О МЕСТЕ НЕСТАНДАРТНЫХ МОДЕЛЕЙ

С. С. Кутателадзе

О нестандартных моделях и связанных с ними методах анализа можно сказать много непонятного и отталкивающего. Цель настоящего сообщения — проиллюстрировать иную возможность.

В основе математики со времен античности лежат точки и числа. Древнейший и важнейший прием исследований — изображение чисел точками. Можно говорить о простейшем примере моделирования, т. е. изучении свойств одних объектов (чисел) с помощью других — их изображений (точек).

Разберем этот классический пример подробнее. Для этого необходимы определения исходных понятий — точек и чисел. Обратимся к первоисточнику — «Началам» Евклида.

Определение 1 Книги I гласит: «*Точка* есть то, что не имеет частей». Числа же определены в Книге VII в два приема:

«1. *Единица* есть ⟨то⟩, через что каждое из существующих считается единым.

2. *Число* же — множество, составленное из единиц».

В комментарии Д. Д. Мордухая-Болтовского, сопровождающем русский перевод «Начал», отмечается, что в греческом оригинале используется слово $M\acute{o}\nu\alpha\zeta$ — *монада*, которое не вполне точно переведено как «единица».

Если подойти к приведенным определениям с современных теоретико-множественных позиций, то можно видеть, что два натуральных числа — это два множества, одно из которых содержит другое, в то время как разные точки явно не имеют общих частей и, значит, не пересекаются как множества. Точки Евклида являются предками современных разновидностей пустого множества (называемых «атомами»).

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Таким образом, *при изображении чисел точками на прямой или плоскости не соблюдается взаиморасположение моделируемых объектов как множеств* — не сохраняется операция пересечения или, более общо, отношение принадлежности между множествами (или, в более традиционном языке, между элементами множеств).

Модель в рамках теории множеств называется *нестандартной*, если для изображений моделируемых объектов не сохранено отношение принадлежности (Л. Хенкин). Следовательно, общепринятый способ изображения чисел точками — в техническом смысле представляет собой пример нестандартного моделирования.

Обратимся под этим углом зрения к другим классическим примерам математического моделирования.

1. *Модель Пуанкаре* неевклидовой геометрии сохраняет пересечения прямых — и в этом смысле стандартна.

2. Классическое изображение *сепарабельного гильбертова пространства* как пространства последовательности l_2 и пространства $L^2(-\pi, \pi)$ интегрируемых с квадратом функций дает пример нестандартного моделирования. В самом деле, функции sin и cos пересекаются как множества и абсциссы точек пересечения (да и ординаты тоже) небезынтересны. Изображения этих функций в l_2 имеют малоинтересное пересечение.

Таким образом, теорема Рисса — Фишера об изоморфизме гильбертовых пространств (одной гильбертовой размерности) по сути использует нестандартную модель, что, конечно, никак не умаляет ее значения.

Этот пример проявляет важнейшую особенность нестандартного моделирования. Нестандартные модели весьма «чувствительны» к тому, что и как моделируется, каким образом проверяются моделируемые утверждения. Иначе говоря, процедура верификации — отсеивание истинных суждений от ложных — сама нуждается здесь в явном разъяснении.

Стоит особо подчеркнуть, что изображение аналитических объектов картинками на плоскости — неустранимый прием математических исследований — является с технической точки зрения обычным примером нестандартного моделирования.

Из сказанного ясно, что *нестандартные методы анализа*, т. е. приемы, основанные на одновременном использовании стандартных и нестандартных моделей теории множеств, не являются чем-то исключительным или неприличным или новомодным. Люди говорят прозой и констатация этого факта литературоведами никого не смущает. Можно сказать, что *на современном этапе возможности нестандартного моделирования исследуются более полно, чем это было принято ранее.*

Вернемся к наиболее распространенному и важнейшему нестандартному приему анализа — изображению чисел точками. В техническом плане речь здесь идет о замене числа a одноэлементным множеством $\{a\}$. Понятно, что, скажем, числа 4 и 5 пересекаются, а их изображения $\{4\}$ и $\{5\}$ — нет. Поступим по аналогии со всеми множествами, элементами класса всех множеств — универсума фон Неймана $\mathbb{V}$:

$$* : \ a \in \mathbb{V} \rightsquigarrow A := \{a\} \in \mathbb{V}.$$

Как обычно,

$$\mathbb{V} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathbb{V}_\alpha,$$

где

$$V_\alpha := \bigcup_{\beta \in \alpha} \mathscr{P}(V_\beta).$$

т. е. $V_\alpha = \{x : (\exists\, \beta)\ (\beta \in \alpha \wedge x \subset V_\beta)\}$.

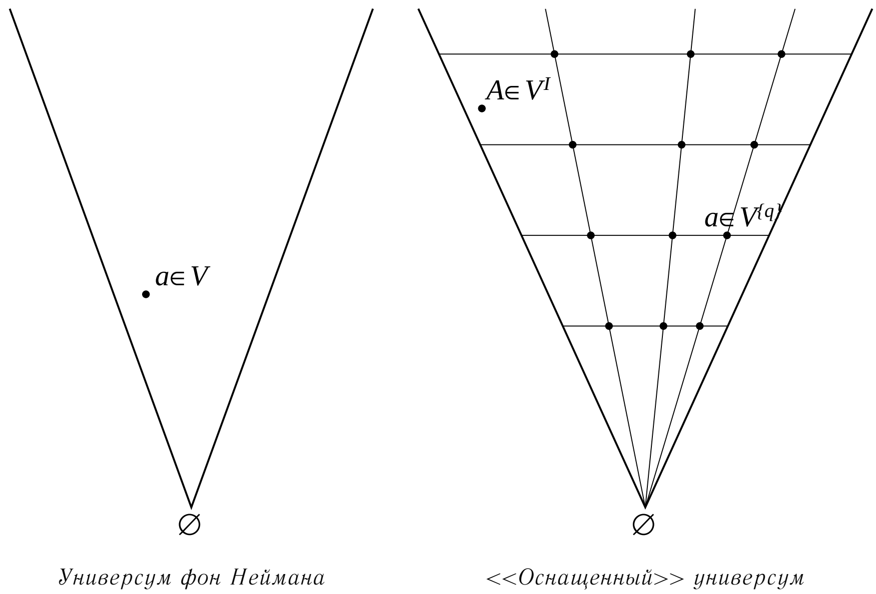


Рис. 1

Можно изобразить эту конструкцию иначе и рассмотреть мир:

$$\mathbb{V}_q := \{(q, a) : \ a \in \mathbb{V}\} = \mathbb{V}^{\{q\}}.$$

Если φ — высказывание о множествах, то в нашей модели очевиден закон «переноса»: $\varphi((1,A)) \leftrightarrow \varphi(A)$ (т. е. $(1,a) \subset (1,b) \leftrightarrow a \subset b$ и т. п.).

Несколько обобщим приведенную конструкцию. Пусть

$$\mathbb{V}_Q := \mathbb{V}^Q := \{\varphi : \varphi : Q \to \mathbb{V},\ \operatorname{dom}\varphi = Q;\ \operatorname{im}\varphi \subset \mathbb{V}\}.$$

Пусть $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\,\cdot\,)$ — некоторый элемент из $\mathbb{V}_Q$ и φ — формула теории множеств. Закон покоординатного моделирования не вызывает затруднений:

$$\varphi(\mathscr{A}) \leftrightarrow (\forall\, q \in Q)\ \varphi(\mathscr{A}(q)).$$

С этим правилом $\mathbb{V}_Q$ очевидно становится моделью теории множеств. Однако из общих соображений кажется, что такая «послойная» модель никаких новых знаний нам не добавляет (хотя она и нестандартна).

Взглянем все же на $\mathbb{V}_Q$ повнимательнее. Для этого положим

$$[\![\varphi(\mathscr{A})]\!] := \{q \in Q : \varphi(\mathscr{A}(q))\}.$$

Возникает «оценка истинности» формул φ как функция $[\![\,\cdot\,]\!]$ со значениями в $\mathscr{P}(Q)$. Понятно, что справедлив «принцип переноса»:

$$(\varphi \text{ — теорема}) \leftrightarrow [\![\varphi]\!] = Q.$$

Нетрудно видеть, что справедливы соотношения:

$$\begin{gathered}
[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!],\\
[\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!],\\
[\![(\forall\, x)\ \varphi]\!] = \bigwedge\nolimits_x [\![\varphi(x)]\!],\\
[\![(\exists\, x)\ \varphi]\!] = \bigvee\nolimits_x [\![\varphi(x)]\!],
\end{gathered}$$

При этом верен и «принцип максимума»:

$$(\exists\, x)\ \varphi(x) \to (\exists\, x)\ [\![\varphi(x)]\!] = Q.$$

Взглянем на объект $\mathscr{R} := \mathbb{R}^Q$. Очевидно

$$[\![\mathscr{R} \text{ — поле вещественных чисел}]\!] = Q,$$

т. е. $\mathscr{R}$ моделирует поле вещественных чисел «внутри $\mathbb{V}_Q$».

Можно сказать и иначе

$$\mathscr{R}{\downarrow} := \{z \in \mathbb{V}_Q : [\![z \in \mathscr{R}]\!] = Q\} = \mathbb{R}^Q,$$

т. е. «спуск» поля вещественных чисел внутри $\mathbb{V}_Q$ — пространство вещественных функций на Q.

Приведенную конструкцию можно несколько обобщить, заменив Q на стоуновский компакт некоторой полной булевой алгебры B, а $\mathscr{P}(Q)$ — на алгебру открыто-замкнутых подмножеств Q. Точнее говоря, определяя новый «нестандартный» универсум множеств $\mathbb{V}^{(B)}$, положим

$$\mathbb{V}_\alpha^{(B)} := \{x : (\exists \beta \in \alpha)\ x : \mathrm{dom}(x) \to B\ \wedge\ \mathrm{dom}(x) \subset \mathbb{V}_\beta^{(B)}\},$$
$$\mathbb{V}^{(B)} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathbb{V}_\alpha^{(B)},$$

где α пробегает класс ординалов On.

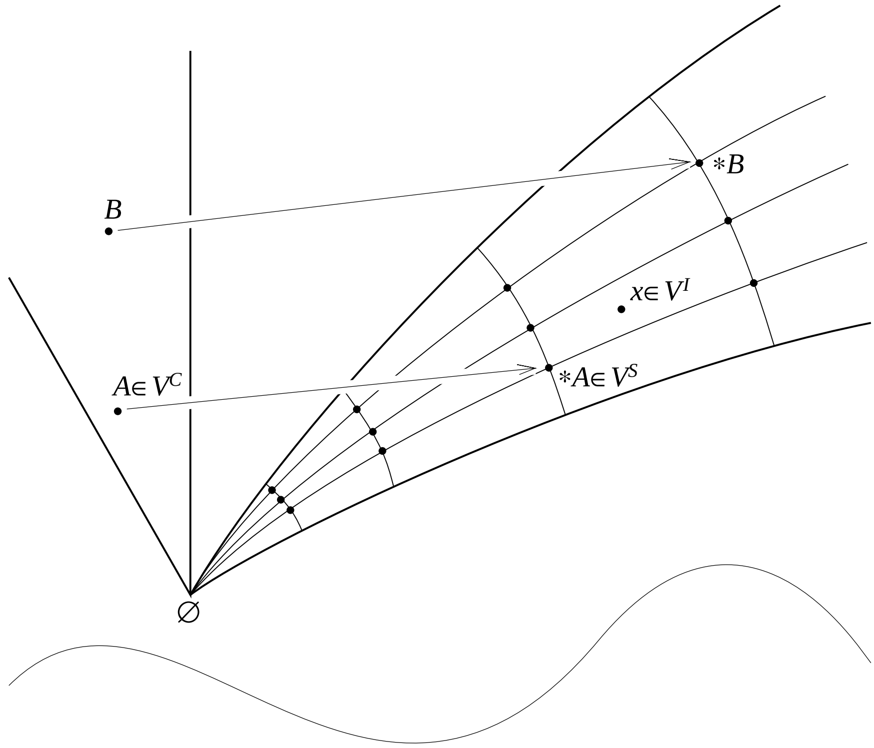
Булева оценка истинности $[\![\varphi]\!]$ определяется рекурсией по сложности φ при естественной интерпретации логических связок и кванторов. Оценки же атомных формул $x \in y$ и $x = y$ для $x, y \in \mathbb{V}^{(B)}$ определяют схемой трансфинитной рекурсии:

$$[\![x \in y]\!] := \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(y)} y(z) \wedge [\![z = x]\!];$$
$$[\![x = y]\!] := \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(x)} x(z) \Rightarrow [\![z \in y]\!] \wedge \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}(y)} y(z) \Rightarrow [\![z \in x]\!].$$

(Знак $\Rightarrow$ символизирует импликацию в B.)

Так возникает булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$, моделирующий универсум фон Неймана $\mathbb{V}$. При этом поле вещественных чисел $\mathscr{R}$ в новой модели имеет своим спуском расширенное K-пространство $\mathscr{R}{\downarrow}$, база которого изоморфна исходной булевой алгебре B. Тем самым получает обоснование *эвристический принцип Канторовича*, и теория булевозначных моделей превращается в аппарат одного из классических разделов функционального анализа.

Теория булевозначных моделей, ставшая основой «булевозначного анализа», восходит к Д. Скотту, Р. Соловею, П. Вопенке и Г. Такеути. Более известно направление моделирования, получившее название от своего основателя А. Робинсона «нестандартный анализ». В настоящее время все чаще используется более точный термин «инфинитезимальный анализ», подчеркивающий связь новой теории с классическими воззрениями дифференциального и интегрального исчисления, возникшего в форме «анализа бесконечно малых».



Универсум внешних множеств

Рис. 2

С технической точки зрения модели инфинитезимального анализа могут рассматриваться как простейшие разновидности булевозначных моделей. Однако значение инфинитезимальных методов столь велико, что робинсоновский анализ занимает совершенно особое место. Достаточно сказать, именно в нем нашли объяснение методы, основанные на использование актуальных бесконечно больших и бесконечно малых чисел (в частности, теория неделимых Кавальери и монадология Лейбница).

Развивая инфинитезимальный анализ, от обычного универсума фон Неймана $\mathbb{V}$ переходят к «оснащенному» универсуму $\mathbb{V}^I$ так называемых *внутренних* множеств с отмеченными в нем реперными точками — *стандартными* множествами, составляющими класс изображений — копии $\mathbb{V}^S$ обычного универсума $\mathbb{V}$. Дальнейший анализ показывает что $\mathbb{V}^I$ лежит в новом классе — в универсуме $\mathbb{V}^E$ *внешних* множеств, удовлетворяющих аксиоматике Цермело. В $\mathbb{V}^E$ выделен универсум «классических» множеств $\mathbb{V}^C$ — еще одна реализация мира стандартных множеств $\mathbb{V}^S$. Точнее говоря, имеется $*$-изображение, поэлементно отождествляющее $\mathbb{V}^C$ и $\mathbb{V}^S$. В силу аналогов принципов переноса $\mathbb{V}^C$, $\mathbb{V}^S$ и $\mathbb{V}^I$ можно рассматривать как «ипостаси» универсума фон Неймана $\mathbb{V}$. Именно в этом сложном взаимодействии нестандартных моделей проходит весьма бурный современный этап возрождения, переосмысления и обогащения старинных инфинитезимальных методов.

Синтез технических приемов булевозначного и инфинитезимального анализа — это во многом все еще открытая проблема. С ее современным состоянием можно познакомиться по серии «Нестандартные методы анализа».

Литература

1. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Булевозначный анализ.—Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999.—384 с. (Перевод: Boolean Valued Analysis, Kluwer Academic Publishers, 1999, 322 p.)

2. *Кутателадзе С. С.* (ред.) Нестандартный анализ и векторные решетки.—Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999.—380 с. (Перевод: Nonstandard Analysis and Vector Lattices, Kluwer Academic Publishers, 2000, 307 p.)

3. *Гордон Е. И., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Инфинитезимальный анализ. Части 1 и 2.—Новосибирск: ИМ СО РАН, 2001.—247 с.+317 с. (Перевод: Infinitesimal Analysis, Kluwer Academic Publishers, 2002, 422 p.)