# МАЖОРИРОВАНИЕ,
# ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И СКАЛЯРИЗАЦИЯ

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

## 1. Фрэнсис Бэкон

«Математика бывает или чистая, или смешанная. К чистой математике принадлежат те дисциплины, которые рассматривают количество, полностью абстрагированное от материи и физических аксиом...

Предметом смешанной математики являются некоторые аксиомы и части физики...»

Великое восстановление наук. Разделение наук. (1605)

## 2. Функциональный анализ и прикладная математика

В конце 1940-х годов Канторович в серии работ формулирует и развивает тезис о взаимосвязи функционального анализа и прикладной математики. Канторович выделял метод мажорант, восходящий к Коши, метод конечномерных приближений и метод Лагранжа для новых задач оптимизации, возникающих в экономике.

## 3. Мажорирование

Пусть $X$ и $Y$ — вещественные векторные пространства и заданы векторные нормы $|\cdot|_X$ и $|\cdot|_Y$. Пусть, далее, $T$ — линейный оператор из $X$ в $Y$, а $S$ — положительный оператор из $E$ в $F$ такие, что

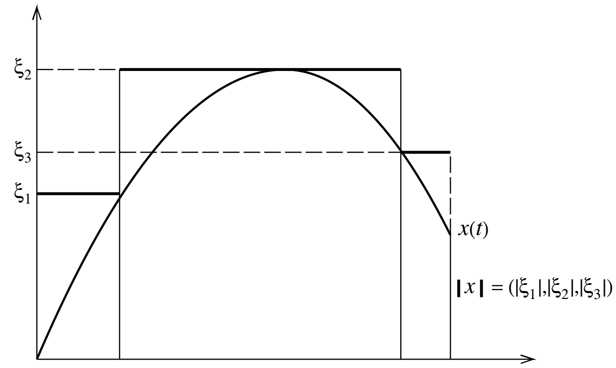
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "|\cdot|_X"'] & Y \arrow[d, "|\cdot|_Y"] \\ E \arrow[r, "S"'] & F \end{tikzcd}$$

*Date*: 23 апреля 2008.

Если при этом $⦀Tx⦀_Y \le S⦀x⦀_X \quad (x \in X)$, то $S$ называют *мажорантой* $T$. *Точная мажоранта* $⦀T⦀$ — наименьший положительный оператор из $E$ в $F$, для которого $⦀Tx⦀ \le ⦀T⦀(⦀x⦀) \quad (x \in X)$.

## 4. Нормирование последовательностей

$$⦀(\xi_1, \xi_2, \dots)⦀ = (|\xi_1|, |\xi_2|, \dots, |\xi_{N-1}|, \sup_{k \ge N} |\xi_k|) \in \mathbb{R}^N.$$




«Я полагаю, что и в ряде других случаев применение вместо вещественных чисел элементов линейных полуупорядоченных пространств в оценках может привести к существенному уточнению последних».

Канторович, Вестник ЛГУ (1948).

## 5. Булевозначный анализ

Современная техника математического моделирования позволила показать, что основные свойства решеточно нормированных пространств представляют собой булевы интерпретации свойств классических пространств. Произвольное банахово пространство внутри булевозначной модели при внешней расшифровке представляет собой расширенное пространство Банаха — Канторовича. При этом каждое решеточно нормированное пространство может быть реализовано как плотное подпространство некоторого банахова пространства в подходящей булевозначной модели.

## 6. Дискретизация

Уравнение

$$Tx = y,$$

где $T : X \to Y$, а $X$ и $Y$ — банаховы пространства, заменяют на уравнение

$$T_N x_N = y_N$$

подбором конечномерных аппроксимирующих подпространств $X_N, Y_N$ и вложений $\imath_N, \jmath_N$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] & Y \\ X_N \arrow[u, "\imath_N"] \arrow[r, "T_N"'] & Y_N \arrow[u, "\jmath_N"'] \end{tikzcd}$$

## 7. Гипераппроксимация

Нестандартные модели дают метод внешней аппроксимации

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi_E"'] & F \arrow[d, "\varphi_F"] \\ E^{\#} \arrow[r, "T^{\#}"'] & F^{\#} \end{tikzcd}$$

Здесь $E$ и $F$ — нормированные векторные пространства над одним и тем же полем скаляров, $T$ — ограниченный линейный оператор из $E$ в $F$, а $^{\#}$ — символ перехода к нестандартной оболочке.

## 8. Наличие гипераппроксимаций

Пространство $E^{\#}$ автоматически оказывается банаховым для каждого внутреннего (не обязательно полного) нормированного пространства $E$. Если внутренняя размерность внутреннего нормированного пространства $E$ конечна, то пространство $E$ называют *гиперконечномерным*. Для каждого нормированного векторного пространства $E$ существует гиперконечномерное подпространство $F \subset {}^*E$, содержащее все стандартные элементы внутреннего пространства ${}^*E$.

## 9. Идеальный оптимум

Пусть $X$ — векторное пространство, $E$ — упорядоченное векторное пространство, $f : X \to E^{\bullet} := E \cup +\infty$ — выпуклый оператор и $C \subset X$ — выпуклое множество. *Векторная программа* — это пара $(C, f)$, записываемая в виде

$$x \in C, \quad f(x) \to \inf.$$

Элемент $e := \inf_{x \in C} f(x)$ (если он существует) называют *значением программы* $(C, f)$. Допустимый элемент $x_0$ называют *идеальным оптимумом* или *решением*, если $e = f(x_0)$. Таким образом, $x_0$ — идеальный оптимум в том и только в том случае, если $f(x_0)$ — наименьший элемент образа $f(C)$, т. е. $x_0 \in C$ и $f(C) \subset f(x_0) + E^+$.

## 10. Приближенная оптимальность

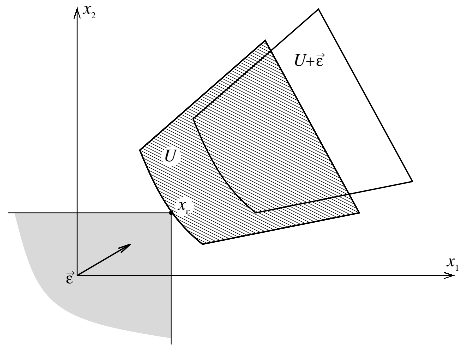
Зафиксируем положительный элемент $\varepsilon \in E$. Допустимая точка $x_0$ называется *$\varepsilon$-решением* или *$\varepsilon$-оптимумом* программы $(C, f)$, если $f(x_0) \le e + \varepsilon$, где $e$ — значение программы. Таким образом, $x_0$ есть $\varepsilon$-решение программы $(C, f)$, если и только если $x_0 \in C$ и $f(x_0) - \varepsilon$ — нижняя граница образа $f(C)$ или, что то же самое, $f(C) + \varepsilon \subset f(x_0) + E^+$. Очевидно, что точка $x_0$ будет $\varepsilon$-решением безусловной задачи $f(x) \to \inf$ в том и лишь в том случае, когда нуль входит в $\partial_\varepsilon f(x_0)$, т. е.

$$f(x_0) \le \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon \leftrightarrow 0 \in \partial_\varepsilon f(x_0).$$

Здесь фигурирует $\varepsilon$-субдифференциал $\partial_\varepsilon f(x_0)$. Напомним, что элемент $l$ последнего — это линейный оператор из $X$ в $E$ такой, что $(\forall x \in X) l(x - x_0) \le f(x) - f(x_0) + \varepsilon$.

## 11. Приближенная эффективность

Допустимая точка $x_0$ называется *$\varepsilon$-оптимальной по Парето* или *$\varepsilon$-Парето-оптимальной* в программе $(C, f)$, если $f(x_0)$ — минимальный элемент множества $U + \varepsilon$, где $U := f(C)$, т. е. если $(f(x_0) - E^+) \cap (f(C) + \varepsilon) = [f(x_0)]$. Более подробно, $\varepsilon$-Парето-оптимальность точки $x_0$ означает, что $x_0 \in C$ и для любой точки $x \in C$ неравенство $f(x_0) \ge f(x) + \varepsilon$ влечет $f(x_0) \sim f(x) + \varepsilon$.




## 12. Элиминация $\varepsilon$

$\varepsilon$-решение при достаточно малом $\varepsilon$ можно рассматривать как претендента на «практический оптимум» — на приемлемое на практике решение исходной задачи. Правила вычисления $\varepsilon$-субдифференциалов доставляют формальный аппарат учета границ точности решения экстремальной задачи. Соответствующая техника в настоящее время весьма совершенна и, можно сказать, изящна и изощренна. В то же время возникающие точные формулы трудно обозримы и не вполне соответствуют практическим приемам оптимизации, при которых применяют эвристические правила «отбрасывания малых». Лишенный этих недостатков адекватный аппарат инфинитезимальных субдифференциалов связан с современными возможностями нестандартной теории множеств.

## 13. Перспективы

Адаптация современных идей теории моделей для функционального анализа представляется важнейшим направлением развития синтетических методов прикладной и теоретической математики. Здесь возникают новые модели чисел, пространств, видов уравнений. Расширяется содержание всех имеющихся теорем и алгоритмов, обогащается и обновляется вся методология математического моделирования, открывая совершенно фантастические возможности. Классический функциональный анализ далеко не сразу занял свое теперешнее место языка непрерывной математики. Сейчас настали времена новых мощных технологий математического анализа. Пути назад в науке нет — новые методы со временем станут столь же элементарными и общеупотребительными в исчислениях и вычислениях как банаховы пространства и линейные операторы.