МАЖОРИРОВАНИЕ, ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И СКАЛЯРИЗАЦИЯ

С. С. Кутателадзе

23 апреля 2008

Agenda

Союзу функционального анализа и прикладной математики в этом году исполняется 60 лет. В этой сообщении основное внимание уделено современному состоянию и границам применимости методов мажорирования, дискретизации и скаляризации, предложенных одним из пионеров этого союза — Леонидом Витальевичем Канторовичем (1912–1986).

Предмет математики

Предмет математики — количественные формы человеческого мышления. Математика функционирует как наука доказательных исчислений, постоянно обновляясь и наращивая объем накопленных знаний. Со временем меняются требования к строгости доказательств и технологиям их получения, возникает делении математики на чистую и прикладную.

Фрэнсис Бэкон

«Математика бывает или чистая, или смешанная. К чистой математике принадлежат те дисциплины, которые рассматривают количество, полностью абстрагированное от материи и физических аксиом...

Предметом смешанной математики являются некоторые аксиомы и части физики...»

Великое восстановление наук. Разделение наук. (1605)

Математика чистая и прикладная

Спустя полтора века в 1761 г. Леонард Эйлер использовал термин «чистая математика» в заголовке сочинения “Specimen de usu observationum in mathesi pura.” Примерно в то время термин «чистая математика» попал в старейшую английскую энциклопедию *Encyclopaedia Britannica*. В XIX веке «смешанную» математику начинают именовать «прикладной». Появляются знаменитые журналы *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (основанный Жозефом Лиувиллем в 1836 г.) и *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* (1857 г.).

Искусство и ремесло математической техники для задач других наук составляют предмет математики прикладной.

Механика и физика

Традиционной сферой приложения математики XIX века была классической механика, понимаемая в самом широком смысле. Отражением этой исторической традиции служат механико-математические факультеты ведущих университетов России.

Начало XX века отмечено резким расширением сферы приложений математики. Возникла квантовая механика, потребовавшая развития нового математического аппарата. Теория операторов в гильбертовых пространствах и теория обобщенных функций были ориентированы, прежде всего, на адаптацию эвристических методов новой физики.

Математизация социума

В 1920–1930 гг. социальные феномены стали предметом невербальных исследований, требовавших создания специальных математических методов. Существенно возросла потребность в статистической обработке данных. Создание новых производств, внедрение передовых технологий, оборудования и материалов вызвали потребность совершенствования техники расчетов. Бурному развитию прикладной математики способствовала автоматизация и механизация процесса вычислений.

Союз анализа и приложений

В 1930-е годы прикладная математика стремительно сближается с функциональным анализом. Существенную роль в этом процессе сыграли исследования Джона фон Неймана по математическим основам квантовой механики и теории игр как аппарата экономических исследований. В России пионером и генератором новых синтетических идей стал Канторович.

Принцип Канторовича

«В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».

Канторович, Докл. АН СССР (1935).

Линейные неравенства

Пространства Канторовича дали рамки для построения теории линейных неравенств, необходимой в приближенных вычислениях для оценок точности. Поставщиком линейных неравенств была экономическая проблематика. Целесообразное и оптимальное поведение в условиях ограниченных ресурсов естественно формулировать в терминах частичного сравнения. Концепция линейных неравенств неразрывна с понятием выпуклого множества, представляющего собой множество решений системы линейных неравенств.

Линейное программирование

Линейное программирование — техника максимизации линейного функционала на множестве положительных решений системы линейных неравенств. Неудивительно, что открытие линейного программирования последовало вскоре за созданием основ теории пространств Канторовича.

Функциональный анализ и прикладная математика

В конце 1940-х годов Канторович в серии работ формулирует и развивает тезис о взаимосвязи функционального анализа и прикладной математики. Канторович выделял метод мажорант, восходящий к Коши, метод конечномерных приближений и метод Лагранжа для новых задач оптимизации, возникающих в экономике.

Три технологии

Технологию мажорирования в общих упорядоченных векторных пространствах Канторович взял за основу исследования вариантов метода Ньютона в банаховых пространствах. Приближение бесконечномерных пространств и операторов их конечномерными аналогами следует воспринимать наряду с удивительным универсальным пониманием вычислительной математики как науки о конечных приближениях общих компактов из доклада С. Л. Соболева, Л. А. Люстерника и Л. В Канторовича на Третьем Всесоюзном математическом съезде в 1956 г.. Новизна экстремальных задач, возникающих в социальных науках, связана с наличием многомерных противоречивых целей, ставящих на первое место проблему согласования интересов или *скаляризацию* векторных целей.

Мажорирование

Пусть X и Y — вещественные векторные пространства и заданы векторные нормы $|\cdot|_X$ и $|\cdot|_Y$. Пусть, далее, T — линейный оператор из X в Y, а S — положительный оператор из E в F такие, что

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "|\cdot|_X"'] & Y \arrow[d, "|\cdot|_Y"] \\ E \arrow[r, "S"'] & F \end{tikzcd}$$

Если при этом $|Tx|_Y \leq S|x|_X \quad (x \in X)$, то S называют *мажорантой* T. *Точная мажоранта* $|T|$ — наименьший положительный оператор из E в F, для которого $|Tx| \leq |T|(|x|) \quad (x \in X)$.

Абстрактная норма

«Абстрактная норма позволяет гораздо тоньше оценить элемент и операцию, чем одно число — числовая норма, и благодаря этому получить более точные (и широкие) границы применимости метода последовательных приближений. Так, в качестве нормы непрерывной функции можно взять не границу её во всем интервале, а совокупность её границ в нескольких частичных интервалах... Это позволяет уточнить оценку границы сходимости метода последовательных приближений для интегральных уравнений».

Канторович, Вестник ЛГУ (1948).

Нормирование последовательностей

$$\left|\!\!\left|(\xi_1, \xi_2, \dots)\right|\!\!\right| = (|\xi_1|, |\xi_2|, \dots, |\xi_{N-1}|, \sup_{k \geq N} |\xi_k|) \in \mathbb{R}^N.$$

«Я полагаю, что и в ряде других случаев применение вместо вещественных чисел элементов линейных полуупорядоченных пространств в оценках может привести к существенному уточнению последних».

Канторович, Вестник ЛГУ (1948).

Булевозначный анализ

Современная техника математического моделирования позволила показать, что основные свойства решеточно нормированных пространств представляют собой булевозначные интерпретации свойств классических нормированных пространств. Произвольное банахово пространство внутри булевозначной модели при внешней расшифровке представляет собой расширенное пространство Банаха — Канторовича. При этом каждое решеточно нормированное пространство может быть реализовано как плотное подпространство некоторого банахова пространства в подходящей булевозначной модели.

Дискретизация

Уравнение

$$Tx = y,$$

где $T : X \to Y$, а X и Y банаховы пространства заменяют на уравнение

$$T_N x_N = y_N$$

подбором конечномерных аппроксимирующих подпространств X_N, Y_N и вложений $\imath_N, \jmath_N$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] & Y \\
X_N \arrow[u, "\imath_N"] \arrow[r, "T_N"'] & Y_N \arrow[u, "\jmath_N"']
\end{tikzcd}$$

Гипераппроксимация

Нестандартные модели дают метод внешней аппроксимации

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi_E"'] & F \arrow[d, "\varphi_F"] \\
E^{\#} \arrow[r, "T^{\#}"'] & F^{\#}
\end{tikzcd}$$

Здесь E и F — нормированные векторные пространства над одним и тем же полем скаляром, T — ограниченный линейный оператор из E в F, а $^{\#}$ — символ перехода к нестандартной оболочке.

Оболочка пространства

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — внутреннее нормированное пространство над ${}^*\mathbb{F}$,а $\mathrm{ltd}(E)$ и $\mu(E)$ внешние множества доступных и бесконечно малых элементов E. По определению $E^{\#} = \mathrm{ltd}(E)/\mu(E)$ Нормируем $E^{\#}$, полагая $\|\varphi x\| := \|x^{\#}\| := \mathrm{st}(\|x\|) \in \mathbb{F} \quad (x \in \mathrm{ltd}(E))$.

Здесь $\varphi := \varphi_E := (\cdot)^{\#} : \mathrm{ltd}(E) \to E^{\#}$ — фактор-гомоморфизм, а st — символ перехода к стандартной части доступного числа.

Оболочка оператора

Пусть $T : E \to F$ — внутренний ограниченный линейный оператор из E в F. Числовое множество $c(T) := \{C \in {}^*\mathbb{R} : (\forall x \in E)\|Tx\| \leq C\|x\|\}$ является внутренним и ограниченным и $\|T\| := \inf c(T)$.

Если $\|T\|$ — доступное число, то из классического нормативного неравенства $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$, справедливого для всех $x \in E$, видно, что $T(\mathrm{ltd}(E)) \subset \mathrm{ltd}(F)$ и $T(\mu(E)) \subset \mu(F)$. Следовательно, корректно определено снижение T на $E^{\#}$ — *оболочка* $T^{\#} : E^{\#} \to F^{\#}$, действующая по правилу

$$T^{\#}\varphi_E x := \varphi_F T x \quad (x \in E).$$

Наличие гипераппроксимаций

Пространство $E^{\#}$ автоматически оказывается банаховым для каждого внутреннего (не обязательно полного) нормированного пространства E. Если внутренняя размерность внутреннего нормированного пространства E конечна, то пространство E называют *гиперконечномерным*. Для каждого нормированного векторного пространства E существует гиперконечномерное подпространство $F \subset {}^*E$, содержащее все стандартные элементы внутреннего пространства ${}^*E$.

Инфинитезимальные методы позволяют предложить и новые схемы гипераппроксимации общих компактных пространств. В качестве таких приближений к компактному множеству сверху могут выступать произвольные конечные внутренние множества, содержащие все стандартные элементы подлежащего аппроксимации компакта.

Скаляризация

Скаляризация в самом общем смысле — это приведение к числу, неизбежное в задачах многоцелевой оптимизации. Особенность экстремальных задач экономики состоит в наличие большого числа противоречивых целей и интересов, подлежащих согласованию. Это приводит к серьезным трудностям, отсутствующим в случае скаляров. На первый план выходит анализ разумных понятий оптимальности для многоцелевых задач, среди которых можно выделить идеальный и обобщенный оптимумы, оптимум в смысле Парето, а также приближенный и инфинитезимальный оптимумы.

Идеальный оптимум

Пусть X — векторное пространство, E — упорядоченное векторное пространство, $f : X \to E^{\bullet} := E \cup +\infty$ — выпуклый оператор и $C \subset X$ — выпуклое множество. *Векторная программа* — это пара (C, f), записываемая в виде

$$x \in C, \quad f(x) \to \inf.$$

Элемент $e := \inf_{x \in C} f(x)$ (если он существует) называют *значением программы* (C, f). Ясно, что $e = -f^*(0)$.

Допустимый элемент x_0 называют *идеальным оптимумом* или *решением*, если $e = f(x_0)$. Таким образом, x_0 — идеальный оптимум в том и только в том случае, если $f(x_0)$ — наименьший элемент образа $f(C)$, т. е. $x_0 \in C$ и $f(C) \subset f(x_0) + E^{+}$.

Приближенная оптимальность

Зафиксируем положительный элемент $\varepsilon \in E$. Допустимая точка x_0 называется *ε-решением* или *ε-оптимумом* программы (C, f), если $f(x_0) \leq e+\varepsilon$, где e — значение программы. Таким образом, x_0 есть ε-решение программы (C, f), если и только если $x_0 \in C$ и $f(x_0) - \varepsilon$ — нижняя граница образа $f(C)$ или, что то же самое, $f(C) + \varepsilon \subset f(x_0) + E^+$. Очевидно, что точка x_0 будет ε-решением безусловной задачи $f(x) \to \inf$ в том и лишь в том случае, когда нуль входит в $\partial_\varepsilon f(x_0)$, т. е.

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon \leftrightarrow 0 \in \partial_\varepsilon f(x_0).$$

Здесь фигурирует ε-субдифференциал $\partial_\varepsilon f(x_0)$. Напомним, что элемент l последнего — это линейный оператор из X в E такой, что $(\forall x \in X) l(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) + \varepsilon$.

Приближенная эффективность

Допустимая точка x_0 называется ε-*оптимальной по Парето* или ε-*Парето-оптимальной* в программе (C, f), если $f(x_0)$ — минимальный элемент множества $U + \varepsilon$, где $U := f(C)$, т. е. если $(f(x_0) - E^+) \cap (f(C) + \varepsilon) = [f(x_0)]$. Более подробно, ε-Парето-оптимальность точки x_0 означает, что $x_0 \in C$ и для любой точки $x \in C$ неравенство $f(x_0) \geq f(x) + \varepsilon$ влечет $f(x_0) \sim f(x) + \varepsilon$.

Элиминация ε

ε-решение при достаточно малом ε можно рассматривать как претендента на «практический оптимум» — на приемлемое на практике решение исходной задачи. Правила вычисления ε-субдифференциалов доставляют формальный аппарат учета границ точности решения экстремальной задачи. Соответствующая техника в настоящее время весьма совершенна и, можно сказать, изящна и изощренна. В то же время возникающие точные формулы трудно обозримы и не вполне соответствуют практическим приемам оптимизации, при которых применяют упрощенные правила «отбрасывания малых». Лишенный этих недостатков адекватный аппарат инфинитезимальных субдифференциалов связан с современными возможностями нестандартной теории множеств.

Инфинитезимальный оптимум

Допустим, что существует конечное значение $e := \inf_{x \in C} f(x)$ программы (C, f). Допустимую точку x_0 называют *инфинитезимальным решением*, если верно $f(x_0) \approx e$, т. е. если для каждого $x \in C$ и любого стандартного $\varepsilon \in \mathcal{E}$ выполняется $f(x_0) \leq f(x) + \varepsilon$. Точка $x_0 \in X$ является инфинитезимальным решением безусловной задачи $f(x) \to \inf$ в том и только в том случае, если $0 \in Df(x_0)$, где $Df(x_0)$ — внешнее объединение соответствующих ε-субдифференциалов по всем бесконечно малым ε.

Перспективы

Адаптация современных идей теории моделей для функционального анализа представляется важнейшим направлением развития синтетических методов прикладной и теоретической математики. Здесь возникают новые модели чисел, пространств, видов уравнений. Расширяется содержание всех имеющихся теорем и алгоритмов, обогащается и обновляется вся методология математического моделирования, открывая совершенно фантастические возможности. Классический функциональный анализ далеко не сразу занял свое теперешнее место языка непрерывной математики. Сейчас настали времена новых мощных технологий математического анализа. Пути назад в науке нет — новые методы со временем станут столь же элементарными и общеупотребительными в исчислениях и вычислениях как банаховы пространства и линейные операторы.