С.С. Кутателадзе

ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА, ЗОНОИДЫ И БЭНГ-БЭНГ

Аннотация. Дополнительные замечания о некоторых связях теоремы Ляпунова о множестве значений неатомической меры с современными разделами анализа, геометрии и оптимального управления.

Эта заметка написана в качестве краткого дополнения к работе [1].

Теория и практика экстремальных задач, выбор оптимального управления в детерминированных и стохастических условиях, многие подходы математической экономики базируются на фундаментальных идеях функционального анализа, связанных с выпуклостью и мерой.

Теорема Ляпунова о выпуклости занимает особое место в современной математике, поскольку лежит на стыке теории выпуклых тел и теории меры. Теорема Ляпунова стала отправной точкой многочисленных исследований как в области векторного интегрирования в рамках математического анализа, так и в сфере геометрического изучения специальных конечномерных выпуклых тел, служащих множествами значений безатомных векторных мер.

Удивительность открытия Ляпунова связана с парадоксальным и хрупким балансом взаимодействия разнообразных конечномерных и бесконечномерных идей. Эффекты теоремы Ляпунова пропадают или распадаются, если допустить в рассмотрение недиффузные, или конечно-аддитивные меры, или же меры со значениями в бесконечномерных пространствах (см., в частности, вторую статью А.А. Ляпунова (ссылка [2] в [1] и [11]). Между тем, с геометрической точки зрения в теореме Ляпунова речь идет об отображении крайних точек некоторого бесконечномерного компактного выпуклого множества. Именно это обстоятельство обыгрывается в изящном доказательстве Линденштраусса, найденном в 1966 г. и немало способствовавшем популяризации теоремы Ляпунова (см. работу [6] в [1]).

Надо отметить, что в настоящее время известны доказательства теоремы Ляпунова, основанные только на самых первых фактах математического анализа (см., в частности, [2], [4]). Таково и весьма элегантное доказательство Росса, найденное в 2005 г. и основанное только на теореме о промежуточных значениях [15].

Теорема Ляпунова сразу же поставила вопрос об описании тех выпуклых компактов в конечномерном пространстве, которые служат множествами значений диффузных мер. В современной геометрической литературе эти компакты получили название *зоноидов*. Среди зоноидов выделяются суммы Минковского конечного числа отрезков – *зонотопы*. Зонотопы заполняют выпуклый конус в пространстве выпуклых тел, плотный в замкнутом множестве всех зоноидов. Впервые (и почти в современном виде) описание множеств значений векторных мер в теореме Ляпунова было найдено К.И. Чуйкиной (см. работы [8], [9] в [1]). Этот результат был вскоре несколько дополнен и упрощён Е.В. Гливенко (см. [10] в [1]). Нынешние зонотопы именовались в ту пору *параллелоэдрами*.

Крупное дальнейшее продвижение в исследовании множеств значений векторных мер принадлежит В.А. Залгаллеру и Ю.Г. Решетняку, которые описали зоноиды как результаты смешения линейных элементов спрямляемой кривой в конечномерном евклидовом пространстве в 1954 г. (см. [11] в [1]). В этой же работе было предложено новое доказательство теоремы Ляпунова и описаны зонотопы как те и только те выпуклые многогранники, чьи двумерные грани имеют центры симметрии. К сожалению, эти работы остались практически неизвестными на Западе. Аналогичные результаты были получены Болкером лишь через пятнадцать лет в 1969 г. (см. [3]).

Важно отметить исключительную роль теоремы Ляпунова в обосновании «бэнг-бэнг» принципа в теории оптимального управления. Этот принцип утверждает, что оптимальные управления осуществляются крайними точками множества допустимых управлений.

Смысл «бэнг-бэнг» принципа состоит в том, что в условиях ограниченных ресурсов для оптимального перехода управляемой системы из одного состояния в другое за минимальное время необходимо использовать крайнее «бэнг-бэнг» управление. Иначе говоря, если у системы есть оптимальное управление, у нее есть оптимальное «бэнг-бэнг» управление [7, с. 47]. Об этом см., в частности, [6], [8], [9], [10], [12].

В заключение отметим, что история теоремы Ляпунова в рамках функционального анализа несколько отражена в [14]. О месте

этой теоремы и исследованиях по её обобщению в рамках теории меры см. [13]. Относительно зоноидов см., в частности, [5].

Список литературы

[1] *Ляпунов А.Н.* Теорема А.А. Ляпунова о выпуклости значений векторных мер. Настоящий сборник.

[2] *Artstein Z.* "Yet another proof of the Lyapunov convexity theorem," Proc. Amer. Math. Soc., **108**:1, 89–91 (1990).

[3] *Bolker E.* "A class of convex bodies," Trans. Amer. Math. Soc., **145**, 323–345 (1969) .

[4] *Elton J., Hill Th.* "A generalization of Lyapounov convexity theorem to measures with atoms," Proc. Amer. Math.Soc., **99**:2, 97–304 (1987).

[5] *Goodey P., Weil W.* "Zonoids and generalisations," In: Handbook of Convex Geometry, Vol. B., North-Holland, Amsterdam etc., 1296–1326 (1993).

[6] *Halkin H.* "A generalization of LaSalle's bang-bang principle," SIAM Journal on Control and Optimization, **2**, 199–202 (1965).

[7] *Hermes H., LaSalle J.P.* Functional Analysis and Time Optimal Control. Academic Press, New York–London, 1969.

[8] *LaSalle J.P.* "The time optimal control problem." In: Contributions to the Theory of Non-Linear Oscillations, Vol. 5, Ann. Math. Studies **45**, 1–24, Princeton Univ. Press, 1960.

[9] *Levinson N.* "Minimax, Liapunov, and 'bang-bang,"' J. Diff. Equat. **2**, 218–241 (1966).

[10] *Neustadt L.W.* 1963. "The existence of optimal control in the absence of convexity," J. Math. Anal. Appl., **7**, 110–117 (1963).

[11] *Nunke R.J., Savage L.J.* "On the set of values of a nonatomic, finitely additive, finite measure," Proc. Amer. Math. Soc., **3**:2, 217–218 (1952).

[12] *Olech C.* "Extremal solutions of a control system," J. Diff. Eq., **2**, 74–101 (1966).

[13] *Pap E.* (Ed.) Handbook of Measure Theory. Vol. 1 and 2. North Holland, Amsterdam (2002).

[14] *Pietsch A.* History of Banach Spaces and Linear Operators. Birkhäuser, Boston etc. (2007).

[15] *Ross D.* "An elementary proof of Lyapunov's theorem," Amer. Math. Monthly **112**:7, 651–653 (2005).