительной мерой; точнее, $\mathscr{A}$ — внутренняя алгебра подмножеств внутреннего множества X и $\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ — внутренняя конечно аддитивная положительная функция на. Рассмотрим внешнюю функцию ${}^\circ\nu : A \mapsto {}^\circ(\nu(A)) \in {}^\circ\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $(A \in \mathscr{A})$, где ${}^\circ(\nu(A))$ — стандартная часть $\nu(A)$, если $\nu(A)$ конечно и ${}^\circ(\nu(A)) = +\infty$ в противном случае. Легко видеть, что функция ${}^\circ\nu$ конечно аддитивна.

1.10.2. *Теорема.* *Конечно аддитивная мера* ${}^\circ\nu : \mathscr{A} \to {}^\circ\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *обладает единственным счетно аддитивным распространением* λ *на* σ*-алгебру* $\sigma(\mathscr{A})$*, порожденную алгеброй* $\mathscr{A}$*. Более того,*

$$\lambda(B) = \inf\{{}^\circ\nu(A) : B \subset A,\ A \in \mathscr{A}\} \quad (B \in \sigma(\mathscr{A})).$$

Если $\lambda(B) < +\infty$*, то верно также*

$$\lambda(B) = \sup\{{}^\circ\nu(A) : A \subset B,\ A \in \mathscr{A}\} \quad (B \in \sigma(\mathscr{A})),$$

причем для каждого $B \in \sigma(\mathscr{A})$ *существует* $A \in \mathscr{A}$ *такой, что* $\lambda(A \triangle B) = 0$.

Для произвольного $B \in \sigma(\mathscr{A})$ *либо существует* $A \in \mathscr{A}$ *такое, что* $A \subseteq B$ *и* ${}^\circ\nu(A) = +\infty$*, либо существует последовательность* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *множеств из* $\mathscr{A}$*, такая, что* $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *и* ${}^\circ\nu(A_n) < +\infty$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

1.10.3. Пусть $S(\mathscr{A})$ — пополнение $\sigma(\mathscr{A})$ относительно меры λ, а ν_L — продолжение λ на $S(\mathscr{A})$. Можно показать, что если $\nu_L(X) < +\infty$, то $B \in S(\mathscr{A})$ в том и только в том случае, когда

$$\sup\{{}^\circ\nu(A) : A \subseteq B,\ A \in \mathscr{A}\} = \inf\{{}^\circ\nu(A) : B \subseteq A,\ A \in \mathscr{A}\} = \nu_L(B).$$

Набор $(X, S(\mathscr{A}), \nu_L)$, представляющий собой пространство с σ-аддитивной мерой ν_L, называют *пространством Лёба*, а меру ν_L — *мерой Лёба.*

1.10.4. Функция $f : X \to {}^\circ\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ называется *измеримой по Лёбу*, если она измерима относительно σ-алгебры $S(\mathscr{A})$. Внутренняя функция $F : X \to \mathbb{R}$ называется $\mathscr{A}$-измеримой, если $\{x \in X : F(x) \le t\} \in \mathscr{A}$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Внутренняя функция F называется *простой*, если $\operatorname{rng}(F)$ есть гиперконечное множество. Очевидно, простая внутренняя функция F является $\mathscr{A}$-измеримой тогда и только тогда, когда $F^{-1}(\{t\}) \in \mathscr{A}$ для любого $t \in \mathbb{R}$. В этом случае для F определен внутренний интеграл

$$\int\limits_X F\,d\nu = \sum_{t \in rng(F)} F(t)\nu(F^{-1}(\{t\})).$$

Если $A \in \mathscr{A}$, то, как обычно, $\int_A F\,d\nu = \int_X f \cdot \chi_A\,d\nu$, где χ_A — характеристическая функция множества A.

Обозначим $A_N := \{x \in X : |F(x)| \ge N\}$. Внутренняя простая $\mathscr{A}$-измеримая функция $F : X \to \mathbb{R}$ называется $\mathscr{S}$-интегрируемой, если $\int_{A_N} F\,d\nu \approx 0$, для любого бесконечно большого $N \in \mathbb{N}$. Две следующие теоремы относятся к случаю пространств Лёба с конечной мерой: $\nu_L(X) < +\infty$.

1.10.5. *Теорема.* *Для любой внутренней простой $\mathscr{A}$-измеримой функции $F : X \to \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *F является $\mathscr{S}$-интегрируемой;*

(2) *${}^\circ\!\int_X |F|\,d\nu < +\infty$ и $\nu(A) \approx 0$ влечет $\int_A |F|\,d\nu \approx 0$ для любого $A \in \mathscr{A}$;*

(3) *$\int_X {}^\circ|F|\,d\nu_L = {}^\circ\!\int_X |F|\,d\nu$.*

Внутренняя $\mathscr{A}$-измеримая функция $F : X \to \mathbb{R}$ называется *лифтингом* функции $f : X \to {}^\circ\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, если $f(x) = {}^\circ F(x)$ для ν_L-почти всех x.

1.10.6. *Теорема.* *Имеют место утверждения:*

(1) *Функция $f : X \to {}^\circ\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ измерима тогда и только тогда, когда она имеет лифтинг.*

(2) *Функция $f : X \to {}^\circ\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ интегрируема тогда и только тогда, когда она имеет $\mathscr{S}$-интегрируемый лифтинг $F : X \to \mathbb{R}$.*

(3) *Если $F : X \to \mathbb{R}$ — это $\mathscr{S}$-интегрируемый лифтинг функции $f : X \to {}^\circ\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, то имеет место равенство $\int_X f\,d\nu_L = {}^\circ\!\int_X F\,d\nu$.*

1.10.7. Предположим, что X — гиперконечное множество, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$ и $\nu(A) = \Delta|A|$ при любом $A \in \mathscr{A}$, где Δ — значение ν на одноэлементных подмножествах X, а $|A|$ — число элементов множества A.

Соответствующее пространство Лёба обозначается $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$, а мера ν_Δ называется *равномерной мерой Лёба.*

Если $\Delta = |X|^{-1}$, то пространство Лёба называют *каноническим* и обозначают (X, S, ν_L) или (X, S^X, ν_L^X).

В случае равномерных мер Лёба всякая внутренняя функция $F : X \to \mathbb{R}$ является простой и $\mathscr{A}$-измеримой, причем $\int_A F\, d\nu = \Delta \sum_{x \in A} F(x)$ для любого $A \in \mathscr{A}$.

Мера Лёба ν_Δ конечна при условии, что число $\Delta \cdot |X|$ конечно. В случае конечной меры Лёба, если $F : X \to \mathbb{R}$ является $\mathscr{S}$-интегрируемым лифтингом функции $f : X \to {}^\circ\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, то в силу теоремы 1.10.6

$$\int\limits_X f\, d\nu_\Delta = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{x \in X} F(x)\right).$$

1.10.8. *Теорема.* *Пусть $(X, \mathscr{A}, \mu)$ — стандартное пространство с σ-конечной мерой. Тогда найдутся внутреннее гиперконечное множество $\mathscr{X} \subset X$ и положительное число $\Delta \in \mathbb{R}$ такие, что для любой стандартной интегрируемой функции $f : X \to \mathbb{R}$ выполняется*

$$\int\limits_X f\, d\mu = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{\xi \in \mathscr{X}} f(\xi)\right).$$

Иными словами, в условиях теоремы существуют гиперконечное натуральное число $N \in \mathbb{N} \setminus {}^\circ\mathbb{N}$, набор элементов $\mathscr{X} := \{x_1, \dots, x_N\} \subset X$ и число $\Delta \in \mathbb{R}$, для которых

$$\int\limits_X f\, d\mu = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\right).$$

Теорема 1.10.8 имеет место и в случае σ-конечной меры [15].

1.10.9. Применим теперь конструкцию меры Лёба к измеримому семейству мер. Пусть $(X, \mathscr{A})$ — некоторое измеримое пространство и $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ — пространство с мерой, т. е., как обычно, X и Y —

непустые множества, $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — некоторые σ-алгебры подмножеств в X и Y соответственно, ν — мера на $\mathscr{B}$.

Случайной мерой называют функцию $\lambda : \mathscr{A} \times Y \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям:

(1) для любого $A \in \mathscr{A}$ функция $\lambda_A := \lambda(A, \cdot) : Y \to \mathbb{R}$ $\mathscr{B}$-измерима;

(2) существует подмножество $\overline{Y} \subset Y$ полной ν-меры такое, что функция $\lambda_y := \lambda(\cdot, y) : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ является мерой на $\mathscr{A}$ для любого $y \in \overline{Y}$.

Будем писать $\lambda : \mathscr{A} \times Y_{\mathscr{B}} \to \mathbb{R}$, отмечая тем самым, что Y рассматривается с σ-алгеброй $\mathscr{B}$.

Пусть в дальнейшем объекты $(X, \mathscr{A})$, $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ и λ — внутренние, причем λ ограничена стандартной константой. Пространство Лёба $L(X, S(\mathscr{B}), \nu_L)$ будем коротко обозначать символом $L(\mathscr{B}) := L(\mathscr{B}, \nu)$. Для каждого $y \in \overline{Y}$ для меры λ_y построим меру Лёба $(\lambda_y)_L : L(\mathscr{A}, \lambda_y) \to {}^{\circ}\mathbb{R}$. Пусть $\sigma(\mathscr{A})$ — наименьшая внешняя σ-алгебру, содержащая алгебру $\mathscr{A}$. По построению меры Лёба $\sigma(\mathscr{A}) \subset L(\mathscr{A}, \lambda_y)$ для каждого $y \in \overline{Y}$.

Определим функцию $\lambda^L : \sigma(\mathscr{A}) \times Y \to {}^{\circ}\mathbb{R}$ следующим образом: для каждого $y \in \overline{Y}$ и $A \in \sigma(\mathscr{A})$ положим $\lambda^L(A, y) := (\lambda_y)_L(A)$; на $Y \setminus \overline{Y}$ доопределим λ^L произвольно.

1.10.10. *Теорема.* *Функция $\lambda^L : \sigma(\mathscr{A}) \times Y_{L(\mathscr{B})} \to {}^{\circ}\mathbb{R}$ является внешней случайной мерой.*

$\lhd$ Прежде всего заметим, что $\lambda^L_y = (\lambda_y)_L$ и $\nu_L(Y \setminus \overline{Y}) = 0$, откуда следует, что λ^L_y является мерой для ν_L-почти всех $y \in Y$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество таких $A \in \sigma(\mathscr{A})$, для которых функция $\lambda^L_A = \lambda^L(A, \cdot)$ является $L(\mathscr{B})$-измеримой. Если $A \in \mathscr{A}$, то $\lambda^L_A(y) = \lambda^L_y(A) = {}^{\circ}\lambda_y(A) = {}^{\circ}\lambda_A(y)$ для любого $y \in \overline{Y}$. Следовательно, λ_A есть поднятие λ^L_A. Так как функция λ_A является $\mathscr{B}$-измеримой, по теореме о поднятии функция λ^L_A будет $L(\mathscr{B})$-измеримой, т. е. $\mathscr{A} \subset \mathfrak{M}$.

Пусть теперь $(A_n)_{n \in {}^{\circ}\mathbb{N}}$ — монотонная последовательность множеств из $\mathfrak{M}$, причем $A = \lim_{n\to\infty} A_n$. Тогда $A \in \sigma(\mathscr{A})$.

Поскольку $\lambda^L_y = \lim_{n\to\infty} \lambda^L_y(A_n)$ для любого $y \in \overline{Y}$, то функция λ^L_A будет $L(\mathscr{B})$-измерима как предел последовательности $L(\mathscr{B})$-измеримых функций $(\lambda^L_{A_n})_{n \in {}^{\circ}\mathbb{N}}$. Тем самым $\mathfrak{M}$ — монотонный класс, следовательно, $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathfrak{M}$. Остается заметить, что по построению $\mathfrak{M} \subset \sigma(\mathscr{A})$. $\rhd$

Семейство мер $\lambda^L_{(\cdot)}$ рассматривается только на $\sigma(\mathscr{A})$, так как на более широкой σ-алгебре оно может не быть случайной мерой.

1.10.11. Указанные выше свойства меры Лёба можно использовать для дискретизации операторов, т. е. для построения гиперконечномерной аппроксимации операторов.

Рассмотрим стандартное семейство пространств с σ-конечными мерами $(X, \mathscr{A}, \lambda_y)_{y \in \mathscr{Y}}$, где $\lambda_y = \lambda(\cdot, y)$ для некоторой стандартной функции $\lambda : \mathscr{A} \times Y \to \mathbb{R}$. Введем обозначения: $\mathscr{F}(Y) := \mathbb{R}^Y$, $\mathscr{L}_1(X) := \{f : X \to \mathbb{R} : f$ является λ_y-интегрируемой для всех $y \in Y\}$. Для конечного набора $\mathscr{X} = \{x_1, \dots, x_N\}$ элементов X обозначим символом π_X «проектор» из $\mathscr{L}_1(X)$ в $\mathbb{R}^N$, сопоставляющий функции $f \in \mathscr{L}_1(\mathscr{X})$ вектор $(f(x_1), \dots, f(x_N))$. Аналогично для конечного набора $\mathscr{Y} = \{y_1, \dots, y_M\}$ элементов Y определим $\pi_Y : \mathscr{F}(Y) \to \mathbb{R}^M$ по правилу $\pi_Y(F) = (F(y_1), \dots, F(y_M))$.

Обозначим через T псевдоинтегральный оператор, действующий из $\mathscr{L}_1(\mathscr{X})$ в $\mathscr{F}(Y)$ следующим образом:

$$(Tf)(y) = \int\limits_X f\, d\lambda_y \quad (f \in \mathscr{L}_1(\mathscr{X})).$$

1.10.12. *Теорема.* *В пространствах X и Y существуют конечные наборы элементов $\mathscr{X} := \{x_1, \dots, x_N\}$ и $\mathscr{Y} := \{y_1, \dots, y_M\}$, а также матрица Λ размера $N \times M$ такие, что для любой стандартной функции $f \in \mathscr{L}_1(X)$ выполнено $\pi_Y(Tf) \approx \Lambda \pi_X(f)$, т. е.*

$$\int f\, d\lambda_{y_l} \approx \sum_{k=1}^{N} f(x_k) \Lambda_{kl} \quad (l = 1, \dots, M).$$

Другими словами, следующая диаграмма коммутативна с точностью до бесконечно малых:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}_1(X) & \xrightarrow{T} & \mathscr{F}(Y) \\ {\scriptstyle \pi_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ \mathbb{R}^N & \xleftarrow[\Lambda]{} & \mathbb{R}^M \end{array}$$

1.10.13. *Теорема.* *Существуют $\mathscr{Y} = \{y_1, \dots, y_M\}$ — набор элементов Y и матрица $\Lambda := (\Lambda_{kl})$ такие, что $\Lambda_{kl} = \Delta \cdot K(x_k, y_j)$ и $\pi_Y(Tf) \approx \Lambda \pi_X(f)$.*

1.10.14. Примечания.

(1) Материал пунктов 1.10.1–1.10.7 хорошо известен, см. [3, 65]; в нашем изложении мы придерживаемся [68]. Теорему 1.10.8 установил Е. И. Гордон [15]. В серии работ Е. И. Гордона развиты также техника гиперконечномерных аппроксимаций для интегральных операторов [13, 68] и нестандартные методы дискретизации для гармонического анализа [16, 68].

(2) Конструкция меры Лёба без труда обобщается на случай векторной меры со значениями в банаховом пространстве. Однако для мер со значениями в векторной решетке без нормы этот вопрос сложнее, даже если полноту по норме заменить на порядковую полноту.

(3) Теоремы 1.10.12 и 1.10.13 получил В. Г. Троицкий [60].

1.11. Булевозначное моделирование в нестандартном универсуме

В булевозначном анализе выделен новый важный класс математических структур, обладающих свойством цикличности (= устойчивости относительно перемешиваний, см. 1.2.6 (2)). Эти объекты представляют собой спуски соответствующих образований в $\mathbf{V}^{(B)}$, см. 1.2.8. Развитая инфинитезимальным анализом методология, по существу, связана с созданием специального аппарата для изучения фильтров — *монадологии.*

В самом деле, пусть $\mathscr{F}$ — стандартный фильтр, ${}^{\circ}\mathscr{F}$ — его стандартное ядро и ${}^{a}\mathscr{F} := \mathscr{F} \setminus {}^{\circ}\mathscr{F}$ — внешнее множество удаленных элементов $\mathscr{F}$. Если

$$\mu(\mathscr{F}) := \bigcap {}^{\circ}\mathscr{F} = \bigcup {}^{a}\mathscr{F}$$

— *монада* $\mathscr{F}$, то $\mathscr{F} = {}^{*}(\{\widetilde{\mu(\mathscr{F})}\})$, т. е. $\mathscr{F}$ — стандартизация совокупности $(\widetilde{\mu(\mathscr{F})})$ всех надмножеств монады.

Понятие монады — центральное в теории внешних множеств. В этой связи развитие комбинированных нестандартных методов, в частности, одновременное применение инфинитезималей и подъемов в теории K-пространств, требует адаптации понятия монады для фильтров и их изображений. В этом параграфе изучается подход, при котором обычная монадология применяется к изображениям — спускам объектов. Альтернативный путь — применение стандартной

монадологии внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ с последующим спуском — рассмотрим в следующем параграфе.

1.11.1. Напомним некоторые конструкции из теории фильтров в $\mathbf{V}^{(B)}$. Пусть $\mathscr{G}$ — базис фильтра в X, причем $X \in \mathscr{P}(\mathbf{V}^{(B)})$. Положим

$$\mathscr{G}' := \{F \in \mathscr{P}(X{\uparrow}){\downarrow} : (\exists G \in \mathscr{G})\,[\![\, F \supset G{\uparrow}\,]\!] = \mathbf{1}\};$$
$$\mathscr{G}'' := \{G{\uparrow} : G \in \mathscr{G}\}.$$

Тогда $\mathscr{G}'{\uparrow}$ и $\mathscr{G}''{\uparrow}$ — базисы одного и того же фильтра $\mathscr{G}^{\uparrow}$ в $X{\uparrow}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Фильтр $\mathscr{G}^{\uparrow}$ называют *подъемом* $\mathscr{G}$. Если $\operatorname{mix}(\mathscr{G})$ — совокупность перемешиваний непустых семейств элементов $\mathscr{G}$ и $\mathscr{G}$ — состоит из циклических множеств, то $\operatorname{mix}(\mathscr{G})$ — базис фильтра в X и $\mathscr{G}^{\uparrow} = \operatorname{mix}(\mathscr{G})^{\uparrow}$.

Если $\mathscr{F}$ — некоторый фильтр в X внутри $\mathbf{V}^{(B)}$, то полагают $\mathscr{F}^{\downarrow} := (\widetilde{\{F{\downarrow} : F \in \mathscr{F}{\downarrow}\}})$. Фильтр $\mathscr{F}^{\downarrow}$ в $X{\downarrow}$ называют *спуском* $\mathscr{F}$. Базис фильтра $\mathscr{G}$ в $X{\downarrow}$ называют *экстенсиональным*, если имеется фильтр $\mathscr{F}$ в X такой, что $\widetilde{(\mathscr{G})} = \mathscr{F}$.

Наконец, спуски ультрафильтров в X называют *проультрафильтрами* в $X{\downarrow}$. Фильтр, имеющий базис из циклических множеств, называется *циклическим*. Проультрафильтры — это максимальные циклические фильтры.

1.11.2. Фиксируем стандартную полную булеву алгебру B и соответствующий булевозначный универсум $\mathbf{V}^{(B)}$, мыслимый как состоящий из внутренних множеств. Если A — внешнее множество, то *циклическую оболочку* $\operatorname{mix}(A)$ вводят следующим образом. Говорят, что элемент $x \in \mathbf{V}^{(B)}$ лежит в $\operatorname{mix}(A)$, если для некоторого внутреннего семейства $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов A и внутреннего разбиения $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ единицы в B точка x есть перемешивание $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, т. е. $b_\xi x = b_\xi a_\xi$ при $\xi \in \Xi$, или, что то же самое, $x = \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi a_\xi)$.

1.11.3. *Теорема.* *Для фильтра $\mathscr{F}$ в $X{\downarrow}$ рассмотрим*

$$\mathscr{F}{\uparrow\downarrow} := (\widetilde{\{F{\uparrow\downarrow} : F \in \mathscr{F}\}}).$$

Тогда $\operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F})) = \mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow})$ и при этом $\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}$ — наибольший циклический фильтр, более грубый, чем $\mathscr{F}$.

В связи с этой теоремой монаду $\mathscr{F}$ называют *циклической*, если $\mu(\mathscr{F}) = \operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))$. Цикличность монады не характеризует полностью экстенсиональность фильтров. В этой связи следует ввести *циклически монадную оболочку* $\mu_c(U)$ внешнего множества U. Именно

$$x \in \mu_c(U) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} V = V{\uparrow}{\downarrow}) V \supset U \rightarrow x \in \mu(V).$$

В частности, если $B = \{0, 1\}$, то $\mu_c(U)$ совпадает с монадой стандартизации внешнего фильтра надмножеств U — с (*дискретной*) *монадной оболочкой* $\mu_d(U)$.

1.11.4. *Циклически монадная оболочка множества представляет собой циклическую оболочку его монадной оболочки:*

$$\mu_c(U) = \operatorname{mix}(\mu_d(U)).$$

1.11.5. Особую роль играют *существенные точки* $X{\downarrow}$, составляющие внешнее множество ${}^{e}X$. По определению в ${}^{e}X$ попадают элементы монад проультрафильтров в $X{\downarrow}$.

Критерий существенности. *Точка является существенной в том и только в том случае, если ее можно отделить стандартным циклическим множеством от любого не содержащего ее стандартного циклического множества.*

1.11.6. Если в монаде ультрафильтра $\mathscr{F}$ есть существенная точка, то $\mu(\mathscr{F}) \subset {}^{e}X$ и, кроме того, $\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}$ — проультрафильтр.

На основе приведенных конструкций можно вывести следующие утверждения.

Критерий экстенсиональности фильтра. *Фильтр является экстенсиональным в том и только в том случае, если его монада представляет собой циклически монадную оболочку множества своих существенных точек.*

Верно также следующее утверждение: стандартное множество циклично в том и только в том случае, если оно является циклически монадной оболочкой своих существенных точек.

1.11.7. ***Нестандартный критерий перемешивания фильтров.*** *Пусть* $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *— стандартное семейство экстенсиональных фильтров и* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *— стандартное разбиение единицы. Фильтр* $\mathscr{F}$

является перемешиванием $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *с вероятностями* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *в том и только в том случае, если*

$$(\forall^{\mathrm{St}}\xi \in \Xi) b_\xi \mu(\mathscr{F}) = b_\xi \mu(\mathscr{F}_\xi).$$

Особенность предлагаемого подхода проявляется в приложениях к спускам топологических пространств через специальную роль существенных точек. В этой связи отметим некоторые их свойства.

1.11.8. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Образ существенной точки при произвольном экстенсиональном отображении — существенная точка в образе.*

(2) *Пусть* E *— некоторое стандартное множество и* X *— стандартный элемент* $\mathbf{V}^{(B)}$. *Рассмотрим произведение* $X^{E^\wedge}$ *внутри* $\mathbf{V}^{(B)}$, *где* $E^\wedge$ *— стандартное имя* E *в* $\mathbf{V}^{(B)}$. *Если* x *— существенная точка* $X^{E^\wedge}{\downarrow}$, *то для всякого стандартного* $e \in E$ *точка* $x{\downarrow}(e)$ *— существенная в* $X{\downarrow}$.

(3) *Пусть* $\mathscr{F}$ *— циклический фильтр в* $X{\downarrow}$ *и* ${}^e\mu(\mathscr{F}) := \mu(\mathscr{F}) \cap {}^eX$ *— множество существенных точек его монады. Тогда* ${}^e\mu(\mathscr{F}) = {}^e\mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow})$.

Пусть $(X, \mathscr{U})$ — равномерное пространство внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Равномерное пространство $(X{\downarrow}, \mathscr{U}^{\downarrow})$ называют *прокомпактным* или *циклически компактным*, если $(X, \mathscr{U})$ компактно внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Аналогичный смысл вкладывают в термин *прополная ограниченность* и т. п.

1.11.9. *Нестандартный критерий прокомпактности.* *Любая существенная точка* $X{\downarrow}$ *околостандартна в том и только в том случае, если* $X{\downarrow}$ *прокомпактно.*

Приведенная теорема 1.11.9 ясно демонстрирует отличия булевозначного критерия прокомпактности от привычного: «компактное пространство — это пространство с околостандартными точками». Колоссальное количество прокомпактных и некомпактных пространств обеспечивает разнообразие примеров несущественных точек. Отметим здесь же, что совместное применение 1.11.7 и 1.11.8 (2) позволяет, конечно же, дать нестандартное доказательство естественного аналога теоремы Тихонова для произведения прокомпактных пространств — «спуска теоремы Тихонова в $\mathbf{V}^{(B)}$».

1.11.10. *Нестандартный критерий пропредкомпактности.* *Стандартное пространство является спуском вполне ограниченного равномерного пространства в том и только в том случае, если каждая его существенная точка предоколостандартна.*

Применим изложенный подход для описания o-сходимости в K-пространстве Y. Для экономии слов мы ограничимся рассмотрением фильтров, содержащих порядковые интервалы (или, что то же самое, фильтров с *ограниченными монадами*). Помимо этого, в соответствии с названной целью K-пространство Y считается *расширенным.* На основании теоремы Гордона пространство Y считаем канонически реализованным как спуск $\mathscr{R}{\downarrow}$ элемента $\mathscr{R}$, представляющего поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ в булевозначном универсуме $\mathbf{V}^{(B)}$, построенном над базой B пространства Y.

Условимся символом $\mathscr{E}$ обозначать фильтр порядковых единиц в Y, т. е. $\mathscr{E} := \{\varepsilon \in Y_+ : [\![\varepsilon = 0]\!] = \mathbf{0}\}$. Запись $x \approx y$ выражает бесконечную близость элементов $x, y \in Y$, порожденную спуском обычной топологии $\mathscr{R}$ в $\mathbf{V}^{(B)}$, т. е. $x \approx y \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E})\, |x - y| < \varepsilon$. Здесь и в дальнейшем считается, что $a < b$ для $a, b \in Y$, если $[\![a < b]\!] = \mathbf{1}$, т. е. $a > b \leftrightarrow a - b \in \mathscr{E}$. Таким образом, тут имеется отступление от соглашений теории упорядоченных векторных пространств. Разумеется, это обстоятельство вызвано необходимостью соблюдать принципы введения обозначений при спусках и подъемах.

Пусть ${}^{\approx}Y$ — *околостандартная часть* Y. Для $y \in {}^{\approx}Y$ символом ${}^{\circ}y$ (или $\mathrm{st}(y)$) указана *стандартная часть* y, т. е. единственный стандартный элемент, бесконечно близкий к y.

1.11.11. *Теорема.* *Для стандартного фильтра $\mathscr{F}$ в Y и стандартного $z \in Y$ справедливы утверждения:*

(1) $\inf_{F \in \mathscr{F}} \sup F \le z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{\bullet}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}y \le z \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}y \le z;$

(2) $\sup_{F \in \mathscr{F}} \inf F \ge z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{\bullet}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}y \ge z \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}y \ge z;$

(3) $\inf_{F \in \mathscr{F}} \sup F \ge z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{\bullet}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}y \ge z \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}y \ge z;$

(4) $\sup_{F \in \mathscr{F}} \inf F \le z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{\bullet}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}y \le z \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))^{\circ}y \le z;$

(5) $\mathscr{F} \xrightarrow{(o)} z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))y \approx z \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall y \in \mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}))y \approx z.$

Здесь ${}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}) := \mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}) \cap {}^{\approx}Y$ *и, как обычно,* ${}^{e}\mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow})$ *— множество существенных точек монады* $\mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow})$, *т. е.* ${}^{e}\mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}) = \mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}) \cap {}^{e}\mathscr{R}$.

$\lhd$ Для иллюстрации установим (3).

Пусть сначала в более широком множестве ${}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow})$ есть элемент y, для которого ${}^{\circ}y \geq z$. При всяком стандартном $F \in \mathscr{F}$ выполнено $y \in F{\uparrow}{\downarrow}$. Значит, для $\varepsilon \in {}^{\circ}\mathscr{E}$ будет $y > z - \varepsilon$ и $\sup F = \sup F{\uparrow}{\downarrow} > z - \varepsilon$. По принципу Лейбница заключаем $(\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})\,(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\,\sup F \geq z$, т. е. $(\forall F \in \mathscr{F})\,\sup F \geq z$ и $\inf_{F \in \mathscr{F}} \sup F \geq z$.

Для доказательства еще не проверенных соотношений, прежде всего заметим, что в силу свойств верхнего предела в $\mathbb{R}$ и принципа переноса булевозначного анализа выполнено

$$[\![\, (\exists \mathscr{G})\,(\mathscr{G} \text{ — ультрафильтр в } \mathscr{R} \wedge \mathscr{G} \supset \mathscr{F}^{\uparrow} \wedge \inf_{G \in \mathscr{G}} \sup G \geq z) \,]\!] = \mathbf{1}.$$

На основании принципа максимума имеется проультрафильтр $\mathscr{G}$ такой, что $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}$ и $\inf_{G \in \mathscr{G}} \sup G \geq z$. Используя принципы переноса и идеализации, последовательно получаем

$$(\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\,\sup G \geq z \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\,[\![\, \sup(G{\uparrow}) = z \,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\,[\![\, (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists g \in G{\uparrow})\, g > z - \varepsilon \,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists g \in G{\uparrow}{\downarrow}) g > z - \varepsilon \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\,(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\,(\exists g \in G{\uparrow}{\downarrow}) g > z - \varepsilon \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{G}_0 \supset \mathscr{G})\,(\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E})\,(\exists g)$$

$$(\forall G \in \mathscr{G}_0)\,(\forall \varepsilon \in \mathscr{E}_0)\,(g \in G{\uparrow}{\downarrow} \wedge g > z - \varepsilon) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists g)\,(\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\,(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\,(g \in G{\uparrow}{\downarrow} \wedge g > z - \varepsilon) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists g \in \mu(\mathscr{G}^{\uparrow\downarrow}))\,{}^{\circ}g \geq z \leftrightarrow (\exists g \in \mu(\mathscr{G}))\,{}^{\circ}g = z.$$

Остается отметить, что

$$\mu(\mathscr{G}) \subset {}^{e}\mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}) = {}^{e}\mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}) \subset {}^{\circ}\mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}).$$

Доказательство закончено. $\rhd$

1.11.12. Примечания.

(1) Общая монадология как философское учение была развита Г. В. Лейбницем [54]. Теория монад фильтров предложена В. Люксембургом [90]. Циклические топологии широко используются в булевозначном анализе. Теория циклической компактности и принципы изображения фильтров представлены в [27, 29, 49, 50]. Наше изложение циклической монадологии в основном следует [49, 50].

(2) Рассмотрение произвольных ультрапроизведений внутри булевозначного универсума не вызывает принципиальных сложностей и предпринималось в некоторых работах. Мы не обсуждаем здесь характера возникновения робинсоновской стандартизации в $\mathbf{V}^{(B)}$, — по сути, здесь возможен аксиоматический подход. При этом принципиально возникновение наростов на K-пространствах, происходящее, вообще говоря, не так, как при появлении идеальных элементов в процессе стандартизации исходного пространства (эффект существенных точек). Наше изложение следует [35].

1.12. Инфинитезимальное моделирование внутри булевозначного универсума

В этом параграфе мы считаем фиксированной некоторую полную булеву алгебру B и соответствующий отделимый универсум $\mathbf{V}^{(B)}$. Применяя средства инфинитезимального анализа, мы имеем в виду классический подход А. Робинсона, реализованный внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Иными словами, в конкретных ситуациях подразумеваются классический и внутренний универсумы и соответствующее $*$-изображение — робинсоновская стандартизация, представленные элементами $\mathbf{V}^{(B)}$. При этом мы считаем нестандартный мир должным образом насыщенным.

1.12.1. Под *спуск-стандартизацией* по определению понимается спуск $*$-изображения.

Наряду с термином «спуск-стандартизация» используются также выражения: «B-стандартизация», «простандартизация» и т. п. При этом для робинсоновской стандартизации B-множества A применяется символ ${}^*A$.

Соответственно *спуск-стандартизация множества* A, наделенного B-структурой (т. е. подмножества $\mathbf{V}^{(B)}$), по определению представленная $({}^*(A{\uparrow})){\downarrow}$, обозначается символом ${}_*A$ (здесь подразумевается, что $A{\uparrow}$ — это элемент рассматриваемого в $\mathbf{V}^{(B)}$ стандартного

мира классических множеств). Таким образом, $^*a \in {}_*A \leftrightarrow a \in A{\uparrow}{\downarrow}$. Естественным путем определена и *спуск-стандартизация* ${}_*\Phi$ *экстенсионального соответствия* Φ. При необходимости рассматривать спуск-стандартизации стандартных имен элементов универсума фон Неймана $\mathbf{V}$ мы для удобства используем сокращения, полагая $^*x := {}^*(x^\wedge)$ и соответственно ${}_*x := ({}^*x){\downarrow}$ для $x \in \mathbf{V}$. Правила расстановки и опускания (по умолчанию) звездочек при использовании спуск-стандартизации без особых оговорок считаются столь же свободными, как и применяемые для робинсоновского $*$-изображения.

1.12.2. *Принцип переноса.* *Пусть $\varphi = \varphi(x, y)$ — формула теории Цермело — Френкеля (не содержащая никаких свободных переменных, кроме x и y). Для непустого в $\mathbf{V}^{(B)}$ элемента F и каждого z выполнено*

$$(\exists x \in {}_*F)\, [\![\, \varphi(x, {}^*z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\exists x \in F{\downarrow})\, [\![\, \varphi(x, z)\,]\!] = \mathbf{1};$$

$$(\forall x \in {}_*F)\, [\![\, \varphi(x, {}^*z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\forall x \in F{\downarrow})\, [\![\, \varphi(x, z)\,]\!] = \mathbf{1}.$$

Если G — некоторое подмножество $\mathbf{V}^{(B)}$, то справедливы эквивалентности

$$(\exists x \in {}_*G)[\![\, \varphi(x, {}^*z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\exists x \in G{\uparrow}{\downarrow})\, [\![\, \varphi(x, z)\,]\!] = \mathbf{1};$$

$$(\forall x \in {}_*G)[\![\, \varphi(x, {}^*z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\forall x \in G{\uparrow}{\downarrow})\, [\![\, \varphi(x, z)\,]\!] = \mathbf{1}.$$

1.12.3. *Принцип идеализации.* *Пусть $X{\uparrow}$ и Y — (классические) элементы $\mathbf{V}^{(B)}$ и $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — формула теории Цермело — Френкеля. Для внутреннего в $\mathbf{V}^{(B)}$ элемента z выполнено:*

$$(\forall^{\mathrm{fin}} A \subset X)\, (\exists y \in {}_*Y)\, (\forall x \in A)\, [\![\, \varphi({}^*x, y, z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists y \in {}_*Y)\, (\forall x \in X)\, [\![\, \varphi({}^*x, y, z)\,]\!] = \mathbf{1}.$$

Для фильтра $\mathscr{F}$ из множества с B-структурой его *спуск-монаду* $m(\mathscr{F})$ определяют соотношением

$$m(\mathscr{F}) := \bigcap_{F \in \mathscr{F}} {}_*F.$$

1.12.4. *Теорема.* *Пусть $\mathscr{S}$ — некоторое множество фильтров и $\mathscr{S}^{\uparrow} := \{\mathscr{F}^{\uparrow} : \mathscr{F} \in \mathscr{S}\}$ — его подъем в $\mathbf{V}^{(B)}$. Эквивалентны утверждения:*

(1) *множество циклических оболочек элементов $\mathscr{S}$, т. е. $\mathscr{S}{\uparrow}{\downarrow} := \{\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow} : \mathscr{F} \in \mathscr{S}\}$, ограничено сверху;*

(2) *множество $\mathscr{S}^{\uparrow}$ ограничено сверху внутри $\mathbf{V}^{(B)}$;*

(3) $\bigcap\{m(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in \mathscr{S}\} \neq \varnothing$.

При выполнении эквивалентных условий (1)–(3) справедливы равенства

$$m(\sup \mathscr{S}{\uparrow}{\downarrow}) = \bigcap\{m(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in \mathscr{S}\};$$

$$\sup \mathscr{S}^{\uparrow} = (\sup \mathscr{S})^{\uparrow}.$$

Полезно подчеркнуть, что для бесконечного множества спуск-монад их объединение и даже циклическая оболочка этого объединения спуск-монадой, вообще говоря, не являются. Ситуация здесь повторяет общеизвестную для обычных монад.

1.12.5. *Нестандартные критерии проультрафильтра.* *Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *$\mathscr{U}$ — это проультрафильтр;*

(2) *$\mathscr{U}$ — это экстенсиональный фильтр с минимальной по включению спуск-монадой;*

(3) *для каждой точки x из спуск-монады $m(\mathscr{U})$ имеет место представление*
$\mathscr{U} = (x)^{\downarrow} := (\widetilde{\{U{\uparrow}{\downarrow} : x \in {}_{*}A\}})$;

(4) *$\mathscr{U}$ — это экстенсиональный фильтр, спуск-монаду которого легко поймать любым циклическим множеством, т. е. для всякого $U = U{\uparrow}{\downarrow}$ верно либо $m(\mathscr{U}) \subset {}_{*}U$, либо $m(\mathscr{U}) \subset {}_{*}(X \setminus U)$;*

(5) *$\mathscr{U}$ — это циклический фильтр такой, что для всякого циклического U при ${}_{*}U \cap m(\mathscr{A}) \neq \varnothing$ будет $U \in \mathscr{U}$.*

1.12.6. *Нестандартный критерий перемешивания фильтров.* *Пусть $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство фильтров, $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы и $\mathscr{F} = \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi \mathscr{F}_\xi^{\uparrow})$ — перемешивание элементов $\mathscr{F}_\xi^{\uparrow}$ с вероятностями b_ξ. Тогда*

$$m(\mathscr{F}^{\downarrow}) = \operatorname*{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi m(\mathscr{F}_\xi)).$$

Полезно сопоставить 1.12.6 с 1.11.7.

Точку y из множества ${}_*X$ называют *спуск-околостандартной* или просто *околостандартной*, если нет опасности недоразумений, при условии, что для некоторого $x \in X{\downarrow}$ будет ${}^*x \approx y$ (т. е. $(x, y) \in m(\mathscr{U}^{\downarrow})$, где $\mathscr{U}$ — равномерность на X).

1.12.7. *Нестандартный критерий прокомпактности.* *Любая точка спуска ${}_*A$ спуск-околостандартна в том и только в том случае, если само множество $A{\uparrow}{\downarrow}$ прокомпактно.*

Стоит сравнить 1.12.7 с 1.11.8.

1.12.8. Сформулируем теперь общие принципы использования спуск-стандартизации. Заметим сначала, что если $\varphi = \varphi(x)$ — формула теории Цермело — Френкеля, то оценка истинности φ постоянна на спуск-монаде любого проультрафильтра $\mathscr{A}$, т. е.

$$(\forall x, y \in m(\mathscr{A}))\, [\![\, \varphi(x)\,]\!] = [\![\, \varphi(y)\,]\!].$$

1.12.9. *Теорема.* *Пусть $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — некоторая формула теории Цермело — Френкеля и $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — фильтры множеств с B-структурой. Имеют место следующие правила квантификации (при внутренних y, z в универсуме $\mathbf{V}^{(B)}$):*

(1) $(\exists x \in m(\mathscr{F}))\, [\![\, \varphi(x, y, z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall F \in \mathscr{F})\, (\exists x \in {}^*F)\, [\![\, \varphi(x, y, z)\,]\!] = \mathbf{1}$;

(2) $(\forall x \in m(\mathscr{F}))\, [\![\, \varphi(x, y, z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists F \in \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow})(\forall x \in {}_*F)\, [\![\, \varphi(x, y, z)\,]\!] = \mathbf{1}$;

(3) $(\forall x \in m(\mathscr{F}))\, (\exists y \in m(\mathscr{G}))[\![\, \varphi(x, y, z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall G \in \mathscr{G})\, (\exists F \in \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow})\, (\forall x \in {}^*F)\, (\exists y \in {}^*G)$
$[\![\, \varphi(x, y, z)\,]\!] = \mathbf{1}$;

(4) $(\exists x \in m(\mathscr{F}))\, (\forall y \in m(\mathscr{G}))\, [\![\, \varphi(x, y, z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists G \in \mathscr{G}^{\uparrow\downarrow})\, (\forall F \in \mathscr{F})\, (\exists x \in {}^*F)\, (\forall y \in {}^*G)$
$[\![\, \varphi(x, y, z)\,]\!] = \mathbf{1}$.

При этом для стандартизированных свободных переменных будет

(1) $(\exists x \in m(\mathscr{F}))[\![\, \varphi(x, {}^*y, {}^*z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall F \in \mathscr{F})(\exists x \in F{\uparrow}{\downarrow})[\![\, \varphi(x, y, z)\,]\!] = \mathbf{1}$;

(2) $(\forall x \in m(\mathscr{F}))[\![\, \varphi(x, {}^*y, {}^*z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists F \in \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow})(\forall x \in F)[\![\, \varphi(x, y, z)\,]\!] = \mathbf{1}$;

(3) $(\forall x \in m(\mathscr{F}))(\exists y \in m(\mathscr{G}))[\![\, \varphi(x, y, {}^*z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (\forall G \in \mathscr{G})(\exists F \in \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow})(\forall x \in F)(\exists y \in G{\uparrow}{\downarrow})$
$[\![\varphi(x, y, z)]\!] = \mathbf{1}$;

(4) $(\exists x \in m(\mathscr{F}))(\forall y \in m(\mathscr{G}))[\![\varphi(x, y, {}^*z)]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists G \in \mathscr{G}^{\uparrow\downarrow})(\forall F \in \mathscr{F})(\exists x \in F{\uparrow}{\downarrow})(\forall y \in G)$
$[\![\varphi(x, y, z)]\!] = \mathbf{1}$.

1.13. Продолжение и разложение положительных операторов

Здесь мы покажем, что некоторые вопросы теории порядково ограниченных и мажорируемых операторов сводятся с помощью булевозначных моделей к случаю функционалов.

1.13.1. Утверждение о том, что E есть векторная решетка, записывается ограниченной формулой, скажем, $\varphi(E, \mathbb{R})$. Поэтому в силу принципа ограниченного переноса будет $[\![\varphi(E^\wedge, \mathbb{R}^\wedge)]\!] = \mathbf{1}$, т. е. $E^\wedge$ — векторная решетка над упорядоченным полем $\mathbb{R}^\wedge$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$.

Пусть $E^{\wedge\sim}$ — пространство $\mathbb{R}^\wedge$-линейных регулярных функционалов из $E^\wedge$ в $\mathscr{R}$. Нетрудно видеть, что $E^{\wedge\sim} := L^\sim(E^\wedge, \mathscr{R})$ — это K-пространство в модели $\mathbf{V}^{(B)}$. Спуск $E^{\wedge\sim}{\downarrow}$, как и спуск всякого K-пространства, будет K-пространством.

Рассмотрим расширенное K-пространство $F := \mathscr{R}{\downarrow}$ (см. 1.5.4). Напомним, что для $T \in L^\sim(E, F)$ подъем $T{\uparrow}$ определен правилом $[\![Tx = T{\uparrow}(x^\wedge)]\!] = \mathbf{1}$ для всех $x \in E$. Заметим, что если $\tau \in E^{\wedge\sim}$, то $[\![\tau : E^\wedge \to \mathscr{R}]\!] = \mathbf{1}$, поэтому определен оператор $\tau{\downarrow} : E \to F$. При этом $\tau{\downarrow}{\uparrow} = \tau$. С другой стороны, $T{\uparrow}{\downarrow} = T$.

1.13.2. ***Теорема.*** *Для любого $T \in L^\sim(E, F)$ подъем $T{\uparrow}$ есть регулярная $\mathbb{R}^\wedge$-форма на $E^\wedge$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$, т. е. $[\![T{\uparrow} \in E^{\wedge\sim}]\!] = \mathbf{1}$. Отображение $T \to T{\uparrow}$ является линейным и решеточным изоморфизмом K-пространств $L^\sim(E, F)$ и $E^{\wedge\sim}{\downarrow}$.*

1.13.3. Отметим некоторые следствия из 1.13.2. Сначала дадим необходимые определения. Оператор $S \in L^\sim(E, F)$ называют *осколком* оператора $0 \le T \in L^\sim(E, F)$, если $S \wedge (T - S) = 0$. Будем говорить, что T — *F-дискретный оператор*, если $[0, T] = [0, I_F] \circ T$, т. е. для каждого $0 \le S \le T$ существует оператор $0 \le \alpha \le I_F$, для которого $S = \alpha \circ T$. Пусть $L_a^\sim(E, F)$ — компонента в $L^\sim(E, F)$, порожденная F-дискретными операторами, а $L_d^\sim(E, F) := L_a^\sim(E, F)^\perp$. Аналогично вводятся $(E^{\wedge\sim})_a$ и $(E^{\wedge\sim})_d$. Элементы $L_d^\sim(E, F)$ принято

называть *F-размазанными* или *F-диффузными* операторами. Вместо $\mathbb{R}$-дискретности или $\mathbb{R}$-размазанности говорят просто о дискретных и размазанных функционалах.

Пусть $S, T \in L^{\sim}(E,F)$ и $\tau := T{\uparrow}$, $\sigma := S{\uparrow}$. Имеют место эквивалентности:

(1) $T \geq 0 \leftrightarrow [\![\, \tau \geq 0 \,]\!] = \mathbf{1}$;
(2) $[\![\, S$ *— осколок* $T \,]\!] \leftrightarrow [\![\, \sigma$ *— осколок* $\tau \,]\!] = \mathbf{1}$;
(3) $[\![T$ *является F-дискретным* $]\!] \leftrightarrow [\![\tau$ *— дискретен* $]\!] = \mathbf{1}$;
(4) $T \in L_a^{\sim}(E,F) \leftrightarrow [\![\, \tau \in (E^{\wedge\sim})_a \,]\!] = \mathbf{1}$;
(5) $T \in L_d^{\sim}(E,F) \leftrightarrow [\![\, \tau \in (E^{\wedge\sim})_d \,]\!] = \mathbf{1}$.

Потребуется еще один факт, который не следует из 1.13.2, но устанавливается путем прямого подсчета булевых оценок.

(6) $[\![T$ *— решеточный гомоморфизм* $]\!] \leftrightarrow [\![\, \tau$ *— решеточный гомоморфизм* $]\!] = \mathbf{1}$.

1.13.4. *Теорема.* *Пусть E — векторная решетка, F — некоторое K-пространство и $T \in L^{\sim}(E,F)$. Равносильны утверждения:*

(1) *T — это F-дискретный элемент $L^{\sim}(E,F)$;*
(2) *T — решеточный гомоморфизм;*
(3) *T сохраняет дизъюнктность, т. е. если $x, y \in E$ и $x \perp y$, то $Tx \perp Ty$.*

$\lhd$ Нужно привлечь 1.13.2, 1.13.3 и воспользоваться хорошо известным результатом о характеризации дискретных функционалов (= теорема 1.13.4 при $F = \mathbb{R}$). $\rhd$

1.13.5. Легко видеть, что если регулярный функционал $f \in E^{\sim}$ сохраняет дизъюнктность, то этим же свойством обладает и $|f|$ (см. [77]). В силу 1.13.4 (1) функционалы f^+ и f^- пропорциональны $|f|$, а так как $f^+ \perp f^-$, то либо $f^+ = 0$, либо $f^- = 0$. Это означает, что $f \geq 0$ или $f \leq 0$. В частности, для функционала $\tau := T{\uparrow}$ получаем $[\![\, \tau \geq 0 \,]\!] \vee [\![\, \tau \leq 0 \,]\!] = \mathbf{1}$. Если $\pi := \chi[\![\, \tau \geq 0 \,]\!]$, то $\pi^{\perp} \leq \chi[\![\, \tau \leq 0 \,]\!]$, поэтому выполнены неравенства $\pi\tau \geq 0$ и $\pi^{\perp}\tau \leq 0$. Переход к спускам приводит к такому заключению.

Для регулярного оператора $T \in L^{\sim}(E,F)$, сохраняющего дизъюнктность, существует проектор $\pi \in \mathfrak{P}(F)$ такой, что $\pi T = T^+$ и $\pi^{\perp} T = T^-$. В частности, для любых $0 \leq x, y \in E$ верно $(Tx)^+ \perp (Ty)^-$.

1.13.6. Подпространство $E_0 \subset E$ называют *массивным*, если для каждого $x \in E$ найдутся $\underline{x}$ и $\overline{x} \in E_0$ такие, что $\underline{x} \le x \le \overline{x}$. Пусть $T_0 \in L(E_0, E)$ и $\tau_0 := T_0{\uparrow}$. Понятно, что имеют место утверждения:

(1) $[\![\, E_0$ массивно в $E \,]\!] \leftrightarrow [\![\, E_0^\wedge$ массивно в $E^\wedge \,]\!] = \mathbf{1}$;

(2) $[\![\, T$ — продолжение $T_0 \,]\!] \leftrightarrow [\![\, \tau$ — продолжение $\tau_0 \,]\!] = \mathbf{1}$.

Теорема Крейна — Рутмана утверждает, что каждый положительный функционал, определенный на массивном подпространстве, допускает положительное продолжение на все пространство. Теорема остается в силе, если в ней слово «положительный» заменить на «дискретный». Пропустив эти факты через $\mathbf{V}^{(B)}$ и пользуясь утверждениями (1), (2) и 1.13.3 (3), получим следующие результаты.

1.13.7. *Теорема Канторовича.* *Пусть F — произвольное K-пространство. Если E_0 — массивное подпространство E, то всякий положительный оператор $T_0 : E_0 \to F$ допускает положительное продолжение $T \in L^\sim(E, F)$.*

1.13.8. *Теорема.* *При тех же условиях, что и в 1.13.6, всякий F-дискретный оператор $T_0 : E_0 \to F$ допускает F-дискретное продолжение $T : E \to F$. В частности, если E_0 — массивная подрешетка, то для решеточного гомоморфизма $T_0 : E_0 \to F$ существует решеточный гомоморфизм, продолжающий T_0.*

1.13.9. В том случае, когда E_0 — массивная подрешетка E, теорема 1.13.7 допускает существенное усиление. Пусть $\varepsilon^+(S_0) \subset L^\sim(E, F)$ — это множество всех положительных продолжений положительного оператора $S_0 : E_0 \to F$ на все E.

(1) *Теорема.* *Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полно. Пусть E_0 — массивная подрешетка E и $S_0 : E_0 \to F$ — положительный оператор. Тогда множество крайних точек выпуклого множества $\varepsilon^+(S_0) \subset L^\sim(E, F)$ непусто.*

(2) *Теорема.* *Пусть (Y, F) — некоторое пространство Банаха — Канторовича. Предположим, что $T_0 : E_0 \to Y$ — мажорируемый оператор и S — произвольная крайняя точка множества $\varepsilon^+(|\!|T_0|\!|)$. Тогда существует единственный мажорируемый оператор $T : E \to Y$ такой, что T — продолжение T_0 и $|\!|T|\!| = S$.*

$\lhd$ Описанный метод булевозначной реализации сводит дело к случаю $F = \mathscr{R}{\downarrow}$. Тем самым можно ограничиться рассмотрени-

ем случая, когда Y — банахово пространство, а $\lvert T_0 \rvert$ и S — положительные функционалы. Существование крайнего продолжения $S \in \varepsilon^+(\lvert T_0 \rvert)$ следует из (1). Определим полунорму $p(e) := S(|e|)$ для $e \in E$. Тогда E_0 плотно в E относительно локально выпуклой топологии, определяемой полунормой p. Это вытекает из следующей характеризации крайних продолжений, полученной в [89]: S является крайней точкой множества $\varepsilon^+(S_0)$, где $S_0 \in L_+(E_0, F)$, в том и только в том случае, если $\inf\{S(|e - e_0|) : e_0 \in E_0\} = 0$ для каждого $e \in E$. Оператор T_0 непрерывен и допускает продолжение T по непрерывности на все E, причем T мажорируем и, как легко видеть, $\lvert T \rvert = S$. Подробности см. в [24]. $\triangleright$

1.13.10. *Теорема.* *Для положительного оператора $T : E \to F$ равносильны следующие утверждения:*

(1) *T — это F-размазанный оператор;*

(2) *для любых $0 \le x \in E$, $0 \le \varepsilon \in F$ и $b \in B$ при $b\varepsilon \ne 0$ существуют ненулевой проектор $\rho \le b$ и некоторые попарно дизъюнктные положительные операторы $T_1, \dots, T_n$ такие, что*

$$T = T_1 + \dots + T_n, \quad |\rho T_k x| \le \varepsilon \quad (k := 1, \dots, n);$$

(3) *для любых $0 \le x \in E$, $0 \le \varepsilon \in F$ и $b \in B$ при $b\varepsilon \ne 0$ существует счетное разбиение единицы (b_n) такое, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие: T можно разложить в сумму попарно дизъюнктных положительных операторов $T_{1,n}, \dots, T_{k_n,n}$, причем так, чтобы $b_n|T_{k,n}x| \le \varepsilon$ $(k := 1, \dots, k_n)$.*

$\triangleleft$ Доказательство получается путем интерпретации в $\mathbf{V}^{(B)}$ следующего скалярного факта: положительный функционал f является размазанным, если для любых $x \ge 0$ и $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ найдутся положительные попарно дизъюнктные функционалы $f_1, \dots, f_n$ такие, что $f = f_1 + \ldots + f_n$ и $|f_k(x)| < \varepsilon$ $(k := 1, \dots, n)$ (см. [46]). $\triangleright$

1.13.11. Проектор $\pi \in \mathfrak{P}(F)$ назовем (γ, E)-однородным, если для каждого ненулевого проектора $\rho \le \pi$ и для любого множества $\mathscr{H}$ попарно дизъюнктных решеточных гомоморфизмов из E в ρF таких, что $(\operatorname{im} S)^{\perp\perp} = \rho F$ при всех $S \in \mathscr{H}$, выполняется $\operatorname{card}(\mathscr{H}) \ge \gamma$.

Введем обозначение $\mathrm{Orth}(T, F) := \mathrm{Orth}(G, F)$, где G — порядковый идеал в F, порожденный множеством $T(E)$.

Теорема. *Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полно. Существует множество кардиналов Γ и для каждого кардинала $\gamma \in \Gamma$ существуют проектор $\pi_\gamma \in \mathfrak{P}(F)$, семейство попарно дизъюнктных решеточных гомоморфизмов $(\Phi_{\gamma,\alpha})_{\alpha<\gamma}$ из E в F, такие что справедливы следующие утверждения:*

(1) *$(\pi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ представляет собой разбиение единицы в булевой алгебре $\mathfrak{P}(F)$, причем $\pi_\gamma \neq 0$ при всех $\gamma \in \Gamma$;*

(2) $\mathrm{im}\,\Phi_{\gamma,\alpha} = \pi_\gamma(F)$ $(\gamma \in \Gamma, \alpha < \gamma)$;

(3) *π_γ является (γ, E)-однородным проектором;*

(4) *каждый оператор $T \in L^\sim(E, F)$ допускает единственное представление в виде*

$$T = T_0 + o\text{-}\sum_{\gamma\in\Gamma} o\text{-}\sum_{\alpha<\gamma} \sigma_{\gamma,\alpha} \circ \Phi_{\gamma,\alpha},$$

где $T_0 \in L_d^\sim(E, F)$ и $\sigma_{\gamma,\alpha} \in \mathrm{Orth}(\Phi_{\gamma,\alpha}, \pi_\gamma(F))$.

$\lhd$ Оператор T_0 определяется однозначно, а семейство (T_ξ) — однозначно с точностью до перестановки и «перемешивания». Для доказательства сформулированной теоремы нужно воспользоваться тем, что в силу принципа переноса внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ всякое K-пространство (в нашем случае $E^{\wedge\sim}$) разлагается в прямую сумму компоненты размазанных элементов и компоненты, порожденной дискретными элементами; последняя же представляет собой соединение одномерных компонент, т. е. компонент, порожденных дискретными элементами. Затем нужно привлечь 1.13.3 (3–5). $\rhd$

1.13.12. Примечания.

(1) Материал этого параграфа можно рассматривать как иллюстрацию к следующему эвристическому принципу, высказанному Л. В. Канторовичем в заметке [17], в которой им были введены K-пространства: «Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».

(2) Элементарная теорема 1.13.2 служит основным техническим средством, позволяющим поднять сформулированный эвристический

принцип до уровня точного метода исследования (в рассмотренном круге вопросов). Другие варианты имеются в [24].

(3) В 1976 г. С. С. Кутателадзе установил эквивалентность (1)$\leftrightarrow$(2) в теореме 1.13.4 стандартными средствами. Скалярный случай ($F = \mathbb{R}$) хорошо известен. По поводу 1.13.5 см. [42].

(4) Стандартное доказательство теоремы 1.13.7 приводится во многих монографиях (см., например, [3, 24, 26]). Оно сохраняет силу и в том случае, если E — пространство Канторовича. Продолжение положительного оператора с дополнительными свойствами (дискретность сохранения решеточных операций как в 1.13.8) — довольно обширная тема. Здесь лишь отметим, что она тесно связана с экстремальной структурой специальных выпуклых множеств, см., например, [37].

(5) Теорема 1.13.9 (1) является частным случаем одной общей теоремы С. С. Кутателадзе, установленной в [47], см. также [37]. Теорема 1.13.9 (2) получена в [24]. Теорема 1.13.11, по-видимому, новая. Для векторных мер аналоги теорем 1.13.9 (2), 1.13.10 и 1.13.11 установлены в [39, 40, 42].

1.14. Осколки положительных операторов

В этом параграфе остановимся на вопросе о вычислении осколков положительных операторов, который удается изучить довольно основательно путем последовательного применения нестандартных методов. Как и в предыдущем параграфе, E — векторная решетка, F — это K-пространство.

1.14.1. Говорят, что множество проекторов $\mathscr{P}$ в K-пространстве $L^{\sim}(E,F)$ *порождает осколки* положительного оператора $0 \le T \in L^{\sim}(E,F)$, если $Tx^{+} = \sup\{pTx : p \in \mathscr{P}\}$ для всех $x \in E$. В случае, когда последнее выполнено для каждого $0 \le T \in L^{\sim}(E,F)$, множество $\mathscr{P}$ называют *порождающим.*

Пусть $F := \mathscr{R}{\downarrow}$ и p — проектор в $L^{\sim}(E,F)$. Тогда:

(1) *существует единственный элемент* $p{\uparrow} \in \mathbf{V}^{(B)}$ *такой, что* $[\![\, p{\uparrow}$ *— проектор в* $E^{\wedge\sim} \,]\!] = \mathbf{1}$ *и* $(pT){\uparrow} = p{\uparrow}\, T{\uparrow}$ *для всех* $T \in L^{\sim}(E,F)$.

Возьмем теперь множество проекторов $\mathscr{P}$ в $L^{\sim}(E,F)$ и операторов $T \in L^{\sim}(E,F)$. Положим $\tau := T{\uparrow}$ и $\mathscr{P}{\uparrow} := \{p{\uparrow} : p \in \mathscr{P}\}{\uparrow}$. Тогда

$[\![\mathscr{P}{\uparrow}$ — множество проекторов в $E^{\wedge\sim}]\!] = \mathbf{1}$ и справедливы утверждения:

(2) $[\![\mathscr{P}$ *порождает осколки* $T]\!] \leftrightarrow$
$\leftrightarrow [\![\mathscr{P}{\uparrow}$ *порождает осколки* $\tau]\!] = \mathbf{1}$;

(3) $[\![\mathscr{P}$ *— порождающее множество*$]\!] \leftrightarrow$
$\leftrightarrow [\![\mathscr{P}{\uparrow}$ *— порождающее множество*$]\!] = \mathbf{1}$.

1.14.2. Для множества A в K-пространстве через $A^{\vee}$ обозначим результат добавления к A супремумов всех его непустых конечных подмножеств. Символ $A^{\uparrow}$ используется для результата присоединения к A супремумов непустых возрастающих сетей элементов A. Естественным образом трактуют знаки $A^{\uparrow\downarrow}$ и $A^{\uparrow\downarrow\uparrow}$. Знак $\approx$ имеет в K-пространстве F обычный смысл: $x \approx y$ для $x, y \in F$ означает, что $(\forall^{\mathrm{St}} e \in \mathscr{E})|x - y| \le e$. Ясно, что при $F := \mathbb{R}$ речь идет о бесконечной малости числа $x - y$. ($\mathscr{E}$ — фильтр единиц в F.)

Излагаемые в этом параграфе результаты о положительных операторах мы получим с помощью булевозначных моделей по той же схеме, что и в 1.13. Но сначала нужно разобраться со случаем функционалов. Будем использовать обозначения $\mathscr{P}(f) := \{pf : p \in \mathscr{P}\}$. В следующих ниже пунктах 1.14.3–1.14.5 E — векторная решетка над плотным подполем поля $\mathbb{R}$, а $\mathscr{P}$ — множество проекторов в $E^{\sim}$.

1.14.3. *Теорема.* *Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $\mathscr{P}(f)^{\vee(\uparrow\downarrow\uparrow)} = \mathfrak{E}(f)$;

(2) $\mathscr{P}$ *порождает осколки* f;

(3) $(\forall x \in {}^\circ E)(\exists p \in \mathscr{P}) pf(x) \approx f(x^+)$;

(4) *функционал* g *из* $[0, f]$ *служит осколком* f *в том и только в том случае, если для каждого* $0 \le x \in E$ *имеет место равенство*

$$\inf_{p \in \mathscr{P}} (p^{\perp} g(x) + p(f - g)(x)) = 0;$$

(5) $(\forall g \in {}^\circ\mathfrak{E}(f))(\forall x \in {}^\circ E_+)(\exists p \in \mathscr{P})|pf - g|(x) \approx 0$;

(6) $\inf\{|pf - g|(x) : p \in \mathscr{P}\} = 0$ *для каждого осколка* $g \in \mathfrak{E}(f)$ *и положительного элемента* $x \ge 0$;

(7) *для каждых* $x \in E_+$ *и* $g \in \mathscr{E}(f)$ *найдется элемент* $p \in \mathscr{P}(f)^{\vee(\uparrow\downarrow\uparrow)}$, *для которого* $|pf - g|(x) = 0$.

$\triangleleft$ Импликации (1) $\to$ (2) $\to$ (3) не вызывают сомнений.

$(3) \to (4)$: Будем работать в *стандартном антураже*, т. е. считать, что все свободные переменные являются стандартными множествами. Заметим прежде всего, что выполнение интересующего нас равенства для каких-либо функционалов g и f, таких, что $0 \le g \le f$, обеспечивает для стандартного $x \ge 0$ наличие $p \in \mathscr{P}$, для которого $p^{\perp} g(x) \approx 0$ и $p(f-g)(x) \approx 0$. (Как обычно, $p^{\perp}$ — это *дополнительный проектор* к p.) Стало быть, ${}^{\circ}p(g \wedge (f-g))(x) \le {}^{\circ}p(f-g)(x) = 0$ и ${}^{\circ}p^{\perp}((f-g)\wedge g)(x) \le {}^{\circ}p^{\perp}g(x) = 0$, т. е. $g \wedge (f-g) = 0$.

Установим теперь, что в условиях (3) необходимое нам равенство гарантируется обычным критерием дизъюнктности:

$$\inf\{g(x_1) + (f-g)(x_2) : x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0,\, x_1 + x_2 = x\} = 0.$$

Для фиксированного стандартного x отыщем внутренние положительные x_1 и x_2 такие, что $x = x_1 + x_2$ и, кроме того, $g(x_1) \approx 0$ и $f(x_2) \approx g(x_2)$. В силу условия (3) на основании теоремы Крейна — Мильмана осколок g лежит в слабом замыкании $\mathscr{P}(f)$. В частности, имеется элемент $p \in \mathscr{P}$, для которого $g(x_1) \approx pf(x_1)$ и $g(x_2) \approx pf(x_2)$. Стало быть, $p^{\perp}g(x_2) \approx 0$, ибо $p^{\perp}g \le p^{\perp}f$. Окончательно $p^{\perp}g(x) \approx 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} p(f-g)(x) = pf(x_2) + pf(x_1) - pg(x) \approx \\ \approx g(x_2) + g(x_1) - pg(x) \approx p^{\perp}g(x) \approx 0. \end{aligned}$$

Это и обеспечивает нужное равенство.

$(4) \to (5)$: В силу тождества $|pf - g|(x) = p^{\perp}g(x) + p(f-g)(x)$, подбирая $p \in \mathscr{P}$ так, чтобы было $p^{\perp}g(x) \approx 0$ и $p(f-g)(x) \approx 0$, видим требуемое.

Эквивалентность $(5) \leftrightarrow (6)$ очевидна.

Импликации $(5) \to (7) \to (1)$ доказываются с помощью приемов, изложенных в [1, 23, 43]. $\triangleright$

1.14.4. *Теорема.* *Для положительных функционалов f и g и порождающего множества проекторов $\mathscr{P}$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $g \in \{f\}^{\perp\perp}$;

(2) *для каждого конечного x в E, т. е. $x \in {}^{\mathrm{fin}}E := \{x \in E : (\exists \overline{x} \in {}^{\circ}E)|x| \le \overline{x}\}$, будет $pg(x) \approx 0$, как только $pf(x) \approx 0$ при $p \in \mathscr{P}$;*

(3) $(\forall x \in E_{+})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall p \in \mathscr{P}) pf(x) \le \delta \to pg(x) \le \varepsilon$.

1.14.5. ***Теорема.*** *Пусть f, g — положительные функционалы на E, а x — положительный элемент E. Для проектора π_f на компоненту $\{f\}^{\perp\perp}$ имеют место следующие представления:*

(1) $\pi_f g(x) \rightleftharpoons \inf{}^*\{{}^\circ pg(x) : p^\perp f(x) \approx 0,\, p \in \mathscr{P}\}$ *(знак $\rightleftharpoons$ символизирует точность формулы, т. е. достижимость равенства);*

(2) $\pi_f g(x) = \sup_{\varepsilon>0} \inf\{pg(x) : p^\perp f(x) \leq \varepsilon,\, p \in \mathscr{P}\}$;

(3) $\pi_f g(x) \rightleftharpoons \inf{}^*\{{}^\circ g(y) : f(x-y) \approx 0,\, 0 \leq y \leq x\}$;

(4) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall p \in \mathscr{P})\, pf(x) < \delta \rightarrow \pi_f g(x) \leq p^\perp g(x) + \varepsilon$;
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists p \in \mathscr{P})\, pf(x) < \delta \wedge p^\perp g(x) \leq \pi_f g(x) + \varepsilon$;

(5) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall 0 \leq y \leq x)\, f(x-y) \leq \delta \rightarrow \pi_f g(x) \leq g(y) + \varepsilon$;
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists 0 \leq y \leq x)\, f(x-y) \leq \delta \wedge g(y) \leq \pi_f g(x) + \varepsilon$.

Пропустив утверждения 1.14.3–1.14.5 через $\mathbf{V}^{(B)}$ и воспользовавшись при этом 1.14.1, получим следующие результаты 1.14.6–1.14.9.

1.14.6. *Для множества проекторов $\mathscr{P}$ в $L^\sim(E,F)$ и $0 \leq S \in L^\sim(E,F)$ эквивалентны утверждения:*

(1) $\mathscr{P}(S)^{\vee(\uparrow\downarrow\uparrow)} = \mathfrak{E}(S)$;

(2) *$\mathscr{P}$ порождает осколки S;*

(3) *оператор $T \in [0,S]$ служит осколком S в том и только в том случае, если для каждого $0 \leq x \in E$ имеет место равенство*

$$\inf_{p \in \mathscr{P}} (p^\perp Tx + p(S-T)x) = 0;$$

(4) $(\forall x \in {}^\circ E)\,(\exists p \in \mathscr{P}\!\uparrow\downarrow)\, pSx \approx Sx^+$.

1.14.7. *Для положительных операторов S и T и порождающего множества проекторов $\mathscr{P}$ в $L^\sim(E,F)$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $T \in \{S\}^{\perp\perp}$;

(2) $(\forall x \in {}^{\mathrm{fin}}E)\,(\forall p \in \mathscr{P})\,(\forall \pi \in B)\, \pi pSx \approx 0 \rightarrow \pi pTx \approx 0$;

(3) $(\forall x \in {}^{\mathrm{fin}}E)\,(\forall \pi \in B)\, \pi Sx \approx 0 \rightarrow \pi Tx \approx 0$;

(4) $(\forall x \geq 0)\,(\forall \varepsilon \in \mathscr{E})\,(\exists \delta \in \mathscr{E})\,(\forall p \in \mathscr{P})\,(\forall \pi \in B)$
$\pi p S x \leq \delta \to \pi p T x \leq \varepsilon$;

(5) $(\forall x \geq 0)\,(\forall \varepsilon \in \mathscr{E})\,(\exists \delta \in \mathscr{E})\,(\forall \pi \in B)$
$\pi S x \leq \delta \to \pi T x \leq \varepsilon$.

1.14.8. *Теорема.* *Пусть E — векторная решетка, F — некоторое K-пространство с фильтром единиц $\mathscr{E}$ и базой B. Пусть, далее, S, T — положительные операторы из $L^{\sim}(E,F)$ и R — проекция T на компоненту $\{S\}^{\perp\perp}$. Для положительного $x \in E$ справедливы представления:*

(1) $Rx = \sup_{\varepsilon \in \mathscr{E}} \inf\{\pi T y + \pi^{\perp} S x :\ 0 \leq y \leq x,$
$\pi \in B,\ \pi S(x-y) \leq \varepsilon\}$;

(2) $Rx = \sup_{\varepsilon \in \mathscr{E}} \inf\{(\pi p)^{\perp} T x :\ \pi p S x \leq \varepsilon,\ p \in \mathscr{P}, \pi \in B\}$,

где $\mathscr{P}$ — порождающее множество проекторов в $L^{\sim}(E,F)$.

1.14.9. Для элемента $0 \leq e \in E$ введем оператор $\pi_e S$ по формулам:

$$(\pi_e S)x := \sup_{n \in \mathbb{N}} S(x \wedge ne) \quad (x \in E_+),$$

$$(\pi_e S)x := (\pi_e S)x^+ - (\pi_e S)x^- \quad (x \in E).$$

Легко понять, что $\pi_e S \in L^{\sim}(E,F)$. Более того, $\pi_e S$ — осколок оператора S, а отображение $S \mapsto \pi_e S$ $(S \geq 0)$, естественным образом продолженное на $L^{\sim}(E,F)$, будет порядковым проектором. Множество проекторов $\mathscr{P} := \{\pi_e :\ 0 \leq e \in E\}$ является порождающим. Поэтому из 1.14.6 вытекает формула

$$\mathfrak{E}(S) = \{(\rho \circ \pi_e) S :\ \rho \in \mathfrak{P}(F), 0 \leq e \in E\}^{\wedge(\uparrow\downarrow\uparrow)}.$$

1.14.10. Примечания.

(1) Формулы проектирования типа 1.14.8 (1, 2) формировались постепенно. Некоторое представление об этой истории можно получить по [61, 101]. Общий подход, положенный в основу данного параграфа, предложен в [51]. На этом пути можно получать различные формулы проектирования, подбирая конкретные порождающие множества проекторов.

(2) Формулу типа 1.14.9 (1) впервые установил де Пагте (см. [101]) с двумя весьма обременительными ограничениями: F имеет тотальное множество o-непрерывных функционалов, а E порядково полно. Первое ограничение устранено в [43], второе — в [1, 23]. Все

эти случаи соответствуют различным порождающим множествам проекторов.

(3) Основная идея, предложенная в [51], такова. Осколки положительного оператора T — суть крайние точки порядкового отрезка $[0, T]$. Последнее множество совпадает с субдифференциалом в нуле (опорным множеством) ∂p сублинейного оператора $px = Tx_+$. Тем самым изучение осколков положительного оператора сводится к описанию экстремальной структуры субдифференциалов. Такое описание для общих сублинейных операторов впервые получено в работе С. С. Кутателадзе (подробное изложение см. в [37]). Отметим, что этот подход решает, в частности, и задачу о крайнем продолжении положительного оператора (литературу по этому поводу см. в [4, 37]).

1.15. Порядково непрерывные операторы

Приемы, изложенные в предыдущих двух параграфах, непосредственно к порядково непрерывным операторам не применимы, ибо при подъеме оператора (см. 1.13.2) теряется свойство порядковой непрерывности. Здесь рассмотрим другой подход, основанный на идеях Д. Магарам.

1.15.1. Говорят, что положительный оператор $T : E \to F$ удовлетворяет *условию Магарам*, если для каждого $0 \leq x \in E$ выполняется $T[0, x] = [0, Tx]$, т. е. если для любых $0 \leq x \in E$ и $0 \leq z \leq Tx$ существует такой $0 \leq y \in E$, что $Ty = z$ и $0 \leq y \leq x$. Положительный порядково непрерывный оператор, удовлетворяющий этому условию, принято называть *оператором Магарам*.

Всюду в этом параграфе E и F — K-пространства, причем для простоты считаем F расширенным. Символом E_T обозначим *носитель* T, т. е. множество $\{x \in E : T(|x|) = 0\}^{\perp}$. Пусть $F_T := (\operatorname{im} T)^{\perp\perp}$ и пусть $\mathscr{D}_m(T)$ означает наибольший фундамент в максимальном расширении E, на который распространяется оператор T по порядковой непрерывности. Если $E_T = E$ и $T \geq 0$, то говорят, что оператор T *существенно положителен*.

1.15.2. *Теорема.* *Пусть $F := \mathscr{R}{\downarrow}$. Пусть, далее, E — произвольное K-пространство, а $T : E \to F$ — оператор Магарам, такой, что $E = E_T = \mathscr{D}_m(T)$ и $F = F_T$. Тогда существуют $\mathscr{E} \in \mathbf{V}^{(B)}$ и $\tau \in \mathbf{V}^{(B)}$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(1) *$\mathbf{V}^{(B)} \models [\![\mathscr{E}$ — это K-пространство, а $\tau : \mathscr{E} \to \mathscr{R}$ — существенно положительный порядково непрерывный функционал $]\!]$;*

(2) *$\mathscr{E}{\downarrow}$ — также K-пространство, $\tau{\downarrow} : \mathscr{E}{\downarrow} \to \mathscr{R}{\downarrow}$ — оператор Магарам, причем $\mathscr{E}{\downarrow} = \mathscr{D}_m(\tau{\downarrow})$;*

(3) *существует линейный и решеточный изоморфизм h из E на $\mathscr{E}{\downarrow}$ такой, что $T = \tau{\downarrow} \circ h$.*

1.15.3. Для оператора Магарам разложение 1.13.10 можно уточнить. Пусть e — порядковая единица в E. Тогда $[\![e$ — порядковая единица $\mathscr{E}]\!] = \mathbf{1}$. Функционал τ можно представить в виде $\tau = \tau_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k$, где τ_0 — диффузный функционал, а τ_k — порядково непрерывный решеточный гомоморфизм. Все эти функционалы однозначно определяются мерами, определенными на базе единичных элементов. При этом τ_0 соответствует безатомная мера, а τ_k — двузначная мера. Интерпретируя все это в модели $\mathbf{V}^{(B)}$, получим следующий ниже результат. Условие Магарам для положительной векторной меры $\mu : \mathfrak{E}(e) \to F$ понимается так же, как и в 1.14.1, т. е. $\mu[0, a] = [0, \mu(a)]$ $(a \in \mathfrak{E}(e))$. Если μ — изоморфизм булевых алгебр, то символом μ^* обозначаем изоморфизм соответствующих расширенных K-пространств.

1.15.4. *Теорема.* *Пусть E — это K-пространство с единицей e и $T : E \to F$ — существенно положительный оператор Магарам. Тогда существуют последовательности $(e_k)_{k=0}^{\infty}$, $(c_k)_{k=1}^{\infty}$, $(\mu_k)_{k=0}^{\infty}$ и $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ такие, что:*

(1) *(e_k) — разбиение единицы в булевой алгебре $\mathfrak{E}(e)$, а (c_k) — последовательность осколков элемента $c := Te$;*

(2) *$\mu : \mathfrak{E}(e_0) \to F$ — строго положительная порядково непрерывная мера, удовлетворяющая условию Магарам;*

(3) *$\mu_k : \mathscr{E}(e_k) \to \mathscr{E}(c_k)$ — булев изоморфизм, α_k — положительный обратимый ортоморфизм в $\{c_k\}^{\perp\perp}$;*

(4) *имеет место представление*

$$Tx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\mu_0(e_\lambda^{x_0}) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu_k^*(x_k),$$

где x_k — проекция элемента x на компоненту $\{e_k\}^{\perp\perp}$.

Для оператора Магарам справедливы также двойственные аналоги 1.13.4 и 1.13.5.

1.15.5. *Теорема.* *Пусть $T : E \to F$ — положительный порядково непрерывный оператор. Равносильны утверждения:*

(1) *T удовлетворяет условию Магарам;*

(2) *для любого оператора $0 \le S \le T$ существует ортоморфизм $\alpha : E \to E$, $0 \le \alpha \le I_E$, такой, что $Sx = S\alpha x$ для всех $x \in E$;*

(3) *если $Tx = f_1 + f_2$ для некоторых $0 \le x \in E$ и $0 \le f_1, f_2 \in F$, причем $f_1 \perp f_2$, то найдутся такие $0 \le x_1, x_2 \in E$, что $x = x_1 + x_2$, $x_1 \perp x_2$ и $Tx_k = f_k$ $(k = 1, 2)$.*

$\lhd$ Без ограничения общности можно считать T существенно положительным. Если верно (1), то $T = \tau{\downarrow} \circ h$ (см. 1.15.2). Так как τ $\mathscr{R}$-линеен, то T будет $\mathscr{R}{\downarrow}$-линейным. Если $0 \le S \le T$, то S также будет $\mathscr{R}{\downarrow}$-линейным, а значит, оператором Магарам. Согласно 1.15.2 $S = \sigma{\downarrow} \circ h$, где $[\![\sigma \in \mathscr{E}^{\sim}]\!] = [\![0 \le \sigma \le \tau]\!] = \mathbf{1}$. Из теоремы Радона — Никодима выводится утверждение (2) для функционалов τ и σ. Переходя к спускам, получим (2) для операторов T и S. Остальные импликации элементарны. $\rhd$

1.15.6. *Пусть $S : E \to F$ — регулярный оператор, причем $T := |S|$ — оператор Магарам. Тогда существует проектор $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ такой, что $S^+ = S \circ \pi$ и $S^- = S \circ \pi^\perp$.*

$\lhd$ Вновь можем считать, что $T = \tau{\downarrow}$, где τ — существенно положительный o-непрерывный функционал внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Так же, как и в 1.15.5, устанавливается, что существует регулярный функционал $\sigma \in \mathscr{E}$, для которого $\tau = |\sigma|$. Пусть p — проектор в $\mathscr{E}$ на носитель (= компоненту существенной положительности) σ^+. Порядково непрерывные функционалы дизъюнктны лишь в том случае, когда дизъюнктны их носители. Поэтому $\sigma^+ = \sigma \circ p$ и $\sigma^- = \sigma \circ p^\perp$. Остается положить $\pi := p{\downarrow}$ и перейти к спускам. $\rhd$

1.15.7. Мы показали, что общие свойства операторов Магарам можно вывести из соответствующих фактов для функционалов с помощью теоремы 1.15.2. Более того, описанные выше приемы могут быть полезны и при изучении произвольных регулярных операторов.

Возьмем положительный оператор Φ из векторной решетки X в F. По теореме 1.13.2 существует положительный $\mathbb{R}^{\wedge}$-линейный

функционал $\varphi : X^\wedge \to \mathscr{R}$ такой, что $[\![\, \Phi(x) = \varphi(x^\wedge) \,]\!] = \mathbf{1}$ для всех $x \in X$. Введем в $X^\wedge$ полунорму $\rho(x) := \varphi(|x|)$. Пусть $\mathscr{X}$ — пополнение фактор-решетки $X^\wedge/\rho^{-1}(0)$ по фактор-норме. Тогда $\mathscr{X}$ — банахова решетка и существует единственный положительный ($\mathscr{R}$-линейный) функционал $\overline{\varphi} : \mathscr{X} \to \mathscr{R}$ такой, что $\varphi = \overline{\varphi} \circ \iota$, где $\iota : X^\wedge \to \mathscr{X}$ — фактор-гомоморфизм. Кроме того, $\overline{\varphi}$ порядково непрерывен и существенно положителен.

Теперь, поработав со спусками и подъемами, можно получить такой результат.

1.15.8. *Теорема.* *Существуют K-пространство $\overline{X}$ и определенный на нем существенно положительный оператор Магарам $\overline{\Phi} : \overline{X} \to F$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(1) *найдутся решеточные гомоморфизмы $\imath : X \to \overline{X}$ и $\jmath : \mathscr{Z}(X) \to \mathscr{Z}(\overline{X})$, где $\mathscr{Z}(X)$ — идеал X, порожденный тождественным оператором, такие что $\jmath$ также решеточный гомоморфизм и $\alpha\Phi x = \overline{\Phi}(\jmath(\alpha)\imath(x))$ для всех $x \in X$ и $\alpha \in \mathscr{Z}(F)$; в частности, $\Phi(x) = \overline{\Phi}(\imath(x))$;*

(2) *$\imath(X)$ — массивная подрешетка $\overline{X}$ и $\jmath(\mathscr{Z}(F))$ — это o-замкнутая подрешетка и подкольцо в $\mathscr{Z}(\overline{X})$;*

(3) *$\overline{X} = b(X \otimes \mathscr{Z}(F))^{\downarrow\uparrow}$, где $b : X \otimes \mathscr{Z}(F) \to \overline{X}$ — это линейный оператор, определяемый соотношением $b(x \otimes \alpha) := \jmath(\alpha)\imath(x)$ для $x \in X$ и $\alpha \in \mathscr{Z}(F)$.*

Пара $(\overline{X}, \overline{\Phi})$ определена однозначно с точностью до изоморфизма. Более того, если существенно положительный оператор Магарам $\overline{\Phi}_1 : \overline{X}_1 \to F$ и решеточный гомоморфизм $\imath_1 : \overline{X}_1 \to F$ удовлетворяют условию $\Phi = \overline{\Phi}_1 \circ \imath_1$, то найдется изоморфизм h из $\overline{X}$ на o-замкнутую подрешетку в $\overline{X}$ такой, что $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_1 \circ h$ и $h \circ \imath = \imath_1$.

Обозначим через $m\overline{X}$ максимальное расширение K-пространства $\overline{X}$. Фиксируем в $m\overline{X}$ порядковую единицу — тем самым однозначно определяется структура f-алгебры. Пусть $L_1(\Phi)$ — наибольший фундамент в $m\overline{X}$, на который можно распространить $\overline{\Phi}$ по o-непрерывности. Следующий результат — вариант теоремы Радона — Никодима для положительных операторов.

1.15.9. *Теорема.* *Для любого оператора $T \in \{\Phi\}^{\perp\perp}$ существует единственный элемент $z \in m\overline{X}$ такой, что*

$$Tx = \overline{\Phi}(z \cdot \imath(x)) \quad (x \in X).$$

Сопоставление $T \mapsto z$ осуществляет линейный и решеточный изоморфизм компоненты $\{\Phi\}^{\perp\perp}$ и фундамента в $m\overline{X}$, определяемого формулой $\{z \in m\overline{X} : z \cdot \imath(X) \subset L_1(\Phi)\}$.

1.15.10. Примечания.

(1) В большой серии работ, опубликованных в пятидесятые годы, Д. Магарам предложила оригинальный подход к изучению положительных операторов (см. обзор [94]). К этим работам восходят концепция оператора Магарам, а также идея расширения положительного оператора до оператора Магарам (см. 1.13.8). Следует отметить, что в рамках булевозначного анализа подход Д. Магарам отличается идейной ясностью и определенными упрощениями, ибо значительная часть теории сводится к работе с числовой мерой и интегралом в подходящей булевозначной модели.

(2) Некоторые результаты Д. Магарам были перенесены на векторные решетки в работе Люксембурга и Шепа [91]. Теорему 1.15.2 установил А. Г. Кусраев [26].

(3) Эквивалентность (1)↔(2) из 1.15.5 — это ограниченная версия теоремы Радона — Никодима для оператора Магарам. В полном объеме эта теорема доказывается в [91] стандартными средствами, а в [26, 29] — на основе 1.15.2. Утверждение 1.15.6 — операторный вариант теоремы Хана о разложении меры (см. [91, 93]). Для оператора, действующего в пространствах измеримых функций, теорему 1.15.4 установила Д. Магарам своими методами.

(4) Вопрос о расширении положительного оператора до оператора Магарам изучался в [1, 29]. В этих же работах можно найти подробности относительно 1.15.8 и 1.15.9. Такое расширение имеет довольно сложную структуру, но иногда допускает функциональное описание, т. е. реализуется как пространство классов эквивалентности измеримых функций двух переменных.

1.16. Циклически компактные операторы

Булевозначная интерпретация компактности приводит к новому понятию *циклической компактности множеств и операторов*, которое заслуживает отдельного рассмотрения. Фрагмент возникающей при этом теории излагается ниже.

1.16.1. Пусть B — полная булева алгебра и пусть A — непустое множество. Обозначим символом $B(\mathrm{A})$ множество всех разбиений

единицы в B, индексованных элементами множества A. Множества $B(\mathrm{A})$ и $\mathrm{A}^{\wedge}{\downarrow}$ биективны, так что они часто отождествляются. Если A — упорядоченное множество, то в $B(\mathrm{A})$ также можно ввести отношение порядка формулой:

$$\nu \le \mu \leftrightarrow (\forall \alpha, \beta \in \mathrm{A}) \big(\nu(\alpha) \wedge \mu(\beta) \ne 0 \to \alpha \le \beta\big) \quad \big(\nu, \mu \in B(\mathrm{A})\big).$$

При этом для направленного множества A множество $B(\mathrm{A})$ также будет направленным.

Рассмотрим нормированное B-пространство X и сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ в нем. Для каждого $\nu \in B(\mathrm{A})$ положим $x_\nu := \mathrm{mix}_{\alpha\in\mathrm{A}}(\nu(\alpha)x_\alpha)$. Если все указанные перемешивания существуют, то получаем новую сеть $(x_\nu)_{\nu\in B(\mathrm{A})}$ в X. Любую подсеть этой сети $(x_\nu)_{\nu\in B(\mathrm{A})}$ называют *циклической подсетью* исходной сети $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$. Если $s : \mathrm{A} \to X$ и $\varkappa : \mathrm{A}' \to B(\mathrm{A})$, то отображение $s \bullet \varkappa : \mathrm{A}' \to X$ определяется соотношением $s \bullet \varkappa(\alpha) := x_\nu$, где $\nu = \varkappa(\alpha)$. *Циклической подпоследовательностью* последовательности $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ называют последовательность вида $(x_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$, где $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность в $B(\mathbb{N})$, для которой $\nu_k \le \nu_{k+1}$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Согласно 1.8.7 можно считать без ограничения общности, что X — разложимое подпространство пространства Банаха — Канторовича $\mathscr{X}{\downarrow}$, где $\mathscr{X}$ — банахово пространство внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ и каждый проектор $b \in B$ совпадает с ограничением $\chi(b)$ на X. Точнее, мы предполагаем, что X — ограниченный спуск банахова пространства $\mathscr{X}$ из $\mathbf{V}^{(B)}$, т. е. $X = \{x \in \mathscr{X}{\downarrow} : |x| \in \Lambda\}$, где Λ — стоунова алгебра $\mathscr{S}(B)$, отождествляем с ограниченной частью комплексной алгебры $\mathscr{C}{\downarrow}$. Множество $C \subset X$ называют mix-*полным*, если для любого семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в C и разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в множестве C содержится всякий элемент $x \in X$ такой, что $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ для $\xi \in \Xi$. Ясно, что в нашем случае C будет mix-полным в том и только в том случае, если $C = C{\uparrow\downarrow}$.

Множество $C \subset X$ называют *циклически компактным*, если оно mix-полно и любая последовательность в нем имеет циклическую подпоследовательность, сходящуюся (по норме) к некоторому элементу из C. Множество называют *относительно циклически компактным,* если оно содержится в некотором циклически компактном множестве. Сравнивая эти определения с 1.11.8 и привлекая 1.11.9, нетрудно показать, что подмножество C в X циклически компактно

(относительно циклически компактно) в том и только в том случае, если $C{\uparrow}$ — компактное (относительно компактное) подмножество $\mathscr{X}$.

Следующий факт выводится путем интерпретации в булевозначной модели критерия Хаусдорфа.

1.16.2. *Теорема.* *В каждом банаховом B-пространстве X mix-полное множество C будет относительно циклически компактным в том и только в том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют счетное разбиение единицы (π_n) в булевой алгебре B и последовательность (θ_n) конечных множеств $\theta_n \subset C$ такие, что множество $\pi_n\big(\operatorname{mix}(\theta_n)\big)$ является ε-сетью для $\pi_n(C)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что если $\theta_n := \{x_{n,1}, \dots, x_{n,l(n)}\}$, то для каждого $x \in \pi_n(C)$ существует разбиение единицы $\{\rho_{n,1}, \dots, \rho_{n,l(n)}\}$ в B такое, что*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{l(n)} \pi_n \rho_{n,k} x_{n,k} \right\| \le \varepsilon.$$

1.16.3. Рассмотрим второе операторно сопряженное (или B-сопряженное) пространство пространства X, определяемое формулой $X^{\#\#} := (X^{\#})^{\#} := \mathscr{L}_B(X^{\#}, \Lambda)$. Для $x \in X$ и $f \in X^{\#}$, положим $x^{\#\#} := \iota(x)$, где $\iota(x) : f \mapsto f(x)$. Несомненно, $\iota(x) \in L(X^{\#}, \Lambda)$. Более того,

$$\begin{gathered} |x^{\#\#}| = |\iota(x)| = \sup\{|\iota(x)(f)| : |f| \le 1\} = \\ = \sup\{|f(x)| : (\forall x \in X)\, |f(x)| \le |x|\} = \sup\{|f(x)| : f \in \partial(|\cdot|)\} = |x|. \end{gathered}$$

Тем самым $\iota(x) \in X^{\#\#}$ для каждого $x \in X$. Ясно, что оператор, $\iota : X \to X^{\#\#}$, определяемый формулой $\iota : x \mapsto \iota(x)$, линеен и изометричен. Как обычно, оператор ι назовем *каноническим вложением* X во второе B-сопряженное пространство. Как и в случае банахова пространства удобно считать x и $x^{\#\#} := \iota x$ одним элементом и рассматривать X как подпространство в $X^{\#\#}$. Говорят, что B-нормированное пространство X *B-рефлексивно*, если X и $X^{\#\#}$ линейно изометричны при указанном вложении ι.

Теорема. *Нормированное B-пространство является B-рефлексивным в том и только в том случае, если его единичный шар циклически $\sigma_\infty(X, X^{\#})$-компактен.*

$\lhd$ Доказательство получается путем интерпретации в подходящей булевозначной модели критерия Какутани рефлексивности нормированного пространства. $\rhd$

1.16.4. Пусть X и Y — нормированные B-пространства. Оператор $T \in \mathscr{L}_B(X, Y)$ называется *циклически компактным* (символически, $T \in \mathscr{K}(X, Y)$), если образ $T(C)$ любого ограниченного множества $C \subset X$ относительно циклически компактен в Y. Легко видеть, что $\mathscr{K}(X, Y)$ — разложимое подпространство пространства Банаха — Канторовича $\mathscr{L}_b(X, Y)$.

Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — булевозначные реализации X и Y соответственно. Тогда погружение в булевозначную модель $T \mapsto T^{\sim}$ осуществляет линейное изометрическое вложение решеточно нормированного пространства $\mathscr{L}_E(X, Y)$ в $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}){\downarrow}$. При этом ограниченный оператор T из X в Y будет циклически компактным в том и только в том случае, если $[\![T^{\sim}$ — компактный оператор из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}]\!] = \mathbf{1}$.

1.16.5. ***Теорема.*** *Пусть X и Y — некоторые модули Капланского — Гильберта над Λ, а T — циклический компактный оператор из X и Y. Существуют ортонормальные последовательности $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в X и $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в Y, а также последовательность $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в Λ, такие, что справедливы следующие утверждения:*

(1) *$\mu_{k+1} \le \mu_k$ $(k \in \mathbb{N})$ и $o\text{-}\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0$;*

(2) *в Λ существует такой проектор π_∞, что $\pi_\infty \mu_k$ — порядковая единица в $\pi_\infty \Lambda$ при всех $k \in \mathbb{N}$;*

(3) *существует такое разбиение $(\pi_k)_{k=0}^{\infty}$ проектора $\pi_\infty^{\perp}$, что $\pi_0 \mu_1 = 0$, $\pi_k \le [\mu_k]$ и $\pi_k \mu_{k+1} = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$;*

(4) *имеет место представление*

$$T = \pi_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k e_k' \otimes f_k + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k' \otimes f_k.$$

$\lhd$ В силу 1.8.11 можем предположить, что X и Y совпадают с ограниченными спусками гильбертовых пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно. Оператор $T{\uparrow} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ компактен внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ и можно там применить ZFC-теорему об общем виде компактного оператора в гильбертовом пространстве. $\rhd$

1.16.6. Для циклически компактных операторов выполняется некоторый вариант альтернативы Фредгольма. Мы будем назвать его *B-альтернативой Фредгольма.*

Рассмотрим B-циклическое банахово пространство X и ограниченный B-линейный оператор T в X. В этом случае X и $X^{\#}$ —

модули над стоуновой алгеброй $\Lambda := \mathscr{S}(B)$, а T Λ-линеен (= модульный гомоморфизм). Подмножество $\mathscr{E} \subset X$ называют *локально линейно независимым,* если для любых $n \in \mathbb{N}$, $e_1, \dots, e_n \in \mathscr{E}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ и $\pi \in B$ из равенства $\pi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0$ вытекает $\pi\lambda_k e_k = 0$ $(k := 1, \dots, n)$. Скажем, что для оператора T справедлива *B-альтернатива Фредгольма*, если существует счетное разбиение единицы (b_n) в B такое, что выполнены следующие условия:

(1) Однородное уравнение $b_0 \circ Tx = 0$ имеет единственное решение, нуль. Однородное сопряженное уравнение $b_0 \circ T^{\#} y^{\#} = 0$ имеет единственное решение, нуль. Уравнение $b_0 \circ Tx = b_0 y$ разрешимо и имеет единственное решение при любом $y \in X$. Сопряженное уравнение $b_0 \circ T^{\#} y^{\#} = b_0 x^{\#}$ разрешимо и имеет единственное решение при любом $x^{\#} \in X^{\#}$.

(2) Для любого $n \in \mathbb{N}$ однородное уравнение $b_n \circ Tx = 0$ имеет n локально линейно независимых решений $x_{1,n}, \dots, x_{n,n}$ и однородное сопряженное уравнение $b_n \circ T^{\#} y^{\#} = 0$ имеет n локально линейно независимых решений $y^{\#}_{1,n}, \dots, y^{\#}_{n,n}$.

(3) Уравнение $Tx = y$ разрешимо в том и только в том случае, если $b_n \circ y^{\#}_{k,n}(y) = 0$ $(n \in \mathbb{N},\ k \leq n)$. Сопряженное уравнение $T^{\#} y^{\#} = x^{\#}$ разрешимо в том и только в том случае, если $b_n \circ x^{\#}(x_{k,n}) = 0$ $(n \in \mathbb{N},\ k \leq n)$.

(4) Общее решение x уравнения $Tx = y$ имеет вид

$$x = bo\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \biggl(x_n + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n} x_{k,n} \biggr),$$

где x_n — частное решение уравнения $b_n \circ Tx = b_n y$ и $(\lambda_{k,n})_{n \in \mathbb{N}, k \leq n}$ — произвольные элементы из Λ.

Общее решение $y^{\#}$ уравнения $T^{\#} y^{\#} = x^{\#}$ имеет вид

$$y^{\#} = bo\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \biggl(y^{\#}_n + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n} y^{\#}_{k,n} \biggr),$$

где $y^{\#}_n$ — частное решение уравнения $b_n \circ T^{\#} y^{\#} = b_n x^{\#}$ и $\lambda_{k,n}$ — произвольные элементы из Λ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $k \leq n$.

1.16.7. *Теорема.* *Если S — циклически компактный оператор в B-циклическом банаховом пространстве X, то для оператора $T := I_X - S$ справедлива B-альтернатива Фредгольма.*

1.16.8. Примечания.

(1) Циклически компактные множества и операторы в решеточно нормированных пространствах были введены в [27] и [29], соответственно. Стандартное доказательство теоремы 4.1.15 можно извлечь из [29], где развит более общий подход. Варианты теорем 1.16.5 и 1.16.7 для операторов в пространстве Банаха — Канторовича имеются в [29].

Литература

1. Акилов Г. П., Колесников Е. В., Кусраев А. Г. О порядково непрерывном расширении положительного оператора// Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 5.—С. 24–35.

2. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.

3. Альбеверио С., Фенстад Й., Хэг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике.—М.: Мир, 1990.

4. Бухвалов А. В. Порядково ограниченные операторы в векторных решетках и пространствах измеримых функций // Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1988.—Т. 26.—С. 3–63.

5. Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М. Векторные решетки и интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1991.—214 с.

6. Ван Хао, Мак-Нотон Р. Аксиоматические системы теории множеств. —М.: Изд-во иностр. лит., 1963.—54 с.

7. Владимиров Д. А. Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.—320 с.

8. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств.—М.: Мир, 1983.

9. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. —М.: ГИФМЛ, 1961.—407 с.

10. Гордон Е. И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 237, № 4.—С. 773–775.

11. Гордон Е. И. K-пространства в булевозначных моделях теории множеств // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 258, № 4.—С. 777–780.

12. Гордон Е. И. К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 5.—С. 55–65.

13. Гордон Е. И. Нестандартные конечномерные аналоги операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$// Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 2.—С. 45–59.

14. Гордон Е. И. Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Э. Нельсона // Сиб. мат. журн.—1989. —Т. 30, № 1.—С. 89–95.

15. Гордон Е. И. О мерах Лёба // Известия вузов.—1991.—№ 2.—С. 25–33.

16. Гордон Е. И. Нестандартный анализ и компактные абелевы группы // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 2.—С. 26–40.

17. Гумилёв Н. С. Стихотворения и поэмы.—Л.: Сов. писатель, 1988.—631 с.

18. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.—М.: Мир, 1973.—150 с.

19. Канторович Л. В. О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР.—1935.—Т. 4, № 1, 2.—С. 11–14.

20. Канторович Л. В. К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 1, № 7.—С. 271–274.

21. Канторович Л. В. Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.

22. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.

23. Колесников Е. В. Разложение положительного оператора // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 5.—С. 70–73.

24. Колесников Е. В., Кусраев А. Г., Малюгин С. А. О мажорируемых операторах.—Новосибирск, 1988.—(Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики им. С. Л. Соболева; № 26).

25. Коэн П. Дж. Теория моделей и континуум-гипотеза. —М.: Мир, 1973.—347 с.

26. Кусраев А. Г. Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1312–1316.

27. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 267, № 5. —С. 1049–1052.

28. Кусраев А. Г. О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа// Докл. АН СССР.—1983.—Т. 271, № 1. —С. 281–284.

29. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.

30. Кусраев А. Г. О пространствах Банаха — Канторовича // Сиб. мат. журн.—1985.—Т. 26, № 2.—С. 119–126.

31. Кусраев А. Г. Числовые системы в булевозначных моделях теории множеств // VIII Всесоюз. конф. по мат. логике.—М.: 1986.—С. 99.

32. Кусраев А. Г. Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии в «целом» и математическому анализу.—Новосибирск: Наука, 1987. — С. 84–123.

33. Кусраев А. Г. О функциональной реализации AW^*-алгебр типа I // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32. № 3.—С. 78–88.

34. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.

35. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. О комбинировании нестандартных методов // Сиб. мат. журн.—1990.—Т. 31, № 5.—С. 111–119.

36. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Булевозначный анализ.—Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1999.—398 с.

37. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992.—270 с.

38. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.—344 с.; Dordhecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.—435 pp.

39. Кусраев А. Г., Малюгин С. А. Некоторые вопросы теории векторных мер.—Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.—190 с.

40. Кусраев А. Г., Малюгин С. А. Об атомическом разложении векторных мер // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 5.—С. 101–110.

41. Кусраев А. Г., Малюгин С. А. Произведение и проективный предел векторных мер // Современные проблемы геометрии и анализа. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. — С. 132–152.

42. Кусраев А. Г., Малюгин С. А. О продолжении конечно-аддитивных мер // Мат. заметки.—1990.—Т. 48, № 1.—С. 56–60.

43. Кусраев А. Г., Стрижевский В. З. Решеточно нормированные пространства и мажорируемые операторы // Исследования по геометрии и функциональному анализу.—Новосибирск: Наука, 1987.—С. 132–157.

44. Кутателадзе С. С. Опорные множества сублинейных операторов // Докл. АН СССР.—1976.—Т. 230, № 5.—С. 1029–1032.

45. Кутателадзе С. С. Субдифференциалы выпуклых операторов // Сиб. мат. журн.—1977.—Т. 18, № 5.—С. 1057–1064.

46. Кутателадзе С. С. Крайние точки субдифференциалов// Докл. АН СССР.—1978.—Т. 242, № 5.—С. 1001–1003.

47. Кутателадзе С. С. Теорема Крейна — Мильмана и ее обращение // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 1.—С. 130–138.

48. Кутателадзе С. С. Спуски и подъемы // Докл. АН СССР.—1983.—Т. 272, № 2.—С. 521–524.

49. Кутателадзе С. С. Циклические монады и их применения // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 1.—С. 100–110.

50. Кутателадзе С. С. Монады ультрафильтров и экстенсиональных фильтров // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 1.—С. 129–133.

51. Кутателадзе С. С. Об осколках положительных операторов // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 5.—С. 111–119.

52. Кутателадзе С. С. Установки нестандартного анализа // Тр. Ин-та математики/АН СССР. Сиб отд-ние.—1989.—Т. 14: Современные проблемы анализа и геометрии.

53. Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа.—Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.—225 с.

54. Лейбниц Г. В. Монадология // Сочинения. Т. 1.—М.: Мысль, 1982.—С. 143–429.

55. Любецкий В. А. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 55, № 6. — С. 99–153.

56. Любецкий В. А., Гордон Е. И. Булевы расширения равномерных структур // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам.—М.: Наука, 1983.—С. 82–153.

57. Перэр И. Общая теория бесконечно малых // Сиб. мат. журн. —1990.—Т. 31, № 3.—С. 103–124.

58. Сикорский Р. Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—376 с.

59. Соболев В. И. О полуупорядоченной мере множеств, измеримых функциях и некоторых абстрактных интегралах // Докл. АН СССР.—1953.—Т. 91, № 1.—С. 23–26.

60. Троицкий В. Г. Нестандартная дискретизация и продолжение по Лебу семейства мер // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 3.—С. 190–198.

61. Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Positive Operators.—New York: Academic Press, 1985.—367 pp.

62. Ballard D. and Hrbáček K. Standard foundations of nonstandard analysis // J. Symbolic Logic.—1992.—V. 57.—No. 2.—P. 741–748.

63. Bell J. L. Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—New York etc.: Clarendon Press, 1985.—xx+165 pp.

64. Cozart D. and Moore L. C. Jr. The nonstandard hull of a normed Riesz space // Duke Math. J.—1974.—V. 41.—P. 263–275.

65. Cutland N. Nonstandard measure theory and its applications // Proc. London Math. Soc.—1983.—V. 15, No. 6.—P. 530–589.

66. Dacunha-Castelle D. and Krivine J. L. Applications des ultraproducts a l'etude des espaces et des algebres de Banach // Studia Math.—1972.—V. 41.—P. 315–334.

67. Gordon H. Decomposition of linear functionals on Riesz spaces // Duke Math. J.—1960.—V. 27.—P. 323–332.

68. Gordon E. I. Nonstandard Methods in Commutative Harmonic Analysis.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997.

69. Halmos P. R. Lectures on Boolean Algebras.— Toronto, New York, and London: Van Nostrand, 1963.—147 pp.

70. Heinrich S. Ultraproducts in Banach space theory // J. Reine Angem. Math.—1980.—V. 313.—P. 72–104.

71. Henson C. W. When do the Banach spaces have isometically isomorphic nonstandart hulls? // Israel J. Math.—1975.—V. 22.—P. 57–67.

72. Henson C. W. Nonstandard hulls of Banach spaces // Israel J. Math.—1976.—V. 25.—P. 108–114.

73. Henson C. W. Infinitesimals in functional analysis //Nonstandard Analysis and Its Applications.—Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 1988.—P. 140–181.

74. Henson C. W. and Moore L. C. Jr. Nonstandard hulls of the classical Banach spaces // Duke Math. J.—1974.—V. 41, No. 2.—P. 277–284.

75. Henson C. W. and Moore L. C. Jr. Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces // Nonstandard Analysis. Recent Development.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1983.—P. 27–112.—(Lecture Notes in Math., 983.)

76. Hrbáček K. Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fund. Math.—1978.—V. 98, No. 1.—P. 1–24.

77. Jameson G. J. O. Ordered Linear Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1970.—194 pp.—(Lecture Notes in Math., 141.)

78. Jech T. J. The Axiom of Choice. — Amsterdam etc.: North-Holland, 1973.—xi+202 pp.

79. Jech T. J. Abstract theory of abelian operator algebras: an application of forcing // Trans. Amer. Math. Soc.—1985.—V. 289, No. 1.—P. 133–162.

80. Jech T. J. First order theory of complete Stonean algebras (Boolean-valued real and complex numbers) // Canad. Math. Bull.—1987.—V. 30, No. 4.—P. 385–392.

81. Jech T. J. Boolean-linear spaces // Adv. in Math.—1990.—V. 81, No. 2.—P. 117–197.

82. Kanovei V. and Reeken M. Nonstandard Analysis, Axiomatically.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 2004.—xvi+408 p.

83. Kaplansky I. Projections in Banach algebras // Ann. of Math.—1951.—V. 53, No. 2.—P. 235–249.

84. Kaplansky I. Algebras of type I // Ann. of Math.—1952.—V. 56.—P. 460–472.

85. Kaplansky I. Modules over operator algebras // Amer. J. Math.—1953.—V. 75, No. 4.—P. 839–858.

86. Kawai T. Axiom systems of nonstandard set theory // Logic Symposia, Hakone 1979, 1980.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1981.—P. 57–65.

87. Kawai T. Nonstandard analysis by axiomatic method // Southeast Asian Conference on Logic. — Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—P. 55–76.

88. Krivine J. L. Langages a valeurs reelles et applications // Fund. Math.—1974.—V. 81, No. 3.—P. 213–253.

89. Lipecki Z., Plachky D., and Thompsen W. Extensions of positive operators and extreme points. I// Colloq. Math.—1979.—T. 42.—C. 279–284.

90. Luxemburg W. A. J. A general theory of monads // Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability.—New York: Holt, Rinehart and Minston.—P. 18–86.

91. Luxemburg W. A. J. and Schep A. A Radon–Nikodým type theorem for positive operators and a dual// Indag. Math.—1978.—T. 40.—C. 357–375.

92. Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 1.—Amsterdam and London: North-Holland, 1971.—514 pp.

93. Maharam D. On kernel representation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc.—1955.—V. 79, No. 1.—P. 229–255.

94. Maharam D. On positive operators// Contemporary Math. —1984.—V. 26.—P. 263–277.

95. Nelson E. Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc.—1977.—V. 83, No. 6.—P. 1165–1198.

96. Nelson E. The syntax of nonstandard analysis // Ann. Pure Appl. Logic.—1988.—V. 38, No. 2.—P. 123–134.

97. Ozawa M. Boolean valued interpretation of Hilbert space theory // J. Math. Soc. Japan.—1983.—V. 35, No. 4.—P. 609–627.

98. Ozawa M. A classification of type I AW^*-algebras and Boolean valued analysis // J. Math. Soc. Japan.—1984.—V. 36, No. 4.—P. 589–608.

99. Ozawa M. A transfer principle from von Neumann algebras to AW^*-algebras // J. London Math. Soc. (2).—1985.—V. 32, No. 1.—P. 141–148.

100. Ozawa M. Nonuniqueness of the cardinality attached to homogeneous AW^*-algebras // Proc. Amer. Math. Soc.—1985.—V. 93.—P. 681–684.

101. Pagter B. de. The components of a positive operator // Indag. Math.—1983.—V. 45, No. 2.—P. 229–241.

102. Péraire Y. Une nouvelle théorie des infinitesimaux// C. R. Acad. Aci. Paris Ser. I.—1985.—V. 301, No. 5.—P. 157–159.

103. Péraire Y. A general theory of infinitesimals// Sibirsk. Mat. Zh.—1990.—V. 31, No. 3.—P. 107–124.

104. Péraire Y. Théorie relative des ensembles internes//Osaka J. Math. —1992.—V. 29, No. 2.—P. 267–297.

105. Péraire Y. Some extensions of the principles of idealization transfer and choice in the relative internal set theory // Arch. Math. Logic.—1995.—V. 34.—P. 269–277.

106. Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—376 pp.

107. Schwarz H.-U. Banach Lattices and Operators.—Leipzing: Teubner, 1984.—208 pp.

108. Solovay R. M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. of Math. (2).—1970.—V. 92, No. 2.—P. 1–56.

109. Solovay R. and Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math.—1972.—V. 94, No. 2.—P. 201–245.

110. Stern J. Some applications of model theory in Banach space theory // Ann. Math. Logic.—1976.—V. 9, No. 1.—P. 49–121.

111. Stern J. The problem of envelopes for Banach spaces // Israel J. Math.—1976.—V. 24, No. 1.—P. 1–15.

112. Takeuti G. Two Applications of Logic to Mathematics.—Tokyo, Princeton: Iwanami and Princeton Univ. Press, 1978.—137 pp.

113. Takeuti G. A transfer principle in harmonic analysis // J. Symbolic Logic.—1979.—V. 44, No. 3.—P. 417–440.

114. Takeuti G. Boolean valued analysis // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977), Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.

115. Takeuti G. and Zaring W. M. Axiomatic Set Theory.—New York: Springer-Verlag, 1973.—238 pp.

116. Vopěnka P. General theory of $\bigtriangledown$-models // Comment. Math. Univ. Carolin.—1967.—V. 7, No. 1.—P. 147–170.

117. Vopěnka P. and Hajek P. The Theory of Semisets.—Amsterdam: North-Holland, 1972.

118. Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 2.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—720 pp.