МАТЕМАТИКА И ЭКОНОМИКА Л. В. КАНТОРОВИЧА

С. С. Кутателадзе

Институт математики
им. С. Л. Соболева, Новосибирск

19 января 2012

Канторович (1912–1986)

Инвентаризация памяти

- 19 января 2012 г. — столетие со дня рождения Леонида Витальевича Канторовича, всемирно известного математика и экономиста. Вундеркинд, окончивший университет в 18 лет и ставший профессором в 20, академик по математике и лауреат Нобелевской премии по экономике — редкие обстоятельства жизни, достойные некоторого внимания сами по себе.
- Однако извлечь из них полезные для себя выводы вряд ли возможно — события крайне редкие и маловероятные. Другое дело творческое наследие человека — сделанное для других остается, пока оно не забыто, испорчено или оболгано.
- Юбилейная дата — повод для инвентаризации памяти. Вспоминая вклад нашего соотечественника в культуру, мы сохраняем его духовный мир для будущего...

Вклад в науку

- Проективные множества
- Пространства Канторовича
- Линейное программирование
- Оптимальный транспорт
- Рациональный раскрой
- Метод Ньютона — Канторовича
- «Канторович и Акилов»
- Оптимальные цены
- Наилучшее использование ресурсов

Истоки математики и экономики

- Становление науки как инструмента понимания — долгий и сложный процесс. Зарождение ординального счета фиксировано палеолитическими находками, отделенными десятками тысяч лет от явления разумного и хозяйствующего человека. Экономическая практика предваряет предысторию математики, сформировавшуюся в науку доказательных вычислений в Древней Греции примерно 2500 лет тому назад.
- Целенаправленное поведение людей в условиях ограниченных ресурсов стало объектом науки совсем недавно. Датой рождения экономики как науки принято считать 9 марта 1776 г. — день публикации сочинения Адама Смита «Исследование о природе и причинах богатства народов».

Предмет математики

- Предмет математики — количественные и пространственные формы человеческого мышления.
- Математика функционирует как наука доказательных исчислений, постоянно обновляясь и наращивая объем накопленных знаний. Со временем меняются требования к строгости доказательств и технологиям их получения, возникает деление математики на чистую и прикладную.

Математика и экономика

- Математика изучает формы мышления. Предмет экономики — обстоятельства человеческого поведения. Математика абстрактна и доказательна, а профессиональные решения математиков не задевают обычную жизнь людей. Экономика конкретна и декларативна, а практические упражнения экономистов основательно жизнь меняют.
- Цель математики — безупречные истины и методы их получения. Цель экономики — индивидуальное благополучие и пути его достижения.
- Математика не вмешивается в личную жизнь человека. Экономика задевает его кошелек и кошелку. Список коренных различий математики и экономики бесконечен.

Математизация экономики

- XIX век отмечен первыми попытками применения математических методов в экономике в работах Антуана Огюста Курно, Карла Маркса, Уильяма Стенли Джевонса, Леона Вальраса и его преемника по Лозаннскому университету Вильфредо Парето.
- Математическая экономика — новация XX века. Именно тогда возникло понимание того, что экономические проблемы требуют совершенно нового математического аппарата. К экономической проблематике обратились математики первой величины — Джон фон Нейман и Леонид Канторович.
- Теория игр как аппарат изучения экономического поведения и линейное программирование как аппарат принятия решений привели к стремительной математизации экономики.

Разрывы ментальности

- Между точным и гуманитарным стилями мышления существуют принципиальные различия. Люди склонны к рассуждениям по аналогии и методу неполной индукции, рождающим иллюзию общезначимости знакомых приемов. Различия научных технологий не всегда выделены отчетливо, что, в свою очередь, способствует самоизоляции и вырождению громадных разделов науки.
- Разница в менталитете математиков и экономистов затрудняет их взаимопонимание и сотрудничество. Невидимы, но вездесущи перегородки мышления, изолирующие математическое сообщество от своего экономического визави.

Консолидация мышления

- Впечатляющее многообразие направлений исследований Канторовича объединяется как его личностью, так и его методическими установками. Он всегда подчеркивал внутреннее единство науки, взаимопроникновение идей и методов, необходимых для решения самых разнообразных теоретических и прикладных проблем математики и экономики.
- Характерной чертой творчества Канторовича была ориентация на наиболее трудные проблемы и самые перспективные идеи математики и экономики своего времени.

Канторович и дескрипция

- Первые работы Канторовича относились к популярной в те годы тематике дескриптивной теории множеств. Лидер этого направления Н. Н. Лузин в 1934 г. писал Канторовичу:
- «Вы должны знать, каково мое отношение к Вам. Вас всего, как человека, я не знаю еще, но угадываю мягкий чарующий характер. Но то что я точно знаю — это размер Ваших духовных сил, которые, насколько я привык угадывать людей, представляют в науке неограниченные возможности. Я не стану произносить соответствующего слова — зачем? Талант — это слишком мало. Вы имеете право на большее...».

Математизация социума

- В 1920–1930 годы социальные феномены стали предметом невербальных исследований, требовавших создания специальных математических методов. Существенно возросла потребность в статистической обработке данных. Создание новых производств, внедрение передовых технологий, оборудования и материалов вызвали потребность совершенствования техники расчетов. Бурному развитию прикладной математики способствовала автоматизация и механизация процесса вычислений.

Союз анализа и приложений

- В 1930 годы прикладная математика стремительно сближается с функциональным анализом.
- Существенную роль в этом процессе сыграли исследования Джона фон Неймана по математическим основам квантовой механики и теории игр как аппарата экономических исследований.
- В России пионером и генератором новых синтетических идей стал Канторович.

Пространства Канторовича

- Целостность мышления проявлялась во всем творчестве Канторовича. Идеи линейного программирования были тесно связаны с его методологическими установками в области математики. В середине 1930 годов центральное место в математических исследованиях Канторовича занимал функциональный анализ.
- Главным своим математическим достижением в этой области Канторович считал выделение специального класса порядково полных упорядоченных векторных пространств, которые в отечественной литературе именуют K-пространствами или пространствами Канторовича, так как в своих рабочих тетрадях Канторович писал о «моих пространствах».

Принцип Канторовича

«В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».

Канторович, Докл. АН СССР (1935).

Хан, Банах и Канторович

- Рассмотрим еще одно вещественное векторное пространство W и диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "B"'] & & W \arrow[dl, "\mathfrak{X}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

  Как известно,
  (i) $(\exists \mathfrak{X})\ \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \ker(A) \subset \ker(B)$;

- (ii)*Если W упорядочено конусом W_+ и $A(X) - W_+ = W_+ - A(X) = W$, т. е. $A(X)$ мажорирует W, то*

$$(\exists \mathfrak{X} \geq 0)\ \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \{A \leq 0\} \subset \{B \leq 0\}.$$

  пространство.

Линейные неравенства

- Пространства Канторовича дали рамки для построения теории линейных неравенств, необходимой в приближенных вычислениях для оценок точности. Концепция неравенств весьма приспособлена для задач, связанных с приближенными вычислениями, где существенную роль играют разнообразные оценки точности полученных результатов.
- Поставщиком линейных неравенств была экономическая проблематика. Целесообразное и оптимальное поведение в условиях ограниченных ресурсов естественно формулировать в терминах частичного сравнения.

Место неравенств в геометрии и анализе

- Концепция линейных неравенств неразрывна с выпуклостью и, стало быть, геометрией и функциональным анализом.
- Выпуклый многогранник —- решение конечной системы линейных неравенств. В случае общего положения выпуклые множества суть решения подходящих систем линейных неравенств.
- Функциональный анализ предполагает наличие нетривиальных непрерывных линейных функционалов. Наличие такого функционала эквивалентно существованию непустого собственного открытого выпуклого множества в объемлющем пространстве.

Линейное программирование

- Линейное программирование — техника максимизации линейного функционала на множестве положительных решений системы линейных неравенств. Неудивительно, что открытие линейного программирования последовало вскоре за созданием основ теории пространств Канторовича.
- Термин «линейное программирование» был предложен в 1951 г. американским экономистом Т. Купмансом. В 1975 г. Канторович и Купманс получили Нобелевскую премию по экономическим наукам с формулировкой «за их вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». Особой заслугой Купманса стала пропаганда методов линейного программирования и защита приоритета Канторовича в открытии этих методов.
- В США линейное программирование возникло только в 1947 г. в работах Джорджа Данцига.

Открытие в экономике

- С оптимальным планом любой линейной программы автоматически связаны оптимальные цены или «объективно обусловленные оценки». Последнее громоздкое словосочетание Канторович выбрал из тактических соображений для повышения «критикоустойчивости» термина.
- Концепция оптимальных цен и взаимозависимость оптимальных решений и оптимальных цен — такова краткая суть экономического открытия Канторовича.

Универсальная эвристика

- Абстрактные идеи Канторовича в теории K-пространств связаны с линейным программированием и приближенными методами анализа.
- Идеи линейного программирования имманентны теории K-пространств. Выполнение любого из принятых вариантов формулировок принципа двойственности линейного программирования в абстрактной математической структуре с неизбежностью приводит к тому, что исходный объект является K-пространством.

Функциональный анализ и прикладная математика

- В конце 1940 годов Канторович сформулировал и развил тезис о взаимосвязи функционального анализа и прикладной математики:
- «Установилась традиция считать функциональный анализ дисциплиной чисто теоретической, далекой от непосредственных приложений, которая в практических вопросах не может быть использована. Цель … в известной мере разрушить эту традицию, указать на связь функционального анализа с вопросами прикладной математики…».
- Канторович выделил три технологии: метод мажорант, восходящий к Коши, метод конечномерных приближений и метод Лагранжа для новых задач оптимизации, возникающих в экономике.

Три технологии

- Технологию *мажорирования* в общих упорядоченных векторных пространствах Канторович взял за основу исследования вариантов метода Ньютона в банаховых пространствах.
- *Дискретизация* — приближение бесконечномерных пространств и операторов их конечномерными аналогами — связана с удивительным универсальным пониманием вычислительной математики как науки о конечных приближениях общих компактов.
- Новизна экстремальных задач, возникающих в социальных науках, связана с наличием многомерных противоречивых целей, ставящих на первое место проблему согласования интересов или *скаляризацию* векторных целей.

Мажорирование

- Пусть X и Y — вещественные векторные пространства и заданы векторные нормы $|\cdot|_X$ и $|\cdot|_Y$. Пусть, далее, T — линейный оператор из X в Y, а S — положительный оператор из E в F такие, что
- $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "|\cdot|_X"'] & Y \arrow[d, "|\cdot|_Y"] \\ E \arrow[r, "S"'] & F \end{tikzcd}$$
- Если при этом $|Tx|_Y \leq S|x|_X \quad (x \in X)$, то S называют *мажорантой* T. *Точная мажоранта* $|T|$ — наименьший положительный оператор из E в F, для которого $|Tx| \leq |T|(|x|) \quad (x \in X)$.

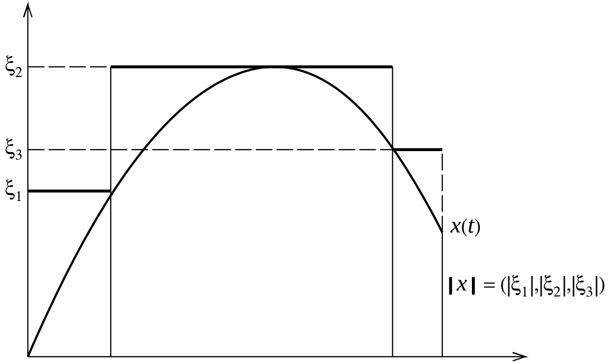
Абстрактная норма

«Абстрактная норма позволяет гораздо тоньше оценить элемент и операцию, чем одно число — числовая норма, и благодаря этому получить более точные (и широкие) границы применимости метода последовательных приближений. Так, в качестве нормы непрерывной функции можно взять не границу её во всем интервале, а совокупность её границ в нескольких частичных интервалах... Это позволяет уточнить оценку границы сходимости метода последовательных приближений для интегральных уравнений».

Канторович, Вестник ЛГУ (1948).

Нормирование последовательностей

- $$\mathbf{|}(\xi_1, \xi_2, \dots)\mathbf{|} = (|\xi_1|, |\xi_2|, \dots, |\xi_{N-1}|, \sup_{k \geq N} |\xi_k|) \in \mathbb{R}^N.$$



«Я полагаю, что и в ряде других случаев применение вместо вещественных чисел элементов линейных полуупорядоченных пространств в оценках может привести к существенному уточнению

Булевозначный анализ

- Современная техника математического моделирования позволила показать, что основные свойства решеточно нормированных пространств представляют собой булевозначные интерпретации свойств классических нормированных пространств.
- Произвольное банахово пространство внутри булевозначной модели при внешней расшифровке представляет собой расширенное пространство Банаха — Канторовича. При этом каждое решеточно нормированное пространство может быть реализовано как плотное подпространство некоторого банахова пространства в подходящей булевозначной модели.

Дискретизация

- Уравнение
$$Tx = y,$$
где $T : X \to Y$, а X и Y банаховы пространства заменяют на уравнение
$$T_N x_N = y_N$$
подбором конечномерных аппроксимирующих подпространств X_N, Y_N и вложений $\imath_N, \jmath_N$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] & Y \\
X_N \arrow[u, "\imath_N"] \arrow[r, "T_N"'] & Y_N \arrow[u, "\jmath_N"']
\end{tikzcd}$$

Гипераппроксимация

- Нестандартные модели дают метод внешней аппроксимации

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi_E"'] & F \arrow[d, "\varphi_F"] \\
E^{\#} \arrow[r, "T^{\#}"'] & F^{\#}
\end{tikzcd}
$$

Здесь E и F — нормированные векторные пространства над одним и тем же полем скаляром, T — ограниченный линейный оператор из E в F, а $^{\#}$ — символ перехода к нестандартной оболочке.

Оболочка пространства

- Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — внутреннее нормированное пространство над $^*\mathbb{F}$,а $\mathrm{ltd}(E)$ и $\mu(E)$ внешние множества доступных и бесконечно малых элементов E. По определению $E^\# = \mathrm{ltd}(E)/\mu(E)$ Нормируем $E^\#$, полагая $\|\varphi x\| := \|x^\#\| := \mathrm{st}(\|x\|) \in \mathbb{F} \quad (x \in \mathrm{ltd}(E)).$
- Здесь $\varphi := \varphi_E := (\cdot)^\# : \mathrm{ltd}(E) \to E^\#$ — фактор-гомоморфизм, а st — символ перехода к стандартной части доступного числа.

Оболочка оператора

- Пусть $T : E \to F$ — внутренний ограниченный линейный оператор из E в F. Числовое множество $c(T) := \{C \in {}^*\mathbb{R} : (\forall x \in E)\|Tx\| \le C\|x\|\}$ является внутренним и ограниченным и $\|T\| := \inf c(T)$.
- Если $\|T\|$ — доступное число, то из классического нормативного неравенства $\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|$, справедливого для всех $x \in E$, видно, что $T(\mathrm{ltd}(E)) \subset \mathrm{ltd}(F)$ и $T(\mu(E)) \subset \mu(F)$. Следовательно, корректно определено снижение T на $E^\#$ — *оболочка* $T^\# : E^\# \to F^\#$, действующая по правилу

$$T^\#\varphi_E x := \varphi_F Tx \quad (x \in E).$$

Наличие гипераппроксимаций

- Пространство $E^{\#}$ автоматически оказывается банаховым для каждого внутреннего (не обязательно полного) нормированного пространства E. Если внутренняя размерность внутреннего нормированного пространства E конечна, то пространство E называют *гиперконечномерным*. Для каждого нормированного векторного пространства E существует гиперконечномерное подпространство $F \subset {}^*E$, содержащее все стандартные элементы внутреннего пространства ${}^*E$.
- Инфинитезимальные методы позволяют предложить и новые схемы гипераппроксимации общих компактных пространств. В качестве таких приближений к компактному множеству сверху могут выступать произвольные конечные внутренние множества, содержащие все стандартные элементы подлежащего аппроксимации компакта.

Скаляризация

- Специфические трудности практических задач и необходимость сведения их к числовому случаю были связаны в творчестве Канторовича с размышлениями о природе вещественных чисел. Элементы своих K-пространств он рассматривал как обобщенные числа, тем самым развивая идеи, которые в наше время принято называть скаляризацией.
- Скаляризация в самом общем смысле — это приведение к числу.
- Число представляет собой меру количества. Значит скаляризации имеет общематематическое значение. Исследования Канторовича в области скаляризации были связаны с проблемами экономики, которые обладают большим числом противоречивых целей и интересов, подлежащих согласованию. Это приводит к серьезным трудностям, отсутствующим в случае скаляров.

Элементы K-пространств суть числа

- Скаляризация по Канторовичу связана с одной из самых ярких страниц математики прошлого века — с проблемой континуума. Метод форсинга Коэна был упрощен в середине 1960 годов с использованием аппарата булевых алгебр и новой технологии математического моделирования, использующей нестандартные модели теории множеств.
- Прогресс возникшего на этой основе булевозначного анализа продемонстрировал фундаментальное значение расширенных K-пространств. Каждое из таких пространств, как оказалось совершенно неожиданно, служит равноправной моделью вещественной прямой и, значит, играет в математике ту же фундаментальную роль. Пространства Канторовича дали новые модели поля вещественных чисел и обрели бессмертие.

Уроки Канторовича

- Противоречие между блестящими достижениями и детская неприспособленностью к практической линии жизни — один из важных парадоксов, оставленных нам Канторовичем. Сама его жизнь стала ярким и загадочным гуманитарным феноменом.
- Интравертность Канторовича, очевидная в личном общении, совершенно неожиданно сочеталась с публичной экстравертностью. Отсутствие ораторского дара соседствовало с глубиной логики и особыми приемами полемики. Его внутренняя свобода и самодостаточность, мягкость, доброта и исключительная скромность стояли в одном ряду с целенаправленной жесткостью и неутомимостью на пути к поставленной цели. Канторович дал нам образец наилучшего использования ресурсов личности в условиях внешних и внутренних ограничений.

Мемы для будущего

- Мемы Канторовича востребованы человечеством, что видно по учебным планам любого экономического или математического факультета в мире. Аппарат математики и идея оптимальности стали подручными орудиями любого практикующего экономиста. Новые методы поставили непреодолимую планку для традиционалистов, рассматривающих экономику как полигон технологий типа маккиавелизма, лизоблюдства, здравого смысла и форсайта.
- Экономика как вечный партнер математики избежит слияния с любой эзотерической частью гуманитарных наук, политики или беллетристики. Новые поколения математиков будут смотреть на загадочные проблемы экономики как на бездонный источник вдохновения и привлекательную арену приложения и совершенствования своих безупречно строгих методов.
- Вычисление победит гадание.