УДК 517.982.252

# ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ, ПРОСТРАНСТВА КАНТОРОВИЧА И БУЛЕВОЗНАЧНЫЕ МОДЕЛИ

**А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе**

Современные методы локального анализа оптимизационных задач основаны на взаимодействии между выпуклостью, порядком и нестандартными моделями теории множеств. Настоящий обзор выявляет некоторые ключевые идеи и важнейшие результаты, основанные на использовании теории векторных решеток и булевозначного анализа.

## Введение

В статье дан краткий обзор некоторых взаимосвязей между оптимизацией, упорядоченными векторными пространствами и нестандартными методами анализа. Основное внимание направлено на прояснение той роли, которую играют пространства Канторовича и булевозначные модели теории множеств при изучении выпуклых операторов, выпуклых множеств линейных операторов и выпуклых оптимизационных задач.

Чтобы сравнивать и выбирать, используют предпочтения. Для оптимизации требуется наличие инфимумов и супремумов (ограниченных) подмножеств, т. е. фактически *свойство верхней грани*. Таким образом, оптимизация нуждается в упорядоченных множествах и, прежде всего, в (условно) полных решетках.

Чтобы оперировать с предпочтениями приходится использовать структуру группы. Агрегирование и масштабирование возможны в линейных пространствах. Все это удачно обеспечивается классической алгебраической системой $\mathbb{R}$ — одномерной (условно) порядково полной векторной решеткой действительных чисел.

В то же время названных структур недостаточно для математического моделирования многих ситуаций. Так, при анализе разумных правил коллективного выбора нельзя избежать рассмотрения коалиций. Сопоставление индивидуальных предпочтений приводит к выделению специальных подмножеств фазового пространства. Таким образом, возникает необходимость привлечения дополнительной математической структуры — *булевой алгебры* или *алгебры Буля.*

Синтез двух фундаментальных научных понятий — булевой алгебры и действительного числа порождает концепцию *пространства Канторовича* или, короче, *$K$-пространства* — порядково полной векторной решетки. Неслучайно булева алгебра является неразлучной спутницей $K$-пространства: элементы $K$-пространства можно трактовать как действительные числа, связанные с событиями, отраженными булевой алгеброй, т. е. как своего рода переменные или «булевозначные» числа.

Подобная лингвистическая трактовка возможна не только для вещественных чисел. На самом деле, любой математический объект обладает многими репликами — каждая булева алгебра порождает «булевозначную инкарнацию» идеи оригинала, в виде его нечеткой булевой версии. Булевозначный мир — универсум булевозначных математических объектов вместе со специальными правилами верификации математических утверждений — столь же богат, как и мир классической математики, в том смысле, что в нем верны все теоремы теории множеств Цермело — Френкеля. При этом имеются технические возможности заглянуть внутрь булевозначного универсума. Наблюдатель обнаруживает немало любопытных и даже поразительных вещей, в частности, *каждое пространство Канторовича представляет собой векторную подрешетку поля действительных чисел в подходящем булевозначном мире.*

Указанная взаимосвязь идей — предмет глубокой математической теории с богатым спектром приложений, которая освещена в монографиях [23, 24]. Здесь мы ограничимся изложением основных понятий и немногих результатов, отражающих суть дела. Все векторные пространства, рассматриваемые в тексте, предполагаются вещественными.

В основу обзора положены работы [22, 49].

## 1. Выпуклость и порядок

Поясним происхождение и постановку основных проблем субдифференциального исчисления. Для этого рассмотрим абстрактную задачу минимизации в виде

$$x \in X, \quad f(x) \to \inf .$$

Здесь $X$ — некоторое векторное пространство, а $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — числовая функция, принимающая, быть может, бесконечные значе-

ния. Как обычно, в подобных обстоятельствах нас интересуют величина $\inf f(X)$, т. е. *значение* задачи, а также *решения* или *оптимальные планы* этой задачи, т. е. те элементы $\bar{x} \in X$, для которых $f(\bar{x}) = \inf f(X)$ (разумеется, если таковые элементы существуют).

Решить задачу «в явном виде», т. е. предъявить значение и одно из решений, удается крайне редко. В этой связи возникает необходимость упрощения исходной задачи, ее сведения к более обозримым модификациям, формулируемым с учетом деталей строения целевой функции $f$. Обычная гипотеза, принимаемая при поиске теоретических подходов к искомой редукции, состоит в следующем. Вводя дополнительную функцию $l$, рассматривают задачу:

$$x \in X, \quad f(x) - l(x) \to \inf .$$

При этом новая задача считается столь же сложной, как и исходная, при условии, что $l$ — линейный функционал на $X$, т. е. элемент *алгебраически сопряженного* пространства $X^{\#}$. Содержательная обоснованность высказанной естественно-научной гипотезы представляется весьма высокой.

Таким образом, исходная задача минимизации функции $f$ включается в параметрическое семейство вариантов этой же задачи, как это характерно для «социализации» проблем, принятой в функциональном анализе. Иначе говоря, теоретический анализ задачи оптимизации принято начинать, считая известным отображение $f^* : X^{\#} \to \overline{\mathbb{R}}$, определенное соотношением

$$f^*(l) := \sup_{x \in X} (l(x) - f(x)) := -\inf_{x \in X} (f(x) - l(x)).$$

Введенную функцию $f^*$ называют *преобразованием Юнга — Фенхеля* функции $f$. Иногда ее называют *преобразованием Лежандра*, отдавая дань уважения одному из классиков дифференциального исчисления. Заметим, что величина $-f^*(0)$ представляет собой значение первоначальной экстремальной задачи.

Описанная процедура сводит интересующую нас проблему к задаче о замене переменных в преобразовании Юнга — Фенхеля, т. е. о вычислении агрегата $(f \circ G)^*$, где $G : Y \to X$ — некоторый оператор, действующий из $Y$ в $X$.

Подчеркнем, что $f^*$ — это выпуклая функция переменной $l$. Уже это обстоятельство подсказывает, что наиболее полные результаты в избранном направлении следует ожидать в принципиальном случае

выпуклости исходной функции $f$. В самом деле, в этой ситуации, определяя *субдифференциал* $f$ *в точке* $\bar{x}$ соотношением

$$\partial f(\bar{x}) := \{l \in X^{\#} : (\forall\, x \in X)\ l(x) - l(\bar{x}) \leqslant f(x) - f(\bar{x})\} = \\ = \{l \in X^{\#} : l(\bar{x}) = f(\bar{x}) + f^{*}(l)\},$$

мы видим следующее. Точка $\bar{x}$ — решение исходной задачи минимизации в том и только в том случае, если выполнен *критерий оптимальности Ферма*:

$$0 \in \partial f(\bar{x}).$$

Стоит отметить, что от приведенного критерия Ферма мало прока, если нет достаточно эффективных средств вычисления субдифференциала $\partial f(\bar{x})$. Иначе говоря, мы приходим к вопросу о нахождении правил для вычисления субдифференциалов сложных отображений $\partial(f \circ G)(\bar{y})$. При этом адекватное осмысление $G$ как выпуклого отображения требует наличия в $X$ структуры упорядоченного векторного пространства. Например, представление суммы выпуклых функций в виде композиции линейного и выпуклого операторов:

$$f_1 + f_2 = + \circ (f_1, f_2); \\ (f_1, f_2) : X \to \mathbb{R}^2, \quad (f_1, f_2)(x) := (f_1(x), f_2(x)),$$

предполагает введение в $\mathbb{R}^2$ покоординатного сравнения векторов.

Таким образом, мы с необходимостью приходим к операторам, действующим в упорядоченные векторные пространства. Среди проблем, возникающих на указанном пути, центральные места занимают задачи обнаружения явных правил для вычисления преобразований Юнга — Фенхеля или субдифференциалов сложных отображений. Исследование названных проблем и составляет предмет субдифференциального исчисления — одного из центральных разделов выпуклого анализа. Образцом для постановки и решения подобных задач несомненно служит теория выпуклых функций [31, 33, 36, 47, 51, 53].

## 2. Пространство Канторовича

В этом параграфе мы вкратце рассмотрим упорядоченные векторные пространства со свойство верхней грани, которые принято назвать пространствами Канторовича.

**2.1.** Пусть $\mathbb{F}$ — линейно упорядоченное поле. *Упорядоченное векторное пространство* над $\mathbb{F}$ — пара $(E, \leqslant)$, где $E$ — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а $\leqslant$ — *векторный порядок* в $E$, т. е. отношение порядка в $E$, согласованное со структурой векторного пространства. Последнее означает, что неравенства в $E$ можно складывать и умножить на положительные элементы поля $\mathbb{F}$. Геометрически векторный порядок в $E$ представляет собой выпуклый конус в $E^2$. Задание векторного порядка в векторном пространстве $E$ над полем $\mathbb{F}$ равносильно указанию множества — (*положительного конуса*) $E^+ \subset E$ со свойствами: $E^+ + E^+ \subset E^+$; $\lambda E^+ \subset E^+$ $(0 \leqslant \lambda \in \mathbb{F})$; $E^+ \cap E^+ = \{0\}$. При этом порядок $\leqslant$ и конус $E^+$ связаны соотношением

$$x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in E^+ \quad (x, y \in E).$$

**2.2.** Упорядоченное множество $X$ называют *решеткой,* если любая пара элементов $x$ и $y$ из $X$ имеет как супремум $x \vee y := \sup\{x, y\}$, так и инфимум $x \wedge y := \inf\{x, y\}$.

Упорядоченное векторное пространство, являющееся решеткой, называют *векторной решеткой*. Тем самым, для элемента $x$ векторной решетки $E$ существуют *модуль* $|x| := \sup\{x, -x\} := x \vee (-x)$, *положительная часть* $x^+ := \sup\{x, 0\} := x \vee 0$ и *отрицательная часть* $x^- := (-x)^+$. Подпространство $E_0$ векторной решетки называют (*порядковым*) *идеалом*, если из соотношений $x_0 \in E_0$, $x \in E$ и $|x| \leqslant x_0$ следует, что $x \in E_0$.

**2.3.** Элементы $x$, $y$ векторной решетки $E$ называют *дизъюнктными* и пишут $x \perp y$, если $|x| \wedge |y| = 0$. Множество

$$M^\perp := \{x \in E : (\forall y \in M)\, x \perp y\},$$

где $M \subset E$, именуют *дизъюнктным дополнение* множества $M$. Полагают по определению $M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp$. *Полосой* (или *компонентой*) в $E$ — называют множество вида $M^\perp$, где $M \subset E$, $M \neq \varnothing$. Полоса $K \subset E$ характеризуется также равенством $K^{\perp\perp} = K$. Совокупность всех полос векторной решетки $E$ обозначают символом $\mathfrak{B}(E)$ и называют *базой* $E$. *Фундаментом* векторной решетки $E$ называют такой его порядковый идеал $E_0 \subset E$, что $E = E_0^{\perp\perp}$.

**2.4.** *Пространством Канторовича*, или, короче, $K$-*пространством*, называют такую векторную решетку, в которой всякое порядково ограниченное множество имеет точные границы. В западной

литературе такой объект именуют дедекиндово или условно полной векторной решеткой. Любой порядковый идеал $K$-пространства также является $K$-пространством. Если в $K$-пространстве любое (а не только порядково ограниченное) непустое множество попарно дизъюнктных положительных элементов имеет супремум, то его принято называть *расширенным.*

**2.5.** Перечислим важнейшие примеры расширенных пространств Канторовича (другие примеры см. в 2.9 и 2.10). Для экономии места ограничимся вещественным случаем.

**(1)** Расширенным $K$-пространством является пространство $M(\Omega, \Sigma, \mu) := L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ классов эквивалентности почти всюду конечных измеримых функций на $\Omega$, где $(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство с мерой, причем $\mu$ $\sigma$-конечна (или, более обще, обладает свойством прямой суммы, см. [14, 18]). Пространство $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ является фундаментом $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ при любом $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

**(2)** Пространство $C_\infty(Q)$ непрерывных функций, определенных на экстремально несвязном компакте $Q$, со значениями из расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ и принимающих значениями $\pm\infty$ лишь на нигде не плотном множестве (своем для каждой функции) [5, 18, 41]. Любое $K$-пространство изоморфно фундаменту $C_\infty(Q)$ при подходящем $Q$.

**(3)** Пространство $\mathrm{Bor}(Q)$ классов эквивалентности вещественнозначных борелевских функций, определенных на топологическом пространстве $Q$. Две функции считаются *эквивалентными*, если они совпадают на дополнении к некоторому множеству первой категории.

**(4)** Пространство $\overline{\mathfrak{A}}$ самосопряженных (не обязательно ограниченных) операторов в комплексном гильбертовом пространстве, присоединенных к коммутативной алгебре фон Неймана $\mathfrak{A}$ (см. [5, 18]).

**2.6.** Для каждой полосы $K$ в $K$-пространстве $E$ имеет место представление $E = K \oplus K^\perp$. Тем самым однозначно определен оператор проектирования $[K]$ на подпространство $K$ параллельно $K^\perp$, называемый *порядковым проектором* (или просто проектором, если контекст исключает путаницу). Порядковый проектор можно охарактеризовать как линейный идемпотентный оператор $\pi$, удовлетворяющий неравенствам $0 \leqslant \pi x \leqslant x$ для всех $0 \leqslant x \in E$.

В множестве всех порядковых проекторов $\mathfrak{P}(E)$ вводят порядок,

полагая $\rho \leqslant \pi \Leftrightarrow \operatorname{im}\rho \subset \operatorname{im}\pi$. Полезно иметь в виду равносильное определение $\rho \leqslant \pi \Leftrightarrow \rho\pi = \pi\rho = \rho$.

**2.7.** Пусть $\mathbb{1}$ — (*слабая порядковая*) *единица* в $E$, т. е. $\{\mathbb{1}\}^{\perp\perp} = E$. Элемент $e \in E$ называют *единичным*, или *осколком единицы*, если $e \wedge (\mathbb{1} - e) = 0$. Множество $\mathfrak{E}(E) := \mathfrak{E}(\mathbb{1})$ всех единичных элементов снабжают индуцированным из $E$ порядком.

**2.8.** Пусть $E$ и $F$ — векторные решетки. Оператор $T : E \to F$ называют *положительным*, если $Tx \geqslant 0$ для каждого $0 \leqslant x \in E$, и *регулярным*, если $T = T_1 - T_2$, где $T_1$, $T_2$ — положительные операторы. Говорят, что оператор $T$ *порядково ограничен* (или *о-ограничен*), если $T(M)$ — порядково ограниченное множество в $F$ для любого порядково ограниченного $M \subset E$. В пространстве $L^{\sim}(E,F)$ всех порядково ограниченных операторов из $E$ в $F$ вводят отношение порядка полагая по определению $T_1 \leqslant T_2$, если $T_2 - T_1$ — положительный оператор. Легко видеть, что при этом $L^{\sim}(E,F)$ — упорядоченное векторное пространство, причем пространство $L^r(E,F)$ всех регулярных операторов из $E$ в $F$ содержится в $L^{\sim}(E,F)$.

**2.9. Теорема Рисса — Канторовича.** *Если $E$ — векторная решетка и $F$ — произвольное $K$-пространство, то пространство $L^{\sim}(E,F)$ всех порядково ограниченных операторов из $E$ в $F$ само является $K$-пространством и совпадает с пространством всех регулярных операторов из $E$ в $F$.*

**2.10.** Пусть $E$ — $K$-пространство, и пусть $I_E$, как обычно, — тождественный оператор в $E$. Полоса, порожденная оператором $I_E$ в $K$-пространство $L^r(E)$, обозначают $\mathrm{Orth}(E)$, т. е. $\mathrm{Orth}(E) := \{I_E\}^{\perp\perp}$. Элементы $\mathrm{Orth}(E)$ называют *ортоморфизмами*. В теории $K$-пространств доказано, что ортоморфизм $\pi$ может быть охарактеризован как регулярный оператор, коммутирующим с порядковыми проекторами. Другим характерным свойством ортоморфизма $\pi$, отраженным в его названии, является следующее: если $e_1 \perp e_2$, то $\pi e_1 \perp e_2 = 0$. Кроме того ортоморфизмы коммутируют друг с другом и сохраняют точные границы непустых порядково ограниченных множеств [41, 62].

Пусть $\mathscr{Z}(E)$ обозначает порядковый идеал в $L^r(E)$, порожденный $I_E$. Это подпространство называют *идеальным центром* $E$. Из сказанного выше видно, что $\mathrm{Orth}(E)$ и $\mathscr{Z}(E)$ — коммутативные решеточно-упорядоченная алгебры с естественной кольцевой структурой и отношением порядка индуцированным из $L^r(E)$. Отметим

также, что в алгебре $\mathrm{Orth}(E)$ произведение $\pi_1 \circ \pi_2$ часто обозначается просто $\pi_1\pi_2$.

**2.11.** Теория векторных решеток и ее обширные приложения освещены в большом количестве монографий, из которых укажем лишь несколько основных, см. [1, 5, 14, 15, 18, 39, 41, 50, 54, 55, 62]. В западной литературе векторные решетки принято называть также *пространствами Рисса.* Следует выделить две книги: в [1] даны приложения векторных решеток к многокритериальной оптимизации и теории Шоке, а в [2] векторные решетки используются для моделирования конкурентного равновесия с бесконечным множеством товаров.

## 3. Алгебры Буля

Пространства Канторовича и алгебры Буля были созданы в разные эпохи для обслуживания разного круга задач и на основе разных теоретических установок и технических средств. Однако математические идеи, отраженные этими концециями, оказались взаимосвязанными настолько, что их плодотворное взаимодействие не исчерпано и по сей день. В этой связи следует уместно ненадолго остановиться на понятии булевой алгебры.

**3.1.** Решетку $X$ называют *дистрибутивной*, если

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

для любых трех элементов $x$, $y$, $z \in X$. Допустим, что в решетке имеются наибольший элемент $\mathbb{1}$ и наименьший элемент $\mathbb{0}$. Элемент $x^*$ называют *дополнением* $x$, если $x \vee x^* = \mathbb{1}$ и $x \wedge x^* = \mathbb{0}$. В случае, когда для каждого элемента $x \in X$ существует дополнение, говорят, что $X$ есть *решетка с дополнениями.* При этом каждый элемент имеет единственное дополнение, следовательно, возникает отображение $(\cdot)^* : x \mapsto x^*$ $(x \in X)$.

**3.2.** *Булевой алгеброй* называют дистрибутивную решетку с дополнениями. Таким образом, в булевой алгебре имеются два выделенных (особых) элемента $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$, называемые *нулем* и *единицей*, и три операции: две двухместные операции $\vee$, $\wedge$ и одна одноместная операция $(\cdot)^*$, причем выполняются правила (аксиомы):

**(1)** *коммутативные законы*

$$x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x;$$

**(2)** *ассоциативные законы*

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), \quad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z);$$

**(3)** *дистрибутивные законы*

$$(x \vee y) \wedge z = (x \vee z) \wedge (y \vee z), \quad (x \wedge y) \vee z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z);$$

**(4)** *законы поглощения* (*абсорбции*)

$$x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x;$$

**(5)** *нейтральность нуля и единицы*

$$\mathbb{0} \vee x = x, \quad \mathbb{1} \wedge x = x;$$

**(6)** *свойства дополнения*

$$x \vee x^* = \mathbb{1}, \quad x \wedge x^* = \mathbb{0}.$$

**3.3.** Булеву алгебру можно определить и как алгебраическую систему $(B, \vee, \wedge, (\cdot)^*, \mathbb{0}, \mathbb{1})$. Здесь $B$ — множество, $\vee$ и $\wedge$ — двухместные операции в $B$, $(\cdot)^*$ — одноместная операции в $B$, $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$ — фиксированные элементы из $B$. При этом предполагаются выполненными аксиомы (1)–(6).

Булеву алгебру называют *полной*, если в ней любое порядково ограниченное множество имеет супремум и инфимум.

**3.4.** Примером булевой алгебры служит совокупность всех подмножеств некоторого фиксированного непустого множества $X$, которую принято обозначать символом $\mathscr{P}(X)$ и называть *булеаном* $X$. При этом под булевыми операциями понимаются теоретико-множественные операции объединения $A \vee B := A \cup C$, пересечения $A \wedge B := A \cap C$ и дополнения $A^* := X \setminus A$. Нулем в $\mathscr{P}(X)$ служит пустое множество $\varnothing$, а единицей — само $X$. Булева алгебра $\mathscr{P}(X)$ полна. Часть $\mathscr{A}$ булевой алгебры $\mathscr{P}(X)$ называют *полем множеств*, если $\mathscr{A}$ содержит пустое множество, все множество $X$ и замкнута относительно указанных теоретико-множественных операций. Поле множеств является булевой алгеброй с теми же булевыми операциями, что и в $\mathscr{P}(X)$. Один из важнейших теорем теории булевых алгебр утверждает, что всякая булева алгебра может быть реализована в виде поля множеств.

**3.5. Теорема Стоуна.** *Произвольная булева алгебра $B$ изоморфна булевой алгебре открыто-замкнутых множеств единственного с точностью до гомеоморфизма вполне несвязного компакта — стоуновского компакта алгебры $B$.*

Этот факт установил М. Стоун в 1936 г.

**3.6.** С каждым пространством Канторовича $E$ тесно связаны три изоморфные между собой полные булевы алгебры. Точнее говоря, справедливы следующие утверждения.

**(1)** Упорядоченное множество $\mathfrak{B}(E)$ всех полос в $E$ (см. 2.3) образует полную булеву алгебру, в которой булевы операции имеют вид:

$$L \wedge K = L \cap K, \quad L \vee K = (L \cup K)^{\perp\perp}, \quad L^* = L^{\perp} \quad (L, K \in \mathfrak{B}(E)).$$

**(2)** Упорядоченное множество $\mathfrak{P}(E)$ всех порядковых проекторов в $E$ (см. 2.6) является полной булевой алгеброй, в которой булевы операции имеют вид:

$$\pi \wedge \rho = \pi\rho = \rho\pi, \quad \pi \vee \rho = \pi + \rho - \pi\rho, \quad \pi^* = I_E - \pi \quad (\pi, \rho \in \mathfrak{P}(E)).$$

**(3)** Упорядоченное множество $\mathfrak{E}(\mathbb{1}) := \mathfrak{E}(E)$ всех единичных элементов $E$ (см. 2.7) является полной булевой алгеброй, в которой решеточные операции индуцированы из $E$, а булево дополнение определено формулой $e^* := \mathbb{1} - e$ для $e \in \mathfrak{E}(\mathbb{1})$.

**3.7. Теорема.** *Пусть $E$ — произвольное $K$-пространство. Отображение $K \mapsto [K]$ есть изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{B}(E)$ и $\mathfrak{P}(E)$. Если же в $E$ фиксирована порядковая единица $\mathbb{1}$, то отображения $\pi \mapsto \pi\mathbb{1}$ из $\mathfrak{P}(E)$ в $\mathfrak{E}(E)$ и $e \mapsto \{e\}^{\perp\perp}$ из $\mathfrak{E}(E)$ в $\mathfrak{B}(E)$ также являются изоморфизмами булевых алгебр.*

Ввиду этого утверждения каждую из булевых алгебр $\mathfrak{E}(E)$ и $\mathfrak{P}(E)$ также принято называть *базой* $E$.

**3.8.** Рассмотрим конкретные примеры булевых алгебр, соответствующие примерам расширенных $K$-пространств из 2.4.

**(1)** База $K$-пространства $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ изоморфна булевой фактор-алгебре $\Sigma/\mu^{-1}(0)$ — булевой алгебре измеримых множеств по модулю множеств нулевой меры.

**(2)** База $K$-пространства $C_\infty(Q)$ изоморфна булевой алгебре открыто-замкнутых подмножеств компакта $Q$.

**(3)** База $K$-пространства $\mathrm{Bor}(Q)$ изоморфна булевой алгебре борелевских подмножеств $Q$ по модулю множеств первой категории.

**(4)** База $K$-пространства $\overline{\mathfrak{A}}$ изоморфна булевой алгебре всех ортопроекторов, входящих в алгебру $\mathfrak{A}$.

**3.9.** Булевы алгебры имеют многочисленные связи с различными направлениями математической науки. Общетеоретическое и прикладное значение булевых алгебр определяется той существенной

ролью, которую они играют в математической логике, теории вероятностей и кибернетике. Живо и увлекательно о булевых алгебрах рассказано в книге [38] (см. также процитированную там литературу). Для первоначального знакомства с теорией множеств, булевыми алгебрами и математической логикой может послужить книга [35]. Основательное изложение теории булевых алгебр имеется в монографиях [4, 34, 46]. Энциклопедическое изложение теории булевых алгебр см. в [52].

## 4. Эвристический принцип переноса и теорема Хана — Банаха

В истории функционального анализа возникновение теории упорядоченных векторных пространств связывают с именами Г. Биркгофа, Л. В. Канторовича, М. Г. Крейна, Х. Накано, Ф. Рисса, Х. Фрейденталя и др. Л. В. Канторовичу принадлежит честь выделения класса порядково полных векторных решеток, рассмотренных в предыдущем параграфе, и построения функционального анализа в этом классе [12, 13]; подробности см. [15, 18].

**4.1.** Уже в первой работе Л. В. Канторовича [12] по теории упорядоченных векторных пространств им был выделен класс $K$-пространств — класс векторных решеток с дополнительной аксиомой (обозначаемой $I_6$) условной порядковой полноты: *всякое порядково ограниченное множество имеет супремум и инфимум.* В этой работе Л. В. Канторовича, в частности, писал:

«*В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса* (*операции, значения которых принадлежат такому пространству*) *как линейные функционалы*».

**4.2.** Здесь Л. В. Канторович сформулировал важную методологическую установку: *элементы $K$-пространства — суть обобщенные числа.* В наше время ее называют *принципом Канторовича* или, более подробно, *принципом переноса для $K$-пространств.*

Эвристический принцип переноса Л. В. Канторовича нашел многочисленные подтверждения в исследованиях как самого автора, так и его последователей, см. [5, 15]. Уже в начальный период развития теории предпринимались формализации этих эвристических соображений. На этом пути возникли так называемые *теоремы о сохране-*

*нии соотношений,* которые утверждают, что если какое-то предложение, включающее конечное число функциональных соотношений, доказано для вещественных чисел, то аналогичный факт автоматически оказывается верным и для элементов $K$-пространства. В полной мере глубина и универсальность принципа Канторовича были объяснены в рамках булевозначного анализа, см., например, [8, 23].

**4.3.** Изучение $K$-пространств Л. В. Канторович связал с выяснением области применимости фундаментальной теоремы Хана — Банаха и сформулировал теорему 3, которая теперь в литературе именуется теоремой Хана — Банаха — Канторовича.

Напомним необходимые определения. Оператор $p$, действующий из векторного пространства $X$ в упорядоченное векторное пространство $E$, называют *сублинейным,* если $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ и $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ для всех $x, y \in X$ и $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$. Говорят, что оператор $T : X \to E$ мажорируется оператором $p$ (или $p$ мажорирует $T$), если $Tx \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$.

Допустим, что $X_0$ — подпространство $X$ и линейный оператор $T_0 : X_0 \to E$ мажорируется ограничением сублинйного оператора $p$ на $X_0$, т. е. $T_0 x \leqslant p(x)$ при всех $x \in X_0$. Если для любых таких $X$, $X_0$, $T_0$ и $p$ существует линейный оператор $T : X \to E$, совпадающий с $T_0$ на $X_0$ и мажорируемый оператором $p$ на всем $X$, то говорят, что *$E$ допускает мажорированное продолжение линейных операторов.*

**4.4. Теорема Хана — Банаха — Канторовича.** *Пространство Канторовича допускает мажорированное продолжение линейных операторов.*

**4.5. Теорема Хана — Банаха — Канторовича в субдифференциальной форме.** *Пусть $X$ и $Y$ — векторные пространства, $E$ — $K$-пространство, $P : X \to E$ — сублинейный оператор и $T : Y \to X$ — линейный оператор. Тогда имеет место представление*

$$\partial(P \circ T) = \partial(P) \circ T.$$

**4.6.** Теорему 4.4 доказал Л. В. Канторович, см. [12]. Ее можно считать первой теоремой теории $K$-пространств. При $E = \mathbb{R}$ теорема 4.4 превращается в аналитическую форму теоремы Хана — Банаха, см. [14]. В случае, когда $T$ — тождественное вложение, теорема 4.5 также выражает наличие свойства мажорированного продолжения у $K$-пространства. Таким образом, в теореме Хана — Банаха — Канторовича фактически утверждается, что в классической теореме о ма-

жорированном продолжении линейного функционала можно реализовать принцип Канторовича, т. е. заменить в теореме Хана — Банаха вещественные числа элементами произвольного $K$-пространства, а линейные функционалы — линейными операторами со значениями в таком пространстве. Важно подчеркнуть, что в классе упорядоченных векторных пространствах только $K$-пространства обладают таким свойством. Точнее, имеет место также обращение теоремы Хана — Банаха — Канторовича, полученное значительно позже, подробности см., например, в [1, 24].

**4.7. Теорема Бонайса — Сильвермана — Ту.** *Каждое упорядоченное векторное пространство, допускающее мажорированное продолжение линейных операторов, представляет собой пространство Канторовича.*

**4.8.** Задаче мажорированного продолжение оператора посвящена обширная литература; историю вопроса и обзор различных аспектов можно найти в [18, 24, 44].

## 5. Канонический сублинейный оператор

Сказанное в параграфе 1 подводит нас к рассмотрению выпуклых (в частности, сублинейных) операторов, действующих в $K$-пространства, как неизбежного обобщения выпуклых функций, являющихся неотъемлемой частью теории оптимизации. Выпуклые множества — результат пересечения полупространств, идея нижней огибающей лежит в основе линейного программирования и т. п. В этом параграфе мы представляем идею в аналитическом виде.

**5.1.** Пусть $X$ — векторное пространство, а $E$ — упорядоченное векторное пространство. Напомним, что множество

$$\partial p := \partial p(0) = \{T \in L(X,\ E) :\ (\forall\, x \in X)\ Tx \leqslant p(x)\}$$

называют *субдифференциалом* (в нуле) или *опорным множеством* сублинейного оператора $p : X \to E$.

Приступая к анализу задачи, сформулированная в конце параграфа 1, полезно рассмотреть вначале случай сублинейных операторов, т. е. выяснить, каков субдифференциал суперпозиции сублинейных операторов. В этом обзоре мы фактически этим и ограничимся, так как на основе информации об опорных множествах сублинейных

операторов сравнительно легко можно получить описание субдифференциалов произвольных выпуклых операторов, найти соответствующие преобразования Юнга — Фенхеля, исследовать связанные с ними экстремальные задачи и т. п., см. [24].

**5.2.** В классе сублинейных операторов мы выделяем канонический оператор со сравнительно простой структурой так, что только один канонический оператор соответствует каждому $K$-пространству и каждому кардинальному числу. Произвольный (всюду определенный) сублинейный оператор получают как композицию канонического и линейного оператора. Таким образом, возникает возможность сведения общих вопросов теории сублинейных операторов к анализу канонического оператора и линейного замены переменных в нем. Это составляет главную идею метода канонического оператора. Переходим к точным формулировкам.

**5.3.** Рассмотрим $K$-пространство $E$ и произвольное непустое множество $\mathfrak{A}$. Обозначим $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ множество всех (порядково) ограниченных отображений из $\mathfrak{A}$ в $E$; т. е. $f \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)$, если и только, если $f : \mathfrak{A} \to E$ и множество $\{f(\alpha) : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — порядково ограничено в $E$. Легко проверить, что $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$, наделенное покоординатными алгебраическими операциями и порядком, является $K$-пространством. Оператор $\varepsilon_{\mathfrak{A},E}$, действующий из $l_\infty(\mathfrak{A}, E)$ в $E$ по правилу

$$\varepsilon_{\mathfrak{A},E} : f \mapsto \sup\{f(\alpha) : \alpha \in \mathfrak{A}\} \quad (f \in l_\infty(\mathfrak{A}, E)),$$

называют *каноническим сублинейным оператором* (соответствующим $\mathfrak{A}$ и $E$. Часто пишеут $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ вместо $\varepsilon_{\mathfrak{A},E}$, когда ясно из контекста, какое $K$-пространство подразумевается. Обозначение $\varepsilon_n$ используется, когда кардинальное число множества $\mathfrak{A}$ равно $n$, в этом случае оператор $\varepsilon_n$ называется *конечно-порожденным.* Канонический оператор возрастает и сублинеен. Конечно-порожденный канонический оператор порядково непрерывен.

**5.4.** Рассмотрим множество $\mathfrak{A}$ линейных операторов, действующих из векторного пространства $X$ в $K$-пространство $E$. Множество $\mathfrak{A}$ *слабо* (*порядково*) *ограничено,* если множество $\{\alpha x : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — порядково ограничено для каждого $x \in X$. Обозначим $\langle\mathfrak{A}\rangle x$ отображение сопоставляющее элемент $\alpha x \in E$ каждому $\alpha \in \mathfrak{A}$, т. е. $\langle\mathfrak{A}\rangle x : \alpha \mapsto \alpha x$. Если $\mathfrak{A}$ слабо порядково ограничено, то $\langle\mathfrak{A}\rangle x \in l_\infty(\mathfrak{A},\ E)$ для каждого фиксированного $x \in X$. Следовательно, мы получаем линейный оператор $\langle\mathfrak{A}\rangle : X \to l_\infty(\mathfrak{A},\ E)$, действующий по правилу

$\langle\mathfrak{A}\rangle : x \mapsto \langle\mathfrak{A}\rangle x$. Свяжем с $\mathfrak{A}$ еще один оператор

$$p_{\mathfrak{A}} : x \mapsto \sup\{\alpha x : \alpha \in \mathfrak{A}\} \quad (x \in X).$$

Оператор $p_{\mathfrak{A}}$ сублинеен. Его опорное множество $\partial p_{\mathfrak{A}}$ обозначают $\operatorname{cop}(\mathfrak{A})$ и называют *опорной оболочкой* of $\mathfrak{A}$. Эти определения влекут следующее утверждение:

**5.5.** *Если $p$ — сублинейный оператор с $\partial p = \operatorname{cop}(\mathfrak{A})$, то справедливо представление*

$$p = \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle\mathfrak{A}\rangle.$$

Ясно, что $\partial p = \operatorname{cop}(\partial p)$. Следовательно, каждый сублинейный оператор $p : X \to E$ допускает вышеупомянутое представление с $\mathfrak{A} := \partial p$. Этот факт делает канонический сублинейный оператор очень полезным в различных задачах, связанных с сублинейными операторами, особенно при вычислении опорных множеств и опорных оболочек.

**5.6.** Пусть $\Delta_{\mathfrak{A}} := \Delta_{\mathfrak{A},E}$ — вложение $E$ в $l_\infty(\mathfrak{A},\ E)$, сопоставляющее каждому элементу $e \in E$ постоянное отображение $\alpha \mapsto e$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$, так что $(\Delta_{\mathfrak{A}} e)(\alpha) = e$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$. Пусть $I_E$ — тождественный оператор в $E$, $\mathfrak{A}$ — слабо порядково ограниченное множество в $L(X, E)$, $F$ — еще одно $K$-пространство и $p : E \to F$ — возрастающий сублинейный оператор. Из субдифференциальной формы теоремы Хана — Банаха — Канsocket 4.5 легко выводится справедливость следующих соотношений:

**(1)** $\varepsilon_{\mathfrak{A},E} \circ \Delta_{\mathfrak{A},E} = I_E,\ \Delta_{\mathfrak{A},E} \circ \varepsilon_{\mathfrak{A},E}(f) \geqslant f\ (f \in l_\infty(\mathfrak{A},\ E))$;

**(2)** $\partial\,(p \circ \varepsilon_{\mathfrak{A},E}) = \{T \in L^+(l_\infty(\mathfrak{A},\ E),\ F) : T \circ \Delta_{\mathfrak{A}} \in \partial p\}$;

**(3)** $\partial \varepsilon_{\mathfrak{A},E} = \{\alpha \in L^+\,(l_\infty(\mathfrak{A},\ E),\ E) : \alpha \circ \Delta_{\mathfrak{A},E} = I_E\}$;

**(4)** $\operatorname{cop}(\mathfrak{A}) = \partial \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle\mathfrak{A}\rangle$.

Используя эти соотношения легко можно вычислить опорное множество сложного сублинейного оператора $\partial(p_2 \circ p_1)$.

**5.7. Теорема.** *Пусть $E$ и $F$ — некоторые $K$-пространства, $p_1 : X \to E$ — сублинейный оператор, $p_2 : E \to F$ — возрастающий сублинейный оператор. Для каждого порядкового проектора $\pi$ в $K$-пространстве $E$ имеем*

$$\partial(p_2 \circ p_1) = \bigcup_{T \in \partial p_2} \left(\partial(T \circ \pi \circ p_1) + \partial(T \circ \pi^\perp \circ p_1)\right),$$

*где* $\pi^{\perp} := \pi^* := I_E - \pi$ — *дополнение* $\pi$. *В частности,*

$$\partial(p_2 \circ p_1) = \bigcup_{T \in \partial p_2} \partial(T \circ p_1).$$

**5.8.** *Каждое опорное множество* $\partial p$ *операторно выпукло, т. е. для любых элементов* $S, T \in \partial p$ *и ортоморфизмов* $\alpha, \beta \in \mathrm{Orth}(E)^+$, $\alpha + \beta = I_E$, *выполняется соотношение* $\alpha \circ S + \beta \circ T \in \partial p$.

**5.9.** Метод канонического сублинейного оператора, эскизно представленный в этом параграфе, был предложен в заметке [25]; подробности можно найти в [24].

## 6. Замена переменного в преобразовании Юнга — Фенхеля

Обратимся теперь к задаче вычисления преобразования Юнга — Фенхеля составного оператора. Ограничимся алгебраического вариантом исчисления, [24] (случай выпуклых функций см. [31, 33, 36]). В этом параграфе $X$, $X_1$ и $X_2$ — векторные пространства, а $E$ — предупорядоченное векторное пространство. Обозначим $E^{\bullet} := E \cup \{+\infty\}$, $\overline{E} := E \cup \{-\infty, +\infty\}$ и пусть $I_E$ — тождественный оператор в $E$.

**6.1.** Будем говорить, что конусы $K_1$ и $K_2$ в векторном пространстве $X$ находятся *в алгебраическом общем положении*, если $K_1$ и $K_2$ воспроизводят (алгебраически) некоторое подпространство $X_0 \subset X$, т. е. $X_0 = K_1 - K_2 = K_2 - K_1$. Непустые выпуклые множества $C_1, \dots, C_n$ находятся *в алгебраическом общем положении*, если в алгебраическом общем положении находятся их преобразования Хёрмандера $H(C_1), \dots, H(C_n)$. (Для выпуклого множества $C$ по определению $H(C) := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}^+ : x \in tC\}$, подробнее см., например, [24, 1.2.6].)

**6.2.** Скажем, что выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^{\bullet}$ *находятся в алгебраическом общем положении*, если в общем положении находятся их преобразования Хёрмандера $H(f_1), \dots, H(f_n)$. Напомним, что преобразование Хёрмандера $H(f) : X \times \mathbb{R} \to E^{\bullet}$ выпуклого оператора $f : X \to E^{\bullet}$ вводится формулой

$$H(f) : (x, t) \mapsto \begin{cases} t f(x/t), & \text{если } t > 0; \\ 0, & \text{если } t = 0,\ x = 0; \\ +\infty, & \text{если } t < 0 \text{ или } t = 0 \text{ и } x \neq 0. \end{cases}$$

**6.3.** Сублинейные операторы находятся в общем положении, если их надграфики находятся в общем положении. Надграфик $\mathrm{epi}(f)$ оператора $f:\ X \to \overline{E}$ определяют формулы

$$\mathrm{epi}(f) := \{(x, e) \in X \times E :\ f(x) \leqslant e\}\,.$$

Рассмотрим выпуклые операторы $f_1 : X_1 \times X \to E^{\bullet}$ и $f_2 :\ X \times X_2 \to E^{\bullet}$. *Сверткой Рокафеллара* операторов $f_2$ и $f_1$ называют оператор $f_2 \vartriangle f_1 : X_1 \times X_2 \to E$, вычисляемый по формуле

$$f_2 \vartriangle f_1(x_1, x_2) := \inf_{x\in X}\{f_1(x_1, x) + f_2(x, x_2)\}.$$

**6.4.** *Преобразование Юнга — Фенхеля* $f^* : L(X, E) \to \overline{E}$ отображения $f : X \to E^{\bullet}$ определяем равенством (см. [24, 4.1.1]):

$$f^*(T) = \sup\{Tx - f(x) :\ x \in X\} \quad (T \in L\,(X, E)).$$

Заметим, что супремум вычисляется в $\overline{E}$. Обозначим

$$\mathrm{epi}(f_1, X_2) := \{(x_1, x, x_2, e) \in W :\ f_1(x_1, x) \leqslant e\},$$
$$\mathrm{epi}(X_1, f_2) := \{(x_1, x, x_2, e) \in W :\ f_2(x, x_2) \leqslant e\},$$

где $W := X_1 \times X \times X_2 \times E$.

**6.5.** *Преобразование Юнга — Фенхеля $f^*$ оператора $f$ со значениями в $E$ есть модульно выпуклый оператор над кольцом* $\mathrm{Orth}(E)$, *т. е. для любых операторов $S, T \in L(X, E)$ и ортоморфизмов $\alpha, \beta \in$* $\mathrm{Orth}(E)^+$, *$\alpha + \beta = I_E$, выполняется соотношение*

$$f^*(\alpha \circ S + \beta \circ T) \leqslant \alpha \circ f^*(S) + \beta \circ f^*(T).$$

Следующие две теоремы выводятся из теоремы Хана — Банаха — Канторовича.

**6.6. Теорема. (1)** *Если выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^{\bullet}$ находятся в общем положении, то справедлива точная формула*

$$(f_1 + \ldots + f_n)^* = f_1^* \oplus \ldots \oplus f_n^*.$$

*Точность формулы означает, что для любого $T \in \mathrm{dom}((f_1 + \ldots + f_n)^*)$ существуют линейные операторы $T_1, \dots, T_n \in L(X, E)$ такие, что*

$$T = T_1 + \ldots + T_n,$$
$$(f_1 + \ldots + f_n)^*(T) = f_1^*(T_1) + \ldots + f_n^*(T_n).$$

**(2)** *Если выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^{\bullet}$ находятся в общем положении, то справедлива точная формула*

$$(f_1 \vee \ldots \vee f_n)^* = \inf \left\{ \bigoplus_{l=1}^{n} (\alpha_l \circ f_l)^* : \ \alpha_l \in \operatorname{Orth}(E)^+, \ \sum_{l=1}^{n} \alpha_l = I_E \right\}.$$

*Точность формулы означает, что для любого $T \in \operatorname{dom}((f_1 \vee \ldots \vee f_n)^*)$ существуют линейные операторы $T_1, \dots, T_n \in L(X, E)$ и положительные ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \operatorname{Orth}(E)^+$ такие, что*

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = I_E, \quad T = T_1 + \ldots + T_n,$$
$$(f_1 \vee \ldots \vee f_n)^*(T) = (\alpha_1 f_1)^*(T_1) + \ldots + (\alpha_n f_n)^*(T_n).$$

**6.7. Теорема.** *Пусть $X$, $X_1$ и $X_2$ — векторные пространства, $F$ — $K$-пространство. Пусть, далее, $f_1 : X_1 \times X \to F^{\bullet}$ и $f_2 : X \times X_2 \to F^{\bullet}$ — выпуклые операторы, не равные тождественно $+\infty$. Если множества $\operatorname{epi}(f_1, X_2)$ и $\operatorname{epi}(X_1, f_2)$ находятся в общем положении, то справедлива точная формула*

$$(f_2 \vartriangle f_1)^* = f_2^* \vartriangle f_1^*,$$

*т. е. для любой пары $(T_1, T_2) \in \operatorname{dom}((f_1 \vartriangle f_2)^*)$, существует линейный оператор $T : X \to F$ такой, что*

$$(f_2 \vartriangle f_1)^* (T_1, T_2) = f_1^* (T_1, T) + f_2^* (T, T_2).$$

Из этой теоремы можно извлечь различные следствия для вычисления преобразования Юнга — Фенхеля композиции операторов (см. [24]). В частности, из нее можно вывести различные формы принципа Лагранжа.

**6.8.** Рассмотрим векторную программу $(C, g, f)$:

$$\Lambda x = y, \quad g(x) \leqslant 0, \quad f(x) \to \inf,$$

где $f : X \to E^{\bullet}$ и $g : X \to F^{\bullet}$ — выпуклые операторы, $\Lambda \in L(X, Y)$, $y \in Y$, $X$ и $Y$ — векторные пространства, $E$ — это некоторое $K$-пространство, $F$ — упорядоченные векторное пространства. Будем говорить, что программа $(C, g, f)$ *слабо регулярна по Слейтеру*, если выпуклые множества $\operatorname{epi}(g) \cap (C \times F)$ и $-X \times F^+$ находятся в общем положении и множество $\operatorname{dom}(f)$ имеет алгебраически внутреннюю

точку. Сформулируем вариант принципа Лагранжа, утверждающий, что конечное значение векторной программы есть значение безусловной задачи для подходящего лагранжиана.

**6.9. Принцип Лагранжа для значений векторных программ.** *Пусть* $e \in E$ *— значение векторной программы, т. е.* $e = \inf\{f(x) : \Lambda x = y,\ g(x) \leqslant 0\}$. *Если эта программа слабо регулярна по Слейтеру, то найдутся такие операторы* $\beta \in L^{+}(F, E)$ *и* $\gamma \in L(Y, E)$, *что*

$$e = \inf_{x \in X} \{f(x) + \beta g(x) + \gamma \Lambda x - \gamma y\}.$$

**6.10.** Время от времени в литературе появляются новые варианты теоремы Хана — Банаха — Канторовича. Однако ничего принципиально нового, как правило, не обнаруживается. Так, в [59, теорема 2.9] опубликована теорема Хана — Банаха — Лагранжа (или, что тоже самое, «новая теорема Хана — Банаха» в [60], см. также [61]), векторный вариант которой приводим ниже. В [3] показано, что на самом деле эта теорема новой не является, а представляет собой весьма частный случай теоремы 6.7.

**6.11. Теорема.** *Пусть* $j : X \to E^{\bullet}$ *и* $k : X \to F^{\bullet}$ *— выпуклые операторы,* $C := \operatorname{dom}(j) \cap \operatorname{dom}(k)$ *и* $S : E \to F$ *всюду определенный возрастающий сублинейный оператор. Тогда существует линейный положительный оператор* $L \in \partial S$ *такой, что*

$$\inf_{x \in C} (S \circ j + k)x = \inf_{x \in C} (L \circ j + k)x.$$

$\lhd$ Введем операторы $f : X \to E \times F$ и $S' : E \times F \to F$ формулами $f : x \mapsto (j(x), k(x))$ и $S' : (u, v) \mapsto Su + v$. Так как оператор $S'$ всюду определен и сублинеен, то множества $\operatorname{epi}(f) \times F$, $X \times \operatorname{epi}(S)$ находятся в общем положении. Но тогда из теоремы 6.7 легко выводится существование линейного положительного оператора $A = (L, I_0) \in \partial S'$ такого, что

$$\inf_{x \in \operatorname{dom}(f)} (S' \circ f)x = \inf_{x \in \operatorname{dom}(f)} (A \circ f)x.$$

Остается заметить, что $S' \circ f = S \circ j + k$ и $\partial S' = (\partial S) \times \{I_F\}$. $\rhd$

## 7. Выпуклый анализ в модулях

Как видно из 5.8 и 6.5, интересующие нас выпуклые объекты в пространстве операторов автоматически оказываются модульно

выпуклыми. Это обстоятельство подводят нас к рассмотрению абстрактной выпуклости, чтобы выявить область возможных приложений метода Хана — Банаха.

**7.1.** Пусть $A$ — произвольное решеточно упорядоченное кольцо с положительной единицей $\mathbb{1}_A$. Тем самым $A$ не только кольцо, но в $A$ имеется отношение порядка $\leqslant$, относительно которого $A$ является решеткой. Кроме того, сложение и умножение согласованы с порядком естественным образом. В частности, положительные элементы $A^+$ кольца $A$ составляют полугруппу относительно операции сложения в $A$. Теперь рассмотрим *модуль $X$ над кольцом $A$*, или короче *$A$-модуль $X$*. Этот модуль (как и последующие) всегда считается *унитарным*, т. е. $\mathbb{1}_A x = x$ для всех $x \in X$. Рассмотрим оператор $p : X \to E^\bullet$, где, как и выше, $E^\bullet := E \cup \{+\infty\}$ и $E$ — упорядоченый $A$-модуль (читатель восстановит для себя его естественное определение). Оператор называют *$A$-сублинейным* или *модульно сублинейным,* когда кольцо $A$ подразумевается из контекста, если для любых $x, y \in X$ и $\pi, \rho \in A^+$ справедливо неравенство

$$p(\pi x + \rho y) \leqslant \pi p(x) + \rho p(y).$$

В этой работе мы ограничиваемся изучением всюду определенных $A$-сублинейных операторов $p : X \to E$.

Подчеркнем, что $p(0) = 0$. Действительно, $p(0) \leqslant 0p(0) = 0$ и, кроме того, $p(0) = p(0+0) \leqslant 2p(0)$. В то же время, легко видеть, что не для всяких $x \in X$ и $0 \neq \pi \in A^+$ выполняется $p(\pi x) = \pi p(x)$ (в этом существенное отличие от $\mathbb{R}$-сублинейных операторов, т. е. обычных сублинейных операторов, рассмотренных выше). Если $p(\pi x) = \pi p(x)$ для всех $x \in X$ и $\pi \in A^+$, то $p$ называют *$A^+$-однородным оператором.*

**7.2.** Теперь рассмотрим множество $\mathrm{Hom}_A(X,\ E)$, которое также обозначают $L_A(X,\ E)$ или даже $L(X,\ E)$, если это не вызывает разночтений. Это множество состоит из всех *$A$-линейных операторов,* действующих их $X$ в $E$ или так называемых $A$-гомоморфизмов. Таким образом,

$$T \in \mathrm{Hom}_A(X,\ E) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall\, x, y \in X)\ (\forall\, \pi, \rho \in A)\ T(\pi x + \rho y) = \pi T x + \rho T y.$$

Для $A$-сублинейного оператора $p : X \to E$ *субдифференциал* в нуле или *опорное множество* $p$ и *субдифференциал в точке* $x$ из $X$

определяются соотношениями

$$\partial^A p := \{T \in \mathrm{Hom}_A(X,\ E) : (\forall\, x \in X)\ Tx \leqslant p(x)\};$$
$$\partial^A p(x) := \{T \in \partial^A p : Tx = p(x)\}.$$

Тем самым справедливо представление

$$\partial^A p(x) = \{T \in \mathrm{Hom}_A(X,\ E) : (\forall\, y \in X)\ T(y - x) \leqslant p(y) - p(x)\}.$$

Если $\mathbb{Z}$ — группа целых чисел, то в связи с тем, что $X$ и $E$ являются $\mathbb{Z}$-модулями (= абелевыми группами), определены субдифференциалы $\partial^{\mathbb{Z}} p$ и $\partial^{\mathbb{Z}} p(x)$, которые обозначаются просто символами $\partial p$ и $\partial p(x)$. Как будет видно ниже, это соглашение не вызывает коллизии обозначений.

**7.3. Теорема.** *Аддитивные опорные каждого модульно-сублинейного оператора $p$ являются модульными гомоморфизмами; символически, $\partial^A p = \partial p$.*

Отсюда следует, в частности, что свойство продолжения имеет место в усиленной форме, т. е. *групповой гомоморфизм, определенный на подгруппе и мажорируемый модульно-сублинейным оператором, допускает мажорированное продолжение до модульного гомоморфизма.*

**7.4.** Принято говорить, что $A$-модуль $E$ обладает *свойством $A$-продолжения,* если для любых $A$-модулей $X$ и $Y$, $A$-сублинейного оператора $p : Y \to E$ и гомоморфизма $T \in \mathrm{Hom}_A(X,\ Y)$ справедлива *формула Хана — Банаха*

$$\partial^A (p \circ T) = \partial^A p \circ T.$$

Если, кроме того, субдифференциал $\partial p(y)$ непуст для любого $y \in Y$, то говорят, что *$E$ допускает выпуклый анализ.* Группу, получающуюся из $K$-пространства при игнорировании умножения на действительные числа, называют *стертым $K$-пространством.*

**7.5.** Решеточно упорядоченное кольцо $A$ называют *$d$-кольцом,* если $x \wedge y = 0$ влечет $ax \wedge ay = xa \wedge ya = 0$ для всех $x, y \in A$ и $a \in A_+$. Легко проверить, что для решеточно упорядоченного кольца $A$ равносильны следующие утверждения:

**(1)** $A$ является $d$-кольцом;

**(2)** $|xy| = |x||y|$ для всех $x, y \in A$;

**(3)** $(xy)^+ = x^+y^+ + x^-y^-$ для всех $x, y \in A$;
**(4)** $(xy)^- = x^+y^- + x^-y^+$ для всех $x, y \in A$.

**7.6. Теорема.** *Пусть $A$ является $d$-кольцом. Упорядоченный $A$-модуль $E$ обладает свойством $A$-продолжения в том и только в том случае, если $E_b := E_+ - E_+$ является стертым $K$-пространством и естественное линейное представление $A$ в $E_b$ служит кольцевым и решеточным гомоморфизмом на подкольцо и подрешетку кольца ортоморфизмов $\mathrm{Orth}(E_b)$. При этом для любого $A$-сублинейного оператора $p$, действующего в $E$, выполнено $\partial^A p = \partial p$.*

**7.7.** Для описания модулей, допускающих выпуклый анализ, нам понадобится еще одно понятие. Подкольцо $A$ кольца ортоморфизмов называют *почти рациональным*, если для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеется убывающая сеть ортоморфизмов $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ из $A$ такая, что при каждом $y \in E^+$ выполнено

$$\frac{1}{n}y = o\text{-}\lim_{\xi\in\Xi} \pi_\xi y = \inf_{\xi\in\Xi} \pi_\xi y.$$

**7.8.** *Кольцо $A$ является почти рациональным в том и только в том случае, если каждый $A$-сублинейный оператор является $A^+$-однородным.*

**7.9. Теорема.** *Упорядоченный $A$-модуль $E$ допускает выпуклый анализ в том и только в том случае, если $E_b$ — это стертое $K$-пространство и естественное линейное представление $A$ в $E_b$ является кольцевым и решеточным гомоморфизмом на почти рациональное кольцо ортоморфизмов в $E_b$.*

$\lhd$ Операторы $\pi \mapsto \pi^+ y$ $(\pi \in A)$ и $z \mapsto z^+$ $(z \in E_b)$, где $y \in E^+$, очевидно, $A$-сублинейны. Значит, если $A$-модуль $E$ допускает выпуклый анализ, то в силу 7.3 эти операторы $A^+$-однородны. Из последнего легко выводится, что естественное линейное представление $A$ в $E_b$ является кольцевым и решеточным гомоморфизмом на подкольцо и подрешетку $\mathrm{Orth}(E_b)$. В силу 7.8 это подкольцо почти рационально. Для завершения доказательства достаточно осуществить необходимые факторизации сослаться на теорему 7.6 и на 7.8. $\rhd$

**7.10.** Таким образом, установлено фактически, что с точностью до элементарных оговорок выпуклый анализ имеет место в тех и только тех случаях, когда речь идет о пространствах Канторовича, рассматриваемых как модули над алгебрами своих ортоморфизмов.

С учетом теоремы 5.3, которая автоматически обеспечивает выполнение условий коммутации, мы можем сделать несколько парадоксальный вывод о том, что *никакого специального «модульного» выпуклого анализа просто нет.* Эти результаты получены в [27]. Дальнейший комментарий по этому поводу см. [22, 24, 28].

## 8. Булевозначный анализ

Как уже отмечалось выше, пространства Канторовича были введены в 1935 г. как объекты, элементы которых эвристически представляют собой аналоги вещественных чисел. Спустя сорок с лишним лет оказалось, что и на самом деле элементы пространства Канторовича — суть булевозначные числа в самом точном смысле этих слов. По существу именно с этого факта и начинается новая математическая теория — булевозначный анализ. Сведения из математической логики, необходимые для понимания последующего текста, не выходят за пределы университетского курса. При необходимости можно освежить этот материал, пользуясь книгами [9, 32].

**8.1.** *Булевозначным анализом* называют раздел функционального анализа, использующий специальную теоретико-модельную технику — булевозначные модели теории множеств. Любопытно, что создание булевозначных моделей было никак не связано с теорией упорядоченных векторных пространств. Необходимые для построения булевозначных моделей языковые и технические средства были сформированы в математической логике уже к 1960-му г. В то же время отсутствовала генеральная идея, вдохнувшая жизнь в зарождавшийся формальный аппарат и приведшая к бурному прогрессу в теории моделей. Такая идея пришла с открытием П. Дж. Коэна, который в 1963 г. установил абсолютную неразрешимость классической проблемы континуума [16]. Осмысление метода форсинга, созданного П. Дж. Коэном, привело к появлению булевозначных моделей теории множеств в работах П. Вопенки, Д. Скотта и Р. Соловея.

**8.2.** Пусть $B$ — фиксированная полная булева алгебра с единицей $\mathbb{1}$. *Булевозначной интерпретацией* $n$-местного предиката $P$ на классе $X$ называют отображение $R : X^n \to B$. Предположим, что $\mathscr{L}$ — язык первого порядка с предикатами $P_0, P_1, \dots, P_n$, а $R_0, R_1, \dots, R_n$ — фиксированные булевозначные интерпретации этих предикатов на класс $X$. Для формулы $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ языка $\mathscr{L}$ и элементов $x_1, \dots, x_m \in X$ обычной рекурсией по длине формулы $\varphi$ опре-

деляется *оценка* (*истинности*) $[\![\,\varphi(x_1,\dots,x_m)\,]\!] \in B$. Для атомных формул полагают

$$[\![\,P_k(x_1,\dots,x_m)\,]\!] := R_k(x_1,\dots,x_m).$$

На шагах индукции применяют правила:

$$[\![\,\varphi \vee \psi\,]\!] := [\![\,\varphi\,]\!] \vee [\![\,\psi\,]\!],$$

$$[\![\,\varphi \wedge \psi\,]\!] := [\![\,\varphi\,]\!] \wedge [\![\,\psi\,]\!],$$

$$[\![\,\varphi \to \psi\,]\!] := [\![\,\varphi\,]\!] \Rightarrow [\![\,\psi\,]\!],$$

$$[\![\,\neg\varphi\,]\!] := [\![\,\varphi\,]\!]^*,$$

$$[\![\,(\forall\, x)\,\varphi\,]\!] := \bigwedge_{x\in X} [\![\,\varphi(x)\,]\!],$$

$$[\![\,(\exists x)\,\varphi\,]\!] := \bigvee_{x\in X} [\![\,\varphi(x)\,]\!],$$

где в правых частях равенств знаки $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $(\,\cdot\,)^*$, $\bigvee$, $\bigwedge$ обозначают булевы операции в $B$, причем $a \Rightarrow b := a^* \vee b$.

**8.3.** Говорят, что утверждение $\varphi(x_1,\dots,x_m)$, где $x_1,\dots,x_m \in X$, а $\varphi(u_1,\dots,u_m)$ — формула, *истинно* (*верно, справедливо* и т. п.) в алгебраической системе $\mathbb{X} := (X, R_0,\dots,R_n)$, и используют запись $\mathbb{X} \models \varphi(x_1,\dots,x_m)$, если $[\![\,\varphi(x_1,\dots,x_m)\,]\!] = \mathbb{1}$. Все логически истинные утверждения верны в $\mathbb{X}$. Если предикат $P_0$ есть равенство, то требуют, чтобы в $B$-системе $\mathbb{X} := (X, =, R_1,\dots,R_n)$ выполнялись аксиомы равенства. При выполнении этого требования в $B$-системе $\mathbb{X}$ будут справедливы все логически истинные предложения логики первого порядка с равенством, выразимые в языке $\mathscr{L} := \{=, P_1,\dots,P_n\}$.

**8.4.** Рассмотрим теперь булевозначную интерпретацию языка теории множеств Цермело — Френкеля с аксиомой выбора (=ZFC) на классе $X$. Напомним, что язык этой теории $\mathscr{L} := \{=,\in\}$ есть язык первого порядка с двумя двуместными предикатами $=$ и $\in$. Интерпретации этих предикатов обозначим через $[\![\,\cdot = \cdot\,]\!]$ и $[\![\,\cdot \in \cdot\,]\!]$, соответственно. Таким образом, $[\![\,\cdot = \cdot\,]\!], [\![\,\cdot \in \cdot\,]\!] : X \times X \to B$, причем употребляют более привычные обозначения

$$[\![\,x = y\,]\!] := [\![\,=(x,y)\,]\!], \quad [\![\,x \in y\,]\!] := [\![\,\in(x,y)\,]\!] \quad (x, y \in X).$$

**8.5.** Можно показать (см. [23, теорема 6.1.11]), что если к определению $B$-системы добавить некоторые естественные требования (технического характера), то существует единственная (с точностью до изоморфизма) $B$-система $\mathbb{X} := (X, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$, в которой справедливы все аксиомы (а значит и все теоремы) теории множеств ZFC, т. е. такие, что $\mathbb{X} \models \mathrm{ZFC}$. Такую $B$-систему называют *булевозначной моделью* теории множеств и обозначают символом $\mathbb{V}^{(B)} := (\mathbb{V}^{(B)}, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$. Класс $\mathbb{V}^{(B)}$ принято также называть *булевозначным универсумом*, а элементы $\mathbb{V}^{(B)}$ — *$B$-значными множествами.*

Примем следующее удобное соглашение: Если $x$ — элемент $\mathbb{V}^{(B)}$, и $\varphi(\cdot)$ — формула ZFC, то фраза «$x$ удовлетворяет $\varphi$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$» или, кратко, «$\varphi(x)$ истинна внутри $\mathbb{V}^{(B)}$» означает, что $[\![\varphi(x)]\!] = \mathbb{1}$.

**8.6. Принцип переноса.** *Для каждой теоремы $\varphi$ теории* ZFC, *мы имеем $[\![\varphi]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $\varphi$ истинна внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.*

**8.7. Принцип перемешивания.** *Пусть $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в $B$, т. е. $\xi \neq \eta \Rightarrow b_\xi \wedge b_\eta = 0$ и $\sup_{\xi\in\Xi} b_\xi = \sup B = \mathbb{1}$. Для каждого семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$ существует единственный элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что*

$$[\![x = x_\xi]\!] \geqslant b_\xi \quad (\xi \in \Xi).$$

Этот элемент называют *перемешиванием* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и обозначают $\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi$.

**8.8. Принцип максимума.** *Для каждой формулы $\varphi$ из* ZFC *существует $B$-значное множество $x_0$ такое, что*

$$[\![(\exists x)\varphi(x)]\!] = [\![\varphi(x_0)]\!].$$

Отсюда, в частности, следует, что если $[\![\,(\exists! x)\,\varphi(x)\,]\!] = \mathbb{1}$, то существует, и притом единственный, элемент $x_0$ из $\mathbb{V}^{(B)}$, для которого выполнено $[\![\,\varphi(x_0)]\!] = \mathbb{1}$.

**8.9.** Существует единственное отображение $x \mapsto x^\wedge$ из класса всех множеств $\mathbb{V}$ (называемого также *универсумом фон Неймана*) в $\mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющее требованию: для любых $x, y \in \mathbb{V}$ и $z \in \mathbb{V}^{(B)}$ имеют место соотношения

**(1)** $x = y \Leftrightarrow [\![\,x^\wedge = y^\wedge]\!] = \mathbb{1}, \quad x \in y \Leftrightarrow [\![\,x^\wedge \in y^\wedge]\!] = \mathbb{1};$

**(2)** $[\![\,z \in y^\wedge]\!] = \bigvee_{x\in y} [\![\,x^\wedge = z\,]\!].$

Это отображение называют *каноническим вложением* универсума всех множеств в булевозначный универсум (оно инъективно ввиду (1)), а элемент $x^{\wedge}$ принято называть *стандартным именем* $x$.

**8.10. Ограниченный принцип переноса.** *Пусть* $\varphi$ — *ограниченная формула теории множество* ZFC. *Тогда для всех* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ *имеет место эквивалентность*

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow [\![\varphi(x_1^{\wedge}, \dots, x_n^{\wedge})]\!] = \mathbb{1}.$$

Напомним, что формулу называют *ограниченной*, если каждый квантор в ней имеет форму $\forall\, x \in y$ или $\exists\, x \in y$.

## 9. Спуски и подъемы

Принципы булевозначного анализа, сформулированные в предыдущем параграфе, позволяют проводить внутри булевозначного универсума конструкции, обычные для математической практики. Изображающие их объекты можно воспринимать как нестандартные реализации исходных математических образований.

Таким образом, считая модель $\mathbb{V}^{(B)}$ нестандартным представлением математического мира и учитывая, что $\mathbb{V}^{(B)}$ строится в пределах универсума фон Неймана, мы можем заглянуть внутрь булевозначного мира и увидеть нестандартные изображения стандартных объектов. При переборе алгебр $B$ взору наблюдателя открываются многие ипостаси одной и той же идеи, выраженной теоретико-множественной формулой. Сравнение таких ипостасей между собой составляет метод исследования заложенной в них математической идеи. Основным инструментом такого исследования служит *техника спусков и подъемов*, к эскизному изложению которой мы переходим.

**9.1.** Для каждого элемента $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ множество $x{\downarrow}$, определяемой формулой

$$x{\downarrow} := \{t : t \in \mathbb{V}^{(B)}, \quad [\![t \in x]\!] = \mathbb{1}\},$$

называют *спуском* элемента $x$. Спуск каждого элемента является *циклическим*, т. е. содержит любые перемешивания его элементов.

**9.2.** Для $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(B)}$ обозначим символом $(x_1, \dots, x_n)^B$ упорядоченную $n$-ку внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Предположим что $P$ — это $n$-местное

отношение на $X$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $X, P \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $[\![P \subset X^{n^\wedge}]\!] = \mathbb{1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда существует $n$-местное отношение $P'$ на $X{\downarrow}$ такой, что

$$(x_1, \dots, x_n) \in P' \Leftrightarrow [\![(x_1, \dots, x_n)^B \in P]\!] = \mathbb{1}.$$

Допуская некоторую вольность, будем обозначать отношение $P'$ тем же символом $P{\downarrow}$ и называть его *спуском отношения* $P$.

**9.3. Теорема.** *Пусть $F$ — соответствие из $X$ в $Y$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда существует единственное соответствие $F{\downarrow}$ из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$ такое, что для каждого (непустого) подмножества $A \subset X$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ имеем*

$$F{\downarrow}(A{\downarrow}) = F(A){\downarrow}.$$

Легко видеть, что $F{\downarrow}$ определено по правилу

$$(x, y) \in F{\downarrow} \Leftrightarrow [\![(x, y)^B \in F]\!] = \mathbb{1}.$$

**9.4.** Предположим, что $X, Y, f \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что $[\![f : X \to Y]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $f$ — отображение из $X$ в $Y$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда $f{\downarrow}$ — единственное отображение из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$ для которого

$$[\![f{\downarrow}(x) = f(x)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X{\downarrow}).$$

**9.5.** Пусть $x \subset \mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $x$ — множество составленное из элементов булевозначного универсума. Существует и притом единственный элемент $y \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что

$$[\![u \in y]\!] = \bigvee_{z \in x} [\![u = z]\!]$$

для любого $u \in \mathbb{V}^{(B)}$. Элемент $y$ называют *подъемом множества* $x$ и обозначают $x{\uparrow}$.

**9.6. Теорема.** *Пусть $X, Y \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$ и пусть $F$ — соответствие из $X$ в $Y$ с $\operatorname{dom} F = X$. Тогда существует единственное соответствие $F{\uparrow}$ из $X{\uparrow}$ в $Y{\uparrow}$ внутри $V^{(B)}$ такое, что равенство*

$$F{\uparrow}(A{\uparrow}) = F(A){\uparrow}$$

*имеет место для каждого подмножества $A$ из $X$ если и только, если $F$ — экстенсионально. Последнее означает, что*

$$y_1 \in F(x_1) \to [\![x_1 = x_2]\!] \leqslant \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![y_1 = y_2]\!].$$

**9.7.** Если экстенсиональное соответствие $f$ является отображением из $X$ в $Y$, то его подъем $f{\uparrow}$ — отображение из $X{\uparrow}$ в $Y{\uparrow}$. При этом свойство экстенсиональности имеет следующий вид:

$$[\![x_1 = x_2]\!] \leqslant [\![f(x_1) = f(x_2)]\!] \quad (x_1, x_2 \in X).$$

Для данного множества $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$ обозначим символом $\operatorname{mix} X := \operatorname{mix}(X)$ множество всех перемешиваний вида $\operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, где $(x_\xi) \subset X$ и $(b_\xi)$ — произвольное разбиение единицы в $B$. Следующее предложение содержит *правила сокращения стрелок* или, как еще говорят, *правила Эшера.*

**9.8.** Пусть $X$ и $X'$ — подмножества $\mathbb{V}^{(B)}$ и $f : X \to X'$ — экстенсиональное отображение. Предположим, что элементы $Y, Y', g \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что $[\![\, Y \neq \varnothing]\!] = [\![\, g : Y \to Y']\!] = \mathbb{1}$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$X{\uparrow}{\downarrow} = \operatorname{mix} X, \quad Y{\downarrow}{\uparrow} = Y;$$
$$f{\uparrow}{\downarrow} = f, \quad g{\downarrow}{\uparrow} = g.$$

**9.10.** Вводят также модифицированные спуски и подъемы. Пусть $X$ — произвольное непустое множество и $f : X \to Y{\downarrow}$, где $\varnothing \neq Y \in \mathbb{V}^{(B)}$. Принимая во внимание 8.9, мы можем считать $f$ отображением из $\widehat{X} := \{x^\wedge : x \in X\}$ в $Y{\downarrow}$. Очевидно $f$ — экстенсионально, поэтому резонно говорить об элементе $f{\uparrow}$ из $\mathbb{V}^{(B)}$, называемом *модифицированным подъемом* $f$. Отметим, что согласно вышесказанному $[\![f{\uparrow} : X^\wedge \to Y]\!] = \mathbb{1}$. Кроме того, для каждого $g \in \mathbb{V}^{(B)}$ такого, что $[\![g : X^\wedge \to Y]\!] = \mathbb{1}$, существует и притом единственное отображение $f : X \to Y{\downarrow}$, для которого $g = f{\uparrow}$. При этом говорят, что $f$ — *модифицированный подъем* $g$.

## 10. Булевозначные числа

Булевозначный анализ начинается с утверждения о том, что изображение поля действительных чисел в булевозначной модели представляет собой расширенное $K$-пространство. Этот замечательный факт позволяет по новому взглянуть на такой древний объект, как числовая прямая.

**10.1.** Согласно принципу максимума в модели $\mathbb{V}^{(B)}$ существует поле действительных чисел, т. е. такой объект $\mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, для которого истинно высказывание

$$[\![\mathscr{R} \text{ — поле действительных чисел}\,]\!] = \mathbb{1}.$$

Здесь мы, допуская вольность, не различаем алгебраическую систему — поле действительных чисел ($\mathscr{R}$, $+$, $\cdot$, $\leqslant$, 0, 1) внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и ее носитель $\mathscr{R}$, т. е. множество $\mathscr{R}$, на котором определены сложение $+$, умножение $\cdot$, отношение порядка $\leqslant$, и в котором выделены два элемента 0 и 1. Аналогично, полагаем $\mathbb{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant, 0, 1)$. Заметим далее, что в силу принципа ограниченного переноса $\mathbb{R}^\wedge$ (= стандартное имя поля действительных чисел $\mathbb{R}$, т. е. фактически алгебраическая система ($\mathbb{R}^\wedge$, $+$, $\cdot$, $\leqslant$, 0, 1) внутри $\mathbb{V}^{(B)}$) представляет собой архимедово упорядоченное поле внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, а в силу принципа переноса оно является плотным подполем поля $\mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ (с точностью до изоморфизма).

**10.2.** Осуществим теперь спуск операций сложения и умножения, а также отношения порядка из $\mathscr{R}$ в $\mathscr{R}{\downarrow}$ в соответствие с общими правилами спуска 9.1, 9.3 и 9.4:

$$\begin{gathered}x + y = z \Leftrightarrow [\![x + y = z]\!] = \mathbb{1};\\ xy = z \Leftrightarrow [\![xy = z]\!] = \mathbb{1};\\ x \leqslant y \Leftrightarrow [\![x \leqslant y]\!] = \mathbb{1};\\ \lambda x = y \Leftrightarrow [\![\lambda^\wedge x = y]\!] = \mathbb{1}\\ (x, y, z \in \mathscr{R}{\downarrow},\ \lambda \in \mathbb{R}).\end{gathered}$$

Получим некоторую алгебраическую систему $\mathscr{R}{\downarrow}$.

**10.3. Теорема Гордона.** *Пусть $B$ — полная булева алгебра и $\mathscr{R}$ — упорядоченное поле действительных чисел в булевозначной модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда $\mathscr{R}{\downarrow}$ (со спущенными операциями и порядком) представляет собой расширенное $K$-пространство. При этом существует изоморфизм $\chi$ булевой алгебры $B$ на базу $\mathfrak{P}(\mathscr{R}{\downarrow})$ (= булеву алгебру порядковых проекторов в $\mathscr{R}{\downarrow}$ ) такой, что справедливы эквивалентности*

$$\begin{gathered}\chi(b)x = \chi(b)y \ \Leftrightarrow\ b \leqslant [\![\, x = y \,]\!],\\ \chi(b)x \leqslant \chi(b)y \ \Leftrightarrow\ b \leqslant [\![\, x \leqslant y \,]\!]\end{gathered}$$

*для всех $x, y \in \mathscr{R}$ и $b \in B$.*

**10.4.** При этом оказывается, что любая теорема (в рамках аксиоматики Цермело — Френкеля с аксиомой выбора) о вещественных числах имеет свой аналог для $K$-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$, причем перевод одних теорем в другие осуществляется посредством точно определённых стандартных процедур, т. е. по сути дела, алгоритмически.

Тем самым тезис Л. В. Канторовича «элементы $K$-пространства — суть обобщённые числа» обретает в булевозначном анализе строгую математическую формулировку. Иначе говоря, эвристический принцип переноса, игравший вспомогательную, наводящую роль во многих исследованиях в добулевозначной теории $K$-пространств, становится в рамках булевозначного анализа методом строго научного исследования.

**10.5.** Теорему 10.3 установил Е. И. Гордон в [7]. Если в ней $B$ — это $\sigma$-алгебра измеримых множеств по модулю множеств ненулевой меры $\mu$, то пространство $\mathscr{R}{\downarrow}$ изоморфно расширенному $K$-пространству измеримых функций $L^0(\mu)$ (см. 2.5 (1) и 3.8 (1)). Если $B$ — полная булева алгебра проекторов в гильбертовом пространстве, то $\mathscr{R}{\downarrow}$ изоморфно пространству тех самосопряженных операторов, у которых спектральная функция действует в $B$ (см. 2.5 (4) и 3.8 (4)). Эти два частных случая теоремы Гордона интенсивно и плодотворно эксплуатировал Г. Такеути, см. [57], а также библиографию в [23]. Понятно, что $\mathscr{R}{\downarrow}$ изоморфно $C_\infty(Q)$ или $\mathrm{Bor}(Q)$, если $B$ — булева алгебра открыто замкнутых множество или же булева алгебре борелевских подмножеств $Q$ по модулю множеств первой категории соответственно (см. 2.5 (2, 3) и 3.8 (2, 3)). Объект $\mathscr{R}{\downarrow}$ для общих булевых алгебр рассмотрел также Т. Йех [48], переоткрыв по существу теорему Гордона. Отличие состоит в том, что в [48] (комплексное) расширенное $K$-пространство с единицей определяется другой системой аксиом и именуется полной стоуновой алгеброй.

**10.6.** Дальнейшее развитие булевозначного анализа показало, что подобный перевод (перенос, трансляция), изготовляющий из известных фактов новые теоремы, возможен не только для $K$-пространств, но и практически для всех объектов, так или иначе с ними связанных. Подробное изложение теории булевозначных моделей, а также разнообразных их приложений можно найти в [11, 18, 21, 23, 30, 42, 57, 58].

### 11. Представление сублинейных операторов

Покажем, что булевозначное представление позволяет изучать некоторые свойства выпуклых операторов и их субдифференциалов путем сведения к случаю функционалов. В силу результатов параграфа 5, достаточно для этой цели рассмотреть лишь случай канонического оператора. Начнем со вспомогательных сведений о способах

изображения пространства ограниченных функций и сопряженного пространства в булевозначных моделях.

**11.1.** Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое непустое множество. В силу принципа максимума внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ имеется объект $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})$ такой, что $[\![\, l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})$ — это $K$-пространство всех ограниченных функций с областью определения $\mathfrak{A}^\wedge$ и значениями в $\mathscr{R}\,]\!] = \mathbb{1}$. Рассмотрим спуск

$$l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow} := \{t \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![\, t \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})\,]\!] = \mathbb{1}\}.$$

Осуществим также спуск алгебраических операций и отношения порядка из $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})$ в $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$. Тогда $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$ превращается в $K$-пространство и, более того, в модуль над $\mathscr{R}{\downarrow}$.

**11.2.** *Отображение «подъем», сопоставляющее каждой ограниченной $\mathscr{R}{\downarrow}$-значной функции на $\mathfrak{A}$ ее подъем — ограниченную $\mathscr{R}$-значную функцию на $\mathfrak{A}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, осуществляет алгебраический и порядковый изоморфизм $l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow})$ и $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$.*

Смысл приведенного утверждения состоит, в частности, в том, что спуск $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow}$ можно рассматривать как еще одну реализацию пространства $l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow})$.

**11.3.** Рассмотрим в $\mathbb{V}^{(B)}$ объект $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#$, который представляет собою алгебраически сопряженное к $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})$ пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Спуск $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#{\downarrow}$ наделяется спущенными структурами. Можно показать, что $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#{\downarrow}$ — это модуль над кольцом $\mathscr{R}{\downarrow}$. Пусть $\mu \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#{\downarrow}$. Это означает, что

$$[\![\, \mu \text{ — это } \mathscr{R}\text{-гомоморфизм } l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}) \text{ в } \mathscr{R}\,]\!] = \mathbb{1}.$$

Пусть, далее, $\mu{\downarrow} : l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R}){\downarrow} \to \mathscr{R}{\downarrow}$ — спуск $\mu$. Для $f \in l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow})$ положим

$$\mu_\downarrow(f) := \mu{\downarrow}(f{\uparrow}).$$

**11.4.** *Отображение «спуск» $\mu \mapsto \mu_\downarrow$ осуществляет изоморфизм $\mathscr{R}{\downarrow}$-модулей $l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge, \mathscr{R})^\#{\downarrow}$ и $\mathrm{Hom}_{\mathscr{R}\downarrow}(l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow}), \mathscr{R}{\downarrow})$, где символом $\mathrm{Hom}_{\mathscr{R}\downarrow}(l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow}), \mathscr{R}{\downarrow})$ обозначено пространство $\mathscr{R}{\downarrow}$-гомоморфизмов из $l_\infty(\mathfrak{A}, \mathscr{R}{\downarrow})$ в $\mathscr{R}{\downarrow}$.*

Обратное отображение к отображению «спуск» $\mu \mapsto \mu_\downarrow$ обозначим символом $t \mapsto t^\uparrow$, где $t \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{R}\downarrow}(l_\infty(\mathfrak{A},\ \mathscr{R}{\downarrow}),\ \mathscr{R}{\downarrow})$. В подробной записи это означает

$$t^\uparrow(f) := t(f{\downarrow}) \quad (f \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge,\ \mathscr{R}){\downarrow}).$$

**11.5.** Пусть $\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}$ — канонический сублинейный функционал, отвечающий множеству $\mathfrak{A}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. такой элемент $\mathbb{V}^{(B)}$, для которого

$$[\![\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge} : l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge,\ \mathscr{R}) \to \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1},$$
$$[\![(\forall\, f \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge,\ \mathscr{R}))\ \varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}(f) = \sup f(\mathfrak{A}^\wedge)]\!] = \mathbb{1}.$$

Нетрудно убедиться, что для каждого элемента $f$ из $l_\infty(\mathfrak{A},\ \mathscr{R}{\uparrow})$ выполняется

$$[\![\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}(f{\uparrow}) = \varepsilon_{\mathfrak{A}}(f)]\!] = \mathbb{1}.$$

**11.6.** *Пусть $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}$ — субдифференциал канонического сублинейного функционала $\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и пусть* $\mathrm{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge})$ *— множество крайних точек субдифференциала $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда для любого отображения $t$ из* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{R}\downarrow}(l_\infty(\mathfrak{A},\ \mathscr{R}{\downarrow}),\ \mathscr{R}{\downarrow})$ *и любого элемента $\mu \in l_\infty(\mathfrak{A}^\wedge,\ \mathscr{R})^{\#}{\downarrow}$ справедливы эквивалентности*:

$$t^{\uparrow} \in (\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}){\downarrow} \Leftrightarrow t \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}};$$
$$t^{\uparrow} \in \mathrm{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}){\downarrow} \Leftrightarrow t \in \mathrm{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}});$$
$$\mu_{\downarrow} \in \partial\varepsilon_{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \mu \in (\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}){\downarrow};$$
$$\mu_{\downarrow} \in \mathrm{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) \Leftrightarrow \mu \in \mathrm{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}^\wedge}){\downarrow}.$$

**11.7.** Пусть $B := \mathfrak{B}(E) := \mathfrak{P}(E)$ — база $E$, т. е. полная булева алгебра порядковых проекторов в $E$. Возьмем разбиение единицы в $B$. Если $(T_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство операторов из $L(X,E)$ и оператор $T \in L(X,E)$ таков, что $Tx = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi T_\xi x$ для всех $x \in X$, то $T$ называют *перемешиванием* $(T_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *с вероятностями* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Пусть $E := \mathscr{R}{\downarrow}$, $t^{\uparrow} := T{\uparrow}$ и $t^{\uparrow}_\xi := T_\xi{\uparrow}$. Тогда $t^{\uparrow}$ будет перемешиванием семейства $(t^{\uparrow}_\xi) \subset \mathbb{V}^{(B)}$ с вероятностями $(b_\xi)$. Отсюда видно, что такое незаконное использование занятого слова «перемешивание» фактически корректно.

Для канонического сублинейного оператора $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$, без сомнений, $\delta$-*функции* $\varepsilon_A : f \mapsto f(A)$ $(f \in l_\infty(\mathfrak{A}, E))$ лежат в $\mathrm{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}})$. Перемешивания семейства $(\varepsilon_A)_{A\in\mathfrak{A}}$ называют *чистыми состояниями* на $\mathfrak{A}$. Очевидно, что чистые состояния — это крайние точки канонического сублинейного оператора.

**11.8.** *Отображение «спуск» осуществляет биекцию между множеством чистых состояний на $\mathfrak{A}$ и подмножеством $\mathbb{V}^{(B)}$, состоящим из $\delta$-функций в точках стандартного имени $\mathfrak{A}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.*

Теперь можем дать описание строения крайних точек и элементов субдифференциала канонического оператора. Метод получения нужных описаний состоит в интерпретации во внешних терминах классических теорем Крейна — Мильмана и Мильмана, сформулированных для функционалов в нужной булевозначной модели.

**11.9.** *Каждая крайняя точка субдифференциала канонического оператора является поточечным $r$-пределом сети чистых состояний.*

**11.10.** *Субдифференциал канонического сублинейного оператора совпадает с поточечным $r$-замыканием сильно операторно-выпуклой оболочки множества $\delta$-функций.*

## 12. Теорема Крейна — Мильмана

Субдифференциалы скалярных выпуклых функций во внутренних точках их областей определения обладают следующими свойствами, устанавливаемыми в стандартных курсах функционального анализа:

**(a)** субдифференциал — выпуклое слабо компактное множество;

**(b)** элементы наименьшего субдифференциала, содержащего некоторое слабо (порядково) ограниченное множество $\mathfrak{A}$, получаются применением операций взятия выпуклой оболочки $\mathfrak{A}$ и перехода к замыканию;

**(c)** крайние точки наименьшего субдифференциала, содержащего множество $\mathfrak{A}$, лежат в слабом замыкании $\mathfrak{A}$.

Здесь рассмотрим вопрос об операторных вариантах приведенных утверждений. Оказывается, что для характеризации операторных субдифференциалов необходимо добавить еще одну операцию, связанную с порядком — перемешивание.

**12.1.** Пусть $p : X \to E$ — сублинейный оператор. Обозначим символом $\operatorname{ext}(p)$ совокупность всех *крайних точек* опорного множества $\partial p$. Возьмем еще одно $K$-пространство $F$, и пусть $T \in L^+(E,\ F)$. Оператор $S \in \partial p$ называют *$T$-крайней точкой $\partial p$* (или $T$-крайней точкой $p$) и пишут $S \in \mathscr{E}(T,\ p)$, если $T \circ S \in \operatorname{ext}(T \circ p)$. Если $\mathfrak{L}$ — некоторое семейство положительных операторов, то полагают

$$\mathscr{E}(\mathfrak{L},\ p) := \bigcap_{T \in \mathfrak{L}} \mathscr{E}(T,\ p).$$

Напомним, что оператор $T$ называют *порядково-непрерывным* или *$o$-непрерывным,* если для любого фильтрованного по убыванию огра-

ниченного снизу множества $U$ в $E$ выполнено $T(\inf U) = \inf T(U)$. Пусть $\mathfrak{L}_0$ — класс всех $o$-непрерывных операторов, определенных в $K$-пространстве $E$ и принимающих свои значения в произвольном $K$-пространстве. Множество $\mathscr{E}(\mathfrak{L}_0, p)$ обозначают символом $\mathscr{E}_0(p)$, а его элементы называют *$o$-крайними точками* $\partial p$ (или $p$).

**12.2. Теорема Крейна — Мильмана для о-крайних точек.** *Каждое опорное множество является опорной оболочкой множества своих о-крайних точек. Символически,*

$$\partial p = \partial(\varepsilon_{\mathscr{E}_0(p)}) \circ \langle \mathscr{E}_0(p) \rangle.$$

Важная особенность множества крайних точек субдифференциалов — возможность их «перемешивания» или, как еще говорят, *цикличность* $\operatorname{ext}(p)$.

**12.3.** *Пусть* $(S_\xi)_{\xi \in \Xi}$ *— семейство элементов* $\operatorname{ext}(p)$ *и пусть* $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ *— семейство порядковых проекторов, являющихся разбиением единицы, т. е. таких, что*

$$\xi_1 \neq \xi_2 \Rightarrow \pi_{\xi_1} \circ \pi_{\xi_2} = 0; \quad \sum_{\xi \in \Xi} \pi_\xi = I_E.$$

*Тогда оператор* $\sum_{\xi \in \Xi} \pi_\xi \circ S_\xi$ *также принадлежит* $\operatorname{ext}(p)$.

**12.4.** Последний факт позволяет назвать (слабо порядково ограниченное) множество $\mathfrak{A}$ в $L(X,\ E)$ *циклическим,* если для каждого семейства $(S_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов $\mathfrak{A}$ и для произвольного разбиения единицы $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ имеем $\sum_{\xi \in \Xi} \pi_\xi \circ S_\xi \in \mathfrak{A}$. Наименьшее циклическое множество, содержащее данное множество $\mathfrak{A}$ называют *циклической оболочкой* $\mathfrak{A}$ и обозначают $\operatorname{cyc}(\mathfrak{A})$. При этом нетрудно видеть, что $\operatorname{cyc}(\mathscr{E}_0(p)) \subset \operatorname{ext}(p)$.

Рассмотрим теперь связь между $o$-крайними и крайними точками более детально.

**12.5. Теорема.** *Множество крайних точек опорного множества канонического оператора* $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ *состоит из решеточных гомоморфизмов пространства* $l_\infty(\mathfrak{A},\ E)$ *в* $E$*, лежащих в* $\partial\varepsilon_{\mathfrak{A}}$*. При этом имеет место равенство* $\operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) = \mathscr{E}_0(\varepsilon_{\mathfrak{A}})$.

**12.6. Теорема Мильмана.** *Пусть* $p : Y \to E$ *— сублинейный оператор, действующий из* $Y$ *в* $K$*-пространство* $E$*. Пусть, кроме того,* $T \in L(X,\ Y)$*. Тогда справедливо включение* $\operatorname{ext}(p \circ T) \subset \operatorname{ext}(p) \circ T$.

Отметим некоторые важные следствия теоремы Мильмана.

**12.7.** *Если субдифференциал ∂p есть опорная оболочка множества* $\mathfrak{A}$, *то* $\operatorname{ext}(p) \subset \operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) \circ \langle \mathfrak{A} \rangle$.

◁ Действительно, учитывая представление из 5.5 и привлекая теорему Мильмана, выводим:

$$\operatorname{ext}(p) = \operatorname{ext}(\operatorname{cop}(\mathfrak{A})) = \operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ \langle \mathfrak{A} \rangle) \subset \operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) \circ \langle \mathfrak{A} \rangle. \ \triangleright$$

**12.8.** *Для любого сублинейного оператора p справедливо следующее включение*:

$$\operatorname{ext}(p) \subset \operatorname{ext}\left(\varepsilon_{\mathscr{E}_0(p)}\right) \circ \langle \mathscr{E}_0(p) \rangle.$$

Теорема Мильмана и ее следствия дают полную характеризацию внутреннего строения опорного множества «по модулю» того, как устроены крайние точки субдифференциала канонического оператора и его элементы. Таким образом из теоремы Мильмана и 11.5. вытекает следующий результат:

**12.9. Теорема.** *Любая крайняя точка субдифференциала* $\partial(p)$ *служит поточечным* $r$*-пределом сети элементов сильно циклической оболочки множества* $o$*-крайних точек множества* $\partial(p)$.

◁ Пусть $p : X \to E$ — рассматриваемый сублинейный оператор и $T \in \operatorname{ext}(p)$. В силу 12.9 для некоторого $t \in \operatorname{ext}\left(\varepsilon_{\mathscr{E}_0(P)}\right)$ будет $T = t \circ \langle \mathscr{E}_0(P) \rangle$. Пусть $(t_\gamma)$ — сеть чистых состояний, поточечно $r$-сходящаяся к $t$. Ее существование гарантирует 11.9. Бесспорно, что $t_\gamma \circ \langle \mathscr{E}_0(P) \rangle$ — это требуемая сеть. ▷

**12.10. Теорема.** *Крайние точки наименьшего субдифференциала, содержащего данное слабо порядково ограниченное множество линейных операторов* $\mathfrak{A}$, *представляют собой поточечные* $r$*-пределы подходящих сетей перемешиваний элементов* $\mathfrak{A}$.

◁ На основании 12.8 множество крайних точек $\mathfrak{A}$ лежит в множестве $\operatorname{ext}(\varepsilon_{\mathfrak{A}}) \circ \langle \mathfrak{A} \rangle$. Остается сослаться на 11.10. ▷

Аналогично устанавливается следующий результат.

**12.11. Теорема.** *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— слабо порядково ограниченное множество линейных операторов в* $L(X, E)$. *Равносильны утверждения:*

**(1)** $\mathfrak{A}$ *является субдифференциалом;*

**(2)** $\mathfrak{A}$ *операторно-выпукло и поточечно* $o$*-замкнуто;*

**(1)** $\mathfrak{A}$ *циклично, выпукло и поточечно* $r$*-замкнуто.*

**12.12.** Теорема Крейна — Мильмана 12.2, ее обращение 12.6 и теорема 12.5 установлены в [26]; теоремы 12.9 – 12.11 получены в [20]. Подробное изложение см. в [24].

## 13. Дезинтегрирование

Здесь затронем раздел выпуклого анализа, связанный с изучением субдифференциалов и преобразования Юнга — Фенхеля выпуклых интегральных функционалов и операторов.

**13.1. Теорема Штрассена.** *Пусть* $(\Omega, \Sigma, \mu)$ — *пространство с полной конечной мерой, а* $X$ — *сепарабельное банахово пространство. Рассмотрим семейство* $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ *непрерывных сублинейных функционалов* $p_\omega : X \to \mathbb{R}$ *и предположим, что функция* $\omega \to \|p_\omega\| := \sup\{|p(x)| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\}$ $(\omega \in \Omega)$ *и для каждого* $x \in X$ *функция* $\omega \mapsto p_\omega(x)$ *суммируемы, т. е. входят в* $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$. *Тогда для любого* $\phi \in X'$ *такого, что*

$$\phi(x) \leqslant \int\limits_\Omega p_\omega(x)\, d\mu(\omega) \quad (x \in X),$$

*существует семейство* $(\phi_\omega)_{\omega\in\Omega}$ *линейных функционалов* $\phi_\omega \in X'$, *для которого* $\phi_\omega \in \partial p_\omega$ *при всех* $\omega \in \Omega$, $\phi_{(\cdot)}x \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *для каждого* $x \in X$ *и имеет место представление*

$$\phi(x) = \int\limits_\Omega \phi_\omega(x)\, d\mu(\omega) \quad (x \in X).$$

**13.2.** При тех же обозначениях и предположениях определим оператор $P : X \to L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ формулой $P(x)(\omega) := p_\omega(x)$ $(\omega \in \Omega,\ x \in X)$. Точнее, $P(x)$ — класс эквивалентности суммируемой функции $\omega \mapsto p_\omega(x)$ $(\omega \in \Omega)$. Если обозначить $lf = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega)$, то из теоремы Штрассена следует

$$\partial(l \circ P) = l \circ \partial P.$$

Наоборот, теорема Штрассена легко выводится из этой формулы, используя лифтинг. Можно показать, что последняя формула верна для произвольного сублинейного оператора $P : X \to E$, если $E$ — произвольное $K$-пространство, а $l$ — линейный порядково непрерывный функционал на $E$. Однако если здесь интеграл Лебега заменить на интеграл Бохнера со значениями в некоторой банаховой решетке $F$, то возникает аналогичная задача: для каких линейных операторов $T : E \to F$ справедлива формула $\partial(T \circ P) = T \circ \partial P$?

**13.3.** Чтобы дать ответ, введем соответствующий класс операторов. Пусть $E$ и $F$ — некоторые $K$-пространства и $P$ — возрастающий сублинейный оператор из $E$ в $F$. Говорят, что $P$ удовлетворяет *условию Магарам* (= обладает *свойством Магарам*), если для любых $x \in E^+$ и $f_1, f_2 \in F^+$ из равенства $P(x) = f_1 + f_2$ следует существование таких $x_1, x_2 \in E^+$, что $x = x_1 + x_2$ и $P(x_l) = f_l$ $(l := 1, 2)$. Возрастающий порядково непрерывный сублинейный оператор, удовлетворяющий условию Магарам, называют *сублинейным оператором Магарам.* Заметим, что для линейного положительного оператора $T : E \to F$ указанное здесь условие Магарам выполняется лишь в том случае, если $T\left([0, x]\right) = [0, Tx]$ для всех $x \in E^+$. Итак, линейный оператор Магарам — это порядково непрерывный положительный оператор, сохраняющий порядковые отрезки. Следующий результат утверждает, что линейный оператор Магарам — порядково непрерывный функционал в подходящем булевозначном универсуме.

**13.4. Теорема.** *Пусть $E$ — произвольное $K$-пространство и пусть $F$ — фундамент расширенноого $K$-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$. Предположим, что $\Phi : E \to F$ — линейный оператор Магарам. Тогда существуют элементы $\mathscr{E}$ и $\varphi \in \mathbb{V}^{(B)}$ такие, что выполнены утверждения:*

**(1)** *$[\![\mathscr{E}$ — $K$-пространство, $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{R}$ — положительный порядково непрерывный функционал $]\!] = \mathbb{1}$;*

**(2)** *если $E' := \mathscr{E}{\downarrow}$ и $\Phi' = \varphi{\downarrow}$, то $E'$ — $K$-пространство, а $\Phi' : E' \to F$ — оператор Магарам;*

**(3)** *существует линейный и решеточный изоморфизм $h$ из $E$ в $E'$ такой, что $\Phi = \Phi' \circ h$.*

**13.5. Теорема.** *Пусть $E$ и $F$ — произвольные $K$-пространства. Для любого $o$-непрерывного сублинейного оператора $Q : E \to F$ равносильны утверждения:*

**(1)** *$Q$ есть оператор Магарам;*

**(2)** *множество $\partial Q$ состоит из линейных операторов Магарам.*

**13.6.** Как отмечалось в 13.2, $\partial(l \circ P) = l \circ \partial P$ для порядково непрерывного функционала $l$ и произвольного сублинейного оператора $P$. Можно показать, что сублинейный оператор $P : X \to \mathscr{R}{\downarrow}$ является модифицированным спуском сублинейного функционала $p \in \mathbb{V}^{(B)}$, $p : X^{\wedge} \to \mathscr{R}$. Если теперь $\varphi$ и $\Phi$ — те же, что и в 13.4, то в силу принципа переноса имеем $[\![\partial(\varphi \circ p) = \varphi \circ \partial p]\!] = \mathbb{1}$. Применив процедуру спуска, приходим к формуле $\partial(\Phi \circ P) = \Phi \circ \partial P$, где $\Phi$ — оператор Магарам. Этот факт вместе с 13.5 приводит к следующему

результату.

**13.7. Теорема.** *Пусть $E$ и $F$ — некоторые $K$-пространства и $Q$ — сублинейный оператор Магарам из $E$ в $F$. Тогда для любого векторного пространства $X$ и произвольного сублинейного оператора $P$ из $X$ в $E$ имеет место формула $\partial(Q \circ P) = \partial Q \circ \partial P$.*

**13.8.** Равенство $\partial(T \circ P) = T \circ \partial P$, а также родственные формулы для вычисления опорных множеств сублинейных операторов, преобразования Юнга — Фенхеля и $\varepsilon$-субдифференциалов выпуклых операторов принято называть *дезинтегрированием*, а сами эти формулы — *формулами дезинтегрирования*. Общие приемы дезинтегрирования унифицируют в привычной форме правила исчисления разнообразные факты теории $K$-пространств, в основе которых лежит теорема Радона — Никодима. Здесь легко установить аналогию с тем, что исчисление опорных множеств дает единый подход к различным вариантам принципов продолжения, основанный на применении теоремы Хана — Банаха — Канторовича.

**13.9.** Теорема 13.1 установлена в [56]. Дезинтегрирование в $K$-пространствах построено в [17]; подробности по этой теме можно найти в [24], а о линейных операторах Магарам можно прочитать в [18]. Из обширной литературы, затрагивающей субдифференцирование и замену переменной в преобразовании Юнга — Фенхеля выпуклых интегральных функционалов, укажем монографии [10, 29, 37, 45], в которых имеются также дальнейшие литературные ссылки и комментарии. Отметим также, что в [19] получена теорема Штрассена для сублинейных функционалов, определенных на пространстве измеримых селекторов измеримого банахова расслоения. В общей постановке для операторов эти задачи ждут своих исследователей.

## Литература


1. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства.— Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.
2. Алипрантис К., Браун Д., Бёркиншо О. Существование и оптимальности конкурентного равновесия.—М.: Мир, 1995.—384 с.
3. Басаева Е. К. Об одной форме теоремы Хана — Банаха // Владикавк. мат. журн.—2006.—Т. 8, № 1.—С. 1–3.
4. Владимиров Д. А. Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.—320 с.
5. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: ГИФМЛ, 1961.—407 с.

6. Гёдель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 8, вып. 1.—С. 96–149.
7. Гордон Е. И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и $K$-пространства // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 237, № 4.—С. 773–775.
8. Гордон Е. И. К теоремам о сохранении соотношений в $K$-пространствах // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 5.—С. 55–65.
9. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика.—М.: Наука, 1979.—320 с.
10. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.—М.: Наука, 1974.—479 с.
11. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.—М.: Мир, 1973.—150 с.
12. Канторович Л. В. О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР.—1935.—Т. 4, № 1, 2.—С. 11–14.
13. Канторович Л. В. К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 1, № 7.—С. 271–274.
14. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.
15. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.–Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.
16. Коэн П. Дж. Теория моделей и континуум-гипотеза.—М.: Мир, 1973.—347 с.
17. Кусраев А. Г. Абстрактное дезинтегрирование в пространствах Канторовича // Сиб. мат. журн.—1984.—Т. 25, № 5.—С. 79–89.
18. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
19. Кусраев А. Г. О теореме Штрассена в пространствах измеримых селекторов // Владикавк. мат. журн.—2006.—Т. 8, № 4.—С. 45-49.
20. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы в булевозначных моделях теории множеств // Сиб. мат. журн.—1983.—Т. 24, № 5.—С. 109–132.
21. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартный порядковый анализ. Приглашение.— Владикавказ: ВНЦ РАН, 2000.—140 с.
22. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Числа и пространства Канторовича // Владикавк. мат. журн.—2002.—Т. 4, № 1.—С. 51–70.
23. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.—526 с.
24. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения.—М.: Наука, 2007.—560 с.
25. Кутателадзе С. С. Опорные множества сублинейных операторов // Докл. АН СССР.—1976.—Т. 230, № 5.—С. 1029–1032.
26. Кутателадзе С. С. Теорема Крейна — Мильмана и ее обращение // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 1.—С. 130–138.
27. Кутателадзе С. С. О выпуком анализе в модулях // Сиб. мат. журн.— 1981.—Т. 22, №. 4.— С. 118–128.
28. Кутателадзе С. С., Макаров В. Л., Романовский И. В., Рубинштейн Г. Ш. Научное наследие Л. В. Канторовича (1912–1986) // Сиб. журн. индуст. мат.—2001.—Т. 4, № 2 (8).—С. 3–17.
29. Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике.—М.: Наука, 1985.—352 с.
30. Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое.—М.: Сов. радио, 1979.—168 с.

31. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения.—М.: Едиториал УРСС, 2003.—176 с.
32. Мендельсон Э. Введение в математическую логику.—М.: Наука, 1971.—320 с.
33. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ.—М.: Мир, 1973.—470 с.
34. Сикорский Р. Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—376 с.
35. Столл Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории.—М.: Просвещение, 1968.—232 с.
36. Тихомиров В. М. Выпуклый анализ // Анализ II. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.—М.: ВИНИТИ, 1987.—Т. 14.—С. 5–102.
37. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и экстремальные задачи.—М.: Мир, 1979.—400 с.
38. Яглом И. М. Булева структура и ее модели.—М.: Сов. радио, 1980.—193 с.
39. Abramovich Y. A., Aliprantis C. D. An Invitation to operator theory.— Providence (R. I.): Amer. Math. Soc., 2002.—??? p.
40. Aliprantis Ch. D., Burkinshaw O. Locally solid Riesz spaces.—New York: Acad. press, 1978.—198 p.
41. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive operators.—New York: Acad. press, 1985.—367 p.
42. Bell J. L. Boolean-valued models and independence proofs in set theory.— New York: Clarendon press, 1985.—xx+165 p.
43. Boole G. An Investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities.—New York: Dover, 1957.—xi+424 p.
44. Buskes G. J. H. M. The Hahn — Banach theorem surveyed // Diss. Math.—Warszawa: Inst. Mat. PAN, 1993.—Vol. 327.
45. Castaing Ch., Valadier M. Convex analysis and measurable multifunctions. — Berlin etc.: Springer, 1977. —278 p.—(Lecture Notes in Math.; 580).
46. Halmos P. R. Lectures on Boolean algebras.—Toronto, New York, London: Van Nostrand, 1963.—147 p.
47. Holmes R. B. Geometric functional analysis and its applications. —Berlin etc.: Springer, 1975.—239 p.
48. Jech T. J. Abstract theory of Abelian operator algebras: an application of forcing // Trans. Amer. Math. Soc.—1985.—Vol. 289, № 1.—P. 133–162.
49. Kutateladze S. S. Nonstandard tools for convex analysis // Math. Japon.—1996.—Vol. 43, № 2.—P. 391–410.
50. Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C. Riesz spaces. Vol. 1.—Amsterdam, London: North-Holland, 1971.—514 p.
51. Magaril-Il'yaev G. G., Tikhomirov V. M. Convex analysis: Theory and applieations.—Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2003.—Vol. 222.—??? p.
52. Monk J. D., Bonnet R. (edc.) Handbook of Boolean algebras. Vol. 1/3.— Amsterdam etc.: North-Holland, 1989.
53. Phelps R. R. Convex functions, monotone operators, and differentiability.—Berlin etc.: Springer, 1993.—xi+117 p.
54. Schaefer H. H. Banach lattices and positive operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—376 p.
55. Schwarz H. V. Banach lattices and operators.—Leipzig: Teubner, 1984.—208 p.
56. Strassen V. The existence of probability measures with given martingals // Ann. Math. Stat.—1965.—Vol. 36.—P. 423–439.
57. Takeuti G. Two applications of logic to mathematics.—Tokyo, Princeton: Iwana-

mi, Princeton univ. press, 1978.—137 p
58. Takeuti G., Zaring W. M. Axiomatic set theory.—New York: Springer-Verlag, 1973.—238 p.
59. Simons S. A new version of the Hahn —Banach theorem // Arch. Math.—2003.—Vol. 80.—P. 630–646.
60. Simons S. The Hahn — Banach — Lagrange theorem.—Preprint.
61. Simons S. From Hahn — Banach to monotonicity.—Berlin: Springer, 2003 (Lecture Notes in Math., 1693).
62. Zaanen A. C. Riesz spaces. Vol. 2.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—720 p.

Кураев Анатолий Георгиевич
Южный математический институт ВНЦ РАН
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: kusraev@smath.ru

Кутателадзе Семен Самсонович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Россия, 630090, Новосибирск, ул. ак. Коптюга, 4
E-mail: sskut@math.nsc.ru

# CONVEX ANALYSIS, KANTOROVICH SPACES, AND BOOLEAN VALUED MODELS

A. G. Kusraev and S. S. Kutateladze

The modern methods for locally analyzing optimization problems base on interaction between convexity, order, and nonstandard models of set theory. This survey reveals some key ideas and results of convex analysis that involve order complete vector lattices and Boolean valued analysis.