РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК • СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л.СОБОЛЕВА

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ
И
ВЕКТОРНЫЕ РЕШЕТКИ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

Нестандартные методы анализа

**А. Е. Гутман, Э. Ю. Емельянов,
А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе**

НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ
И
ВЕКТОРНЫЕ РЕШЕТКИ

Новосибирск
Издательство Института математики
1999

УДК 517.11+517.98
ББК 22.16+22.12
К94

Нестандартный анализ и векторные решетки /**Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.** — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. — x+380 с. — (Нестандартные методы анализа).

ISBN 5–86134–068–4.

Монография посвящена приложениям нестандартных методов анализа к теории векторных решеток. Основное внимание уделено проблеме комбинирования инфинитезимальных и булевозначных конструкций для исследования классических проблем теории векторных решеток, связанных с построением конкретных реализаций абстрактных функционально-аналитических объектов: пространств Банаха — Канторовича, мажорированных операторов, векторных мер, интегральных операторов и т. п.

Книга ориентирована на широкий круг читателей, интересующихся современными приложениями нестандартного анализа к проблемам функционального анализа.

Ответственный редактор
и редактор серии
С. С. Кутателадзе

Издание осуществлено при финансовой поддержке:
Российского фонда фундаментальных исследований
(РФФИ, коды проектов 94–01–00001, 94–01–00529-а, 97–01–00001),
Международного научного фонда (ISF, коды проектов NYU000, NYU300),
Международной Соросовской образовательной программы
(ISSEP, коды проектов 385_р, p98–1358).

К $\dfrac{1602080000\text{–}08}{\text{Я}82(03)\text{–}99}$ Без объявл.

ISBN 5–86134–068–4

Содержание

От редактора **vi**

Глава 1. Нестандартные методы и пространства Канторовича (А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе) **1**

1.1. Теория множеств Цермело — Френкеля **6**

1.2. Булевозначные модели теории множеств **8**

1.3. Теории внутренних и внешних множеств **14**

1.4. Теория относительно стандартных множеств **21**

1.5. Пространства Канторовича **27**

1.6. Действительные числа в булевозначных моделях **32**

1.7. Функциональное исчисление в K-пространствах . . **37**

1.8. Решеточно нормированные пространства **42**

1.9. Нестандартные оболочки **48**

1.10. Мера Лёба **53**

1.11. Булевозначное моделирование в нестандартном универсуме **59**

1.12. Инфинитезимальное моделирование внутри булевозначного универсума **65**

1.13. Продолжение и разложение положительных операторов **69**

1.14. Осколки положительных операторов **74**

1.15. Порядково непрерывные операторы **79**

1.16. Циклически компактные операторы **83**

Литература **88**

Глава 2. Функциональное представление булевозначного универсума
(А. Е. Гутман, Г. А. Лосенков) **97**

2.1. Предварительные сведения ... **100**

2.2. Понятие непрерывного расслоения ... **108**

2.3. Непрерывный поливерсум ... **111**

2.4. Функциональное представление булевозначного универсума ... **121**

Литература ... **125**

Глава 3. Сопряженные банаховы расслоения
(А. Е. Гутман, А. В. Коптев) **127**

3.1. Вспомогательные результаты ... **132**

3.2. Гомоморфизмы банаховых расслоений ... **145**

3.3. Операторное расслоение ... **159**

3.4. Сопряженное банахово расслоение ... **171**

3.5. Слабо непрерывные сечения ... **187**

Литература ... **201**

Глава 4. Бесконечно малые в векторных решетках
(Э. Ю. Емельянов) **203**

4.0. Предварительные сведения ... **207**

4.1. Насыщенные множества неделимых элементов ... **217**

4.2. Представление архимедовых векторных решеток . **225**

4.3. Порядок, (r)-сходимость и принцип Архимеда ... **232**

4.4. Условное пополнение и атомность решеток ... **238**

4.5. Нормированные векторные решетки ... **244**

4.6. Линейные операторы на векторных решетках ... **248**

4.7. $*$-Инвариантные гомоморфизмы нестандартных расширений ... **251**

4.8. Порядковые оболочки векторных решеток **258**

4.9. Регулярные оболочки векторных решеток **264**

4.10. Порядковые и регулярные оболочки решеточно нормированных пространств **268**

4.11. Ассоциированные пространства Банаха — Канторовича **275**

Литература **285**

Глава 5. Векторные меры и мажорируемые отображения (А. Г. Кусраев, С. А. Малюгин) **289**

5.1. Векторные меры **293**

5.2. Квазирадоновы и квазирегулярные меры **295**

5.3. Интегральные представления и продолжение мер **302**

5.4. Теорема Фубини **309**

5.5. Проблема моментов Хаусдорфа **319**

5.6. Векторная проблема моментов Гамбургера **324**

5.7. Проблема моментов Гамбургера для мажорантных моментных последовательностей **338**

5.8. Мажорируемые отображения **345**

5.9. Теорема Бохнера для мажорируемых отображений **355**

5.10. Некоторые следствия **360**

5.11. Булевозначная интерпретация леммы Винера **365**

Литература **368**

Указатель обозначений **371**

Предметный указатель **374**

От редактора

Нестандартные методы анализа в современном понимании состоят в привлечении двух различных — «стандартной» и «нестандартной» — моделей теории множеств для исследования конкретных математических объектов и проблем. Такие методы получили существенное развитие во второй половине XX века и сформировались в несколько направлений.

Первое из названных направлений вслед за его основоположником А. Робинсоном часто называют запоминающимся, хотя и несколько эпатажным, термином — *нестандартный анализ* (теперь чаще говорят о классическом или робинсоновском нестандартном анализе). Робинсоновский нестандартный анализ характеризуется широким использованием давно известных в практике естествознания, но долгое время запрещенных в математике XX века концепций, связанных с представлениями об актуальных бесконечно больших и актуальных бесконечно малых величинах. В этой связи сейчас за ним закрепилось наименование *инфинитезимальный анализ*, выразительно напоминающее о классическом анализе бесконечно малых.

Инфинитезимальный анализ бурно развивается и уже внес капитальные изменения в систему общематематических представлений. Прежде всего это связано с тем, что в нем предложено новое понимание метода неделимых, восходящего к глубокой древности, и осуществлен синтез подходов к дифференциальному и интегральному исчислениям, восходящих к их основоположникам. В наши дни инфинитезимальный анализ находит широкое распространение и проникает во все разделы современной математики. Наибольшие изменения происходят в этой связи в негладком анализе, в теории вероятностей и теории меры, в качественной теории дифференциальных уравнений и в математической экономике.

Второе направление — *булевозначный анализ* — характеризуется широким использованием таких терминов, как спуски и подъемы, циклические оболочки и миксинги, B-множества и изображения объектов в моделях. Развитие этого направления, становление которого связано со знаменитыми работами П. Дж. Коэна по проблеме континуума, привело к принципиально новым идеям и результатам в ряде направлений функционального анализа, прежде всего в теории пространств Канторовича, в теории алгебр фон Неймана, в выпуклом анализе и теории векторных мер.

В монографии [1], изданной в 1990 году Сибирским отделением издательства «Наука» и переизданной в 1994 году издательством Kluwer Academic Publishers на английском языке [2], впервые с единых методологических позиций были рассмотрены оба указанных выше направления, составляющих ядро современных нестандартных методов анализа.

Читательский интерес и стремительное развитие самой дисциплины поставили задачу отразить современное состояние дел, изложив новые темы и результаты. При работе над реализацией проекта выяснилось, что остаться в прежних рамках одной книги уже невозможно. В этой связи было принято решение о подготовке серии монографий под общим названием «Нестандартные методы анализа», каждая из которых трактует различные аспекты этого математического направления. Серию открыла монография [3], английское издание [4] которой появилось практически одновременно с русским.

Настоящее издание, продолжающее серию, посвящено приложениям к теории векторных решеток. Возникновение этой теории принято относить к началу тридцатых годов двадцатого века и связывать, прежде всего, с именами Л. В. Канторовича, Ф. Рисса и Г. Фрейденталя. Развиваясь в общем русле функционального анализа, теория векторных решеток стала изучать специфические свойства классических банаховых пространств и операторов в них, связанные с наличием естественной структуры порядка.

В середине семидесятых годов начался новый период бурного роста достижений в теории векторных решеток. Причина этого явления заключена в необыкновенной полезности идей указанной теории в математических исследованиях, ориентированных на социальные науки и, прежде всего, экономику. Особую роль в синтезе теории упорядоченных векторных пространств, оптимизации и математической экономики сыграло творчество Л. В. Канторовича.

Важнейшим новым обстоятельством в развитии теории векторных решеток стало открытие особой роли пространств Канторовича в булевозначных моделях теории множеств. Построенные Д. Скоттом, Р. Соловеем и П. Вопенкой, в связи с толкованием упомянутых выше работ П. Дж. Коэна, эти модели оказались неразрывно связанными с теорией векторных решеток. Основополагающая теорема Е. И. Гордона показала, что элементы дедекиндово полных векторных решеток служат изображениями вещественных чисел в подходящим образом подобранной нестандартной модели теории множеств. Тем самым получил строгое обоснование эвристический принцип Канторовича, состоящий в том, что элементы векторных решеток суть обобщенные числа.

Некоторые итоги развития теории векторных решеток в семидесятые и восьмидесятые годы подведены в монографии [5], опубликованной в 1992 году Сибирским отделением издательства «Наука» и переизданной в расширенном виде в 1996 году издательством Kluwer Academic Publishers на английском языке [6]. В названных изданиях, в частности, были впервые намечены контуры новых синтетических подходов к теории векторных решеток на основе широкого использования современных нестандартных методов анализа. Цель настоящей монографии — представить результаты, полученные на новых путях в последнее десятилетие.

Монография составлена из пяти глав, тесно связанных между собой кругом рассматриваемых вопросов и общей методологией. Для удобства читателя изложение ведется так, чтобы главы можно было изучать независимо друг от друга. Для этого, в частности, каждая глава снабжена соответствующим введением и собственным списком литературы. В то же время предметный указатель и указатель обозначений едины для всей книги и размещены в ее конце.

Глава 1 дает общее введение в нестандартные методы анализа, используемые в теории векторных решеток. В этой связи знакомство с ее первыми параграфами полезно читателю, независимо от его дальнейших намерений по изучению книги. Эта глава содержит значительный набор разнообразных приложений, среди которых следует выделить комбинирование нестандартных моделей и приложения к теории циклически компактных операторов. Глава 1 написана А. Г. Кусраевым и С. С. Кутателадзе.

Главы 2 и 3 относятся к булевозначному анализу. В первой из них исследуется новое понятие непрерывного поливерсума, представляющего собой непрерывное расслоение моделей теории множеств. Класс непрерывных сечений такого поливерсума удовлетворяет всем основным принципам булевозначного анализа. Более того, любая из подобных булевозначных алгебраических систем реализуется как класс сечений подходящего непрерывного поливерсума. Глава 2 подготовлена А. Е. Гутманом в соавторстве с Г. А. Лосенковым.

В главе 3 предлагается новый подход к определению сопряженного расслоения, мотивированный изучением реализаций сопряженных банаховых пространств в булевозначных моделях. Глава 3 написана А. Е. Гутманом в соавторстве с А. В. Коптевым.

Глава 4 написана Э. Ю. Емельяновым и посвящена, главным образом, адаптации методов инфинитезимального анализа к исследованию внутренних вопросов теории векторных решеток. Наряду с этим здесь проясняются некоторые далеко не очевидные свойства бесконечномерных аналогов операции взятия стандартной части конечного вещественного числа.

Глава 5 написана А. Г. Кусраевым и С. А. Малюгиным и относится к теории векторных мер. Как известно, изучение мер со значениями в банаховом пространстве ведется иными средствами, чем исследование булевозначных мер. Основное место в главе уделено изложению принципиально нового единого подхода к указанным направлениям в теории меры, основанного на концепции решеточно нормированного пространства. Полезно подчеркнуть, что локально выпуклые пространства и векторные решетки представляют собой частные случаи решеточно нормированных пространств. Важно также, что такие пространства часто возникают как изображения банаховых пространств в булевозначных моделях.

Из отдельных приложений этой главы отметим критерий интегральной представимости мажорируемого оператора квазирадоновой мерой, новый вариант теоремы Фубини и анализ вариантов проблемы моментов Хаусдорфа и проблемы моментов Гамбургера.

Авторы и редактор старались обеспечить должное единство стиля и уровня изложения, стремясь избежать ненужных повторов и длиннот. Как обычно, идеал остался недостижим. Вина за этот и иные недочеты книги лежит только на редакторе.

С. Кутателадзе

Литература

1. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.—344 с.

2. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard Methods of Analysis. —Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1994.—435 pp.

3. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Булевозначный анализ.—Новосибирск: Изд.-во Института математики, 1999.—384 с.

4. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Boolean Valued Analysis.—Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1999.—322 pp.

5. Векторные решетки и интегральные операторы/Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М. —Новосибирск: Наука, 1992.—214 с.

6. Kutateladze S. S. (ed.) Vector Lattices and Integral Operators.—Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1996.—462 pp.

Глава 1

Нестандартные методы и пространства Канторовича

А. Г. Кусраев,
С. С. Кутателадзе

Общепризнанным фактом является особая роль тридцатых годов двадцатого столетия в развитии современной науки. В эти годы проявилась наметившаяся на рубеже веков тенденция к коренной перестройке математики, приведшая к созданию ряда новых математических дисциплин и, прежде всего, оформлению функционального анализа. В последнее время стало осознаваться и специфическое место семидесятых годов, в которые произошли существенные перемены как в объеме, так и в существе математических теорий. В указанный период отмечается качественный скачок в уровне понимания взаимосвязей и взаимозависимостей, связанный как с выработкой новых синтетических подходов, так и с решением глубоких проблем, долго неподдававшихся решению.

Упомянутые процессы коснулись и теории упорядоченных векторных пространств — одного из актуальных и привлекательных разделов функционального анализа. Это направление, возникшее на рубеже тридцатых годов под влиянием работ Ф. Рисса, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др., переживает сейчас известный период обновления, связанный с освоением математических идей, относящихся к нестандартным моделям теории множеств.

Булевозначные интерпретации, приобретшие значительную популярность в связи с окончательным решением проблемы континуума, данным П. Дж. Коэном, открыли новые возможности в реализации эвристического принципа переноса Л. В. Канторовича в теории K-пространств.

Возрождение инфинитезимальных методов, легитимизированное нестандартным анализом А. Робинсона, обосновало логическую мечту Г. В. Лейбница и открыло перспективы общей монадологии векторных решеток. Новые нестандартные методы в теории K-пространств находятся в процессе становления.

Расширяя известные строки Н. С. Гумилёва [17, с. 309], можно сказать, что в настоящее время K-пространства «...сбрасывают кожи, чтоб душа старела и росла...». Многие возникающие лакуны еще не заполнены и не только в связи с отсутствием должного понимания, но и просто из-за недолгого периода разработки соответствующих проблем. В то же время ряд принципиальных вопросов все еще ждет своего осмысления и привлечения новых идей.

В этой главе представлены необходимые сведения как по адаптации, так и по применению аппарата нестандартных моделей теории множеств к изучению K-пространств и классов действующих в них линейных операторов.

В параграфах 1.1–1.4 собраны необходимые для дальнейшего сведения о формальных теориях множеств, используемых в современных работах по функциональному анализу.

Прежде всего речь идет о классической аксиоматике Цермело — Френкеля. Помимо этого, освещены булевозначные модели, восходящие к работам Д. Скотта, Р. Соловея и П. Вопенки. Кроме того, представлены теория внутренних множеств Э. Нельсона и один из наиболее сильных и удачных вариантов теории внешних множеств, предложенный Т. Каваи. Эти теоретико-множественные формализмы широко применяются в современном инфинитезимальном анализе. Наконец, эскизно излагается теория относительно внутренних множеств Е. И. Гордона и И. Пэрера.

Параграфы 1.5–1.8 посвящены булевозначному анализу векторных решеток. Как известно, принципиально новая — нестандартная — возможность, открытая в теории упорядоченных пространств, состоит в формализации *эвристического принципа Л. В. Канторовича*, состоящего в том, что элементы произвольного K-пространства — это аналоги вещественных чисел. Булевозначный анализ строго показывает, что точки K-пространства служат изображениями чисел в подходящим образом выбранной модели теории множеств. Излагаемый нами формализм относится сейчас к числу фундаментальных и обязательных концепций теории упорядоченных пространств.

Параграфы 1.9–1.12 посвящены инфинитезимальным конструкциям. Апология инфинитезимали, данная А. Робинсоном, немедленно открыла новые возможности в теории банаховых пространств. Центральной конструкцией здесь стало понятие *нестандартной оболочки* пространства, т. е. результата факторизации внешнего подпространства элементов с конечной нормой по монаде пространства (= набору элементов с бесконечно малой нормой). Об адаптации нестандартных оболочек к теории решеток идет речь в параграфе 1.9. Другая важная конструкция нестандартного анализа — мера Лёба — рассмотрена в параграфе 1.10.

Параграфы 1.11 и 1.12 посвящены мало разработанной теме о комбинировании булевозначных и инфинитезимальных методов.

Теоретически здесь мыслимы два подхода. Первый может состоять в изучении булевозначной модели, реализованной во внутреннем мире теории внешних множеств. Этот подход намечен в параграфе 1.11. Другой подход состоит в изучении подходящего фрагмента нестандартной теории множеств (например, в форме ультрапроизведения или ультрапредела), размещенного внутри соответствующего булевозначного универсума. Такой подход изложен в параграфе 1.12.

Важно подчеркнуть, что при внешней схожести рассматриваемые формализмы приводят к принципиально различным конструкциям в теории K-пространств. Возникающие особенности аппарата иллюстрируются анализом «циклических» топологических понятий, имеющих важное значение в прикладном булевозначном анализе.

Параграфы 1.13–1.16 посвящены нестандартному анализу в теории операторов. Прежде всего, мы обращаемся к положительным линейным операторам, относящимся к центральным объектам теории упорядоченных векторных пространств. Принципиальная возможность, доставляемая нестандартными методами, состоит в том, что возникающие формализмы позволяют существенно упростить анализ операторов и векторных мер, сводя дело к функционалам и скалярным мерам, а иногда даже и к обыкновенным числам.

В параграфах 1.13–1.16 общие приемы нестандартного анализа операторов демонстрируются в связи с проблемами продолжения и разложения операторов, с анализом устройства гомоморфизмов и операторов Магарам. Мы также выделяем новый класс циклически компактных операторов. Известное место отведено проблеме порождения осколков положительного оператора. Дело в том, что осуществить их полное описание удается последовательным использованием нестандартного анализа как в булевозначном, так и в инфинитезимальном вариантах. Завершает текущую главу булевозначный анализ одного из важнейших фактов классической теории уравнений — альтернативы Фредгольма. Мы приводим ее интерпретацию для нового класса уравнений с циклически компактными ядрами.

1.1. Теория множеств Цермело — Френкеля

В качестве аксиоматического обоснования математики в настоящее время широко используется теория множеств Цермело — Френкеля, сокращенно ZF. Напомним вкратце некоторые ее понятия и введем необходимые обозначения. Подробности можно найти в [18, 25].

1.1.1. Язык теории множеств ZF использует следующие символы (совокупность которых называют *алфавитом* ZF): символы переменных $x, y, z, \ldots$; скобки (,); пропозициональные связки (= знаки алгебры высказываний) $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\neg$; кванторы $\forall$, $\exists$; знак равенства $=$ и символ специального двуместного предиката $\in$. Область изменения переменных ZF мыслят как мир — универсум множеств. Вместо $\in(x, y)$ пишут $x \in y$ и говорят, что «x — элемент y».

1.1.2. Формулы теории множеств ZF определяются обычной рекурсивной процедурой. Иначе говоря, *формулы* ZF — это конечные тексты, получающиеся из атомарных формул вида $x = y$ и $x \in y$, где x, y — переменные ZF, с помощью разумной расстановки скобок, кванторов и пропозициональных связок. При этом теория множеств ZF — это наименьшее множество формул, содержащее аксиомы ZF и замкнутое относительно правил вывода (см. ниже 1.1.4).

1.1.3. При работе с ZF для удобства привлекаются широко распространенные в математике сокращения. Вот некоторые из них:

$$
\begin{gathered}
(\forall x \in y)\, \varphi(x) := (\forall x)\, (x \in y \to \varphi(x));\\
(\exists x \in y)\, \varphi(x) := (\exists x)\, (x \in y \wedge \varphi(x));\\
\bigcup x := \{z :\ (\exists y \in x)\, z \in y\};\\
\bigcap x := \{z :\ (\forall y \in x)\, z \in y\};\\
x \subset y := (\forall z)\, (z \in x \to z \in y);\\
\mathscr{P}(x) := \text{«класс всех подмножеств } x\text{»} := \{z : z \subset x\};\\
\mathbb{V} := \text{«класс всех множеств»} := \{\varkappa :\ \varkappa = \varkappa\};\\
\text{«класс } A \text{ является множеством»} :=\\
:= A \in \mathbb{V} := (\exists x)\, (\forall y)\, (y \in A \leftrightarrow y \in x);
\end{gathered}
$$

$$f : X \to Y := \text{«}f \text{ есть функция из } X \text{ в } Y\text{»};$$
$$\mathrm{dom}(f) := \text{«область определения } f\text{»};$$
$$\mathrm{im}(f) := \mathrm{rng}(f) := \text{«область значения } f\text{»}.$$

1.1.4. Теория множеств ZF включает обычные аксиомы и правила вывода теорий первого порядка с равенством, фиксирующие стандартные способы классических умозаключений (силлогизмы, исключенное третье, modus ponens и т. п.). Помимо этого, приняты шесть специальных или собственных аксиом (записанные с общепринятыми сокращениями, см. 1.1.3):

(1) Аксиома экстенсиональности:
$(\forall x)\,(\forall y)\,((x \subset y \wedge y \subset x) \leftrightarrow x = y)$.

(2) Аксиома объединения:
$(\forall x)\,(\bigcup x \in \mathbb{V})$.

(3) Аксиома множества подмножеств:
$(\forall x)\,\big(\mathscr{P}(x) \in \mathbb{V}\big)$.

(4) Схема аксиом подстановки:
$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \to y = z) \to$
$\to (\forall a)\,(\{v : (\exists u \in a)\,\varphi(u, v)\} \in \mathbb{V})$.

(5) Аксиома фундирования:
$(\forall x)\,(x \neq \varnothing \ \to\ (\exists y \in x)\,(y \cap x = \varnothing))$.

(6) Аксиома бесконечности:
$(\exists \omega)\,((\varnothing \in \omega) \wedge (\forall x \in \omega)\,\big(x \cup \{x\} \in \omega)\big)$.

Теория множеств ZFC (Цермело — Френкеля с аксиомой выбора) получается из ZF добавлением еще следующей аксиомы:

(7) Аксиома выбора:
$(\forall F)\,(\forall x)\,(\forall y)\,\big((x \neq \varnothing \wedge F : x \to \mathscr{P}(y)\big) \to$
$\to \big((\exists f)\,(f : x \to y) \wedge (\forall z \in x)\,f(z) \in F(z)\big)$.

1.1.5. *Теория множеств Цермело* Z получается из ZFC путем удаления аксиомы фундирования 1.1.4 (5) и замены схемы аксиом подстановки 1.1.4 (4) следующими ее следствиями:

(1) Схема аксиом выделения:
$(\forall x)\,\{y \in x :\ \psi(y)\} \in \mathbb{V}$,
где ψ — формула ZF;

(2) Аксиома пары:
$(\forall x)\,(\forall y)\{x, y\} \in \mathbb{V}$.

Тем самым специальные аксиомы теории Z — аксиомы 1.1.4 (1–3, 6, 7), 1.1.5 (1, 2).

Итак, теории Z, ZF и ZFC имеют один и тот же язык, одни и те же логические аксиомы и отличаются лишь набором специальных аксиом.

1.1.6. Примечания.

(1) Теория множеств Цермело — Френкеля несколько ограничивает математика-«филистера» аксиомой фундирования, по сути, предложенной Дж. фон Нейманом в 1925 г. В то же время именно она обеспечивает фундамент общепринятого теоретико-множественного взгляда на мир множеств как на «универсум фон Неймана», иерархически вырастающий из пустого множества — математического проатома.

(2) Аксиоматика Цермело — Френкеля не закрыла пути поиска альтернативных программ теоретико-множественного обоснования. По этому поводу см., в частности, [6].

1.2. Булевозначные модели теории множеств

Здесь мы эскизно изложим способ построения булевозначных моделей теории множеств. Полное изложение имеется в [38, 63, 115].

1.2.1. Пусть B — фиксированная полная булева алгебра. Булевозначной интерпретацией n-местного предиката P на классе X называют отображение $R : X^n \to B$. Предположим, что $\mathscr{L}$ — язык первого порядка с предикатами $P_0, P_1, \dots, P_n$, а $R_0, R_1, \dots, R_n$ — фиксированные булевозначные интерпретации этих предикатов на класс X. Для формулы $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ языка $\mathscr{L}$ и $x_1, \dots, x_m \in X$ обычной рекурсией по длине φ определяется оценка (истинности) $[\![\, \varphi(x_1, \dots, x_m) \,]\!] \in B$. Для атомных формул полагают

$$[\![\, P_k(x_1, \dots, x_m) \,]\!] := R_k(x_1, \dots, x_m).$$

На шагах индукции применяют правила:

$$[\![\, \varphi \vee \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \vee [\![\, \psi \,]\!],$$

$$[\![\, \varphi \wedge \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \wedge [\![\, \psi \,]\!],$$

$$[\![\, \varphi \to \psi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!] \Rightarrow [\![\, \psi \,]\!],$$

$$[\![\, \neg\varphi \,]\!] := [\![\, \varphi \,]\!]^*,$$

$$[\![(\forall x)\,\varphi]\!] := \bigwedge_{x \in X} [\![\varphi(x)]\!],$$

$$[\![(\exists x)\,\varphi]\!] := \bigvee_{x \in X} [\![\varphi(x)]\!],$$

где в правых частях равенств знаки $\vee, \wedge, \Rightarrow, (\,\cdot\,)^*, \bigvee, \bigwedge$ обозначают булевы операции в B, причем $a \Rightarrow b := a^* \vee b$.

1.2.2. Говорят, что утверждение $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, где $x_1, \dots, x_m \in X$, а $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ — формула, истинно (верно, справедливо и т. п.) в алгебраической системе $\mathbb{X} := (X, R_0, \dots, R_n)$, и используют запись $\mathbb{X} \models \varphi(x_1, \dots, x_m)$, если $[\![\varphi(x_1, \dots, x_m)]\!] = \mathbb{1}$. Все логически истинные утверждения верны в $\mathbb{X}$. Если предикат P_0 есть равенство, то требуют, чтобы в B-системе $\mathbb{X} := (X, =, R_1, \dots, R_n)$ выполнялись аксиомы равенства. При выполнении этого требования в B-системе $\mathbb{X}$ будут справедливы все логически истинные предложения логики первого порядка с равенством, выразимые в языке $\mathscr{L} := \{=, P_1, \dots, P_n\}$.

1.2.3. Рассмотрим теперь булевозначную интерпретацию языка теории множеств Цермело — Френкеля с аксиомой выбора на классе X. Напомним, что язык этой теории $\mathscr{L} := \{=, \in\}$ есть язык первого порядка с двумя двуместными предикатами $=$ и $\in$. Интерпретации этих предикатов обозначим через $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$, соответственно. Таким образом, $[\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!] : X \times X \to B$, причем

$$[\![= (x, y)]\!] = [\![x = y]\!], \quad [\![\in (x, y)]\!] = [\![x \in y]\!] \quad (x, y \in X).$$

Наша ближайшая цель — охарактеризовать B-системы $\mathbb{X} := (X, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$, являющиеся моделями теории ZFC, т. е. такие, что $\mathbb{X} \models \mathrm{ZFC}$. Последнее равносильно тому, что в $\mathbb{X}$ выполняются все аксиомы ZFC. Так, например, согласно правилам 1.1.1 справедливость аксиомы экстенсиональности 1.1.4 (1) означает, что для любых $x, y \in X$ верно

$$[\![x = y]\!] = \bigwedge_{z \in X} ([\![z \in x]\!] \Leftrightarrow [\![z \in y]\!]),$$

где $a \Leftrightarrow b := (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ для $a, b \in B$.

1.2.4. B-систему $\mathbb{X}$ называют отделимой, если для любых элементов $x, y \in X$ соотношение $[\![x = y]\!] = \mathbb{1}$ влечет $x = y$. Произвольную B-систему $\mathbb{X}$ можно преобразовать в отделимую путем факторизации по отношению эквивалентности $\sim := \{(x, y) \in X^2 : [\![x = y]\!] = \mathbb{1}\}$ (фактор-класс вводится с помощью хорошо известного приема Фреге — Рассела — Скотта, см. [38]).

Говорят, что B-система $\mathbb{X}$ изоморфна $\mathbb{X}' := (X', [\![\cdot = \cdot]\!]', [\![\cdot \in \cdot]\!]')$, если существует биекция $\beta : X \to X'$, для которой $[\![x = y]\!] = [\![\beta x = \beta y]\!]$ и $[\![x \in y]\!] = [\![\beta x \in \beta y]\!]$ при всех $x, y \in X$.

1.2.5. *Теорема.* *Существует единственная с точностью до изоморфизма B-система $\mathbb{X}$, удовлетворяющая следующим требованиям:*

(1) *$\mathbb{X}$ — отделимая B-система (см. 1.1.4);*

(2) *аксиомы равенства истинны в $\mathbb{X}$;*

(3) *аксиомы экстенсиональности 1.1.4 (1) и фундирования 1.1.4 (5) истинны в $\mathbb{X}$ (см. 1.1.3);*

(4) *если функция $f : \operatorname{dom}(f) \to B$ такова, что $\operatorname{dom}(f) \in \mathbb{V}$ и $\operatorname{dom}(f) \subset \mathbb{X}$, то существует $x \in \mathbb{X}$ такой, что*

$$[\![y \in x]\!] = \bigvee_{z \in \operatorname{dom}(f)} f(z) \wedge [\![z = y]\!] \quad (y \in \mathbb{X});$$

(5) *если $x \in \mathbb{X}$, то существует функция $f : \operatorname{dom}(f) \to B$ такая, что $\operatorname{dom}(f) \in \mathbb{V}$, $\operatorname{dom}(f) \subset \mathbb{X}$, и выполнено равенство из (4) для каждого $y \in \mathbb{X}$.*

1.2.6. B-систему, удовлетворяющую требованиям 1.1.5 (1–5), называют *булевозначной моделью* теории множеств и обозначают символом $\mathbb{V}^{(B)} := (\mathbb{V}^{(B)}, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$. Класс $\mathbb{V}^{(B)}$ именуют также *булевозначным универсумом.* Основные свойства $\mathbb{V}^{(B)}$ выражены в следующих принципах.

(1) ***Принцип переноса.*** *Любая аксиома, а значит, и любая теорема теории множеств* ZFC *истинны в $\mathbb{V}^{(B)}$; символически $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathrm{ZFC}$.*

(2) ***Принцип перемешивания.*** *Если $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — разбиение единицы в B, $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство элементов $\mathbb{V}^{(B)}$, то существует единственный элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $b_\xi \leq [\![x = x_\xi]\!]$ для всех $\xi \in \Xi$.*

Элемент x называют *перемешиванием семейства* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *относительно* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и обозначают $\mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}\, b_\xi x_\xi$.

(3) ***Принцип максимума.*** *Для любой формулы* $\varphi(u)$ *теории* ZFC *(возможно, с константами из* $\mathbb{V}^{(B)}$*) существует элемент* $x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}$ *такой, что*

$$[\![\,(\exists u)\varphi(u)\,]\!] = [\![\,\varphi(x_0)\,]\!].$$

Отсюда, в частности, следует, что если $[\![\,(\exists! x)\,\varphi(x)\,]\!] = \mathbb{1}$, то существует, и притом единственный, элемент x_0 из $\mathbb{V}^{(B)}$, для которого выполняется $[\![\,\varphi(x_0)]\!] = \mathbb{1}$.

1.2.7. *Существует единственное отображение* $x \mapsto x^\wedge$ *из* $\mathbb{V}$ *в* $\mathbb{V}^{(B)}$*, удовлетворяющее требованиям:*

(1) $x = y \;\leftrightarrow\; [\![\,x^\wedge = y^\wedge]\!] = \mathbb{1}$;
$x \in y \;\leftrightarrow\; [\![\,x^\wedge \in y^\wedge]\!] = \mathbb{1} \quad (x, y \in \mathbb{V})$,

(2) $[\![\,z \in y^\wedge]\!] = \bigvee_{x\in y}[\![\,x^\wedge = z\,]\!] \quad (z \in \mathbb{V}^{(B)},\ y \in \mathbb{V})$.

Это отображение называют *каноническим вложением* универсума всех множеств в булевозначный универсум.

(3) ***Ограниченный принцип переноса.*** *Пусть формула* $\varphi(u_1,\dots,u_n)$ *ограничена, т. е. в ее построении все кванторы имеют вид* $(\forall u)\,(u \in v \to \dots)$ *и* $(\exists u)\,(u \in v \wedge \dots)$*, или же в сокращенной записи* $(\forall u \in v)$ *и* $(\exists u \in v)$*. Тогда для произвольных* $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{V}$ *выполняется*

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) \;\leftrightarrow\; \mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_1^\wedge,\dots,x_n^\wedge).$$

1.2.8. Для элемента $X \in \mathbb{V}^{(B)}$ его *спуск* $X{\downarrow}$ задается правилом $X{\downarrow} := \{x \in \mathbb{V}^{(B)} : [\![\,x \in X\,]\!] = \mathbb{1}\}$. Множество $X{\downarrow}$ является *циклическим*, т. е. выдерживает всевозможные перемешивания своих элементов.

1.2.9. *Пусть* F *— соответствие из* X *в* Y *внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$*, т. е.* $X, Y, F \in \mathbb{V}^{(B)}$ *и* $[\![\,F \subset X \times Y\,]\!] = [\![\,F \neq \varnothing\,]\!] = \mathbb{1}$*. Существует, и притом единственное, соответствие* $F{\downarrow}$ *из* $X{\downarrow}$ *в* $Y{\downarrow}$ *такое, что для любого множества* $A \subset X{\downarrow}$ *внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *будет* $F(A){\downarrow} = F{\downarrow}(A{\downarrow})$*. При этом* $[\![\,F$ *— отображение из* X *в* $Y\,]\!] = \mathbb{1}$ *в том и только в том случае, если* $F{\downarrow}$ *— отображение из* $X{\downarrow}$ *в* $Y{\downarrow}$*.*

В частности, отображение $f : Z^{\wedge} \to Y$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, где $Z \in \mathbb{V}$, определяет единственную функцию $f{\downarrow} : Z \to Y{\downarrow}$, удовлетворяющую условию $f{\downarrow}(z) = f(z^{\wedge})$ для всех $z \in Z$.

1.2.10. Пусть $X \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})})$. Определим функцию $f : \operatorname{dom}(f) \to B$ формулами: $\operatorname{dom}(f) = X$ и $\operatorname{im}(f) = \{\mathbb{1}\}$. Согласно 1.1.5 (4) существует элемент $X{\uparrow} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ такой, что

$$[\![\, y \in X \,]\!] = \bigvee_{x \in X} [\![\, x = y \,]\!] \quad (y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}).$$

Элемент $X{\uparrow}$ (единственный в силу аксиомы экстенсиональности) называют *подъемом* X. При этом справедливы формулы:

(1) $Y{\downarrow}{\uparrow} = Y \quad (Y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})})$,

(2) $X{\uparrow}{\downarrow} = \operatorname{mix}(X) \quad (X \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}))$,

где $\operatorname{mix}(X)$ — множество всех перемешиваний вида $\operatorname{mix} b_\xi x_\xi$, $(x_\xi) \subset X$, а (b_ξ) — разбиение единицы в B.

1.2.11. *Пусть $X, Y \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})})$ и F — соответствие из X в Y. Равносильны утверждения:*

(1) *существует, и притом единственное, соответствие $F{\uparrow}$ из $X{\uparrow}$ в $Y{\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ такое, что имеет место равенство $\operatorname{dom}(F{\uparrow}) = \operatorname{dom}(F){\uparrow}$ и для каждого подмножества A множества $\operatorname{dom}(F)$ выполнено*

$$F{\uparrow}(A{\uparrow}) = F(A){\uparrow};$$

(2) *соответствие F экстенсионально, т. е.*

$$y_1 \in F(x_1) \to [\![\, x_1 = x_2 \,]\!] \leq \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![\, y_1 = y_2 \,]\!].$$

Соответствие F будет отображением из X в Y в том и только в том случае, если $[\![\, F{\uparrow} : X{\uparrow} \to Y{\uparrow} \,]\!] = \mathbb{1}$.

В частности, отображение $f : Z \to Y{\downarrow}$ порождает функцию $f{\uparrow} : Z^{\wedge} \to Y$ такую, что $f{\uparrow}(x^{\wedge}) = f(x)$ для всех $x \in Z$.

1.2.12. Предположим, что на непустом множестве X задана B-*структура*, т. е. определено отображение $d : X \times X \to B$, удовлетворяющее «аксиомам метрики»:

(1) $d(x,y) = \mathbb{0} \leftrightarrow x = y$;

(2) $d(x,y) = d(y,x)$;

(3) $d(x,y) \le d(x,z) \vee d(z,y)$.

Тогда существуют элемент $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и инъекция $\iota : X \to X' := \mathscr{X}{\downarrow}$ такие, что $d(x,y) = [\![\, \iota(x) \ne \iota(y) \,]\!]$ и любой элемент $x' \in X'$ имеет представление $x' = \operatorname{mix} b_\xi \iota x_\xi$, где $(x_\xi) \subset X$, а (b_ξ) — разбиение единицы в B. Этот факт позволяет рассматривать множества с B-структурой как подмножества $\mathbb{V}^{(B)}$ и оперировать с ними с помощью описанных выше правил.

1.2.13. Примечания.

(1) Г. Такеути назвал булевозначным анализом раздел функционального анализа, который использует одноименные модели теории множеств. В последнее время этот термин трактуют расширительно, включая в него методы, основанные на одновременном использовании двух различных булевозначных моделей теории множеств.

Стоит подчеркнуть, что создание булевозначных моделей не было связано с теорией векторных решеток. Необходимые для этого языковые и технические средства окончательно сформировались в рамках математической логики уже к 1960 г. Однако все еще не было той генеральной идеи, которая впоследствии привела к бурному прогрессу в теории моделей.

Такая идея пришла с открытием П. Дж. Коэна, установившего в 1963 г. абсолютную неразрешимость (в точном математическом смысле) классической континуум-проблемы. Именно в связи с осмыслением метода форсинга Коэна возникли булевозначные модели теории множеств, создание которых принято связывать с именами П. Вопенки,Д. Скотта, Р. Соловея (см. [18, 25, 38, 63, 115]).

(2) Метод форсинга естественно делится на две части — общую и специальную.

Общая часть — аппарат булевозначных моделей теории множеств. Здесь полная булева алгебра B совершенно произвольна.

Специальная часть состоит в построении специфической булевой алгебры B, обеспечивающей нужные (чаще патологические, экзотические) свойства объектов (например, K-пространства), получаемых из B. Обе части имеют самостоятельный интерес, но наиболее впечатляющие результаты дает их сочетание. В большинстве исследований по булевозначному анализу используется лишь общая часть метода форсинга. Можно ожидать, что дальнейший прогресс в булевозначном анализе будет связан с применением метода форсинга в полном объеме.

(3) Подробное изложение материала этого раздела имеется в [29, 36, 38, 63, 115], см. также [18, 56]. Приемы, изложенные в 1.2.8–1.2.11, в разных вариантах широко используются в исследованиях по теории булевозначных моделей. В [28, 48] им придана форма спусков и подъемов, более приспособленная к задачам анализа. Погружение 1.2.12 множеств с булевой структурой в булевозначный универсум осуществлено в [23]. В основе такого погружения лежит метод Соловея — Тенненбаума, предложенный ими ранее для погружения полных булевых алгебр [72].

1.3. Теории внутренних и внешних множеств

Удобное обоснование инфинитезимальных методов анализа дает теория внутренних множеств, предложенная Э. Нельсоном в конце семидесятых годов, теория IST. Формализм этой теории мгновенно приобрел широкую популярность. Причина этого в том, что подход Э. Нельсона развеял бытовавшие до него представления об особом «идеальном» характере актуальных бесконечно больших и малых величинах.

1.3.1. Алфавит формальной теории IST получается добавлением к алфавиту теории ZFC одного-единственного нового символа — символа одноместного предиката St, выражающего свойство быть *стандартным множеством.* Иначе говоря, в число допустимых фрагментов текстов IST мы включаем записи вида $\mathrm{St}(x)$ или, более развернуто, «x стандартно», или, наконец, «x — стандартное множество». Итак, содержательной областью изменения переменных IST служит мир Цермело — Френкеля — универсум фон Неймана, в котором теперь выделены стандартные и нестандартные множества.

Формулы IST определяются обычной процедурой. При этом к числу атомарных формул добавляются тексты: $\mathrm{St}(x)$, где x — переменная. Каждая формула ZFC является формулой IST, обратное утверждение очевидно не верно. Для различения формул используют следующую терминологию: формулы ZFC называют *внутренними*, формулы IST, не являющиеся формулами ZFC, называют *внешними.* Таким образом, текст «x стандартно» — это внешняя формула теории IST.

Классификация формул IST приводит к вычленению внешних и внутренних классов. Если φ — внешняя формула IST, то текст $\varphi(y)$ описывают словами: «y — элемент *внешнего класса* $\{x : \varphi(x)\}$». Термин *внутренний класс* используется в том же смысле, что термин *класс* в теории Цермело — Френкеля. В случаях, когда это не может привести к недоразумениям, внешние и внутренние классы называют просто классами. Внешние классы, составленные из элементов некоторого внутреннего множества, мы называем *внешними множествами*, или, более полно, внешними подмножествами данного множества.

Полезно вновь обратить внимание на то, что внутренний класс, составленный из элементов внутреннего множества, — это снова внутреннее множество. Помимо сокращений, принятых в ZFC, в теории внутренних множеств используются дополнительные соглашения.

Вот некоторые из них:

$$x \in \mathbb{V}^{\mathrm{st}} := \mathbb{x} \text{ стандартно} := (\exists\, \mathbb{y})\ \mathrm{St}(\mathbb{y}) \wedge \mathbb{y} = \mathbb{x};$$
$$(\forall^{\mathrm{st}} x)\, \varphi := (\forall\, x)\, (x \text{ стандартно} \to \varphi);$$
$$(\exists^{\mathrm{st}} x)\, \varphi := (\exists\, x)\, (x \text{ стандартно} \wedge \varphi);$$
$$(\forall^{\mathrm{st\,fin}} x)\, \varphi := (\forall^{\mathrm{st}} x)\, (x \text{ конечно} \to \varphi);$$
$$(\exists^{\mathrm{st\,fin}} x)\, \varphi := (\exists^{\mathrm{st}} x)\, (x \text{ конечно} \wedge \varphi);$$
$$^{\circ}x := \{y \in x :\ y \text{ стандартно}\}.$$

Внешнее множество $^{\circ}x$ часто называют *стандартным ядром* x.

1.3.2. Аксиомы IST получаются добавлением к перечню аксиом ZFC следующих трех новых схем, носящих, как указывалось ранее, название принципов нестандартной теории множеств:

(1) Принцип переноса:
$(\forall^{\mathrm{st}} x_1)\, (\forall^{\mathrm{st}} x_2) \ldots (\forall^{\mathrm{st}} x_n)\, ((\forall^{\mathrm{st}} x)\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to$
$\to (\forall\, x)\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n))$
для каждой внутренней формулы φ;

(2) Принцип идеализации:
$(\forall\, x_1)\, (\forall\, x_2)\ \ldots (\forall\, x_n)$
$((\forall^{\mathrm{st\,fin}} z)\, (\exists\, x)\, (\forall\, y \in z)\, \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists\, x)\, (\forall^{\mathrm{st}} y)\, \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)),$
где φ — произвольная внутренняя формула;

(3) Принцип стандартизации:
$(\forall\, x_1)\dots(\forall\, x_n)$
$\big((\forall^{\mathrm{st}} x)\,(\exists^{\mathrm{st}} y)\,(\forall^{\mathrm{st}} z) z\in y \leftrightarrow z\in x\wedge\varphi(z,x_1,\dots,x_n)\big)$
для всякой формулы φ.

1.3.3. *Теорема Поуэлла.* *Теория* IST *является консервативным расширением теории* ZFC.

Приведенная теорема означает, что внутренние теоремы теории внутренних множеств IST являются теоремами теории Цермело — Френкеля. Иначе говоря, при доказательстве «стандартных» теорем о множествах из универсума фон Неймана мы вправе пользоваться формализмом IST с той же степенью надежности, которую мы имеем при работе в рамках теории ZFC.

1.3.4. Выразительные возможности, которыми обладает аксиоматическая теория множеств IST, весьма значительны, но имеется все же существенное ограничение, связанное с отсутствием в ней переменных для внешних множеств. Этот недостаток не позволяет, например, работать с такими важными инфинитезимальными конструкциями, как нестандартная оболочка и мера Лёба.

В настоящее время имеется несколько вариантов формального обоснования инфинитезимальных методов в рамках аксиоматических теорий внешних множеств, см. [62, 68, 76, 86, 87]. С точки зрения приложений все эти формализмы практически равнозначны. Здесь мы приведем один из наиболее сильных вариантов теории внешних множеств NST, предложенный Т. Каваи [86, 87].

Алфавит теории NST получается обогащением алфавита ZFC двумя постоянными $\mathbb{V}^S$ и $\mathbb{V}^I$. Содержательно $\mathbb{V}^S$ мыслят как *универсум стандартных множеств*, а $\mathbb{V}^I$ — как *мир внутренних множеств* (в любой содержательной интерпретации).

При этом стоит подчеркнуть, что $\mathbb{V}^S$ и $\mathbb{V}^I$ рассматриваются как конкретные внешние множества, т. е. $\mathbb{V}^S\in\mathbb{V}^{\mathbb{E}}$ и $\mathbb{V}^I\in\mathbb{V}^{\mathbb{E}}$, где $\mathbb{V}^E := \{x : x = x\}$ — *класс* всех *внешних множеств*. Иногда вместо $x\in\mathbb{V}^{\mathbb{S}}$ пишут $\mathrm{St}(x)$ или «x — стандартное множество». Аналогичным образом вводят предикат $\mathrm{Int}(\,\cdot\,)$, выражающий свойство быть внутренним множеством.

Обычным способом определяются формулы. При этом для формулы φ теории ZFC символом φ^S (соответственно φ^I) обозначается *релятивизация* φ на $\mathbb{V}^S$ (соответственно на $\mathbb{V}^I$), т. е. формула, получающаяся заменой всех переменных в φ на переменные, пробегающие стандартные (соответственно внутренние) множества.

Если φ — формула теории ZFC, то, рассматривая ее как формулу теории NST, иногда пишут φ^E и применяют термин *E-формула.* Аналогичный смысл вкладывают в понятия *S-формулы* и *I-формулы.*

Используют обычные сокращения типа $(\forall^{\mathrm{st}} x)\,\varphi := (\forall x \in \mathbb{V}^S)\,\varphi$; $(\exists^{\mathrm{Int}} x)\,\varphi := (\exists x \in \mathbb{V}^I)\,\varphi$; $\mathrm{fin}(x) := x$ конечно (= не имеет взаимно однозначного отображения на собственное подмножество) и т. п.

1.3.5. *Специальные аксиомы* NST делятся на три группы (так же обстоит дело и в иных вариантах теории внешних множеств). Первую группу составляют так называемые *правила образования внешних множеств.* Вторую — *аксиомы связи миров множеств* $\mathbb{V}^S$, $\mathbb{V}^I$ и $\mathbb{V}^E$. Наконец, в третью группу входят обычные *постулаты нестандартного анализа* — принципы переноса, идеализации и стандартизации.

1.3.6. Начнем с устройства универсума $\mathbb{V}^E$.

(1) Суперправило для образования внешних множеств: *если φ — аксиома* ZFC, *за исключением аксиомы фундирования, то φ^E — аксиома* NST.

Таким образом, в NST действуют аксиомы теории Цермело и выполнена схема аксиом подстановки. Более того, принимается

(2) Суженная аксиома фундирования:
$(\forall A)\,(A = \varnothing \vee A \cap \mathbb{V}^I = \varnothing) \to (\exists x \in A)\, x \cap A = \varnothing.$

Иными словами, регулярность постулируется у внешних множеств, не имеющих внутренних элементов.

Подчеркнем, что $\mathbb{V}^S \in \mathbb{V}^E$. Иначе говоря, выполнена обычная *аксиома приемлемости* в [38, 3.4.17].

Напомним в этой связи, что внешнее множество A имеет *приемлемый размер* (или *S-размер*), если существует некоторая внешняя функция, отображающая $\mathbb{V}^S$ на A. При этом пишут $A \in \mathbb{V}^{\mathrm{a-size}}$.

1.3.7. Вторая группа аксиом NST содержит следующие утверждения:

(1) принцип моделирования для мира стандартных множеств: $\mathbb{V}^S$ *— это универсум фон Неймана,* т. е. для каждой аксиомы φ теории ZFC стандартизация φ^S — аксиома NST;

(2) аксиома транзитивности для внутренних множеств: $(\forall x \in \mathbb{V}^I) x \subset \mathbb{V}^I$, т. е. внутренние множества составлены только из внутренних элементов;

(3) аксиома вложения: $\mathbb{V}^S \subset \mathbb{V}^I$, т. е. стандартные множества являются внутренними.

1.3.8. Третью группу постулатов NST составляют такие схемы аксиом:

(1) принцип переноса:
$(\forall^{\mathrm{st}} x_1) \dots (\forall^{\mathrm{st}} x_n) \varphi^S(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^I(x_1, \dots, x_n)$
для каждой формулы $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ теории ZFC;

(2) принцип стандартизации:
$(\forall A)\, (\exists^{\mathrm{st}\, t})\, ({}^\circ A \subset t) \to (\exists^{\mathrm{st}\, a})\, (\forall^{\mathrm{st}\, x})\, (x \in A \leftrightarrow x \in a)$,
где ${}^\circ A := A \cap \mathbb{V}^{\mathbb{S}}$ — *стандартное ядро* A.

Возникающее a, очевидно, единственно. Его обозначают ${}^*A$ и называют *стандартизацией* A.

(3) принцип идеализации (схема аксиом насыщения):
$(\forall^{\mathrm{Int}} x_1) \dots (\forall^{\mathrm{Int}} x_n)\, (\forall A \in \mathbb{V}^{\mathrm{a-size}})$
$\Big(\big((\forall \mathbb{z})\, \mathbb{z} \subset \mathbb{A} \wedge \mathrm{fin}^{\mathbb{E}}(\mathbb{z}) \to$
$\to (\exists^{\mathrm{Int}} \mathbb{x})\, (\forall \mathbb{y} \in \mathbb{z})\, \varphi^{\mathbb{I}}(\mathbb{x}, \mathbb{y}, \mathbb{x}_{\mathbb{1}}, \dots, \mathbb{x}_{\mathbb{n}}) \big) \to$
$\to (\exists^{\mathrm{Int}} \mathbb{x})\, (\forall^{\mathrm{Int}} \mathbb{y} \in \mathbb{A})\, \varphi^{\mathbb{I}}(\mathbb{x}, \mathbb{y}, \mathbb{x}_{\mathbb{1}}, \dots, \mathbb{x}_{\mathbb{n}}) \Big)$
для произвольной формулы $\varphi = \varphi(x, y, x_1, \dots, x_n)$ теории ZFC.

1.3.9. *Теорема Каваи.* *Теория* NST *является консервативным расширением теории* ZFC.

1.3.10. Как обычно, в $\mathbb{V}^E$ можно выделить универсум $\mathbb{V}^C$, составленный *классическими* (= стандартными или обычными в робинсоновском формализме) множествами, используя класс стандартных ординалов $\mathrm{On}^{\mathrm{St}}$. Именно,

$$\mathbb{V}^{\mathbb{C}}_\beta := \{\mathbb{x} : \ (\exists^{\mathrm{st}} \alpha \in \beta)\, \mathbb{x} \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{\mathbb{C}}_\alpha)\},$$
$$\mathbb{V}^C := \bigcup_{\beta \in \mathrm{On}^{\mathrm{St}}} \mathbb{V}^{\mathbb{C}}_\beta.$$

При этом возникает робинсоновская стандартизация $*: \mathbb{V}^C \to \mathbb{V}^{\mathbb{S}}$, определенная схемой рекурсии:

$$*\varnothing := \varnothing, \quad *A := {}^*\{*a : a \in A\}.$$

Робинсоновская стандартизация обеспечивает справедливость *принципа Лейбница* в форме

$$(\forall x_1 \in \mathbb{V}^{\mathbb{C}}) \dots (\forall \mathbb{x}_{\mathbb{n}} \in \mathbb{V}^{\mathbb{C}})\, \varphi^{\mathbb{C}}(\mathbb{x}_{\mathbb{1}}, \dots, \mathbb{x}_{\mathbb{n}}) \leftrightarrow \varphi^{\mathbb{S}}(\mathbb{x}_{\mathbb{1}}, \dots, \mathbb{x}_{\mathbb{n}})$$

для произвольной формулы $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ теории ZFC и ее релятивизаций φ^C и φ^S на $\mathbb{V}^{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{V}^{\mathbb{S}}$ соответственно.

1.3.11. Мир радикальной (и классической) установки нестандартного анализа также допускает аксиоматическое описание.

Опишем теорию UNST, проанализированную Т. Каваи. В UNST переменные изображают внешние множества. Имеются выделенные константы $\mathbb{V}^{\mathbb{C}}$, $\mathbb{V}^{\mathbb{I}}$ и $*$. Соответствующие внешние множества, естественно, называют *классическим миром, универсумом внутренних множеств* и *робинсоновской стандартизацией.* Специальные аксиомы UNST аналогичны NST.

1.3.12. Устройство универсума UNST определяют следующие постулаты:

(1) Суперправило образования внешних множеств
(аналогичное 1.3.3 (1));

(2) Суженная аксиома фундирования
(ср. 1.3.3 (2)).

1.3.13. Аксиомы связи миров множеств:

(1) Принцип моделирования для классических множеств:
мир $\mathbb{V}^{\mathbb{C}}$ — *это универсум фон Неймана*;

(2) Аксиома транзитивности для внутренних множеств
в форме 1.3.12 (2);

(3) Аксиома транзитивности для классических множеств:
$(\forall x \in \mathbb{V}^{\mathbb{C}})\, \mathbb{x} \subset \mathbb{V}^{\mathbb{C}}$

— классические множества составлены из классических элементов;

(4) Аксиома внешней сборки: *внешние подмножества классического множества являются классическими*;

(5) Аксиома робинсоновской стандартизации: $*$ *является (внешним) отображением* $\mathbb{V}^{\mathbb{C}}$ в $\mathbb{V}^{\mathbb{I}}$.

Очевидно, что в связи с 1.3.13 (5) существует единственное множество $\mathbb{V}^{\mathbb{S}}$, составленное из стандартизаций $\mathbb{V}^{\mathbb{S}} := *(\mathbb{V}^{\mathbb{C}})$. В UNST элементы $\mathbb{V}^{\mathbb{S}}$ называют *стандартными множествами.* По аналогии с 1.3.5 (2), говорят, что множество A имеет *классический размер* (или *c-размер*), если существует внешняя функция из $\mathbb{V}^{\mathbb{C}}$ на A. При этом пишут $A \in \mathbb{V}^{\mathrm{c-size}}$.

1.3.14. Постулаты нестандартного анализа в UNST имеют следующий вид:

(1) принцип переноса в форме Лейбница (см. 1.3.10);

(2) принцип идеализации в виде схемы аксиом насыщения для множеств классического размера (см. 1.3.8 (3)).

Наконец, *стандартизация* $^*A$ в UNST множества A (представляющего собой подмножество элемента $\mathbb{V}^{\mathbb{S}}$) состоит в процедуре

$$^*A := *(*^{-1}(A \cap \mathbb{V}^{\mathbb{S}})).$$

Из 1.3.12 непосредственно вытекает следующее утверждение.

1.3.15. *Теорема.* *Теория* UNST *является консервативным расширением теории* ZFC.

В дальнейшем при работе с аналитическими объектами мы будем придерживаться свободной точки зрения, близкой к неоклассической и радикальной установкам нестандартного анализа. В частности, поле вещественных чисел нами часто рассматривается как стандартный элемент мира внутренних множеств, а классическая реализация $\mathbb{R}$ отождествляется со стандартным ядром $^\circ\mathbb{R}$. Символика, принятая в нестандартном анализе для бесконечно малых, монад и т. п., совпадает с представленной в [38].

1.3.16. Примечания.

(1) Аксиоматический подход к нестандартному анализу стал завоевывать популярность после работ Э. Нельсона [95, 96], предложившего аксиоматику теории внутренних множеств IST. При этом произошло существенное изменение взглядов на существо инфинитезимальных методов (см. [38, 52]). Главное в произошедших переменах — отказ от «стыдливого» взгляда на инфинитезимали как на монстров, имеющих некоторое экзотическое значение. Теорему 1.3.3 см. в [95].

(2) Аксиоматические теории внешних множеств были предложены К. Хрбачеком [76] и Т. Каваи [86]. Излагаемый вариант теории следует [87]. Из последних работ отметим также [14, 57], предлагающие, по сути, удобные формализмы «градуированной» теории внешних множеств, связанные с концепцией относительной стандартности. Нестандартную теорию классов, расширяющую теорию Гёделя — Бернайса, предложил Е. И. Гордон, см. [68].

(3) В. Кановей и М. Рейкен [82] предложили теорию ограниченных множеств BST, которая отличается от IST добавлением аксиомы ограниченности $(\forall x)\,(\exists y)\,x \in y$ и необходимой модификацией принципа идеализации (принцип идеализации IST явно противоречит аксиоме ограниченности). Ясно, что теории BST достаточно для приложений, в то же время некоторые конструкции в ней упрощаются.

1.4. Теория относительно стандартных множеств

В этом параграфе мы рассмотрим теорию относительно стандартных множеств в рамках теории внутренних множеств Э. Нельсона.

1.4.1. Наличие актуальных бесконечно малых чисел в нестандартном анализе дает возможность формировать новые (а по существу узаконивает давно отвергнутые) понятия для изучения классических объектов анализа. В частности, интересным приобретением являются новые математические понятия — микропредел конечной последовательности и микронепрерывность функции в точке. Число a называют *микропределом* последовательности $a[N] := (a_1, \dots, a_N)$, где N — бесконечно большое натуральное число, если для всех бесконечно больших M, меньших N, будет $a_M \approx a$. Функцию f :

$\mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ называют *микронепрерывной в точке* x из $\mathrm{dom}\, f$, если при $x' \in \mathrm{dom}\, f$ и $x' \approx x$ выполняется $f(x') \approx f(x)$. Эти определения оправданы следующими нестандартными критериями непрерывности:

(1) *стандартное число* $a \in \mathbb{R}$ *будет пределом стандартной последовательности* (a_n) *тогда и только тогда, когда* a *— микропредел* $a[N]$, *где* N *— бесконечно большое натуральное число;*

(2) *стандартная числовая функция* f *непрерывна в стандартной точке* x *стандартной области определения* $\mathrm{dom}(f)$ *тогда и только тогда, когда* f *микронепрерывна в точке* x.

Здесь, как и в других эквивалентностях такого рода, существенно, что (a_n), a, f, x и $\mathrm{dom}(f)$ стандартны. Встает вопрос о наличии простых нестандартных критериев в общем случае, когда в данное определение входят произвольные нестандартные элементы. Ситуация, когда это необходимо, возникает довольно часто.

Наиболее простой пример получается при попытке дать нестандартное определение того, что $\lim_{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = a$, даже в случае стандартных f и a. В самом деле, из (1) получаем эквивалентное условие $(\forall N \approx +\infty) \lim_{n\to+\infty} f(x_N, y_n) \approx a$. Однако $f(x_N, \cdot)$, вообще говоря, — нестандартная функция при $N \approx +\infty$ и эквивалентность (1) к ней не применима. Этот пример наводит на мысль о необходимости введения бесконечно малых существенно более высокого порядка, чем данное $\alpha := x_N$, т. е. таких, которые остаются бесконечно малыми, даже если считать α конечным.

1.4.2. Ниже для обозначения предикатов «f — функция», «f — конечное множество», области определения и области значений f, а также формулы (f — функция) $\wedge (\forall x \in \mathrm{rng}(f))$ (x конечно) используются сокращения $\mathrm{Fn}(f)$, $\mathrm{Fin}(f)$, $\mathrm{dom}(f)$, $\mathrm{rng}(f)$, $\mathrm{Ffin}(f)$, соответственно. Отметим, что $\mathrm{Fin}(x)$ означает лишь, что мощность x есть элемент ω (т. е. натуральное число), возможно, и бесконечно большой, если x нестандартно.

Назовем элемент x *допустимым* $(\mathrm{Su}(x))$, если $(\exists^{\mathrm{st}} X)\,(x \in X)$. Введем определимый в IST предикат «x стандартно относительно y» формулой:

$$x \,\mathrm{st}\, y \rightleftharpoons (\exists^{\mathrm{st}} \varphi)\, \big(\mathrm{Ffin}(\varphi) \wedge y \in \mathrm{dom}\, \varphi \wedge x \in \varphi(y)\big).$$

Двуместный предикат $x \,\mathrm{st}\, y$ обладает следующими свойствами:

(1) $x \operatorname{st} y \ \to\ \operatorname{Su}(x) \wedge \operatorname{Su}(y)$.

(2) $x \operatorname{st} y \wedge y \operatorname{st} z \ \to\ x \operatorname{st} z$.

(3) $x \operatorname{st} y \wedge \operatorname{Fin}(x) \ \to\ (\forall z \in x)\, z \operatorname{st} y$.

(4) $\operatorname{Su}(y) \wedge \operatorname{St}(x) \ \to\ x \operatorname{st} y$.

В последнем утверждении St — одноместный предикат быть «стандартным» из теории внутренних множеств Э. Нельсона, см. 1.3.

1.4.3. Ниже для обозначения предикатов аналогично сокращениям 1.3.1 вводятся сокращения:

$$(\forall^{\operatorname{st} y} x)\, \varphi := (\forall\, x)\, (x \text{ стандартно относительно } y \to \varphi);$$
$$(\exists^{\operatorname{st} y} x)\, \varphi := (\exists\, x)\, (x \text{ стандартно относительно } y \wedge \varphi);$$
$$(\forall^{\operatorname{st} \operatorname{fin} y} x)\, \varphi := (\forall^{\operatorname{st} y} x)\, (x \text{ конечно} \to \varphi);$$
$$(\exists^{\operatorname{st} \operatorname{fin} y} x)\, \varphi := (\exists^{\operatorname{st} y} x)\, (x \text{ конечно} \wedge \varphi).$$

1.4.4. *Релятивизованный принцип переноса.* *Если φ — это внутренняя формула, содержащая в качестве свободных переменных только $x, t_1, \dots, t_k$ $(k \geq 1)$, то для любого допустимого τ имеет место формула*

$$(\forall^{\operatorname{st} \tau})\, t_1 \dots (\forall^{\operatorname{st} \tau} t_k)\, \big((\forall^{\operatorname{st} \tau} x)\, \varphi(x, t_1, \dots, t_k) \ \to\ (\forall x)\, \varphi(x, t_1, \dots, t_k)\big).$$

1.4.5. *Релятивизованный принцип идеализации.* *Пусть некоторая внутренняя формула такова, что $\psi(x, y)$, наряду с x, y, может содержать еще какие-нибудь свободные переменные. Тогда для любого допустимого τ выполняется*

$$(\forall^{\operatorname{st} \tau \operatorname{fin}}\ z)\, (\exists x)\, (\forall y \in z)\, \psi(x, y) \ \leftrightarrow\ (\exists x)\, (\forall^{\operatorname{st} \tau} y)\, \psi(x, y).$$

1.4.6. Можно показать, что релятивизованный принцип стандартизации теперь не имеет места. Однако уже установленные принципы 1.4.4 и 1.4.5 достаточны для решения класса задач, о которых говорилось в 1.4.1. Приведем несколько результатов в этом направлении.

Пусть $x \in \mathbb{R}$ — произвольное (не обязательно стандартное) число. Будем говорить, что x — τ-бесконечно малое и писать $x \overset{\tau}{\sim} 0$, если $(\forall^{\operatorname{st} \tau} y \in \mathbb{R}_+)\, |x| < y$. Естественны также следующие определения: x — τ-бесконечно большое, если $1/x$ — τ-бесконечно малое; x — τ-конечное, если x не является τ-бесконечно большим.

1.4.7. Теорема. *Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $a, b \in \mathbb{R}$ — произвольные (не обязательно стандартные) элементы, $\tau = (f, a, b)$, то*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \leftrightarrow (\forall \alpha \overset{\tau}{\sim} 0)\, f(a+\alpha) - b \overset{\tau}{\sim} 0.$$

$\lhd$ Ввиду 1.4.2 f, a, b стандартны относительно τ. Теперь в силу принципа переноса 1.4.4 будет

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}\,\tau}\varepsilon)(\exists^{\mathrm{st}\,\tau}\delta)(|x-a| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Если $\alpha \overset{\tau}{\sim} 0,\ x = a+\alpha$, то $(\forall^{\mathrm{st}\,\tau}\delta)\, |x-a| < \delta$, т. е. $(\forall^{\mathrm{st}\,\tau}\varepsilon)\, |f(x) - b| < \varepsilon$ и $f(x) - b \overset{\tau}{\sim} 0$.

Обратно, зафиксируем произвольное стандартное $\varepsilon\, \mathrm{st}\, \tau$ и рассмотрим внутреннее множество M тех α, для которых $|f(a+\alpha) - b| < \varepsilon$. По условию M содержит все τ-бесконечно малые. Рассмотрим множество $M_1 := \{\delta : (0, \delta] \subset M\}$. Оно также внутреннее множество, содержащее все τ-бесконечно малые. Следовательно, $\sup M_1$ не может быть τ-бесконечно малым и, стало быть, существует τ-стандартное $\delta \in M_1$. Остается применить принцип переноса. $\rhd$

1.4.8. Теорема. *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ стандартны и для любого x из некоторой окрестности нуля существует $\lim_{y\to 0} f(x, y)$. Тогда*

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x, y) = a \leftrightarrow (\forall \alpha \sim 0)\, (\forall \beta \overset{\alpha}{\sim} 0)\, f(\alpha, \beta) - a \sim 0.$$

$\lhd$ Пусть $a := \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x, y)$.

Положим $g(x) := \lim_{y\to 0} f(x, y)$. Тогда $g(\alpha) \sim a$ для любого $\alpha \sim 0$. Отметим, что g — стандартная функция, следовательно, $g(\alpha)\, \mathrm{st}\, \alpha$. Теперь ввиду теоремы 1.4.7 и 1.4.2 (2) равенство $g(\alpha) = \lim_{y\to 0} f(\alpha, y)$ эквивалентно утверждению

$$(\forall \beta \overset{\alpha}{\sim} 0)\, f(\alpha, \beta) \overset{\alpha}{\sim} g(\alpha).$$

В силу предложения 1.4.2 (4) $f(\alpha, \beta) \overset{\alpha}{\sim} \varphi(\alpha) \to f(\alpha, \beta) \sim g(\alpha)$. Но так как $g(\alpha) \sim a$, то $f(\alpha, \beta) \sim a$.

Докажем обратное утверждение. При этом достаточно установить предложение

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists \delta)(\forall x)\Big(|x| < \delta \to (\exists \gamma)\, (\forall y)\, (|y| < \gamma \to |f(x, y) - a| < \varepsilon)\Big).$$

Зафиксируем произвольное стандартное ε и рассмотрим внутреннее множество

$$M := \\ := \Big\{\delta > 0 :\ (\forall x)\,\Big(|x| < \delta \ \to\ (\exists\gamma)\,(\forall y)(|y| < \gamma \ \to\ |f(x,y) - a| < \varepsilon)\Big)\Big\}.$$

Легко понять, что M содержит все бесконечно малые числа. В самом деле, если $\delta \sim 0$ и $|x| < \delta$, то $x \sim 0$. Если $\gamma \overset{x}{\sim} 0$, то $(\forall y)\,(|y| < \gamma \ \to\ y \overset{x}{\sim} 0)$. Отсюда $|f(x,y) - a| < \varepsilon$. Теперь очевидно, что M содержит и некоторый стандартный элемент. $\rhd$

1.4.9. Рассмотрение предыдущих двух пунктов без труда переносится на случай произвольного топологического пространства. Пусть X — топологическое пространство, τ — допустимый элемент и $X \operatorname{st} \tau$. Для элемента $x \in X$, стандартного относительно τ, определим τ-монаду $\mu^\tau(x)$ как пересечение всех τ-стандартных окрестностей x:

$$\mu^\tau(x) := \{y :\ (\forall^{\operatorname{st}\tau} u)\,\big((u \text{ открыто} \wedge x \in u) \ \to\ y \in u\}).$$

(1) При указанных предположениях множество $U \subset X$, стандартное относительно τ, открыто в том и только в том случае, если $\mu^\tau(x) \subset U$ для любого $x \in U$, стандартного относительно τ.

(2) Пусть X и Y — допустимые топологические пространства, $f : X \to Y$, $a \in X$ и $b \in Y$. Если $\tau := (X, Y, f, a, b)$, то имеет место следующая эквивалентность:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \ \leftrightarrow\ (\forall x \in \mu^\tau(a))\, f(x) \in \mu^\tau(b).$$

1.4.10. В заключение этого параграфа мы представим вкратце аксиоматическую теорию RIST относительно внутренних множеств. Язык этой теории получается из языка теории Цермело — Френкеля добавлением одного двуместного предиката st. Как и выше, выражение $x \operatorname{st} y$ читается как «x стандартно относительно y». Формула теории RIST внутренняя, если она не содержит предиката st. Так же, как и в 1.4.3 определяются внешние кванторы $\forall^{\operatorname{st}\alpha}$, $\exists^{\operatorname{st}\alpha}$, $\forall^{\operatorname{st\,fin}\alpha}$, $\exists^{\operatorname{st\,fin}\alpha}$.

Аксиомы RIST включают все аксиомы теории Цермело — Френкеля. Предикат st удовлетворяет следующим трем аксиомам:

(1) $(\forall x)\, x \operatorname{st} x$;
(2) $(\forall x)\,(\forall y)\, x \operatorname{st} y \vee y \operatorname{st} x$;
(3) $(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,\big(x \operatorname{st} y \wedge y \operatorname{st} z \;\to\; x \operatorname{st} y\big)$.

Кроме того, теория RIST (как и IST) включает три новые схемы. Схемы аксиом переноса и идеализации те же, что и в 1.4.4 и 1.4.5, а в схеме аксиом стандартизации необходимо ограничить класс формул в соответствии с замечанием 1.4.6.

1.4.11. *Схема аксиом переноса.* *Если $\varphi(x, t_1, \dots, t_k)$ — внутренняя формула со свободными переменными $x, t_1, \dots, t_k$ и τ — фиксированное множество, то*

$$(\forall^{\operatorname{st}\tau} t_1) \dots (\forall^{\operatorname{st}\tau} t_k)\,\big((\forall^{\operatorname{st}\tau} x)\,\varphi(x, t_1, \dots, t_k) \;\to\; (\forall x)\,\varphi(x, t_1, \dots, t_k)\big).$$

1.4.12. Схема аксиом идеализации. Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ — внутренняя формула со свободными переменными $x_1, \dots, x_k, y$, причем, возможно, есть и другие свободные переменные. Пусть $\tau_1, \dots, \tau_k$ — фиксированные множества и β не является стандартным относительно $(\tau_1, \dots, \tau_k)$. Тогда выполняются следующие утверждения.

(1) Принцип ограниченной идеализации:
$(\forall^{\operatorname{st}\tau_1 \operatorname{fin}} z_1) \dots (\forall^{\operatorname{st}\tau_k \operatorname{fin}} z_k)$
$(\exists^{\operatorname{st}\beta} y)\,(\forall x_1 \in z_1) \dots (\forall x_k \in z_k)\,\psi(x_1, \dots, x_k, y) \;\leftrightarrow$
$\leftrightarrow\; (\exists^{\operatorname{st}\beta} y)\,(\forall^{\operatorname{st}\tau_1} x_1) \dots (\forall^{\operatorname{st}\tau_k} x_k)\,\psi(x_1, \dots, x_k, y)$.

(2) Принцип неограниченной идеализации:
$(\forall^{\operatorname{st}\tau \operatorname{fin}} z_1) \dots (\forall^{\operatorname{st}\tau \operatorname{fin}} z_k)$
$(\exists y)\,(\forall x_1 \in z_1) \dots (\forall x_k \in z_k)\,\psi(x_1, \dots, x_k, y) \;\leftrightarrow$
$\leftrightarrow\; (\exists y)\,(\forall^{\operatorname{st}\tau_1} x_1) \dots (\forall^{\operatorname{st}\tau_k} x_k)\,\psi(x_1, \dots, x_k, y)$.

1.4.13. Для формулировки схемы аксиом стандартизации введем класс τ-внешних формул $\mathscr{F}_\tau$, где τ — фиксированное множество. Если $\mathscr{F}$ — класс формул теории RIST, то $\mathscr{F}_\tau$ определяется как наименьший его подкласс, удовлетворяющий следующим условиям:

(1) атомарная формула $x \in y$, где x и y — переменные или константы, входит в $\mathscr{F}_\tau$;
(2) если формулы φ и ψ входят в $\mathscr{F}_\tau$, то и формулы $\neg\varphi$ и $\varphi \to \psi$ входят в $\mathscr{F}_\tau$;
(3) если формула $\varphi(x, y)$ входит в $\mathscr{F}_\tau$, то при этом и формула $(\exists y)\,\varphi(x, y)$ входит в $\mathscr{F}_\tau$;

(4) если формула $\varphi(x, y)$ входит в $\mathscr{F}_\tau$, а β — такое множество, что множество τ стандартно относительно β, то и формула $(\exists^{\mathrm{st}\,\beta} y)\,\varphi(x, y)$ входит в $\mathscr{F}_\tau$.

1.4.14. *Схема аксиом стандартизации.* *Если τ — фиксированное множество и φ — некоторая τ-внешняя формула, то*

$$(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} y)\,(\exists^{\mathrm{st}\,\tau} z)\,(\forall^{\mathrm{st}\,\tau} t)\,\big(t \in z \leftrightarrow (t \in y \wedge \varphi(t))\big).$$

1.4.15. *Теорема.* *Теория* RIST *является консервативным расширением теории* ZFC.

1.4.16. Примечания.

(1) Материал, вошедший в пункты 1.4.2–1.4.9, взят из статьи Е. И. Гордона [14], см. также [68]. В этой же работе установлено, что существуют такое бесконечно большое натуральное число N и такое число $x \in [0,\,1]$, что любое число, N-бесконечно близкое к x, не является N-стандартным. Поскольку существование стандартной части числа является следствием принципа стандартизации, отсюда выводится, что релятивизованный принцип стандартизации не имеет места. В частности, можно сделать вывод, что принцип стандартизации теории IST не является следствием остальных аксиом этой теории (подробности см. в [14, 68]).

(2) Аксиоматическая теория RIST, изложенная в 1.4.10–1.4.14, была предложена И. Пэрером [104]. Там же установлена теорема 1.4.15. Ранее И. Пэрер осуществил (непротиворечивое относительно ZFC) расширение теории IST посредством добавления последовательности не определимых в IST предикатов $\mathrm{St}_p(x)$ (x стандартно степени $1/p$), см. [102]. Другие результаты в этом направлении см. в [103, 105].

1.5. Пространства Канторовича

Теория векторных решеток изложена в ряде превосходных монографий, см. [2, 21, 22, 61, 92, 106, 107, 118]. Векторные решетки принято называть также пространствами Рисса. Здесь мы коротко рассмотрим порядково полные векторные решетки.

1.5.1. Пусть $\mathbb{F}$ — линейно упорядоченное поле. *Упорядоченное векторное пространство* над $\mathbb{F}$ — пара $(E, \leq)$, где E — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а $\leq$ — *векторный порядок* в E, т. е. отношение порядка в E, согласованное со структурой векторного пространства. Последнее означает, что неравенства в E можно складывать и умножать на положительные элементы поля $\mathbb{F}$. Задание векторного порядка в векторном пространстве E над полем $\mathbb{F}$ равносильно указанию подмножества $E_+ \subset E$ — *положительного конуса* пространства E — со свойствами: $E_+ + E_+ \subset E_+$; $\lambda E_+ \subset E_+$ $(0 \leq \lambda \in \mathbb{F})$; $E_+ \cap E_+ = \{0\}$. При этом порядок $\leq$ и конус E_+ связаны соотношением

$$x \leq y \leftrightarrow y - x \in E_+ \quad (x, y \in E).$$

Упорядоченное векторное пространство, являющееся решеткой, называют *векторной решеткой*. Для элементов x, y векторной решетки E и приняты обозначения: $x \vee y := \sup\{x, y\}$, $x \wedge y := \inf\{x, y\}$, $|x| := \sup\{x, -x\}$, $x^+ := \sup\{x, 0\}$, $x^- := (-x)^+$.

Пространством Канторовича или, короче, K-*пространством* называют такую векторную решетку, в которой всякое порядково ограниченное множество имеет точные границы. Если же в векторной решетке имеются точные границы лишь у счетных множеств, то ее называют K_σ-*пространством*. Всюду ниже E символизирует произвольное K-пространство.

Элементы $x, y \in E$ называют *дизъюнктными* и пишут $x \perp y$, если $|x| \wedge |y| = 0$. Множество

$$M^\perp := \{x \in E : (\forall y \in M)\, x \perp y\},$$

где $M \subset E$, именуют *дизъюнктным дополнением* множества M. Отметим некоторые простые свойства дизъюнктного дополнения:

(1) $M \subset N \rightarrow N^\perp \subset M^\perp$;

(2) $M \subset M^{\perp\perp}$;

(3) $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$;

(4) $\big(\bigcup_\alpha M_\alpha\big)^\perp = \bigcap_\alpha M_\alpha^\perp$.

Компонентой (или *полосой*) в E называют множество вида $M^\perp$, где $M \subset E$, $M \neq \varnothing$. Совокупность всех компонент, упорядоченная по включению, образует полную булеву алгебру $\mathfrak{B}(E)$, в которой булевы операции выглядят так:

$$L \wedge K = L \cap K, \quad L \vee K = (L \cup K)^{\perp\perp}, \quad L^* = L^\perp \quad (L, K \in \mathfrak{B}(E)).$$

Алгебра $\mathfrak{B}(E)$ носит название *базы* E.

1.5.2. Для каждой компоненты K в K-пространстве E имеет место представление $E = K \oplus K^{\perp}$. Тем самым однозначно определен оператор проектирования $[K]$ на подпространство K параллельно $K^{\perp}$, называемый *порядковым проектором* на K (или просто проектором на K, если контекст исключает путаницу). При этом выполняются неравенства $0 \leq [K]x \leq x$ для всех $0 \leq x \in E$. Наоборот, если линейный проектор π в E удовлетворяет неравенствам $0 \leq \pi x \leq x$ для всех $0 \leq x \in E$, то $K := \pi(E)$ является компонентой, а π — порядковым проектором на K. В множестве всех порядковых проекторов $\mathfrak{P}(E)$ вводят порядок, полагая $\rho \leq \pi \leftrightarrow \operatorname{im}(\rho) \subset \operatorname{im}(\pi)$. Полезно иметь в виду равносильное определение $\rho \leq \pi \leftrightarrow \rho\pi = \pi\rho = \rho$. Упорядоченное множество $\mathfrak{P}(E)$ является полной булевой алгеброй, в которой булевы операции имеют вид:

$$\pi \wedge \rho = \pi\rho = \rho\pi, \quad \pi \vee \rho = \pi + \rho - \pi\rho, \quad \pi^* = I_E - \pi \quad (\pi, \rho \in \mathfrak{P}(E)).$$

Пусть $\mathbb{1}$ — (*слабая порядковая*) *единица* в E, т. е. $\{\mathbb{1}\}^{\perp\perp} = E$. Элемент $e \in E$ называют *единичным*, или *осколком единицы*, если $e \wedge (\mathbb{1} - e) = 0$. Множество $\mathfrak{E}(E) := \mathfrak{E}(\mathbb{1})$ всех единичных элементов снабжают индуцированным из E порядком. Упорядоченное множество $\mathfrak{E}(E)$ является полной булевой алгеброй, в которой булево дополнение имеет вид: $e^* := \mathbb{1} - \mathbb{e}$ для $e \in \mathfrak{E}(\mathbb{1})$.

1.5.3. *Теорема.* *Отображение $K \mapsto [K]$ есть изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{B}(E)$ и $\mathfrak{P}(E)$. Если же в E имеется порядковая единица, то отображения $\pi \mapsto \pi\mathbb{1}$ из $\mathfrak{P}(E)$ в $\mathfrak{E}(E)$ и $e \mapsto \{e\}^{\perp\perp}$ из $\mathfrak{E}(E)$ в $\mathfrak{B}(E)$ также являются изоморфизмами булевых алгебр.*

1.5.4. K-пространство E называют *расширенным*, если в нем любое непустое множество попарно дизъюнктных положительных элементов имеет супремум. Перечислим важнейшие примеры расширенных K-пространств. Для экономии места ограничимся вещественным случаем (за исключением примера (4)).

(1) Пространство $M(\Omega, \Sigma, \mu) := L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ классов эквивалентности почти всюду конечных измеримых функций на Ω, где (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой μ, причем μ предполагается σ-конечной (или, более общо, μ должна обладать свойством прямой суммы, см. [21]). База K-пространства $M(\Omega, \Sigma, \mu)$ изоморфна булевой фактор-алгебре $\Sigma/\mu^{-1}(0)$ — булевой алгебре измеримых множеств по модулю множеств нулевой меры.

(2) Пространство $C_\infty(Q)$ непрерывных функций, определенных на экстремально несвязном компакте Q, со значениями в расширенной числовой прямой и принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах [2, 22]. База этого K-пространства изоморфна булевой алгебре открыто-замкнутых множеств компакта Q.

(3) Пространство $\operatorname{Bor}(Q)$ классов эквивалентности борелевских функций, определенных на топологическом пространстве Q. Две функции *эквивалентны*, если они совпадают на дополнении к множеству первой категории. База K-пространства $\operatorname{Bor}(Q)$ изоморфна булевой алгебре борелевских подмножеств Q по модулю множеств первой категории.

(4) Пространство $\overline{\mathfrak{A}}$ самосопряженных (не обязательно ограниченных) операторов в гильбертовом пространстве, присоединенных к коммутативной алгебре фон Неймана $\mathfrak{A}$ (см. [9]). База K-пространства $\overline{\mathfrak{A}}$ изоморфна булевой алгебре всех проекторов, входящих в $\mathfrak{A}$.

1.5.5. Пусть E и F — векторные решетки. Оператор $T : E \to F$ называют *положительным*, если $Tx \geq 0$ для каждого $0 \leq x \in E$, и *регулярным*, если $T = T_1 - T_2$, где T_1, T_2 — положительные операторы. Говорят, что оператор T *порядково ограничен* или *о-ограничен*, если $T(M)$ — порядково ограниченное множество в F для любого порядково ограниченного $M \subset E$. Если F — это K-пространство, то классы регулярных и порядково ограниченных операторов совпадают. Более того, справедливо следующее утверждение.

1.5.6. ***Теорема Рисса — Канторовича.*** *Если E — векторная решетка и F — это произвольное K-пространство, то пространство $L^\sim(E, F)$ всех регулярных операторов из E в F само является K-пространством.*

1.5.7. Оператор $T : E \to F$ называют порядково непрерывным или o-непрерывным (секвенциально o-непрерывным или порядково σ-непрерывным), если $Tx_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$ в F для любой сети (x_α), o-сходящейся к нулю в E (соответственно, $Tx_n \xrightarrow{(o)} 0$ в F) для любой последовательности (x_n), o-сходящейся к нулю в E. Множества всех порядково непрерывных и порядково σ-непрерывных операторов из E в F обозначают соответственно символами $L_n^\sim(E, F)$ и $L_\sigma^\sim(E, F)$.

Теорема. *Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полно. Тогда множества $L^{\sim}_n(E,F)$ и $L^{\sim}_\sigma(E,F)$ являются полосами в $L^{\sim}(E,F)$.*

1.5.8. *Пространством Канторовича — Пинскера* называют K-пространство, в котором существует фундамент с достаточным числом порядково непрерывных функционалов (или, что то же самое, если на его базе может быть определена существенно положительная локально конечная вполне аддитивная мера).

Теорема. *Если пространство с мерой $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ обладает свойством прямой суммы, то $L^0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ будет пространством Канторовича — Пинскера. Наоборот, произвольное пространство Канторовича — Пинскера линейно и порядково изоморфно фундаменту в $L^0(\Omega)$ для подходящего пространства с мерой (Ω, Σ, μ) со свойством прямой суммы.*

Отметим дополнительно, что если в E фиксирована порядковая единица $\mathbb{1}$, то существует единственный такой изоморфизм, переводящий $\mathbb{1}$ в класс эквивалентности функции, тождественно равной единице на Ω. Пространство E будет расширенным в том и только в том случае, если его образ при указанном изоморфизме совпадает с $L^0(\Omega)$.

1.5.9. Примечания.

(1) Создание теории векторных решеток принято связывать с исследованиями Г. Биркгофа, Л. В. Канторовича, М. Г. Крейна, Х. Накано, Ф. Рисса, Г. Фрейденталя и др. В наше время теория и приложения векторных решеток — обширная область математики, хорошо представленная в монографической литературе [9, 21, 22, 71, 92, 106, 107, 118].

Необходимые сведения из теории булевых алгебр см. в [7, 58, 69].

(2) Класс порядково полных векторных решеток, иначе говоря, K-пространств, был выделен Л. В. Канторовичем в его первой основополагающей работе [19]. Здесь же он выдвинул *эвристический принцип переноса* для K-пространств, состоящий в том, что элементы K-пространства суть обобщенные числа.

Принцип Канторовича нашел многочисленные подтверждения в исследованиях как самого автора, так и его последователей. По существу, этот принцип стал одной из тех стержневых идей, которые, играя организующую и направляющую роль в развитии нового направления, привели в конечном итоге к глубокой и изящной теории K-пространств, богатой разнообразными приложениями.

(3) Уже в начальный период развития теории предпринимались попытки формализации указанных эвристических соображений. На этом пути появились так называемые теоремы о сохранении соотношений, которые утверждают, что если некоторое высказывание, включающее конечное число функциональных соотношений, доказано для вещественных чисел, то аналогичный факт автоматически оказывается верным и для элементов K-пространства (см. [9, 22]). Однако оставались неясными внутренний механизм, управляющий феноменом сохранения соотношений, границы применимости подобных утверждений, а также общие причины многих аналогий и параллелей с классической теорией функций. Вся глубина и универсальный характер принципа Канторовича были раскрыты в рамках булевозначного анализа (см. 1.6, 1.7, а также [5, 29, 38]).

(4) Определения порядково непрерывного и порядково σ-непрерывного оператора, равно как и теорема 1.5.7 принадлежат Т. Огасаваре.

1.6. Действительные числа в булевозначных моделях

Булевозначный анализ начинается с изображения поля действительных чисел в булевозначной модели. Последнее оказывается расширенным K-пространством. В зависимости от того, какая булева алгебра B положена в основу построения булевозначной модели $\mathbb{V}^{(B)}$ (алгебра измеримых множеств, или регулярных открытых множеств, или проекторов в гильбертовом пространстве и т. п.), будут получаться различные K-пространства (пространства измеримых функций, или полунепрерывных функций, или самосопряженных операторов). Тем самым открывается удивительная возможность перенесения всей совокупности знаний о числах на многие классические объекты современного анализа.

1.6.1. Под полем действительных чисел мы понимаем алгебраическую систему, на которой выполняются аксиомы архимедова упорядоченного поля (с различными нулем и единицей) и аксиома полноты. Напомним два известных утверждения:

(1) *Существует, и притом единственное с точностью до изоморфизма, поле действительных чисел* $\mathbb{R}$.

(2) *Если* $\mathbb{P}$ — *архимедово упорядоченное поле, то найдется изоморфное вложение* h *поля* $\mathbb{P}$ *в* $\mathbb{R}$ *такое, что образ* $h(\mathbb{P})$ *есть подполе* $\mathbb{R}$, *содержащее подполе рациональных чисел. В частности,* $h(\mathbb{P})$ *плотно в* $\mathbb{R}$.

1.6.2. Применив к 1.6.1 (1) последовательно принципы переноса и максимума, найдем элемент $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $[\![\mathscr{R}$ — поле действительных чисел$]\!] = \mathbb{1}$. Более того, для любого $\mathscr{R}' \in \mathbb{V}^{(B)}$, такого что $[\![\mathscr{R}'$ — поле действительных чисел$]\!] = \mathbb{1}$, справедливо равенство $[\![$ упорядоченные поля $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}'$ изоморфны $]\!] = \mathbb{1}$. Иными словами, в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ существует поле действительных чисел $\mathscr{R}$, единственное с точностью до изоморфизма.

1.6.3. Отметим также, что формула $\varphi(\mathbb{R})$, представляющая собой формальную запись аксиом архимедова упорядоченного поля, ограничена, поэтому $[\![\varphi(\mathbb{R}^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $[\![\mathbb{R}^\wedge$ — архимедово упорядоченное поле$]\!] = \mathbb{1}$. «Пропустив» утверждение 1.6.1 (2) через принцип переноса, заключаем, что $[\![\mathbb{R}^\wedge$ изоморфно плотному подполю поля $\mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}$. На этом основании будем считать в дальнейшем, что $\mathscr{R}$ — поле действительных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$, причем $\mathbb{R}^\wedge$ — плотное его подполе.

Рассмотрим теперь спуск $\mathscr{R}{\downarrow}$ алгебраической системы $\mathscr{R}$. Иными словами, спуск несущего множества системы $\mathscr{R}$ рассматриваем вместе со спущенными операциями и порядком. Для простоты операции и порядок в $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}{\downarrow}$ обозначим одинаковыми символами $+, \cdot, \leq$.

1.6.4. *Теорема Гордона.* *Пусть* $\mathscr{R}$ — *упорядоченное поле действительных чисел в модели* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. *Тогда* $\mathscr{R}{\downarrow}$ *(со спущенными операциями и порядком) представляет собой расширенное* K*-пространство с единицей* $\mathbb{1} := 1^\wedge$. *При этом существует изоморфизм* χ *булевой алгебры* B *на базу* $\mathfrak{P}(\mathscr{R}{\downarrow})$ *такой, что справедливы эквивалентности*

$$\chi(b)x = \chi(b)y \leftrightarrow b \leq [\![x = y]\!],$$
$$\chi(b)x \leq \chi(b)y \leftrightarrow b \leq [\![x \leq y]\!]$$

для всех $x, y \in \mathscr{R}$ *и* $b \in B$.

1.6.5. Расширенное K-пространство $\mathscr{R}{\downarrow}$ является в то же время точной f-алгеброй с кольцевой единицей $\mathbb{1} := \mathbb{1}^{\wedge}$, причем для каждого $b \in B$ проектор $\chi(b)$ есть оператор умножения на единичный элемент $\chi(b)\mathbb{1}$. Из сказанного выше видно, что отображение $b \mapsto \chi(b)\mathbb{1}$ для $b \in B$ также есть булев изоморфизм B на алгебру единичных элементов $\mathfrak{E}(\mathscr{R}{\downarrow})$. Этот изоморфизм обозначают той же буквой χ.

1.6.6. Напомним, что если E — это K-пространство с единицей и $x \in E$, то проекцию единицы на компоненту $\{x\}^{\perp\perp}$ называют *следом* x и обозначают символом e_x. Для вещественного числа λ символом e_λ^x обозначают след положительной части элемента $\lambda\mathbb{1} - x$, т. е. $e_\lambda^x := e_{(\lambda\mathbb{1}-x)^+}$. Отображение $\lambda \mapsto e_\lambda^x$ для $\lambda \in \mathbb{R}$ называют *спектральной функцией* или *характеристикой* элемента x.

Для каждого элемента $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ имеют место соотношения:

$$e_x = \chi([\![\, x \neq 0 \,]\!]), \quad e_\lambda^x = \chi([\![\, x < \lambda^{\wedge} \,]\!]) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Следующий результат утверждает, что всякая архимедова векторная решетка реализуется как подрешетка $\mathscr{R}$ в подходящей булевозначной модели.

1.6.7. *Теорема.* *Пусть E — архимедова векторная решетка, $\jmath$ — изоморфизм булевой алгебры B на базу $\mathfrak{B}(E)$ и пусть $\mathscr{R}$ — поле действительных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Существует элемент $\mathscr{E} \in \mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющий условиям:*

(1) *$\mathbb{V}^{(B)} \models \mathscr{E}$ — векторная подрешетка поля $\mathscr{R}$, рассматриваемого как векторная решетка над $\mathbb{R}^{\wedge}$;*

(2) *$E' := \mathscr{E}{\downarrow}$ — векторная подрешетка $\mathscr{R}{\downarrow}$, инвариантная относительно каждого проектора $\chi(b)$ при $b \in B$, в которой всякое множество положительных попарно дизъюнктных элементов имеет супремум;*

(3) *существует o-непрерывный решеточный изоморфизм $\iota : E \to E'$ такой, что $\iota(E)$ — минорантная подрешетка в $\mathscr{R}{\downarrow}$, т. е. имеет место утверждение $(\forall 0 < x \in \mathscr{R}{\downarrow})\,(\exists y \in E)(\,0 < \iota(y) \leq x)$;*

(4) *для каждого $b \in B$ оператор проектирования на компоненту, порожденную в $\mathscr{R}{\downarrow}$ множеством $\iota(\jmath(b))$, совпадает с $\chi(b)$.*

1.6.8. Элемент $\mathscr{E} \in \mathbb{V}^{(B)}$ из теоремы 1.6.7 называют *булевозначной реализацией векторной решетки* E. Следовательно, булевозначными реализациями архимедовых векторных решеток служат векторные подрешетки поля действительных чисел $\mathscr{R}$, рассматриваемого как векторная решетка над полем $\mathbb{R}^{\wedge}$.

Укажем теперь несколько следствий из 1.6.4 и 1.6.7, сохранив те же обозначения:

(1) *Если E — это K-пространство, то $\mathscr{E} = \mathscr{R}$, $E' = \mathscr{R}{\downarrow}$ и $\iota(E)$ — фундамент K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$. При этом $\iota^{-1} \circ \chi(b) \circ \iota$ — проектор на компоненту $\jmath(b)$ для каждого $b \in B$.*

(2) *Образ $\iota(E)$ совпадает со всем $\mathscr{R}{\downarrow}$ тогда и только тогда, когда E — расширенное K-пространство.*

(3) *Расширенные K-пространства бывают изоморфны в том и только в том случае, если изоморфны их базы.*

(4) *Пусть E — расширенное K-пространство с единицей $\mathbb{1}$. Тогда в E можно, и притом единственным образом, определить умножение так, что E превращается в точную f-алгебру, а $\mathbb{1}$ — в единицу умножения.*

1.6.9. К подсистемам поля $\mathscr{R}$ приводят булевозначные реализации не только архимедовых векторных решеток, см. 1.6.7. Сформулируем, например, несколько утверждений из [31].

Теорема. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) *Булевозначной реализацией архимедовой решеточно упорядоченной группы служит подгруппа аддитивной группы поля $\mathscr{R}$.*

(2) *Архимедово f-кольцо содержит две взаимно дополнительные компоненты, одна из которых есть группа с ненулевым умножением и реализуется как в (1), а другая имеет в качестве булевозначной реализации подкольцо кольца $\mathscr{R}$.*

(3) *Архимедова f-алгебра содержит две взаимно дополнительные компоненты, одна из которых есть векторная решетка с нулевым умножением и реализуется как в 1.6.7, а другая — как подкольцо и подрешетка поля $\mathscr{R}$, рассматриваемого как f-алгебра над $\mathbb{R}^{\wedge}$.*

1.6.10. *Комплексной векторной решеткой* называют *комплексификацию* $E \oplus iE$, где i — *мнимая единица*, вещественной векторной решетки E. Часто при этом требуют дополнительно существование *модуля*

$$|z| := \sup\{Re(e^{i\theta}z) : 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

у любого элемента $z \in E \oplus iE$. В случае K-пространства это требование избыточное, так что *комплексное K-пространство* — комплексификация вещественного K-пространства. Говоря о порядковых свойствах комплексной векторной решетки $E \oplus iE$, имеют в виду ее вещественную часть E. Понятия подрешетки, идеала, компоненты проектора и т. п. естественно распространяются на случай комплексной векторной решетки путем надлежащей комплексификации.

1.6.11. Примечания.

(1) Булевозначный статус понятия K-пространства устанавливает теорема Гордона 1.6.4, полученная в [10]. Этот факт можно сформулировать так: *расширенное K-пространство есть интерпретация поля вещественных чисел в подходящей булевозначной модели.* При этом оказывается, что любая теорема (в рамках теории ZFC) о вещественных числах имеет свой аналог для соответствующего K-пространства. Перевод одних теорем в другие осуществляется посредством точно определенных процедур: подъем, спуск, каноническое вложение, т. е., по сути дела, алгоритмически.

Тем самым установка Канторовича «элементы K-пространства — суть обобщенные числа» обретает в булевозначном анализе четкую математическую формулировку.

С другой стороны, эвристический принцип переноса, игравший вспомогательную наводящую роль во многих исследованиях в добулевозначной теории K-пространств, превращается с помощью булевозначного анализа в точный исследовательский метод.

(2) Если в 1.6.4 B — это σ-алгебра измеримых множеств по модулю множеств ненулевой меры μ, то $\mathscr{R}{\downarrow}$ изоморфно расширенному K-пространству измеримых функций $M(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Этот факт (для лебеговой меры на отрезке) был известен еще Скотту и Соловею (см. [108]). Если B — полная булева алгебра проекторов в гильбертовом пространстве, то $\mathscr{R}{\downarrow}$ изоморфно пространству тех самосопряженных операторов, у которых спектральная функция действует в B.

Указанные два частных случая теоремы Гордона интенсивно и плодотворно эксплуатировал Г. Такеути, см. [112], а также библиографию в [38]. Объект $\mathscr{R}{\downarrow}$ для общих булевых алгебр рассмотрел также Т. Йех [79, 80], переоткрыв по существу теорему Гордона. Отличие состоит в том, что в [79] (комплексное) расширенное K-пространство с единицей определяется другой системой аксиом и именуется полной стоуновой алгеброй.

(3) Реализационную теорему 1.6.7 получил А. Г. Кусраев [31]. Близкий результат (в других терминах) имеется в работе [81], в которой развивается булевозначная интерпретация теории линейно упорядоченных множеств. Следствия 1.6.8 (3, 4) хорошо известны (см. [9, 22]).

Понятие максимального расширения для K-пространства другим способом ввел А. Г. Пинскер. Им же доказано существование единственного с точностью до изоморфизма максимального расширения для произвольного K-пространства. А. И. Юдин установил существование порядкового пополнения архимедовой векторной решетки. Соответствующие ссылки имеются в [9, 22]. Все эти факты без труда выводятся из 1.6.4 и 1.6.7 (подробности см. в [5]).

(4) Как уже отмечалось в 1.6.11 (1), первоначально попытки формализации эвристического принципа Канторовича приводили к теоремам о сохранении соотношений (см. [9, 22]). Современные формы теорем о сохранении соотношений, использующих метод булевозначных моделей, можно найти в [12, 80], см. также [38].

1.7. Функциональное исчисление в K-пространствах

Важнейшие структурные свойства векторных решеток — представление пространствами функций, спектральная теорема, функциональное исчисление и т. п. — являются изображениями свойств поля действительных чисел в подходящей булевозначной модели. Остановимся коротко на булевозначном подходе к функциональному исчислению в K-пространствах.

1.7.1. Ниже нам потребуется понятие интеграла по спектральной мере. Пусть (Ω, Σ) — измеримое пространство, т. е. Ω — непустое множество и Σ — фиксированная σ-алгебра подмножества множества Ω. Отображение $\mu : \Sigma \to B$ называют *спектральной мерой*, если $\mu(\Omega \setminus A) = \mathbb{1} - \mu(A)$ и

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

для любой последовательности (A_n) элементов σ-алгебры Σ.

Пусть $B := \mathfrak{E}(E)$ — булева алгебра единичных элементов K-пространства E с фиксированной единицей $\mathbb{1}$. Возьмем измеримую функцию $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Для произвольного разбиения числовой прямой $\beta := (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ $(k \in \mathbb{Z})$, $\lim_{n\to\pm\infty} \lambda_n = \pm\infty$, положим $A_k := f^{-1}([\lambda_k, \lambda_{k+1}))$ и составим интегральные суммы

$$\underline{\sigma}(f,\beta) := \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k \mu(A_k), \quad \overline{\sigma}(f,\beta) := \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{k+1} \mu(A_k),$$

где суммы вычисляются в E. Если существует такой элемент $x \in E$, что $\sup\{\underline{\sigma}(f,\beta)\} = x = \inf\{\overline{\sigma}(f,\beta)\}$, где точные границы берутся по всевозможным разбиениям $\beta := (\lambda_k)$ числовой прямой, то говорят, что функция f интегрируема по спектральной мере μ или существует *спектральный интеграл* $I_\mu(f)$, и пишут при этом

$$I_\mu(f) := \int_\Omega f\, d\mu := \int_\Omega f(t)\, d\mu(t) := x.$$

1.7.2. *Теорема.* *Пусть $E := \mathscr{R}{\downarrow}$, а μ — спектральная мера со значениями в $B := \mathfrak{E}(E)$. Тогда для любой измеримой функции f интеграл $I_\mu(f)$ — единственный элемент K-пространства E, удовлетворяющий условию*

$$[\![\, I_\mu(f) < \lambda^{\wedge} \,]\!] = \mu(\{f < \lambda\}) \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

где $\{f < \lambda\} := \{t \in \Omega : f(t) < \lambda\}$.

Из этой теоремы видно, что если существует интеграл $I_\mu(f) \in E$, то отображение $\lambda \mapsto \mu(\{f < \lambda\})$ совпадает со спектральной функцией элемента $I_\mu(f)$. В частности, если E расширено, то $I_\mu(f)$ существует для любой измеримой функции f. Более того, из теоремы 1.6.4, используя элементарные свойства поля $\mathscr{R}$, можно легко получить следующий результат.

1.7.3. *Теорема.* *Пусть E — расширенное K-пространство, а $\mu : \Sigma \to B := \mathfrak{E}(E)$ — некоторая спектральная мера. Спектральный интеграл $I_\mu(\cdot)$ — это секвенциально o-непрерывный (линейный мультипликативный и решеточный) гомоморфизм из f-алгебры измеримых функций $M(\Omega, \Sigma)$ в E.*

1.7.4. Пусть $e_1, \dots, e_n : \mathbb{R} \to B$ — конечный набор спектральных функций со значениями в σ-алгебре B. Тогда существует единственная B-значная спектральная мера μ, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, для которой

$$\mu\left(\prod_{k=1}^{n}(-\infty, \lambda_k)\right) = \bigwedge_{k=1}^{n} e_k(\lambda_k),$$

каковы бы ни были $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

1.7.5. Возьмем упорядоченный набор элементов $x_1, \dots, x_n$, лежащих в K-пространстве E с единицей $\mathbb{1}$. Пусть $e^{x_k} : \mathbb{R} \to B := \mathfrak{E}(E)$ — спектральная функция элемента x_k. В соответствии с доказанным предложением существует спектральная мера $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to B$, для которой

$$\mu\left(\prod_{k=1}^{n}(-\infty, \lambda_k)\right) = \bigwedge_{k=1}^{n} e^{x_k}(\lambda_k).$$

Как видно, мера μ однозначно определяется упорядоченным набором $\mathfrak{X} := (x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Поэтому пишут $\mu_{\mathfrak{X}} := \mu$ и говорят, что $\mu_{\mathfrak{X}}$ — спектральная мера набора $\mathfrak{X}$. Для интеграла от измеримой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по спектральной мере $\mu_{\mathfrak{X}}$ приняты обозначения

$$\widehat{\mathfrak{X}}(f) := f(\mathfrak{X}) := f(x_1, \dots, x_n) := I_\mu(f).$$

Если $\mathfrak{X} := (x)$, то пишут также $\widehat{x}(f) := f(x) := I_\mu(f)$, а $\mu_x := \mu_{\mathfrak{X}}$ именуют *спектральной мерой элемента* x. Для функции $f(t) = t$ при $t \in \mathbb{R}$ из 1.7.2 вытекает *спектральная теорема Фрейденталя*:

$$x = \int_{\mathbb{R}} t \, d\mu_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, de_\lambda^x.$$

Напомним, что пространство $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ всех борелевских функций на $\mathbb{R}^n$ является расширенным K_σ-пространством и точной f-алгеброй.

1.7.6. Теорема. *Спектральные меры набора* $\mathfrak{X} := (x_1, \dots, x_n)$ *и элемента* $f(x_1, \dots, x_n)$ *связаны соотношением*

$$\mu_{f(\mathfrak{X})} = \mu_{\mathfrak{X}} \circ f^{\leftarrow},$$

где $f^{\leftarrow} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ *— гомоморфизм, действующий по правилу* $A \mapsto f^{-1}(A)$. *В частности, для измеримых функций* $f \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *и* $g \in \mathscr{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *будет* $(g \circ f)(\mathfrak{X}) = g(f(\mathfrak{X}))$, *если только существуют* $f(\mathfrak{X})$ *и* $g(f(\mathfrak{X}))$.

$\lhd$ Согласно 1.7.2 для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ верно

$$\mu_{\mathfrak{X}}(-\infty, \lambda) = e_{\lambda}^{f(\mathfrak{X})} = [\![\, f(\mathfrak{X}) < \lambda^{\wedge} \,]\!] = \mu_{\mathfrak{X}} \circ f^{-1}(-\infty, \lambda).$$

Значит, спектральные меры $\mu_{f(\mathfrak{X})}$ и $\mu_{\mathfrak{X}} \circ f^{-1}$, определенные на $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, совпадают на интервалах вида $(-\infty, \lambda)$. Отсюда обычными в теории меры рассуждениями выводится, что эти меры совпадают везде. Для обоснования второй части нужно лишь заметить, что $(g \circ f)^{\leftarrow} = f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}$ и применить дважды уже установленное. $\rhd$

Из 1.7.3 и 1.7.6 получаем следующий факт.

1.7.7. Теорема. *Для упорядоченного набора* $\mathfrak{X} := (x_1, \dots, x_n)$ *элементов расширенного* K*-пространства* E *отображение*

$$\widehat{\mathfrak{X}} : f \mapsto \widehat{\mathfrak{X}}(f) \quad (f \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$$

представляет собой единственный секвенциально o*-непрерывный гомоморфизм* f*-алгебры* $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *в* E, *удовлетворяющий условию*

$$\widehat{\mathfrak{X}}(d\lambda_k) = x_k \quad (k := 1, \dots, n),$$

где $d\lambda_k : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \lambda_k$ *— координатная функция в* $\mathbb{R}^n$.

1.7.8. Вкратце остановимся на двух реализациях расширенного K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$, которые можно получить с помощью 1.6.4. Напомним, что для компакта Q символом $C_{\infty}(Q)$ обозначается множество всех непрерывных функций из Q в $\overline{\mathbb{R}}$, принимающих бесконечные значения лишь на нигде не плотных множествах (см. 1.5.4 (2)).

Пусть $\mathfrak{K}(B)$ — множество всех разложений единицы в B.

1.7.9. Теорема. *Пусть B — полная булева алгебра. Множество $\mathfrak{K}(B)$ с подходящими операциями и порядком представляет собой расширенное K-пространство. Отображение, сопоставляющее элементу $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ разложение единицы $\lambda \mapsto [\![x < \lambda^{\wedge}]\!]$ для $\lambda \in \mathbb{R}$, является изоморфизмом K-пространств $\mathscr{R}{\downarrow}$ и $\mathfrak{K}(B)$.*

1.7.10. Теорема. *Пусть Q — стоуновский компакт полной булевой алгебры B, а $\mathscr{R}$ — поле действительных чисел в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Векторная решетка $C_\infty(Q)$ изоморфна расширенному K-пространству $\mathscr{R}{\downarrow}$. Изоморфизм устанавливается сопоставлением элементу $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ функции $\widehat{x} : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ по формуле*

$$\widehat{x}(q) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : [\![x < \lambda^{\wedge}]\!] \in q\}.$$

1.7.11. Примечания.

(1) Понятия единицы, единичного элемента и характеристики (спектральной функции элемента) ввел Г. Фрейденталь. Им же установлена спектральная теорема, см. 1.7.5, а также [9, 22]. Из теоремы 1.7.9 вытекает, что для полной булевой алгебры B множество разложений единицы является расширенным K-пространством, база которого изоморфна B. Этот факт принадлежит Л. В. Канторовичу [22]. Реализацию произвольного K-пространства в виде фундамента в $\mathfrak{K}(B)$ получил А. Г. Пинскер (см. [22]). Из 1.6.8 (1) и 1.7.10 вытекает реализация произвольного пространства в виде фундамента $C_\infty(Q)$. Этот факт впервые установили независимо Б. З. Вулих и Т. Огасавара (см. [9, 22]).

(2) Из 1.7.4 вытекает, что всякая спектральная функция со значениями в σ-алгебре определяет спектральную меру на борелевской σ-алгебре действительной прямой.

Этот факт впервые указал В. И. Соболев в [59]. Однако в [59] предполагалось, что такую меру можно получить методом продолжения Каратеодори. Как показал Д. А. Владимиров, для полной булевой алгебры счетного типа продолжение по Каратеодори возможно лишь в том случае, когда она регулярна. Итак, метод продолжения, приводящий к 1.7.4, существенно отличается от продолжения по Каратеодори и основан на представлении Люмиса — Сикорского булевых σ-алгебр. М. Райт получил утверждение 1.7.4 как следствие из установленной им теоремы Рисса для операторов со значениями в K-пространстве.

(3) Борелевские функции от элементов произвольного K-пространства с единицей, по всей видимости, впервые были рассмотрены В. И. Соболевым (см. [9, 59]). Теорема 1.7.6 в приведенной общности получена в [41]. В [41] строится также борелевское функциональное исчисление (счетных и несчетных) наборов элементов произвольного K-пространства. Булевозначное доказательство теоремы 1.7.7 приводится также в [79].

(4) Другие аспекты булевозначного анализа векторных решеток см. в [11, 12, 29, 38, 56, 79, 81, 112, 113].

1.8. Решеточно нормированные пространства

Функциональные пространства часто допускают естественную нормировку посредством элементов векторной решетки. Это обстоятельство определяет некоторые структурные свойства изучаемых пространств. Помимо этого, норма со значениями в векторной решетке позволяет выделить интересный класс мажорируемых операторов. Начальные сведения об указанных объектах излагаются в текущем параграфе. Подробности можно найти в [29, 34, 36].

1.8.1. Рассмотрим векторное пространство X и вещественную векторную решетку E. Не оговаривая каждый раз, будем считать, что все рассматриваемые векторные решетки архимедовы. Отображение $p : X \to E_+$ назовем *векторной* (E-*значной*) *нормой*, если оно удовлетворяет аксиомам:

(1) $p(x) = 0 \leftrightarrow \ x = 0 \quad (x \in X)$;

(2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad (x \in X,\ \lambda \in \mathbb{R})$;

(3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad (x, y \in X)$.

Векторную норму p именуют *разложимой* или *нормой Канторовича*, если

(4) для любых $e_1, e_2 \in E_+$ и $x \in X$ из $p(x) = e_1 + e_2$ следует существование таких $x_1, x_2 \in X$, что $x = x_1 + x_2$ и $p(x_l) = e_l$ $(l := 1,\ 2)$.

Тройку (X, p, E) (или проще X, (X, p), опуская подразумеваемые параметры) называют *решеточно нормированным пространством*, если p есть E-значная норма на векторном пространстве X. Если норма p разложима, то и само пространство X называют разложимым.

Если (X, p, E) — решеточно нормированное пространство, причем E — нормированная решетка, то на X можно ввести смешанную норму:

$$|\!|\!| x |\!|\!| := \|p(x)\| \quad (x \in X).$$

Нормированное пространство $X := (X, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ в этой ситуации называют также *пространством со смешанной нормой.* В силу неравенства $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ и монотонности нормы в E векторная норма p будет непрерывным оператором из $(X, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ в E.

1.8.2. Возьмем сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ в пространстве X. Говорят, что она *bo-сходится* к элементу $x \in X$ и пишут $bo\text{-}\lim x_\alpha = x$, если существует убывающая сеть $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ в E_+ такая, что $\inf e_\gamma = 0$ и для любого $\gamma \in \Gamma$ найдется индекс $\alpha\,(\gamma) \in \mathrm{A}$, для которого $p\,(x - x_\alpha) \leq e_\gamma$ при всех $\alpha \geq \alpha\,(\gamma)$. Сеть (x_α) назовем *bo-фундаментальной,* если сеть $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha,\,\beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{A}}$ является bo-сходящейся к нулю. Решеточно нормированное пространство называют *bo-полным*, если всякая o-фундаментальная сеть в нем o-сходится к элементу этого пространства. Аналогично определяется полнота относительно сходимости с регулятором. Нетрудно показать, что если E — банахова решетка, то пространство со смешанной нормой $(X, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ банахово в том и только в том случае, когда (X, p, E) полно относительно сходимости с регулятором.

Разложимое bo-полное решеточно нормированное пространство называют *пространством Банаха — Канторовича.*

Пусть (Y, q, F) — пространство Банаха — Канторовича, причем $F = q(Y)^{\perp\perp}$. Говорят, что Y *расширено*, если $mF = F$, т. е. если расширенным является нормирующее пространство F. Это равносильно тому, что Y разложимо, bo-полно и всякое дизъюнктное семейство в нем bo-суммируемо. Пространство Y называют *максимальным расширением* решеточно нормированного пространства (X, p, E) при соблюдении условий:

(1) $F = mE$ (и, в частности, Y расширено);

(2) существует линейная изометрия $\imath : X \to Y$;

(3) если Z — разложимое bo-полное подпространство Y и $\imath(X) \subset Z$, то $Z = Y$.

1.8.3. ***Теорема.*** *Пусть $(\mathscr{X}, \rho)$ — банахово пространство в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Положим $X := \mathscr{X}{\downarrow}$ и $p := \rho{\downarrow}$. Имеют место утверждения:*

(1) $(X, p, \mathscr{R}{\downarrow})$ *— это расширенное пространство Банаха — Канторовича;*

(2) *на пространстве* X *можно ввести структуру точного унитарного модуля над кольцом* $\Lambda := \mathscr{C}{\downarrow}$ *так, что*

- **(a)** $(\lambda \mathbb{1})x = \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{C},\ x \in X)$,
- **(b)** $p(ax) = |a| p(x) \quad (a \in \mathscr{C}{\downarrow},\ x \in X)$,
- **(c)** $b \leq [\![x = \mathbb{0}]\!] \leftrightarrow \chi(b)x = \mathbb{0} \quad (b \in B,\ x \in X)$, *где* χ *— изоморфизм из* B *на* $\mathfrak{E}(\mathscr{R}{\downarrow})$.

Возникшее таким образом расширенное пространство Банаха — Канторовича $\mathscr{X}{\downarrow} := (\mathscr{X}, \rho){\downarrow} := (\mathscr{X}{\downarrow}, \rho{\downarrow}, \mathscr{R}{\downarrow})$ называют *спуском банахова пространства* $(\mathscr{X}, \rho)$.

1.8.4. *Теорема.* *Для любого решеточно нормированного пространства* (X, p, E) *существует единственное с точностью до линейной изометрии банахово пространство* $\mathscr{X}$ *внутри* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, *где* $B \simeq \mathfrak{B}(p\,(X)^{\perp\perp})$, *для которого спуск* $\mathscr{X}{\downarrow}$ *является максимальным расширением* (X, p, E).

1.8.5. Банахово пространство $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ называют *булевозначной реализацией* рассматриваемого решеточно нормированного пространства X, если $\mathscr{X}{\downarrow}$ есть максимальное расширение X.

Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — булевозначные реализации пространств Банаха — Канторовича X и Y соответственно, нормированных посредством одного и того же расширенного K-пространства E. Пусть, далее, $\mathscr{L}^{(B)}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ — пространство линейных ограниченных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, где $B \simeq \mathfrak{B}(E)$. Обозначим через $\mathscr{L}_b(X, Y)$ множество линейных операторов из $T : X \to Y$, ограниченных в следующем смысле: существует $\pi \in \mathrm{Orth}(E)$ такой, что $|Tx| \leq \pi |x|$ при всех $x \in X$. Спуск операторов $\mathscr{T} \mapsto \mathscr{T}{\downarrow}$ осуществляет линейную изометрию решеточно нормированных пространств $\mathscr{L}^{(B)}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}){\downarrow}$ и $\mathscr{L}_b(X, Y)$.

1.8.6. Пусть X — нормированное пространство. Допустим, что в $\mathscr{L}(X)$ имеется полная булева алгебра $\mathscr{B}$ проекторов единичной нормы, изоморфная B. В этой ситуации мы будем отождествлять булевы алгебры $\mathscr{B}$ и B и писать $B \subset \mathscr{L}(X)$. Назовем X *нормированным B-пространством*, если $B \subset \mathscr{L}(X)$ и для любого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в B выполнены два условия:

(1) если для некоторого $x \in X$ верно $b_\xi x = 0$ для всех $\xi \in \Xi$, то $x = 0$;

(2) если для $x \in X$ и семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в X верно $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$, то $\|x\| \le \sup\{\|b_\xi x_\xi\| : \xi \in \Xi\}$.

Условия (1) и (2) равносильны следующим условиям ($1'$) и ($2'$) соответственно:

($1'$) для каждого $x \in X$ существует наибольший проектор $b \in B$ такой, что $bx = 0$;

($2'$) если x, (x_ξ) и (b_ξ) те же, что и в (2), то

$$\|x\| = \sup\{\|b_\xi x_\xi\| : \xi \in \Xi\}.$$

Из ($2'$) следует, в частности, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} b_k x\right\| = \max_{k:=1,\dots,n} \|b_k x\|$$

для $x \in X$ и попарно дизъюнктных проекторов $b_1, \dots, b_n \in B$.

Элемент $x \in X$, удовлетворяющий условию $b_\xi x = b_\xi x_\xi$, где (b_ξ) — разбиение единицы, будем называть *перемешиванием* семейства (x_ξ) (относительно (b_ξ)). При соблюдении условия (1) перемешивание единственно. Условие (2) допускает такую эквивалентную формулировку: единичный шар B_X замкнут относительно перемешиваний.

Нормированное B-пространство назовем B-*циклическим*, если в нем существует перемешивание любого ограниченного по норме семейства относительно любого разбиения единицы в B. Учитывая сказанное выше, можем утверждать, что нормированное пространство X будет B-циклическим тогда и только тогда, когда для любого разбиения единицы $(b_\xi) \subset B$ и произвольного семейства $(x_\xi) \subset B_X$ существует единственный элемент $x \in B_X$ такой, что $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ для всех ξ.

Изометрию нормированных B-пространств назовем B-изометрией, если она линейна и перестановочна с каждым проектором из B. Будем говорить, что Y — это B-циклическое расширение B-пространства X, если Y является B-циклическим и существует B-изометрия $\imath : X \to Y$ такая, что всякое B-циклическое подпространство в Y, содержащее $\imath(X)$, совпадает с Y. Можно показать, что для банахова B-пространства существует единственное с точностью до B-изометрии B-циклическое расширение.

Возьмем банахово пространство $(\mathscr{X}, \rho)$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Пусть Λ — ограниченная часть K-пространства $\mathscr{C}{\downarrow}$ (= порядковый идеал в $\mathscr{C}{\downarrow}$, порожденный единицей). Ограниченную $\mathscr{R}{\downarrow}$, порожденный единицей). Ограниченную часть пространства $\mathscr{X}{\downarrow}$, т. е. множество $\{x \in \mathscr{X}{\downarrow} : \rho{\downarrow}(x) \in \Lambda\}$, называют *ограниченным спуском* $\mathscr{X}$ и обозначают иногда символом $\mathscr{X}{\downarrow}^{\infty}$. Ограниченный спуск банахова пространства является банаховым пространством со смешанной нормой $|\!|\!|x|\!|\!| := \|p(x)\|_{\infty}$, где $\|z\|_{\infty} := \inf\{0 < \alpha \in \mathbb{R} : |z| \leq \alpha\mathbb{1}\}$ для $z \in \Lambda$.

1.8.7. *Теорема.* *Для банахова пространства X равносильны следующие утверждения:*

- **(1)** *X — разложимое пространство со смешанной нормой, причем нормирующая решетка является K-пространством ограниченных элементов;*
- **(2)** *X — банахово B-пространство;*
- **(3)** *B-циклическое расширение пространства X является B-изометричным ограниченному спуску некоторого банахова пространства из модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.*

1.8.8. Предположим, что X — нормированное B-пространство и Y — B-циклическое банахово пространство. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ обозначают булевозначные реализации X и Y.

Пространство $\mathscr{L}_B(X, Y)$ всех ограниченных линейных операторов, перестановочных с проекторами из B, является B-изометричным ограниченному спуску пространства $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ ограниченных линейных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Более того, оператору $T \in \mathscr{L}_B(X, Y)$ соответствует элемент $\mathscr{T} := T{\uparrow}$ из $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, определяемый формулами $[\![\, \mathscr{T} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y} \,]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\, \mathscr{T}\imath x = \imath T x \,]\!] = \mathbb{1}$ для всех $x \in X$, где $\imath$ одновременно обозначает вложения X в $\mathscr{X}{\downarrow}$ и Y в $\mathscr{Y}{\downarrow}$.

1.8.9. Пространство $X^{\#} := \mathscr{L}_B(X, \Lambda)$ будем называть *B-сопряженным* к X.

Пусть $\mathscr{X}^*$ — пространство, сопряженное к $\mathscr{X}$. Обозначим через $\simeq$ и $\simeq_B$ отношения изометрического изоморфизма и изометрического B-изоморфизма между банаховыми пространствами. Предположим дополнительно, что X, Y, $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ таковы же, как и в 1.8.8.

- **(1)** $X^{\#} \simeq_B Y \leftrightarrow [\![\, \mathscr{X}^* \simeq \mathscr{Y} \,]\!] = \mathbb{1}$.
- **(2)** *Если $\overline{X}$ — это B-циклическое пополнение X, то имеет место равенство $X^{\#} = \overline{X}^{\#}$.*

1.8.10. Пусть A — *стоунова алгебра* (= коммутативная AW^*-алгебра) и B — полная булева алгебра ее проекторов. Рассмотрим унитарный A-модуль X. Отображение $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : X \times X \to A$ называют *A-значным скалярным произведением*, если для любых $x, y, z \in X$ и $a \in A$ выполнены условия:

(1) $\langle x \,|\, x \rangle \geq \mathbb{0}$; $\langle x \,|\, x \rangle = \mathbb{0} \leftrightarrow x = \mathbb{0}$;

(2) $\langle x \,|\, y \rangle = \langle y,\ x \rangle^*$;

(3) $\langle ax \,|\, y \rangle = a \langle x \,|\, y \rangle$;

(4) $\langle x + y \,|\, z \rangle = \langle x \,|\, z \rangle + \langle y \,|\, z \rangle$.

Располагая A-значным скалярным произведением, можно ввести в X норму по формуле

(5) $|\!|\!| x |\!|\!| := \sqrt{\| \langle x | x \rangle \|} \quad (x \in X)$,

а также векторную норму

(6) $|x| := \sqrt{\langle x | x \rangle} \quad (x \in X)$.

При этом $|\!|\!| x |\!|\!| = \| |x| \|$ $(x \in X)$, т. е. (5) определяет смешанную норму на X.

Можно показать, что пара $(X, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ представляет собой B-циклическое банахово пространство в том и только в том случае, если $(X, |\cdot|)$ — пространство Банаха — Канторовича [36].

Модулем Капланского — Гильберта или *AW^*-модулем* (*над* A) называют унитарный A-модуль с A-значным скалярным произведением, удовлетворяющий любому из этих двух эквивалентных условий.

1.8.11. *Теорема.* *Ограниченный спуск произвольного гильбертова пространства в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ является модулем Капланского — Гильберта над стоуновой алгеброй Λ. Наоборот, если X — модуль Капланского — Гильберта над Λ, то существует гильбертово пространство $\mathscr{X}$ в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, ограниченный спуск которого унитарно эквивалентен X. Это пространство единственно с точностью до унитарной эквивалентности внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.*

1.8.12. Как обычно, элемент $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ называют *булевозначной реализацией* модуля Капланского — Гильберта X.

Предположим, что $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ — пространство ограниченных линейных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Пусть $\mathrm{Hom}(X, Y)$ обозначает пространство всех ограниченных Λ-линейных операторов из

X в Y, где X и Y — модули Капланского — Гильберта над стоуновой алгеброй Λ. Легко видеть, что $\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathscr{L}_B(X, Y)$.

Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — гильбертовы пространства внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Пусть X и Y обозначают ограниченные спуски $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$. Для каждого ограниченного Λ-линейного оператора $\Phi : X \to Y$ элемент $\varphi := \Phi\uparrow$ является ограниченным линейным оператором из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Более того, $[\![\, \|\varphi\| \leq c^\wedge \,]\!] = \mathbb{1}$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. Отображение $\Phi \mapsto \varphi$ является B-линейной изометрией между B-циклическими банаховыми пространствами $\mathrm{Hom}(X, Y)$ и $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\downarrow^\infty$.*

1.8.13. Примечания.

(1) Впервые понятие решеточно нормированного пространства появилось в работе Л. В. Канторовича [19]. Аксиома разложимости 1.8.1 (4) необычна и в последующем иногда опускалась как несущественная. Ее принципиальное значение выяснилось в рамках булевозначного анализа (см. [29]). В упомянутой работе Л. В. Канторовича были введены также мажорируемые операторы, см. также [20]. Продвинутая теория мажорируемых операторов построена лишь в последние 10–15 лет (см. [29, 34, 39]).

(2) Пространства со смешанной нормой в смысле этого параграфа изучались в [32], см. также [34]. Там же имеются различные приложения концепции смешанной нормы к геометрии банаховых пространств и теории линейных операторов. Ограниченный спуск ранее изучал Г. Такеути в связи с алгебрами фон Неймана и C^*-алгебрами в булевозначных моделях [112, 113].

(3) Современная структурная теория AW^*-алгебр и AW^*-модулей начинается с работ И. Капланского [83–85]. Такие объекты естественно возникают на пути алгебраизации теории операторных алгебр фон Неймана. Результаты о булевозначной реализации AW^*-алгебр и AW^*-модулей получил М. Озава [97–100].

1.9. Нестандартные оболочки

В геометрической теории банаховых пространств важное место занимает понятие нестандартной оболочки.

1.9.1. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — внутреннее нормированное пространство. Элемент $x \in E$ называют *конечным* (*бесконечно малым*), если $\|x\|$ — конечное (бесконечно малое) число. Обозначим через $\mathrm{fin}(E)$ и

$\mu(E)$ внешние множества соответственно всех конечных и всех бесконечно малых элементов пространства E. Тогда $\operatorname{fin}(E)$ — (внешнее) векторное пространство над полем ${}^\circ\mathbb{R}$, а $\mu(E)$ — его подпространство. Фактор-пространство $\operatorname{fin}(E)/\mu(E)$ обозначают символом $\widehat{E}$. На $\widehat{E}$ вводят норму формулой

$$\|\pi x\| = \operatorname{st}(\|x\|) \in {}^\circ\mathbb{R} \quad (x \in \operatorname{fin}(E)),$$

где $\pi : \operatorname{fin}(E) \to \widehat{E}$ — фактор-гомоморфизм. При этом $(\widehat{E}, \|\cdot\|)$ — внешнее нормированное пространство, именуемое *нестандартной оболочкой* E. Если внутренняя размерность E конечна, то пространство $\widehat{E}$ называют *гиперконечномерным.* Если пространство $(E, \|\cdot\|)$ стандартно, то ${}^\circ E$ с индуцированной из E нормой будет внешним нормированным пространством, а ограничение π на ${}^\circ E$ — изометрическим вложением ${}^\circ E$ в $\widehat{E}$. Обычно считают, что ${}^\circ E \subset \widehat{E}$.

1.9.2. *Теорема.* *Пространство $\widehat{E}$ банахово для каждого внутреннего (не обязательно полного) нормированного пространства E.*

$\lhd$ Пусть $B_X(a, r)$ — замкнутый шар в X с центром в a радиуса r. Возьмем последовательность вложенных шаров $B_{\widehat{E}}(\widetilde{x}_n, r_n)$, где $(x_n)_{n\in{}^\circ\mathbb{N}} \subset E$, $\widetilde{x}_n = \pi x_n$, $(r_n)_{n\in{}^\circ\mathbb{N}} \subset {}^\circ\mathbb{R}$ и $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Можно считать, что r_n убывает. Тогда последовательность внутренних замкнутых шаров $B_E(x_n, r_n + r_n/2^{n+1}) \subset E$ вложенная. В силу принципа идеализации существует элемент $x \in E$, содержащийся в каждом из этих шаров. Элемент $\widetilde{x} = \pi x$ — общая точка шаров $B_{\widehat{E}}(\widetilde{x}_n, r_n)$. $\rhd$

1.9.3. Допустим, что E — внутренняя нормированная решетка. Тогда в $\widehat{E}$ можно ввести отношение порядка так, чтобы фактор-гомоморфизм π оказался положительным. Точнее, если $\widetilde{x} := \pi x$ и $y := \pi y$, то полагают по определению

$$\widetilde{x} \leq \widetilde{y} \leftrightarrow (\exists z \in \mu(E))(x \leq y + z).$$

Теорема. *Нестандартная оболочка $\widehat{E}$ — банахова решетка с секвенциально o-непрерывной нормой. Более того, всякая возрастающая и ограниченная по норме последовательность в $\widehat{E}$ будет порядково ограниченной.*

В то же время следует подчеркнуть, что нестандартная оболочка внутренней нормированной решетки может и не являться K-пространством (и даже K_σ-пространством; например, $\widehat{c}_0$, где c_0 — решетка сходящихся к нулю последовательностей).

1.9.4. *Теорема.* *Для любой внутренней нормированной решетки E равносильны утверждения:*

(1) *$\widehat{E}$ есть K-пространство;*

(2) *$\widehat{E}$ есть K_σ-пространство;*

(3) *$\widehat{E}$ имеет о-непрерывную норму;*

(4) *в $\widehat{E}$ не существует замкнутой подрешетки, изометрически и порядково изоморфной c_0.*

1.9.5. Говорят, что нормированная решетка *богата конечномерными подрешетками*, если выполняется следующее условие: для каждого конечного набора $x_1, \dots, x_n \in {}^\circ E, n \in {}^\circ\mathbb{N}$, и произвольного $0 < \varepsilon \in {}^\circ\mathbb{R}$ существуют конечномерная подрешетка $E_0 \subset {}^\circ E$ и элементы $y_1, \dots, y_n \in E_0$ такие, что $\|x_k - y_k\| < \varepsilon$ $(k := 1, \dots, n)$.

Стандартная банахова решетка E богата конечномерными подрешетками в том и только в том случае, если ${}^\circ E$ содержится в некотором гиперконечномерном подпространстве оболочки $\widehat{E}$.

1.9.6. Предположим теперь, что E и F — внутренние нормированные пространства и $T : E \to F$ — внутренний линейный ограниченный оператор. Множество

$$c(T) := \{C \in \mathbb{R} : (\forall x \in E)\|Tx\| \le C\|x\|\}$$

внутреннее и ограничено снизу. Поэтому существует $\|T\| := \inf c(T)$. Если $\|T\|$ — конечное число, то из неравенства $\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|$ для всех $x \in E$ видно, что $T(\operatorname{fin}(E)) \subset \operatorname{fin}(E)$ и $T(\mu(E)) \subset \mu(E)$. Следовательно, корректно определен внешний оператор $\widehat{T} : \widehat{E} \to \widehat{F}$ формулой

$$\widehat{T}\pi x = \pi T x \quad (x \in E).$$

Оператор $\widehat{T}$ линеен (над ${}^\circ\mathbb{R}$) и ограничен, причем $\|\widehat{T}\| = \operatorname{st}(\|T\|)$. Естественно называть $\widehat{T}$ *нестандартной оболочкой* T.

Если E и F — нормированные решетки, а оператор T положителен, то $\widehat{T}$ — положительный секвенциально o-непрерывный оператор.

1.9.7. Нетрудно видеть, что для ограниченных операторов S и T выполняется $(S \circ T)^\wedge = \widehat{S} \circ \widehat{T}$, а кроме того, $\widehat{I_E} = I_{\widehat{E}}$, где I_X — тождественный оператор на X. Таким образом, операция нестандартной оболочки представляет собой ковариантный функтор (в подходящих категориях нормированных пространств). Возникает огромное число вопросов относительно общих свойств этого функтора. Как взаимодействует функтор нестандартной оболочки с другими функторами теории банаховых пространств (решеток)? Как преобразуются известные в геометрической теории банаховых пространств свойства (Радона — Никодима, Крейна — Мильмана и т. п.) при действии этого функтора? Как устроены оболочки конкретных пространств? Аналогичные вопросы можно сформулировать и для операторов. С основными идеями и методами можно ознакомиться по обзорам [70, 73, 75]. Здесь же мы вкратце упомянем три направления исследования и сформулируем простые утверждения иллюстративного характера.

1.9.8. Вопрос об аналитическом описании нестандартных оболочек наиболее полно изучен для случая классических банаховых пространств, см. [75].

Теорема. *Справедливы утверждения:*

(1) *Если E — внутреннее AL_p-пространство, где p, $p \geq 1$, — конечный элемент $\mathbb{R}$, то $\widehat{E}$ — это AL_r-пространство для $r = \mathrm{st}(p)$.*

(2) *Если E — внутреннее AL_p-пространство, где p, $p \geq 1$, — бесконечный элемент $\mathbb{R}$, или если E — внутреннее AM-пространство, то $\widehat{E}$ — это AM-пространство.*

(3) *Если Q — внутренний компакт, а $C(Q)$ — внутреннее пространство непрерывных функций из Q в $\mathbb{R}$, то $C(Q)^\wedge$ линейно изометрично $C(\widehat{Q})$, где $\widehat{Q}$ — внешнее пополнение Q в некоторой равномерности.*

В аксиоматической теории внешних множеств можно получать лишь общие результаты такого рода. Однако если работать в классической установке нестандартного анализа (т. е. в конечном фрагменте универсума фон Неймана), то возможно детальное описание нестандартных оболочек. Так, например, если нестандартная суперструктура ω_0-насыщена (ограничение снизу) и при этом обладает свойством ω_0 -изоморфизма (ограничение сверху), то нестандартная оболочка банаховой решетки L_p ([0,1]) изометрически изоморфна $\mathfrak{l}_p$-сумме k экземпляров пространства $L_p([0,1]^k)$, где $k = 2^{\omega_0}$.

1.9.9. Обратимся к локальной геометрии нормированных пространств. Напомним, что некоторые свойства нормированного пространства являются «локальными» в том смысле, что они определяются устройством и расположением конечномерных подпространств изучаемого пространства. В этом смысле нестандартные оболочки устроены намного лучше. Так, например, часто случается, что если какое-то свойство выполнено «приближенно» на конечномерных подпространствах, то это же свойство в нестандартной оболочке выполняется уже «точно».

Пусть E и F — банаховы решетки. Говорят, что E *финитно представима* в F (как банахова решетка), если для каждой конечномерной подрешетки $E_0 \subset E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует линейный и решеточный изоморфизм $T : E_0 \to F$ такой, что $\|x\| \leq \|Tx\| \leq (1+\varepsilon)\|x\|$ для всех $x \in E_0$.

Теорема. *Предположим, что E — стандартная банахова решетка, богатая конечномерными подрешетками (1.9.5), а F — внутренняя банахова решетка. Тогда ${}^\circ E$ финитно представима в $\widehat{F}$ в том и только в том случае, если стандартное ядро ${}^\circ E$ линейно изометрично и решеточно изоморфно подрешетке в $\widehat{F}$.*

1.9.10. Обратимся теперь к некоторым теоретико-модельным свойствам банаховых пространств.

Введем следующий язык первого порядка $\mathbb{L}_B$. Сигнатура этого языка — $\{=, +, p, Q\} \cup \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.

Всякое банахово пространство E можно рассматривать как модель $\mathbb{L}_B$, интерпретируя $=$ и $+$ соответственно как равенство и сложение, p — как $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$, Q — как $\{x \in E : \|x\| \geq 1\}$ и, наконец, каждое $r \in \mathbb{Q}$ — как операцию умножения на r.

Формулу φ языка $\mathbb{L}_B$ вида $(Sx_1)\dots(Sx_n)(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$, где S — ограниченный квантор, а φ_k — конъюнкция формул вида $u = v, p(u), Q(u)$, называют *ограниченной позитивной*.

Если φ — формула и m — натуральное число ($\neq 0$), то φ^m — новая формула, которая строится следующим образом. В подформулах $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ заменяют $u = v$ на $p(m(u-v))$, $p(u)$ на $p((1-1/m)u)$, $Q(u)$ на $Q((1+1/m)u)$. Если φ^m выполняется в E для всех $m \in \mathbb{N}$, то говорят, что φ *выполнено в E аппроксимативно*.

Банаховы пространства E и F называются *аппроксимативно эквивалентными*, если в них выполняются аппроксимативно одни и те же ограниченные позитивные формулы.

Теорема. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Банаховы пространства являются аппроксимативно эквивалентными в том и только в том случае, если они имеют изометричные нестандартные оболочки.*

(2) *Пусть $1 \le p < \infty$, а μ и ν — конечные меры. Пространства $L_p(\mu)$ и $L_p(\nu)$ являются аппроксимативно эквивалентными в том и только в том случае, если меры μ и ν имеют одно и то же конечное число атомов или же обе имеют бесконечное число атомов.*

1.9.11. Примечания.

(1) Нестандартная оболочка банахова пространства была введена Люксембургом [90]. Разновидностью нестандартной оболочки является ультрапроизведение банаховых пространств, введенное Дакуня–Кастелем и Кривиным [66]. О роли этих понятий в теории банаховых пространств и важнейших результатах, а также соответствующую библиографию см. в [70, 73, 75].

(2) Язык первого порядка, описанный в 1.9.10, применил Хенсон [71], а затем Штерн [111, 110]. Понятия финитной представимости возникли в теории банаховых пространств задолго до привлечения теоретико-модельной техники. Оно введено А. Дворецким (термин принадлежит Джеймсу).

(3) Относительно 1.9.4, 1.9.5 и 1.9.9 см. [44, 52]. Результаты из 1.9.8 установлены в [72] и [74], а 1.9.10 — в [72].

1.10. Мера Лёба

Одной из наиболее важных конструкций нестандартного анализа является мера Лёба, нашедшая применение в ряде разделов функционального анализа, теории вероятностей и стохастическом моделировании, см. [3, 65]. В этом параграфе мы приведем несколько результатов о строении меры Лёба.

1.10.1. Пусть $(X, \mathscr{A}, \nu)$ — внутреннее пространство с конечно аддитивной положительной мерой; точнее, $\mathscr{A}$ — внутренняя алгебра подмножеств внутреннего множества X и $\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ — внутренняя конечно аддитивная положительная функция на. Рассмотрим внешнюю функцию ${}^\circ\nu : A \mapsto {}^\circ(\nu(A)) \in {}^\circ\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $(A \in \mathscr{A})$, где ${}^\circ(\nu(A))$ — стандартная часть $\nu(A)$, если $\nu(A)$ конечно и ${}^\circ(\nu(A)) = +\infty$ в противном случае. Легко видеть, что функция ${}^\circ\nu$ конечно аддитивна.

1.10.2. *Теорема.* *Конечно аддитивная мера* ${}^\circ\nu : \mathscr{A} \to {}^\circ\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *обладает единственным счетно аддитивным распространением* λ *на* σ*-алгебру* $\sigma(\mathscr{A})$*, порожденную алгеброй* $\mathscr{A}$*. Более того,*

$$\lambda(B) = \inf\{{}^\circ\nu(A) :\ B \subset A,\ A \in \mathscr{A}\} \quad (B \in \sigma(\mathscr{A})).$$

Если $\lambda(B) < +\infty$*, то верно также*

$$\lambda(B) = \sup\{{}^\circ\nu(A) :\ A \subset B,\ A \in \mathscr{A}\} \quad (B \in \sigma(\mathscr{A})),$$

причем для каждого $B \in \sigma(\mathscr{A})$ *существует* $A \in \mathscr{A}$ *такой, что* $\lambda(A \triangle B) = 0$.

Для произвольного $B \in \sigma(\mathscr{A})$ *либо существует* $A \in \mathscr{A}$ *такое, что* $A \subseteq B$ *и* ${}^\circ\nu(A) = +\infty$*, либо существует последовательность* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *множеств из* $\mathscr{A}$*, такая, что* $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *и* ${}^\circ\nu(A_n) < +\infty$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

1.10.3. Пусть $S(\mathscr{A})$ — пополнение $\sigma(\mathscr{A})$ относительно меры λ, а ν_L — продолжение λ на $S(\mathscr{A})$. Можно показать, что если $\nu_L(X) < +\infty$, то $B \in S(\mathscr{A})$ в том и только в том случае, когда

$$\sup\{{}^\circ\nu(A) :\ A \subseteq B,\ A \in \mathscr{A}\} = \inf\{{}^\circ\nu(A) :\ B \subseteq A,\ A \in \mathscr{A}\} = \nu_L(B).$$

Набор $(X, S(\mathscr{A}), \nu_L)$, представляющий собой пространство с σ-аддитивной мерой ν_L, называют *пространством Лёба*, а меру ν_L — *мерой Лёба.*

1.10.4. Функция $f : X \to {}^\circ\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ называется *измеримой по Лёбу*, если она измерима относительно σ-алгебры $S(\mathscr{A})$. Внутренняя функция $F : X \to \mathbb{R}$ называется $\mathscr{A}$-измеримой, если $\{x \in X : F(x) \leq t\} \in \mathscr{A}$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Внутренняя функция F называется *простой*, если $\mathrm{rng}(F)$ есть гиперконечное множество. Очевидно, простая внутренняя функция F является $\mathscr{A}$-измеримой тогда и только тогда, когда $F^{-1}(\{t\}) \in \mathscr{A}$ для любого $t \in \mathbb{R}$. В этом случае для F определен внутренний интеграл

$$\int\limits_X F\,d\nu = \sum_{t \in rng(F)} F(t)\nu(F^{-1}(\{t\})).$$

Если $A \in \mathscr{A}$, то, как обычно, $\int_A F\,d\nu = \int_X f \cdot \chi_A\,d\nu$, где χ_A — характеристическая функция множества A.

Обозначим $A_N := \{x \in X : |F(x)| \geq N\}$. Внутренняя простая $\mathscr{A}$-измеримая функция $F : X \to \mathbb{R}$ называется $\mathscr{S}$-интегрируемой, если $\int_{A_N} F\,d\nu \approx 0$, для любого бесконечно большого $N \in \mathbb{N}$. Две следующие теоремы относятся к случаю пространств Лёба с конечной мерой: $\nu_L(X) < +\infty$.

1.10.5. Теорема. *Для любой внутренней простой $\mathscr{A}$-измеримой функции $F : X \to \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *F является $\mathscr{S}$-интегрируемой;*

(2) *${}^\circ\int_X |F|\,d\nu < +\infty$ и $\nu(A) \approx 0$ влечет $\int_A |F|\,d\nu \approx 0$ для любого $A \in \mathscr{A}$;*

(3) *$\int_X {}^\circ|F|\,d\nu_L = {}^\circ\int_X |F|\,d\nu$.*

Внутренняя $\mathscr{A}$-измеримая функция $F : X \to \mathbb{R}$ называется *лифтингом* функции $f : X \to {}^\circ\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, если $f(x) = {}^\circ F(x)$ для ν_L-почти всех x.

1.10.6. Теорема. *Имеют место утверждения:*

(1) *Функция $f : X \to {}^\circ\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ измерима тогда и только тогда, когда она имеет лифтинг.*

(2) *Функция $f : X \to {}^\circ\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ интегрируема тогда и только тогда, когда она имеет $\mathscr{S}$-интегрируемый лифтинг $F : X \to \mathbb{R}$.*

(3) *Если $F : X \to \mathbb{R}$ — это $\mathscr{S}$-интегрируемый лифтинг функции $f : X \to {}^\circ\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, то имеет место равенство $\int_X f\,d\nu_L = {}^\circ\int_X F\,d\nu$.*

1.10.7. Предположим, что X — гиперконечное множество, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$ и $\nu(A) = \Delta|A|$ при любом $A \in \mathscr{A}$, где Δ — значение ν на одноэлементных подмножествах X, а $|A|$ — число элементов множества A.

Соответствующее пространство Лёба обозначается $(X, S_\Delta, \nu_\Delta)$, а мера ν_Δ называется *равномерной мерой Лёба*.

Если $\Delta = |X|^{-1}$, то пространство Лёба называют *каноническим* и обозначают (X, S, ν_L) или (X, S^X, ν_L^X).

В случае равномерных мер Лёба всякая внутренняя функция $F : X \to \mathbb{R}$ является простой и $\mathscr{A}$-измеримой, причем $\int_A F\,d\nu = \Delta\sum_{x\in A} F(x)$ для любого $A \in \mathscr{A}$.

Мера Лёба ν_Δ конечна при условии, что число $\Delta \cdot |X|$ конечно. В случае конечной меры Лёба, если $F : X \to \mathbb{R}$ является $\mathscr{S}$-интегрируемым лифтингом функции $f : X \to {}^\circ\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, то в силу теоремы 1.10.6

$$\int\limits_X f\,d\nu_\Delta = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{x\in X} F(x)\right).$$

1.10.8. *Теорема.* *Пусть $(X, \mathscr{A}, \mu)$ — стандартное пространство с σ-конечной мерой. Тогда найдутся внутреннее гиперконечное множество $\mathscr{X} \subset X$ и положительное число $\Delta \in \mathbb{R}$ такие, что для любой стандартной интегрируемой функции $f : X \to \mathbb{R}$ выполняется*

$$\int\limits_X f\,d\mu = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{\xi\in \mathscr{X}} f(\xi)\right).$$

Иными словами, в условиях теоремы существуют гиперконечное натуральное число $N \in \mathbb{N} \setminus {}^\circ\mathbb{N}$, набор элементов $\mathscr{X} := \{x_1, \dots, x_N\} \subset X$ и число $\Delta \in \mathbb{R}$, для которых

$$\int\limits_X f\,d\mu = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\right).$$

Теорема 1.10.8 имеет место и в случае σ-конечной меры [15].

1.10.9. Применим теперь конструкцию меры Лёба к измеримому семейству мер. Пусть $(X, \mathscr{A})$ — некоторое измеримое пространство и $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ — пространство с мерой, т. е., как обычно, X и Y — непустые множества, $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — некоторые σ-алгебры подмножеств в X и Y соответственно, ν — мера на $\mathscr{B}$.

Случайной мерой называют функцию $\lambda : \mathscr{A} \times Y \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям:

(1) для любого $A \in \mathscr{A}$ функция $\lambda_A := \lambda(A, \cdot) : Y \to \mathbb{R}$ $\mathscr{B}$-измерима;

(2) существует подмножество $\overline{Y} \subset Y$ полной ν-меры такое, что функция $\lambda_y := \lambda(\cdot, y) : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ является мерой на $\mathscr{A}$ для любого $y \in \overline{Y}$.

Будем писать $\lambda : \mathscr{A} \times Y_{\mathscr{B}} \to \mathbb{R}$, отмечая тем самым, что Y рассматривается с σ-алгеброй $\mathscr{B}$.

Пусть в дальнейшем объекты $(X, \mathscr{A})$, $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ и λ — внутренние, причем λ ограничена стандартной константой. Пространство Лёба $L(X, S(\mathscr{B}), \nu_L)$ будем коротко обозначать символом $L(\mathscr{B}) :=$

$L(\mathscr{B}, \nu)$. Для каждого $y \in \overline{Y}$ для меры λ_y построим меру Лёба $(\lambda_y)_L : L(\mathscr{A}, \lambda_y) \to {}^\circ\mathbb{R}$. Пусть $\sigma(\mathscr{A})$ — наименьшая внешняя σ-алгебру, содержащая алгебру $\mathscr{A}$. По построению меры Лёба $\sigma(\mathscr{A}) \subset L(\mathscr{A}, \lambda_y)$ для каждого $y \in \overline{Y}$.

Определим функцию $\lambda^L : \sigma(\mathscr{A}) \times Y \to {}^\circ\mathbb{R}$ следующим образом: для каждого $y \in \overline{Y}$ и $A \in \sigma(\mathscr{A})$ положим $\lambda^L(A, y) := (\lambda_y)_L(A)$; на $Y \setminus \overline{Y}$ доопределим λ^L произвольно.

1.10.10. *Теорема.* *Функция $\lambda^L : \sigma(\mathscr{A}) \times Y_{L(\mathscr{B})} \to {}^\circ\mathbb{R}$ является внешней случайной мерой.*

$\lhd$ Прежде всего заметим, что $\lambda^L_y = (\lambda_y)_L$ и $\nu_L(Y \setminus \overline{Y}) = 0$, откуда следует, что λ^L_y является мерой для ν_L-почти всех $y \in Y$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество таких $A \in \sigma(\mathscr{A})$, для которых функция $\lambda^L_A = \lambda^L(A, \cdot)$ является $L(\mathscr{B})$-измеримой. Если $A \in \mathscr{A}$, то $\lambda^L_A(y) = \lambda^L_y(A) = {}^\circ\lambda_y(A) = {}^\circ\lambda_A(y)$ для любого $y \in \overline{Y}$. Следовательно, λ_A есть поднятие λ^L_A. Так как функция λ_A является $\mathscr{B}$-измеримой, по теореме о поднятии функция λ^L_A будет $L(\mathscr{B})$-измеримой, т. е. $\mathscr{A} \subset \mathfrak{M}$.

Пусть теперь $(A_n)_{n \in {}^\circ\mathbb{N}}$ — монотонная последовательность множеств из $\mathfrak{M}$, причем $A = \lim_{n \to \infty} A_n$. Тогда $A \in \sigma(\mathscr{A})$.

Поскольку $\lambda^L_y = \lim_{n \to \infty} \lambda^L_y(A_n)$ для любого $y \in \overline{Y}$, то функция λ^L_A будет $L(\mathscr{B})$-измерима как предел последовательности $L(\mathscr{B})$-измеримых функций $(\lambda^L_{A_n})_{n \in {}^\circ\mathbb{N}}$. Тем самым $\mathfrak{M}$ — монотонный класс, следовательно, $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathfrak{M}$. Остается заметить, что по построению $\mathfrak{M} \subset \sigma(\mathscr{A})$. $\rhd$

Семейство мер $\lambda^L_{(\cdot)}$ рассматривается только на $\sigma(\mathscr{A})$, так как на более широкой σ-алгебре оно может не быть случайной мерой.

1.10.11. Указанные выше свойства меры Лёба можно использовать для дискретизации операторов, т. е. для построения гиперконечномерной аппроксимации операторов.

Рассмотрим стандартное семейство пространств с σ-конечными мерами $(X, \mathscr{A}, \lambda_y)_{y \in \mathscr{Y}}$, где $\lambda_y = \lambda(\cdot, y)$ для некоторой стандартной функции $\lambda : \mathscr{A} \times Y \to \mathbb{R}$. Введем обозначения: $\mathscr{F}(Y) := \mathbb{R}^Y$, $\mathscr{L}_1(X) := \{f : X \to \mathbb{R} : f$ является λ_y-интегрируемой для всех $y \in Y\}$. Для конечного набора $\mathscr{X} = \{x_1, \dots, x_N\}$ элементов X обозначим символом π_X «проектор» из $\mathscr{L}_1(X)$ в $\mathbb{R}^N$, сопоставляющий функции $f \in \mathscr{L}_1(\mathscr{X})$ вектор $(f(x_1), \dots, f(x_N))$. Аналогично для конечного набора $\mathscr{Y} = \{y_1, \dots, y_M\}$ элементов Y определим

$\pi_Y : \mathscr{F}(Y) \to \mathbb{R}^M$ по правилу $\pi_Y(F) = (F(y_1), \dots, F(y_M))$.

Обозначим через T псевдоинтегральный оператор, действующий из $\mathscr{L}_1(\mathscr{X})$ в $\mathscr{F}(Y)$ следующим образом:

$$(Tf)(y) = \int\limits_X f\, d\lambda_y \quad (f \in \mathscr{L}_1(\mathscr{X})).$$

1.10.12. *Теорема.* *В пространствах X и Y существуют конечные наборы элементов $\mathscr{X} := \{x_1, \dots, x_N\}$ и $\mathscr{Y} := \{y_1, \dots, y_M\}$, а также матрица Λ размера $N \times M$ такие, что для любой стандартной функции $f \in \mathscr{L}_1(X)$ выполнено $\pi_Y(Tf) \approx \Lambda \pi_X(f)$, т. е.*

$$\int f\, d\lambda_{y_l} \approx \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Lambda_{kl} \quad (l = 1, \dots, M).$$

Другими словами, следующая диаграмма коммутативна с точностью до бесконечно малых:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}_1(X) & \xrightarrow{T} & \mathscr{F}(Y) \\ {\scriptstyle \pi_X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ \mathbb{R}^N & \xleftarrow[\Lambda]{} & \mathbb{R}^M \end{array}$$

1.10.13. *Теорема.* *Существуют $\mathscr{Y} = \{y_1, \dots, y_M\}$ — набор элементов Y и матрица $\Lambda := (\Lambda_{kl})$ такие, что $\Lambda_{kl} = \Delta \cdot K(x_k, y_j)$ и $\pi_Y(Tf) \approx \Lambda \pi_X(f)$.*

1.10.14. Примечания.

(1) Материал пунктов 1.10.1–1.10.7 хорошо известен, см. [3, 65]; в нашем изложении мы придерживаемся [68]. Теорему 1.10.8 установил Е. И. Гордон [15]. В серии работ Е. И. Гордона развиты также техника гиперконечномерных аппроксимаций для интегральных операторов [13, 68] и нестандартные методы дискретизации для гармонического анализа [16, 68].

(2) Конструкция меры Лёба без труда обобщается на случай векторной меры со значениями в банаховом пространстве. Однако для мер со значениями в векторной решетке без нормы этот вопрос сложнее, даже если полноту по норме заменить на порядковую полноту.

(3) Теоремы 1.10.12 и 1.10.13 получил В. Г. Троицкий [60].

1.11. Булевозначное моделирование в нестандартном универсуме

В булевозначном анализе выделен новый важный класс математических структур, обладающих свойством цикличности (= устойчивости относительно перемешиваний, см. 1.2.6 (2)). Эти объекты представляют собой спуски соответствующих образований в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, см. 1.2.8. Развитая инфинитезимальным анализом методология, по существу, связана с созданием специального аппарата для изучения фильтров — *монадологии*.

В самом деле, пусть $\mathscr{F}$ — стандартный фильтр, ${}^{\circ}\mathscr{F}$ — его стандартное ядро и ${}^{a}\mathscr{F} := \mathscr{F} \setminus {}^{\circ}\mathscr{F}$ — внешнее множество удаленных элементов $\mathscr{F}$. Если

$$\mu(\mathscr{F}) := \bigcap {}^{\circ}\mathscr{F} = \bigcup {}^{a}\mathscr{F}$$

— *монада* $\mathscr{F}$, то $\mathscr{F} = {}^{*}(\{\widetilde{\mu(\mathscr{F})}\})$, т. е. $\mathscr{F}$ — стандартизация совокупности $(\widetilde{\mu(\mathscr{F})})$ всех надмножеств монады.

Понятие монады — центральное в теории внешних множеств. В этой связи развитие комбинированных нестандартных методов, в частности, одновременное применение инфинитезималей и подъемов в теории K-пространств, требует адаптации понятия монады для фильтров и их изображений. В этом параграфе изучается подход, при котором обычная монадология применяется к изображениям — спускам объектов. Альтернативный путь — применение стандартной монадологии внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ с последующим спуском — рассмотрим в следующем параграфе.

1.11.1. Напомним некоторые конструкции из теории фильтров в $\mathbb{V}^{(B)}$. Пусть $\mathscr{G}$ — базис фильтра в X, причем $X \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(B)})$. Положим

$$\mathscr{G}' := \{F \in \mathscr{P}(X\uparrow)\downarrow : (\exists G \in \mathscr{G})\,[\![F \supset G\uparrow]\!] = \mathbb{1}\};$$
$$\mathscr{G}'' := \{G\uparrow : G \in \mathscr{G}\}.$$

Тогда $\mathscr{G}'\uparrow$ и $\mathscr{G}''\uparrow$ — базисы одного и того же фильтра $\mathscr{G}^{\uparrow}$ в $X\uparrow$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Фильтр $\mathscr{G}^{\uparrow}$ называют *подъемом* $\mathscr{G}$. Если $\operatorname{mix}(\mathscr{G})$ — совокупность перемешиваний непустых семейств элементов $\mathscr{G}$ и $\mathscr{G}$ — состоит из циклических множеств, то $\operatorname{mix}(\mathscr{G})$ — базис фильтра в X и $\mathscr{G}^{\uparrow} = \operatorname{mix}(\mathscr{G})^{\uparrow}$.

Если $\mathscr{F}$ — некоторый фильтр в X внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, то полагают $\mathscr{F}^{\downarrow} := (\widetilde{\{F{\downarrow} : F \in \mathscr{F}{\downarrow}\}})$. Фильтр $\mathscr{F}^{\downarrow}$ в $X{\downarrow}$ называют *спуском* $\mathscr{F}$. Базис фильтра $\mathscr{G}$ в $X{\downarrow}$ называют *экстенсиональным*, если имеется фильтр $\mathscr{F}$ в X такой, что $(\widetilde{\mathscr{G}}) = \mathscr{F}$.

Наконец, спуски ультрафильтров в X называют *проультрафильтрами* в $X{\downarrow}$. Фильтр, имеющий базис из циклических множеств, называется *циклическим*. Проультрафильтры — это максимальные циклические фильтры.

1.11.2. Фиксируем стандартную полную булеву алгебру B и соответствующий булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$, мыслимый как состоящий из внутренних множеств. Если A — внешнее множество, то *циклическую оболочку* $\operatorname{mix}(A)$ вводят следующим образом. Говорят, что элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ лежит в $\operatorname{mix}(A)$, если для некоторого внутреннего семейства $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов A и внутреннего разбиения $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ единицы в B точка x есть перемешивание $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, т. е. $b_\xi x = b_\xi a_\xi$ при $\xi \in \Xi$, или, что то же самое, $x = \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi a_\xi)$.

1.11.3. *Теорема.* *Для фильтра $\mathscr{F}$ в $X{\downarrow}$ рассмотрим*

$$\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow} := (\widetilde{\{F{\uparrow}{\downarrow} : F \in \mathscr{F}\}}).$$

Тогда $\operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F})) = \mu(\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow})$ и при этом $\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}$ — наибольший циклический фильтр, более грубый, чем $\mathscr{F}$.

В связи с этой теоремой монаду $\mathscr{F}$ называют *циклической*, если $\mu(\mathscr{F}) = \operatorname{mix}(\mu(\mathscr{F}))$. Цикличность монады не характеризует полностью экстенсиональность фильтров. В этой связи следует ввести *циклически монадную оболочку* $\mu_c(U)$ внешнего множества U. Именно

$$x \in \mu_c(U) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} V = V{\uparrow}{\downarrow}) V \supset U \to x \in \mu(V).$$

В частности, если $B = \{0, 1\}$, то $\mu_c(U)$ совпадает с монадой стандартизации внешнего фильтра надмножеств U — с (*дискретной*) *монадной оболочкой* $\mu_d(U)$.

1.11.4. *Циклически монадная оболочка множества представляет собой циклическую оболочку его монадной оболочки:*

$$\mu_c(U) = \operatorname{mix}(\mu_d(U)).$$

1.11.5. Особую роль играют *существенные точки* $X{\downarrow}$, составляющие внешнее множество ${}^eX$. По определению в ${}^eX$ попадают элементы монад проультрафильтров в $X{\downarrow}$.

Критерий существенности. *Точка является существенной в том и только в том случае, если ее можно отделить стандартным циклическим множеством от любого не содержащего ее стандартного циклического множества.*

1.11.6. Если в монаде ультрафильтра $\mathscr{F}$ есть существенная точка, то $\mu(\mathscr{F}) \subset {}^eX$ и, кроме того, $\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow}$ — проультрафильтр.

На основе приведенных конструкций можно вывести следующие утверждения.

Критерий экстенсиональности фильтра. *Фильтр является экстенсиональным в том и только в том случае, если его монада представляет собой циклически монадную оболочку множества своих существенных точек.*

Верно также следующее утверждение: стандартное множество циклично в том и только в том случае, если оно является циклически монадной оболочкой своих существенных точек.

1.11.7. ***Нестандартный критерий перемешивания фильтров.*** *Пусть* $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *— стандартное семейство экстенсиональных фильтров и* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *— стандартное разбиение единицы. Фильтр* $\mathscr{F}$ *является перемешиванием* $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *с вероятностями* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *в том и только в том случае, если*

$$(\forall^{\mathrm{St}}\xi \in \Xi) b_\xi\mu(\mathscr{F}) = b_\xi\mu(\mathscr{F}_\xi).$$

Особенность предлагаемого подхода проявляется в приложениях к спускам топологических пространств через специальную роль существенных точек. В этой связи отметим некоторые их свойства.

1.11.8. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Образ существенной точки при произвольном экстенсиональном отображении — существенная точка в образе.*

(2) *Пусть* E *— некоторое стандартное множество и* X *— стандартный элемент* $\mathbb{V}^{(B)}$. *Рассмотрим произведение* $X^{E^\wedge}$ *внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$, *где* $E^\wedge$ *— стандартное имя* E *в*

$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. *Если* x *— существенная точка* $X^{E^\wedge}\!\downarrow$, *то для всякого стандартного* $e \in E$ *точка* $x{\downarrow}(e)$ *— существенная в* $X{\downarrow}$.

(3) *Пусть* $\mathscr{F}$ *— циклический фильтр в* $X{\downarrow}$ *и* ${}^e\mu(\mathscr{F}) := \mu(\mathscr{F}) \cap {}^eX$ *— множество существенных точек его монады. Тогда* ${}^e\mu(\mathscr{F}) = {}^e\mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow})$.

Пусть $(X, \mathscr{U})$ — равномерное пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Равномерное пространство $(X{\downarrow}, \mathscr{U}^{\downarrow})$ называют *прокомпактным* или *циклически компактным*, если $(X, \mathscr{U})$ компактно внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Аналогичный смысл вкладывают в термин *прополная ограниченность* и т. п.

1.11.9. *Нестандартный критерий прокомпактности.* *Любая существенная точка* $X{\downarrow}$ *околостандартна в том и только в том случае, если* $X{\downarrow}$ *прокомпактно.*

Приведенная теорема 1.11.9 ясно демонстрирует отличия булевозначного критерия прокомпактности от привычного: «компактное пространство — это пространство с околостандартными точками». Колоссальное количество прокомпактных и некомпактных пространств обеспечивает разнообразие примеров несущественных точек. Отметим здесь же, что совместное применение 1.11.7 и 1.11.8 (2) позволяет, конечно же, дать нестандартное доказательство естественного аналога теоремы Тихонова для произведения прокомпактных пространств — «спуска теоремы Тихонова в $\mathbb{V}^{(B)}$».

1.11.10. *Нестандартный критерий пропредкомпактности.* *Стандартное пространство является спуском вполне ограниченного равномерного пространства в том и только в том случае, если каждая его существенная точка предоколостандартна.*

Применим изложенный подход для описания o-сходимости в K-пространстве Y. Для экономии слов мы ограничимся рассмотрением фильтров, содержащих порядковые интервалы (или, что то же самое, фильтров с *ограниченными монадами*). Помимо этого, в соответствии с названной целью K-пространство Y считается *расширенным*. На основании теоремы Гордона пространство Y считаем канонически реализованным как спуск $\mathscr{R}{\downarrow}$ элемента $\mathscr{R}$, представляющего поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ в булевозначном универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$, построенном над базой B пространства Y.

Условимся символом $\mathscr{E}$ обозначать фильтр порядковых единиц в Y, т. е. $\mathscr{E} := \{\varepsilon \in Y_+ : [\![\varepsilon = 0]\!] = \mathbb{0}\}$. Запись $x \approx y$ выражает бесконечную близость элементов $x, y \in Y$, порожденную спуском обычной топологии $\mathscr{R}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $x \approx y \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E})\, |x - y| < \varepsilon$. Здесь и в дальнейшем считается, что $a < b$ для $a, b \in Y$, если $[\![a < b]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $a > b \leftrightarrow a - b \in \mathscr{E}$. Таким образом, тут имеется отступление от соглашений теории упорядоченных векторных пространств. Разумеется, это обстоятельство вызвано необходимостью соблюдать принципы введения обозначений при спусках и подъемах.

Пусть ${}^{\approx}Y$ — *околостандартная часть* Y. Для $y \in {}^{\approx}Y$ символом ${}^{\circ}y$ (или $\mathrm{st}(y)$) указана *стандартная часть* y, т. е. единственный стандартный элемент, бесконечно близкий к y.

1.11.11. *Теорема.* *Для стандартного фильтра $\mathscr{F}$ в Y и стандартного $z \in Y$ справедливы утверждения:*

(1) $\inf_{F \in \mathscr{F}} \sup F \le z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}y \le z \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}y \le z;$

(2) $\sup_{F \in \mathscr{F}} \inf F \ge z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}y \ge z \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}y \ge z;$

(3) $\inf_{F \in \mathscr{F}} \sup F \ge z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}y \ge z \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}y \ge z;$

(4) $\sup_{F \in \mathscr{F}} \inf F \le z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}y \le z \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow})) {}^{\circ}y \le z;$

(5) $\mathscr{F} \xrightarrow{(o)} z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}))y \approx z \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall y \in \mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}))y \approx z.$

Здесь ${}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}) := \mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}) \cap {}^{\approx}Y$ и, как обычно, ${}^{e}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow})$ — множество существенных точек монады $\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow})$, т. е. ${}^{e}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}) = \mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow}) \cap {}^{e}\mathscr{R}$.

$\triangleleft$ Для иллюстрации установим (3).

Пусть сначала в более широком множестве ${}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}{\uparrow\downarrow})$ есть элемент y, для которого ${}^{\circ}y \ge z$. При всяком стандартном $F \in \mathscr{F}$ выполнено $y \in F{\uparrow\downarrow}$. Значит, для $\varepsilon \in {}^{\circ}\mathscr{E}$ будет $y > z - \varepsilon$ и $\sup F = \sup F{\uparrow\downarrow} > z - \varepsilon$. По принципу Лейбница заключаем $(\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})\, (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\, \sup F \ge z$, т. е. $(\forall F \in \mathscr{F})\, \sup F \ge z$ и $\inf_{F \in \mathscr{F}} \sup F \ge z$.

Для доказательства еще не проверенных соотношений, прежде всего заметим, что в силу свойств верхнего предела в $\mathbb{R}$ и принципа переноса булевозначного анализа выполнено

$$[\![\, (\exists \mathscr{G})\, (\mathscr{G} \text{ — ультрафильтр в } \mathscr{R} \wedge \mathscr{G} \supset \mathscr{F}^{\uparrow} \wedge \inf_{G \in \mathscr{G}} \sup G \ge z)\,]\!] = \mathbb{1}.$$

На основании принципа максимума имеется проультрафильтр $\mathscr{G}$ такой, что $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}$ и $\inf_{G\in\mathscr{G}} \sup G \geq z$. Используя принципы переноса и идеализации, последовательно получаем

$$(\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\ \sup G \geq z \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\, [\![\, \sup(G\!\uparrow) = z \,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\ (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\, [\![\, (\forall \varepsilon > 0)\, (\exists g \in G\!\uparrow)\, g > z - \varepsilon \,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\, (\forall \varepsilon > 0)\, (\exists g \in G\!\uparrow\downarrow) g > z - \varepsilon \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\ (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\, (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\, (\exists g \in G\!\uparrow\downarrow) g > z - \varepsilon \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\ (\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{G}_0 \supset \mathscr{G})\, (\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E})\, (\exists g)$$

$$(\forall G \in \mathscr{G}_0)\, (\forall \varepsilon \in \mathscr{E}_0)\, (g \in G\!\uparrow\downarrow \wedge g > z - \varepsilon) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\ (\exists g)\, (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\, (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\, (g \in G\!\uparrow\downarrow \wedge g > z - \varepsilon) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\ (\exists g \in \mu(\mathscr{G}^{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}g \geq z \ \leftrightarrow\ (\exists g \in \mu(\mathscr{G}))^{\circ} g = z.$$

Остается отметить, что

$$\mu(\mathscr{G}) \subset {}^{e}\mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}) = {}^{e}\mu(\mathscr{F}\!\uparrow\downarrow) \subset {}^{\circ}\mu(\mathscr{F}\!\uparrow\downarrow).$$

Доказательство закончено. $\triangleright$

1.11.12. Примечания.

(1) Общая монадология как философское учение была развита Г. В. Лейбницем [54]. Теория монад фильтров предложена В. Люксембургом [90]. Циклические топологии широко используются в булевозначном анализе. Теория циклической компактности и принципы изображения фильтров представлены в [27, 29, 49, 50]. Наше изложение циклической монадологии в основном следует [49, 50].

(2) Рассмотрение произвольных ультрапроизведений внутри булевозначного универсума не вызывает принципиальных сложностей и предпринималось в некоторых работах. Мы не обсуждаем здесь характера возникновения робинсоновской стандартизации в $\mathbb{V}^{(B)}$, — по сути, здесь возможен аксиоматический подход. При этом принципиально возникновение наростов на K-пространствах, происходящее, вообще говоря, не так, как при появлении идеальных элементов в процессе стандартизации исходного пространства (эффект существенных точек). Наше изложение следует [35].

1.12. Инфинитезимальное моделирование внутри булевозначного универсума

В этом параграфе мы считаем фиксированной некоторую полную булеву алгебру B и соответствующий отделимый универсум $\mathbb{V}^{(B)}$. Применяя средства инфинитезимального анализа, мы имеем в виду классический подход А. Робинсона, реализованный внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Иными словами, в конкретных ситуациях подразумеваются классический и внутренний универсумы и соответствующее $*$-изображение — робинсоновская стандартизация, представленные элементами $\mathbb{V}^{(B)}$. При этом мы считаем нестандартный мир должным образом насыщенным.

1.12.1. Под *спуск-стандартизацией* по определению понимается спуск $*$-изображения.

Наряду с термином «спуск-стандартизация» используются также выражения: «B-стандартизация», «простандартизация» и т. п. При этом для робинсоновской стандартизации B-множества A применяется символ $^*A$.

Соответственно *спуск-стандартизация множества* A, наделенного B-структурой (т. е. подмножества $\mathbb{V}^{(B)}$), по определению представленная $(^*(A{\uparrow})){\downarrow}$, обозначается символом $_*A$ (здесь подразумевается, что $A{\uparrow}$ — это элемент рассматриваемого в $\mathbb{V}^{(B)}$ стандартного мира классических множеств). Таким образом, $^*a \in {_*A} \leftrightarrow a \in A{\uparrow}{\downarrow}$. Естественным путем определена и *спуск-стандартизация* $_*\Phi$ *экстенсионального соответствия* Φ. При необходимости рассматривать спуск-стандартизации стандартных имен элементов универсума фон Неймана $\mathbb{V}$ мы для удобства используем сокращения, полагая $^*x := {^*(x^\wedge)}$ и соответственно $_*x := (^*x){\downarrow}$ для $x \in \mathbb{V}$. Правила расстановки и опускания (по умолчанию) звездочек при использовании спуск-стандартизации без особых оговорок считаются столь же свободными, как и применяемые для робинсоновского $*$-изображения.

1.12.2. *Принцип переноса.* *Пусть $\varphi = \varphi(x, y)$ — формула теории Цермело — Френкеля (не содержащая никаких свободных переменных, кроме x и y). Для непустого в $\mathbb{V}^{(B)}$ элемента F и каждого z выполнено*

$$(\exists x \in {_*F})\, [\![\, \varphi(x, {^*z}) \,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow (\exists x \in F{\downarrow})\, [\![\, \varphi(x, z) \,]\!] = \mathbb{1};$$

$$(\forall x \in {_*F})\, [\![\, \varphi(x, {^*z}) \,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow (\forall x \in F{\downarrow})\, [\![\, \varphi(x, z) \,]\!] = \mathbb{1}.$$

Если G — некоторое подмножество $\mathbb{V}^{(B)}$, то справедливы эквивалентности

$$(\exists x \in {}_*G)[\![\,\varphi(x, {}^*z)\,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow (\exists x \in G{\uparrow}{\downarrow})\,[\![\,\varphi(x, z)\,]\!] = \mathbb{1};$$

$$(\forall x \in {}_*G)[\![\,\varphi(x, {}^*z)\,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow (\forall x \in G{\uparrow}{\downarrow})\,[\![\,\varphi(x, z)\,]\!] = \mathbb{1}.$$

1.12.3. *Принцип идеализации.* *Пусть $X{\uparrow}$ и Y — (классические) элементы $\mathbb{V}^{(B)}$ и $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — формула теории Цермело — Френкеля. Для внутреннего в $\mathbb{V}^{(B)}$ элемента z выполнено:*

$$(\forall^{\mathrm{fin}} A \subset X)\,(\exists y \in {}_*Y)\,(\forall x \in A)\,[\![\,\varphi({}^*x, y, z)\,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists y \in {}_*Y)\,(\forall x \in X)\,[\![\,\varphi({}^*x, y, z)\,]\!] = \mathbb{1}.$$

Для фильтра $\mathscr{F}$ из множества с B-структурой его *спуск-монаду* $m(\mathscr{F})$ определяют соотношением

$$m(\mathscr{F}) := \bigcap_{F \in \mathscr{F}} {}_*F.$$

1.12.4. *Теорема.* *Пусть $\mathscr{S}$ — некоторое множество фильтров и $\mathscr{S}^{\uparrow} := \{\mathscr{F}^{\uparrow} : \mathscr{F} \in \mathscr{S}\}$ — его подъем в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Эквивалентны утверждения:*

(1) *множество циклических оболочек элементов $\mathscr{S}$, т. е. $\mathscr{S}{\uparrow}{\downarrow} := \{\mathscr{F}{\uparrow}{\downarrow} : \mathscr{F} \in \mathscr{S}\}$, ограничено сверху;*

(2) *множество $\mathscr{S}^{\uparrow}$ ограничено сверху внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$;*

(3) $\bigcap\{m(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in \mathscr{S}\} \neq \varnothing$.

При выполнении эквивалентных условий (1)–(3) справедливы равенства

$$m(\sup \mathscr{S}{\uparrow}{\downarrow}) = \bigcap\{m(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in \mathscr{S}\};$$

$$\sup \mathscr{S}^{\uparrow} = (\sup \mathscr{S})^{\uparrow}.$$

Полезно подчеркнуть, что для бесконечного множества спуск-монад их объединение и даже циклическая оболочка этого объединения спуск-монадой, вообще говоря, не являются. Ситуация здесь повторяет общеизвестную для обычных монад.

1.12.5. *Нестандартные критерии проультрафильтра.* *Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *$\mathscr{U}$ — это проультрафильтр;*

(2) *$\mathscr{U}$ — это экстенсиональный фильтр с минимальной по включению спуск-монадой;*

(3) *для каждой точки x из спуск-монады $m(\mathscr{U})$ имеет место представление*
$\mathscr{U} = (x)^{\downarrow} := (\{U\widetilde{\uparrow\downarrow : x} \in {}_*A\})$;

(4) *$\mathscr{U}$ — это экстенсиональный фильтр, спуск-монаду которого легко поймать любым циклическим множеством, т. е. для всякого $U = U\uparrow\downarrow$ верно либо $m(\mathscr{U}) \subset {}_*U$, либо $m(\mathscr{U}) \subset {}_*(X \setminus U)$;*

(5) *$\mathscr{U}$ — это циклический фильтр такой, что для всякого циклического U при ${}_*U \cap m(\mathscr{A}) \neq \varnothing$ будет $U \in \mathscr{U}$.*

1.12.6. *Нестандартный критерий перемешивания фильтров.* *Пусть $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство фильтров, $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы и $\mathscr{F} = \mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi \mathscr{F}_\xi^{\uparrow})$ — перемешивание элементов $\mathscr{F}_\xi^{\uparrow}$ с вероятностями b_ξ. Тогда*

$$m(\mathscr{F}^{\downarrow}) = \underset{\xi\in\Xi}{\mathrm{mix}}(b_\xi m(\mathscr{F}_\xi)).$$

Полезно сопоставить 1.12.6 с 1.11.7.

Точку y из множества ${}_*X$ называют *спуск-околостандартной* или просто *околостандартной*, если нет опасности недоразумений, при условии, что для некоторого $x \in X\downarrow$ будет ${}^*x \approx y$ (т. е. $(x, y) \in m(\mathscr{U}^{\downarrow})$, где $\mathscr{U}$ — равномерность на X).

1.12.7. *Нестандартный критерий прокомпактности.* *Любая точка спуска ${}_*A$ спуск-околостандартна в том и только в том случае, если само множество $A\uparrow\downarrow$ прокомпактно.*

Стоит сравнить 1.12.7 с 1.11.8.

1.12.8. Сформулируем теперь общие принципы использования спуск-стандартизации. Заметим сначала, что если $\varphi = \varphi(x)$ — формула теории Цермело — Френкеля, то оценка истинности φ постоянна на спуск-монаде любого проультрафильтра $\mathscr{A}$, т. е.

$$(\forall x, y \in m(\mathscr{A}))\, [\![\, \varphi(x) \,]\!] = [\![\, \varphi(y) \,]\!].$$

1.12.9. Теорема. *Пусть $\varphi = \varphi(x,y,z)$ — некоторая формула теории Цермело — Френкеля и $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — фильтры множеств с B-структурой. Имеют место следующие правила квантификации (при внутренних y, z в универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$):*

(1) $(\exists x \in m(\mathscr{F}))\,[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall F \in \mathscr{F})\,(\exists x \in {}^*F)\,[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbb{1}$;

(2) $(\forall x \in m(\mathscr{F}))\,[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists F \in \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow})(\forall x \in {}_*F)\,[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbb{1}$;

(3) $(\forall x \in m(\mathscr{F}))\,(\exists y \in m(\mathscr{G}))[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall G \in \mathscr{G})\,(\exists F \in \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow})\,(\forall x \in {}^*F)\,(\exists y \in {}^*G)$
$[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbb{1}$;

(4) $(\exists x \in m(\mathscr{F}))\,(\forall y \in m(\mathscr{G}))\,[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists G \in \mathscr{G}^{\uparrow\downarrow})\,(\forall F \in \mathscr{F})\,(\exists x \in {}^*F)\,(\forall y \in {}^*G)$
$[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbb{1}$.

При этом для стандартизированных свободных переменных будет

(1) $(\exists x \in m(\mathscr{F}))[\![\, \varphi(x,{}^*y,{}^*z)\,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall F \in \mathscr{F})(\exists x \in F{\uparrow}{\downarrow})[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbb{1}$;

(2) $(\forall x \in m(\mathscr{F}))[\![\, \varphi(x,{}^*y,{}^*z)\,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists F \in \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow})(\forall x \in F)[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbb{1}$;

(3) $(\forall x \in m(\mathscr{F}))(\exists y \in m(\mathscr{G}))[\![\, \varphi(x,y,{}^*z)\,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall G \in \mathscr{G})(\exists F \in \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow})(\forall x \in F)(\exists y \in G{\uparrow}{\downarrow})$
$[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbb{1}$;

(4) $(\exists x \in m(\mathscr{F}))(\forall y \in m(\mathscr{G}))[\![\, \varphi(x,y,{}^*z)\,]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists G \in \mathscr{G}^{\uparrow\downarrow})(\forall F \in \mathscr{F})(\exists x \in F{\uparrow}{\downarrow})(\forall y \in G)$
$[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbb{1}$.

1.13. Продолжение и разложение положительных операторов

Здесь мы покажем, что некоторые вопросы теории порядково ограниченных и мажорируемых операторов сводятся с помощью булевозначных моделей к случаю функционалов.

1.13.1. Утверждение о том, что E есть векторная решетка, записывается ограниченной формулой, скажем, $\varphi(E,\mathbb{R})$. Поэтому в силу принципа ограниченного переноса будет $[\![\, \varphi(E^\wedge,\mathbb{R}^\wedge)\,]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $E^\wedge$ — векторная решетка над упорядоченным полем $\mathbb{R}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Пусть $E^{\wedge\sim}$ — пространство $\mathbb{R}^{\wedge}$-линейных регулярных функционалов из $E^{\wedge}$ в $\mathscr{R}$. Нетрудно видеть, что $E^{\wedge\sim} := L^{\sim}(E^{\wedge}, \mathscr{R})$ — это K-пространство в модели $\mathbb{V}^{(B)}$. Спуск $E^{\wedge\sim}{\downarrow}$, как и спуск всякого K-пространства, будет K-пространством.

Рассмотрим расширенное K-пространство $F := \mathscr{R}{\downarrow}$ (см. 1.5.4). Напомним, что для $T \in L^{\sim}(E, F)$ подъем $T{\uparrow}$ определен правилом $[\![\, Tx = T{\uparrow}(x^{\wedge}) \,]\!] = \mathbb{1}$ для всех $x \in E$. Заметим, что если $\tau \in E^{\wedge\sim}$, то $[\![\, \tau : E^{\wedge} \to \mathscr{R} \,]\!] = \mathbb{1}$, поэтому определен оператор $\tau{\downarrow} : E \to F$. При этом $\tau{\downarrow}{\uparrow} = \tau$. С другой стороны, $T{\uparrow}{\downarrow} = T$.

1.13.2. Теорема. *Для любого $T \in L^{\sim}(E, F)$ подъем $T{\uparrow}$ есть регулярная $\mathbb{R}^{\wedge}$-форма на $E^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е. $[\![\, T{\uparrow} \in E^{\wedge\sim} \,]\!] = \mathbb{1}$. Отображение $T \to T{\uparrow}$ является линейным и решеточным изоморфизмом K-пространств $L^{\sim}(E, F)$ и $E^{\wedge\sim}{\downarrow}$.*

1.13.3. Отметим некоторые следствия из 1.13.2. Сначала дадим необходимые определения. Оператор $S \in L^{\sim}(E, F)$ называют *осколком* оператора $0 \leq T \in L^{\sim}(E, F)$, если $S \wedge (T - S) = 0$. Будем говорить, что T — *F-дискретный оператор*, если $[0, T] = [0, I_F] \circ T$, т. е. для каждого $0 \leq S \leq T$ существует оператор $0 \leq \alpha \leq I_F$, для которого $S = \alpha \circ T$. Пусть $L_a^{\sim}(E, F)$ — компонента в $L^{\sim}(E, F)$, порожденная F-дискретными операторами, а $L_d^{\sim}(E, F) := L_a^{\sim}(E, F)^{\perp}$. Аналогично вводятся $(E^{\wedge\sim})_a$ и $(E^{\wedge\sim})_d$. Элементы $L_d^{\sim}(E, F)$ принято называть *F-размазанными* или *F-диффузными* операторами. Вместо $\mathbb{R}$-дискретности или $\mathbb{R}$-размазанности говорят просто о дискретных и размазанных функционалах.

Пусть $S, T \in L^{\sim}(E, F)$ и $\tau := T{\uparrow}$, $\sigma := S{\uparrow}$. Имеют место эквивалентности:

(1) $T \geq 0 \leftrightarrow [\![\, \tau \geq 0 \,]\!] = \mathbb{1}$;
(2) $[\![\, S$ *— осколок* $T \,]\!] \leftrightarrow [\![\, \sigma$ *— осколок* $\tau \,]\!] = \mathbb{1}$;
(3) $[\![\, T$ *является F-дискретным* $]\!] \leftrightarrow [\![\, \tau$ *— дискретен* $]\!] = \mathbb{1}$;
(4) $T \in L_a^{\sim}(E, F) \leftrightarrow [\![\, \tau \in (E^{\wedge\sim})_a \,]\!] = \mathbb{1}$;
(5) $T \in L_d^{\sim}(E, F) \leftrightarrow [\![\, \tau \in (E^{\wedge\sim})_d \,]\!] = \mathbb{1}$.

Потребуется еще один факт, который не следует из 1.13.2, но устанавливается путем прямого подсчета булевых оценок.

(6) $[\![\, T$ *— решеточный гомоморфизм* $]\!] \leftrightarrow [\![\, \tau$ *— решеточный гомоморфизм* $]\!] = \mathbb{1}$.

1.13.4. *Теорема.* *Пусть E — векторная решетка, F — некоторое K-пространство и $T \in L^{\sim}(E, F)$. Равносильны утверждения:*

(1) *T — это F-дискретный элемент $L^{\sim}(E, F)$;*

(2) *T — решеточный гомоморфизм;*

(3) *T сохраняет дизъюнктность, т. е. если $x, y \in E$ и $x \perp y$, то $Tx \perp Ty$.*

$\lhd$ Нужно привлечь 1.13.2, 1.13.3 и воспользоваться хорошо известным результатом о характеризации дискретных функционалов (= теорема 1.13.4 при $F = \mathbb{R}$). $\rhd$

1.13.5. Легко видеть, что если регулярный функционал $f \in E^{\sim}$ сохраняет дизъюнктность, то этим же свойством обладает и $|f|$ (см. [77]). В силу 1.13.4 (1) функционалы f^+ и f^- пропорциональны $|f|$, а так как $f^+ \perp f^-$, то либо $f^+ = 0$, либо $f^- = 0$. Это означает, что $f \geq 0$ или $f \leq 0$. В частности, для функционала $\tau := T{\uparrow}$ получаем $[\![\tau \geq 0]\!] \vee [\![\tau \leq 0]\!] = \mathbb{1}$. Если $\pi := \chi[\![\tau \geq 0]\!]$, то $\pi^{\perp} \leq \chi[\![\tau \leq 0]\!]$, поэтому выполнены неравенства $\pi\tau \geq 0$ и $\pi^{\perp}\tau \leq 0$. Переход к спускам приводит к такому заключению.

Для регулярного оператора $T \in L^{\sim}(E, F)$, сохраняющего дизъюнктность, существует проектор $\pi \in \mathfrak{P}(F)$ такой, что $\pi T = T^+$ и $\pi^{\perp}T = T^-$. В частности, для любых $0 \leq x$, $y \in E$ верно $(Tx)^+ \perp (Ty)^-$.

1.13.6. Подпространство $E_0 \subset E$ называют *массивным*, если для каждого $x \in E$ найдутся $\underline{x}$ и $\overline{x} \in E_0$ такие, что $\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$. Пусть $T_0 \in L(E_0, E)$ и $\tau_0 := T_0{\uparrow}$. Понятно, что имеют место утверждения:

(1) $[\![\, E_0$ массивно в $E \,]\!] \leftrightarrow [\![\, E_0^{\wedge}$ массивно в $E^{\wedge} \,]\!] = \mathbb{1}$;

(2) $[\![\, T$ — продолжение $T_0 \,]\!] \leftrightarrow [\![\, \tau$ — продолжение $\tau_0 \,]\!] = \mathbb{1}$.

Теорема Крейна — Рутмана утверждает, что каждый положительный функционал, определенный на массивном подпространстве, допускает положительное продолжение на все пространство. Теорема остается в силе, если в ней слово «положительный» заменить на «дискретный». Пропустив эти факты через $\mathbb{V}^{(B)}$ и пользуясь утверждениями (1), (2) и 1.13.3 (3), получим следующие результаты.

1.13.7. *Теорема Канторовича.* *Пусть F — произвольное K-пространство. Если E_0 — массивное подпространство E, то всякий положительный оператор $T_0 : E_0 \to F$ допускает положительное продолжение $T \in L^{\sim}(E, F)$.*

1.13.8. Теорема. *При тех же условиях, что и в 1.13.6, всякий F-дискретный оператор $T_0 : E_0 \to F$ допускает F-дискретное продолжение $T : E \to F$. В частности, если E_0 — массивная подрешетка, то для решеточного гомоморфизма $T_0 : E_0 \to F$ существует решеточный гомоморфизм, продолжающий T_0.*

1.13.9. В том случае, когда E_0 — массивная подрешетка E, теорема 1.13.7 допускает существенное усиление. Пусть $\varepsilon^+(S_0) \subset L^\sim(E, F)$ — это множество всех положительных продолжений положительного оператора $S_0 : E_0 \to F$ на все E.

(1) Теорема. *Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полно. Пусть E_0 — массивная подрешетка E и $S_0 : E_0 \to F$ — положительный оператор. Тогда множество крайних точек выпуклого множества $\varepsilon^+(S_0) \subset L^\sim(E, F)$ непусто.*

(2) Теорема. *Пусть (Y, F) — некоторое пространство Банаха — Канторовича. Предположим, что $T_0 : E_0 \to Y$ — мажорируемый оператор и S — произвольная крайняя точка множества $\varepsilon^+(|T_0|)$. Тогда существует единственный мажорируемый оператор $T : E \to Y$ такой, что T — продолжение T_0 и $|T| = S$.*

$\triangleleft$ Описанный метод булевозначной реализации сводит дело к случаю $F = \mathscr{R}{\downarrow}$. Тем самым можно ограничиться рассмотрением случая, когда Y — банахово пространство, а $|T_0|$ и S — положительные функционалы. Существование крайнего продолжения $S \in \varepsilon^+(|T_0|)$ следует из (1). Определим полунорму $p(e) := S(|e|)$ для $e \in E$. Тогда E_0 плотно в E относительно локально выпуклой топологии, определяемой полунормой p. Это вытекает из следующей характеризации крайних продолжений, полученной в [89]: S является крайней точкой множества $\varepsilon^+(S_0)$, где $S_0 \in L_+(E_0, F)$, в том и только в том случае, если $\inf\{S(|e - e_0|) : e_0 \in E_0\} = 0$ для каждого $e \in E$. Оператор T_0 непрерывен и допускает продолжение T по непрерывности на все E, причем T мажорируем и, как легко видеть, $|T| = S$. Подробности см. в [24]. $\triangleright$

1.13.10. Теорема. *Для положительного оператора $T : E \to F$ равносильны следующие утверждения:*

(1) *T — это F-размазанный оператор;*

(2) *для любых $0 \le x \in E$, $0 \le \varepsilon \in F$ и $b \in B$ при*

$b\varepsilon \neq 0$ существуют ненулевой проектор $\rho \leq b$ и некоторые попарно дизъюнктные положительные операторы $T_1, \dots, T_n$ такие, что

$$T = T_1 + \dots + T_n, \quad |\rho T_k x| \leq \varepsilon \quad (k := 1, \dots, n);$$

(3) *для любых $0 \leq x \in E$, $0 \leq \varepsilon \in F$ и $b \in B$ при $b\varepsilon \neq 0$ существует счетное разбиение единицы (b_n) такое, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие: T можно разложить в сумму попарно дизъюнктных положительных операторов $T_{1,n}, \dots, T_{k_n,n}$, причем так, чтобы $b_n|T_{k,n}x| \leq \varepsilon$ $(k := 1, \dots, k_n)$.*

$\triangleleft$ Доказательство получается путем интерпретации в $\mathbb{V}^{(B)}$ следующего скалярного факта: положительный функционал f является размазанным, если для любых $x \geq 0$ и $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ найдутся положительные попарно дизъюнктные функционалы $f_1, \dots, f_n$ такие, что $f = f_1 + \dots + f_n$ и $|f_k(x)| < \varepsilon$ $(k := 1, \dots, n)$ (см. [46]). $\triangleright$

1.13.11. Проектор $\pi \in \mathfrak{P}(F)$ назовем (γ, E)-однородным, если для каждого ненулевого проектора $\rho \leq \pi$ и для любого множества $\mathscr{H}$ попарно дизъюнктных решеточных гомоморфизмов из E в ρF таких, что $(\operatorname{im} S)^{\perp\perp} = \rho F$ при всех $S \in \mathscr{H}$, выполняется $\operatorname{card}(\mathscr{H}) \geq \gamma$. Введем обозначение $\operatorname{Orth}(T, F) := \operatorname{Orth}(G, F)$, где G — порядковый идеал в F, порожденный множеством $T(E)$.

Теорема. *Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полно. Существует множество кардиналов Γ и для каждого кардинала $\gamma \in \Gamma$ существуют проектор $\pi_\gamma \in \mathfrak{P}(F)$, семейство попарно дизъюнктных решеточных гомоморфизмов $(\Phi_{\gamma,\alpha})_{\alpha<\gamma}$ из E в F, такие что справедливы следующие утверждения:*

(1) *$(\pi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ представляет собой разбиение единицы в булевой алгебре $\mathfrak{P}(F)$, причем $\pi_\gamma \neq 0$ при всех $\gamma \in \Gamma$;*

(2) $\operatorname{im} \Phi_{\gamma,\alpha} = \pi_\gamma(F)$ $(\gamma \in \Gamma, \alpha < \gamma)$;

(3) *π_γ является (γ, E)-однородным проектором;*

(4) *каждый оператор $T \in L^\sim(E, F)$ допускает единственное представление в виде*

$$T = T_0 + o\text{-}\sum_{\gamma\in\Gamma} o\text{-}\sum_{\alpha<\gamma} \sigma_{\gamma,\alpha} \circ \Phi_{\gamma,\alpha},$$

где $T_0 \in L_d^{\sim}(E, F)$ *и* $\sigma_{\gamma,\alpha} \in \mathrm{Orth}(\Phi_{\gamma,\alpha}, \pi_\gamma(F))$.

$\triangleleft$ Оператор T_0 определяется однозначно, а семейство (T_ξ) — однозначно с точностью до перестановки и «перемешивания». Для доказательства сформулированной теоремы нужно воспользоваться тем, что в силу принципа переноса внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ всякое K-пространство (в нашем случае $E^{\wedge\sim}$) разлагается в прямую сумму компоненты размазанных элементов и компоненты, порожденной дискретными элементами; последняя же представляет собой соединение одномерных компонент, т. е. компонент, порожденных дискретными элементами. Затем нужно привлечь 1.13.3 (3–5). $\triangleright$

1.13.12. Примечания.

(1) Материал этого параграфа можно рассматривать как иллюстрацию к следующему эвристическому принципу, высказанному Л. В. Канторовичем в заметке [17], в которой им были введены K-пространства: «Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».

(2) Элементарная теорема 1.13.2 служит основным техническим средством, позволяющим поднять сформулированный эвристический принцип до уровня точного метода исследования (в рассмотренном круге вопросов). Другие варианты имеются в [24].

(3) В 1976 г. С. С. Кутателадзе установил эквивалентность (1)$\leftrightarrow$(2) в теореме 1.13.4 стандартными средствами. Скалярный случай ($F = \mathbb{R}$) хорошо известен. По поводу 1.13.5 см. [42].

(4) Стандартное доказательство теоремы 1.13.7 приводится во многих монографиях (см., например, [3, 24, 26]). Оно сохраняет силу и в том случае, если E — пространство Канторовича. Продолжение положительного оператора с дополнительными свойствами (дискретность сохранения решеточных операций как в 1.13.8) — довольно обширная тема. Здесь лишь отметим, что она тесно связана с экстремальной структурой специальных выпуклых множеств, см., например, [37].

(5) Теорема 1.13.9 (1) является частным случаем одной общей теоремы С. С. Кутателадзе, установленной в [47], см. также [37]. Теорема 1.13.9 (2) получена в [24]. Теорема 1.13.11, по-видимому, новая. Для векторных мер аналоги теорем 1.13.9 (2), 1.13.10 и 1.13.11 установлены в [39, 40, 42].

1.14. Осколки положительных операторов

В этом параграфе остановимся на вопросе о вычислении осколков положительных операторов, который удается изучить довольно основательно путем последовательного применения нестандартных методов. Как и в предыдущем параграфе, E — векторная решетка, F — это K-пространство.

1.14.1. Говорят, что множество проекторов $\mathscr{P}$ в K-пространстве $L^{\sim}(E,F)$ *порождает осколки* положительного оператора $0 \leq T \in L^{\sim}(E,F)$, если $Tx^{+} = \sup\{pTx : p \in \mathscr{P}\}$ для всех $x \in E$. В случае, когда последнее выполнено для каждого $0 \leq T \in L^{\sim}(E,F)$, множество $\mathscr{P}$ называют *порождающим.*

Пусть $F := \mathscr{R}{\downarrow}$ и p — проектор в $L^{\sim}(E,F)$. Тогда:

(1) *существует единственный элемент* $p{\uparrow} \in \mathbb{V}^{(B)}$ *такой, что* $[\![\, p{\uparrow}$ *— проектор в* $E^{\wedge\sim} \,]\!] = \mathbb{1}$ *и* $(pT){\uparrow} = p{\uparrow}\, T{\uparrow}$ *для всех* $T \in L^{\sim}(E,F)$.

Возьмем теперь множество проекторов $\mathscr{P}$ в $L^{\sim}(E,F)$ и операторов $T \in L^{\sim}(E,F)$. Положим $\tau := T{\uparrow}$ и $\mathscr{P}{\uparrow} := \{p{\uparrow} : p \in \mathscr{P}\}{\uparrow}$. Тогда $[\![\, \mathscr{P}{\uparrow}$ — множество проекторов в $E^{\wedge\sim} \,]\!] = \mathbb{1}$ и справедливы утверждения:

(2) $[\![\, \mathscr{P}$ *порождает осколки* $T \,]\!] \leftrightarrow$
$\leftrightarrow [\![\, \mathscr{P}{\uparrow}$ *порождает осколки* $\tau \,]\!] = \mathbb{1}$;

(3) $[\![\, \mathscr{P}$ *— порождающее множество* $]\!] \leftrightarrow$
$\leftrightarrow [\![\, \mathscr{P}{\uparrow}$ *— порождающее множество* $]\!] = \mathbb{1}$.

1.14.2. Для множества A в K-пространстве через $A^{\vee}$ обозначим результат добавления к A супремумов всех его непустых конечных подмножеств. Символ $A^{\uparrow}$ используется для результата присоединения к A супремумов непустых возрастающих сетей элементов A. Естественным образом трактуют знаки $A^{\uparrow\downarrow}$ и $A^{\uparrow\downarrow\uparrow}$. Знак $\approx$ имеет в K-пространстве F обычный смысл: $x \approx y$ для $x, y \in F$ означает, что $(\forall^{\mathrm{St}} e \in \mathscr{E})|x-y| \leq e$. Ясно, что при $F := \mathbb{R}$ речь идет о бесконечной малости числа $x - y$. ($\mathscr{E}$ — фильтр единиц в F.)

Излагаемые в этом параграфе результаты о положительных операторах мы получим с помощью булевозначных моделей по той же схеме, что и в 1.13. Но сначала нужно разобраться со случаем функционалов. Будем использовать обозначения $\mathscr{P}(f) := \{pf : p \in \mathscr{P}\}$. В следующих ниже пунктах 1.14.3–1.14.5 E — векторная решетка над плотным подполем поля $\mathbb{R}$, а $\mathscr{P}$ — множество проекторов в $E^{\sim}$.

1.14.3. Теорема. *Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $\mathscr{P}(f)^{\vee(\uparrow\downarrow\uparrow)} = \mathfrak{E}(f)$;

(2) $\mathscr{P}$ *порождает осколки* f;

(3) $(\forall x \in {}^\circ E)(\exists p \in \mathscr{P}) pf(x) \approx f(x^+)$;

(4) *функционал* g *из* $[0, f]$ *служит осколком* f *в том и только в том случае, если для каждого* $0 \le x \in E$ *имеет место равенство*

$$\inf_{p\in\mathscr{P}} (p^\perp g(x) + p(f-g)(x)) = 0;$$

(5) $(\forall g \in {}^\circ\mathfrak{E}(f))(\forall x \in {}^\circ E_+)(\exists p \in \mathscr{P}) |pf - g|(x) \approx 0$;

(6) $\inf\{|pf - g|(x) : p \in \mathscr{P}\} = 0$ *для каждого осколка* $g \in \mathfrak{E}(f)$ *и положительного элемента* $x \ge 0$;

(7) *для каждых* $x \in E_+$ *и* $g \in \mathscr{E}(f)$ *найдется элемент* $p \in \mathscr{P}(f)^{\vee(\uparrow\downarrow\uparrow)}$, *для которого* $|pf - g|(x) = 0$.

$\triangleleft$ Импликации (1) $\to$ (2) $\to$ (3) не вызывают сомнений.

(3) $\to$ (4): Будем работать в *стандартном антураже*, т. е. считать, что все свободные переменные являются стандартными множествами. Заметим прежде всего, что выполнение интересующего нас равенства для каких-либо функционалов g и f, таких, что $0 \le g \le f$, обеспечивает для стандартного $x \ge 0$ наличие $p \in \mathscr{P}$, для которого $p^\perp g(x) \approx 0$ и $p(f-g)(x) \approx 0$. (Как обычно, $p^\perp$ — это *дополнительный проектор* к p.) Стало быть, ${}^\circ p(g \wedge (f-g))(x) \le {}^\circ p(f-g)(x) = 0$ и ${}^\circ p^\perp((f-g) \wedge g)(x) \le {}^\circ p^\perp g(x) = 0$, т. е. $g \wedge (f-g) = 0$.

Установим теперь, что в условиях (3) необходимое нам равенство гарантируется обычным критерием дизъюнктности:

$$\inf\{g(x_1) + (f-g)(x_2) : x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 = x\} = 0.$$

Для фиксированного стандартного x отыщем внутренние положительные x_1 и x_2 такие, что $x = x_1 + x_2$ и, кроме того, $g(x_1) \approx 0$ и $f(x_2) \approx g(x_2)$. В силу условия (3) на основании теоремы Крейна — Мильмана осколок g лежит в слабом замыкании $\mathscr{P}(f)$. В частности, имеется элемент $p \in \mathscr{P}$, для которого $g(x_1) \approx pf(x_1)$ и $g(x_2) \approx pf(x_2)$. Стало быть, $p^\perp g(x_2) \approx 0$, ибо $p^\perp g \le p^\perp f$. Окончательно $p^\perp g(x) \approx 0$. Отсюда

$$p(f-g)(x) = pf(x_2) + pf(x_1) - pg(x) \approx$$
$$\approx g(x_2) + g(x_1) - pg(x) \approx p^\perp g(x) \approx 0.$$

Это и обеспечивает нужное равенство.

(4) $\to$ (5): В силу тождества $|pf-g|(x) = p^\perp g(x) + p(f-g)(x)$, подбирая $p \in \mathscr{P}$ так, чтобы было $p^\perp g(x) \approx 0$ и $p(f-g)(x) \approx 0$, видим требуемое.

Эквивалентность (5) $\leftrightarrow$ (6) очевидна.

Импликации (5) $\to$ (7) $\to$ (1) доказываются с помощью приемов, изложенных в [1, 23, 43]. $\rhd$

1.14.4. Теорема. *Для положительных функционалов f и g и порождающего множества проекторов $\mathscr{P}$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $g \in \{f\}^{\perp\perp}$;

(2) *для каждого конечного x в E, т. е. $x \in {}^{\mathrm{fin}}E := \{x \in E : (\exists \overline{x} \in {}^\circ E)|x| \le \overline{x}\}$, будет $pg(x) \approx 0$, как только $pf(x) \approx 0$ при $p \in \mathscr{P}$;*

(3) $(\forall x \in E_+)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall p \in \mathscr{P})pf(x) \le \delta \to pg(x) \le \varepsilon$.

1.14.5. Теорема. *Пусть f, g — положительные функционалы на E, а x — положительный элемент E. Для проектора π_f на компоненту $\{f\}^{\perp\perp}$ имеют место следующие представления:*

(1) $\pi_f g(x) \rightleftharpoons \inf{}^*\{{}^\circ pg(x) : p^\perp f(x) \approx 0,\, p \in \mathscr{P}\}$ *(знак $\rightleftharpoons$ символизирует точность формулы, т. е. достижимость равенства);*

(2) $\pi_f g(x) = \sup_{\varepsilon>0} \inf\{pg(x) : p^\perp f(x) \le \varepsilon,\, p \in \mathscr{P}\}$;

(3) $\pi_f g(x) \rightleftharpoons \inf{}^*\{{}^\circ g(y) : f(x-y) \approx 0,\, 0 \le y \le x\}$;

(4) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall p \in \mathscr{P})\,pf(x) < \delta \to \pi_f g(x) \le p^\perp g(x) + \varepsilon$;
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists p \in \mathscr{P})\,pf(x) < \delta \wedge p^\perp g(x) \le \pi_f g(x) + \varepsilon$;

(5) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall 0 \le y \le x)\,f(x-y) \le \delta \to \pi_f g(x) \le g(y) + \varepsilon$;
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists 0 \le y \le x)\,f(x-y) \le \delta \wedge g(y) \le \pi_f g(x) + \varepsilon$.

Пропустив утверждения 1.14.3–1.14.5 через $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и воспользовавшись при этом 1.14.1, получим следующие результаты 1.14.6–1.14.9.

1.14.6. *Для множества проекторов $\mathscr{P}$ в $L^\sim(E,F)$ и $0 \le S \in L^\sim(E,F)$ эквивалентны утверждения:*

(1) $\mathscr{P}(S)^{\vee(\uparrow\downarrow\uparrow)} = \mathfrak{E}(S)$;

(2) *$\mathscr{P}$ порождает осколки S;*

(3) *оператор $T \in [0, S]$ служит осколком S в том и только в том случае, если для каждого $0 \le x \in E$ имеет место равенство*

$$\inf_{p \in \mathscr{P}} (p^{\perp} Tx + p(S - T)x) = 0;$$

(4) $(\forall x \in {}^{\circ}E)\,(\exists p \in \mathscr{P}{\uparrow\downarrow})\, pSx \approx Sx^{+}$.

1.14.7. *Для положительных операторов S и T и порождающего множества проекторов $\mathscr{P}$ в $L^{\sim}(E, F)$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $T \in \{S\}^{\perp\perp}$;

(2) $(\forall x \in {}^{\mathrm{fin}}E)\,(\forall p \in \mathscr{P})\,(\forall \pi \in B)\, \pi p S x \approx 0 \to \pi p T x \approx 0$;

(3) $(\forall x \in {}^{\mathrm{fin}}E)\,(\forall \pi \in B)\, \pi S x \approx 0 \to \pi T x \approx 0$;

(4) $(\forall x \ge 0)\,(\forall \varepsilon \in \mathscr{E})\,(\exists \delta \in \mathscr{E})\,(\forall p \in \mathscr{P})\,(\forall \pi \in B)$
$\pi p S x \le \delta \to \pi p T x \le \varepsilon$;

(5) $(\forall x \ge 0)\,(\forall \varepsilon \in \mathscr{E})\,(\exists \delta \in \mathscr{E})\,(\forall \pi \in B)$
$\pi S x \le \delta \to \pi T x \le \varepsilon$.

1.14.8. Теорема. *Пусть E — векторная решетка, F — некоторое K-пространство с фильтром единиц $\mathscr{E}$ и базой B. Пусть, далее, S, T — положительные операторы из $L^{\sim}(E, F)$ и R — проекция T на компоненту $\{S\}^{\perp\perp}$. Для положительного $x \in E$ справедливы представления:*

(1) $Rx = \sup_{\varepsilon \in \mathscr{E}} \inf\{\pi T y + \pi^{\perp} S x :\, 0 \le y \le x,$
$\pi \in B,\, \pi S(x - y) \le \varepsilon\}$;

(2) $Rx = \sup_{\varepsilon \in \mathscr{E}} \inf\{(\pi p)^{\perp} T x :\, \pi p S x \le \varepsilon,\, p \in \mathscr{P}, \pi \in B\}$,

где $\mathscr{P}$ — порождающее множество проекторов в $L^{\sim}(E, F)$.

1.14.9. Для элемента $0 \le e \in E$ введем оператор $\pi_e S$ по формулам:

$$(\pi_e S)x := \sup_{n \in \mathbb{N}} S(x \wedge ne) \quad (x \in E_{+}),$$

$$(\pi_e S)x := (\pi_e S)x^{+} - (\pi_e S)x^{-} \quad (x \in E).$$

Легко понять, что $\pi_e S \in L^{\sim}(E, F)$. Более того, $\pi_e S$ — осколок оператора S, а отображение $S \mapsto \pi_e S$ $(S \ge 0)$, естественным образом продолженное на $L^{\sim}(E,F)$, будет порядковым проектором. Множество проекторов $\mathscr{P} := \{\pi_e : 0 \le e \in E\}$ является порождающим. Поэтому из 1.14.6 вытекает формула

$$\mathfrak{E}(S) = \{(\rho \circ \pi_e)S : \rho \in \mathfrak{P}(F), 0 \le e \in E\}^{\wedge(\uparrow\downarrow\uparrow)}.$$

1.14.10. Примечания.

(1) Формулы проектирования типа 1.14.8 (1, 2) формировались постепенно. Некоторое представление об этой истории можно получить по [61, 101]. Общий подход, положенный в основу данного параграфа, предложен в [51]. На этом пути можно получать различные формулы проектирования, подбирая конкретные порождающие множества проекторов.

(2) Формулу типа 1.14.9 (1) впервые установил де Пагте (см. [101]) с двумя весьма обременительными ограничениями: F имеет тотальное множество o-непрерывных функционалов, а E порядково полно. Первое ограничение устранено в [43], второе — в [1, 23]. Все эти случаи соответствуют различным порождающим множествам проекторов.

(3) Основная идея, предложенная в [51], такова. Осколки положительного оператора T — суть крайние точки порядкового отрезка $[0,T]$. Последнее множество совпадает с субдифференциалом в нуле (опорным множеством) ∂p сублинейного оператора $px = Tx_+$. Тем самым изучение осколков положительного оператора сводится к описанию экстремальной структуры субдифференциалов. Такое описание для общих сублинейных операторов впервые получено в работе С. С. Кутателадзе (подробное изложение см. в [37]). Отметим, что этот подход решает, в частности, и задачу о крайнем продолжении положительного оператора (литературу по этому поводу см. в [4, 37]).

1.15. Порядково непрерывные операторы

Приемы, изложенные в предыдущих двух параграфах, непосредственно к порядково непрерывным операторам не применимы, ибо при подъеме оператора (см. 1.13.2) теряется свойство порядковой непрерывности. Здесь рассмотрим другой подход, основанный на идеях Д. Магарам.

1.15.1. Говорят, что положительный оператор $T : E \to F$ удовлетворяет *условию Магарам*, если для каждого $0 \leq x \in E$ выполняется $T[0, x] = [0, Tx]$, т. е. если для любых $0 \leq x \in E$ и $0 \leq z \leq Tx$ существует такой $0 \leq y \in E$, что $Ty = z$ и $0 \leq y \leq x$. Положительный порядково непрерывный оператор, удовлетворяющий этому условию, принято называть *оператором Магарам*.

Всюду в этом параграфе E и F — K-пространства, причем для простоты считаем F расширенным. Символом E_T обозначим *носитель* T, т. е. множество $\{x \in E : T(|x|) = 0\}^{\perp}$. Пусть $F_T := (\operatorname{im} T)^{\perp\perp}$ и пусть $\mathscr{D}_m(T)$ означает наибольший фундамент в максимальном расширении E, на который распространяется оператор T по порядковой непрерывности. Если $E_T = E$ и $T \geq 0$, то говорят, что оператор T *существенно положителен.*

1.15.2. *Теорема.* *Пусть $F := \mathscr{R}{\downarrow}$. Пусть, далее, E — произвольное K-пространство, а $T : E \to F$ — оператор Магарам, такой, что $E = E_T = \mathscr{D}_m(T)$ и $F = F_T$. Тогда существуют $\mathscr{E} \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $\tau \in \mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющие следующим условиям:*

- **(1)** $\mathbb{V}^{(B)} \models [\![\mathscr{E}$ *— это K-пространство, а $\tau : \mathscr{E} \to \mathscr{R}$ — существенно положительный порядково непрерывный функционал*$]\!]$;
- **(2)** *$\mathscr{E}{\downarrow}$ — также K-пространство, $\tau{\downarrow} : \mathscr{E}{\downarrow} \to \mathscr{R}{\downarrow}$ — оператор Магарам, причем $\mathscr{E}{\downarrow} = \mathscr{D}_m(\tau{\downarrow})$;*
- **(3)** *существует линейный и решеточный изоморфизм h из E на $\mathscr{E}{\downarrow}$ такой, что $T = \tau{\downarrow} \circ h$.*

1.15.3. Для оператора Магарам разложение 1.13.10 можно уточнить. Пусть e — порядковая единица в E. Тогда $[\![\, e$ — порядковая единица $\mathscr{E}\,]\!] = \mathbb{1}$. Функционал τ можно представить в виде $\tau = \tau_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k$, где τ_0 — диффузный функционал, а τ_k — порядково непрерывный решеточный гомоморфизм. Все эти функционалы однозначно определяются мерами, определенными на базе единичных элементов. При этом τ_0 соответствует безатомная мера, а τ_k — двузначная мера. Интерпретируя все это в модели $\mathbb{V}^{(B)}$, получим следующий ниже результат. Условие Магарам для положительной векторной меры $\mu : \mathfrak{E}(e) \to F$ понимается так же, как и в 1.14.1, т. е. $\mu[0, a] = [0, \mu(a)]$ $(a \in \mathfrak{E}(e))$. Если μ — изоморфизм булевых алгебр, то символом μ^* обозначаем изоморфизм соответствующих расширенных K-пространств.

1.15.4. Теорема. *Пусть E — это K-пространство с единицей e и $T : E \to F$ — существенно положительный оператор Магарам. Тогда существуют последовательности $(e_k)_{k=0}^{\infty}$, $(c_k)_{k=1}^{\infty}$, $(\mu_k)_{k=0}^{\infty}$ и $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ такие, что:*

(1) *(e_k) — разбиение единицы в булевой алгебре $\mathfrak{E}(e)$, а (c_k) — последовательность осколков элемента $c := Te$;*

(2) *$\mu : \mathfrak{E}(e_0) \to F$ — строго положительная порядково непрерывная мера, удовлетворяющая условию Магарам;*

(3) *$\mu_k : \mathscr{E}(e_k) \to \mathscr{E}(c_k)$ — булев изоморфизм, α_k — положительный обратимый ортоморфизм в $\{c_k\}^{\perp\perp}$;*

(4) *имеет место представление*

$$Tx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\mu_0(e_\lambda^{x_0}) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu_k^*(x_k),$$

где x_k — проекция элемента x на компоненту $\{e_k\}^{\perp\perp}$.

Для оператора Магарам справедливы также двойственные аналоги 1.13.4 и 1.13.5.

1.15.5. Теорема. *Пусть $T : E \to F$ — положительный порядково непрерывный оператор. Равносильны утверждения:*

(1) *T удовлетворяет условию Магарам;*

(2) *для любого оператора $0 \leq S \leq T$ существует ортоморфизм $\alpha : E \to E$, $0 \leq \alpha \leq I_E$, такой, что $Sx = S\alpha x$ для всех $x \in E$;*

(3) *если $Tx = f_1 + f_2$ для некоторых $0 \leq x \in E$ и $0 \leq f_1, f_2 \in F$, причем $f_1 \perp f_2$, то найдутся такие $0 \leq x_1, x_2 \in E$, что $x = x_1 + x_2$, $x_1 \perp x_2$ и $Tx_k = f_k$ $(k = 1, 2)$.*

$\lhd$ Без ограничения общности можно считать T существенно положительным. Если верно (1), то $T = \tau{\downarrow} \circ h$ (см. 1.15.2). Так как τ $\mathscr{R}$-линеен, то T будет $\mathscr{R}{\downarrow}$-линейным. Если $0 \leq S \leq T$, то S также будет $\mathscr{R}{\downarrow}$-линейным, а значит, оператором Магарам. Согласно 1.15.2 $S = \sigma{\downarrow} \circ h$, где $[\![\sigma \in \mathscr{E}^{\sim}]\!] = [\![0 \leq \sigma \leq \tau]\!] = \mathbb{1}$. Из теоремы Радона — Никодима выводится утверждение (2) для функционалов τ и σ. Переходя к спускам, получим (2) для операторов T и S. Остальные импликации элементарны. $\rhd$

1.15.6. *Пусть $S : E \to F$ — регулярный оператор, причем $T := |S|$ — оператор Магарам. Тогда существует проектор $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ такой, что $S^+ = S \circ \pi$ и $S^- = S \circ \pi^\perp$.*

$\lhd$ Вновь можем считать, что $T = \tau{\downarrow}$, где τ — существенно положительный o-непрерывный функционал внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Так же, как и в 1.15.5, устанавливается, что существует регулярный функционал $\sigma \in \mathscr{E}$, для которого $\tau = |\sigma|$. Пусть p — проектор в $\mathscr{E}$ на носитель (= компоненту существенной положительности) σ^+. Порядково непрерывные функционалы дизъюнктны лишь в том случае, когда дизъюнктны их носители. Поэтому $\sigma^+ = \sigma \circ p$ и $\sigma^- = \sigma \circ p^\perp$. Остается положить $\pi := p{\downarrow}$ и перейти к спускам. $\rhd$

1.15.7. Мы показали, что общие свойства операторов Магарам можно вывести из соответствующих фактов для функционалов с помощью теоремы 1.15.2. Более того, описанные выше приемы могут быть полезны и при изучении произвольных регулярных операторов.

Возьмем положительный оператор Φ из векторной решетки X в F. По теореме 1.13.2 существует положительный $\mathbb{R}^\wedge$-линейный функционал $\varphi : X^\wedge \to \mathscr{R}$ такой, что $[\![\Phi(x) = \varphi(x^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$ для всех $x \in X$. Введем в $X^\wedge$ полунорму $\rho(x) := \varphi(|x|)$. Пусть $\mathscr{X}$ — пополнение фактор-решетки $X^\wedge/\rho^{-1}(0)$ по фактор-норме. Тогда $\mathscr{X}$ — банахова решетка и существует единственный положительный ($\mathscr{R}$-линейный) функционал $\overline{\varphi} : \mathscr{X} \to \mathscr{R}$ такой, что $\varphi = \overline{\varphi} \circ \iota$, где $\iota : X^\wedge \to \mathscr{X}$ — фактор-гомоморфизм. Кроме того, $\overline{\varphi}$ порядково непрерывен и существенно положителен.

Теперь, поработав со спусками и подъемами, можно получить такой результат.

1.15.8. *Теорема.* *Существуют K-пространство $\overline{X}$ и определенный на нем существенно положительный оператор Магарам $\overline{\Phi} : \overline{X} \to F$, удовлетворяющие следующим условиям:*

- **(1)** *найдутся решеточные гомоморфизмы $\imath : X \to \overline{X}$ и $\jmath : \mathscr{Z}(X) \to \mathscr{Z}(\overline{X})$, где $\mathscr{Z}(X)$ — идеал X, порожденный тождественным оператором, такие что $\jmath$ также решеточный гомоморфизм и $\alpha\Phi x = \overline{\Phi}(\jmath(\alpha)\imath(x))$ для всех $x \in X$ и $\alpha \in \mathscr{Z}(F)$; в частности, $\Phi(x) = \overline{\Phi}(\imath(x))$;*
- **(2)** *$\imath(X)$ — массивная подрешетка $\overline{X}$ и $\jmath(\mathscr{Z}(F))$ — это o-замкнутая подрешетка и подкольцо в $\mathscr{Z}(\overline{X})$;*

(3) $\overline{X} = b(X \otimes \mathscr{Z}(F))^{\downarrow\uparrow}$, *где* $b : X \otimes \mathscr{Z}(F) \to \overline{X}$ *— это линейный оператор, определяемый соотношением* $b(x \otimes \alpha) := \jmath(\alpha)\imath(x)$ *для* $x \in X$ *и* $\alpha \in \mathscr{Z}(F)$.

Пара $(\overline{X}, \overline{\Phi})$ определена однозначно с точностью до изоморфизма. Более того, если существенно положительный оператор Магарам $\overline{\Phi}_1 : \overline{X}_1 \to F$ и решеточный гомоморфизм $\imath_1 : \overline{X}_1 \to F$ удовлетворяют условию $\Phi = \overline{\Phi}_1 \circ \imath_1$, то найдется изоморфизм h из $\overline{X}$ на o-замкнутую подрешетку в $\overline{X}$ такой, что $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_1 \circ h$ и $h \circ \imath = \imath_1$.

Обозначим через $m\overline{X}$ максимальное расширение K-пространства $\overline{X}$. Фиксируем в $m\overline{X}$ порядковую единицу — тем самым однозначно определяется структура f-алгебры. Пусть $L_1(\Phi)$ — наибольший фундамент в $m\overline{X}$, на который можно распространить $\overline{\Phi}$ по o-непрерывности. Следующий результат — вариант теоремы Радона — Никодима для положительных операторов.

1.15.9. *Теорема.* *Для любого оператора* $T \in \{\Phi\}^{\perp\perp}$ *существует единственный элемент* $z \in m\overline{X}$ *такой, что*

$$Tx = \overline{\Phi}(z \cdot \imath(x)) \quad (x \in X).$$

Сопоставление $T \mapsto z$ *осуществляет линейный и решеточный изоморфизм компоненты* $\{\Phi\}^{\perp\perp}$ *и фундамента в* $m\overline{X}$, *определяемого формулой* $\{z \in m\overline{X} : z \cdot \imath(X) \subset L_1(\Phi)\}$.

1.15.10. Примечания.

(1) В большой серии работ, опубликованных в пятидесятые годы, Д. Магарам предложила оригинальный подход к изучению положительных операторов (см. обзор [94]). К этим работам восходят концепция оператора Магарам, а также идея расширения положительного оператора до оператора Магарам (см. 1.13.8). Следует отметить, что в рамках булевозначного анализа подход Д. Магарам отличается идейной ясностью и определенными упрощениями, ибо значительная часть теории сводится к работе с числовой мерой и интегралом в подходящей булевозначной модели.

(2) Некоторые результаты Д. Магарам были перенесены на векторные решетки в работе Люксембурга и Шепа [91]. Теорему 1.15.2 установил А. Г. Кусраев [26].

(3) Эквивалентность (1)$\leftrightarrow$(2) из 1.15.5 — это ограниченная версия теоремы Радона — Никодима для оператора Магарам. В полном объеме эта теорема доказывается в [91] стандартными средствами, а в [26, 29] — на основе 1.15.2. Утверждение 1.15.6 — операторный вариант теоремы Хана о разложении меры (см. [91, 93]). Для оператора, действующего в пространствах измеримых функций, теорему 1.15.4 установила Д. Магарам своими методами.

(4) Вопрос о расширении положительного оператора до оператора Магарам изучался в [1, 29]. В этих же работах можно найти подробности относительно 1.15.8 и 1.15.9. Такое расширение имеет довольно сложную структуру, но иногда допускает функциональное описание, т. е. реализуется как пространство классов эквивалентности измеримых функций двух переменных.

1.16. Циклически компактные операторы

Булевозначная интерпретация компактности приводит к новому понятию *циклической компактности множеств и операторов*, которое заслуживает отдельного рассмотрения. Фрагмент возникающей при этом теории излагается ниже.

1.16.1. Пусть B — полная булева алгебра и пусть A — непустое множество. Обозначим символом $B(\mathrm{A})$ множество всех разбиений единицы в B, индексованных элементами множества A. Множества $B(\mathrm{A})$ и $\mathrm{A}^{\wedge}{\downarrow}$ биективны, так что они часто отождествляются. Если A — упорядоченное множество, то в $B(\mathrm{A})$ также можно ввести отношение порядка формулой:

$$\nu \leq \mu \leftrightarrow (\forall \alpha, \beta \in \mathrm{A}) \big(\nu(\alpha) \wedge \mu(\beta) \neq 0 \to \alpha \leq \beta\big) \quad \big(\nu, \mu \in B(\mathrm{A})\big).$$

При этом для направленного множества A множество $B(\mathrm{A})$ также будет направленным.

Рассмотрим нормированное B-пространство X и сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ в нем. Для каждого $\nu \in B(\mathrm{A})$ положим $x_\nu := \mathrm{mix}_{\alpha \in \mathrm{A}}(\nu(\alpha) x_\alpha)$. Если все указанные перемешивания существуют, то получаем новую сеть $(x_\nu)_{\nu \in B(\mathrm{A})}$ в X. Любую подсеть этой сети $(x_\nu)_{\nu \in B(\mathrm{A})}$ называют *циклической подсетью* исходной сети $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$. Если $s : \mathrm{A} \to X$ и $\varkappa : \mathrm{A}' \to B(\mathrm{A})$, то отображение $s \bullet \varkappa : \mathrm{A}' \to X$ определяется соотношением $s \bullet \varkappa(\alpha) := x_\nu$, где $\nu = \varkappa(\alpha)$. *Циклической подпоследовательностью* последовательности $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ называют последовательность вида $(x_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$, где $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность в $B(\mathbb{N})$, для которой $\nu_k \leq \nu_{k+1}$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Согласно 1.8.7 можно считать без ограничения общности, что X — разложимое подпространство пространства Банаха — Канторовича $\mathscr{X}{\downarrow}$, где $\mathscr{X}$ — банахово пространство внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и каждый проектор $b \in B$ совпадает с ограничением $\chi(b)$ на X. Точнее, мы предполагаем, что X — ограниченный спуск банахова пространства $\mathscr{X}$ из $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. $X = \{x \in \mathscr{X}{\downarrow} : |x| \in \Lambda\}$, где Λ — стоунова алгебра $\mathscr{S}(B)$, отождествляем с ограниченной частью комплексной алгебры $\mathscr{C}{\downarrow}$. Множество $C \subset X$ называют mix-*полным*, если для любого семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в C и разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в множестве C содержится всякий элемент $x \in X$ такой, что $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ для $\xi \in \Xi$. Ясно, что в нашем случае C будет mix-полным в том и только в том случае, если $C = C{\uparrow\downarrow}$.

Множество $C \subset X$ называют *циклически компактным*, если оно mix-полно и любая последовательность в нем имеет циклическую подпоследовательность, сходящуюся (по норме) к некоторому элементу из C. Множество называют *относительно циклически компактным,* если оно содержится в некотором циклически компактном множестве. Сравнивая эти определения с 1.11.8 и привлекая 1.11.9, нетрудно показать, что подмножество C в X циклически компактно (относительно циклически компактно) в том и только в том случае, если $C{\uparrow}$ — компактное (относительно компактное) подмножество $\mathscr{X}$.

Следующий факт выводится путем интерпретации в булевозначной модели критерия Хаусдорфа.

1.16.2. *Теорема.* *В каждом банаховом B-пространстве X mix-полное множество C будет относительно циклически компактным в том и только в том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют счетное разбиение единицы (π_n) в булевой алгебре B и последовательность (θ_n) конечных множеств $\theta_n \subset C$ такие, что множество $\pi_n\big(\operatorname{mix}(\theta_n)\big)$ является ε-сетью для $\pi_n(C)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что если $\theta_n := \{x_{n,1}, \dots, x_{n,l(n)}\}$, то для каждого $x \in \pi_n(C)$ существует разбиение единицы $\{\rho_{n,1}, \dots, \rho_{n,l(n)}\}$ в B такое, что*

$$\Bigg\| x - \sum_{k=1}^{l(n)} \pi_n \rho_{n,k} x_{n,k} \Bigg\| \leq \varepsilon.$$

1.16.3. Рассмотрим второе операторно сопряженное (или B-сопряженное) пространство пространства X, определяемое формулой

$X^{\#\#} := (X^{\#})^{\#} := \mathscr{L}_B(X^{\#}, \Lambda)$. Для $x \in X$ и $f \in X^{\#}$, положим $x^{\#\#} := \iota(x)$, где $\iota(x) : f \mapsto f(x)$. Несомненно, $\iota(x) \in L(X^{\#}, \Lambda)$. Более того,

$$\begin{gathered}|x^{\#\#}| = |\iota(x)| = \sup\{|\iota(x)(f)| : |f| \le 1\} = \\ = \sup\{|f(x)| : (\forall x \in X)\, |f(x)| \le |x|\} = \sup\{|f(x)| : f \in \partial(|\cdot|)\} = |x|.\end{gathered}$$

Тем самым $\iota(x) \in X^{\#\#}$ для каждого $x \in X$. Ясно, что оператор, $\iota : X \to X^{\#\#}$, определяемый формулой $\iota : x \mapsto \iota(x)$, линеен и изометричен. Как обычно, оператор ι назовем *каноническим вложением* X во второе B-сопряженное пространство. Как и в случае банахова пространства удобно считать x и $x^{\#\#} := \iota x$ одним элементом и рассматривать X как подпространство в $X^{\#\#}$. Говорят, что B-нормированное пространство X *B-рефлексивно*, если X и $X^{\#\#}$ линейно изометричны при указанном вложении ι.

Теорема. *Нормированное B-пространство является B-рефлексивным в том и только в том случае, если его единичный шар циклически $\sigma_\infty(X, X^{\#})$-компактен.*

$\lhd$ Доказательство получается путем интерпретации в подходящей булевозначной модели критерия Какутани рефлексивности нормированного пространства. $\rhd$

1.16.4. Пусть X и Y — нормированные B-пространства. Оператор $T \in \mathscr{L}_B(X, Y)$ называется *циклически компактным* (символически, $T \in \mathscr{K}(X, Y)$), если образ $T(C)$ любого ограниченного множества $C \subset X$ относительно циклически компактен в Y. Легко видеть, что $\mathscr{K}(X, Y)$ — разложимое подпространство пространства Банаха — Канторовича $\mathscr{L}_b(X, Y)$.

Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — булевозначные реализации X и Y соответственно. Тогда погружение в булевозначную модель $T \mapsto T^{\sim}$ осуществляет линейное изометрическое вложение решеточно нормированного пространства $\mathscr{L}_E(X, Y)$ в $\mathscr{L}^B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}){\downarrow}$. При этом ограниченный оператор T из X в Y будет циклически компактным в том и только в том случае, если $[\![T^{\sim}$ — компактный оператор из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}]\!] = \mathbb{1}$.

1.16.5. ***Теорема.*** *Пусть X и Y — некоторые модули Капланского — Гильберта над Λ, а T — циклический компактный оператор из X и Y. Существуют ортонормальные последовательности $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ в X и $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ в Y, а также последовательность $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ в Λ, такие, что справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mu_{k+1} \leq \mu_k$ $(k \in \mathbb{N})$ *и* $o\text{-}\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0$*;*
(2) *в* Λ *существует такой проектор* π_∞*, что* $\pi_\infty \mu_k$ *— порядковая единица в* $\pi_\infty \Lambda$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$*;*
(3) *существует такое разбиение* $(\pi_k)_{k=0}^{\infty}$ *проектора* $\pi_\infty^\perp$*, что* $\pi_0 \mu_1 = 0$*,* $\pi_k \leq [\mu_k]$ *и* $\pi_k \mu_{k+1} = 0$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$*;*
(4) *имеет место представление*

$$T = \pi_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k e'_k \otimes f_k + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^{n} \mu_k e'_k \otimes f_k.$$

$\lhd$ В силу 1.8.11 можем предположить, что X и Y совпадают с ограниченными спусками гильбертовых пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно. Оператор $T{\uparrow} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ компактен внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и можно там применить ZFC-теорему об общем виде компактного оператора в гильбертовом пространстве. $\rhd$

1.16.6. Для циклически компактных операторов выполняется некоторый вариант альтернативы Фредгольма. Мы будем назвать его *B-альтернативой Фредгольма.*

Рассмотрим B-циклическое банахово пространство X и ограниченный B-линейный оператор T в X. В этом случае X и $X^\#$ — модули над стоуновой алгеброй $\Lambda := \mathscr{S}(B)$, а T Λ-линеен (= модульный гомоморфизм). Подмножество $\mathscr{E} \subset X$ называют *локально линейно независимым,* если для любых $n \in \mathbb{N}$, $e_1, \dots, e_n \in \mathscr{E}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ и $\pi \in B$ из равенства $\pi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0$ вытекает $\pi \lambda_k e_k = 0$ $(k := 1, \dots, n)$. Скажем, что для оператора T справедлива *B-альтернатива Фредгольма*, если существует счетное разбиение единицы (b_n) в B такое, что выполнены следующие условия:

(1) Однородное уравнение $b_0 \circ Tx = 0$ имеет единственное решение, нуль. Однородное сопряженное уравнение $b_0 \circ T^\# y^\# = 0$ имеет единственное решение, нуль. Уравнение $b_0 \circ Tx = b_0 y$ разрешимо и имеет единственное решение при любом $y \in X$. Сопряженное уравнение $b_0 \circ T^\# y^\# = b_0 x^\#$ разрешимо и имеет единственное решение при любом $x^\# \in X^\#$.

(2) Для любого $n \in \mathbb{N}$ однородное уравнение $b_n \circ Tx = 0$ имеет n локально линейно независимых решений $x_{1,n}, \dots, x_{n,n}$ и однородное сопряженное уравнение $b_n \circ T^\# y^\# = 0$ имеет n локально линейно независимых решений $y^\#_{1,n}, \dots, y^\#_{n,n}$.

(3) Уравнение $Tx = y$ разрешимо в том и только в том случае, если $b_n \circ y^{\#}_{k,n}(y) = 0$ $(n \in \mathbb{N},\ k \leq n)$. Сопряженное уравнение $T^{\#}y^{\#} = x^{\#}$ разрешимо в том и только в том случае, если $b_n \circ x^{\#}(x_{k,n}) = 0$ $(n \in \mathbb{N},\ k \leq n)$.

(4) Общее решение x уравнения $Tx = y$ имеет вид

$$x = bo\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(x_n + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n} x_{k,n} \right),$$

где x_n — частное решение уравнения $b_n \circ Tx = b_n y$ и $(\lambda_{k,n})_{n\in\mathbb{N},k\leq n}$ — произвольные элементы из Λ.

Общее решение $y^{\#}$ уравнения $T^{\#}y^{\#} = x^{\#}$ имеет вид

$$y^{\#} = bo\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(y^{\#}_n + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n} y^{\#}_{k,n} \right),$$

где $y^{\#}_n$ — частное решение уравнения $b_n \circ T^{\#}y^{\#} = b_n x^{\#}$ и $\lambda_{k,n}$ — произвольные элементы из Λ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $k \leq n$.

1.16.7. *Теорема.* *Если S — циклически компактный оператор в B-циклическом банаховом пространстве X, то для оператора $T := I_X - S$ справедлива B-альтернатива Фредгольма.*

1.16.8. Примечания.

(1) Циклически компактные множества и операторы в решеточно нормированных пространствах были введены в [27] и [29], соответственно. Стандартное доказательство теоремы 4.1.15 можно извлечь из [29], где развит более общий подход. Варианты теорем 1.16.5 и 1.16.7 для операторов в пространстве Банаха — Канторовича имеются в [29].

Литература

1. Акилов Г. П., Колесников Е. В., Кусраев А. Г. О порядково непрерывном расширении положительного оператора// Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 5.—С. 24–35.

2. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.

3. Альбеверио С., Фенстад Й., Хэг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике.—М.: Мир, 1990.

4. Бухвалов А. В. Порядково ограниченные операторы в векторных решетках и пространствах измеримых функций // Математический анализ.—М.: ВИНИТИ, 1988.—Т. 26.—С. 3–63.

5. Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М. Векторные решетки и интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1991.—214 с.

6. Ван Хао, Мак-Нотон Р. Аксиоматические системы теории множеств. —М.: Изд-во иностр. лит., 1963.—54 с.

7. Владимиров Д. А. Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.—320 с.

8. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств.—М.: Мир, 1983.

9. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. —М.: ГИФМЛ, 1961.—407 с.

10. Гордон Е. И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 237, № 4.—С. 773–775.

11. Гордон Е. И. K-пространства в булевозначных моделях теории множеств // Докл. АН СССР.—1981.—Т. 258, № 4.—С. 777–780.

12. Гордон Е. И. К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 5.—С. 55–65.

13. Гордон Е. И. Нестандартные конечномерные аналоги операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$// Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 2.—С. 45–59.

14. Гордон Е. И. Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Э. Нельсона // Сиб. мат. журн.—1989. —Т. 30, № 1.—С. 89–95.

15. Гордон Е. И. О мерах Лёба // Известия вузов.—1991.—№ 2.—С. 25–33.

16. Гордон Е. И. Нестандартный анализ и компактные абелевы группы // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 2.—С. 26–40.

17. Гумилёв Н. С. Стихотворения и поэмы.—Л.: Сов. писатель, 1988.—631 с.

18. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.—М.: Мир, 1973.—150 с.

19. Канторович Л. В. О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл.

АН СССР.—1935.—Т. 4, № 1, 2.—С. 11–14.

20. Канторович Л. В. К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР.—1936.—Т. 1, № 7.—С. 271–274.

21. Канторович Л. В. Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.

22. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.

23. Колесников Е. В. Разложение положительного оператора // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 5.—С. 70–73.

24. Колесников Е. В., Кусраев А. Г., Малюгин С. А. О мажорируемых операторах.—Новосибирск, 1988.—(Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики им. С. Л. Соболева; № 26).

25. Коэн П. Дж. Теория моделей и континуум-гипотеза. —М.: Мир, 1973.—347 с.

26. Кусраев А. Г. Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1312–1316.

27. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 267, № 5. —С. 1049–1052.

28. Кусраев А. Г. О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа// Докл. АН СССР.—1983.—Т. 271, № 1. —С. 281–284.

29. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.

30. Кусраев А. Г. О пространствах Банаха — Канторовича // Сиб. мат. журн.—1985.—Т. 26, № 2.—С. 119–126.

31. Кусраев А. Г. Числовые системы в булевозначных моделях теории множеств // VIII Всесоюз. конф. по мат. логике.—М.: 1986.—С. 99.

32. Кусраев А. Г. Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии в «целом» и математическому анализу.—Новосибирск: Наука, 1987. —С. 84–123.

33. Кусраев А. Г. О функциональной реализации AW^*-алгебр типа I // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32. № 3.—С. 78–88.

34. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.—С. 212–292.

35. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. О комбинировании нестандартных методов // Сиб. мат. журн.—1990.—Т. 31, № 5.—С. 111–119.

36. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Булевозначный анализ.—Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1999.—398 с.

37. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992.—270 с.

38. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.—344 с.; Dordhecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.—435 pp.

39. Кусраев А. Г., Малюгин С. А. Некоторые вопросы теории векторных мер.—Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.—190 с.

40. Кусраев А. Г., Малюгин С. А. Об атомическом разложении векторных мер // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 5.—С. 101–110.

41. Кусраев А. Г., Малюгин С. А. Произведение и проективный предел векторных мер // Современные проблемы геометрии и анализа.—Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.—С. 132–152.

42. Кусраев А. Г., Малюгин С. А. О продолжении конечно-аддитивных мер // Мат. заметки.—1990.—Т. 48, № 1.—С. 56–60.

43. Кусраев А. Г., Стрижевский В. З. Решеточно нормированные пространства и мажорируемые операторы // Исследования по геометрии и функциональному анализу.—Новосибирск: Наука, 1987.—С. 132–157.

44. Кутателадзе С. С. Опорные множества сублинейных операторов // Докл. АН СССР.—1976.—Т. 230, № 5.—С. 1029–1032.

45. Кутателадзе С. С. Субдифференциалы выпуклых операторов // Сиб. мат. журн.—1977.—Т. 18, № 5.—С. 1057–1064.

46. Кутателадзе С. С. Крайние точки субдифференциалов// Докл. АН СССР.—1978.—Т. 242, № 5.—С. 1001–1003.

47. Кутателадзе С. С. Теорема Крейна — Мильмана и ее обращение // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 1.—С. 130–138.

48. Кутателадзе С. С. Спуски и подъемы // Докл. АН СССР.—1983.—Т. 272, № 2.—С. 521–524.

49. Кутателадзе С. С. Циклические монады и их применения // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 1.—С. 100–110.

50. Кутателадзе С. С. Монады ультрафильтров и экстенсиональных фильтров // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 1.—С. 129–133.

51. Кутателадзе С. С. Об осколках положительных операторов // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 5.—С. 111–119.

52. Кутателадзе С. С. Установки нестандартного анализа // Тр. Ин-та математики/АН СССР. Сиб отд-ние.—1989.—Т. 14: Современные проблемы анализа и геометрии.

53. Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа.—Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.—225 с.

54. Лейбниц Г. В. Монадология // Сочинения. Т. 1.—М.: Мысль, 1982.—С. 143–429.

55. Любецкий В. А. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 55, № 6. —С. 99–153.

56. Любецкий В. А., Гордон Е. И. Булевы расширения равномерных структур // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам.—М.: Наука, 1983.—С. 82–153.

57. Перэр И. Общая теория бесконечно малых // Сиб. мат. журн. —1990.—Т. 31, № 3.—С. 103–124.

58. Сикорский Р. Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—376 с.

59. Соболев В. И. О полуупорядоченной мере множеств, измеримых функциях и некоторых абстрактных интегралах // Докл. АН СССР.—1953.—Т. 91, № 1.—С. 23–26.

60. Троицкий В. Г. Нестандартная дискретизация и продолжение по Лебу семейства мер // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 3.—С. 190–198.

61. Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Positive Operators.—New York: Academic Press, 1985.—367 pp.

62. Ballard D. and Hrbáček K. Standard foundations of nonstandard analysis // J. Symbolic Logic.—1992.—V. 57.—No. 2.—P. 741–748.

63. Bell J. L. Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—New York etc.: Clarendon Press, 1985.—xx+165 pp.

64. Cozart D. and Moore L. C. Jr. The nonstandard hull of a normed Riesz space // Duke Math. J.—1974.—V. 41.—P. 263–275.

65. Cutland N. Nonstandard measure theory and its applications // Proc. London Math. Soc.—1983.—V. 15, No. 6.—P. 530–589.

66. Dacunha-Castelle D. and Krivine J. L. Applications des ultraproducts a l'etude des espaces et des algebres de Banach // Studia Math.—1972.—V. 41.—P. 315–334.

67. Gordon H. Decomposition of linear functionals on Riesz spaces // Duke Math. J.—1960.—V. 27.—P. 323–332.

68. Gordon E. I. Nonstandard Methods in Commutative Harmonic Analysis.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997.

69. Halmos P. R. Lectures on Boolean Algebras.— Toronto, New York, and London: Van Nostrand, 1963.—147 pp.

70. Heinrich S. Ultraproducts in Banach space theory // J. Reine Angem. Math.—1980.—V. 313.—P. 72–104.

71. Henson C. W. When do the Banach spaces have isometically isomorphic nonstandart hulls? // Israel J. Math.—1975.—V. 22.—P. 57–67.

72. Henson C. W. Nonstandard hulls of Banach spaces // Israel J. Math.—1976.—V. 25.—P. 108–114.

73. Henson C. W. Infinitesimals in functional analysis //Nonstandard Analysis and Its Applications.—Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 1988.—P. 140–181.

74. Henson C. W. and Moore L. C. Jr. Nonstandard hulls of the classical Banach spaces // Duke Math. J.—1974.—V. 41, No. 2.—P. 277–284.

75. Henson C. W. and Moore L. C. Jr. Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces // Nonstandard Analysis. Recent Development.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1983.—P. 27–112.—(Lecture Notes in Math., **983**.)

76. Hrbáček K. Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fund. Math.—1978.—V. 98, No. 1.—P. 1–24.

77. Jameson G. J. O. Ordered Linear Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1970.—194 pp.—(Lecture Notes in Math., **141**.)

78. Jech T. J. The Axiom of Choice. — Amsterdam etc.: North-Holland, 1973.—xi+202 pp.

79. Jech T. J. Abstract theory of abelian operator algebras: an application of forcing // Trans. Amer. Math. Soc.—1985.—V. 289, No. 1.—P. 133–162.

80. Jech T. J. First order theory of complete Stonean algebras (Boolean-valued real and complex numbers) // Canad. Math. Bull.—1987.—V. 30, No. 4.—P. 385–392.

81. Jech T. J. Boolean-linear spaces // Adv. in Math.—1990.—V. 81, No. 2.—P. 117–197.

82. Kanovei V. and Reeken M. Internal approach to external sets and universes// Studia Logica, part 1: **55**, 227–235 (1995); part II: **55**, 347–376 (1995); part III: **56**, 293–322 (1996).

83. Kaplansky I. Projections in Banach algebras // Ann. of Math.—1951.—V. 53, No. 2.—P. 235–249.

84. Kaplansky I. Algebras of type I // Ann. of Math.—1952.—V. 56. —P. 460–472.

85. Kaplansky I. Modules over operator algebras // Amer. J. Math.—1953.—V. 75, No. 4.—P. 839–858.

86. Kawai T. Axiom systems of nonstandard set theory // Logic Symposia, Hakone 1979, 1980.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1981.—P. 57–65.

87. Kawai T. Nonstandard analysis by axiomatic method // Southeast Asian Conference on Logic. — Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—P. 55–76.

88. Krivine J. L. Langages a valeurs reelles et applications // Fund. Math.—1974.—V. 81, No. 3.—P. 213–253.

89. Lipecki Z., Plachky D., and Thompsen W. Extensions of positive operators and extreme points. I// Colloq. Math.—1979.—T. 42.—C. 279–284.

90. Luxemburg W. A. J. A general theory of monads // Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability.—New York: Holt, Rinehart and Minston.—P. 18–86.

91. Luxemburg W. A. J. and Schep A. A Radon–Nikodým type theorem for positive operators and a dual// Indag. Math.—1978.—T. 40.—C. 357–375.

92. Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 1.—Amsterdam and London: North-Holland, 1971.—514 pp.

93. Maharam D. On kernel representation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc.—1955.—V. 79, No. 1.—P. 229–255.

94. Maharam D. On positive operators// Contemporary Math. —1984.—V. 26.—P. 263–277.

95. Nelson E. Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc.—1977.—V. 83, No. 6.—P. 1165–1198.

96. Nelson E. The syntax of nonstandard analysis // Ann. Pure Appl. Logic.—1988.—V. 38, No. 2.—P. 123–134.

97. Ozawa M. Boolean valued interpretation of Hilbert space theory // J. Math. Soc. Japan.—1983.—V. 35, No. 4.—P. 609–627.

98. Ozawa M. A classification of type I AW^*-algebras and Boolean valued analysis // J. Math. Soc. Japan.—1984.—V. 36, No. 4.—P. 589–608.

99. Ozawa M. A transfer principle from von Neumann algebras to AW^*-algebras // J. London Math. Soc. (2).—1985.—V. 32, No. 1.—P. 141–148.

100. Ozawa M. Nonuniqueness of the cardinality attached to homogeneous AW^*-algebras // Proc. Amer. Math. Soc.—1985.—V. 93.—P. 681–684.

101. Pagter B. de. The components of a positive operator // Indag. Math.—1983.—V. 45, No. 2.—P. 229–241.

102. Péraire Y. Une nouvelle théorie des infinitesimaux// C. R. Acad. Aci. Paris Ser. I.—1985.—V. 301, No. 5.—P. 157–159.

103. Péraire Y. A general theory of infinitesimals// Sibirsk. Mat. Zh.—1990.—V. 31, No. 3.—P. 107–124.

104. Péraire Y. Théorie relative des ensembles internes//Osaka J. Math. —1992.—V. 29, No. 2.—P. 267–297.

105. Péraire Y. Some extensions of the principles of idealization transfer and choice in the relative internal set theory // Arch. Math. Logic.—1995.—V. 34.—P. 269–277.

106. Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—376 pp.

107. Schwarz H.-U. Banach Lattices and Operators.—Leipzing: Teubner, 1984.—208 pp.

108. Solovay R. M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. of Math. (2).—1970.—V. 92, No. 2.—P. 1–56.

109. Solovay R. and Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math.—1972.—V. 94, No. 2.—P. 201–245.

110. Stern J. Some applications of model theory in Banach space theory // Ann. Math. Logic.—1976.—V. 9, No. 1.—P. 49–121.

111. Stern J. The problem of envelopes for Banach spaces // Israel J. Math.—1976.—V. 24, No. 1.—P. 1–15.

112. Takeuti G. Two Applications of Logic to Mathematics.—Tokyo, Princeton: Iwanami and Princeton Univ. Press, 1978.—137 pp.

113. Takeuti G. A transfer principle in harmonic analysis // J. Symbolic Logic.—1979.—V. 44, No. 3.—P. 417–440.

114. Takeuti G. Boolean valued analysis // Applications of Sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977), Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.

115. Takeuti G. and Zaring W. M. Axiomatic Set Theory.—New York: Springer-Verlag, 1973.—238 pp.

116. Vopěnka P. General theory of $\bigtriangledown$-models // Comment. Math. Univ. Carolin.—1967.—V. 7, No. 1.—P. 147–170.

117. Vopěnka P. and Hajek P. The Theory of Semisets.—Amsterdam: North-Holland, 1972.

118. Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 2.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—720 pp.

Глава 2

Функциональное представление булевозначного универсума

А. Е. Гутман, Г. А. Лосенков

В основе методов булевозначного анализа лежит рассмотрение нестандартных моделей теории множеств с многозначной истинностью. Точнее говоря, истинность высказывания в таких моделях принимает значения в некоторой полной булевой алгебре.

В настоящее время булевозначный анализ представляет собой достаточно мощную теорию, изобилующую многочисленными глубокими результатами и имеющую разнообразные приложения, главным образом, в теории множеств. Применительно к функциональному анализу методы булевозначного анализа нашли весьма удачное применение в таких областях, как теория векторных решеток и решеточно нормированных пространств, теория положительных и мажорируемых операторов, теория алгебр фон Неймана, выпуклый анализ, теория векторных мер.

Современные методы булевозначного анализа в силу самой своей природы сопряжены с довольно громоздкой техникой логического характера. Можно сказать, что с прагматической точки зрения рядового пользователя-аналитика эта техника в значительной степени отвлекает от вполне конкретной цели — воспользоваться достижениями булевозначного анализа для решения той или иной аналитической задачи.

Поскольку в функциональном анализе наиболее привычным объектом исследования являются разнообразные пространства функций, возникает естественное желание иметь дело не с абстрактной булевозначной системой, а с ее функциональным аналогом — моделью, элементы которой являются функциями, а основные логические операции вычисляются «поточечно». Примером такой модели является класс $\mathbb{V}^Q$ всех функций, определенных на фиксированном непустом множестве Q и действующих в класс $\mathbb{V}$ всех множеств. Значениями истинности в модели $\mathbb{V}^Q$ являются всевозможные подмножества Q, причем истинность $[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!]$ высказывания $\varphi(t_1,\dots,t_n)$ на функциях $u_1,\dots,u_n \in \mathbb{V}^Q$ вычисляется следующим образом:

$$[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] = \bigl\{q \in Q:\ \varphi\bigl(u_1(q),\dots,u_n(q)\bigr)\bigr\}.$$

В настоящей работе предлагается решение поставленной выше задачи. С этой целью вводится и исследуется новое понятие непрерывного поливерсума, представляющего собой непрерывное расслоение моделей теории множеств. Показывается, что класс непрерывных сечений поливерсума является булевозначной алгебраической системой, удовлетворяющей всем основным принципам булевозначного анализа, а также устанавливается, что любая такая булевозначная алгебраическая система может быть представлена в виде класса сечений подходящего непрерывного поливерсума.

2.1. Предварительные сведения

2.1.1. Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *открытым*, если оно удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий:

(1) для всякого открытого подмножества $A \subset X$ образ $f(A)$ открыт в Y;

(2) для всякой точки $x \in X$ и любой ее окрестности $A \subset X$ образ $f(A)$ является окрестностью точки $f(x)$ в Y;

(3) $f^{-1}(\operatorname{cl} B) \subset \operatorname{cl} f^{-1}(B)$ для любого подмножества

Заметим, что равенство $f^{-1}(\operatorname{cl} B) = \operatorname{cl} f^{-1}(B)$ имеет место для всех подмножеств $B \subset Y$ тогда и только тогда, когда отображение f непрерывно и открыто.

Отображение $f : X \to Y$ называется *замкнутым*, если оно удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий:

(1) для всякого замкнутого подмножества $A \subset X$ образ $f(A)$ замкнут в Y;

(2) $\operatorname{cl} f(A) \subset f(\operatorname{cl} A)$ для любого подмножества $A \subset X$.

Равенство $\operatorname{cl} f(A) = f(\operatorname{cl} A)$ выполняется для любого подмножества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда отображение $f : X \to Y$ непрерывно и замкнуто.

2.1.2. Пусть X — некоторый класс. Подкласс $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ назовем *топологией* на X, если

(1) $\cup\tau = X$;

(2) $U \cap V \in \tau$ для всех $U, V \in \tau$;

(3) $\cup\mathscr{U} \in \tau$ для любого подмножества $\mathscr{U} \subset \tau$.

Класс X, наделенный топологией, мы, как обычно, будем называть *топологическим пространством.*

Все основные топологическое понятия (такие, как окрестность точки, замкнутое множество, внутренность, замыкание, непрерывная функция, хаусдорфовость и т. п.) вводятся аналогично тому, как это делается для топологии на множестве. Заметим однако, что не все классические подходы к определению этих понятий сохраняют свою формальную силу в случае класс-топологии. Например, из двух определений замкнутого множества:

(а) как подмножества X, дополнение которого принадлежит τ,
(б) как подмножества X, дополнение которого с каждой своей точкой содержит элемент τ,

следует выбрать второе.

Определяя замыкание множества A как наименьшее замкнутое подмножество X, содержащее A, мы подвергаем себя определенному риску: некоторые множества могут не иметь замыкания. Однако эта проблема отсутствует, если топология τ хаусдорфова: в этом случае каждое множество будет иметь замыкание. (Действительно, в случае хаусдорфовой топологии каждый сходящийся фильтр имеет единственный предел, а значит, совокупность всех пределов сходящихся фильтров над данным множеством окажется множеством, а не собственным классом.)

Символом $\mathrm{Clop}(X)$ обозначается класс всех открыто-замкнутых подмножеств X (т. е. подмножеств, являющихся одновременно открытыми и замкнутыми). В дальнейшем запись $U \sqsubset X$ будет означать, что $U \in \mathrm{Clop}(X)$. Для класса $\{U \sqsubset X : \ x \in U\}$ мы будем использовать обозначение $\mathrm{Clop}(x)$.

Топология называется *экстремально несвязной*, если замыкание всякого открытого множества является открытым множеством.

Большинство необходимых нам сведений о топологических пространствах можно найти, например, в [1, 2].

2.1.3. Пусть B — полная булева алгебра. Тройка $(\mathfrak{U}, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$ называется *булевозначной алгебраической системой* над B (или *B-значной алгебраической системой*), если классы $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ являются класс-функциями из $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$ в B, обладающими следующими свойствами:

(1) $[\![u = u]\!] = \mathbb{1}$;
(2) $[\![u = v]\!] = [\![v = u]\!]$;
(3) $[\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leqslant [\![u = w]\!]$;
(4) $[\![u = v]\!] \wedge [\![v \in w]\!] \leqslant [\![u \in w]\!]$;
(5) $[\![u = v]\!] \wedge [\![w \in v]\!] \leqslant [\![w \in u]\!]$

для всех $u, v, w \in \mathfrak{U}$.

Класс-функции $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ называются булевозначными (B-значными) *оценками истинности* равенства и принадлежности.

Вместо $(\mathfrak{U}, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$ мы обычно будем писать просто $\mathfrak{U}$ и в случае необходимости снабжать символы булевозначных оценок истинности индексом $[\![\cdot = \cdot]\!]_{\mathfrak{U}}$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]_{\mathfrak{U}}$.

Булевозначная система $\mathfrak{U}$ называется *отделимой*, если для любых $u, v \in \mathfrak{U}$ из $[\![u = v]\!] = \mathbb{1}$ следует $u = v$.

2.1.4. Рассмотрим булевозначные алгебраические системы $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ над полными булевыми алгебрами B и C и предположим, что между алгебрами B и C имеется булев изоморфизм $\jmath : B \to C$. *Изоморфизмом булевозначных алгебраических систем* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{V}$*, согласованным с изоморфизмом* $\jmath$, называется биективная класс-функция $\imath : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$, удовлетворяющая соотношениям

$$\jmath([\![u_1 = u_2]\!]_{\mathfrak{U}}) = [\![\imath(u_1) = \imath(u_2)]\!]_{\mathfrak{V}},$$
$$\jmath([\![u_1 \in u_2]\!]_{\mathfrak{U}}) = [\![\imath(u_1) \in \imath(u_2)]\!]_{\mathfrak{V}}$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathfrak{U}$. Говорят, что булевозначные системы *изоморфны*, если между ними существует изоморфизм.

В том случае, когда $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — булевозначные алгебраические системы над одной и той же алгеброй B, всякий изоморфизм $\imath : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ по умолчанию предполагается ассоциированным с тождественным изоморфизмом:

$$[\![u_1 = u_2]\!]_{\mathfrak{U}} = [\![\imath(u_1) = \imath(u_2)]\!]_{\mathfrak{V}}, \quad [\![u_1 \in u_2]\!]_{\mathfrak{U}} = [\![\imath(u_1) \in \imath(u_2)]\!]_{\mathfrak{V}}.$$

При необходимости подчеркнуть это обстоятельство, мы будем называть такой изоморфизм B*-изоморфизмом* и называть соответствующие системы B*-изоморфными.*

2.1.5. Всюду, употребляя запись вида $\varphi(t_1, \dots, t_n)$, мы по умолчанию предполагаем, что φ — формула теоретико-множественной сигнатуры, все свободные переменные которой попадают в список $(t_1, \dots, t_n)$.

Произвольный набор $(u_1, \dots, u_n)$ элементов системы $\mathfrak{U}$ называется *означиванием* списка переменных $(t_1, \dots, t_n)$. Рекурсией по сложности формулы определяется (булевозначная) истинность

$$[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]$$

любой формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ относительно произвольного означивания $(u_1, \dots, u_n)$ переменных $(t_1, \dots, t_n)$. Если формула φ атомарна, т. е. имеет вид $t_1 = t_2$ или $t_1 \in t_2$, то ее истинность относительно означивания (u_1, u_2) полагается равной $[\![u_1 = u_2]\!]$ и $[\![u_1 \in u_2]\!]$ соответственно. Истинность же формул большей сложности определяется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
[\![\varphi(u_1, \dots, u_n) \mathbin{\&} \psi(u_1, \dots, u_n)]\!] &:= [\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] \wedge [\![\psi(u_1, \dots, u_n)]\!],\\
[\![\varphi(u_1, \dots, u_n) \vee \psi(u_1, \dots, u_n)]\!] &:= [\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] \vee [\![\psi(u_1, \dots, u_n)]\!],\\
[\![\varphi(u_1, \dots, u_n) \to \psi(u_1, \dots, u_n)]\!] &:= [\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] \Rightarrow [\![\psi(u_1, \dots, u_n)]\!],\\
[\![\neg\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] &:= [\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]^{\perp},\\
[\![(\forall t)\, \varphi(t, u_1, \dots, u_n)]\!] &:= \bigwedge_{u \in \mathfrak{U}} [\![\varphi(u, u_1, \dots, u_n)]\!],\\
[\![(\exists t)\, \varphi(t, u_1, \dots, u_n)]\!] &:= \bigvee_{u \in \mathfrak{U}} [\![\varphi(u, u_1, \dots, u_n)]\!],
\end{aligned}
$$

где символ $b^{\perp}$ обозначает дополнение b в булевой алгебре B. Говорят, что формула $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ *истинна* в алгебраической системе $\mathfrak{U}$ относительно означивания $(u_1, \dots, u_n)$, если имеет место равенство $[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] = \mathbb{1}$. В этом случае пишут $\mathfrak{U} \models \varphi(u_1, \dots, u_n)$.

2.1.6. *Предложение.* *Если $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ доказуема в исчислении предикатов, то $[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] = \mathbb{1}$ для всех $u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{U}$.*

$\lhd$ Несложно убедиться в том, что все аксиомы исчисления предикатов истинны в системе $\mathfrak{U}$, а правила вывода сохраняют истинность. Последнее означает, что выводимость формулы φ в исчислении предикатов из формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ обеспечивает неравенство $[\![\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n]\!] \leqslant [\![\varphi]\!]$. $\rhd$

Из последнего предложения следует, что для любой формулы $\varphi(t, t_1, \dots, t_n)$ и любых элементов $u, v, w_1, \dots, w_n \in \mathfrak{U}$ имеет место неравенство $[\![u = v]\!] \wedge [\![\varphi(u, w_1, \dots, w_n)]\!] \leqslant [\![\varphi(v, w_1, \dots, w_n)]\!]$.

2.1.7. Пусть $u \in \mathfrak{U}$таково, что $\mathfrak{U} \models u \neq \varnothing$. *Спуском* элемента u называется класс $\{v \in \mathfrak{U} : \ \mathfrak{U} \models v \in u\}$, который будет обозначаться символом $u{\downarrow}$.

2.1.8. Пусть $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство элементов $\mathfrak{U}$ и $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство элементов алгебры B. Элемент $u \in \mathfrak{U}$ называется *подъемом* семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, если

$$[\![v \in u]\!] = \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi \wedge [\![v = u_\xi]\!]$$

для всех $v \in \mathfrak{U}$.

Пусть $\mathscr{U}$ — подмножество $\mathfrak{U}$. Элемент $\overline{u} \in \mathfrak{U}$ называется *подъемом* множества $\mathscr{U}$, если $[\![v \in \overline{u}]\!] = \bigvee_{u\in\mathscr{U}} [\![v = u]\!]$ для всех $v \in \mathfrak{U}$, т. е. $\overline{u}$ является подъемом семейства $(u)_{u\in\mathscr{U}}$ с единичными весами.

Предположим, что $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — антицепь в алгебре B. Элемент $u \in \mathfrak{U}$ называется *перемешиванием* семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно семейства $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, если $[\![u = u_\xi]\!] \geqslant b_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$ и $[\![u = \varnothing]\!] \geqslant (\bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi)^\perp$.

Если система $\mathfrak{U}$ отделима и в ней истинна аксиома экстенсиональности, то подъем (перемешивание) любого семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно семейства (антицепи) $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ определяется единственным образом. В этом случае, если подъем (перемешивание) существует, мы будем обозначать его символом $\operatorname{asc}_{\xi\in\Xi} b_\xi u_\xi$ (соответственно $\operatorname{mix}_{\xi\in\Xi} b_\xi u_\xi$). Для подъема множества $\mathscr{U} \subset \mathfrak{U}$ используется обозначение $\mathscr{U}{\uparrow}$.

2.1.9. В булевозначном анализе особую роль играют три основных принципа — принцип максимума, принцип перемешивания и принцип подъема. Это связано с тем, что в алгебраических системах, удовлетворяющих этим принципам, появляется возможность с помощью ранее имеющихся элементов конструировать новые.

В этом пункте мы сформулируем упомянутые принципы и исследуем взаимосвязь между ними, оставив в стороне их проверку для конкретных алгебраических систем.

Пусть B — полная булева алгебра и $\mathfrak{U}$ — B-значная алгебраическая система.

Принцип максимума. *Для любой формулы $\varphi(t, t_1, \dots, t_n)$ и элементов $u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{U}$ существует такой элемент $u \in \mathfrak{U}$, что*

$$[\![(\exists t)\, \varphi(t, u_1, \dots, u_n)]\!] = [\![\varphi(u, u_1, \dots, u_n)]\!].$$

Принцип перемешивания. *Для всякого семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{U}$ и любой антицепи $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре B существует перемешивание $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$.*

Принцип подъема. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Для всякого семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{U}$ и любого семейства $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов алгебры B существует подъем $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$.*

(2) *Для любого элемента $u \in \mathfrak{U}$ существуют семейство $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{U}$ и семейство $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов алгебры B такие, что u является подъемом $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$.*

2.1.10. *Теорема.* *Если B-значная алгебраическая система $\mathfrak{U}$ удовлетворяет принципу перемешивания, то она также удовлетворяет и принципу максимума.*

$\lhd$ Рассмотрим формулу $\varphi(t, t_1, \dots, t_n)$, обозначим через $\vec{u}$ набор произвольных элементов $u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{U}$ и положим $b = [\![(\exists t)\, \varphi(t, \vec{u})]\!]$. По определению булевозначной истинности $b = \bigvee_{v\in\mathfrak{U}} [\![\varphi(v, \vec{u})]\!]$. Благодаря принципу исчерпывания найдутся антицепь $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре B и семейство $(v_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{U}$ такие, что $\bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi = b$ и $b_\xi \leqslant [\![\varphi(v_\xi, \vec{u})]\!]$. По условию теоремы существует перемешивание $v \in \mathfrak{U}$ семейства $(v_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно антицепи $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$. В частности, $[\![v = v_\xi]\!] \geqslant b_\xi$. В силу предложения 2.1.6 имеют место неравенства $[\![\varphi(v, \vec{u})]\!] \geqslant [\![v = v_\xi]\!] \wedge [\![\varphi(v_\xi, \vec{u})]\!] \geqslant b_\xi$. Следовательно, $[\![\varphi(v, \vec{u})]\!] \geqslant \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi = b$. Неравенство $[\![\varphi(v, \vec{u})]\!] \leqslant b$ очевидно. $\rhd$

2.1.11. *Теорема.* *Пусть B-значная алгебраическая система $\mathfrak{U}$ удовлетворяет принципу подъема и в $\mathfrak{U}$ истинна аксиома экстенсиональности. Тогда для $\mathfrak{U}$ справедлив принцип перемешивания.*

$\lhd$ Пусть $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов $\mathfrak{U}$ и $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — антицепь в алгебре B. По условию теоремы для всякого $\xi \in \Xi$ найдутся семейство $(u_\xi^\alpha)_{\alpha\in A(\xi)}$ элементов $\mathfrak{U}$ и семейство $(b_\xi^\alpha)_{\alpha\in A(\xi)}$ элементов алгебры B такие, что

$$[\![v \in u_\xi]\!] = \bigvee_{\alpha\in A(\xi)} b_\xi^\alpha \wedge [\![v = u_\xi^\alpha]\!] \quad \text{для всех } v \in \mathfrak{U}.$$

Рассмотрим множество $\Gamma = \{(\xi, \alpha) : \ \xi \in \Xi,\ \alpha \in A(\xi)\}$ и для каждой пары $\gamma = (\xi, \alpha) \in \Gamma$ положим $c_\gamma = b_\xi \wedge b_\xi^\alpha$ и $v_\gamma = u_\xi^\alpha$. Пусть $u \in \mathfrak{U}$ — подъем семейства $(v_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ относительно $(c_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Непосредственный подсчет с привлечением определений дает следующие соотношения:

$$\begin{aligned}[\![v \in u]\!] &= \bigvee_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma \wedge [\![v = v_\gamma]\!] = \\ &= \bigvee_{\xi\in\Xi} \bigvee_{\alpha\in A(\xi)} b_\xi \wedge b_\xi^\alpha \wedge [\![v = u_\xi^\alpha]\!] = \\ &= \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi \wedge [\![v \in u_\xi]\!].\end{aligned}$$

Покажем, что u является перемешиванием семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$.

Сначала установим неравенство $[\![u = u_\xi]\!] \geqslant b_\xi$. В силу истинности аксиомы экстенсиональности достаточно показать $\big([\![v \in u]\!] \Leftrightarrow [\![v \in u_\xi]\!]\big) \geqslant b_\xi$ или, что то же самое, $b_\xi \wedge [\![v \in u]\!] = b_\xi \wedge [\![v \in u_\xi]\!]$. Поскольку $b_\xi \wedge b_\eta = \mathbb{0}$ при $\xi \neq \eta$, мы имеем

$$b_\xi \wedge [\![v \in u]\!] = \bigvee_{\eta\in\Xi} b_\xi \wedge b_\eta \wedge [\![v \in u_\eta]\!] = b_\xi \wedge [\![v \in u_\xi]\!].$$

Покажем теперь, что $[\![u \neq \varnothing]\!] \leqslant \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi$. Действительно,

$$\begin{gathered}[\![u \neq \varnothing]\!] = [\![(\exists t)\, t \in u]\!] = \bigvee_{v\in\mathfrak{U}} [\![v \in u]\!] = \\ = \bigvee_{v\in\mathfrak{U}} \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi \wedge [\![v \in u_\xi]\!] \leqslant \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi. \ \rhd\end{gathered}$$

2.1.12. *Теорема.* *Если B-значная алгебраическая система $\mathfrak{U}$ удовлетворяет принципам максимума и подъема, то она также удовлетворяет и принципу перемешивания.*

$\lhd$ Пусть $\varnothing^\wedge \in \mathfrak{U}$ — подъем пустого подмножества $\mathfrak{U}$. Легко проверить, что $[\![\varnothing^\wedge = \varnothing]\!] = \mathbb{1}$. (Здесь, как и всюду в дальнейшем, запись $u = \varnothing$ означает $(\forall t)\, t \notin u$.)

Рассмотрим семейство $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{U}$ и антицепь $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре B. Положим $b = (\bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi)^\perp$. Определим семейство $(v_\xi)_{\xi\in\Xi'}$ и разбиение единицы $(c_\xi)_{\xi\in\Xi'}$ следующим образом: $\Xi' = \Xi \cup \{\Xi\}$, $v_\xi = u_\xi$, $c_\xi = b_\xi$ при $\xi \in \Xi$ и $v_\Xi = \varnothing^\wedge$, $c_\Xi = b$. Пусть $u \in \mathfrak{U}$ — подъем семейства $(v_\xi)_{\xi\in\Xi'}$ относительно $(c_\xi)_{\xi\in\Xi'}$. Легко понять, что

$[\![u \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}$. Действительно, $[\![v_\xi \in u]\!] \geqslant c_\xi$ при $\xi \in \Xi'$, откуда следует, что

$$[\![u \neq \varnothing]\!] = \bigvee_{v \in \mathfrak{U}} [\![v \in u]\!] \geqslant \bigvee_{\xi \in \Xi'} c_\xi = \mathbb{1}.$$

Таким образом, $[\![(\exists t)\, t \in u]\!] = \mathbb{1}$. Согласно принципу максимума найдется такой элемент $v \in \mathfrak{U}$, что $[\![v \in u]\!] = \mathbb{1}$. Тогда по определению подъема

$$c_\xi \;=\; \mathbb{1} \wedge \mathbb{c}_\xi \;=\; \bigvee_{\eta \in \Xi'} \mathbb{c}_\eta \wedge [\![\mathbb{v} = \mathbb{v}_\eta]\!] \wedge \mathbb{c}_\xi \;=\; [\![\mathbb{v} = \mathbb{v}_\xi]\!] \wedge \mathbb{c}_\xi$$

и, стало быть, $[\![v = v_\xi]\!] \geqslant c_\xi$ для всех $\xi \in \Xi'$. В частности, при $\xi \in \Xi$ имеем $[\![v = u_\xi]\!] \geqslant b_\xi$. Кроме того, в силу леммы 2.1.6 выполнены следующие соотношения:

$$\Big(\bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi\Big)^{\perp} \leqslant\; [\![v = \varnothing^{\wedge}]\!] \;=\; [\![v = \varnothing^{\wedge}]\!] \wedge [\![\varnothing^{\wedge} = \varnothing]\!] \;\leqslant\; [\![v = \varnothing]\!].$$

Следовательно, v является перемешиванием семейства $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно антицепи $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$. $\triangleright$

2.1.13. Пусть B — полная булева алгебра и $\mathfrak{U}$ — B-значная алгебраическая система. Система $\mathfrak{U}$ называется *булевозначным универсумом над B (B-значным универсумом)*, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

(1) система $\mathfrak{U}$ отделима;

(2) $\mathfrak{U}$ удовлетворяет принципу подъема;

(3) в $\mathfrak{U}$ истинны аксиомы экстенсиональности и регулярности.

Теорема [7]**.** *Для любой полной булевой алгебры B существует B-значный универсум, причем единственный с точностью до B-изоморфизма.*

Подробное изложение теорий булевых алгебр и булевозначных алгебраических систем имеется в [3–6].

2.2. Понятие непрерывного расслоения

2.2.1. Пусть Q — произвольное непустое множество и $V^Q \subset Q \times \mathbb{V}$ — класс-соответствие. (Здесь и далее $\mathbb{V}$ обозначает класс всех множеств.) Для каждой точки $q \in Q$ класс

$$\{q\} \times V^Q(q) = V^Q \cap \big(\{q\} \times \mathbb{V}\big) = \big\{(q,x) : \ (q,x) \in V^Q\big\}$$

обозначим символом V^q. Очевидно, $V^p \cap V^q = \varnothing$ при $p \neq q$. Соответствие V^Q будем называть *расслоением* над Q, а класс V^q — *слоем* расслоения V^Q в точке q.

Пусть $D \subset Q$. Функцию $u : D \to V^Q$ называют *сечением* расслоения V^Q над множеством D, если $u(q) \in V^q$ для всех $q \in D$. Класс всех сечений V^Q над D обозначают символом $S(D, V^Q)$. Сечения, определенные на Q, называют *глобальными*. Если X — подмножество V^Q, то символом $S(D, X)$ обозначают множество всех сечений расслоения X над D.

Точку $q \in Q$ назовем *проекцией элемента* $x \in V^Q$ и обозначим символом $\mathrm{pr}(x)$, если $x \in V^q$. *Проекцией множества* $X \subset V^Q$ будем называть совокупность $\big\{\mathrm{pr}(x) : \ x \in X\big\}$ и обозначать ее символом $\mathrm{pr}(X)$.

2.2.2. Предположим теперь, что Q — топологическое пространство и на классе $V^Q \subset Q \times \mathbb{V}$ задана некоторая топология. В этом случае мы будем называть V^Q *непрерывным расслоением* над Q.

Под *непрерывным сечением* расслоения V^Q понимается сечение, являющееся непрерывной функцией. Для любого подмножества $D \subset Q$ символом $C(D, V^Q)$ обозначается класс всех непрерывных сечений V^Q над D. Аналогичным образом, если X — подмножество V^Q, то символом $C(D, X)$ обозначается совокупность всех непрерывных сечений X над D. Очевидно, $C(D, X) = C(D, V^Q) \cap S(D, X)$.

Всюду в дальнейшем мы считаем, что Q — экстремально несвязный компакт, и предполагаем выполненными следующие условия:

(1) $\forall\, q \in Q \quad \forall\, x \in V^q \quad \exists\, u \in C(Q, V^Q) \quad u(q) = x$;

(2) $\forall\, u \in C(Q, V^Q) \quad \forall\, A \sqsubset Q \quad u(A) \sqsubset V^Q$.

2.2.3. *Предложение.* *Непрерывное расслоение V^Q обладает следующими свойствами:*

(1) *топология V^Q хаусдорфова;*

(2) *для любых $u \in C(Q, V^Q)$ и $q \in Q$ семейство $\{u(A) : A \in \mathrm{Clop}(q)\}$ является базой окрестностей точки $u(q)$;*

(3) *все элементы $C(Q, V^Q)$ являются открытыми и замкнутыми отображениями (см. 2.1.1).*

$\triangleleft$ Пусть x и y — различные элементы V^Q. Положим $p = \mathrm{pr}(x)$ и $q = \mathrm{pr}(y)$. В силу 2.2.2 (1) найдутся сечения $u, v \in C(Q, V^Q)$ такие, что $u(p) = x$ и $v(q) = y$.

Предположим сначала, что $p = q$. В силу 2.2.2 (2) множество $A = \{q \in Q : \ u(q) \neq v(q)\} = Q \backslash u^{-1}\bigl(v(Q)\bigr)$ открыто-замкнуто. Тогда $u(A)$ и $v(A)$ — непересекающиеся окрестности точек x и y.

Пусть теперь $p \neq q$. В этом случае существуют $A, B \sqsubset Q$ такие, что $A \cap B = \varnothing$, $p \in A$ и $q \in B$. Тогда $u(A)$ и $v(B)$ — непересекающиеся окрестности точек x и y.

Утверждение (2) с очевидностью вытекает из 2.2.2 (2).

Утверждение (3) эквивалентно 2.2.2 (2) в силу того обстоятельства, что $\mathrm{Clop}(Q)$ является базой как открытой, так и замкнутой топологии в Q. $\triangleright$

2.2.4. *Лемма.* *Подмножество $X \subset V^Q$ открыто-замкнуто тогда и только тогда, когда $u^{-1}(X) \sqsubset Q$ для всех $u \in C(Q, V^Q)$.*

$\triangleleft$ В пояснении нуждается лишь достаточность. Рассмотрим произвольный элемент $x \in V^Q$. Пусть сечение $u \in C(Q, V^Q)$ и точка $q \in Q$ таковы, что $u(q) = x$.

Предположим сначала, что $x \in X$. Поскольку множество $A = u^{-1}(X)$ открыто-замкнуто, $u(A)$ — окрестность x, содержащаяся в X. В силу произвольности x заключаем, что множество X открыто.

Если же $x \notin X$, то, воспользовавшись открыто-замкнутостью множества $A = Q \backslash u^{-1}(X)$, заключаем, что $u(A)$ — окрестность x, не пересекающаяся с X. Произвольность x позволяет сделать вывод, что множество X замкнуто. $\triangleright$

2.2.5. *Предложение.* *Топология V^Q экстремально несвязна.*

$\triangleleft$ Пусть X — открытое подмножество V^Q. В силу хаусдорфовости топологии V^Q замыкание $\mathrm{cl}\, X$ является множеством, а не собственным классом (см. 2.1.2). При этом для всякого сечения $u \in C(Q, V^Q)$ множество $u^{-1}(\mathrm{cl}\, X) = \mathrm{cl}\, u^{-1}(X)$ открыто-замкнуто. В силу леммы 2.2.4 множество $\mathrm{cl}\, X$ открыто. $\triangleright$

2.2.6. Лемма. *Для любого подмножества $X \subset V^Q$ выполнены следующие равенства:*

$$X = \bigcup_{u \in C(Q, V^Q)} u\big(u^{-1}(X)\big),$$

$$\operatorname{int} X = \bigcup_{u \in C(Q, V^Q)} u\big(\operatorname{int} u^{-1}(X)\big),$$

$$\operatorname{cl} X = \bigcup_{u \in C(Q, V^Q)} u\big(\operatorname{cl} u^{-1}(X)\big).$$

$\lhd$ Очевидное следствие 2.2.2 (1) и открытости всех непрерывных сечений. $\rhd$

2.2.7. Лемма. *Подклассы $X, Y \subset V^Q$ совпадают тогда и только тогда, когда $u^{-1}(X) = u^{-1}(Y)$ для всех $u \in C(Q, V^Q)$.*

$\lhd$ Возьмем произвольно $q \in Q$, $x \in V^q$ и рассмотрим сечение $u \in C(Q, V^Q)$ такое, что $u(q) = x$. Если $x \in X$, то $q \in u^{-1}(X) = u^{-1}(Y)$ и, следовательно, $x = u(q) \in Y$. Обратное включение устанавливается аналогично. $\rhd$

2.2.8. Предложение. *Сечение $u \in S(D, V^Q)$, определенное на открытом подмножестве $D \subset Q$, непрерывно тогда и только тогда, когда $\operatorname{im} u$ — открытое подмножество V^Q.*

$\lhd$ Предположим, что сечение u непрерывно. Для всякого $q \in D$ подберем сечение $u_q \in C(Q, V^Q)$ такое, что $u_q(q) = u(q)$. Множество $D_q = \big\{p \in D : \ u(p) = u_q(p)\big\} = u^{-1}(\operatorname{im} u_q)$ открыто в D, а значит, и в Q. Поэтому образ $u(D_q) = u_q(D_q)$ открыт в силу открытости глобальных непрерывных сечений. Очевидно, $D = \bigcup_{q \in D} D_q$, так как $q \in D_q$. Стало быть, множество

$$\operatorname{im} u = u(D) = u\bigg(\bigcup_{q \in D} D_q\bigg) = \bigcup_{q \in D} u(D_q)$$

является открытым.

Предположим теперь, что $\operatorname{im} u$ — открытое множество. Рассмотрим произвольную точку $q \in D$ и подберем сечение $u_q \in C(Q, V^Q)$ такое, что $u(q) = u_q(q)$. Множество $\big\{p \in D : \ u(p) = u(p)\big\} = u^{-1}(\operatorname{im} u)$ открыто и является окрестностью точки q, откуда следует непрерывность сечения u в точке q. $\rhd$

2.2.9. *Лемма.* *Для любого подмножества $X \subset V^Q$ выполнены следующие соотношения:*

(1) $\operatorname{pr}(\operatorname{cl} X) \subset \operatorname{cl} \operatorname{pr}(X)$;

(2) $\operatorname{pr}(\operatorname{int} X) \subset \operatorname{int} \operatorname{pr}(X)$.

$\lhd$ Рассмотрим произвольное сечение $u \in C(Q, V^Q)$. В силу свойств замыкания мы имеем $u^{-1}(\operatorname{cl} X) = \operatorname{cl} u^{-1}(X) \subset \operatorname{cl} \operatorname{pr}(X)$, откуда благодаря равенству $\operatorname{pr}(X) = \bigcup_{u \in C(Q,V^Q)} u^{-1}(X)$ следует включение $\operatorname{pr}(\operatorname{cl} X) \subset \operatorname{cl} \operatorname{pr}(X)$.

Соотношение (2) устанавливается аналогично. $\rhd$

2.3. Непрерывный поливерсум

2.3.1. Рассмотрим непустое множество Q и расслоение $V^Q \subset Q \times \mathbb{V}$. Предположим, что для каждой точки $q \in Q$ класс V^q является алгебраической системой сигнатуры $\{\in\}$.

Для произвольной формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ и сечений $u_1, \dots, u_n$ расслоения V^Q символом $\{\varphi(u_1, \dots, u_n)\}$ будем обозначать множество

$$\bigl\{q \in \operatorname{dom} u_1 \cap \dots \cap \operatorname{dom} u_n : \ V^q \models \varphi\bigl(u_1(q), \dots, u_n(q)\bigr)\bigr\}.$$

Для любого элемента $x \in V^q$ положим $x{\downarrow} = \{y \in V^q : \ V^q \models y \in x\}$. Очевидно, если в системе V^q истинна аксиома экстенсиональности, то для всех $x, y \in V^q$ равенства $x{\downarrow} = y{\downarrow}$ и $x = y$ равносильны. Если X — подмножество V^Q, то символом $\sqcup X$ обозначается объединение $\bigcup_{x \in X} x{\downarrow}$.

Всюду в дальнейшем предполагается, что Q — экстремально несвязный компакт и V^Q — непрерывное расслоение над Q.

Для произвольного сечения $u \in C(Q, V^Q)$ класс $\bigcup_{q \in Q} u(q){\downarrow}$ мы будем называть *распаковкой* сечения u и обозначать символом $\llcorner u \lrcorner$.

2.3.2. Непрерывное расслоение V^Q назовем *непрерывным поливерсумом* над Q, если в каждом слое V^q $(q \in Q)$ истинны аксиомы экстенсиональности и регулярности и, кроме того, выполнены следующие условия:

(1) $\forall q \in Q \quad \forall x \in V^q \quad \exists u \in C(Q, V^Q) \quad u(q) = x$;

(2) $\forall u \in C(Q, V^Q) \quad \forall A \in \operatorname{Clop}(Q) \quad u(A) \in \operatorname{Clop}(V^Q)$;

(3) $\forall u \in C(Q, V^Q) \quad \llcorner u \lrcorner \in \operatorname{Clop}(V^Q)$;

(4) $\forall X \in \operatorname{Clop}(V^Q) \quad \exists u \in C(Q, V^Q) \quad \llcorner u \lrcorner = X$.

2.3.3. Для произвольных сечений $u, v \in C(Q, V^Q)$ равенства $\{u = v\} = u^{-1}(\operatorname{im} v)$ и $\{u \in v\} = u^{-1}(\llcorner v \lrcorner)$ обеспечивают открыто-замкнутость множеств $\{u = v\}$ и $\{u \in v\}$, что позволяет нам ввести в рассмотрение две класс-функции $[\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!] : C(Q, V^Q) \times C(Q, V^Q) \to \operatorname{Clop}(Q)$, полагая $[\![u = v]\!] = \{u = v\}$ и $[\![u \in v]\!] = \{u \in v\}$.

Несложно убедиться в том, что тройка

$$\big(C(Q, V^Q),\ [\![\cdot = \cdot]\!],\ [\![\cdot \in \cdot]\!]\big)$$

представляет собой отделимую $\operatorname{Clop}(Q)$-значную алгебраическую систему (см. 2.1.3).

Из определения непрерывного поливерсума 2.3.2 (4) следует существование непрерывного сечения $\varnothing^\wedge$, удовлетворяющего условию $\llcorner \varnothing^\wedge \lrcorner = \varnothing$. Очевидно, такое сечение единственно. Кроме того, легко заметить, что $V^q \models \varnothing^\wedge(q) = \varnothing$ для всех $q \in Q$, $[\![\varnothing^\wedge = \varnothing]\!] = Q$, а также $[\![u = \varnothing^\wedge]\!] = [\![u = \varnothing]\!]$ для всех $u \in C(Q, V^Q)$.

2.3.4. *Лемма.* *Для любого подмножества $X \subset V^Q$ имеют место следующие соотношения:*

(1) *если $X \sqsubset V^Q$, то $\operatorname{pr}(X) \sqsubset Q$;*

(2) *если множество X открыто, то $\operatorname{pr}(\operatorname{cl} X) = \operatorname{cl} \operatorname{pr}(X)$.*

$\lhd$ (1): Если $X \sqsubset V^Q$, то найдется сечение $u \in C(Q, V^Q)$ такое, что $\sqcup \operatorname{im} u = \llcorner u \lrcorner = X$. Очевидно, $\operatorname{pr}\big(\sqcup \operatorname{im} u\big) = [\![u \neq \varnothing]\!]$, откуда следует открыто-замкнутость $\operatorname{pr}(X)$.

(2): Пусть X — открытое подмножество V^Q. Тогда замыкание $\operatorname{cl} X$ открыто-замкнуто, как и его проекция $\operatorname{pr}(\operatorname{cl} X)$. Очевидное включение $\operatorname{pr}(X) \subset \operatorname{pr}(\operatorname{cl} X)$ влечет $\operatorname{cl} \operatorname{pr}(X) \subset \operatorname{pr}(\operatorname{cl} X)$. Обратное включение установлено в 2.2.9. $\rhd$

Замечание. Следующие вопросы пока остаются открытыми.

(1) Верно ли, что из замкнутости подмножества $X \subset V^Q$ следует замкнутость его проекции $\operatorname{pr}(X) \subset Q$?

(2) Справедливо ли равенство $\operatorname{pr}(\operatorname{cl} X) = \operatorname{cl} \operatorname{pr}(X)$ для любого (не обязательно открытого) подмножества $X \subset V^Q$?

2.3.5. *Носителем* сечения $u \in S(D, V^Q)$, определенного на $D \subset Q$, называется множество $\operatorname{supp} u = \big\{q \in D : \ V^q \models u(q) \neq \varnothing\big\}$. Очевидно, $\operatorname{supp} u = \{u \neq \varnothing\} = \{u \neq \varnothing^\wedge\}$. Таким образом, если $u \in C(Q, V^Q)$, то $\operatorname{supp} u$ — открыто-замкнутое множество.

Пусть u — непрерывное сечение V^Q и D — подмножество $\operatorname{supp} u$. Символом $C(D,u)$ обозначается класс

$$\bigl\{v \in C(D,V^Q) : \ (\forall q \in D)\ V^q \models v(q) \in u(q)\bigr\}.$$

Очевидно, $C(D,u) = C(D, \llcorner u \lrcorner)$.

Спуском сечения u будем называть класс $C(\operatorname{supp} u, u)$ и обозначать его символом $u{\downarrow}$. Легко заметить, что $u{\downarrow} = C(\operatorname{supp} u, \llcorner u \lrcorner)$. Очевидно, в случае $\{u \neq \varnothing\} = Q$ спуск сечения u представляет собой спуск u как элемента булевозначной алгебраической системы (см. 2.1.7).

2.3.6. Предложение. *Для любых $X \sqsubset V^Q$ и $u \in C(Q,V^Q)$ следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\llcorner u \lrcorner = X$;

(2) $u(q){\downarrow} = X \cap V^q$ *для всех* $q \in Q$;

(3) $\operatorname{supp} u = \operatorname{pr}(X)$ *и* $u{\downarrow} = C\bigl(\operatorname{pr}(X), X\bigr)$;

(4) $[\![v \in u]\!] = v^{-1}(X)$ *для всех* $v \in C(Q,V^Q)$.

$\lhd$ (1)$\to$(3): Достаточно лишь заметить, что $\operatorname{supp} u = [\![u \neq \varnothing]\!] = \operatorname{pr}(\llcorner u \lrcorner)$, и воспользоваться равенством $u{\downarrow} = C(\operatorname{supp} u, \llcorner u \lrcorner)$.

(3)$\to$(2): Положим $A = \operatorname{supp} u$. Легко понять, что $X \cap V^q = \varnothing = u(q){\downarrow}$ для всех $q \in Q \backslash A$.

Для произвольной точки $q \in A$ найдутся $x \in u(q){\downarrow}$ и $v_q \in C(Q,V^Q)$ такие, что $v_q(q) = x$. Пусть $B_q = [\![v_q \in u]\!]$. Семейство $(B_q)_{q \in A}$ образует открытое покрытие компакта A, поэтому из него можно выбрать подпокрытие $(B_q)_{q \in F}$, где F — конечное подмножество A. По принципу исчерпывания найдется антицепь $(C_q)_{q \in F}$ такая, что $C_q \subset B_q$ для $q \in F$ и $\bigcup_{q \in F} C_q = \bigvee_{q \in F} C_q = \bigvee_{q \in F} B_q = A$. Построим сечение $v \in S(A,V^Q)$, для каждой точки $p \in A$ полагая $v(p) = v_q(p)$, где q такой (единственный) элемент F, что $p \in C_q$. Сечение v непрерывно, поскольку $v = v_q$ на C_q $(q \in F)$. Легко заметить, что $v \in u{\downarrow} = C(A,X)$.

Пусть q — произвольный элемент A.

Рассмотрим $x \in u(q){\downarrow}$, подберем сечение $w \in C(Q,V^Q)$ такое, что $w(q) = x$, и построим сечение $\overline{w} \in S(A,V^Q)$ следующим образом:

$$\overline{w}(p) = \begin{cases} w(p), & \text{если } p \in [\![w \in u]\!], \\ v(p), & \text{если } p \in A \backslash [\![w \in u]\!]. \end{cases}$$

Очевидно, сечение $\overline{w}$ непрерывно, и $\overline{w} \in u{\downarrow} = C(A, X)$, откуда следует, что $x = \overline{w}(q) \in X$ в силу включения $q \in [\![w \in u]\!]$.

Пусть теперь $x \in X \cap V^q$. Как и раньше, подберем сечение $w \in C(Q, V^Q)$ такое, что $w(q) = x$. Рассмотрим сечение $\overline{w} \in S(A, V^Q)$, определенное следующим образом:

$$\overline{w}(p) = \begin{cases} w(p), & \text{если } p \in w^{-1}(X), \\ v(p), & \text{если } p \in A \backslash w^{-1}(X). \end{cases}$$

Из очевидных соотношений $\overline{w} \in C(A, X) = u{\downarrow}$ и $q \in w^{-1}(X)$ вытекает, что $x = w(q) = \overline{w}(q) \in u(q){\downarrow}$.

(2)→(4): Рассмотрим произвольное сечение $v \in C(Q, V^Q)$. Если $q \in [\![v \in u]\!] = v^{-1}(\llcorner u \lrcorner)$, то $v(q) \in \llcorner u \lrcorner$ и, следовательно, $v(q) \in u(q){\downarrow} = X \cap V^q$, т. е. $q \in v^{-1}(X)$.

Если же $q \in v^{-1}(X)$, то $v(q) \in X \cap V^q = u(q){\downarrow}$, а значит, $V^q \models v(q) \in u(q)$ и $q \in [\![v \in u]\!]$.

(4)→(1): Заметим, что $v^{-1}(\llcorner u \lrcorner) = [\![v \in u]\!] = v^{-1}(X)$ для всех $v \in C(Q, V^Q)$. Поэтому согласно лемме 2.2.7 имеет место равенство $X = \llcorner u \lrcorner$. $\rhd$

Для каждого множества $X \sqsubset V^Q$ сечение u, удовлетворяющее условиям (1)–(4), очевидно, единственно. Это сечение мы будем называть *упаковкой* множества X и обозначать символом $\ulcorner X \urcorner$.

Несложно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Предложение. *Пусть X — открытое подмножество V^Q. Сечение $\overline{u} \in C(Q, V^Q)$ совпадает с $\ulcorner \mathrm{cl}\, X \urcorner$ тогда и только тогда, когда $\overline{u}$ является поточечно наименьшим среди сечений $u \in C(Q, V^Q)$, удовлетворяющих включению $X \cap V^q \subset u(q){\downarrow}$ для всех $q \in Q$.*

2.3.7. *Лемма.* *Если $u \in C(Q, V^Q)$ и $A \in \mathrm{Clop}(Q)$, то $\sqcup u(A) \in \mathrm{Clop}(V^Q)$.*

$\lhd$ Для любого сечения $v \in C(Q, V^Q)$ множество $v^{-1}\big(\sqcup\, u(A)\big) = A \cap [\![v \in u]\!]$ открыто-замкнуто, откуда в силу 2.2.4 следует открыто-замкнутость множества $\sqcup u(A)$. $\rhd$

2.3.8. *Предложение.* *Любое непрерывное сечение V^Q, определенное на открытом или замкнутом подмножестве Q, продолжается до глобального непрерывного сечения.*

$\lhd$ Пусть $A \subset Q$ и $u \in C(A, V^Q)$. Для каждой точки $q \in A$ найдутся сечение $u_q \in C(Q, V^Q)$ и множество $B_q \sqsubset Q$ такие, что $q \in B_q$ и $u_q = u$ на $B_q \cap A$.

Предположим, что множество A открыто. Не нарушая общности, мы можем считать, что $B_q \subset A$. Рассмотрим открытое множество $X = \bigcup_{q \in Q} u(q){\downarrow} = \bigcup_{q \in A} \sqcup u_q(B_q)$ и покажем, что $(\operatorname{cl} X) \cap V^q = u(q){\downarrow}$ для всех $q \in A$. Проверим лишь включение $(\operatorname{cl} X) \cap V^q \subset u(q){\downarrow}$ (обратное включение вытекает из очевидных свойств замыкания). Пусть $x \in (\operatorname{cl} X) \cap V^q$. Найдется сечение $v \in C(Q, V^Q)$ такое, что $v(q) = x$. Очевидно, для всякой окрестности $B \sqsubset Q$ точки q пересечение $v(B) \cap X$ непусто и, стало быть, найдется такая точка $p \in B \cap B_q$, что $v(p) \in u(p){\downarrow}$. С другой стороны, $u(p) = u_q(p)$ и, следовательно, $v(B) \cap \sqcup u_q(B_q) \neq \varnothing$. Множество $\sqcup u_q(B_q)$ замкнуто, и поэтому $x \in \sqcup u_q(B_q)$, откуда следует, что $x \in u_q(q){\downarrow} = u(q){\downarrow}$. Положим $\overline{u} = \ulcorner \operatorname{cl} X \urcorner$. Из установленного выше вытекает равенство $\overline{u}(q){\downarrow} = u(q){\downarrow}$ для всех $q \in A$. Таким образом, $\overline{u}$ — искомое глобальное продолжение сечения u.

Предположим теперь, что множество A замкнуто. Семейство $(B_q)_{q \in A}$ образует открытое покрытие компакта A, а значит, из этого покрытия можно выбрать подпокрытие $(B_q)_{q \in F}$, где F — конечное подмножество A. Без ограничения общности можно предполагать, что $\bigcup_{q \in F} B_q = Q$. По принципу исчерпывания найдется антицепь $(C_q)_{q \in F}$ такая, что $C_q \subset B_q$ для всех $q \in F$ и $\bigcup_{q \in F} C_q = Q$. Построим сечение $\overline{u} \in S(Q, V^Q)$, для каждой точки $p \in Q$ полагая $\overline{u}(p) = u_q(p)$, где q — такой (единственный) элемент F, что $p \in C_q$. Сечение $\overline{u}$ непрерывно, поскольку $\overline{u} = u_q$ на C_q $(q \in F)$. Очевидно, $\overline{u} = u$ на A. $\rhd$

Следствие. *Если A — открытое или замкнутое подмножество Q, то $C(A, V^Q) = \{u|_A : u \in C(Q, V^Q)\}$.*

Принцип продолжения. *Для любого сечения $u \in C(A, V^Q)$, определенного на открытом подмножестве $A \subset Q$, существует единственное сечение $\overline{u} \in C(\operatorname{cl} A, V^Q)$, продолжающее u.*

$\lhd$ Согласно предложению 2.3.8 существует такое сечение $u_1 \in C(Q, V^Q)$, что $u_1 = u$ на A. Положим $\overline{u} = u_1|_{\operatorname{cl} A}$.

Единственность построенного продолжения очевидна. $\rhd$

Сечение $\overline{u}$, фигурирующее в формулировке принципа продолжения, будем называть *замыканием* сечения u и обозначать символом $\mathrm{ext}(u)$.

2.3.9. Несложно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема. *Рассмотрим семейство $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ глобальных непрерывных сечений V^Q, антицепь $(B_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$ и положим $B = (\bigvee_{\xi\in\Xi} B_\xi)^\perp$. Тогда непрерывное сечение*

$$u = \mathrm{ext}\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi|_{B_\xi} \ \cup \ \varnothing^\wedge|_B \right)$$

является перемешиванием $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(B_\xi)_{\xi\in\Xi}$. В частности, для булевозначной алгебраической системы $C(Q, V^Q)$ справедлив принцип перемешивания.

Следствие. *Булевозначная алгебраическая система $C(Q, V^Q)$ удовлетворяет принципу максимума.*

2.3.10. *Теорема о поточечной истинности.* *Для любой формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ и произвольных сечений $u_1, \dots, u_n \in C(Q, V^Q)$ имеет место равенство*

$$[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] = \big\{q \in Q : \ V^q \models \varphi\big(u_1(q), \dots, u_n(q)\big)\big\}. \qquad (*)$$

$\lhd$ Доказательство проводится индукцией по сложности формулы φ.

Если формула φ атомарна, т. е. имеет вид $t_1 \in t_2$ или $t_1 = t_2$, то равенство $(*)$ вытекает из определения оценок истинности $[\![\, \cdot = \cdot \,]\!]$ и $[\![\, \cdot \in \cdot \,]\!]$.

Допустим, для формул меньшей сложности теорема доказана. Мы ограничимся рассмотрением лишь того случая, когда формула φ имеет вид $(\exists t_0)\ \psi(t_0, \vec{t})$.

Если $V^q \models (\exists t_0)\ \psi\big(t_0, \vec{u}(q)\big)$, то найдется такой элемент $x \in V^q$, что $V^q \models \psi\big(x, \vec{u}(q)\big)$. Подберем сечение $u_0 \in C(Q, V^Q)$, удовлетворяющее равенству $u_0(q) = x$. По предположению индукции $q \in [\![\psi(u_0, \vec{u})]\!] \subset [\![(\exists t_0)\ \psi(t_0, \vec{u})]\!]$, что доказывает включение $\supset$ в соотношении $(*)$.

Покажем обратное включение. Пусть $q \in [\![(\exists t_0)\ \psi(t_0, \vec{u})]\!]$. По принципу максимума найдется непрерывное сечение u_0 такое, что $[\![\psi(u_0, \vec{u})]\!] = [\![(\exists t_0)\ \psi(t_0, \vec{u})]\!]$. Тогда по предположению индукции $V^q \models \psi\big(u_0(q), \vec{u}(q)\big)$ и, значит, $V^q \models (\exists t_0)\ \psi\big(t_0, \vec{u}(q)\big)$. $\rhd$

2.3.11. Лемма. *Для любого подмножества $X \subset V^Q$ имеют место следующие соотношения:*

(1) $\sqcup \operatorname{cl} X \subset \operatorname{cl} \sqcup X$;

(2) $\sqcup \operatorname{int} X \subset \operatorname{int} \sqcup X$;

(3) *если $X \in \operatorname{Clop}(V^Q)$, то $\sqcup X \in \operatorname{Clop}(V^Q)$;*

(4) *если множество X открыто, то $\sqcup X$ — открытое подмножество V^Q;*

(5) *если множество X открыто, то $\sqcup \operatorname{cl} X = \operatorname{cl} \sqcup X$.*

$\lhd$ (1): Пусть $x \in \sqcup \operatorname{cl} X$. Тогда $x \in y{\downarrow}$ для некоторого $y \in \operatorname{cl} X$. Рассмотрим сечения $u, v \in C(Q, V^Q)$ такие, что $u(q) = x$ и $v(q) = y$, где $q = \operatorname{pr}(x)$. Для всякого $A \in \operatorname{Clop}(q)$ выполнено $v(A) \cap X \neq \varnothing$. Положим $B = A \cap [\![u \in v]\!] \sqsubset Q$. Поскольку $q \in B$, найдется такая точка $p \in B$, что $v(p) \in X$. Очевидно, $u(p) \in v(p){\downarrow} \subset \sqcup X$ и, стало быть, $u(A) \cap \sqcup X \neq \varnothing$. Следовательно, $x \in \operatorname{cl} \sqcup X$.

(2): Предположим, что $x \in \sqcup \operatorname{int} X$, и рассмотрим $y \in \operatorname{int} X$ и $u, v \in C(Q, V^Q)$ такие, что $x \in y{\downarrow}$, $u(q) = x$ и $v(q) = y$, где $q = \operatorname{pr}(x)$. Ясно, что множество $B = v^{-1}(X) \cap [\![u \in v]\!]$ является окрестностью q, а значит, $u(B)$ — окрестность x. Кроме того, $u(p) \in v(p){\downarrow} \subset \sqcup X$ для всех $p \in B$, т. е. $u(B) \subset \sqcup X$. Стало быть, $x \in \operatorname{int} \sqcup X$.

(3): Согласно лемме 2.2.4 достаточно рассмотреть произвольное сечение $v \in C(Q, V^Q)$ и показать, что множество $v^{-1}(\sqcup X)$ открыто-замкнуто. Пусть $u = \ulcorner X \urcorner$. Очевидно, $v(q) \in \sqcup X$ тогда и только тогда, когда $V^q \models \big(\exists\, t \in u(q)\big)\, v(q) \in t$. По теореме о поточечной истинности $v^{-1}(X) = \big\{q \in Q : \ V^q \models \big(\exists\, t \in u(q)\big)\ v(q) \in t\big\} = [\![(\exists\, t \in u)\ v \in t]\!]$ и, следовательно, $v^{-1}(X) \sqsubset Q$.

(4): Тривиальным образом следует из (2).

(5): Пусть множество X открыто. Тогда его замыкание $\operatorname{cl} X$ открыто-замкнуто, и согласно (3) множество $\sqcup \operatorname{cl} X$ также является открыто-замкнутым. Очевидное соотношение $\sqcup X \subset \sqcup \operatorname{cl} X$ влечет $\operatorname{cl} \sqcup X \subset \sqcup \operatorname{cl} X$. Обратное включение справедливо в силу (1). $\rhd$

Замечание. Следующие вопросы пока остаются открытыми.

(1) Верно ли, что из замкнутости подмножества $X \subset V^Q$ следует замкнутость $\sqcup X \subset V^Q$?

(2) Справедливо ли равенство $\sqcup \operatorname{cl} X = \operatorname{cl} \sqcup X$ для любого (не обязательно открытого) подмножества $X \subset V^Q$?

2.3.12. Теорема. *Булевозначная система $C(Q, V^Q)$ удовлетворяет принципу подъема.*

$\lhd$ Пусть $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство глобальных непрерывных сечений V^Q и $(B_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство открыто-замкнутых подмножеств Q. Рассмотрим открыто-замкнутое множество $X = \operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(B_\xi)$ и положим $u = \ulcorner X \urcorner$. Покажем, что построенное таким образом сечение $u \in C(Q, V^Q)$ является подъемом $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(B_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Действительно, для любого сечения $v \in C(Q, V^Q)$ имеют место следующие соотношения:

$$
[\![v \in u]\!] = v^{-1}(\llcorner u \lrcorner) = v^{-1}\bigg(\operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(B_\xi)\bigg) = \operatorname{cl} v^{-1}\bigg(\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(B_\xi)\bigg) =
$$
$$
= \operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} v^{-1}\big(u_\xi(B_\xi)\big) = \operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} B_\xi \cap [\![v = u_\xi]\!] = \bigvee_{\xi\in\Xi} B_\xi \wedge [\![v = u_\xi]\!].
$$

Рассмотрим теперь произвольное сечение $u \in C(Q, V^Q)$ и покажем, что оно является подъемом некоторого семейства элементов $C(Q, V^Q)$ относительно подходящего семейства элементов $\operatorname{Clop}(Q)$. Пусть $X = \llcorner u \lrcorner$. Для каждого $x \in X$ подберем такое сечение $u_x \in C(Q, V^Q)$, что $x \in \operatorname{im} u_x$. Положим $B_x = [\![u_x \in u]\!] = u_x^{-1}(X)$. Очевидно, $x \in u_x(B_x) \subset X$ для всех $x \in X$, откуда следует, что $X = \bigcup_{x\in X} u_x(B_x) = \operatorname{cl}\bigcup_{x\in X} u_x(B_x)$. Аналогично тому, как это сделано в первой части доказательства, можно установить равенство $[\![v \in u]\!] = \bigvee_{x\in X} B_x \wedge [\![v = u_x]\!]$ для всех $v \in C(Q, V^Q)$. Таким образом, u — подъем семейства $(u_x)_{x\in X}$ относительно $(B_x)_{x\in X}$. $\rhd$

2.3.13. Пусть $D \subset Q$ и $\mathscr{U}$ — подмножество $S(D, V^Q)$. Для каждой точки $q \in D$ обозначим символом $\mathscr{U}(q)$ совокупность $\{u(q) : u \in \mathscr{U}\}$.

Предложение. *Пусть $\mathscr{U}$ — непустое подмножество $C(D, V^Q)$, где $D \sqsubset Q$. Следующие свойства сечения $\overline{u} \in C(Q, V^Q)$ эквивалентны:*

(1) $\overline{u} = \ulcorner \operatorname{cl}\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \operatorname{im} u \urcorner$;

(2) $[\![v \in \overline{u}]\!] = \operatorname{cl}\big\{q \in D : v(q) \in \mathscr{U}(q)\big\}$ *для всех* $v \in C(Q, V^Q)$;

(3) $[\![v \in \overline{u}]\!] = \operatorname{cl}\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \{v = u\}$ *для всех* $v \in C(Q, V^Q)$;

(4) $\overline{u}{\downarrow} = \Big\{ \operatorname{ext}\big(\bigcup_{u\in\mathscr{U}} u|_{D_u}\big) : (D_u)_{u\in\mathscr{U}}$ — *разбиение единицы в алгебре* $\operatorname{Clop}(D)\Big\}$;

(5) $\overline{u}{\downarrow} = C(D, \operatorname{cl}\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \operatorname{im} u)$;

(6) *сечение* $\overline{u}$ *является поточечно наименьшим среди сечений* $\widetilde{u} \in C(Q, V^Q)$, *удовлетворяющих включению* $\mathscr{U}(q) \subset \widetilde{u}(q){\downarrow}$ *для всех* $q \in D$.

$\lhd$ (1)$\to$(2): Положим $X = \bigcup_{u \in \mathscr{U}} \operatorname{im} u$. Тогда $\llcorner \overline{u} \lrcorner = \operatorname{cl} X$ и поэтому $[\![v \in \overline{u}]\!] = v^{-1}(\llcorner u \lrcorner) = v^{-1}(\operatorname{cl} X) = \operatorname{cl} v^{-1}(X)$ для любого сечения $v \in C(Q, V^Q)$. Несложно убедиться в том, что $X = \bigcup_{q \in D} \mathscr{U}(q)$, а также установить эквивалентность включений $v(q) \in \mathscr{U}(q)$ и $q \in v^{-1}\big(\bigcup_{q \in D} \mathscr{U}(q)\big)$.

(2)$\to$(3): Достаточно показать, что множества $\big\{q \in D : \ v(q) \in \mathscr{U}(q)\big\}$ и $\bigcup_{u \in \mathscr{U}} \{v = u\}$ совпадают для всех $v \in C(Q, V^Q)$. Возьмем произвольную точку $q \in D$.

Если $v(q) \in \mathscr{U}(q)$, то для некоторого элемента $u \in \mathscr{U}$ выполнено $v(q) = u(q)$ и, следовательно, $q \in \{v = u\}$.

Если же $q \in \bigcup_{u \in \mathscr{U}} \{v = u\}$, то для подходящего $u \in \mathscr{U}$ имеет место включение $q \in \{v = u\}$, а значит, $v(q) = u(q) \in \mathscr{U}(q)$.

(3)$\to$(4): Рассмотрим произвольный элемент $v \in C(D, V^Q)$ и определим сечение $\overline{v} \in C(Q, V^Q)$ следующим образом:

$$\overline{v}(q) = \begin{cases} v(q), & \text{если } q \in D, \\ \varnothing^{\wedge}(q), & \text{если } q \notin D. \end{cases}$$

Пусть $v \in \overline{u}{\downarrow}$. Тогда $D = \{v \in \overline{u}\} \subset [\![\overline{v} \in \overline{u}]\!] = \operatorname{cl} \bigcup_{u \in \mathscr{U}} \{\overline{v} = u\} \subset D$. Для всех $u \in \mathscr{U}$ множество $\{\overline{v} = u\} = u^{-1}(\operatorname{im} \overline{v})$ открыто-замкнуто. Согласно принципу исчерпывания найдется антицепь $(D_u)_{u \in \mathscr{U}}$ в алгебре $\operatorname{Clop}(Q)$ такая, что $D_u \subset \{\overline{v} = u\}$ и

$$\bigvee_{u \in \mathscr{U}} D_u = \operatorname{cl} \bigcup_{u \in \mathscr{U}} \{\overline{v} = u\} = D.$$

Очевидно, сечение $w = \bigcup_{u \in \mathscr{U}} u|_{D_u}$ непрерывно, множество $\operatorname{dom} w$ открыто, $D = \operatorname{cl} \operatorname{dom} w$ и $\{w = v\} = \{w = \overline{v}\} = \operatorname{dom} w$. Ясно, что $\operatorname{ext}(w) \in C(D, V^Q)$ и $\{\operatorname{ext}(w) = v\} = D$. Поэтому $\operatorname{ext}(w) = v$ и, таким образом, справедливо включение $\subset$.

Установим обратное включение. Пусть $(D_u)_{u \in \mathscr{U}}$ — разбиение единицы в алгебре $\operatorname{Clop}(D)$ и $v = \operatorname{ext}(\bigcup_{u \in \mathscr{U}} u|_{D_u})$. Покажем, что $v \in \overline{u}{\downarrow}$. Поскольку $\operatorname{dom} v = D$, достаточно установить включение $\operatorname{im} v \subset \llcorner \overline{u} \lrcorner$. Очевидно, $u(D_u) \subset \llcorner \overline{u} \lrcorner$ для всех $u \in \mathscr{U}$ и, следовательно,

$\bigcup_{u\in\mathscr{U}} u(D_u) \subset \llcorner\overline{u}\lrcorner$. Заметим, что $\operatorname{im} v = \operatorname{cl}\bigcup_{u\in\mathscr{U}} u(D_u)$, а значит, $\operatorname{im} v \subset \llcorner\overline{u}\lrcorner$.

(4)$\to$(5): Положим $X = \operatorname{cl}\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \operatorname{im} u$. Пусть $(D_u)_{u\in\mathscr{U}}$ — разбиение единицы в алгебре $\operatorname{Clop}(D)$ и $v = \operatorname{ext}(\bigcup_{u\in\mathscr{U}} u|_{D_u})$. Очевидно, $\operatorname{dom} v = D$. Покажем, что $\operatorname{im} v \subset X$. Из включения $u(D_u) \subset X$ следует $\bigcup_{u\in\mathscr{U}} u(D_u) \subset X$, откуда с учетом равенства $\operatorname{im} v = \operatorname{cl}\bigcup_{u\in\mathscr{U}} u(D_u)$ вытекает требуемое соотношение $\operatorname{im} v \subset X$. Таким образом, $\overline{u}{\downarrow} \subset C(D, X)$.

Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольное сечение $v \in C(D, X)$ и покажем, что $v = \operatorname{ext}\big(\bigcup_{u\in\mathscr{U}} u|_{D_u}\big)$ для некоторого разбиения единицы $(D_u)_{u\in\mathscr{U}}$ в алгебре $\operatorname{Clop}(D)$. Очевидно, $v^{-1}(X) = D$. Поскольку сечение v открыто, справедливо равенство $D = \operatorname{cl} v^{-1}(\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \operatorname{im} u)$. Множество $A = v^{-1}(\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \operatorname{im} u)$ открыто и плотно в D.

С каждым элементом $u \in \mathscr{U}$ свяжем открыто-замкнутое множество $C_u = \{v = u\} = v^{-1}(\operatorname{im} u)$. Из очевидного равенства $A = \bigcup_{u\in\mathscr{U}} C_u$ следует, что $\bigvee_{u\in\mathscr{U}} C_u = D$. Согласно принципу исчерпывания найдется разбиение единицы $(D_u)_{u\in\mathscr{U}}$ в алгебре $\operatorname{Clop}(D)$ такое, что $D_u \subset C_u$ для всех $u \in \mathscr{U}$. Положим $w = \bigcup_{u\in\mathscr{U}} u|_{D_u}$. Ясно, что для каждого $u \in \mathscr{U}$ имеют место равенства $w|_{D_u} = u|_{D_u} = v|_{D_u}$, так как $D_u \subset \{v = u\}$. Следовательно, по принципу продолжения $\operatorname{ext}(w) = v$, что доказывает требуемое включение.

(5)$\to$(1): Достаточно заметить, что $D = \operatorname{pr}(\operatorname{cl}\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \operatorname{im} u)$, и воспользоваться предложением 2.3.6 (3).

Эквивалентность (1) и (6) очевидна. $\rhd$

Сечение $\overline{u}$, фигурирующее в условии предложения, очевидно, единственно. Мы будем называть это сечение *подъемом* множества $\mathscr{U}$ и обозначать символом $\mathscr{U}{\uparrow}$.

Заметим, что в случае $\mathscr{U} \subset C(Q, V^Q)$ условие (3) можно записать в следующем виде:

$$[\![v \in \overline{u}]\!] = \bigvee_{u\in\mathscr{U}} [\![v = u]\!] \quad \text{для всех} \quad v \in C(Q, V^Q).$$

Таким образом, если $\mathscr{U}$ — непустое подмножество $C(Q, V^Q)$, то понятие подъема $\mathscr{U}$ совпадает с одноименным понятием, введенным в 2.1.8.

2.4. Функциональное представление булевозначного универсума

На протяжении всего параграфа мы предполагаем, что Q — экстремально несвязный компакт и $\mathfrak{U}$ — булевозначный универсум над $\mathrm{Clop}(Q)$.

2.4.1. Для дальнейшей работы нам понадобится понятие фактор-класса $X/{\sim}$, где X — (собственный) класс, а $\sim$ — отношение эквивалентности на X. Традиционное определение фактор-класса, вводимое для того случая, когда X является множеством, не всегда переносится на случай собственного класса, поскольку элементы X, эквивалентные данному $x \in X$, могут, вообще говоря, образовывать собственный класс. Это препятствие преодолимо с помощью следующего факта.

Теорема Фреге — Рассела — Скотта. *Для любого отношения эквивалентности $\sim$ на классе X существует функция $F : X \to \mathbb{V}$ такая, что*

$$F(x) = F(y) \leftrightarrow x \sim y \quad \textit{для всех } x, y \in X. \tag{$*$}$$

В качестве F можно взять функцию, определенную следующим образом:

$$F(x) = \bigl\{y \in X : \ y \sim x \ \& \ (\forall z \in X)\bigl(z \sim x \to \mathrm{rank}(y) \leqslant \mathrm{rank}(z)\bigr)\bigr\}.$$

Такую функцию F принято называть *канонической проекцией* отношения эквивалентности $\sim$. Соотношение $(*)$ позволяет рассматривать $F(x)$ как аналог класса эквивалентности, содержащего элемент $x \in X$. В связи с этим мы будем обозначать $F(x)$ символом ${\sim}(x)$.

2.4.2. Для каждой точки $q \in Q$ введем отношение эквивалентности $\sim_q$ на классе $\mathfrak{U}$ следующим образом:

$$u \sim_q v \ \leftrightarrow \ q \in [\![u = v]\!].$$

Рассмотрим расслоение $V^Q = \bigl\{\bigl(q, {\sim_q}(u)\bigr) : \ q \in Q, \ u \in \mathfrak{U}\bigr\}$ и условимся обозначать пару $\bigl(q, {\sim_q}(u)\bigr)$ символом $\widehat{u}(q)$. Очевидно, для каждого элемента $u \in \mathfrak{U}$ отображение $\widehat{u} : q \mapsto \widehat{u}(q)$ представляет собой сечение расслоения V^Q. Заметим, что для всякого $x \in V^Q$ существуют

$u \in \mathfrak{U}$ и $q \in Q$ такие, что $\widehat{u}(q) = x$. Кроме того, равенство $\widehat{u}(q) = \widehat{v}(q)$ выполнено тогда и только тогда, когда $q \in [\![u = v]\!]$.

Превратим каждый слой V^q расслоения V^Q в алгебраическую систему сигнатуры $\{\in\}$, полагая

$$V^q \models x \in y \ \leftrightarrow \ q \in [\![u \in v]\!],$$

где элементы $u, v \in \mathfrak{U}$ таковы, что $\widehat{u}(q) = x$ и $\widehat{v}(q) = y$. Легко убедиться в том, что приведенное определение корректно. Действительно, если $\widehat{u}_1(q) = x$ и $\widehat{v}_1(q) = y$ для какой-либо другой пары элементов u_1, v_1, то включения $q \in [\![u \in v]\!]$ и $q \in [\![u_1 \in v_1]\!]$ эквивалентны.

Несложно убедиться в том, что класс $\{\widehat{u}(A) : \ u \in \mathfrak{U}, \ A \sqsubset Q\}$ образует базу некоторой открытой топологии на V^Q, что позволяет нам рассматривать V^Q как непрерывное расслоение.

2.4.3. *Теорема.* *Имеют место утрверждения:*

(1) *Расслоение V^Q является непрерывным поливерсумом.*

(2) *Отображение $u \mapsto \widehat{u}$ осуществляет изоморфизм между булевозначными универсумами $\mathfrak{U}$ и $C(Q, V^Q)$.*

Доказательство последней теоремы разобьем на несколько этапов.

2.4.4. *Лемма.* *Если $u \in \mathfrak{U}$ и $A \sqsubset Q$, то $\widehat{u}(A) \sqsubset V^Q$.*

$\lhd$ Для каждого элемента $x \in V^Q \setminus \widehat{u}(A)$ найдутся $v \in \mathfrak{U}$ и $q \in Q$ такие, что $x = \widehat{v}(q)$.

Если $q \in A$, то $\widehat{u}(q) \neq x = \widehat{v}(q)$, $q \in [\![u \neq v]\!]$, и поэтому множество $\widehat{v}([\![u \neq v]\!])$ является окрестностью точки x, не пересекающейся с $\widehat{u}(A)$. Если же $q \notin A$, то окрестность $\widehat{v}(Q \setminus A)$ точки x не пересекается с $\widehat{u}(A)$. $\rhd$

2.4.5. *Лемма.* *Классы $\{\widehat{u} : \ u \in \mathfrak{U}\}$ и $C(Q, V^Q)$ совпадают.*

$\lhd$ Рассмотрим произвольный элемент $u \in \mathfrak{U}$ и покажем, что сечение $\widehat{u}$ непрерывно. Если $v \in \mathfrak{U}$ и $A \sqsubset Q$, то множество $\widehat{u}^{-1}\big(\widehat{v}(A)\big) = A \cap [\![u = v]\!]$ открыто. Произвольность v и A позволяет заключить, что $\widehat{u} \in C(Q, V^Q)$.

Установим обратное включение. Пусть $f \in C(Q, V^Q)$. Для каждой точки $q \in Q$ подберем такой элемент $u_q \in \mathfrak{U}$, что $\widehat{u}_q(q) = f(q)$, и положим

$$A_q := \{p \in Q : \ \widehat{u}_q(p) = f(p)\} = f^{-1}\big(\widehat{u}(Q)\big) \sqsubset Q.$$

Таким образом, $(A_q)_{q\in Q}$ — открытое покрытие компакта Q, а значит, из него можно выбрать подпокрытие $(A_q)_{q\in F}$, где F — конечное подмножество Q. По принципу исчерпывания найдется антицепь $(B_q)_{q\in F}$ такая, что $B_q \subset A_q$ для всех $q \in B$ и $\bigcup_{q\in F} B_q = Q$. Поскольку булевозначная алгебраическая система $\mathfrak{U}$ удовлетворяет принципу перемешивания, у нас есть возможность рассмотреть элемент $u = \mathrm{mix}_{q\in F} B_q u_q \in \mathfrak{U}$. Несложно убедиться в том, что $\widehat{u} = f$. $\rhd$

2.4.6. Лемма. *Топология V^Q экстремально несвязна.*

$\lhd$ Вытекает из лемм 2.4.4 и 2.4.5 и предложения 2.2.5. $\rhd$

2.4.7. Лемма. *Отображение $(u \mapsto \widehat{u}) : \mathfrak{U} \to C(Q, V^Q)$ является биекцией, причем для всех $u, v \in \mathfrak{U}$ выполнены равенства*

$$\begin{aligned} [\![u = v]\!]_{\mathfrak{U}} &= [\![\widehat{u} = \widehat{v}]\!]_{C(Q,V^Q)}, \\ [\![u \in v]\!]_{\mathfrak{U}} &= [\![\widehat{u} \in \widehat{v}]\!]_{C(Q,V^Q)}. \end{aligned}$$

$\lhd$ Легко заметить, что для всех $u, v \in \mathfrak{U}$ и $q \in Q$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} V^q \models \widehat{u}(q) \in \widehat{v}(q) &\ \leftrightarrow\ q \in [\![u \in v]\!], \\ V^q \models \widehat{u}(q) = \widehat{v}(q) &\ \leftrightarrow\ q \in [\![u = v]\!]. \end{aligned}$$

Тем самым требуемые равенства установлены. В лемме 2.4.6 показана сюръективность отображения $u \mapsto \widehat{u}$. Нам остается обосновать его инъективность. Пусть элементы $u, v \in \mathfrak{U}$ таковы, что $\widehat{u} = \widehat{v}$. Тогда $[\![u = v]\!] = [\![\widehat{u} = \widehat{v}]\!] = Q$, откуда в силу отделимости системы $\mathfrak{U}$ следует равенство $u = v$. $\rhd$

Таким образом, тройка $\big(C(Q, V^Q), [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!]\big)$ представляет собой булевозначную алгебраическую систему над $\mathrm{Clop}(Q)$, изоморфную $\mathfrak{U}$, а значит, $C(Q, V^Q)$ является булевозначным универсумом над $\mathrm{Clop}(Q)$.

2.4.8. Лемма. *Если $u \in C(Q, V^Q)$, то $\llcorner u \lrcorner$ — открыто-замкнутое подмножество V^Q.*

$\lhd$ Пусть $u \in C(Q, V^Q)$. Поскольку $C(Q, V^Q)$ удовлетворяет принципу подъема, мы имеем $u = \mathrm{asc}_{\xi\in\Xi} B_\xi u_\xi$ для некоторого семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ непрерывных сечений V^Q и семейства $(B_\xi)_{\xi\in\Xi}$ открыто-замкнутых подмножеств Q. Для всякого $v \in C(Q, V^Q)$ имеют место соотношения

$$v^{-1}\Big(\operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(B_\xi)\Big) = \operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} v^{-1}\big(u_\xi(B_\xi)\big) = \operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} B_\xi \cap [\![v = u_\xi]\!] =$$

$$= \bigvee_{\xi\in\Xi} B_\xi \wedge [\![v = u_\xi]\!] = [\![v \in u]\!] = v^{-1}(\llcorner u \lrcorner).$$

Таким образом, согласно лемме 2.2.7 установлено равенство

$$\llcorner u \lrcorner = \operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(B_\xi).$$

Множество $\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(B_\xi)$ открыто, поэтому в силу леммы 2.4.6 класс $\llcorner u \lrcorner$ является открыто-замкнутым множеством. $\triangleright$

2.4.9. *Лемма.* *Для любого подмножества $X \sqsubset V^Q$ существует такое сечение $u \in C(Q, V^Q)$, что $\llcorner u \lrcorner = X$.*

$\triangleleft$ С каждым элементом $x \in X$ свяжем сечение $u_x \in C(Q, V^Q)$ такое, что $x \in \operatorname{im} u_x$. Очевидно, множество $B_x = u_x^{-1}(X)$ открыто-замкнуто. Рассмотрим подъем $u = \operatorname{asc}_{x\in X} B_x u_x$ и установим равенство $\llcorner u \lrcorner = X$. Поскольку $x \in u_x(B_x) \subset X$ для всех $x \in X$, мы имеем $X = \bigcup_{x\in X} u_x(B_x) = \operatorname{cl}\bigcup_{x\in X} u_x(B_x)$. Для произвольного сечения $v \in C(Q, V^Q)$ справедливы соотношения

$$v^{-1}(X) = \bigcup_{x\in X} v^{-1}\big(u_x(B_x)\big) =$$

$$= \operatorname{cl}\bigvee_{x\in X} B_x \wedge [\![v = u_x]\!] = [\![v \in u]\!] = v^{-1}(\llcorner u \lrcorner).$$

Согласно лемме 2.2.7 требуемое равенство установлено. $\triangleright$

2.4.10. *Лемма.* *Для любой формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ и произвольных сечений $u_1, \dots, u_n \in C(Q, V^Q)$ имеет место равенство*

$$[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] = \big\{q \in Q :\ V^q \models \varphi\big(u_1(q), \dots, u_n(q)\big)\big\}.$$

$\triangleleft$ Доказательство леммы в точности повторяет доказательство теоремы 2.3.10 о поточечной истинности. $\triangleright$

Из последней леммы следует, что в каждом слое истинны аксиомы экстенсиональности и регулярности. Таким образом, теорема 2.4.3 полностью доказана.

В заключение сформулируем теорему, объединяющую основные результаты параграфов 2.3 и 2.4.

Теорема. *Пусть Q — стоуновский компакт полной булевой алгебры B.*

(1) *Класс $C(Q,V^Q)$ непрерывных сечений поливерсума V^Q над Q является булевозначным универсумом.*

(2) *Для любого булевозначного универсума $\mathfrak{U}$ над B существует непрерывный поливерсум V^Q над Q, класс $C(Q,V^Q)$ непрерывных сечений которого изоморфен $\mathfrak{U}$.*

Литература

1. Архангельский А. В., Пономарёв В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях.—М.: Наука, 1974.

2. Бурбаки Н. Общая топология.—М.: Наука, 1968.

3. Владимиров Д. А. Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.

4. Гордон Е. И., Морозов С. Ф. Булевозначные модели теории множеств.—Горький: Изд.-во Горьковского гос. ун-та, 1982.

5. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.

6. Сикорский Р. Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.

7. Solovay R. and Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math.—1972.—V. 94, No. 2.—P. 201–245.

Глава 3

Сопряженные банаховы расслоения

А. Е. Гутман, А. В. Коптев

Расслоения традиционно используются в математическом анализе для исследования разнообразных алгебраических систем. Техника расслоений применяется при изучении банаховых пространств, банаховых решеток, C^*-алгебр, банаховых модулей и др. (см., например, [9, 11, 12, 17–19]). Реализация некоторых объектов функционального анализа в виде пространств сечений соответствующих расслоений послужила основой для самостоятельных теорий. Одна из таких теорий, изложенная в работах [3, 13–16], посвящена понятию непрерывного банахова расслоения (НБР) и его приложениям к исследованию решеточно нормированных пространств (РНП). В рамках этой теории, в частности, получено представление произвольного РНП в виде пространства сечений подходящего НБР.

В определенном смысле, НБР над топологическим пространством Q формально отражает интуитивное представление о семействе банаховых пространств $(X_q)_{q\in Q}$, непрерывно изменяющихся от точки к точке пространства Q. Точнее говоря, банахово расслоение $\mathscr{X}$ над Q представляет собой отображение, сопоставляющее каждой точке $q \in Q$ банахово пространство $\mathscr{X}(q)$, называемое слоем $\mathscr{X}$ в точке q. При этом расслоение $\mathscr{X}$ снабжается дополнительной топологической структурой, позволяющей говорить о непрерывности сечений этого расслоения — функций u, определенных на подмножествах Q и принимающих значения $u(q) \in \mathscr{X}(q)$ для всех $q \in \operatorname{dom} u$. Понятие сечения можно считать обобщением понятия вектор-функции: если X — банахово пространство, то X-значные функции являются сечениями банахова расслоения, все слои которого равны X.

Во многих вопросах анализа существенную роль играет теория двойственности, одним из основных объектов которой является сопряженное пространство (см., например, [5]). Наличие функциональной реализации исходного пространства посредством сечений некоторого расслоения предоставляет возможность построения аналогичной реализации для сопряженного пространства. В частности, задача реализации сопряженного РНП приводит к понятию сопряженного банахова расслоения.

Вопрос о том, какое НБР $\mathscr{X}'$ следует считать сопряженным к данному расслоению $\mathscr{X}$ (затронутый, например, в работах [3, 12–14, 20]), тесно связан с понятием гомоморфизма. Гомоморфизм v непрерывного банахова расслоения $\mathscr{X}$ над Q представляет собой функционально-значное отображение $v : q \mapsto v(q) \in \mathscr{X}(q)'$, переводящее любое непрерывное сечение u расслоения $\mathscr{X}$ в непрерывную вещественную функцию $\langle u|v\rangle : q \mapsto \langle u(q)|v(q)\rangle$. Определяя сопряженное НБР $\mathscr{X}'$, естественно руководствоваться следующими двумя требованиями: во-первых, гомоморфизмы должны быть непрерывными сечениями расслоения $\mathscr{X}'$ и, во-вторых, все непрерывные сечения $\mathscr{X}'$ должны быть гомоморфизмами.

Для случая просторных расслоений над экстремально несвязными компактами проблема определения сопряженного НБР решена в работе [3] (см. также [13]). Однако подход к определению понятия сопряженного расслоения, примененный в этой работе, существенно опирается на специфические свойства просторных расслоений и экстремально несвязных компактов и по этой причине не может быть распространен на более широкий класс расслоений. Естественное стремление расширить круг приложений теории двойственности приводит к проблеме построения сопряженного НБР для произвольного банахова расслоения над произвольным топологическим пространством. Исследование этой проблемы и составляет основу данной главы, где, в том числе, дано определение сопряженного расслоения, удовлетворяющего сформулированным выше требованиям, и предложен ряд необходимых и достаточных условий для существования сопряженного расслоения.

В параграфе 3.1 собраны вспомогательные результаты, касающиеся топологических и банаховых пространств, а также функций, действующих в этих пространствах.

Параграф 3.2 посвящен исследованию понятия гомоморфизма банаховых расслоений. Здесь, в частности, предложено описание гомоморфизмов для широкого класса расслоений и исследован вопрос о непрерывности поточечной нормы гомоморфизма.

Вопрос о возможности реализовать пространство всех гомоморфизмов из НБР $\mathscr{X}$ в НБР $\mathscr{Y}$ в виде пространства непрерывных сечений некоторого банахова расслоения приводит к понятию операторного расслоения $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. В параграфе 3.3 предложен ряд необходимых и достаточных условий существования такого расслоения.

В параграфе 3.4 введено и исследовано понятие сопряженного банахова расслоения, которое представляет собой частный случай операторного расслоения (рассмотренного в предыдущем параграфе). Сформулированное здесь определение сопряженного расслоения обобщает определение, данное в работе [3], где рассмотрен случай просторного банахова расслоения над экстремально несвязным компактом. В той же работе, в частности, установлено, что сопряженным расслоением обладает всякое просторное НБР. В общем же случае сопряженное расслоение существует далеко не всегда. Тем не менее отмеченное обобщение оправдывается появлением новых классов НБР, которые имеют сопряженные. В параграфе 3.4 приведены разнообразные необходимые и достаточные условия существования сопряженного расслоения, установлены нормативные соотношения двойственности между расслоениями $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}'$, а также исследованы вопросы существования второго сопряженного расслоения и вложения банахова расслоения во второе сопряженное.

Одним из естественных шагов при изучении понятия сопряженного расслоения является рассмотрение слабо непрерывных сечений (т. е. сечений, непрерывных относительно двойственности между исходным и сопряженным расслоениями). Понятие слабо непрерывного сечения вводится и исследуется в параграфе 3.5. Здесь, в частности, обсуждается вопрос о непрерывности слабо непрерывных сечений для различных классов банаховых расслоений, а также предлагаются условия совпадения пространства слабо непрерывных сечений постоянного банахова расслоения и пространства слабо непрерывных вектор-функций со значениями в соответствующем слое.

Говоря о банаховых расслоениях, мы следуем терминологии и обозначениям, принятым в [3] (см. также [13]). В частности, мы различаем понятия банахова расслоения и непрерывного банахова расслоения и используем подход к определению непрерывности сечений, связанный с понятием непрерывной структуры. Все необходимые сведения, касающиеся теории банаховых расслоений, можно найти в работах [3, 9, 12–16].

Если $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над топологическим пространством Q, то символом $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ мы обозначаем множество всех Q-гомоморфизмов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ $\big($обозначаемое в [3] через $\mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X},\mathscr{Y})\big)$. Символ $\mathrm{Hom}_D(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, как обычно, используется для обозначения множества D-гомоморфизмов из $\mathscr{X}|_D$ в $\mathscr{Y}|_D$, где $D \subset Q$. Вместо [[Q-гомоморфизм]] мы говорим просто [[гомоморфизм]].' Аналогичное соглашение принимается в отношении терминов [[Q-изометрическое вложение]] и [[Q-изометрия]].

В отличие от [3] мы используем символ X_Q для обозначения постоянного банахова расслоения со слоем X над топологическим пространством Q. Символом $\mathscr{R}$ обозначается постоянное НБР со слоем $\mathbb{R}$ над рассматриваемым топологическим пространством.

Если u — определенное на $A \subset Q$ сечение расслоения $\mathscr{X}$ над Q, а v — определенное на $B \subset Q$ отображение, удовлетворяющее соотношению $v(q) \in \mathscr{X}(q)'$, $q \in B$, то символом $\langle u|v\rangle$ обозначается функция, действующая из $A \cap B$ в $\mathbb{R}$ по правилу $\langle u|v\rangle(q) = \langle u(q)|v(q)\rangle$.

Под компактом мы, как обычно, понимаем компактное хаусдорфово топологическое пространство. Все рассматриваемые в дальнейшем векторные пространства предполагаются заданными над полем $\mathbb{R}$.

3.1. Вспомогательные результаты

В этом параграфе собраны используемые в дальнейшем факты, касающиеся топологических и банаховых пространств, а также функций, действующих в этих пространствах. Приведенные здесь результаты являются вспомогательными и не затрагивают понятия банахова расслоения.

3.1.1. *Лемма.* *Пусть x и y — элементы единичной сферы некоторого нормированного пространства X. Тогда один из отрезков $[x, y]$ или $[x, -y]$ целиком лежит вне открытого шара радиуса $1/2$ с центром в нуле, т. е.*

$$\inf_{\lambda\in[0,1]} \|\lambda x + (1-\lambda)y\| \geqslant 1/2 \quad \textit{или} \quad \inf_{\lambda\in[0,1]} \|\lambda x + (1-\lambda)(-y)\| \geqslant 1/2.$$

$\lhd$ Допустим, имеются векторы $u = \lambda x + (1-\lambda)(-y)$ и $v = \mu x + (1-\mu)y$ такие, что $\|u\| < 1/2$ и $\|v\| < 1/2$. Очевидно, $0 < \lambda, \mu < 1$ и $x \neq \pm y$. Кроме того, векторы u и v линейно независимы. Значит, $x = \alpha u + \beta v$ и $y = \gamma u + \delta v$ для некоторых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Из линейной независимости (u, v) и (x, y) и равенств

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\lambda & \lambda-1\\ \mu & 1-\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

следует, что

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & \lambda-1\\ \mu & 1-\mu\end{pmatrix}^{-1},$$

т. е.
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda + \mu - 2\lambda\mu} \begin{pmatrix} 1-\mu & 1-\lambda \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}.$$

Неравенства

$$1 = \|x\| \leqslant |\alpha|\|u\| + |\beta|\|v\| < \frac{|\alpha| + |\beta|}{2},$$
$$1 = \|y\| \leqslant |\gamma|\|u\| + |\delta|\|v\| < \frac{|\gamma| + |\delta|}{2}$$

позволяют заключить, что

$$\frac{1}{|\alpha| + |\beta|} + \frac{1}{|\gamma| + |\delta|} < 1,$$

т. е. $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| < (|\alpha| + |\beta|)(|\gamma| + |\delta|)$. Как легко видеть, $\lambda + \mu - 2\lambda\mu > \lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu \geqslant 0$. Кроме того, $|\alpha| + |\beta| = (2 - \lambda - \mu)/(\lambda + \mu - 2\lambda\mu)$ и $|\gamma| + |\delta| = (\lambda + \mu)/(\lambda + \mu - 2\lambda\mu)$, откуда

$$\frac{2}{\lambda + \mu - 2\lambda\mu} < \frac{2 - \lambda - \mu}{\lambda + \mu - 2\lambda\mu} \, \frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu - 2\lambda\mu}.$$

Следовательно, $2(\lambda + \mu - 2\lambda\mu) < 2(\lambda + \mu) - (\lambda + \mu)^2$ и, наконец, $(\lambda - \mu)^2 < 0$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\rhd$

3.1.2. Напомним, что последовательность (x_n) элементов банахова пространства X называется *слабо фундаментальной*, если для любой слабой окрестности нуля $U \subset X$ существует номер $\overline{n} \in \mathbb{N}$ такой, что $x_n - x_m \in U$ для всех $n, m \geqslant \overline{n}$, или, что то же самое, для любого функционала $x' \in X'$ числовая последовательность $\langle x_n | x' \rangle$ фундаментальна.

Следующее утверждение сформулировано, например, в [21, утверждение 1 (SP1)].

Лемма. *Если банахово пространство X обладает свойством Шура, то всякая слабо фундаментальная последовательность в X сходится по норме.*

◁ Рассмотрим не фундаментальную по норме последовательность $(x_n) \subset X$ и покажем, что она не является слабо фундаментальной. Существуют число $\varepsilon > 0$ и строго возрастающая последовательность $(n_k) \subset \mathbb{N}$ такие, что $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| > \varepsilon$ для всех нечетных $k \in \mathbb{N}$. Поскольку последовательность $(x_{n_k} - x_{n_{k+1}})$ не сходится к нулю по норме и пространство X обладает свойством Шура, для некоторого функционала $x' \in X'$ числовая последовательность $\langle\, x_{n_k} - x_{n_{k+1}} \,|\, x' \,\rangle$ не стремится к нулю. Таким образом, подпоследовательность (x_{n_k}), а значит, и исходная последовательность (x_n) не являются слабо фундаментальными. ▷

3.1.3. Лемма. *Если X — бесконечномерное сепарабельное банахово пространство, то всякое бесконечномерное банахово подпространство X' содержит слабо* сходящуюся к нулю последовательность функционалов, имеющих единичную норму.*

◁ Пусть Y — бесконечномерное банахово подпространство X'. Рассмотрим последовательность (y_n) элементов единичной сферы Y такую, что $\|y_i - y_j\| \geqslant 1/2$ при $i \neq j$ (см., например, [6, 8.4.2]). Согласно [10, XIII] из (y_n) можно выделить подпоследовательность (y_{n_m}), слабо* сходящуюся к некоторому элементу $y \in X'$. Ясно, что $y \in Y$. Для каждого номера $m \in \mathbb{N}$ положим $z_m := y_{n_m} - y$. Пусть $\varepsilon > 0$ и (z_{m_k}) — такая подпоследовательность (z_m), что $\|z_{m_k}\| > \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $(z_{m_k} \,/\, \|z_{m_k}\|)$ — искомая последовательность. ▷

3.1.4. Лемма. *Для любого бесконечномерного банахова пространства X существуют слабо сходящаяся к нулю сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \aleph} \subset X$ и сходящаяся к нулю по норме сеть $(x'_\alpha)_{\alpha \in \aleph} \subset X'$ такие, что $\langle x_\alpha | x'_\alpha \rangle = 1$ для всех $\alpha \in \aleph$.*

◁ В качестве $\aleph$ рассмотрим множество всех конечных подмножеств пространства X', упорядоченное по включению.

Зафиксируем $\alpha = \{x'_1, \dots, x'_n\} \in \aleph$ и, используя бесконечномерность пространства X, рассмотрим элемент $x_\alpha \in \bigcap_{i=1}^n \ker x'_i$ с нормой $\|x_\alpha\| = n$. Затем подберем функционал $x'_\alpha \in X'$, удовлетворяющий равенствам $\langle x_\alpha | x'_\alpha \rangle = 1$ и $\|x'_\alpha\| = 1/n$.

Очевидно, сеть $(x'_\alpha)_{\alpha \in \aleph}$ сходится к нулю по норме. Покажем, что сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \aleph}$ слабо сходится к нулю. Пусть U — произвольная слабая окрестность нуля в X. Подберем функционалы $x'_1, \dots, x'_n \in X'$ так, чтобы $\bigcap_{i=1}^n \ker x'_i \subset U$. Тогда $x_\alpha \in \bigcap_{i=1}^n \ker x'_i \subset U$ для всех $\alpha \in \aleph$, $\alpha \geqslant \{x'_1, \dots, x'_n\}$. ▷

3.1.5. Пусть X — банахово пространство. Подмножество $F \subset X'$ называется *тотальным* (или *разделяющим*), если для любого ненулевого элемента $x \in X$ найдется функционал $x' \in F$ такой, что $\langle x|x' \rangle \neq 0$.

В каждом из следующих случаев пространство X' содержит счетное тотальное подмножество:

(1) *X — сепарабельное банахово пространство;*

(2) *банахово пространство X изоморфно сопряженному к сепарабельному банахову пространству.*

$\lhd$ (1): Рассмотрим всюду плотное в X множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. С каждым номером $n \in \mathbb{N}$ свяжем такой функционал $x'_n \in X'$, что $\|x'_n\| = 1$ и $\langle x_n|x'_n \rangle = \|x_n\|$. Тогда для произвольного ненулевого элемента $x \in X$ найдется номер $n \in \mathbb{N}$, для которого $\|x - x_n\| \leqslant \|x\|/3$ и, следовательно,

$$|\langle x|x'_n \rangle| \geqslant |\langle x_n|x'_n \rangle| - |\langle x_n - x \mid x'_n \rangle| \geqslant$$
$$\geqslant \|x_n\| - \|x\|/3 \geqslant \|x\| - \|x\|/3 - \|x\|/3 > 0.$$

(2): Не нарушая общности, можно считать, что $X = Y'$, где Y — сепарабельное банахово пространство. Остается заметить, что образ счетного всюду плотного подмножества Y при каноническом вложении Y в Y'' является тотальным. $\rhd$

3.1.6. *Лемма.* *Пусть X — банахово пространство. Предположим, что пространство X' не содержит счетного тотального множества. Тогда существует упорядоченное направленное по возрастанию множество $\aleph$, счетные подмножества которого обладают верхними гранями, и существуют слабо сходящаяся к нулю сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \aleph} \subset X$ и ограниченная слабо* сходящаяся к нулю сеть $(x'_\alpha)_{\alpha \in \aleph} \subset X'$ такие, что $\langle x_\alpha|x'_\alpha \rangle = 1$ для всех $\alpha \in \aleph$.*

$\lhd$ Обозначим через $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ множества всех счетных подмножеств X и X', упорядоченные по включению. Положим $\aleph := \mathscr{F} \times \mathscr{G}$ и снабдим $\aleph$ покоординатным порядком. Очевидно, что счетные подмножества $\aleph$ обладают верхними гранями.

Пусть $\alpha = (F, G) \in \aleph$. Мы подберем элементы $x_\alpha \in X$ и $x'_\alpha \in X'$, удовлетворяющие следующим условиям:

(1) $\langle x_\alpha|g \rangle = 0$ для всех $g \in G$;

(2) $\langle f|x'_\alpha\rangle = 0$ для всех $f \in F$;

(3) $\langle x_\alpha|x'_\alpha\rangle = \|x'_\alpha\| = 1$.

Рассмотрим всюду плотное подмножество $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ единичной сферы пространства $\operatorname{cl}\operatorname{lin} F$. Для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ подберем функционал $f'_n \in X'$, удовлетворяющий равенствам $\|f'_n\| = \langle f_n|f'_n\rangle = 1$. Поскольку в X' нет счетного тотального множества, найдется элемент $x \in X$ такой, что $\langle x|f'_n\rangle = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\langle x|g\rangle = 0$ для всех $g \in G$ и $\|x\| = 1$. При этом $\|x - f_n\| = \|x - f_n\|\|f'_n\| \geqslant |\langle x - f_n|f'_n\rangle| = \langle f_n|f'_n\rangle = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, откуда $x \notin \operatorname{cl}\operatorname{lin} F$, так как $\|x\| = 1$ и множество $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ плотно в единичной сфере пространства $\operatorname{cl}\operatorname{lin} F$. Теперь возьмем функционал $x'_\alpha \in X'$, удовлетворяющий соотношениям $\|x'_\alpha\| = 1$, $\langle x|x'_\alpha\rangle \neq 0$ и $x'_\alpha \equiv 0$ на F. Наконец, положим $x_\alpha = \frac{x}{\langle x|x'_\alpha\rangle}$. Понятно, что элементы x_α и x'_α удовлетворяют условиям (1)–(3).

Слабая сходимость к нулю сети (x_α) вытекает из следующих рассуждений. Если $x' \in X'$, то $\langle x_\alpha|x'\rangle = 0$ для любого элемента $\alpha = (F, G) \geqslant (\{0\}, \{x'\})$, так как $\langle x_\alpha|g\rangle = 0$ для всех $g \in G$ и $x' \in G$. Аналогично проверяется слабая* сходимость к нулю сети (x'_α). $\triangleright$

3.1.7. Пусть (x_n) — последовательность элементов некоторого банахова пространства X.

Лемма. *Следующие утверждения равносильны:*

(а) *для любой последовательности $(x'_n) \subset X'$ и любого элемента $x' \in X'$ из слабой* сходимости $x'_n \to x'$ следует, что $\langle x_n|x'_n\rangle \to 0$;*

(б) *для любой последовательности $(x'_m) \subset X'$ и любого элемента $x' \in X'$ из слабой* сходимости $x'_m \to x'$ следует, что $\langle x_n|x'_m\rangle \to 0$ при $n, m \to \infty$;*

(в) *последовательность (x_n) слабо сходится к нулю, и, кроме того, $\langle x_n|x'_n\rangle \to 0$ для любой слабо* сходящейся к нулю последовательности $(x'_n) \subset X'$;*

(г) *последовательность (x_n) слабо сходится к нулю, и, кроме того, $\langle x_n|x'_m\rangle \to 0$ при $n, m \to \infty$ для любой слабо* сходящейся к нулю последовательности $(x'_m) \subset X'$;*

(д) $\sup_{m\in\mathbb{N}} |\langle x_n|x'_m\rangle| \to 0$ *при $n \to \infty$ для любой слабо* сходящейся к нулю последовательности $(x'_m) \subset X'$;*

(е) *для любого оператора $T \in B(X, c_0)$ последовательность (Tx_n) сходится к нулю по норме.*

Доказательство равносильности перечисленных выше утверждений является рутинным и достаточно простым упражнением.

Определение. Последовательность (x_n) назовем *w-w^*-сходящейся* к элементу $x \in X$, если последовательность $(x_n - x)$ удовлетворяет любому из условий (a)–(e) леммы.

Будем говорить, что пространство X обладает *свойством* WS (или *ослабленным свойством Шура*), если любая w-w^*-сходящаяся последовательность его элементов сходится по норме (или, что то же самое, любая w-w^*-сходящаяся к нулю последовательность сходится к нулю по норме).

Перечислим некоторые очевидные факты, касающиеся введенных выше понятий.

Предложение. **(1)** *Всякая сходящаяся по норме последовательность является w-w^*-сходящейся.*

(2) *Любая подпоследовательность w-w^*-сходящейся последовательности также w-w^*-сходится.*

(3) *Если X и Y — банаховы пространства, $T \in B(X, Y)$ и последовательность $(x_n) \subset X$ w-w^*-сходится к $x \in X$, то последовательность (Tx_n) w-w^*-сходится к Tx.*

(4) *Если банахово пространство обладает свойством* WS, *то этим свойством обладает каждое его банахово подпространство.*

(5) *Если банахово пространство обладает свойством* WS, *то этим свойством обладает каждое изоморфное ему банахово пространство.*

(6) *Если банахово пространство содержит изоморфную копию пространства, не обладающего свойством* WS, *то оно само не обладает свойством* WS.

3.1.8. *Лемма.* *Если замкнутый единичный шар пространства X' слабо* секвенциально компактен, то банахово пространство X обладает свойством* WS. *Обратное неверно.*

$\lhd$ Допустим, что X не обладает свойством WS. Тогда существует w-w^*-сходящаяся к нулю последовательность $(x_n) \subset X$, не сходящаяся к нулю по норме. Не ограничивая общности, будем считать, что $\|x_n\| > \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$ при подходящем $\varepsilon > 0$. Используя слабо* секвенциальную компактность единичного шара пространства X', из последовательности функционалов $(x'_n) \subset X'$, удовлетворяющей условиям $\|x'_n\| = 1$ и $\langle x_n | x'_n \rangle > \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$, выберем слабо* сходящуюся подпоследовательность (x'_{n_k}). С другой стороны, $\langle x_{n_k} | x'_{n_k} \rangle > \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$, что противоречит w-w^*-сходимости (x_{n_k}) к нулю.

Контрпримером к обратному утверждению может служить пространство $\ell^1(\mathbb{R})$. Действительно, это пространство обладает свойством Шура, а значит, и свойством WS. С другой стороны, как показано в [10, XIII], единичный шар пространства $\ell^1(\mathbb{R})'$ не является слабо* секвенциально компактным. $\triangleright$

Каждое из следующих условий является достаточным для того, чтобы банахово пространство X обладало свойством WS:

(1) X обладает свойством Шура;
(2) X сепарабельно;
(3) X' не содержит копии ℓ^1;
(4) X рефлексивно;
(5) X является подпространством слабо компактно порожденного банахова пространства;
(6) для всякого сепарабельного подпространства $Y \subset X$ пространство Y' сепарабельно.

Первое условие из предложенного списка с очевидностью влечет свойство WS, а все остальные гарантируют слабо* секвенциальную компактность замкнутого единичного шара пространства X' (см. [10, XIII]), что позволяет применить последнюю лемму. Напомним, что банахово пространство Y называют *слабо компактно порожденным*, если оно содержит слабо компактное абсолютно выпуклое подмножество, линейная оболочка которого всюду плотна в Y.

3.1.9. Говорят, что банахово пространство X обладает *свойством Данфорда — Петтиса*, если $\langle x_n | x'_n \rangle \to 0$ для любой слабо сходящейся к нулю последовательности $(x_n) \subset X$ и любой слабо сходящейся к нулю последовательности $(x'_n) \subset X'$.

В параграфе 3.5 при исследовании слабо непрерывных сечений банаховых расслоений раскрывается важная роль вопроса о том, когда банахово пространство обладает следующим свойством, близким к свойству Данфорда — Петтиса.

Определение. Будем говорить, что банахово пространство X обладает *свойством* DP*, если $\langle x_n | x'_n \rangle \to 0$ для любой слабо сходящейся к нулю последовательности $(x_n) \subset X$ и любой слабо* сходящейся к нулю последовательности $(x'_n) \subset X'$.

(Заметим, что аналог свойства DP* для сетей не представляет интереса, поскольку в силу леммы 3.1.4 таким свойством обладают лишь конечномерные пространства.)

Очевидно, X обладает свойством DP* тогда и только тогда, когда множества слабо сходящихся и w-w^*-сходящихся последовательностей в X совпадают.

Банахово пространство X называют *пространством Гротендика* (см. [10, VII, с. 121]), если в X' любая слабо* сходящаяся последовательность сходится слабо. Таковым, например, является всякое рефлексивное пространство.

Легко проверить следующие утверждения.

Лемма. *Пусть X — банахово пространство.*

(1) *Если пространство X обладает свойством Шура, то оно обладает свойством* DP*.

(2) *Если пространство X обладает свойством* DP*, *то оно обладает свойством Данфорда — Петтиса.*

(3) *Пространство X обладает свойствами* WS *и* DP* *тогда и только тогда, когда оно обладает свойством Шура.*

(4) *Для пространства Гротендика свойство* DP* *равносильно свойству Данфорда — Петтиса.*

Стоит отметить, что обратное к утверждению (2) не верно. В самом деле, пространство c_0 не обладает свойством Шура и, будучи сепарабельным, обладает свойством WS, а значит, и свойством DP* в силу (3). Вместе с тем c_0 обладает свойством Данфорда — Петтиса, так как $c'_0 \simeq \ell^1$ — пространство со свойством Шура.

Напомним, что пересечение (объединение) последовательности открытых (замкнутых) подмножеств топологического пространства называется *σ-открытым* (*σ-замкнутым*) множеством.

Пусть K — квазиэкстремально несвязный компакт (т. е. компакт, в котором замыкание каждого открытого σ-замкнутого подмножества является открытым). Как известно, ℓ^∞ и $C(K)$ — пространства Гротендика со свойством Данфорда — Петтиса и без свойства Шура (см. [10, VII, Theorem 15, Exercise 1 (ii), XI, Exercise 4 (ii)], а также [8, Theorem 13.13] и [2, теорема V.2.1]).

Следствие. **(1)** *Пространства* ℓ^∞ *и* $C(K)$, *где* K — *квазиэкстремально несвязный компакт, обладают свойством* DP*.

(2) *Банахово пространство, содержащее изоморфную копию* ℓ^∞, *не обладает свойством* WS.

$\triangleleft$ Утверждения следствия немедленно следуют из указанных выше свойств пространств ℓ^∞ и $C(K)$, утверждений (4) и (3) последней леммы и предложения 3.1.7 (6). $\triangleright$

3.1.10. *Лемма.* *Для произвольного топологического пространства* Q *равносильны следующие утверждения:*

- **(а)** *все функции в* $C(Q)$ *локально постоянны;*
- **(б)** *для любой последовательности функций* $(f_n) \subset C(Q)$ *и любой точки* $q \in Q$ *существует окрестность* q, *на которой все функции* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *постоянны;*
- **(в)** *для любой последовательности функций* $(f_n) \subset C(Q)$ *существует разбиение пространства* Q *на открыто-замкнутые подмножества такое, что на каждом элементе этого разбиения все функции* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *постоянны.*

$\triangleleft$ (а)$\to$(б): Достаточно найти окрестность точки q, на которой равны нулю все функции $g_n = |f_n - f_n(q)| \wedge 1$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку сумма $g = \sum_{n=1}^\infty g_n/2^n$ является непрерывной функцией и $g(q) = 0$, в силу (а) существует окрестность q, на которой $g \equiv 0$. Понятно, что на этой окрестности равны нулю и все функции g_n, $n \in \mathbb{N}$.

(б)$\to$(в): В силу (б) для каждой точки $q \in Q$ пересечение замкнутых множеств $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{f_n = f_n(q)\}$ является окрестностью любой своей точки, а значит, открыто-замкнуто. Все пересечения такого вида образуют требуемое разбиение пространства Q.

Импликация (в)$\Rightarrow$(а) очевидна. $\triangleright$

Определение. Топологическое пространство Q, удовлетворяющее любому из равносильных условий (а)–(в) последней леммы, будем называть *функционально дискретным.*

3.1.11. Точка топологического пространства называется *σ-изолированной* или *P-точкой*, если пересечение любой последовательности окрестностей этой точки снова является ее окрестностью.

Замечание. Хаусдорфово топологическое пространство, содержащее единственную неизолированную точку, является нормальным и бэровским.

Предложение. *Пусть Q — вполне регулярное топологическое пространство.*

(1) *Следующие утверждения равносильны:*

- **(а)** *пространство Q функционально дискретно;*
- **(б)** *все точки Q σ-изолированы;*
- **(в)** *всякое σ-открытое подмножество Q открыто;*
- **(г)** *всякое σ-замкнутое подмножество Q замкнуто.*

(2) *Если пространство Q функционально дискретно, то все счетные подмножества Q замкнуты.*

(3) *Обратное к утверждению (2) не верно.*

$\lhd$ (1): (а)$\to$(б): Рассмотрим произвольную точку $q \in Q$, последовательность (U_n) ее окрестностей и положим $V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Используя вполне регулярность Q, для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ возьмем непрерывную функцию $f_n : Q \to [0,1]$ такую, что $f_n(q) = 0$ и $f_n \equiv 1$ на $Q\backslash U_n$. Сумма $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n/2^n : Q \to [0,1]$ непрерывна и в силу (а) равна нулю в некоторой окрестности U_0 точки q. Поскольку $f > 0$ вне V, окрестность U_0 содержится в V и, следовательно, множество V также является окрестностью точки q.

(б)$\to$(в): В силу (б) пересечение последовательности открытых подмножеств Q является окрестностью каждой своей точки, т. е. открыто.

(в)$\to$(а): В силу (в) для любой функции $f \in C(Q)$ и точки $q \in Q$ пересечение $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{p \in Q : |f(p)-f(q)| < 1/n\}$ является окрестностью точки q, на которой функция f постоянна.

Равносильность двойственных утверждений (в) и (г) очевидна.

(2): Достаточно заметить, что счетные подмножества Q являются σ-замкнутыми, и воспользоваться утверждением (1).

(3): Построим вполне регулярное топологическое пространство Q, все счетные подмножества которого замкнуты, и предъявим функцию из $C(Q)$, не являющуюся локально постоянной.

Превратим отрезок $[0,1]$ в топологическое пространство Q, взяв в качестве базы открытой топологии все подмножества полуинтервала $(0,1]$ и все множества вида $[0,t]\backslash S$, где $t \in (0,1]$ и S — счетное подмножество $(0,1]$. Понятно, что все счетные подмножества Q замкнуты. Поскольку пространство Q является хаусдорфовым и содержит единственную неизолированную точку, оно нормально (см. замечание) и, в частности, вполне регулярно. Как легко видеть, тождественное отображение отрезка $[0, 1]$ непрерывно и не постоянно в любой окрестности точки 0. $\rhd$

3.1.12. Напомним, что топологическое пространство называется *счетно компактным*, если из любого счетного открытого покрытия этого пространства можно выделить конечное подпокрытие. Топологическое пространство называется *совершенно нормальным*, если оно нормально и каждое замкнутое в нем множество является σ-открытым.

Предложение. *Пусть Q — вполне регулярное топологическое пространство. При выполнении любого из следующих условий пространство Q содержит незамкнутое счетное подмножество (а следовательно, не является функционально дискретным):*

(1) *Q содержит недискретное счетно компактное подпространство;*

(2) *Q содержит бесконечное компактное подмножество;*

(3) *Q содержит недискретное подмножество, являющееся пространством Фреше — Урысона;*

(4) *Q содержит неустанавливающуюся сходящуюся последовательность;*

(5) *Q содержит неизолированную точку со счетной базой окрестностей.*

Кроме того, совершенно нормальное топологическое пространство является функционально дискретным только в том случае, когда оно дискретно.

$\lhd$ Как известно (см., например, [1, гл. III, утверждение 189]), топологическое пространство счетно компактно тогда и только тогда, когда всякое его бесконечное подмножество имеет предельную точку. Воспользовавшись этим критерием, несложно убедиться в достаточности условия (1) для существования незамкнутого счетного подмножества Q. Проверка достаточности условий (2), (4) и (5) не представляет труда. Условие (3) равносильно (4).

Существование не локально постоянной функции на недискретном совершенно нормальном топологическом пространстве следует из теоремы Веденисова (см. [7, 1.5.19]). $\rhd$

3.1.13. Если топологическое пространство Q функционально дискретно и вполне регулярно, то оно не может удовлетворять ни одному из условий 3.1.12 (1)–(5). В частности, если пространство Q не является дискретным, то оно не может быть компактным, удовлетворять первой аксиоме счетности и тем более быть метризуемым. Эти наблюдения существенно ограничивают класс топологических пространств, в который может попасть Q. В связи с этим уместно убедиться в том, что вполне регулярное функционально дискретное топологическое пространство не обязано быть дискретным.

Начнем с того, что для произвольного упорядоченного направленного по возрастанию множества $\aleph$, не имеющего наибольшего элемента, определим недискретное нормальное топологическое пространство $\aleph^\bullet$. В качестве носителя возьмем множество $\overline{\aleph} = \aleph \cup \{\infty\}$, где $\infty \notin \aleph$. Снабдим $\overline{\aleph}$ порядком, считая, что $\aleph$ — упорядоченное подмножество $\overline{\aleph}$, и полагая $\infty > \alpha$ для всех $\alpha \in \aleph$. Базой открытой топологии $\aleph^\bullet$ объявим все подмножества $\aleph$ и все промежутки вида $(\alpha, \infty] := \{\beta \in \overline{\aleph} : \alpha < \beta \leqslant \infty\}$, где $\alpha \in \aleph$. Так как в $\aleph$ нет наибольшего элемента, точка $\infty \in \aleph^\bullet$ не изолирована, а значит, определенная на $\aleph^\bullet$ топология не дискретна. Пространство $\aleph^\bullet$ нормально, поскольку оно, очевидно, хаусдорфово и содержит единственную неизолированную точку (см. замечание 3.1.11).

Замечание. **(1)** В случае, если все счетные подмножества $\aleph$ обладают верхними гранями, всякая непрерывная функция $f : \aleph^\bullet \to \mathbb{R}$ принимает постоянное значение $f(\infty)$ в некоторой окрестности точки ∞. $\big($Например, пересечение $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big\{|f - f(\infty)| < 1/n\big\}$ является такой окрестностью.$\big)$

(2) Для произвольного топологического пространства P непрерывность функции $f : \aleph^\bullet \to P$ равносильна сходимости сети $\big(f(\alpha)\big)_{\alpha\in\aleph}$ к $f(\infty)$.

Пример. Существует функционально дискретное нормальное топологическое пространство, не являющееся дискретным.

Пусть $\aleph$ — упорядоченное направленное по возрастанию множество без наибольшего элемента и все счетные подмножества $\aleph$ обладают верхними гранями. (Таковым является, например, любой несчетный кардинал или упорядоченное по включению множество всех счетных подмножеств некоторого несчетного множества.) Тогда в силу последнего замечания пространство $\aleph^\bullet$ является искомым.

3.1.14. *Лемма.* *Пусть Y — локально выпуклое пространство и (y_n) — последовательность элементов Y, сходящаяся к $y \in Y$. Пред-*

положим, что вектор-функция $u : [0,1] \to Y$ *удовлетворяет равенству* $u(0) = y$ *и для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *отображает отрезок* $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ *на отрезок* $[y_{n+1}, y_n]$ *аффинным образом:*

$$u\big(\lambda \tfrac{1}{n+1} + (1-\lambda)\tfrac{1}{n}\big) = \lambda y_{n+1} + (1-\lambda) y_n, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Тогда функция u *непрерывна.*

$\lhd$ Очевидно, функция u непрерывна на полуинтервале $(0,1]$. Возьмем произвольную окрестность V элемента $y = u(0)$, затем выпуклую окрестность $W \subset V$ того же элемента и рассмотрим номер n_0, начиная с которого $y_n \in W$. Тогда ввиду выпуклости W справедливо включение $u\big([0, \frac{1}{n_0}]\big) \subset W$. $\rhd$

3.1.15. *Лемма.* *Пусть* X *— бесконечномерное банахово пространство и* Q *— топологическое пространство, не являющееся функционально дискретным. Тогда существует слабо** *непрерывная функция из* Q *в* X'*, поточечная норма которой ограничена и разрывна.*

$\lhd$ Согласно теореме Джозефсона — Ниссенцвейга [10, XII] существует слабо* сходящаяся к нулю последовательность (x'_n) элементов единичной сферы пространства X'. Обозначим $y_1 := x'_1$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$y_{n+1} = \begin{cases} x'_{n+1}, & \|\lambda y'_n + (1-\lambda) x'_{n+1}\| \geqslant 1/2 \text{ для всех } \lambda \in [0,1], \\ -x'_{n+1} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, последовательность (y_n) слабо* сходится к нулю, а в силу леммы 3.1.1 каждый отрезок $[y'_{n+1}, y'_n]$, $n \in \mathbb{N}$, лежит вне открытого шара радиуса $1/2$ с центром в нуле. Тогда определенная в лемме 3.1.14 вектор-функция $u : [0,1] \to X'$ (где в качестве Y рассматривается пространство X', снабженное слабой* топологией, и y полагается равным нулю) является слабо* непрерывной. Вместе с тем $|\!|\!|u|\!|\!|(0) = 0$ и $|\!|\!|u|\!|\!|\big((0,1]\big) \subset [1/2, 1]$.

Теперь рассмотрим функцию $f \in C(Q)$, не постоянную в любой окрестности некоторой точки $q \in Q$, и положим $g = |f - f(q)| \wedge 1$. Ясно, что $g : Q \to [0,1]$, $g(q) = 0$ и $q \in \mathrm{cl}\{g > 0\}$. Следовательно, композиция $u \circ g : Q \to X'$ является искомой вектор-функцией. $\rhd$

3.1.16. Для топологического пространства Q и банахова пространства X символом $C_w(Q,X)$ обозначается совокупность всех слабо непрерывных функций из Q в X.

Лемма. *Пусть X — банахово пространство и Q — функционально дискретное топологическое пространство. Предположим, что в X' существует счетное тотальное подмножество. Тогда* $C(Q, X) = C_w(Q, X)$.

$\lhd$ Рассмотрим произвольную вектор-функцию $u \in C_w(Q, X)$. Достаточно показать, что для некоторого разбиения пространства Q на открыто-замкнутые подмножества функция u постоянна на каждом элементе этого разбиения.

Пусть $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ — тотальное подмножество X'. Поскольку вектор-функция u слабо непрерывна, $\langle u|x'_n\rangle \in C(Q)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Согласно 3.1.10 (в) существует такое разбиение пространства Q на открыто-замкнутые подмножества, что на каждом элементе этого разбиения постоянны все функции $\langle u|x'_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Ввиду тотальности множества $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ на каждом элементе этого разбиения постоянна и функция u. $\rhd$

3.2. Гомоморфизмы банаховых расслоений

Данный параграф, как следует из его названия, посвящен исследованию понятия гомоморфизма банаховых расслоений. Некоторые из приведенных здесь фактов представляют самостоятельный интерес, но основная ценность большинства результатов данного параграфа раскрывается позже при изучении операторных банаховых расслоений (см. § 3.3, 3.4).

Первая группа результатов (3.2.1–3.2.4) предлагает ряд условий, при выполнении которых непрерывные сечения некоторого банахова расслоения с операторными слоями являются гомоморфизмами.

Разделы 3.2.5–3.2.7 предоставляют неоднократно используемый в дальнейшем удобный способ построения сечений, гомоморфизмов и банаховых расслоений.

В разделах 3.2.8 и 3.2.9 исследуется понятие размерности банахова расслоения. Полученные здесь результаты об областях постоянства размерности, на наш взгляд, представляют самостоятельный интерес.

В 3.2.10 предложено описание гомоморфизмов банаховых расслоений над топологическим пространством, удовлетворяющим первой аксиоме счетности. Этот результат снабжен примерами (см. 3.2.11), которые подтверждают существенность ограничений, накладываемых на рассматриваемое топологическое пространство.

Параграф завершается исследованием вопроса о непрерывности поточечной нормы гомоморфизма, действующего из НБР с постоянной конечной размерностью в произвольное НБР (3.2.12). Ряд примеров (см. 3.2.13) показывает, что постоянство размерности является существенным требованием.

3.2.1. *Предложение.* *Пусть* $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ *и* $\mathscr{Z}$ — НБР *над топологическим пространством* Q, *причем* $\mathscr{Z}(q) \subset B\big(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q)\big)$ *для всех* $q \in Q$, *и пусть множества сечений* $\mathscr{U} \subset C(Q, \mathscr{X})$ *и* $\mathscr{W} \subset C(Q, \mathscr{Z})$ *послойно плотны в* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Z}$ *соответственно. Предположим, что для любых* $u \in \mathscr{U}$ *и* $w \in \mathscr{W}$ *глобальное сечение* $w \otimes u$ *расслоения* $\mathscr{Y}$ *непрерывно. Тогда для всякого подмножества* $D \subset Q$ *имеет место включение* $C(D, \mathscr{Z}) \subset \mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

$\lhd$ Зафиксируем произвольное подмножество $D \subset Q$, элементы $\overline{u} \in C(D, \mathscr{X})$, $\overline{w} \in C(D, \mathscr{Z})$ и точку $q \in D$. Нам нужно показать, что сечение $\overline{w} \otimes \overline{u}$ расслоения $\mathscr{Y}$ непрерывно в q. В силу предложения [3, 2.3.2] для этого достаточно доказать полунепрерывность сверху в точке q функции $\|\overline{w} \otimes \overline{u} - v\| : D \to \mathbb{R}$ для любого сечения $v \in C(D, \mathscr{Y})$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $v \in C(D, \mathscr{Y})$. Укажем окрестность точки q, в которой $\|\overline{w} \otimes \overline{u} - v\| < \|\overline{w} \otimes \overline{u} - v\|(q) + \varepsilon$.

Рассмотрим элемент $u \in \mathscr{U}$ такой, что $\|\overline{w}\|(q)\|\overline{u} - u\|(q) < \varepsilon/8$. Непрерывность вещественных функций $\|\overline{u} - u\|$ и $\|\overline{w}\|$ позволяет найти окрестность U_1 точки q, в которой $\|\overline{w}\|\|\overline{u} - u\| \leqslant \varepsilon/4$. Аналогично находятся элемент $w \in \mathscr{W}$ и окрестность U_2 точки q такие, что $\|\overline{w} - w\|(q)\|u\|(q) < \varepsilon/8$ и $\|\overline{w} - w\|\|u\| \leqslant \varepsilon/4$ на U_2. На пересечении $U_1 \cap U_2$ имеют место неравенства $\|\overline{w} \otimes \overline{u} - w \otimes u\| \leqslant \|\overline{w} \otimes \overline{u} - \overline{w} \otimes u\| + \|\overline{w} \otimes u - w \otimes u\| \leqslant \|\overline{w}\|\|\overline{u} - u\| + \|\overline{w} - w\|\|u\| \leqslant \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$. Аналогичные выкладки дает неравенство $\|\overline{w} \otimes \overline{u} - w \otimes u\|(q) < \varepsilon/4$. Рассмотрим окрестность U_3 точки q, в которой $\|w \otimes u - v\| \leqslant \|w \otimes u - v\|(q) + \varepsilon/4$. Тогда на окрестности $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ точки q выполняются соотношения

$$
\begin{aligned}
\|\overline{w} \otimes \overline{u} - v\| &\leqslant \|\overline{w} \otimes \overline{u} - w \otimes u\| + \|w \otimes u - v\| \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon/2 + \|w \otimes u - v\|(q) + \varepsilon/4 \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon/2 + \|w \otimes u - \overline{w} \otimes \overline{u}\|(q) + \|\overline{w} \otimes \overline{u} - v\|(q) + \varepsilon/4 < \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \|\overline{w} \otimes \overline{u} - v\|(q) + \varepsilon/4 = \\
&= \|\overline{w} \otimes \overline{u} - v\|(q) + \varepsilon,
\end{aligned}
$$

что и требовалось установить для доказательства предложения. $\rhd$

3.2.2. Следствие. *Пусть $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ и $\mathscr{Z}$ — НБР над топологическим пространством Q, причем $\mathscr{Z}(q) \subset B\big(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q)\big)$ в каждой точке $q \in Q$. Предположим, что $C(Q, \mathscr{Z}) \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Тогда для всякого подмножества $D \subset Q$ имеет место включение $C(D, \mathscr{Z}) \subset \mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.*

$\lhd$ Достаточно в предложении 3.2.1 положить $\mathscr{U} = C(Q, \mathscr{X})$ и $\mathscr{W} = C(Q, \mathscr{Z})$. $\rhd$

3.2.3. Следствие. *Для любых банаховых пространств X и Y имеет место включение $C\big(Q, B(X, Y)\big) \subset \mathrm{Hom}(X_Q, Y_Q)$.*

$\lhd$ Достаточно применить предложение 3.2.1, взяв в качестве $\mathscr{U}$ и $\mathscr{W}$ множества постоянных X- и $B(X, Y)$-значных функций. $\rhd$

Один из естественных вопросов, которые могут возникнуть при рассмотрении доказанного следствия, состоит в следующем: в каких случаях имеет место равенство $C\big(Q, B(X, Y)\big) = \mathrm{Hom}(X_Q, Y_Q)$? Этот вопрос исследован в параграфе 3.3.

3.2.4. Следствие. *Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ и $\mathscr{Z}$ — НБР над Q, причем $\mathscr{Z}(q) \subset B\big(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q)\big)$ в каждой точке $q \in Q$. Предположим, что расслоение $\mathscr{Z}$ имеет непрерывную структуру, содержащуюся в пространстве $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Тогда $C(Q, \mathscr{Z}) \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.*

$\lhd$ Сформулированный результат можно вывести из предложения 3.2.1, положив $\mathscr{U} = C(Q, \mathscr{X})$ и взяв в качестве $\mathscr{W}$ непрерывную структуру $\mathscr{Z}$, содержащуюся в $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. $\rhd$

3.2.5. В дальнейшем в ряде доказательств будет использован следующий вспомогательный результат.

Лемма. *Пусть Q — вполне регулярное топологическое пространство. Предположим, что $q \in Q$ является предельной точкой счетного дискретного множества $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$.*

(1) *Существует последовательность (W_n) открытых подмножеств Q, удовлетворяющая следующим условиям: $q_n \in W_n$, $\mathrm{cl}\, W_n \cap \mathrm{cl} \bigcup_{k \neq n} W_k = \varnothing$ и $q \notin \mathrm{cl}\, W_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Если точка q обладает счетной базой окрестностей, то можно дополнительно потребовать, чтобы $\big(\mathrm{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n\big) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{cl}\, W_n = \{q\}$.

Рассмотрим последовательность функций $(f_n) \subset C(Q)$ таких, что $f_n : Q \to [0, 1]$ и $f_n \equiv 0$ на $Q \setminus W_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть, кроме того, (ε_n) — сходящаяся к нулю числовая последовательность.

(2) *Функция* $f : Q \to [0,1]$, *определенная формулой*

$$f(p) = \begin{cases} \varepsilon_n f_n(p), & p \in W_n, \\ 0, & p \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n, \end{cases}$$

является непрерывной.

(3) *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *над* Q. *Если* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(Q,\mathscr{X})$ *и число* M *таково, что* $|\!|\!|u_n|\!|\!| \leqslant M$ *на* W_n *для всех* n *начиная с некоторого номера, то сечение* u *над* Q, *определенное формулой*

$$u(p) = \begin{cases} \varepsilon_n f_n(p) u_n(p), & p \in W_n, \\ 0, & p \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n, \end{cases}$$

является непрерывным.

(4) *Пусть* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ — НБР *над* Q. *Если* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ *и число* K *таково, что* $|\!|\!|H_n|\!|\!| \leqslant K$ *на* W_n *для всех* n *начиная с некоторого номера, то отображение* $H : p \in Q \mapsto H(p) \in B\big(\mathscr{X}(p),\mathscr{Y}(p)\big)$, *определенное формулой*

$$H(p) = \begin{cases} \varepsilon_n f_n(p) H_n(p), & p \in W_n, \\ 0, & p \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n, \end{cases}$$

является гомоморфизмом из $\mathscr{X}$ *в* $\mathscr{Y}$.

(5) *Если* X — *топологическое векторное пространство и последовательность* $(x_n) \subset X$ *сходится к* $x \in X$, *то вектор-функция* $u : Q \to X$, *определенная формулой*

$$u(p) = \begin{cases} f_n(p) x_n + \big(1 - f_n(p)\big)x, & p \in W_n, \\ x, & p \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n, \end{cases}$$

непрерывна.

(6) *Если* X — *банахово пространство и последовательность функционалов* $(x'_n) \subset X'$ *слабо** *сходится к* $x' \in X'$, *то вектор-функция* $H : Q \to X'$, *определенная формулой*

$$H(p) = \begin{cases} f_n(p) x'_n + \big(1 - f_n(p)\big)x', & p \in W_n, \\ x', & p \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n, \end{cases}$$

является гомоморфизмом из X_Q *в* $\mathscr{R}$.

$\triangleleft$ (1): По индукции для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ построим открытые множества $W_n, V_n \subset Q$. Поскольку пространство Q регулярно, точка q_1 и замкнутое множество $\mathrm{cl}\{q_k : k \geqslant 2\}$ разделяются открытыми окрестностями W_1 и V_1 соответственно, причем множества W_1 и V_1 можно подобрать так, чтобы их замыкания не пересекались. Если W_k и V_k уже выбраны для всех $k \leqslant n$, то множества W_{n+1} и V_{n+1} подберем так, чтобы они содержались в V_n и их замыкания разделяли точку q_{n+1} и замкнутое множество $\mathrm{cl}\{q_k : k \geqslant n+2\}$. Легко видеть, что последовательность (W_n) удовлетворяет требуемым условиям.

Наконец, пусть (U_n) — счетная база открытых окрестностей точки q, причем $U_1 = Q$ и $U_n \supset U_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда при построении последовательностей множеств W_n можно выбирать $W_n \subset U_{k(n)}$, где $k(n) = \max\{k \in \mathbb{N} : q_n \in U_k\}$, что обеспечит требуемое соотношение $\big(\mathrm{cl}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n\big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}\, W_n = \{q\}$.

(2): Очевидно, функция f является поточечной суммой равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n$ и, следовательно, непрерывна.

Утверждения (3)–(5) доказываются совершенно аналогично утверждению (2) (при доказательстве (3) и (4) можно воспользоваться предложениями [3, 2.3.6] и [3, 2.4.11] соответственно).

(6): В силу (5) функция H слабо* непрерывна, а значит, $H \otimes u \in C(Q)$ для всех постоянных функций $u : Q \to X$. Остается заметить, что поточечная норма функции H ограничена по построению, и воспользоваться теоремой [3, 2.4.9]. $\triangleright$

3.2.6. *Следствие.* *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ —* НБР *над вполне регулярным топологическим пространством Q. Предположим, что точка $q \in Q$ является пределом последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно различных элементов Q, не равных q.*

(1) *Пусть $x_n \in \mathscr{X}(q_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, $x \in \mathscr{X}(q)$ и в топологическом пространстве $Q \otimes \mathscr{X}$ (см. [3, 2.1.4]) имеет место сходимость $(q_n, x_n) \to (q, x)$ при $n \to \infty$ (если $x = 0$, то эта сходимость равносильна равенству $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$). Тогда существует ограниченное сечение $u \in C(Q, \mathscr{X})$, удовлетворяющее равенствам $u(q_n) = x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $u(q) = x$.*

(2) *Пусть гомоморфизмы $H_n \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ $(n \in \mathbb{N})$ таковы, что последовательность $(|\!|\!| H_n |\!|\!|)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно сходится к нулю. Тогда существует ограниченный гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, удовлетворяющий равенствам $H(q_n) = H_n(q_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $H(q) = 0$.*

(3) *Пусть X — топологическое векторное пространство. Предположим, что последовательность $(x_n) \subset X$ сходится к $x \in X$. Тогда существует непрерывная вектор-функция $u : Q \to X$ такая, что $u(q_n) = x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $u(q) = x$.*

(4) *Пусть X — банахово пространство. Предположим, что последовательность $(x'_n) \subset X'$ слабо* сходится к $x' \in X'$. Тогда существует гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$ такой, что $H(q_n) = x'_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $H(q) = x'$.*

$\lhd$ В пояснении нуждается лишь утверждение (1). При $x = 0$ это утверждение является прямым следствием леммы 3.2.5 (3) и теоремы Дюпре (см. [3, 2.3.5]). Переходя к доказательству общего случая, вновь воспользуемся теоремой Дюпре и рассмотрим ограниченное сечение $v \in C(Q, \mathscr{X})$, принимающее значение x в точке q. Из предложения [3, 2.3.8] следует, что $\|x_n - v(q_n)\| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда в силу справедливости доказываемого утверждения для случая $x = 0$ существует ограниченное сечение $w \in C(Q, \mathscr{X})$, удовлетворяющее равенствам $w(q_n) = x_n - v(q_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ и $w(q) = 0$. Остается положить $u = v + w$. $\rhd$

3.2.7. *Лемма.* *Пусть $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ — банаховы пространства, Q — вполне регулярное топологическое пространство и $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — разбиение Q такое, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ замкнуто. Тогда существует* НБР *$\mathscr{X}$ над Q, удовлетворяющее следующим условиям:*

(а) *$\mathscr{X}\big|_{U_n} \equiv X_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$;*

(б) *если последовательность функционалов $x'_n \in X'_n$ $(n \in \mathbb{N})$ такова, что x'_{n+1} продолжает x'_n и $\|x'_n\| \leqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то отображение H, удовлетворяющее соотношениям $H\big|_{U_n} \equiv x'_n$ $(n \in \mathbb{N})$, принадлежит $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$.*

$\lhd$ Рассмотрим банахово расслоение $\mathscr{X}$, удовлетворяющее условию (а), и определим в нем непрерывную структуру следующим образом. Положим

$$
\begin{aligned}
&C_0 = C(Q);\\
&C_n = \big\{f \in C(Q) : f \equiv 0 \text{ на } U_1 \cup \cdots \cup U_n\big\}, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Как легко видеть, множество сечений

$$
\mathscr{C} = \big\{f_1 x_1 + \cdots + f_n x_n : \ f_i \in C_i, \ x_i \in X_i, \ i = 1, \dots, n, \ n \in \mathbb{N}\big\}
$$

расслоения $\mathscr{X}$ является подпространством пространства всех глобальных сечений $\mathscr{X}$. Кроме того, множество $\mathscr{C}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$. Действительно, пусть $q \in Q$, $x \in \mathscr{X}(q)$, и пусть число $n \in \mathbb{N}$ таково, что $q \in U_n$. Поскольку пространство Q вполне регулярно, найдется функция $f \in C_{n-1}$ со значением $f(q) = 1$. Таким образом, сечение fx принадлежит $\mathscr{C}$ и проходит через x в точке q. Следовательно, $\mathscr{C}$ — непрерывная структура в $\mathscr{X}$ (в паре с которой мы будем рассматривать $\mathscr{X}$ как НБР).

Пусть отображение H удовлетворяет условию (б). Проверим, что $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$. В силу теоремы [3, 2.4.9] для этого достаточно показать, что $H \otimes u \in C(Q)$ для всех $u \in \mathscr{C}$. Если $u = f_1x_1 + \dots + f_nx_n \in \mathscr{C}$, $f_i \in C_i$, $x_i \in X_i$, $i = 1,\dots,n$, то для всех $q \in Q$ имеет место равенство $(H \otimes u)(q) = \langle u(q)|x'_n\rangle$. В свою очередь,

$$\langle u(q)|x'_n\rangle = f_1(q)\langle x_1|x'_n\rangle + \dots + f_n(q)\langle x_n|x'_n\rangle.$$

Следовательно, функция $H \otimes u$ непрерывна. $\triangleright$

3.2.8. Определение. Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное банахово расслоение над множеством Q. *Размерностью* $\dim \mathscr{X}$ расслоения $\mathscr{X}$ назовем функцию, ставящую в соответствие каждой точке $q \in Q$ размерность $\dim \mathscr{X}(q)$ слоя $\mathscr{X}(q)$. Будем говорить, что $\mathscr{X}$ *имеет постоянную размерность* n, если $\dim \mathscr{X}(q) = n$ для всех $q \in Q$.

Лемма. *Пусть $\mathscr{X}$ —* НБР *с конечномерными слоями над произвольным топологическим пространством. Для каждого числа $n = 0, 1, 2, \dots$ рассмотрим следующие условия:*

- **(а)** *множество $\{\dim \mathscr{X} = n\}$ открыто;*
- **(б)** *множество $\{\dim \mathscr{X} < n\}$ открыто;*
- **(в)** *множество $\{\dim \mathscr{X} \leqslant n\}$ открыто;*
- **(г)** *множество $\{\dim \mathscr{X} > n\}$ замкнуто;*
- **(д)** *множество $\{\dim \mathscr{X} \geqslant n\}$ замкнуто.*

Если какое-либо из перечисленных условий справедливо для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливо каждое из этих условий. В этом случае все множества, упомянутые в условиях (а)–(д)*, являются открыто-замкнутыми.*

$\triangleleft$ Достаточно заметить, что из [12, 18.1] следует открытость множеств вида $\{\dim \mathscr{X} > n\}$ и $\{\dim \mathscr{X} \geqslant n\}$, а стало быть, замкнутость множеств вида $\{\dim \mathscr{X} < n\}$ и $\{\dim \mathscr{X} \leqslant n\}$. $\triangleright$

3.2.9. *Предложение.* **(1)** *Пусть Q — бэровское топологическое пространство. Тогда для любого* НБР $\mathscr{X}$ *над Q с конечномерными слоями объединение $\bigcup_{n\geqslant 0} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$ является открытым всюду плотным подмножеством Q.*

(2) *Если пространство Q вполне регулярно и для любого* НБР $\mathscr{X}$ *над Q с конечномерными слоями $\bigcup_{n\geqslant 0} \operatorname{int}\operatorname{cl}\{\dim \mathscr{X} = n\}$ всюду плотно в Q, то пространство Q является бэровским.*

$\lhd$ (1): Чтобы доказать, что указанное объединение является всюду плотным, достаточно для любого непустого открытого множества $U \subset Q$ найти непустое открытое подмножество $W \subset U$, на котором размерность $\mathscr{X}$ постоянна.

Ввиду бэровости пространства Q существует число $n \geqslant 0$ такое, что $V := \operatorname{int}\operatorname{cl}\{\dim \mathscr{X} = n\} \neq \varnothing$. Как несложно вывести из предложения [12, 18.1], множество $\{\dim \mathscr{X} \leqslant n\}$ является замкнутым, откуда следует, что $V \subset \operatorname{cl}\{\dim \mathscr{X} = n\} \subset \{\dim \mathscr{X} \leqslant n\}$, т. е. $\dim \mathscr{X} \leqslant n$ на V. Из включения $V \subset \operatorname{cl}\{\dim \mathscr{X} = n\}$ и открытости множества V следует существование некоторой точки $q \in V \cap \{\dim \mathscr{X} = n\}$. Поскольку множество $\{\dim \mathscr{X} \geqslant n\}$ является открытым, $\dim \mathscr{X} \geqslant n$ на некоторой открытой окрестности $W \subset V$ точки q. Таким образом, размерность $\mathscr{X}$ оказывается постоянной на непустом открытом множестве $W \subset V \subset U$.

(2): Над произвольным не бэровским вполне регулярным пространством Q построим НБР $\mathscr{X}$ с конечномерными слоями такое, что множество $\bigcup_{n\geqslant 0} \operatorname{int}\operatorname{cl}\{\dim \mathscr{X} = n\}$ не является всюду плотным.

Поскольку пространство Q не является бэровским, существуют непустое открытое множество $U \subset Q$ и покрытие $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ этого множества нигде не плотными подмножествами $V_n \subset U$. Положим $U_1 = Q \backslash U$ и $U_{n+1} = \operatorname{cl} V_n \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Понятно, что для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ множество U_n нигде не плотно, объединение $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ замкнуто и, кроме того, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = Q$.

Рассмотрим последовательность $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ конечномерных банаховых пространств со строго возрастающими размерностями: $\dim X_n < \dim X_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По лемме 3.2.7 существует НБР $\mathscr{X}$ над Q такое, что $\mathscr{X}\big|_{U_n} \equiv X_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Как легко видеть,

$$\bigcup_{n\geqslant 0} \operatorname{int}\operatorname{cl}\{\dim \mathscr{X} = n\} = \bigcup_{m\geqslant 0} \operatorname{int}\operatorname{cl} U_m = \operatorname{int} U_1,$$

причем последнее множество не является всюду плотным. $\rhd$

Следствие. *Если* $\mathscr{X}$ — НБР *с конечномерными слоями над бэровским пространством* Q, *то для любого числа* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *имеет место равенство*

$$\operatorname{cl}\{\dim \mathscr{X} \geqslant m\} \;=\; \operatorname{cl} \bigcup_{n \geqslant m} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}.$$

$\lhd$ Зафиксируем число $0 \leqslant m \in \mathbb{Z}$. Включение $\supset$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $q \in Q$ и $\dim \mathscr{X}(q) \geqslant m$. В силу пункта (1) предложения 3.2.9 объединение $\bigcup_{n \geqslant 0} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$ всюду плотно в Q. Поскольку

$$\bigcup_{n<m} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\} \subset \{\dim \mathscr{X} < m\}$$

и последнее множество замкнуто, точка q принадлежит множеству $\operatorname{cl} \bigcup_{n \geqslant m} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$. Стало быть,

$$\{\dim \mathscr{X} \geqslant m\} \subset \operatorname{cl} \bigcup_{n \geqslant m} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\},$$

откуда и вытекает доказываемое включение. $\rhd$

3.2.10. Следующее утверждение отличается от [3, 2.4.7] лишь условиями, накладываемыми на топологическое пространство Q.

Теорема. *Пусть* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ — НБР *над вполне регулярным топологическим пространством* Q, *удовлетворяющим первой аксиоме счетности. Отображение* $H : q \in Q \mapsto H(q) \in B\big(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q)\big)$ *является гомоморфизмом из* $\mathscr{X}$ *в* $\mathscr{Y}$ *тогда и только тогда, когда* $H \otimes u \in C(Q, \mathscr{Y})$ *для всех* $u \in C(Q, \mathscr{X})$.

$\lhd$ Необходимость следует из теоремы [3, 2.4.4]. В силу той же теоремы для доказательства достаточности остается убедиться в локальной ограниченности отображения H. Допустим, что функция $|\!|\!|H|\!|\!|$ не ограничена в любой окрестности некоторой точки $q \in Q$. В таком случае благодаря первой аксиоме счетности найдется стремящаяся к q последовательность (q_n) попарно различных элементов Q такая, что $|\!|\!|H|\!|\!|(q_n) > (|\!|\!|H|\!|\!|(q) + n)^2$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ подберем элемент $x_n \in \mathscr{X}(q_n)$ так, чтобы $\|H(q_n)x_n\| = \|H(q_n)\|$ и $\|x_n\| \leqslant 2$. По следствию 3.2.6 (1) существует ограниченное сечение $u \in C(Q, \mathscr{X})$, принимающее значения $u(q_n) = \frac{1}{n}x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $u(q) = 0$. Тогда

$$|\!|\!|H \otimes u|\!|\!|(q_n) = \tfrac{1}{n}\|H(q_n)\| \geqslant \tfrac{1}{n}(|\!|\!|H|\!|\!|(q) + n)^2 > n,$$

что противоречит непрерывности сечения $H \otimes u$, так как $q_n \to q$ и $(H \otimes u)(q) = 0$. $\triangleright$

Замечание. Как видно из приведенного доказательства и доказательства 3.2.5 (3), в последней теореме условие $H \otimes u \in C(Q, \mathscr{Y})$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$ можно заменить [[более слабым]] условием: $H \otimes u \in C(Q, \mathscr{Y})$ для всех элементов u некоторого $C^b(Q)$-подмодуля $C^b(Q, \mathscr{X})$, послойно плотного в $\mathscr{X}$ и замкнутого относительно равномерных пределов. Например, в качестве такого подмодуля можно взять само множество $C^b(Q, \mathscr{X})$.

3.2.11. Теорема 3.2.10 сформулирована для случая топологического пространства Q, удовлетворяющего первой аксиоме счетности. Наименьшим среди рассматриваемых в литературе классов топологических пространств, расширяющих класс пространств с первой аксиомой счетности, обычно является класс пространств Фреше — Урысона (см. [7, 1.6.14]). (Напомним, что топологическое пространство Q называется *пространством Фреше — Урысона*, если для любой точки $q \in Q$ и для любого подмножества $P \subset Q$ из включения $q \in \operatorname{cl} P$ следует существование последовательности элементов P, стремящейся к q.) Убедимся в том, что утверждение теоремы 3.2.10 не сохраняет силу для класса пространств Фреше — Урысона.

Пример. Мы построим топологическое пространство Q, обладающее следующими свойствами:

(а) Q — пространство Фреше — Урысона;
(б) пространство Q нормально;
(в) Q не удовлетворяет первой аксиоме счетности;
(г) Q не является локально псевдокомпактным;
(д) Q — бэровское пространство;
(е) существуют НБР $\mathscr{X}$ над Q с конечномерными слоями и отображение $H : q \in Q \mapsto H(q) \in \mathscr{X}(q)'$ такое, что $H \otimes u \in C(Q)$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$, но $H \notin \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$;

(ж) для любого бесконечномерного банахова пространства X существует отображение $H : Q \to X'$ такое, что $H \otimes u \in C(Q)$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$, но $H \notin \mathrm{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$.

Рассмотрим множество $Q = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{\infty\}$, где $\infty \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, и снабдим его топологией, объявив все элементы $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ изолированными точками и взяв в качестве окрестностей ∞ все подмножества $U \subset Q$, для которых $\infty \in U$ и

$$(\forall\, m \in \mathbb{N})\ (\exists\, n_m \in \mathbb{N})\ (\forall\, n \geqslant n_m)\ \ (m, n) \in U.$$

Понятно, что

$$C(Q) = \Big\{ f : Q \to \mathbb{R}\ : \lim_{n\to\infty} f\big((m, n)\big) = f(\infty) \text{ для всех } m \in \mathbb{N} \Big\}. \quad (1)$$

Проверим, что топологическое пространство Q обладает вышеперечисленными свойствами (а)–(ж).

(а): Достаточно рассмотреть подмножество $P \subset Q$, не содержащее последовательности, стремящейся к ∞, и показать, что $\infty \notin \mathrm{cl}\, P$. Очевидно, для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется номер n_m такой, что $\big\{(m, n) \in P : n \in \mathbb{N}\big\} \subset \{(m, 1), \dots, (m, n_m)\}$. Следовательно, точка ∞ отделяется от множества P своей окрестностью $\big\{(m, n) : m \in \mathbb{N},\ n > n_m\big\} \cup \{\infty\}$ и тем самым не принадлежит замыканию P.

(б), (д) См. замечание 3.1.11.

Свойства (в) и (г) немедленно следуют из установленного ниже свойства (е) и теорем 3.2.10 и [3, 2.4.7] соответственно.

(е): Рассмотрим НБР $\mathscr{X}$ над Q такое, что $\mathscr{X}(q) = \mathbb{R}$ для всех $q \in Q \backslash \{\infty\}$, $\mathscr{X}(\infty) = \{0\}$ и $C(Q, \mathscr{X}) = \{u \in C(Q) : u(\infty) = 0\}$. Отображение H определим равенствами $H(\infty) = 0$ и $H\big((m, n)\big) = m$ для всех $(m, n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Легко видеть, что $H \otimes u \in C(Q)$ для произвольного сечения $u \in C(Q, \mathscr{X})$ $\big($см. (1)$\big)$. Тем не менее поточечная норма H не является локально ограниченной, а значит, $H \notin \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ в силу теоремы [3, 2.4.4].

(ж): Согласно теореме Джозефсона — Ниссенцвейга [10, XII] на единичной сфере пространства X' существует слабо* сходящаяся к нулю последовательность (x'_n). Положим $H(\infty) = 0 \in X'$ и $H\big((m, n)\big) = m x'_n$ для всех $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Тогда $H \otimes u \in C(Q)$ для произвольного сечения $u \in C(Q, X_Q)$. Действительно, для каждого $m \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение $\lim_{n\to\infty}(H \otimes u)\big((m, n)\big) = 0$, так как последовательность $\big(H\big((m,n)\big)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ слабо* сходится к нулю и $\|u\big((m,n)\big)-u(\infty)\|\to 0$ при $n\to\infty$. Остается заметить, что поточечная норма H не локально ограничена, и применить теорему [3, 2.4.4].

3.2.12. Теорема. *Пусть* НБР $\mathscr{X}$ *над топологическим пространством* Q *имеет постоянную конечную размерность,* $\mathscr{Y}$ *— произвольное* НБР *над* Q *и* $\mathscr{U}$ *— послойно плотное в* $\mathscr{X}$ *подмножество* $C(Q,\mathscr{X})$. *Если отображение* $H : p\in Q\mapsto H(p)\in B\big(\mathscr{X}(p),\mathscr{Y}(p)\big)$ *таково, что* $H\otimes u\in C(Q,\mathscr{Y})$ *для всех* $u\in\mathscr{U}$, *то* $H\in \operatorname{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ *и поточечная норма* $|\!|\!| H|\!|\!|$ *непрерывна.*

$\lhd$ Зафиксируем произвольную точку $q\in Q$ и докажем непрерывность $|\!|\!| H|\!|\!|$ в этой точке. Соотношение

$$\|H(p)\| = \sup\left\{\left\|H(p)\Big(\frac{1}{\max\{\|u(p)\|,1\}}\,u(p)\Big)\right\| : u\in\mathscr{U}\right\} = \\ = \sup\left\{\Big(\frac{1}{|\!|\!| u|\!|\!|\vee 1}|\!|\!| H\otimes u|\!|\!|\Big)(p) : u\in\mathscr{U}\right\},$$

справедливое для всех $p\in Q$, обеспечивает полунепрерывность снизу функции $|\!|\!| H|\!|\!|$. Остается доказать, что функция $|\!|\!| H|\!|\!|$ полунепрерывна сверху в точке q. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon>0$ и покажем, что в некоторой окрестности U точки q имеет место неравенство $|\!|\!| H|\!|\!|\leqslant |\!|\!| H|\!|\!|(q)+\varepsilon$.

Из конечномерности слоя $\mathscr{X}(q)$ следует существование такого набора сечений $\mathbb{u}=(\mathbb{u}_{\mathbb{1}},\dots,\mathbb{u}_{\mathbb{n}})\subset \operatorname{lin}\mathscr{U}$, что значения $u_1(q),\dots,u_n(q)$ имеют единичную норму и образуют базис $\mathscr{X}(q)$.

Поскольку множество

$$\Lambda=\{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^n : |\!|\!|\boldsymbol{\lambda}\mathbb{u}|\!|\!|(q)=1\}$$

ограничено в $\mathbb{R}^n$, число $\|\Lambda\|_1 := \sup\{|\lambda_1|+\dots+|\lambda_n| : (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\Lambda\}$ конечно. (Здесь и ниже запись $\boldsymbol{\lambda}\mathbb{u}$ обозначает сумму $\lambda_1u_1+\dots+\lambda_nu_n$.)

Подберем такое число $\delta\in(0,1)$, что $\frac{1}{1-\delta}\big(\delta+|\!|\!| H|\!|\!|(q)\big)<|\!|\!| H|\!|\!|(q)+\varepsilon$. В силу [4, лемма 7] существует окрестность U_δ точки q, в которой $1-\delta\leqslant|\!|\!|\boldsymbol{\lambda}\mathbb{u}|\!|\!|\leqslant 1+\delta$ для всех $\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda$.

Без ограничения общности можно считать, что для любого элемента $p\in U_\delta$ набор $\mathbb{u}(p)=\big(u_1(p),\dots,u_n(p)\big)$ линейно независим (см. [12, 18.1]). В частности, произвольный вектор $x \in \mathscr{X}(p)$ представляется в виде

$$x = \frac{\|x\|}{\|\boldsymbol{\lambda}_x \Bbbk\|(p)}(\boldsymbol{\lambda}_x \Bbbk)(p)$$

при подходящем $\boldsymbol{\lambda}_x \in \Lambda$. Поскольку сечения $H \otimes u_i$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывны, существует окрестность $U \subset U_\delta$ точки q такая, что

$$\|\Lambda\|_1 \max\left\{\left|\|H \otimes u_i\|(p) - \|H \otimes u_i\|(q)\right| \ : \ i = 1, \ldots, n\right\} < \delta$$

для всех $p \in U$. В каждой точке $p \in U$ значение нормы $\|H(p)\|$ достигается на некотором векторе $x(p) \in \mathscr{X}(p)$, $\|x(p)\| = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\|H\|(p) = \|H(p)x(p)\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{\lambda}_{x(p)}\Bbbk\|(p)}\|H \otimes \big(\boldsymbol{\lambda}_{x(p)}\Bbbk\big)\|(p) \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{1-\delta}\Big(\Big|\|H \otimes \big(\boldsymbol{\lambda}_{x(p)}\Bbbk\big)\|(p) - \|H \otimes \big(\boldsymbol{\lambda}_{x(p)}\Bbbk\big)\|(q)\Big| + \\
+ \|H \otimes \big(\boldsymbol{\lambda}_{x(p)}\Bbbk\big)\|(q)\Big) \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{1-\delta}\Big(\|\Lambda\|_1 \max\left\{\left|\|H \otimes u_i\|(p) - \|H \otimes u_i\|(q)\right| : \right. \\
\left. : \ i = 1, \ldots, n\right\} + \|H\|(q)\Big) \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{1-\delta}\big(\delta + \|H\|(q)\big) < \|H\|(q) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Включение $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ теперь следует из непрерывности поточечной нормы H и теоремы [3, 2.4.4]. $\rhd$

Следствие. *Пусть* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ — НБР *над одним и тем же топологическим пространством. Если расслоение* $\mathscr{X}$ *имеет постоянную конечную размерность, то поточечная норма любого гомоморфизма из* $\mathscr{X}$ *в* $\mathscr{Y}$ *непрерывна.*

3.2.13. Как показывают приведенные ниже примеры, требование постоянства размерности расслоения $\mathscr{X}$ в следствии 3.2.12 является существенным.

Для того, чтобы подчеркнуть разнообразие тех ситуаций, в которых для НБР $\mathscr{X}$ с конечномерными слоями возникает гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, имеющий разрывную норму, мы приведем три различных примера. В первом случае размерность $\mathscr{X}$ равна нулю в единственной точке разрыва функции $\|H\|$ и единице во всех остальных точках, во втором случае размерность $\mathscr{X}$ принимает два различных (возможно, ненулевых) значения, в третьем — размерность $\mathscr{X}$ принимает бесконечное число различных значений, а функция $\|H\|$ разрывна в каждой точке.

Примеры. **(1)** Пусть $Q = [0, 1]$. Положим $\mathscr{X}(q) = \mathbb{R}$, если $0 < q \leqslant 1$, и $\mathscr{X}(0) = \{0\}$. В качестве непрерывной структуры $\mathscr{X}$ возьмем множество $\{u \in C[0, 1] : u(0) = 0\}$. Тогда поточечная норма гомоморфизма H, принимающего значение $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ на полуинтервале $(0, 1]$, не является непрерывной в точке $0 \in Q$. Нетрудно проверить, что в данном случае $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ можно естественным образом отождествить с пространством определенных на отрезке $[0, 1]$ вещественных функций, которые ограничены и непрерывны на полуинтервале $(0, 1]$ и равны нулю в точке $0 \in Q$. Однако далеко не все такие функции непрерывны на $[0, 1]$.

(2) Теперь рассмотрим вполне регулярное пространство Q с неизолированной точкой q. Положим $U_1 = \{q\}$, $U_2 = Q \backslash U_1$, $U_3 = U_4 = \cdots = \varnothing$. Пусть X — конечномерное банахово пространство, X_1 — его собственное подпространство и $X_2 = X_3 = \cdots = X$. Зафиксируем зануляющийся на X_1 функционал $x' \in X'$ такой, что $\|x'\| = 1$, и положим $x'_1 = 0$, $x'_2 = x'_3 = \cdots = x'$. Рассмотрим НБР $\mathscr{X}$, фигурирующее в лемме 3.2.7, и гомоморфизм H, удовлетворяющий условию (б) этой леммы. Ясно, что $\|H\|(q) = 0$ и $\|H\| \equiv 1$ вне $\{q\}$. Таким образом, функция $\|H\|$ не является непрерывной, так как точка q не изолирована.

(3) Пусть $Q = \mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, снабженное естественной топологией, и пусть $n \mapsto q_n$ — произвольная биекция $\mathbb{N}$ на Q. Положим $U_n = \{q_n\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим произвольную последовательность банаховых пространств $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ и функционалов x'_n, удовлетворяющих условию 3.2.7 (б). Потребуем дополнительно, чтобы размерности X_n и нормы x'_n строго возрастали. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР, фигурирующее в лемме 3.2.7, и H — гомоморфизм, удовлетворяющий условию 3.2.7 (б). Ясно, что слои $\mathscr{X}$ имеют попарно различные размерности, а поточечная норма H разрывна в каждой точке Q.

Авторам неизвестно, является ли в общем случае постоянство размерности расслоения в некоторой окрестности точки q необходимым условием того, что поточечные нормы всех гомоморфизмов непрерывны в этой точке. Доказанная в следующем параграфе теорема 3.3.8 (2) дает положительный ответ на этот вопрос в некотором частном случае.

3.3. Операторное расслоение

В данном параграфе предложен ряд необходимых и достаточных условий существования банахова расслоения $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, непрерывные сечения которого представляют собой гомоморфизмы из заданного НБР $\mathscr{X}$ в НБР $\mathscr{Y}$. Отдельно рассмотрены случаи произвольных расслоений $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, расслоений над экстремально несвязными компактами, расслоений с конечномерными слоями, а также случай постоянных НБР и НБР, имеющих постоянную конечную размерность.

3.3.1. Пусть $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ и $\mathscr{Z}$ — НБР над топологическим пространством Q, причем в каждой точке $q \in Q$ слой $\mathscr{Z}(q)$ является банаховым подпространством $B\big(\mathscr{X}(q),\mathscr{Y}(q)\big)$.

Лемма. *Следующие утверждения равносильны:*

(а) $C(Q,\mathscr{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$;

(б) $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ *является послойно плотным в* $\mathscr{Z}$ *подмножеством* $C(Q,\mathscr{Z})$ $\big($*иными словами,* $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ — *непрерывная структура расслоения* $\mathscr{Z}\big)$.

$\lhd$ Равносильность утверждений (а) и (б) немедленно вытекает из следствия 3.2.4. $\rhd$

Очевидно, расслоение $\mathscr{Z}$, удовлетворяющее условию (а) или (б) леммы, является единственным. Это позволяет нам ввести следующее понятие.

Определение. Банахово расслоение $\mathscr{Z}$, удовлетворяющее условию (а) или (б) леммы (если таковое существует), назовем *операторным расслоением* для НБР $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ и обозначим символом $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

Данное выше определение операторного расслоения обобщает аналогичное понятие, введенное в [3, 3.2.3] для случая расслоений над экстремально несвязным компактом.

3.3.2. Следующий неоднократно используемый в настоящей работе результат дает основной критерий существования операторного расслоения.

Теорема. *Пусть* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ — НБР *над топологическим пространством* Q. *Для существования расслоения* $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ *необходимо и достаточно, чтобы поточечная норма любого гомоморфизма из* $\mathscr{X}$ *в* $\mathscr{Y}$ *была непрерывна.*

$\lhd$ Необходимость приведенного условия очевидна. Достаточность можно обосновать, используя определение 3.3.1 (б) операторного расслоения. В каждой точке $q \in Q$ слой $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})(q)$ является замыканием подпространства $\{H(q) : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\}$ в пространстве $B\big(\mathscr{X}(q),\mathscr{Y}(q)\big)$. $\rhd$

Согласно следствию [3, 3.2.2] в случае просторного НБР $\mathscr{X}$ над экстремально несвязным компактом Q поточечная норма любого гомоморфизма из $\mathscr{X}$ в произвольное НБР $\mathscr{Y}$ над Q непрерывна. На основе упомянутого следствия доказана теорема [3, 3.2.3], которая утверждает, что в указанном случае существует операторное расслоение $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. Это позволяет рассматривать установленный нами критерий 3.3.2 как обобщение теоремы [3, 3.2.3] на случай произвольного НБР над произвольным топологическим пространством.

3.3.3. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над экстремально несвязным компактом Q, причем расслоение $\mathscr{Y}$ просторно. Пусть $\overline{\mathscr{X}}$ — просторная оболочка расслоения $\mathscr{X}$. Для произвольного сечения $w \in C\big(Q, B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})\big)$ обозначим символом $w|_{\mathscr{X}}$ поточечное сужение w на слои $\mathscr{X}$, т. е. $\big(w|_{\mathscr{X}}\big)(q) = w(q)|_{\mathscr{X}(q)}$ для всех $q \in Q$.

Лемма. *Отображение* $w \mapsto w|_{\mathscr{X}}$ *является линейной биекцией* $C\big(Q, B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})\big)$ *на* $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. *При этом* $\|w|_{\mathscr{X}}\| \leqslant \|w\|$ *и функции* $\|w|_{\mathscr{X}}\|$ *и* $\|w\|$ *совпадают на котощем подмножестве* Q.

$\lhd$ Прежде всего, заметим, что $w|_{\mathscr{X}} \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ для любого сечения $w \in C\big(Q, B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})\big)$. Это следует из теоремы [3, 2.4.7] и соотношения $(w|_{\mathscr{X}}) \otimes u = w \otimes u \in C(Q,\mathscr{Y})$, справедливого для всех $u \in C(Q,\mathscr{X})$.

Как следует из леммы [3, 3.2.10], для любого гомоморфизма $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ существует единственное сечение $\overline{H} \in C\big(Q, B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})\big)$ такое, что значения $\overline{H}$ продолжают соответствующие значения H;

при этом $\|H\| \leqslant \|\overline{H}\|$ и функции $\|H\|$ и $\|\overline{H}\|$ совпадают на котощем подмножестве Q.

Для завершения доказательства леммы остается заметить, что отображение $w \mapsto w|_{\mathscr{X}}$ является обратным к отображению $H \mapsto \overline{H}$. $\rhd$

3.3.4. Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над экстремально несвязным компактом Q и $\overline{\mathscr{X}}$ — просторная оболочка расслоения $\mathscr{X}$. Предположим, что расслоение $\mathscr{Y}$ просторно и существует банахово расслоение $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Тогда НБР $B(\overline{\mathscr{X}}, \mathscr{Y})$ и $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ изометричны, причем изометрией первого расслоения на второе служит отображение, сопоставляющее каждой точке $q \in Q$ оператор сужения $\big(T \mapsto T|_{\mathscr{X}(q)}\big) : B(\overline{\mathscr{X}}, \mathscr{Y})(q) \to B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})(q)$.*

$\lhd$ Обозначим через I отображение, фигурирующее в формулировке предложения, т. е. $I(q)T = T|_{\mathscr{X}(q)}$ для всех $q \in Q$. Для всякого сечения $w \in C\big(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\big)$ справедливо равенство $I \otimes w = w|_{\mathscr{X}}$; с другой стороны, согласно лемме 3.3.3 имеет место включение $w|_{\mathscr{X}} \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Поэтому в силу равенства $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = C\big(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\big)$ и теоремы [3, 2.4.7] отображение I является гомоморфизмом из $B(\overline{\mathscr{X}}, \mathscr{Y})$ в $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Таким образом, для доказательства предложения остается зафиксировать произвольную точку $q \in Q$ и показать, что оператор $I(q) : B(\overline{\mathscr{X}}, \mathscr{Y})(q) \to B\big(\mathscr{X}, \mathscr{Y}\big)(q)$ сохраняет норму и является сюръективным.

Рассмотрим произвольный элемент $T \in B(\overline{\mathscr{X}}, \mathscr{Y})(q)$. По теореме Дюпре (см., например, [3, 2.3.5]) существует $w \in C\big(Q, B(\overline{\mathscr{X}}, \mathscr{Y})\big)$ со значением $w(q) = T$. Функции $\|w\|$ и $\|I \otimes w\|$ непрерывны и в силу леммы 3.3.3 совпадают на котощем подмножестве Q, а значит, совпадают всюду на Q. Следовательно, $\|I(q)T\| = \|I \otimes w\|(q) = \|w\|(q) = \|T\|$. Сюръективность же оператора $I(q)$ вытекает из сюръективности отображения $(w \mapsto I \otimes w) : C\big(Q, B(\overline{\mathscr{X}}, \mathscr{Y})\big) \to C\big(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\big)$ (гарантируемой леммой 3.3.3) и теоремы Дюпре для $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. $\rhd$

3.3.5. Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над экстремально несвязным компактом Q, причем расслоение $\mathscr{Y}$ просторно. Расслоение $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ существует тогда и только тогда, когда $\|T|_{\mathscr{X}(q)}\| = \|T\|$ для любой точки $q \in Q$ и любого оператора $T \in B(\overline{\mathscr{X}}, \mathscr{Y})(q)$, где $\overline{\mathscr{X}}$ — просторная оболочка расслоения $\mathscr{X}$.*

$\lhd$ Необходимость вытекает из предложения 3.3.4. Докажем достаточность. В силу теоремы 3.3.2 для доказательства существования расслоения $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ достаточно рассмотреть произвольный гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ и показать непрерывность его поточечной нормы. Согласно лемме 3.3.3 существует такое сечение $w \in C\big(Q, B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})\big)$, что $H = w|_{\mathscr{X}}$. Из рассматриваемого нами условия вытекает, что для каждой точки $q \in Q$ справедливы равенства $\|H(q)\| = \|w(q)|_{\mathscr{X}(q)}\| = \|w(q)\|$, т. е. $\|\!|H|\!\| = \|\!|w|\!\|$, откуда $\|\!|H|\!\| \in C(Q)$. $\triangleright$

3.3.6. *Предложение.* *Если* НБР $\mathscr{X}$ *над топологическим пространством* Q *имеет постоянную конечную размерность, то для любого* НБР $\mathscr{Y}$ *над* Q *существует расслоение* $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

$\triangleleft$ Утверждение предложения вытекает из следствия 3.2.12 и теоремы 3.3.2. $\triangleright$

Примеры 3.2.13 с учетом 3.3.2 показывают, что требование постоянства размерности расслоения в последнем предложении является существенным.

3.3.7. *Предложение.* *Предположим, что* НБР $\mathscr{X}$ *над вполне регулярным топологическим пространством* Q *имеет постоянную конечную размерность. Тогда для всякого* НБР $\mathscr{Y}$ *над* Q *в каждой точке* $q \in Q$ *имеет место равенство* $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})(q) = B\big(\mathscr{X}(q),\mathscr{Y}(q)\big)$. *В частности, если постоянную конечную размерность имеют как* $\mathscr{X}$, *так и* $\mathscr{Y}$, *то этим же свойством обладает* $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

$\triangleleft$ Зафиксируем точку $q \in Q$ и линейный оператор $S \in B\big(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q)\big)$. Построим такой гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, что $H(q) = S$; тем самым теорема будет доказана.

Сначала заметим, что если W — замкнутая окрестность q, сечение w над W непрерывно (соответственно локально ограничено) и функция $f \in C(Q)$ зануляется вне W, то глобальное сечение $f * w$, определяемое формулой

$$(f * w)(p) = \begin{cases} f(p)w(p), & p \in W, \\ 0, & p \notin W, \end{cases}$$

непрерывно (соответственно локально ограничено). Поэтому в силу теоремы [3, 2.4.4] для гомоморфизма $G \in \operatorname{Hom}_W(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ отображение

$$H = f * G : p \in Q \mapsto H(p) \in B\big(\mathscr{X}(p), \mathscr{Y}(p)\big)$$

является гомоморфизмом из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, так как поточечная норма H локально ограничена и $H \otimes u = f * (G \otimes u) \in C(Q, \mathscr{Y})$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$.

Принимая во внимание тот факт, что пространство Q вполне регулярно, можно потребовать, чтобы $f(q) = 1$. Тогда $H(q) = G(q)$. Таким образом, для доказательства нашего утверждения достаточно на какой-нибудь замкнутой окрестности W точки q определить гомоморфизм $G \in \mathrm{Hom}_W(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, принимающий значение S в точке q.

В силу [4, следствие 8] найдется такой линейный оператор $T : \mathscr{X}(q) \to C(Q, \mathscr{X})$, что для всех $x \in \mathscr{X}(q)$ выполнено неравенство $\|x\| \leqslant |\!|\!| Tx |\!|\!|$ на некоторой окрестности U точки q. Поскольку для любой точки $p \in U$ оператор $T_p : x \in \mathscr{X}(q) \mapsto (Tx)(p) \in \mathscr{X}(p)$ обратим и размерность расслоения $\mathscr{X}$ постоянна, образ T послойно плотен в $\mathscr{X}$ над U. Согласно теореме Дюпре (см. [3, 2.3.5]) существует набор сечений $\mathscr{V} \subset C(Q, \mathscr{Y})$ такой, что $\{v(q) : v \in \mathscr{V}\}$ — базис подпространства $\operatorname{im} S \subset \mathscr{Y}(q)$ на единичной сфере. Теперь, привлекая [4, лемма 7], рассмотрим такой линейный оператор $R : \operatorname{im} S \to C(Q, \mathscr{Y})$, что его образ совпадает с линейной оболочкой $\mathscr{V}$ и $|\!|\!| Ry |\!|\!| \leqslant 2\,\|y\|$ для всех $y \in \operatorname{im} S$ на некоторой окрестности V точки q. Аналогично тому, как были определены операторы T_p, для каждой точки $r \in V$ введем в рассмотрение линейный оператор $R_r : \operatorname{im} S \to \mathscr{Y}(p)$. Понятно, что оператор R_q обратим и $\|R_r\| \leqslant 2$ для всех $r \in V$. Вместе с тем для всех $p \in U$ имеет место оценка $\|T_p^{-1}\| \leqslant 1$.

Наконец, рассмотрим замкнутую окрестность $W \subset U \cap V$ точки q и с каждым элементом $p \in W$ свяжем линейный оператор

$$G(p) = R_p\, R_q^{-1} S\, T_q\, T_p^{-1} : \mathscr{X}(p) \to \mathscr{Y}(p).$$

В силу теоремы [3, 2.4.9] отображение

$$G : p \in W \mapsto G(p) \in B\big(\mathscr{X}(p), \mathscr{Y}(p)\big)$$

представляет собой искомый гомоморфизм, так как $G(q) = S$, $|\!|\!| G |\!|\!| \leqslant 2\,\|R_q^{-1}\|\,\|S\|\,\|T_q\|$ и $G \otimes u \in C(W, \mathscr{Y})$ для всех $u \in \operatorname{im} T$. $\triangleright$

3.3.8. Утверждение (1) следующей теоремы при $\mathscr{Y} = \mathscr{R}$ содержит частичный ответ на вопрос Г. Герца [12, Section 19, Problem 1, с. 231].

Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ — это* НБР *с конечномерными слоями над бэровским вполне регулярным топологическим пространством Q и пусть $\mathscr{Y}$ —* НБР *над Q.*

(1) *Для любой точки q открытого всюду плотного в Q множества $\bigcup_{n\geqslant 0}\operatorname{int}\{\dim\mathscr{X}=n\}$ (см. предложение 3.2.9) и любого оператора $T\in B\big(\mathscr{X}(q),\mathscr{Y}(q)\big)$ существует гомоморфизм $H\in\operatorname{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ такой, что $H(q)=T$ и $|\!|\!|H|\!|\!|\leqslant\|T\|$.*

(2) *Предположим, что точка $q\in Q$ обладает счетной базой окрестностей и расслоение $\mathscr{Y}$ имеет ненулевые слои на всюду плотном множестве. Поточечные нормы всех гомоморфизмов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ непрерывны в точке q в том и только в том случае, если размерность $\mathscr{X}$ постоянна в некоторой окрестности q.*

$\lhd$ (1): Пусть $0\leqslant n\in\mathbb{Z}$, $q\in\operatorname{int}\{\dim\mathscr{X}=n\}$, $U\subset\operatorname{int}\{\dim\mathscr{X}=n\}$ — замкнутая окрестность точки q и $T\in B\big(\mathscr{X}(q),\mathscr{Y}(q)\big)$. Как легко вывести из предложения 3.3.7 и леммы [3, 2.3.9], существует гомоморфизм $G\in\operatorname{Hom}_U(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ такой, что $G(q)=T$ и $|\!|\!|G|\!|\!|\leqslant\|T\|$. Поскольку пространство Q вполне регулярно, найдется непрерывная функция $f:Q\to[0,1]$, удовлетворяющая соотношениям $f(q)=1$ и $f\equiv 0$ на $Q\backslash U$. Остается положить $H=f*G$ (см. доказательство 3.3.7).

(2): Достаточность вытекает из теоремы 3.2.12. Для доказательства необходимости предположим, что в любой окрестности q встречаются точки, в которых размерность $\mathscr{X}$ больше $\dim\mathscr{X}(q)=:m$, и построим гомоморфизм $H\in\operatorname{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ с разрывной в q поточечной нормой.

В силу следствия 3.2.9 точка q лежит в замыкании открытого множества $\bigcup_{n>m}\operatorname{int}\{\dim\mathscr{X}=n\}$, и, кроме того, всюду плотное по нашим условиям множество $\{\dim\mathscr{Y}>0\}$ является открытым. Поскольку точка q обладает счетной базой окрестностей, можно выбрать стремящуюся к q последовательность (q_n) попарно различных элементов пересечения $\bigcup_{n>m}\operatorname{int}\{\dim\mathscr{X}=n\}\cap\{\dim\mathscr{Y}>0\}$.

Вследствие теоремы Дюпре [3, 2.3.5] существуют ограниченные сечения $u_1,\dots,u_m\in C(Q,\mathscr{X})$ с линейно независимыми значениями $u_1(q),\dots,u_m(q)$. Как видно из предложения [12, 18.1], эти сечения поточечно линейно независимы на некоторой открытой окрестности U точки q. Без ограничения общности будем считать, что $q_n\in U$ для всех $n\in\mathbb{N}$.

Для каждого $n\in\mathbb{N}$ неравенство $\dim\mathscr{X}(q_n)>m$ и невырожденность слоя $\mathscr{Y}(q_n)$ позволяют найти оператор $T_n \in B\big(\mathscr{X}(q_n), \mathscr{Y}(q_n)\big)$, что $T_n \equiv 0$ на $\operatorname{lin}\{u_1(q_n), \dots, u_m(q_m)\}$ и $\|T_n\| = 1$. В силу (1) для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ существует гомоморфизм $H_n \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, удовлетворяющий соотношениям $H_n(q_n) = T_n$ и $\|H_n\| \leqslant 1$.

Обозначим через $\mathscr{X}_0$ НБР над U, для которого линейная оболочка $\operatorname{lin}\{u_1|_U, \dots, u_m|_U\}$ является непрерывной структурой, и положим $\mathscr{Y}_0 = \mathscr{Y}\big|_U$. По теореме 3.2.12 для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ отображение $p \in U \mapsto H_n(p)\big|_{\operatorname{lin}\{u_1(p), \dots, u_m(p)\}} \in B\big(\mathscr{X}_0(p), \mathscr{Y}_0(p)\big)$ имеет непрерывную поточечную норму; поэтому можно подобрать открытую окрестность $V_n \subset U$ точки q_n такую, что $\|H_n(p)\big|_{\operatorname{lin}\{u_1(p), \dots, u_m(p)\}}\| < 1/n$ для всех $p \in V_n$.

Согласно лемме 3.2.5 (1) существует последовательность (W_n) открытых подмножеств Q, удовлетворяющая следующим условиям: $\operatorname{cl} W_n \cap \operatorname{cl} \bigcup_{k \neq n} W_k = \varnothing$, $q_n \in W_n$ и $\big(\operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n\big) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{cl} W_n = \{q\}$. Дополнительно потребуем, чтобы $W_n \subset V_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, рассмотрим последовательность непрерывных функций $f_n : Q \to [0, 1]$ таких, что $f_n(q_n) = 1$ и $f_n \equiv 0$ на $Q \backslash W_n$. Для каждой точки $p \in Q$ положим

$$H(p) = \begin{cases} f_n(p) H_n(p), & p \in W_n, \\ 0, & p \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n. \end{cases}$$

Очевидно, $\|H\| \leqslant 1$. Поскольку пространство Q вполне регулярно, множество $N_q = \{u \in C(Q, \mathscr{X}) : u(q) = 0\}$ дополняет линейную оболочку $\operatorname{lin}\{u_1, \dots, u_m\}$ до послойно плотного в $\mathscr{X}$ подмножества $C(Q, \mathscr{X})$. Покажем, что H является гомоморфизмом из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, применив к этому подмножеству теорему [3, 2.4.9].

Если $u \in \operatorname{lin}\{u_1, \dots, u_m\}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n H_n \otimes u$ сходится равномерно, так как его члены имеют попарно непересекающиеся носители, поточечная норма u ограничена и $\|f_n H_n \otimes u\| \leqslant \frac{1}{n} \|u\|$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, по теореме [3, 2.3.6] сумма $H \otimes u$ указанного ряда является непрерывным сечением.

Пусть теперь $u \in N_q$. Сечение $H \otimes u$ непрерывно на каждом множестве $\operatorname{cl} W_n$, $n \in \mathbb{N}$, поскольку $\operatorname{cl} W_n$ содержится в открытом множестве $Q \setminus \operatorname{cl} \bigcup_{k \neq n} W_k$ и $H \otimes u$ совпадает на этом множестве с непрерывным сечением $f_n H_n \otimes u$. Если точка p принадлежит $\big(\operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n\big) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{cl} W_n$, то $p = q$ и сечение $H \otimes u$ непрерывно в этой точке, так как $\|H\| \leqslant 1$, а функция $\|u\|$ непрерывна и равна нулю в q. Наконец, множество $Q\setminus \operatorname{cl}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ является открытым, и на нем $|\!|\!| H\otimes u |\!|\!| \equiv 0$.

Итак, $H\in \operatorname{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. Вместе с тем $|\!|\!| H |\!|\!|(q)=0$, $|\!|\!| H |\!|\!|(q_n)=1$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $q_n\to q$; следовательно, функция $|\!|\!| H |\!|\!|$ разрывна в точке q. $\triangleright$

3.3.9. *Теорема.* *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ —* НБР *над вполне регулярным топологическим пространством Q, удовлетворяющим первой аксиоме счетности. Предположим, что все слои $\mathscr{X}$ конечномерны, а расслоение $\mathscr{Y}$ имеет ненулевые слои на всюду плотном подмножестве Q. Операторное расслоение $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ существует в том и только в том случае, если для каждого $n=0,1,2,\dots$ множество $\{\dim\mathscr{X}=n\}$ является открыто-замкнутым.*

$\triangleleft$ Достаточность указанного условия для существования расслоения $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ вытекает из предложения 3.3.6.

Чтобы доказать необходимость, заметим, что в силу теоремы 3.3.2 и утверждения (2) теоремы 3.3.8 существование расслоения $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ влечет открытость множеств $\{\dim\mathscr{X}=n\}$ для всех $n=0,1,2,\dots$, и воспользуемся леммой 3.2.8. $\triangleright$

3.3.10. Из теоремы 3.3.9 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Пусть $\mathscr{X}$ —* НБР *с конечномерными слоями над связным бэровским вполне регулярным топологическим пространством Q, удовлетворяющим первой аксиоме счетности, и $\mathscr{Y}$ —* НБР *над Q с ненулевыми слоями на всюду плотном подмножестве Q. Тогда существование расслоения $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ равносильно постоянству размерности $\mathscr{X}$.*

Заметим, что пространство Q, удовлетворяющее условиям следствия, не обязано быть метризуемым. Несложно убедиться в том, что таким неметризуемым пространством является, например, плоскость Немыцкого (см. [7, 1.2.4, 1.4.5, 2.1.10]).

3.3.11. До конца этого параграфа мы главным образом рассматриваем постоянные НБР. Для таких НБР проблема существования расслоения $B(X_Q,Y_Q)$ тесно связана с вопросом о строгости включения $C\big(Q,B(X,Y)\big)\subset \operatorname{Hom}(X_Q,Y_Q)$, затронутым в 3.2.3.

Предложение. *Для банаховых пространств X и Y расслоение $B(X_Q,Y_Q)$ существует тогда и только тогда, когда $C\big(Q,B(X,Y)\big)=$*

$\mathrm{Hom}(X_Q, Y_Q)$. *Кроме того, если расслоение* $B(X_Q, Y_Q)$ *существует, то оно равно постоянному* НБР *со слоем* $B(X, Y)$.

$\lhd$ Докажем сначала второе утверждение.

Пусть расслоение $B(X_Q, Y_Q)$ существует. Соотношения

$$B(X_Q, Y_Q)(q) \subset B\big(X_Q(q), Y_Q(q)\big) = B(X, Y),$$

справедливые в любой точке $q \in Q$, и

$$C\big(Q, B(X, Y)\big) \subset \mathrm{Hom}(X_Q, Y_Q) = C\big(Q, B(X_Q, Y_Q)\big)$$

позволяют заключить, что каждый слой расслоения $B(X_Q, Y_Q)$ совпадает с пространством $B(X, Y)$. Кроме того, $C\big(Q, B(X, Y)\big)$ является непрерывной структурой как в $B(X, Y)_Q$, так и в $B(X_Q, Y_Q)$, а значит, эти два НБР равны (см. [3, 2.1.8, 2.1.9]). Отсюда сразу следует, что равенство $C\big(Q, B(X, Y)\big) = \mathrm{Hom}(X_Q, Y_Q)$ необходимо для существования $B(X_Q, Y_Q)$. Достаточность очевидна ввиду теоремы 3.3.2. $\rhd$

3.3.12. Следствие. *Пусть* X *и* Y *— банаховы пространства, причем пространство* X *конечномерно. Тогда существует расслоение* $B(X_Q, Y_Q)$ *и, кроме того, справедливы равенства* $B(X_Q, Y_Q) = B(X, Y)_Q$ *и* $\mathrm{Hom}(X_Q, Y_Q) = C\big(Q, B(X, Y)\big)$.

$\lhd$ Утверждение следствия вытекает из 3.3.2 и 3.3.11. $\rhd$

3.3.13. Теорема. *Пусть* X *— бесконечномерное банахово пространство и* Q *— топологическое пространство. Предположим, что для некоторого* НБР $\mathscr{Y}$ *над* Q *с ненулевыми слоями существует расслоение* $B(X_Q, \mathscr{Y})$. *Тогда пространство* Q *функционально дискретно.*

$\lhd$ Допустим, что в $C(Q)$ имеется не локально постоянная функция, и построим гомоморфизм H из X_Q в $\mathscr{Y}$ с разрывной поточечной нормой. Тем самым в силу критерия 3.3.2 теорема будет доказана.

Согласно лемме 3.1.15 существует слабо* непрерывная вектор-функция $w : Q \to X'$, поточечная норма которой ограничена и разрывна. Пусть q — точка разрыва функции $|\!|\!|w|\!|\!|$. Рассмотрим сечение $v \in C(Q, \mathscr{Y})$ с ненулевым значением $v(q)$ и определим отображение $H : q \in Q \mapsto H(q) \in B\big(X, \mathscr{Y}(q)\big)$, положив $H(q) : x \in X \mapsto \langle x \mid w(q) \rangle v(q)$ для всех $q \in Q$. Для любого постоянного сечения

$u \in C(Q, X_Q)$ имеет место равенство $H \otimes u = \langle u|w\rangle v \in C(Q, \mathscr{Y})$. Кроме того, $\|H\| = \|w\|\|v\|$. Из ограниченности $\|w\|$ следует локальная ограниченность $\|H\|$. Таким образом, $H \in \mathrm{Hom}(X_Q, \mathscr{Y})$ по теореме [3, 2.4.9]. Наконец, поскольку функция $\|w\|$ разрывна в точке q, а функция $\|v\|$ непрерывна и отлична от нуля в этой точке, $\|H\| = \|w\|\|v\| \notin C(Q)$. $\rhd$

Ниже (см. 3.3.16) будет показано, что в последней теореме необходимое условие существования операторного расслоения $B(X_Q, \mathscr{Y})$ (а именно, функциональная дискретность Q) является достаточным в том случае, когда банахово пространство X сепарабельно. В общем же случае рассматриваемое условие достаточным не является (см. предложение 3.3.17 применительно к банахову пространству X' и расслоению $\mathscr{Y} = \mathscr{R}$).

3.3.14. *Предложение.* *Пусть X и Y — банаховы пространства, $Y \neq \{0\}$, и пусть Q — топологическое пространство, не являющееся функционально дискретным. Следующие утверждения равносильны:*

- **(а)** *существует банахово расслоение $B(X_Q, Y_Q)$;*
- **(б)** $B(X, Y)_Q = B(X_Q, Y_Q)$;
- **(в)** $\mathrm{Hom}(X_Q, Y_Q) = C\big(Q, B(X, Y)\big)$;
- **(г)** *банахово пространство X конечномерно.*

$\lhd$ Равносильность (а), (б) и (в) доказана в 3.3.11, (г) следует из (а) в силу 3.3.13, (а) вытекает из (г) в силу 3.3.12. $\rhd$

3.3.15. *Предложение.* *Пусть $\mathscr{X}$ —* НБР *над функционально дискретным топологическим пространством Q. Предположим, что $C(Q, \mathscr{X})$ содержит счетное послойно плотное в $\mathscr{X}$ подмножество. Тогда для любого* НБР *$\mathscr{Y}$ над Q существует расслоение $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.*

$\lhd$ Пусть $\mathscr{U} \subset C(Q, \mathscr{X})$ — счетное послойно плотное в $\mathscr{X}$ множество. Рассмотрим произвольные НБР $\mathscr{Y}$ над Q, гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, точку $q \in Q$ и докажем непрерывность в q поточечной нормы H. Поскольку пространство Q функционально дискретно, найдется окрестность U точки q, на которой постоянны все функции $\|u\|$ и $\|H \otimes u\|$, $u \in \mathscr{U}$. Ввиду послойной плотности в $\mathscr{X}$ множества $\mathscr{U}$ имеет место равенство $\|H\|(p) = \sup\{\|H \otimes u\|(p) : u \in \mathscr{U},\ \|u\|(p) \leqslant 1\}$ для любой точки $p \in Q$, откуда следует, что функция $\|H\|$ постоянна на U и, в частности, непрерывна в точке q. Остается сослаться на теорему 3.3.2. $\rhd$

3.3.16. Следствие. *Пусть Q — произвольное топологическое пространство и X — сепарабельное бесконечномерное банахово пространство. Следующие утверждения равносильны:*

(а) *для любого* НБР $\mathscr{Y}$ *над* Q *существует расслоение* $B(X_Q,\mathscr{Y})$;
(б) *существует расслоение* $B(X_Q,\mathscr{R})$;
(в) *пространство Q функционально дискретно.*

$\lhd$ Импликация (а)$\to$(б) очевидна, (в) следует из (б) согласно 3.3.13, (а) вытекает из (в) в силу 3.3.15. $\rhd$

3.3.17. Предложение. *Пусть X — несепарабельное банахово пространство. Существует функционально дискретное нормальное топологическое пространство Q такое, что для любого* НБР $\mathscr{Y}$ *над* Q *с ненулевыми слоями не существует расслоения* $B(X_Q,\mathscr{Y})$.

$\lhd$ Обозначим через $\aleph$ множество всех счетных подмножеств пространства X, упорядоченное по включению. Понятно, что счетные подмножества $\aleph$ обладают верхними гранями и $\aleph$ не имеет наибольшего элемента.

Как показано в 3.1.13, пространство $Q := \aleph^\bullet$ нормально и функционально дискретно.

Пусть $\mathscr{Y}$ — произвольное НБР над Q с ненулевыми слоями. Определим гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(X_Q,\mathscr{Y})$ с разрывной поточечной нормой. Для этого рассмотрим сечение $v \in C(Q,\mathscr{Y})$, принимающее ненулевое значение в точке $\infty \in Q$. Поскольку пространство X не является сепарабельным, для любого элемента $\alpha \in \aleph$ существует функционал $x'_\alpha \in X'$ такой, что $x'_\alpha \equiv 0$ на $\operatorname{cl}\operatorname{lin}\alpha$ и $\|x'_\alpha\| = 1$. Пусть $H(\alpha) = v(\alpha) \otimes x'_\alpha$ для всех $\alpha \in \aleph$ и $H(\infty) = 0$. Тогда по теореме [3, 2.4.9] отображение H является гомоморфизмом, так как для любого постоянного сечения $u_x \equiv x$, $x \in X$, сечение $H \otimes u_x$ принимает нулевые значения на интервале $(\{x\},\infty]$, а значит, непрерывно. Вместе с тем поточечная норма H разрывна в точке ∞. Следовательно, согласно теореме 3.3.2 не существует расслоения $B(X_Q,\mathscr{Y})$. $\rhd$

3.3.18. Лемма. *Предположим, что $\aleph$ — направленное по возрастанию упорядоченное множество без наибольшего элемента, $\mathscr{X}$ —* НБР *над $\aleph^\bullet$ (см. 3.1.13) и в $C(\aleph^\bullet,\mathscr{X})$ существует такое послойно плотное подмножество, что равномощные ему подмножества $\aleph$ обладают верхними гранями. Тогда для любого* НБР $\mathscr{Y}$ *над* $\aleph^\bullet$ *существует расслоение* $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

$\lhd$ Пусть $\mathscr{U}$ — подмножество $C(\aleph^\bullet, \mathscr{X})$, удовлетворяющее условиям леммы.

Рассмотрим произвольное непрерывное банахово расслоение $\mathscr{Y}$ над $\aleph^\bullet$ и проверим непрерывность поточечной нормы произвольного гомоморфизма $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Тем самым в силу теоремы 3.3.2 наше утверждение будет доказано.

Для каждого $u \in \mathscr{U}$ выберем $\alpha_u \in \aleph$ так, чтобы $|\!|\!|u|\!|\!|(\alpha) = |\!|\!|u|\!|\!|(\infty)$ и $|\!|\!|H \otimes u|\!|\!|(\alpha) = |\!|\!|H \otimes u|\!|\!|(\infty)$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_u$ (см. замечание 3.1.13 (1)). Тогда для любого $u \in \mathscr{U}$ два последних равенства имеют место при всех $\alpha \geqslant \beta$, где β — верхняя грань множества $\{\alpha_u : u \in \mathscr{U}\}$. Поскольку множество $\mathscr{U}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$, значение нормы $|\!|\!|H|\!|\!|$ в любой точке $\alpha \in \aleph^\bullet$ вычисляется по формуле $|\!|\!|H|\!|\!|(\alpha) = \sup\{|\!|\!|H \otimes u|\!|\!|(\alpha) : u \in \mathscr{U},\ |\!|\!|u|\!|\!|(\alpha) \leqslant 1\}$. Из этой формулы сразу видно, что при $\alpha \geqslant \beta$ поточечная норма H принимает значение $|\!|\!|H|\!|\!|(\alpha) = |\!|\!|H|\!|\!|(\infty)$, а значит, непрерывна. $\rhd$

Следствие. *Для всякого банахова пространства X найдется недискретное нормальное топологическое пространство Q такое, что для любого* НБР *$\mathscr{Y}$ над Q существует расслоение $B(X_Q, \mathscr{Y})$.*

$\lhd$ Достаточно взять $Q = \aleph^\bullet$, где $\aleph$ — произвольный кардинал, превосходящий мощность X, и воспользоваться последней леммой. $\rhd$

3.3.19. Пусть X — банахово пространство, Q — топологическое пространство и $\mathscr{Y}$ — произвольное НБР над Q с ненулевыми слоями.

Приведенный ниже список результатов показывает, как зависит существование операторного расслоения $B(X_Q, \mathscr{Y})$ от свойств X и Q. Этот список не содержит дополнительных новых фактов и лишь подводит итог проведенным исследованиям.

- **(1)** Если банахово пространство X конечномерно, то расслоение $B(X_Q, \mathscr{Y})$ существует.
- **(2)** Предположим, что пространство X бесконечномерно.
  - **(2.1)** Пусть X сепарабельно. Расслоение $B(X_Q, \mathscr{Y})$ существует в том и только том случае, когда пространство Q функционально дискретно.
  - **(2.2)** Пусть X — не сепарабельное пространство.
    - **(2.2.1)** Если пространство Q не функционально дискретно, то расслоения $B(X_Q, \mathscr{Y})$ не существует.

(2.2.2) Если пространство Q функционально дискретно, то расслоение $B(X_Q, \mathscr{Y})$ может как существовать, так и не существовать (в том числе при дополнительном предположении, что пространство Q нормально и недискретно).

Утверждение (1) вытекает из 3.3.6, (2.1) следует из 3.3.13 и 3.3.16, (2.2.1) является следствием 3.3.13, а (2.2.2) вытекает из 3.3.17 и следствия 3.3.18.

3.4. Сопряженное банахово расслоение

В этом параграфе рассматриваются вопросы о существовании и свойствах расслоения $\mathscr{X}'$, сопряженного к данному расслоению $\mathscr{X}$.

В разделе 3.4.2 перечислены разнообразные необходимые и достаточные условия существования сопряженного расслоения. Все утверждения этого раздела являются прямыми следствиями результатов предыдущего параграфа. Предложение 3.4.3 утверждает существование сопряженного расслоения для НБР с гильбертовыми слоями.

Одним из естественных шагов при исследовании понятия сопряженного расслоения является установление нормативных соотношений двойственности между расслоениями $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}'$. Этой теме посвящен раздел 3.4.5. Предварительно в 3.4.4 обсуждается условие послойной нормировки слоев НБР значениями соответствующих гомоморфизмов. К сожалению, вопрос о том, всегда ли имеет место такая нормировка, мы были вынуждены оставить открытым, ограничившись перечислением ситуаций, в которых она заведомо имеется.

В разделах 3.4.6–3.4.9 рассматривается связь между сепарабельностью отдельного слоя банахова расслоения и конечномерностью его слоев или слоев сопряженного расслоения.

Разделы 3.4.10–3.4.15 посвящены изучению второго сопряженного расслоения. В круг исследуемых здесь вопросов входит существование расслоения $\mathscr{X}''$, изометричность рассматриваемых расслоений, а также вложение банахова расслоения во второе сопряженное.

Оставшаяся часть параграфа (3.4.16–3.4.18) содержит результаты, касающиеся рефлексивности слоев $\mathscr{X}(q)$ и $\mathscr{X}'(q)$, а также связи между существованием расслоения $\mathscr{X}'$ и просторностью расслоения $\mathscr{X}$ с рефлексивными слоями над экстремально несвязным компактом.

3.4.1. Определение. Пусть $\mathscr{X}$ — непрерывное банахово расслоение. Расслоение $B(\mathscr{X},\mathscr{R})$ (если оно существует) будем называть *сопряженным* к $\mathscr{X}$ и обозначать символом $\mathscr{X}'$. Если расслоение $\mathscr{X}'$ существует, мы говорим, что $\mathscr{X}$ *имеет сопряженное расслоение.*

Согласно теореме 3.3.2 сопряженное расслоение $\mathscr{X}'$ существует в точности тогда, когда поточечные нормы всех гомоморфизмов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{R}$ непрерывны.

3.4.2. *Предложение.* **(1)** *Всякое* НБР $\mathscr{X}$ *над* Q *с постоянной конечной размерностью имеет сопряженное расслоение* $\mathscr{X}'$. *Более того, если топологическое пространство* Q *вполне регулярно, то* $\mathscr{X}'(q) = \mathscr{X}(q)'$ *для всех* $q \in Q$.

(2) НБР $\mathscr{X}$ *с конечномерными слоями над бэровским вполне регулярным топологическим пространством, удовлетворяющим первой аксиоме счетности, имеет сопряженное расслоение в том и только том случае, если для каждого числа* $n = 0, 1, 2, \dots$ *множество* $\{\dim \mathscr{X} = n\}$ *является открыто-замкнутым.*

(3) *Предположим, что постоянное* НБР *со слоем* X *имеет сопряженное расслоение. Тогда последнее является постоянным* НБР *со слоем* X'.

(4) *Если постоянное* НБР *над* Q *с бесконечномерным слоем имеет сопряженное расслоение, то пространство* Q *является функционально дискретным (в частности, если при этом пространство* Q *вполне регулярно, то все его счетные подмножества замкнуты).*

(5) *Для любого несепарабельного банахова пространства* X *существует функционально дискретное топологическое пространство* Q *такое, что* НБР X_Q *не имеет сопряженного расслоения.*

(6) *Постоянное* НБР *над* Q *с бесконечномерным сепарабельным слоем имеет сопряженное расслоение тогда и только тогда, когда пространство* Q *функционально дискретно.*

(7) *Для всякого банахова пространства* X *существует недискретное нормальное топологическое пространство* Q *такое, что* НБР X_Q *имеет сопряженное расслоение.*

(8) *Если пространство* Q *не функционально дискретно, то для произвольного банахова пространства* X *следующие утверждения* *равносильны:*

- **(а)** *существует* $(X_Q)'$;
- **(б)** $(X')_Q = (X_Q)'$;
- **(в)** $C(Q, X') = \mathrm{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$;
- **(г)** *банахово пространство* X *конечномерно.*

$\lhd$ Утверждения (1)–(8) непосредственно вытекают из 3.3.6 и 3.3.7, 3.3.9, 3.3.11, 3.3.13, 3.3.17, 3.3.16, следствия 3.3.18 и предложения 3.3.14 соответственно. $\rhd$

Замечание. Из примеров 3.2.13 (1)–(3) с учетом 3.3.2 следует, что требование постоянства размерности в утверждении (1) последнего предложения существенно для наличия сопряженного расслоения.

3.4.3. *Лемма.* *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *над* Q *с гильбертовыми слоями (т. е. все слои* $\mathscr{X}$ *являются гильбертовыми пространствами). Для любого глобального сечения* u *расслоения* $\mathscr{X}$ *и любой точки* $q \in Q$ *положим* $h(u)(q) = \langle \cdot, u(q) \rangle \in \mathscr{X}(q)'$. *Тогда* $h[C(Q, \mathscr{X})] \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$. *Кроме того,* $h[C(Q, \mathscr{X})]$ *является непрерывной структурой в (дискретном) банаховом расслоении со слоями* $\mathscr{X}(q)'$ $(q \in Q)$.

$\lhd$ В силу [3, 2.4.4] включение $h[C(Q, \mathscr{X})] \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ следует из соотношений

$$\langle u_1 | h(u_2) \rangle = \langle u_1(\cdot), u_2(\cdot) \rangle = \frac{1}{2}\Big(|\!|\!| u_1 |\!|\!|^2 + |\!|\!| u_2 |\!|\!|^2 - |\!|\!| u_1 - u_2 |\!|\!|^2 \Big) \in C(Q),$$

$$|\!|\!| h(u_2) |\!|\!| = |\!|\!| u_2 |\!|\!|,$$

справедливых для любых $u_1, u_2 \in C(Q, \mathscr{X})$. Второе утверждение леммы вытекает из теоремы Рисса. $\rhd$

Предложение. *Предположим, что* $\mathscr{X}$ — НБР *с гильбертовыми слоями. Если существует расслоение* $\mathscr{X}'$, *то оно изометрично* $\mathscr{X}$ *(см. [3, 2.4.12]).*

$\lhd$ Пусть Q — топологическое пространство и $\mathscr{X}$ — НБР над Q с гильбертовыми слоями. Рассмотрим НБР $\mathscr{Y}$ со слоями $\mathscr{Y}(q) = \mathscr{X}(q)'$ $(q \in Q)$ и непрерывной структурой $\mathscr{C} = h[C(Q, \mathscr{X})]$ (см. лемму). В силу теоремы [3, 2.4.12(3)] расслоения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ изометричны. Из послойной плотности $\mathscr{C}$ в $\mathscr{Y}$ и соотношений $\mathscr{C} \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}) = C(Q, \mathscr{X}')$ следует, что в каждой точке $q \in Q$ слои $\mathscr{X}'(q)$ и $\mathscr{Y}(q)$ совпадают и $\mathscr{C}$ является непрерывной структурой в $\mathscr{X}'$, т. е. $\mathscr{X}' = \mathscr{Y}$. $\rhd$

3.4.4. Определение. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q. Будем говорить, что $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ *нормирует* $\mathscr{X}$ *на подмножестве* $D \subset Q$, если для любой точки $q \in D$ и любого элемента $x \in \mathscr{X}(q)$ имеет место равенство

$$\|x\| = \sup\{|H(q)x| : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R}),\ \|H\| \leqslant 1\}.$$

Говорим, что $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ *нормирует* $\mathscr{X}$, если $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$ на Q.

Нам не известны примеры НБР $\mathscr{X}$, для которых множество $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ не нормировало бы $\mathscr{X}$. (Более того, мы не знаем, существует ли ненулевое банахово расслоение с нулевым сопряженным.) В настоящий момент мы можем лишь указать некоторые классы банаховых расслоений $\mathscr{X}$, для которых $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ заведомо нормирует $\mathscr{X}$. К числу таких расслоений относятся следующие:

(1) НБР $\mathscr{X}$ над Q такое, что для каждой точки $q \in Q$ множество $\{H(q) : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})\} \subset \mathscr{X}(q)'$ нормирует $\mathscr{X}(q)$ и для любого гомоморфизма $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ существует гомоморфизм $G \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$, удовлетворяющий соотношениям $G(q) = H(q)$ и $\|G\| \in C(Q)$;

(2) НБР $\mathscr{X}$ над вполне регулярным топологическим пространством Q, удовлетворяющее следующим условиям: для каждой точки $q \in Q$ множество $\{H(q) : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})\} \subset \mathscr{X}(q)'$ нормирует $\mathscr{X}(q)$ и для любого гомоморфизма $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ найдется гомоморфизм $G \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ такой, что $G(q) = H(q)$ и поточечная норма G непрерывна в точке q;

(3) постоянное НБР;

(4) НБР с постоянной конечной размерностью над вполне регулярным топологическим пространством;

(5) НБР над компактным топологическим пространством или локально компактным хаусдорфовым топологическим пространством, имеющее счетное послойно плотное множество непрерывных сечений;

(6) НБР с конечномерными слоями над метризуемым локально компактным пространством;

(7) НБР с гильбертовыми слоями;

(8) НБР над регулярным экстремально несвязным топологическим пространством;

(9) НБР над $\overline{\mathbb{N}}$ с сепарабельным слоем в точке ∞;

(10) НБР над хаусдорфовым топологическим пространством с конечным числом неизолированных точек, имеющее сепарабельные слои в этих точках;

(11) расслоение, являющееся сопряженным к некоторому НБР.

$\lhd$ Доказательство того факта, что $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$ в случаях (1) и (2), можно без труда получить с помощью домножения гомоморфизма G на подходящий элемент $C(Q)$.

Случаи (3), (4) и (7) легко свести к случаю (1), воспользовавшись соответственно следствием 3.2.3, предложением 3.4.2 (1) и леммой 3.4.3.

Случай (5) для компактного топологического пространства Q рассмотрен в [12, 19.16], а случай локально компактного хаусдорфова (а следовательно, вполне регулярного) пространства Q сводится к случаю компактного пространства рассмотрением компактной окрестности произвольной точки $q \in Q$ и домножением гомоморфизма на непрерывную вещественную функцию, равную единице в точке q и зануляющуюся вне рассматриваемой окрестности. Аналогичными рассуждениями случай (6) можно свести к (5), привлекая утверждение [12, 19.5 (iii)].

(8): Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над регулярным экстремально несвязным топологическим пространством D. Рассмотрим экстремально несвязный компакт Q, содержащий D как всюду плотное подмножество, и продолжение $\beta\mathscr{X}$ по Стоуну — Чеху расслоения $\mathscr{X}$ на Q (см. [3, 1.1.4, 2.5.10]). Обозначим символом $\overline{\beta\mathscr{X}}$ просторную оболочку расслоения $\beta\mathscr{X}$ (см. [3, 3.1.5]). Каждому гомоморфизму $\overline{H} \in \mathrm{Hom}\big(\overline{\beta\mathscr{X}},\mathscr{R}\big)$ сопоставим отображение $H : q \in Q \mapsto \overline{H}(q)|_{\beta\mathscr{X}(q)}$, $q \in Q$. Из теоремы [3, 2.4.4] следует, что $H \in \mathrm{Hom}(\beta\mathscr{X},\mathscr{R})$. Применив теорему [3, 3.3.3 (1)] к расслоению $\overline{\beta\mathscr{X}}$, мы заключаем, что $\mathrm{Hom}(\beta\mathscr{X},\mathscr{R})$ нормирует $\beta\mathscr{X}$. Осталось заметить, что

$$\{H|_D : H \in \mathrm{Hom}(\beta\mathscr{X},\mathscr{R})\} \subset \mathrm{Hom}_D(\mathscr{X},\mathscr{R}).$$

(10): Если хаусдорфово топологическое пространство Q имеет конечное число неизолированных точек, то, как легко видеть, каждая из этих точек отделяется от остальных неизолированных точек открыто-замкнутой окрестностью. Следовательно, мы не нарушим общности, предположив, что пространство Q имеет единственную неизолированную точку q.

Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над Q с сепарабельным слоем $\mathscr{X}(q)$. Достаточно для произвольного функционала $x' \in \mathscr{X}(q)'$, $\|x'\| < 1$, построить гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, принимающий значение $H(q) = x'$ и удовлетворяющий неравенству $|||H||| \leqslant 1$.

Рассмотрим какую-нибудь счетную систему $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ линейно независимых элементов пространства $\mathscr{X}(q)$, линейная оболочка которой плотна в $\mathscr{X}(q)$, и, воспользовавшись теоремой Дюпре (см. [3, 2.3.5]), с каждым номером $n \in \mathbb{N}$ свяжем сечение $u_n \in C(Q, \mathscr{X})$, проходящее в точке q через x_n. По предложению [12, 18.1] для любого $n \in \mathbb{N}$ существует окрестность U_n точки q такая, что сечения $u_1, \ldots, u_n$ поточечно линейно независимы на U_n. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $p \in U_n$ определим функционал $y_n(p) : \operatorname{lin}\{u_1(p), \ldots, u_n(p)\} \to \mathbb{R}$ формулой $\langle u_i(p) | y_n(p) \rangle = \langle u_i(q) | x' \rangle$, $i = 1, \ldots, n$.

Поскольку $\|x'\| < 1$, в силу [4, лемма 7] каждую окрестность U_n точки q можно уменьшить до окрестности V_n так, чтобы были выполнены неравенства $\|y_n(p)\| \leqslant 1$ для всех $p \in V_n$. Без ограничения общности можно считать, что $V_n \supset V_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Далее, поточечная линейная независимость множества $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ на пересечении $V_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ позволяет нам для каждой точки $p \in V_\infty$ определить функционал $y_\infty(p) : \operatorname{lin}\{u_n(p) : n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$ как общее продолжение функционалов $y_n(p)$, $n \in \mathbb{N}$, т. е. положить $\langle u_n(p) | y_\infty(p) \rangle = \langle u_n(q) | x' \rangle$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\|y_\infty(p)\| \leqslant 1$ для $p \in V_\infty$.

Положим

$$H(p) = \begin{cases} 0, & p \notin V_1, \\ \overline{y}_n(p), & p \in V_n \backslash V_{n+1}, \\ \overline{y}_\infty(p), & p \in V_\infty, \end{cases}$$

где $\overline{y}_n(p)$, $1 \leqslant n \leqslant \infty$, — произвольное продолжение функционала $y_n(p)$ на весь слой $\mathscr{X}(p)$ с сохранением нормы. Ясно, что $H(q) = x'$ и $|||H||| \leqslant 1$.

Обозначим через $\mathscr{U}$ множество $\operatorname{lin}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, дополненное всеми сечениями с одноточечными носителями. Очевидно, множество $\mathscr{U}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$, и для любого элемента $u \in \mathscr{U}$ функция $\langle u | H \rangle$ постоянна в некоторой окрестности точки q, а значит, непрерывна. Следовательно, по теореме [3, 2.4.4] отображение H является гомоморфизмом.

(9): Частный случай (10).

(11): Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q, имеющее сопряженное расслоение. Из [3, 2.3.9] следует, что для любой точки $q \in Q$ и любого функционала $x' \in \mathscr{X}'(q)$ имеет место равенство

$$\|x'\| = \sup\big\{\langle u(q)|x'\rangle : u \in C(Q, \mathscr{X})\big\}.$$

С другой стороны, по теореме [3, 2.4.4] для каждого сечения $u \in C(Q, \mathscr{X})$ отображение $u'' : q \in Q \mapsto u(q)|_{\mathscr{X}'(q)}$ является гомоморфизмом из $\mathscr{X}'$ в $\mathscr{R}$, причем $\|u''\| \leqslant \|u\|$. Следовательно, $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}', \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}'$. $\triangleright$

3.4.5. Утверждение (3) следующего предложения дает положительный ответ на вопрос Г. Герца [12, Section 19, Problem 2, c. 231] для случаев расслоений 3.4.4 (1)–(11), а также расслоений с конечномерными слоями над бэровскими вполне регулярными топологическими пространствами (см. теорему 3.3.8 (1)).

Предложение. *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *над топологическим пространством* Q.

(1) *Предположим, что существует сопряженное расслоение* $\mathscr{X}'$. *Тогда для любой точки* $q \in Q$ *и любого элемента* x' *слоя* $\mathscr{X}'(q)$ *имеет место равенство*

$$\|x'\| = \sup\big\{\big|\langle u(q)|x'\rangle\big| : u \in C(Q, \mathscr{X}),\ \|u\| \leqslant 1\big\}.$$

В частности, для всякого сечения $u' \in C(Q, \mathscr{X}')$ *в векторной решетке* $C(Q)$ *выполняется соотношение*

$$|\!|\!|u'|\!|\!| = \sup\big\{\big|\langle u|u'\rangle\big| : u \in C(Q, \mathscr{X}),\ |\!|\!|u|\!|\!| \leqslant 1\big\}.$$

Предположим дополнительно, что $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ *нормирует* $\mathscr{X}$ *на всюду плотном подмножестве* Q.

(2) *Для всякого сечения* $u \in C(Q, \mathscr{X})$ *в векторной решетке* $C(Q)$ *выполняется соотношение*

$$|\!|\!|u|\!|\!| = \sup\big\{\big|\langle u|H\rangle\big| : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}),\ |\!|\!|H|\!|\!| \leqslant 1\big\}.$$

(3) *Равномерная норма любого сечения* $u \in C^b(Q, \mathscr{X})$ *представима в виде*

$$\|u\|_\infty = \sup\big\{\big\|\langle u|H\rangle\big\|_\infty : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}),\ |\!|\!|H|\!|\!| \leqslant 1\big\}.$$

$\lhd$ (1): Поскольку x' принадлежит $\mathscr{X}(q)'$ и множество $C(Q,\mathscr{X})$ послойно плотно в $\mathscr{X}$, найдется последовательность сечений $(u_n) \subset C(Q,\mathscr{X})$ такая, что $|\!|\!| u_n |\!|\!|(q) \leqslant 1$ и $\|x'\| - 1/n \leqslant \langle u_n(q)|x'\rangle \leqslant \|x'\|$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Остается заметить, что в силу леммы [3, 2.3.9] для каждого номера n существует сечение $v_n \in C(Q,\mathscr{X})$, удовлетворяющее соотношениям $v_n(q) = u_n(q)$ и $|\!|\!| v_n |\!|\!| \leqslant 1$.

(2): Обозначим через D всюду плотное подмножество Q, на котором $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$, рассмотрим произвольное сечение $u \in C(Q,\mathscr{X})$ и положим

$$\mathscr{F} = \bigl\{\langle u|H\rangle : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R}),\ |\!|\!| H |\!|\!| \leqslant 1\bigr\}.$$

Очевидно, $|\!|\!| u |\!|\!|$ служит верхней границей для $\mathscr{F}$. Если $g \in C(Q)$ — произвольная верхняя граница множества $\mathscr{F}$, то, как легко видеть,

$$g(q) \geqslant \sup_{f\in\mathscr{F}} f(q) = |\!|\!| u |\!|\!|(q)$$

для каждой точки $q \in D$, а значит, $g \geqslant |\!|\!| u |\!|\!|$.

(3): Пусть $u \in C^b(Q,\mathscr{X})$. Очевидно,

$$\|u\|_\infty \geqslant \sup\bigl\{\bigl\|\langle u|H\rangle\bigr\|_\infty : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R}),\ |\!|\!| H |\!|\!| \leqslant 1\bigr\}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ подберем гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$, $|\!|\!| H |\!|\!| \leqslant 1$, такой, что $\|u\|_\infty - \varepsilon < \|\langle u|H\rangle\|_\infty$, чем и докажем наше утверждение.

Рассмотрим точку $q \in Q$ такую, что $|\!|\!| u |\!|\!|(q) > \|u\|_\infty - \varepsilon$, и окрестность U этой точки, на которой $|\!|\!| u |\!|\!| > \|u\|_\infty - \varepsilon$. Поскольку $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$ на всюду плотном подмножестве Q, существует точка $p \in U$ такая, что

$$|\!|\!| u |\!|\!|(p) = \|u(p)\| = \sup\bigl\{\bigl|\langle u(p)|H(p)\rangle\bigr| : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R}),\ |\!|\!| H |\!|\!| \leqslant 1\bigr\},$$

откуда $\|u\|_\infty - \varepsilon < \bigl|\langle u(p)|H(p)\rangle\bigr|$ для некоторого гомоморфизма $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$, $|\!|\!| H |\!|\!| \leqslant 1$. Значит, $\|u\|_\infty - \varepsilon < \|\langle u|H\rangle\|_\infty$. $\rhd$

3.4.6. *Теорема.* *Пусть Q — вполне регулярное топологическое пространство и $q \in Q$ — неизолированная точка со счетной базой окрестностей. Предположим, что НБР $\mathscr{X}$ над Q имеет сопряженное расслоение $\mathscr{X}'$. Тогда сепарабельность слоя $\mathscr{X}(q)$ влечет конечномерность слоя $\mathscr{X}'(q)$.*

$\lhd$ Пусть слой $\mathscr{X}(q)$ сепарабелен, а слой $\mathscr{X}'(q)$ бесконечномерен. Мы построим гомоморфизм H из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{R}$ с разрывной поточечной нормой и тем самым получим противоречие (в силу теоремы 3.3.2).

Пусть множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ всюду плотно в $\mathscr{X}(q)$ и пусть (x'_n) — такая последовательность элементов $\mathscr{X}'(q)$, что (x'_n) слабо* сходится к нулю в $\mathscr{X}(q)'$ и $\|x'_n\| = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (см. 3.1.3). Будем считать, что $|\langle x_i|x'_n\rangle| < 1/n$ при $i = 1, \ldots, n$, так как этого можно добиться, перейдя к подпоследовательности. Воспользовавшись теоремой Дюпре (см. [3, 2.3.5]), для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим сечения $u_n \in C(Q, \mathscr{X})$ и $v_n \in C(Q, \mathscr{X}')$ такие, что $u_n(q) = x_n$ и $v_n(q) = x'_n$.

Пусть $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — некоторая база окрестностей точки q. С использованием хаусдорфовости Q по индукции очевидным образом строится новая база $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ окрестностей q, для каждого $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяющая следующим условиям: $V_{n+1} \subset V_n \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n$, разность $V_n \backslash V_{n+1}$ содержит некоторую точку q_n вместе с открытой окрестностью W_n и на V_n справедливы оценки $1/2 < \|\!|v_n|\!\| < 2$ и $|\langle u_i|v_n\rangle| < 1/n$ при $i = 1, \ldots, n$. Покажем, что для любого непрерывного сечения $u \in C(Q, \mathscr{X})$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n выполняются неравенства $|\langle u|v_n\rangle| < \varepsilon$ на V_n. Действительно, пусть $\|u(q) - x_k\| < \varepsilon/4$ и $1/l < \varepsilon/2$ для подходящих $k, l \in \mathbb{N}$. Подберем элемент V_m построенной базы окрестностей q, на котором $\|\!|u - u_k|\!\| < \varepsilon/4$. Тогда для всех $n \geqslant \max\{k, l, m\}$ на V_n имеют место соотношения

$$
\begin{gathered}
|\langle u|v_n\rangle| \leqslant |\langle u - u_k \mid v_n\rangle| + |\langle u_k|v_n\rangle| < \\
< \|\!|u - u_k|\!\|\,\|\!|v_n|\!\| + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4} \cdot 2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{gathered}
$$

Определим теперь отображение $H : p \in Q \mapsto H(p) \in \mathscr{X}'(p)$. Положим $H(p) = 0 \in \mathscr{X}(p)'$, если $p \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $H\big|_{W_n} = (f_n v_n)\big|_{W_n}$, где $f_n : Q \to [0, 1]$ — какая-нибудь непрерывная функция, равная единице в q_n и нулю вне W_n.

Функция $\langle u|v\rangle : Q \to \mathbb{R}$ непрерывна, поскольку она представляет собой поточечную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\langle u|v_n\rangle$, который равномерно сходится благодаря попарной дизъюнктности множеств W_n $(n \in \mathbb{N})$ и соотношениям $\operatorname{supp} f_n \subset W_n$ и $\sup_{W_n} |\langle u|v_n\rangle| \leqslant \sup_{V_n} |\langle u|v_n\rangle| \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, отображение H является гомоморфизмом, так как $\|\!|H|\!\|\leqslant 2$ (см. [3, 2.4.4]). Вместе с тем

$$\|\!|H|\!\|(q_n)=|f_n(q_n)|\|\!|v_n|\!\|(q_n)=\|\!|v_n|\!\|(q_n)>1/2$$

для всех $n\in\mathbb{N}$. Кроме того, $q_n\to q$ и $\|\!|H|\!\|(q)=0$. Следовательно, гомоморфизм H имеет разрывную поточечную норму. $\triangleright$

3.4.7. *Следствие.* *Пусть Q — вполне регулярное топологическое пространство и $q\in Q$ — неизолированная точка со счетной базой окрестностей. Предположим, что* НБР $\mathscr{X}$ *над Q с гильбертовыми слоями имеет сопряженное расслоение. Тогда сепарабельность слоя $\mathscr{X}(q)$ равносильна его конечномерности.*

Таким образом, если НБР $\mathscr{X}$ с гильбертовыми слоями над вполне регулярным топологическим пространством имеет сопряженное расслоение, то ни один слой $\mathscr{X}$ в неизолированной точке со счетной базой окрестностей не может быть изометричен ℓ^2.

3.4.8. *Предложение.* *Пусть $Q=\overline{\mathbb{N}}$ — одноточечная компактификация натурального ряда.* НБР $\mathscr{X}$ *над Q с сепарабельным слоем $\mathscr{X}(\infty)$ имеет сопряженное расслоение тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки ∞ размерность $\mathscr{X}$ конечна и постоянна.*

$\triangleleft$ Достаточность следует из предложения 3.4.2 (2). Установим необходимость. Предположим, что рассматриваемое расслоение $\mathscr{X}$ имеет сопряженное. Тогда в силу 3.4.6 пространство $\mathscr{X}'(\infty)$ конечномерно, откуда с учетом 3.4.4 (10) следует конечномерность слоя $\mathscr{X}(\infty)$. Положим $m=\dim\mathscr{X}(\infty)$ и рассмотрим сечения $u_1,\dots,u_m\in C(Q,\mathscr{X})$ с линейно независимыми значениями $u_1(\infty),\dots,u_m(\infty)$, существование которых гарантируется теоремой Дюпре (см. [3, 2.3.5]). По предложению [12, 18.1] сечения $u_1,\dots,u_m$ поточечно линейно независимы на некоторой окрестности U точки ∞, а значит, $\dim\mathscr{X}\geqslant m$ на U.

Допустим, что не существует окрестности точки ∞, в которой размерность $\mathscr{X}$ постоянна. Тогда имеется строго возрастающая последовательность натуральных чисел n_k такая, что $\dim\mathscr{X}(n_k)>m$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Для каждого номера $k\in\mathbb{N}$ подберем функционал $x'_k\in\mathscr{X}(n_k)'$, удовлетворяющий равенствам $\|x'_k\|=1$ и $\langle u_1(n_k)|x'_k\rangle=\dots=\langle u_m(n_k)|x'_k\rangle=0$. Введем отображение $H:q\in Q\mapsto H(q)\in$

$\mathscr{X}(q)'$ следующим образом:

$$H(q) = \begin{cases} x'_k, & q = n_k, \\ 0, & q \notin \{n_k : k \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Ясно, что $\|H\| \leqslant 1$. Обозначим через $\mathscr{U}$ множество $\operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_m\}$, дополненное всеми сечениями с одноточечными носителями. Очевидно, множество $\mathscr{U}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$, и для любого элемента $u \in \mathscr{U}$ функция $\langle u|H\rangle$ равна нулю в окрестности точки ∞, а значит, непрерывна. Следовательно, по теореме [3, 2.4.4] отображение H является гомоморфизмом, что с учетом 3.3.2 противоречит существованию $\mathscr{X}'$ ввиду разрывности поточечной нормы H. $\triangleright$

3.4.9. Одноточечную компактификацию Q натурального ряда можно расценивать как наиболее просто устроенное топологическое пространство, которое является, с одной стороны, классическим (т. е. вполне регулярным, метризуемым, компактным и т. д.), а с другой стороны, — нетривиальным (не дискретным, не антидискретным и т. п.). Как утверждает предложение 3.4.8, НБР $\mathscr{X}$ над Q с сепарабельным слоем $\mathscr{X}(\infty)$ имеет сопряженное расслоение в том и только в том случае, если размерность $\mathscr{X}$ постоянна и конечна в некоторой окрестности точки ∞. Кроме того, в силу предложения 3.4.2 (4) любое постоянное расслоение над Q с бесконечномерным слоем не имеет сопряженного. Покажем, что все же имеется НБР над Q с бесконечномерным слоем в ∞, обладающее сопряженным расслоением.

Пример. Мы построим НБР $\mathscr{X}$ над $Q = \overline{\mathbb{N}}$, удовлетворяющее следующим условиям:

- **(а)** все слои $\mathscr{X}$ над $\mathbb{N}$ конечномерны, а слой $\mathscr{X}(\infty)$ не сепарабелен;
- **(б)** существует $\mathscr{X}'$;
- **(в)** включение $\mathscr{X}'(\infty) \subset \mathscr{X}(\infty)'$ является строгим;
- **(г)** $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}) = C(Q, \mathscr{X}')$ нормирует $\mathscr{X}$.

Для каждого натурального числа n рассмотрим элемент $e_n = \chi_{\{n\}} \in \ell^\infty$ и координатный функционал $\delta_n \in (\ell^\infty)'$, $\langle x|\delta_n\rangle = x(n)$ для всех $x \in \ell^\infty$.

Обозначим символом $\widetilde{\ell^1}$ образ пространства ℓ^1 при естественном изометрическом вложении этого пространства в $(\ell^\infty)'$. Ясно, что $\delta_n \in \widetilde{\ell^1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $\mathscr{X}(\infty) = \ell^\infty$ и $\mathscr{X}(n) = \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Для каждого элемента $x \in \ell^\infty$ определим сечение u_x банахова расслоения $\mathscr{X}$ следующим образом:

$$u_x(q) = \begin{cases} \big(x(1), \dots, x(q), 0, 0 \dots\big), & q \in \mathbb{N}, \\ x, & q = \infty. \end{cases}$$

Легко видеть, что совокупность $\mathscr{C} = \{u_x : x \in \ell^\infty\}$ представляет собой непрерывную структуру в $\mathscr{X}$, в паре с которой мы будем рассматривать $\mathscr{X}$ как НБР.

Непосредственно из построения видно, что расслоение $\mathscr{X}$ обладает свойством (а).

(б), (в): Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $f \in \mathscr{X}(n)'$ положим

$$\langle x \mid \overline{f}\,\rangle = \big\langle (x(1), \dots, x(n), 0, 0, \dots) \mid f\,\big\rangle, \quad x \in \ell^\infty.$$

Ясно, что для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ соответствие $f \mapsto \overline{f}$ осуществляет изометрическое вложение $\mathscr{X}(n)'$ в $\widetilde{\ell^1}$.

Пусть H — произвольный гомоморфизм из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{R}$. Для любого элемента $x \in \ell^\infty$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \big\langle x \mid \overline{H(n)}\,\big\rangle &= \big\langle (x(1), \dots, x(n), 0, 0, \dots) \mid H(n)\,\big\rangle = \\ &= (H \otimes u_x)(n) \to (H \otimes u_x)(\infty) = \big\langle x \mid H(\infty)\big\rangle \end{aligned}$$

при $n \to \infty$. Стало быть, последовательность $\big(\overline{H(n)}\big) \subset \widetilde{\ell^1}$ слабо фундаментальна, а значит, сходится по норме, так как пространство $\widetilde{\ell^1}$ обладает свойством Шура (см. лемму 3.1.2). Отсюда следует, что $H(\infty)$ является пределом по норме последовательности $\big(\overline{H(n)}\big)$; в частности, $H(\infty) \in \widetilde{\ell^1}$ и $|\!|\!|H|\!|\!| \in C(Q)$. Таким образом, НБР $\mathscr{X}$ имеет сопряженное расслоение $\mathscr{X}'$, причем $\mathscr{X}'(\infty) \neq \mathscr{X}(\infty)'$ в силу включения $\mathscr{X}'(\infty) \subset \widetilde{\ell^1}$.

(г): Согласно 3.4.4 (1) достаточно для произвольного функционала $y \in \widetilde{\ell^1}$ предъявить такой гомоморфизм $H_y \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, что $H_y(\infty) = y$. Искомый гомоморфизм можно определить следующим образом:

$$H_y(q) = \begin{cases} y|_{\mathscr{X}(q)}, & q \in \mathbb{N}, \\ y, & q = \infty. \end{cases}$$

Включение $H_y \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ обеспечивается теоремой [3, 2.4.9] (применительно к $\mathscr{V} = \mathscr{C}$).

3.4.10. *Вторым сопряженным расслоением* к непрерывному банахову расслоению $\mathscr{X}$ назовем НБР $\mathscr{X}'' = (\mathscr{X}')'$ (если таковое существует). Ясно, что всякое НБР над дискретным топологическим пространством имеет второе сопряженное расслоение. Важным известным классом непрерывных банаховых расслоений, имеющих вторые сопряженные, являются просторные НБР над экстремально несвязными компактами (см. [3, 3.3]).

Прежде всего отметим, что существование $\mathscr{X}'$ не влечет существования $\mathscr{X}''$.

Предложение. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство с несепарабельным сопряженным (например, $X = \ell^1$). Тогда существует топологическое пространство Q такое, что постоянное* НБР X_Q *имеет сопряженное расслоение и не имеет второго сопряженного.*

$\lhd$ В силу предложения 3.4.2 (5) существует функционально дискретное топологическое пространство Q такое, что НБР $(X')_Q$ не имеет сопряженного расслоения. Согласно 3.4.2 (6) НБР X_Q имеет сопряженное расслоение $(X_Q)'$. По утверждению 3.4.2 (3) расслоение $(X_Q)'$ совпадает с $(X')_Q$ и тем самым не имеет сопряженного расслоения, т. е. не существует расслоения $(X_Q)''$. $\rhd$

Замечание. Примером банахова расслоения, имеющего сопряженное расслоение, но не имеющего второго сопряженного, является также НБР $\mathscr{X}$, построенное в примере 3.4.9. Действительно, сопоставим каждому номеру $n \in \mathbb{N}$ функционал $e''_n \in \mathscr{X}'(n)'$, связанный с элементом $e_n \in \mathscr{X}(n)$ правилом $\langle x'|e''_n\rangle = \langle e_n|x'\rangle$ для всех $x' \in \mathscr{X}'(n)$. Положим $G(n) = e''_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $G(\infty) = 0 \in \mathscr{X}'(\infty)'$. Понятно, что множество $\mathscr{D} = \left\{H_y : y \in \widetilde{\ell^1}\right\}$ послойно плотно в $\mathscr{X}'$. Применив теорему [3, 2.4.9] (для $\mathscr{V} = \mathscr{D}$), получим $G \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}', \mathscr{R})$. Вместе с тем $|\!|\!|G|\!|\!| \notin C(Q)$, а значит, в силу 3.3.2 НБР $\mathscr{X}'$ не имеет сопряженного расслоения, т. е. не существует $\mathscr{X}''$.

3.4.11. ***Предложение.*** **(1)** *Предположим, что постоянное* НБР *со слоем X имеет второе сопряженное расслоение. Тогда последнее является постоянным* НБР *со слоем X''.*

(2) *Если постоянное* НБР *над Q с бесконечномерным слоем имеет второе сопряженное расслоение, то пространство Q является функционально дискретным.*

(3) *Пусть X — бесконечномерное банахово пространство, имеющее сепарабельное сопряженное. Тогда существование второго сопряженного к расслоению X_Q равносильно функциональной дискретности топологического пространства Q.*

(4) *Для всякого банахова пространства X существует недискретное нормальное топологическое пространство Q такое, что* НБР *X_Q имеет второе сопряженное расслоение.*

(5) *Если пространство Q не является функционально дискретным, то для произвольного банахова пространства X следующие утверждения равносильны:*

(а) *существует $(X_Q)''$;*
(б) $(X'')_Q = (X_Q)''$;
(в) *существует $(X_Q)'$ и $C(Q, X'') = \mathrm{Hom}\big((X_Q)', \mathscr{R}\big)$;*
(г) *банахово пространство X конечномерно.*

$\triangleleft$ Утверждения (1), (2) и (5) являются простыми следствиями предложения 3.4.2.

Доказательство утверждения (4) можно получить с помощью простой модификации доказательства следствия 3.3.18, взяв в качестве Q такое недискретное нормальное топологическое пространство, что сопряженными расслоениями будут обладать постоянные НБР X_Q и $(X')_Q$ одновременно.

Докажем утверждение (3). Необходимость имеет место в силу (2). Переходя к обоснованию достаточности, заметим прежде всего, что пространство X само является сепарабельным. Из 3.4.2 (6) следует существование сопряженного расслоения $(X_Q)'$, которое согласно 3.4.2 (3) совпадает с расслоением $(X')_Q$. Повторное применение утверждения 3.4.2 (6) завершает доказательство. $\triangleright$

3.4.12. В отличие от ситуации, описанной в предложении 3.4.10, в следующем случае существование $\mathscr{X}'$ влечет существование $\mathscr{X}''$.

Предложение. *Если* НБР *с гильбертовыми слоями над топологическим пространством Q имеет сопряженное расслоение, то оно имеет и второе сопряженное. Более того, расслоения $\mathscr{X}$, $\mathscr{X}'$ и $\mathscr{X}''$ попарно изометричны.*

$\triangleleft$ Очевидно, если два НБР изометричны и одно из них имеет сопряженное расслоение, то и другое имеет сопряженное расслоение, причем эти сопряженные расслоения изометричны. Из этого факта и предложения 3.4.3 вытекает доказанное утверждение. $\triangleright$

3.4.13. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q, имеющее сопряженное расслоение. Отображение $\imath$, ставящее в соответствие каждой точке $q \in Q$ оператор $\imath(q) : x \in \mathscr{X}(q) \mapsto x''|_{\mathscr{X}'(q)}$, назовем *отображением двойного штрихования* для расслоения $\mathscr{X}$. (Здесь $x \mapsto x''$ — каноническое вложение во второе сопряженное пространство.)

Предложение. *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *над* Q, *имеющее сопряженное расслоение, причем* $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ *нормирует* $\mathscr{X}$. *Пусть, кроме того,* $\imath$ *— отображение двойного штрихования для* $\mathscr{X}$.

(1) *Для каждой точки* $q \in Q$ *оператор* $\imath(q)$ *является изометрическим вложением* $\mathscr{X}(q)$ *в* $\mathscr{X}'(q)'$.

(2) *Предположим, что расслоение* $\mathscr{X}$ *имеет второе сопряженное. Тогда отображение* $\imath$ *является изометрическим вложением* НБР $\mathscr{X}$ *в* $\mathscr{X}''$.

$\lhd$ (1): Пусть $q \in Q$ и $x \in \mathscr{X}(q)$. Тогда

$$\begin{aligned}\|x''|_{\mathscr{X}'(q)}\| = &= \sup\big\{\langle x'|x''\rangle : x' \in \mathscr{X}'(q),\ \|x'\| \leqslant 1\big\} = \\ &= \sup\big\{\langle x|x'\rangle : x' \in \mathscr{X}'(q),\ \|x'\| \leqslant 1\big\} = \\ &= \sup\big\{\langle x|v(q)\rangle : v \in C(Q, \mathscr{X}'),\ \|v(q)\| \leqslant 1\big\} = \\ &= \sup\big\{\langle x|v(q)\rangle : v \in C(Q, \mathscr{X}'),\ \|v\| \leqslant 1\big\} = \\ &= \sup\big\{\langle x|H\rangle : H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}),\ \|H(q)\| \leqslant 1\big\} = \\ &= \|x\| \quad \text{(см. [3, 2.3.9]).}\end{aligned}$$

(2): Вследствие утверждения (1) отображение $u \mapsto \imath \otimes u$ вкладывает пространство $C(Q, \mathscr{X})$ в $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}', \mathscr{R}) = C(Q, \mathscr{X}'')$ с сохранением поточечной нормы. Остается применить теорему [3, 2.4.4]. $\rhd$

3.4.14. *Предложение.* *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *с постоянной конечной размерностью над вполне регулярным топологическим пространством. Тогда существует расслоение* $\mathscr{X}''$, $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ *нормирует* $\mathscr{X}$ *и отображение двойного штрихования для* $\mathscr{X}$ *осуществляет изометрию* $\mathscr{X}$ *на* $\mathscr{X}''$.

$\lhd$ Согласно утверждению 3.4.2 (1) в рассматриваемом случае существует сопряженное расслоение $\mathscr{X}'$ и $\dim \mathscr{X}' = \dim \mathscr{X}$. Далее, из того же утверждения вытекает существование $\mathscr{X}''$ и равенство $\dim \mathscr{X}'' = \dim \mathscr{X}'$. Стало быть, для каждой точки q слои $\mathscr{X}(q)$ и $\mathscr{X}''(q)$ имеют одну и ту же конечную размерность. Остается воспользоваться предложением 3.4.13 (2) и теоремой [3, 2.4.12]. $\rhd$

3.4.15. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q, имеющее второе сопряженное расслоение. В следующих случаях отображение двойного штрихования для $\mathscr{X}$ является изометрией $\mathscr{X}$ на $\mathscr{X}''$:

(1) $\mathscr{X}$ — постоянное НБР с рефлексивным слоем;
(2) $\mathscr{X}$ имеет постоянную конечную размерность, а топологическое пространство Q вполне регулярно;
(3) $\mathscr{X}$ — НБР с гильбертовыми слоями;
(4) $\mathscr{X}$ — просторное НБР над экстремально несвязным компактом Q, и все слои $\mathscr{X}$ в неизолированных точках рефлексивны.

$\lhd$ Утверждения (1)–(4) непосредственно вытекают из 3.4.11 (1), 3.4.14, 3.4.12 и [3, 3.3.5 (1), 3.3.7] соответственно. $\rhd$

Заметим, что условия (2) и (4) влекут существование $\mathscr{X}''$ без дополнительных предположений.

3.4.16. ***Предложение.*** *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q, имеющее сопряженное расслоение $\mathscr{X}'$. Предположим, что $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$, и зафиксируем точку $q \in Q$. Если одно из банаховых пространств $\mathscr{X}(q)$ или $\mathscr{X}'(q)$ рефлексивно, то рефлексивно и другое пространство и имеет место равенство $\mathscr{X}'(q) = \mathscr{X}(q)'$.*

$\lhd$ Если пространство $\mathscr{X}(q)$ рефлексивно, то рефлексивно его сопряженное пространство $\mathscr{X}(q)'$, а значит, и пространство $\mathscr{X}'(q)$, являющееся банаховым подпространством $\mathscr{X}(q)'$.

Пусть теперь рефлексивно банахово пространство $\mathscr{X}'(q)$. Вместе с ним рефлексивно и его сопряженное пространство $\mathscr{X}'(q)'$. Согласно предложению 3.4.13 (1) слой $\mathscr{X}(q)$ изометрично вкладывается в $\mathscr{X}'(q)'$ и поэтому тоже является рефлексивным пространством.

Наконец, предположим рефлексивность $\mathscr{X}(q)$ и установим равенство $\mathscr{X}'(q) = \mathscr{X}(q)'$. Если банахово пространство $\mathscr{X}'(q)$ является собственным подпространством $\mathscr{X}(q)'$, то по теореме отделимости существует ненулевой функционал $x'' \in \mathscr{X}(q)''$, зануляющийся на $\mathscr{X}'(q)$, и тогда пространство $\mathscr{X}'(q)$ не нормирует элемент пространства $\mathscr{X}(q)$, соответствующий функционалу x''. В этом случае пространство $\mathscr{X}'(q)$ не нормирует $\mathscr{X}(q)$, что противоречит условию предложения. $\rhd$

3.4.17. *Предложение.* *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над экстремально несвязным компактом Q, имеющее сопряженное расслоение. Если слой $\mathscr{X}(q)$ в точке $q \in Q$ рефлексивен, то $\mathscr{X}(q) = \overline{\mathscr{X}}(q)$, где $\overline{\mathscr{X}}$ — просторная оболочка $\mathscr{X}$.*

$\lhd$ Из предложения 3.3.4 следует, что банаховы пространства $\mathscr{X}'(q)$ и $\overline{\mathscr{X}}'(q)$ изометричны. Поэтому из рефлексивности пространства $\mathscr{X}(q)$ вытекает рефлексивность $\overline{\mathscr{X}}'(q)$, откуда с учетом 3.4.4 (8) и 3.4.16 вытекает равенство $\overline{\mathscr{X}}'(q) = \overline{\mathscr{X}}(q)'$. Таким образом, если включение $\mathscr{X}(q) \subset \overline{\mathscr{X}}(q)$ является строгим, то по теореме отделимости существует ненулевой функционал в $\overline{\mathscr{X}}(q)' = \overline{\mathscr{X}}'(q)$, зануляющийся на $\mathscr{X}(q)$, что противоречит теореме 3.3.5. $\rhd$

3.4.18. *Теорема.* *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР с рефлексивными слоями над экстремально несвязным компактом. Тогда существование сопряженного расслоения $\mathscr{X}'$ равносильно просторности $\mathscr{X}$.*

$\lhd$ Из существования расслоения $\mathscr{X}'$ и предложения 3.4.17 немедленно вытекает просторность $\mathscr{X}$. С другой стороны, по теореме [3, 3.3.1] просторное НБР всегда имеет сопряженное расслоение. $\rhd$

3.5. Слабо непрерывные сечения

В данном параграфе вводится и исследуется понятие слабо непрерывного сечения банахова расслоения.

Поскольку слабо непрерывные сечения тесно связаны с гомоморфизмами сопряженного расслоения (которые, как известно, имеют локально ограниченную поточечную норму), одной из естественных задач является поиск условий, гарантирующих локальную ограниченность слабо непрерывных сечений. Решению этой задачи посвящены разделы 3.5.3–3.5.5.

В разделах 3.5.6–3.5.12 для различных классов банаховых расслоений исследуется вопрос о непрерывности слабо непрерывных сечений.

Разделы 3.5.13–3.5.21 посвящены поиску условий совпадения пространства слабо непрерывных сечений постоянного банахова расслоения и пространства слабо непрерывных вектор-функций со значениями в соответствующем слое.

В качестве итога исследований, проведенных в данном параграфе, в разделах 3.5.22 и 3.5.23 приведены списки условий непрерывности слабо непрерывных сечений, а также условий совпадения или несовпадения пространств слабо непрерывных сечений и слабо непрерывных вектор-функций.

3.5.1. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q и $D \subset Q$.

Определение. Сечение u над D расслоения $\mathscr{X}$ назовем *слабо непрерывным*, если $\langle u|H\rangle \in C(D)$ для всех $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$. Совокупность всех таких сечений обозначим символом $C_w(D, \mathscr{X})$.

Если НБР $\mathscr{X}$ имеет сопряженное расслоение, то $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}) = C(Q, \mathscr{X}')$, и в этом случае слабая непрерывность сечения u равносильна непрерывности функций $\langle u|u'\rangle$ для всех $u' \in C(Q, \mathscr{X}')$.

Очевидно, $C_w(D, \mathscr{X})$ является векторным подпространством пространства всех сечений над D расслоения $\mathscr{X}$ и содержит $C(D, \mathscr{X})$ в качестве векторного подпространства.

Отметим, что слабо непрерывное сечение не обязано быть непрерывным. Действительно, рассмотрев НБР $\mathscr{X}$, построенное в 3.4.9, и положив $u(n) = e_n$, $n \in \mathbb{N}$, и $u(\infty) = 0$, мы получим слабо непрерывное (см. замечание 3.4.10), но, очевидно, разрывное сечение расслоения $\mathscr{X}$.

3.5.2. *Лемма.* *Пусть X — банахово пространство, Q — топологическое пространство и D — подмножество Q. Предположим, что последовательность $(q_n) \subset D$ стремится к точке $q \in D$.*

(1) *Если пространство Q вполне регулярно и $u \in C_w(D, X_Q)$, то последовательность $\big(u(q_n)\big)$ w-w^*-сходится к $u(q)$.*

(2) *Для любого гомоморфизма $H \in \mathrm{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$ последовательность $\big(H(q_n)\big)$ слабо* сходится к $H(q)$.*

(3) *Если Q — вполне регулярное пространство Фреше — Урысона и точки q_n попарно различны и не равны q, то для любой w-w^*-сходящейся к нулю последовательности $(x_n) \subset X$ существует сечение $u \in C_w(D, X_Q)$, принимающее значения $u(q_n) = x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $u(q) = 0$.*

(4) *Если $u \in C_w(D, X)$, то последовательность $\big(u(q_n)\big)$ слабо сходится к $u(q)$.*

$\triangleleft$ (1): Как легко видеть, мы не нарушим общности, предположив, что точки q_n попарно различны и не равны q. Из 3.2.6 (4) следует, что для любой последовательности $(x'_n) \subset X'$, слабо* сходящейся к некоторому элементу $x' \in X'$, существует гомоморфизм

$H \in \mathrm{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$, принимающий значения $H(q_n) = x'_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $H(q) = x'$. Стало быть, $\langle u(q_n)|x'_n\rangle = \langle u|H\rangle(q_n) \to \langle u|H\rangle(q) = \langle u(q)|x'\rangle$.

Утверждения (2) и (4) очевидны.

(3): Пусть (W_n) и (f_n) — последовательности открытых подмножеств Q и непрерывных функций из Q в $[0,1]$, фигурирующие в формулировке леммы 3.2.5. Тогда сечение u над D, определенное формулой

$$u(p) = \begin{cases} f_n(p)x_n, & p \in D \cap W_n, \\ 0, & p \in D \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n, \end{cases}$$

является слабо непрерывным. В самом деле, возьмем произвольный гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$. Функция $\langle u|H\rangle$ непрерывна на каждом множестве $D \cap \mathrm{cl}\, W_n$, так как $\mathrm{cl}\, W_n \subset Q \setminus \mathrm{cl} \bigcup_{k\neq n} W_k$, и на пересечении D с последней (открытой) разностью $\langle u|H\rangle$ совпадает с $\langle x_n|H\rangle f_n$.

Допустим, что функция $\langle u|H\rangle$ разрывна в некоторой точке $p \in \big(\mathrm{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n\big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}\, W_n$. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, последовательность $(p_m) \subset D$ и строго возрастающая последовательность $(n_m) \subset \mathbb{N}$ такие, что $p \in \mathrm{cl}\{p_m : m \in \mathbb{N}\}$, $p_m \in W_{n_m}$ и $\big|\langle u|H\rangle(p_m)\big| > \varepsilon$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Поскольку Q — пространство Фреше — Урысона, можно выделить подпоследовательность (p_{m_k}), стремящуюся к p. Легко проверить, что последовательность $\big(u(p_m)\big)$, а значит, и ее подпоследовательность $\big(u(p_{m_k})\big)$ w-w^*-сходятся к нулю. Вместе с тем в силу (2) последовательность $\big(H(p_{m_k})\big)$ слабо* сходится к $H(p)$. Следовательно, $\varepsilon < \big|\langle u|H\rangle(p_{m_k})\big| \to \big|\langle u|H\rangle(p)\big| = 0$. Предположение о разрывности $\langle u|H\rangle$ в точке p привело нас к противоречию. Остается добавить, что на множестве $Q \setminus \mathrm{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ функция $\langle u|H\rangle$ тождественно равна нулю. $\rhd$

3.5.3. Пример. Существуют пространство Фреше — Урысона Q, банахово пространство X и сечение $u \in C_w(Q, X_Q)$ такие, что u не является локально ограниченным.

Рассмотрим пространство Q, построенное в примере 3.2.11.

Как видно из следствия 3.1.9 (2), пространство ℓ^∞ содержит некоторую w-w^*-сходящуюся к нулю последовательность (x_n), не сходящуюся по норме. Без ограничения общности можно считать, что $\|x_n\| \geqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (это условие достигается переходом к подпоследовательности и дальнейшим поэлементным домножением на подходящую константу). Положим $u\big((m,n)\big) := mx_n$ для всех $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $u(\infty) := 0 \in \ell^\infty$. Очевидно, сечение u не является локально ограниченным. Покажем, что $H \otimes u \in C(Q)$ для произвольного гомоморфизма $H \in \operatorname{Hom}\big((\ell^\infty)_Q, \mathscr{R}\big)$. По лемме 3.5.2 (2) для любого номера m последовательность $\big(H\big((m,n)\big)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ является слабо* сходящейся, откуда $(H \otimes u)\big((m,n)\big) = m\big\langle x_n \big| H\big((m,n)\big)\big\rangle \to 0$ при $n \to \infty$. Последнее означает непрерывность функции $H \otimes u$ $\big($см. описание (1) элементов $C(Q)$ в примере 3.2.11$\big)$.

3.5.4. *Предложение.* *Пусть $\mathscr{X}$ —* НБР *над топологическим пространством Q. Предположим, что* $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ *нормирует $\mathscr{X}$, а пространство Q удовлетворяет одному из следующих условий:*

(а) *Q вполне регулярно и удовлетворяет первой аксиоме счетности;*

(б) *Q локально псевдокомпактно.*

Тогда всякое слабо непрерывное глобальное сечение $\mathscr{X}$ локально ограничено.

$\triangleleft$ Предположим сначала, что Q удовлетворяет условию (а). Допустим, существует слабо непрерывное не локально ограниченное глобальное сечение u расслоения $\mathscr{X}$. В таком случае найдется точка $q \in Q$, в любой окрестности которой поточечная норма $|\!|\!|u|\!|\!|$ неограничена. Будем считать, что $|\!|\!|u|\!|\!|(q) = 0$ $\big($иначе, пользуясь теоремой Дюпре (см. [3, 2.3.5]), из u можно вычесть непрерывное сечение, принимающее в точке q значение $u(q)\big)$.

Поскольку пространство Q удовлетворяет первой аксиоме счетности, существует такая последовательность $(q_n) \subset Q$, что $|\!|\!|u|\!|\!|(q_n) > n^2$, $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$ и $q_n \to q$. Воспользовавшись условиями предложения, для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ подберем гомоморфизм $H_n \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, удовлетворяющий соотношениям $\langle u|H_n\rangle(q_n) = \|u(q_n)\|$ и $|\!|\!|H_n|\!|\!| \leqslant 2$.

Из следствия 3.2.6 (2) вытекает существование гомоморфизма $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ такого, что $H(q) = 0$ и $H(q_n) = \frac{1}{n} H_n(q_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, $\langle u|H\rangle(q_n) = \frac{1}{n}\langle u|H_n\rangle(q_n) = \frac{1}{n}\|u(q_n)\| > n$, что противоречит слабой непрерывности u, так как $q_n \to q$ и $\langle u|H\rangle(q) = 0$.

Предположим теперь, что пространство Q удовлетворяет условию (б). Обозначим пространство ограниченных гомоморфизмов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{R}$ символом $\operatorname{Hom}^b(\mathscr{X}, \mathscr{R})$. Зафиксируем произвольное слабо непрерывное сечение u расслоения $\mathscr{X}$ и для каждой точки $q \in Q$ определим линейный функционал $T_q : \mathrm{Hom}^b(\mathscr{X}, \mathscr{R}) \to \mathbb{R}$ по правилу $T_q(H) = \langle u(q) | H(q) \rangle$. Снабжая пространство $\mathrm{Hom}^b(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ равномерной нормой и рассматривая произвольное псевдокомпактное подмножество $U \subset Q$, мы видим, что $\|T_q\| \leqslant \|u(q)\|$ и, кроме того,

$$\sup_{q \in U} \|T_q(H)\| = \sup_{q \in U} \big| \langle u | H \rangle (q) \big| < \infty$$

для всех $H \in \mathrm{Hom}^b(\mathscr{X}, \mathscr{R})$. Согласно [3, 2.4.11] нормированное пространство $\mathrm{Hom}^b(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ является банаховым. Поэтому $\sup_{q \in U} \|T_q\| < \infty$ в силу принципа равномерной ограниченности. Остается привлечь соотношения

$$\|u(q)\| = \sup \Big\{ \big| \langle u(q) | H(q) \rangle \big| : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}),\ |\!|\!| H |\!|\!| \leqslant 1 \Big\} = \|T_q\|. \ \triangleright$$

Отметим, что дополнительное ограничение, накладываемое на пространство Q в последнем предложении, является существенным, даже если НБР $\mathscr{X}$ постоянно (см. 3.5.3).

3.5.5. *Следствие.* *Пусть X — банахово пространство и Q — топологическое пространство Q, удовлетворяющее условию (а) или (б) предложения 3.5.4. Тогда всякое слабо непрерывное глобальное сечение X_Q локально ограничено.*

$\triangleleft$ Утверждение немедленно вытекает из 3.5.4 и 3.4.4 (3). $\triangleright$

3.5.6. Замечание. Как следует из определения непрерывности сечения (см. [3, 2.1.2]), если Q — топологическое пространство, $\mathscr{U}$ — некоторое векторное пространство сечений над $D \subset Q$ расслоения $\mathscr{X}$ над Q и все элементы $\mathscr{U}$ имеют непрерывные поточечные нормы, то включение $C(D, \mathscr{X}) \subset \mathscr{U}$ влечет равенство $C(D, \mathscr{X}) = \mathscr{U}$.

Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ —* НБР *над топологическим пространством Q.*

(1) *Предположим, что расслоение $\mathscr{X}$ имеет сопряженное, и пусть $\imath$ — отображение двойного штрихования для $\mathscr{X}$. Для любого подмножества $D \subset Q$ отображение $u \mapsto \imath \otimes u$ осуществляет линейное вложение пространства локально ограниченных сечений $u \in C_w(D, \mathscr{X})$ в $\mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}', \mathscr{R})$. Если, кроме того, $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$, то упомянутое вложение сохраняет поточечную норму.*

(2) *Предположим, что* $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ *нормирует* $\mathscr{X}$ *и расслоение* $\mathscr{X}$ *имеет второе сопряженное. Если сечение* $u \in C_w(Q,\mathscr{X})$ *локально ограничено, то* $u \in C(Q,\mathscr{X})$.

$\triangleleft$ (1): Включение $\imath \otimes u \in \mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}',\mathscr{R})$ имеет место в силу теоремы [3, 2.4.9]. Если же $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$, то равенство $|\!|\!|\imath \otimes u|\!|\!| = |\!|\!|u|\!|\!|$ вытекает из 3.4.13 (1).

(2): Пусть сечение $u \in C_w(Q,\mathscr{X})$ локально ограничено. Тогда в силу утверждения (1) имеет место включение $\imath \otimes u \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}',\mathscr{R})$, которое вместе с равенством $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}',\mathscr{R}) = C(Q,\mathscr{X}'')$ дает непрерывность поточечной нормы гомоморфизма $\imath \otimes u$. Поскольку согласно (1) функции $|\!|\!|\imath \otimes u|\!|\!|$ и $|\!|\!|u|\!|\!|$ совпадают, последняя из них также непрерывна. Таким образом, векторное пространство $\mathscr{U}$ локально ограниченных сечений $u \in C_w(Q,\mathscr{X})$ состоит из сечений, имеющих непрерывные поточечные нормы, и содержит $C(Q,\mathscr{X})$. Приведенное выше замечание позволяет заключить, что $\mathscr{U} = C(Q,\mathscr{X})$. $\triangleright$

3.5.7. *Предложение.* *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *с постоянной конечной размерностью над вполне регулярным топологическим пространством* Q. *Для любого подмножества* $D \subset Q$ *имеет место равенство* $C_w(D,\mathscr{X}) = C(D,\mathscr{X})$.

$\triangleleft$ Сформулированное утверждение можно вывести из теоремы 3.2.12, предложения 3.5.6 (1) и замечания 3.5.6. $\triangleright$

3.5.8. *Следствие.* *Пусть топологическое пространство* Q *и* НБР $\mathscr{X}$ *над* Q *удовлетворяют условиям предложения 3.5.4. Тогда из существования* $\mathscr{X}''$ *следует равенство* $C_w(Q,\mathscr{X}) = C(Q,\mathscr{X})$.

$\triangleleft$ Утверждение вытекает из предложений 3.5.4 и 3.5.6 (2). $\triangleright$

3.5.9. *Предложение.* *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *с гильбертовыми слоями над произвольным топологическим пространством. Если глобальное сечение* $\mathscr{X}$ *локально ограничено и слабо непрерывно, то оно непрерывно.*

$\triangleleft$ Пусть Q — топологическое пространство и $\mathscr{X}$ — НБР над Q с гильбертовыми слоями. Зафиксируем локально ограниченное сечение $v \in C_w(Q,\mathscr{X})$ и воспользуемся отображением h из леммы 3.4.3, утверждающей, что $h[C(Q,\mathscr{X})] \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$. Таким образом, справедливы соотношения $\langle c|h(u)\rangle = \langle u|h(c)\rangle \in C(Q)$ для всех $c \in C(Q,\mathscr{X})$, из которых с учетом [3, 2.4.4] следует, что $h(u) \in$

$\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$. Значит, $\|u\|^2 = \langle u|h(u)\rangle \in C(Q)$. Наконец, поскольку $\|u-c\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle c|h(u)\rangle + \|u\|^2 \in C(Q)$ для всех $c \in C(Q,\mathscr{X})$, сечение u непрерывно. $\triangleright$

3.5.10. *Предложение.* *Пусть $\mathscr{X}$ —* НБР *с гильбертовыми слоями над топологическом пространством Q. Предположим, что Q удовлетворяет одному из условий* (а) *или* (б) *предложения 3.5.4 или является хаусдорфовым топологическим пространством, содержащим конечное число неизолированных точек. Тогда $C_w(Q,\mathscr{X}) = C(Q,\mathscr{X})$.*

$\triangleleft$ Утверждение предложения для случая пространства Q, удовлетворяющего условию (а) или (б) предложения 3.5.4, непосредственно вытекает из предложений 3.5.4 и 3.5.9 и леммы 3.4.3.

Пусть Q — хаусдорфово топологическое пространство, содержащее конечное число неизолированных точек. Как и в доказательстве 3.4.4 (10), не нарушая общности, будем считать, что пространство Q имеет единственную неизолированную точку q. В этом случае согласно замечанию 3.1.11 пространство Q является нормальным и, в частности, вполне регулярным.

Рассмотрим произвольное сечение $v \in C_w(Q,\mathscr{X})$ и покажем, что оно является локально ограниченным. (Тем самым в силу предложения 3.5.9 наше утверждение будет доказано.) Можно считать, что $v(q) = 0$, так как из v можно вычесть глобальное ограниченное непрерывное сечение со значением $v(q)$ в точке q, существующее по теореме Дюпре (см. [3, 2.3.5]).

Пусть h — отображение, фигурирующее в лемме 3.4.3. Вследствие этой леммы $\langle u|h(v)\rangle = \langle v|h(u)\rangle \in C(Q)$ для всех $u \in C(Q,\mathscr{X})$. Для каждой точки $p \in Q$ положим

$$w(p) = \begin{cases} h(v)(p), & \text{если } \|v(p)\| \leqslant 1, \\ \dfrac{h(v)(p)}{\|v(p)\|}, & \text{если } \|v(p)\| > 1. \end{cases}$$

Для любого сечения $u \in C(Q,\mathscr{X})$ имеют место соотношения $|\langle u|w\rangle| \leqslant |\langle u|h(v)| \in C(Q)$ и $\langle u|h(v)\rangle(q) = 0$, откуда следует, что $\langle u|w\rangle \in C(Q)$, поскольку q — единственная неизолированная точка Q. Стало быть, $w \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ в силу теоремы [3, 2.4.4], а значит, $\langle v|w\rangle \in C(Q)$. При этом

$$\langle v|w\rangle(p) = \begin{cases} \|v(p)\|^2, & \text{если } \|v(p)\| \leqslant 1, \\ \|v(p)\|, & \text{если } \|v(p)\| > 1 \end{cases}$$

для всех $p \in Q$ и, следовательно, $\|v\| \leqslant 1$ в окрестности $\{|\langle v|w\rangle| < 1\}$ точки q. Остальные точки пространства Q являются изолированными. Таким образом, сечение v локально ограничено. $\rhd$

3.5.11. *Лемма.* *Предположим, что НБР $\mathscr{X}$ над топологическим пространством Q имеет сопряженное расслоение. Для любых сечений $u \in C(Q, \mathscr{X})$ и $v \in C_w(Q, \mathscr{X}')$ вещественная функция $\langle u|v\rangle$ непрерывна.*

$\lhd$ Пусть $\imath$ — отображение двойного штрихования для $\mathscr{X}$. Тогда $\imath \otimes u \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}', \mathscr{R})$ согласно предложению 3.5.6 (1). Следовательно, $\langle u|v\rangle = \langle v \mid \imath \otimes u\rangle \in C(Q)$. $\rhd$

Предложение. *Предположим, что НБР $\mathscr{X}$ над топологическим пространством Q имеет сопряженное расслоение.*

(1) *Если сечение $v \in C_w(Q, \mathscr{X}')$ локально ограничено, то $v \in C(Q, \mathscr{X}')$.*

(2) *Если топологическое пространство Q удовлетворяет условию (а) или (б) предложения 3.5.4, то $C_w(Q, \mathscr{X}') = C(Q, \mathscr{X}')$.*

(3) *Если расслоение $\mathscr{X}$ имеет постоянную конечную размерность, то $C_w(Q, \mathscr{X}') = C(Q, \mathscr{X}')$.*

$\lhd$ (1): Пусть $v \in C_w(Q, \mathscr{X}')$ — локально ограниченное сечение. Согласно лемме $\langle u|v\rangle \in C(Q)$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$. Следовательно, $v \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ в силу теоремы [3, 2.4.9] и локальной ограниченности v. Остается вспомнить, что $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}) = C(Q, \mathscr{X}')$.

(2): Достаточно установить включение $C_w(Q, \mathscr{X}') \subset C(Q, \mathscr{X}')$. Пусть $v \in C_w(Q, \mathscr{X}')$. Согласно лемме $\langle u|v\rangle \in C(Q)$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$. Если пространство Q удовлетворяет условию 3.5.4 (а), то $v \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ в силу теоремы 3.2.10, а если Q удовлетворяет условию 3.5.4 (б), то $v \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ в силу теоремы [3, 2.4.7]. Таким образом, в любом из рассматриваемых случаев $v \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}) = C(Q, \mathscr{X}')$.

(3): Из леммы 3.5.11 и теоремы 3.2.12 следует, что $C_w(Q, \mathscr{X}') \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$. С другой стороны,

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}) = C(Q, \mathscr{X}') \subset C_w(Q, \mathscr{X}'). \ \rhd$$

3.5.12. *Теорема.* *Пусть X — банахово пространство и Q — вполне регулярное топологическое пространство Фреше — Урысона.*

(1) *Если X обладает свойством* WS, *то $C_w(D, X_Q) = C(D, X_Q)$ для всех подмножеств $D \subset Q$.*

(2) *Если $C_w(D, X_Q) = C(D, X_Q)$ для некоторого подмножества $D \subset Q$, содержащего какую-либо свою предельную точку (в частности, если $D = Q$ и пространство Q не дискретно), то банахово пространство X обладает свойством* WS.

Например, если топологическое пространство Q не дискретно, то равенство $C_w(Q, X_Q) = C(Q, X_Q)$ равносильно тому, что X обладает свойством WS.

$\lhd$ (1): Предположим, $C_w(D, X_Q) \neq C(D, X_Q)$ для некоторого подмножества $D \subset Q$ и покажем, что X не обладает свойством WS. Возьмем сечение $u \in C_w(D, X_Q)$, разрывное в точке $q \in D$. Будем считать, что $u(q) = 0$, так как иначе из u можно вычесть постоянное сечение со значением $u(q)$. Поскольку Q — пространство Фреше — Урысона, имеется последовательность точек $(q_n) \subset D$, стремящаяся к q, такая, что $|\!|\!|u|\!|\!|(q_n) > \varepsilon > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу леммы 3.5.2 (1) последовательность $\big(u(q_n)\big)$ w-w^*-сходится к $u(q) = 0$. Следовательно, X не обладает свойством WS.

(2): Предположим, что X не обладает свойством WS, и установим неравенство $C_w(D, X_Q) \neq C(D, X_Q)$ для любого подмножества $D \subset Q$, содержащего какую-либо свою предельную точку. Пусть $q \in D$ — предельная точка D. Поскольку Q — пространство Фреше — Урысона, существует последовательность $(q_n) \subset D\backslash\{q\}$, стремящаяся к q. Без ограничения общности можно считать, что $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$. Поскольку X не обладает свойством WS, имеется w-w^*-сходящаяся к нулю последовательность $(x_n) \subset X$, не сходящаяся к нулю по норме. Согласно лемме 3.5.2 (3) существует сечение $u \in C_w(D, X_Q)$, принимающее значения $u(q_n) = x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $u(q) = 0$. Очевидно, $u \notin C(D, X_Q)$. $\rhd$

3.5.13. *Лемма.* *Пусть X — банахово пространство, $(x_\alpha)_{\alpha \in \aleph} \subset X$ — слабо сходящаяся к нулю сеть и $(x'_\alpha)_{\alpha \in \aleph} \subset X'$ — ограниченная слабо* сходящаяся к нулю сеть. Предположим, что числовая сеть $\langle x_\alpha | x'_\alpha \rangle$ не сходится к нулю, и положим $Q := \aleph^\bullet$ (см. 3.1.13). Тогда включение $C_w(Q, X_Q) \subset C_w(Q, X)$ является строгим.*

$\lhd$ Рассмотрим вектор-функции $u : Q \to X$ и $H : Q \to X'$, удовлетворяющие равенствам $u(\alpha) = x_\alpha$, $H(\alpha) = x'_\alpha$ для всех $\alpha \in \aleph$ и $u(\infty) = 0$, $H(\infty) = 0$. В силу замечания 3.1.13 (2) функция u является слабо непрерывной, а функция H — слабо* непрерывной. Поскольку, кроме того, функция H ограничена, из теоремы [3, 2.4.9] вытекает, что $H \in \operatorname{Hom}\bigl(X_Q, \mathscr{R}\bigr)$. С другой стороны, вновь привлекая замечание 3.1.13 (2), мы заключаем, что функция $\langle u|H\rangle$ не является непрерывной, а значит, $u \notin C_w(Q, X_Q)$. $\triangleright$

3.5.14. *Предложение.* *Для всякого бесконечномерного банахова пространства X существует нормальное топологическое пространство Q такое, что включение $C_w(Q, X_Q) \subset C_w(Q, X)$ является строгим.*

$\triangleleft$ Утверждение предложения вытекает из 3.1.4 и 3.5.13. $\triangleright$

3.5.15. *Следствие.* *Пусть X — банахово пространство. Равенство $C_w(Q, X_Q) = C_w(Q, X)$ имеет место для любого топологического пространства Q тогда и только тогда, когда пространство X конечномерно.*

Заметим, что в случае конечномерного пространства X имеют место равенства $C(Q, X_Q) = C_w(Q, X_Q) = C_w(Q, X) = C(Q, X)$.

3.5.16. *Теорема.* *Пусть X — банахово пространство и Q — произвольное топологическое пространство.*

(1) *Если Q — пространство Фреше — Урысона и X обладает свойством DP^*, то $C_w(D, X_Q) = C_w(D, X)$ для любого подмножества $D \subset Q$.*

(2) *Пусть подмножество $D \subset Q$ таково, что в $C(Q)$ существует функция, не являющаяся локально постоянной на D. Тогда из равенства $C_w(D, X_Q) = C_w(D, X)$ следует, что пространство X обладает свойством DP^*.*

В частности, если Q — недискретное вполне регулярное пространство Фреше — Урысона, то равенство $C_w(Q, X_Q) = C_w(Q, X)$ равносильно тому, что X обладает свойством DP^*.

$\triangleleft$ (1): Пусть $C_w(D, X_Q) \neq C_w(D, X)$ для некоторого подмножества $D \subset Q$. Покажем, что X не обладает свойством DP^*. Возьмем вектор-функцию $u \in C_w(D, X) \setminus C_w(D, X_Q)$ и рассмотрим гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$ такой, что функция $\langle u|H\rangle$ разрывна в некоторой точке $q \in D$. Тогда в q разрывна и функция $\langle u - u_q \mid H - H_q\rangle$, где u_q и H_q — постоянные функции со значениями $u(q)$ и $H(q)$ соответственно. (Это справедливо в силу того, что функции $\langle u|H_q\rangle$, $\langle u_q|H\rangle$ и $\langle u_q|H_q\rangle$ непрерывны.) Поскольку Q — пространство Фреше — Урысона, найдется стремящаяся к q последовательность $(q_n) \subset D \setminus \{q\}$, которая удовлетворяет условию $|\langle u(q_n) - u(q) \mid H(q_n) - H(q)\rangle| > \varepsilon$

для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Вместе с тем в силу 3.5.2 (2), (4) последовательность $\big(u(q_n) - u(q)\big)$ слабо сходится к нулю, а последовательность $\big(H(q_n) - H(q)\big)$ слабо* сходится к нулю. Следовательно, X не обладает свойством DP*.

(2): Предположим, что пространство X не обладает свойством DP*. Рассмотрим слабо сходящуюся к нулю последовательность $(x_n) \subset X$ и слабо* сходящуюся к нулю последовательность $(x'_n) \subset X'$ такие, что $\langle x_n | x'_n \rangle$ не сходится к нулю. Переходом к подпоследовательностям и домножением всех элементов одной из них на $\pm\delta$ при подходящем $\delta \in \mathbb{R}$ можно добиться выполнения неравенств $\langle x_n | x'_n \rangle \geqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Дополнительно потребуем, чтобы $\langle x_{n+1} | x'_n \rangle + \langle x_n | x'_{n+1} \rangle \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, чего, в свою очередь, можно добиться попарным домножением на ± 1 элементов x_2 и x'_2, x_3 и x'_3 и т. д. Пусть вектор-функции $u : [0,1] \to X$ и $u' : [0,1] \to X'$ удовлетворяют равенствам $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$,

$$
\begin{aligned}
u\big(\lambda \tfrac{1}{n+1} + (1-\lambda)\tfrac{1}{n}\big) &= \lambda x_{n+1} + (1-\lambda) x_n, \\
u'\big(\lambda \tfrac{1}{n+1} + (1-\lambda)\tfrac{1}{n}\big) &= \lambda x'_{n+1} + (1-\lambda) x'_n
\end{aligned}
$$

для всех $\lambda \in [0,1]$ и $n \in \mathbb{N}$. По лемме 3.1.14 функция u слабо непрерывна, а функция u' слабо* непрерывна. Рассмотрим функцию $\langle u | u' \rangle : [0,1] \to \mathbb{R}$. Для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
\langle u | u' \rangle\big(\lambda \tfrac{1}{n+1} + (1-\lambda)\tfrac{1}{n}\big) =& \big\langle \lambda x_{n+1} + (1-\lambda) x_n \bigm| \lambda x'_{n+1} + (1-\lambda) x'_n \big\rangle = \\
=& \lambda^2 \langle x_{n+1} | x'_{n+1} \rangle + (1-\lambda)^2 \langle x_n | x'_n \rangle + \\
& + \lambda(1-\lambda)\big(\langle x_{n+1} | x'_n \rangle + \langle x_n | x'_{n+1} \rangle\big) \geqslant \\
\geqslant& \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 0 = \\
=& 2(\lambda - 1/2)^2 + 1/2 \geqslant \\
\geqslant& 1/2.
\end{aligned}
$$

Итак, $\langle u | u' \rangle(0) = 0$ и, кроме того, $\langle u | u' \rangle \geqslant 1/2$ на $(0,1]$. Теперь возьмем непрерывную функцию $g \in C(Q)$ такую, что ограничение $g|_D$ не постоянно в любой окрестности некоторой точки $q \in D$. Не нарушая общности, можно считать, что $g : Q \to [0,1]$ и $g(q) = 0$ (см. доказательство 3.1.15). Как легко видеть, $u \circ g|_D \in C_w(D, X)$ и $u' \circ g \in \operatorname{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$. Ясно, что функция $\big\langle (u \circ g)|_D \bigm| u' \circ g \big\rangle =$

$\langle u|u'\rangle \circ g|_D$ равна нулю в точке q и, кроме того, образ этой функции на каждой окрестности точки q пересекается с промежутком $[1/2, \infty)$. Следовательно, $(u \circ g)|_D \notin C_w(D, X_Q)$.

Последнее утверждение теоремы вытекает из утверждений (1) и (2) и предложения 3.1.12 (3). $\triangleright$

3.5.17. Следствие. *Пусть X — банахово пространство и Q — топологическое пространство, не являющееся функционально дискретным. В каждом из следующих случаев включение $C_w(Q, X_Q) \subset C_w(Q, X)$ является строгим:*

(1) *X — бесконечномерное рефлексивное банахово пространство;*

(2) *X — сепарабельное банахово пространство, не обладающее свойством Шура;*

(3) *X — банахово пространство, удовлетворяющее одному из условий 3.1.8 (3), (5) или (6) и не обладающее свойством Шура.*

$\triangleleft$ В силу утверждения (2) теоремы 3.5.16 достаточно показать, что в каждом из рассмотренных случаев пространство X не обладает свойством DP*. Нарушение этого условия в случаях (2) и (3) обеспечивается леммой 3.1.9 (3), а в случае (1) можно воспользоваться теоремой Джозефсона — Ниссенцвейга [10, XII], согласно которой на единичной сфере пространства X'' существует слабо* сходящаяся к нулю последовательность. $\triangleright$

3.5.18. Предложение. *Пусть X — банахово пространство и Q — функционально дискретное топологическое пространство. Если в X' существует счетное тотальное подмножество, то $C(Q, X) = C(Q, X_Q) = C_w(Q, X_Q) = C_w(Q, X)$.*

$\triangleleft$ Доказываемое утверждение вытекает из леммы 3.1.16, так как всегда справедливы соотношения

$$C(Q, X) = C(Q, X_Q) \subset C_w(Q, X_Q) \subset C_w(Q, X). \ \triangleright$$

3.5.19. Предложение. *Пусть X — произвольное банахово пространство. Предположим, что в X' нет счетного тотального множества. Тогда существует функционально дискретное топологическое пространство Q такое, что включение $C_w(Q, X_Q) \subset C_w(Q, X)$ является строгим.*

◁ Утверждение предложения вытекает из лемм 3.1.6 и 3.5.13 и замечания 3.1.13 (1). ▷

3.5.20. Следующее утверждение является прямым следствием предложений 3.5.18 и 3.5.19.

Теорема. *Пусть X — произвольное банахово пространство. Равенство $C_w(Q, X_Q) = C_w(Q, X)$ имеет место для всякого функционально дискретного топологического пространства Q в том и только том случае, если в X' существует счетное тотальное множество.*

3.5.21. *Следствие.* *Пусть Q — топологическое пространство и X — сепарабельное банахово пространство, не обладающее свойством Шура. Равенство $C_w(Q, X_Q) = C_w(Q, X)$ имеет место в том и только том случае, если топологическое пространство Q функционально дискретно.*

◁ Необходимость следует из 3.1.8 (2), леммы 3.1.9 (3) и теоремы 3.5.16 (2), а достаточность — из предложения 3.5.18. ▷

В завершение параграфа мы приведем списки условий непрерывности слабо непрерывных сечений, а также условий совпадения или несовпадения пространств слабо непрерывных сечений и слабо непрерывных вектор-функций. Эти списки не содержат дополнительных новых результатов и лишь подводят итог проведенным исследованиям.

3.5.22. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q. В каждом из перечисленных ниже случаев имеет место равенство $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$:

(1) $\mathscr{X}$ имеет постоянную конечную размерность, и пространство Q вполне регулярно;

(2) Q — экстремально несвязный компакт и расслоение $\mathscr{X}$ просторно;

(3) $\mathscr{X}$ — НБР с гильбертовыми слоями, и пространство Q удовлетворяет одному из следующих условий:

- **(а)** пространство Q вполне регулярно и удовлетворяет первой аксиоме счетности;
- **(б)** пространство Q локально псевдокомпактно;
- **(в)** пространство Q хаусдорфово и содержит конечное число неизолированных точек;

(4) $\mathscr{X} = X_Q$, где X — банахово пространство, обладающее свойством WS (см. 3.1.8), и Q — вполне регулярное пространство Фреше — Урысона;

(5) $\mathscr{X} = X_Q$, где X — такое банахово пространство, что X' содержит счетное тотальное множество (например, X сепарабельно или является сопряженным к сепарабельному банахову пространству), и Q — функционально дискретное пространство;

(6) $\mathscr{X}$ является сопряженным к некоторому НБР, и пространство Q удовлетворяет одному из условий (3) (a) или (3) (б);

(7) $\mathscr{X}$ — сопряженное расслоение к некоторому НБР, имеющему постоянную конечную размерность (заметим, что согласно предложению 3.4.2 (1) всякое НБР с постоянной конечной размерностью имеет сопряженное расслоение);

(8) $\mathscr{X}$ имеет второе сопряженно расслоение, $\mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$, и пространство Q удовлетворяет одному из условий (3) (a) или (3) (б).

$\lhd$ Равенство $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$ в случаях (1)–(8) непосредственно вытекает из 3.5.7, [3, 3.3.7 (1)], 3.5.10, 3.5.12 (1), 3.5.18, предложения 3.5.11 (2), предложения 3.5.11 (3) и следствия 3.5.8 соответственно. $\rhd$

3.5.23. Пусть X — банахово пространство и Q — топологическое пространство.

В следующих случаях пространства $C_w(Q, X_Q)$ и $C_w(Q, X)$ совпадают:

(1) пространство X конечномерно;

(2) X обладает свойством DP* (см. 3.1.9), и Q — пространство Фреше — Урысона;

(3) в X' существует счетное тотальное подмножество, и пространство Q функционально дискретно.

В следующих случаях включение $C_w(Q, X_Q) \subset C_w(Q, X)$ является строгим:

(4) X не обладает свойством DP*, и пространство Q не является функционально дискретным;

(5) пространство X бесконечномерно, и Q — топологическое пространство, о котором идет речь в предложении 3.5.14;

(6) в X' не существует счетного тотального подмножества, и

Q — функционально дискретное топологическое пространство, о котором идет речь в предложении 3.5.19.

$\lhd$ Для проверки перечисленных утверждений в случаях (1)–(6) достаточно воспользоваться результатами 3.5.15, 3.5.16 (1), 3.5.18, 3.5.16 (2), 3.5.14 и 3.5.19 соответственно. $\rhd$

Литература

1. Архангельский А. В., Пономарёв В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях.—М.: Наука, 1974.

2. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.

3. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.—С. 63–211.

4. Коптев А. В. Критерий рефлексивности слоев банахова расслоения // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 4.—С. 851–857.

5. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения. — Новосибирск: Наука, 1985.

6. Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа.—Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.

7. Энгелькинг Р. Общая топология.—М.: Мир, 1986.

8. Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Positive Operators.—New York: Academic Press, 1985.

9. Burden C. W. and Mulvey C. J. Banach spaces in categories of sheaves // Applications of Sheaves.—Berlin: Springer-Verlag, 1979. —P. 169–196.—(Lecture Notes in Math., **753**.)

10. Diestel J. Sequences and Series in Banach Spaces.—Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1984.—(Graduate Texts in Mathematics, **92**.)

11. Fourman M. P., Mulvey C. J., and Scott D. S. Applications of Sheaves.—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—(Lecture Notes in Math., **753**.)

12. Gierz G. Bundles of Topological Vector Spaces and Their Duality. —Berlin: Springer-Verlag, 1982.—(Lecture Notes in Math., **955**.)

13. Gutman A. E. Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. I. Continuous Banach bundles // Siberian Adv. Math.— 1993.—V. 3, No. 3.—P. 1–55.

14. Gutman A. E. Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. II. Measurable Banach bundles // Siberian Adv. Math.—1993.—V. 3, No. 4.—P. 8–40.

15. Gutman A. E. Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. III. Approximating sets and bounded operators // Siberian Adv. Math.—1994.—V. 4, No. 2.—P. 54–75.

16. Gutman A. E. Locally one-dimensional K-spaces and σ-distributive Boolean algebras // Siberian Adv. Math.—1995.—V. 5, No. 2.—P. 99–121.

17. Hofmann K. H. Representations of algebras by continuous sections // Bull. Amer. Math. Soc.—1972.—V. 78.—P. 291–373.

18. Hofmann K. H. and Keimel K. Sheaf theoretical concepts in analysis: bundles and sheaves of Banach spaces, Banach $C(X)$-modules // Applications of Sheaves.—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—P. 414–441.—(Lecture Notes in Math., **753**.)

19. Kitchen J. W. and Robbins D. A. Gelfand Representation of Banach Modules.—Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1982.—(Dissertationes Mathematicae, No. 203.)

20. Schochetman I. E. Kernels and integral operators for continuous sums of Banach spaces // Mem. Amer. Math. Soc.—1978.—V. 14, No. 202.—P. 1–120.

21. Wnuk W. Banach Lattices with Properties of the Schur Type. A Survey.—Bari: Dipartimento di Matematica dell'Università di Bari, 1983.

Глава 4

Бесконечно малые в векторных решетках

Э. Ю. Емельянов

С момента опубликования известной работы А. Робинсона [23] было получено большое число приложений инфинитезимального анализа в различных областях математики. Список этих приложений очень велик даже в области функционального анализа. Некоторые из них (относящиеся к теории векторных решеток) будут рассмотрены ниже. Возникает вопрос: где можно эффективно использовать инфинитезимальный анализ? Безусловно, методы инфинитезимального анализа не являются универсальными и не могут быть достаточно эффективными в решении широкого круга задач. Вместе с тем, что нового дает использование инфинитезимального анализа? Частичный ответ на этот вопрос можно найти в работе [17]. Грубо говоря, нестандартные методы эффективно работают в тех случаях, когда в постановке задачи присутствуют такие понятия, как компактность или ультрафильтр. С другой стороны, эти методы большей частью бесполезны в решении чисто алгебраических проблем.

Основным объектом нашего исследования будет теория векторных решеток и операторов, действующих на них. Мы постараемся убедить читателя в том, что теория векторных решеток — естественная сфера применения инфинитезимальных методов.

Векторные решетки, снабженные нормой (или другими специальными структурами), изучались многими авторами (см., например, [5, 11, 18]) в контексте инфинитезимального анализа. Целью настоящей работы является развитие инфинитезимального подхода к исследованию векторных решеток. В дальнейшем мы будем следовать работам [6–10] с необходимыми изменениями и будем рассматривать только вещественные векторные решетки.

Структура данной главы такова. Параграф 4.0 служит введением в инфинитезимальный анализ Робинсона и его приложения к нормированным пространствам. В конце параграфа приводится короткое введение в теорию решеточно нормированных пространств (для более подробного ознакомления читатель может обратиться к работам [13–16]).

Параграфы 4.1 и 4.2 в основном посвящены инфинитезимальному подходу к представлениям векторных решеток. Оказывается, что нестандартный анализ дает новые, более точные и естественные, нежели стандартные, возможности для представления векторных решеток с помощью функциональных пространств. Мы показываем ниже, что для построения представляющего топологического пространства можно рассматривать элементы решетки (точнее, их нестандартные расширения), не используя понятия ультрафильтра или простого идеала (уже содержащиеся в построении Робинсона).

В параграфах 4.3–4.7 мы занимаемся инфинитезимальными интерпретациями важнейших понятий теории векторных решеток.

Мы укажем нестандартное построение условного пополнения архимедовой векторной решетки. Также рассмотрим проблему существования $*$-инвариантного гомоморфизма на векторных решетках и булевых алгебрах. В нестандартном расширении векторной решетки определяются некоторые типы нестандартных элементов векторных решеток: конечные элементы, (r)- и (o)-бесконечно малые, предоколостандартные и околостандартные элементы и т. д. При этом различные условия, налагаемые на векторную решетку, можно интерпретировать как некоторые отношения между выделенными типами элементов. На этом пути мы получим нестандартные критерии архимедовости, условной полноты, атомности векторной решетки, а также критерии порядковой непрерывности линейного оператора и т. д. Эти критерии очень легко использовать. Мы также даем нестандартное построение условного пополнения архимедовой векторной решетки и рассматриваем проблему существования $*$-инвариантного гомоморфизма векторных решеток и булевых алгебр.

В параграфах 4.8–4.11, основываясь на понятиях параграфов 4.3–4.7, мы следуем схеме Люксембурга для введения и изучения двух видов нестандартных оболочек векторной решетки: порядковую и регулярную. Элементарная теория этих оболочек развита в параграфах 4.8 и 4.9. В 4.10 мы определим и изучим понятия нестандартной оболочки решеточно нормированного пространства и пространства, ассоциированного с порядковой оболочкой разложимого решеточно нормированного пространства. Параграф 4.11 посвящен обсуждению нестандартного построения порядкового пополнения разложимого решеточно нормированного пространства. Схема основана на вложении решеточно нормированного пространства в ассоциированное пространство Банаха — Канторовича. Мы также изучим расширения внутренних мажорируемых операторов, имеющих стандартные (o)-непрерывные мажоранты на ассоциированных пространствах Банаха — Канторовича.

Относительно векторных решеток и операторов на них, мы следуем определениям и обозначениям монографий [1, 21, 24, 28]. Решеточно нормированные пространства изучаются только в параграфах 4.10 и 4.11. При этом мы применяем определения и обозначения из [13–16]. В текущей главе используются некоторые (стандартные и нестандартные) результаты о булевых алгебрах и измеримых пространствах из [2, 4, 25]. По поводу нестандартного анализа Робинсона и его приложений мы отсылаем читателя к работам [2, 12, 20, 27]. Остальные пояснения сделаны по ходу изложения.

4.0. Предварительные сведения

Дадим краткое введение в инфинитезимальный анализ Робинсона и напомним некоторые ключевые факты без доказательства. Уровень формализма выберем таким, чтобы не загружать текст лишними деталями изложения. В основном мы будем следовать книгам [2, 12, 20]. После этого мы напомним некоторые хорошо известные результаты, относящиеся к применению инфинитезимального анализа к теории нормированных пространств и операторов на них. Более подробно о приложениях читатель может узнать из [2, 12, 27]. В конце главы мы коснемся теории решеточно нормированных пространств. Здесь мы будем опираться на [13–16]. Понятие фактора решеточно нормированного пространства и предложение 4.0.14 являются новыми (см. также [9, лемма 5.7]).

4.0.1. Пусть S — множество. Суперструктурой над S называется множество $V(S) := \bigcup_n V_n(S)$, где $V_n(S)$ определяется индуктивно следующим образом:

$$V_1(S) := S,$$

$$V_{n+1}(S) := V_n(S) \cup \big\{X : \, X \subseteq V_n(S)\big\}.$$

Суперструктуры являются фрагментами универсума фон Неймана и могут предоставлять базу для различных математических теорий в зависимости от выбора основного множества. Например, суперструктуры над полем вещественных чисел могут использоваться для построения основания математического анализа. В дальнейшем, рассматривая суперструктуры над некоторым множеством S, мы будем предполагать, что $\mathbb{R} \subseteq S$.

Нам потребуется некоторый формальный язык L. Алфавит L содержит:

(1) переменные: малые и заглавные буквы, возможно с индексами;

(2) символы $=$ и $\in$ для равенства и отношения принадлежности;

(3) символы для пропозициональных связок и кванторов;

(4) вспомогательные символы.

Атомными формулами языка L будут выражения вида $x = y$ или $x \in y$. Произвольные формулы получаются из атомных применением пропозициональных связок и ограниченных кванторов по множествам (т. е. в форме $\forall x \in y$ и $\exists x \in y$).

Для произвольного множества S, на котором заданы некоторые (частичные) операции и отношения, определим понятие языка $L_{V(S)}$ суперструктуры $V(S)$. Для простоты изложения мы построим язык $L_{V(S)}$ в некотором простом частном случае.

Пусть, например, $S = E \cup \mathbb{N}$, где E — решетка. Множество E снабжено операциями $\wedge$, $\vee$ и отношением $\widehat{\leq}$; множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел — операциями $+$, $\cdot$ и отношением $\leq$. В этом случае язык $L_{V(S)}$ получается из L расширением алфавита символами $\wedge$, $\vee$, $+$ и $\cdot$ для операций и $\widehat{\leq}$, $\leq$ для отношений. Список атомных формул расширяется выражениями вида $t_1 \vee t_2 = t_3$, $t_1 \cdot t_2 = t_3$, $t_1 \leq t_2$ и т. д., где t_1, t_2, t_3 — термы языка L. Любую формулу языка $L_{V(S)}$ можно интерпретировать в суперструктуре $V(S)$. Например, формула $\Psi(x, y, z) := x + y \leq z$ выполнена на тройке (a, b, c) элементов из $V(S)$ тогда и только тогда, когда $a, b, c \in \mathbb{N}$ и $a + b \leq c$. Очевидно, что интерпретация произвольных формул языка $L_{V(S)}$ также не представляет никаких сложностей.

В дальнейшем базовое множество S можно будет выбрать в зависимости от контекста изложения. Будем предполагать, что множество может содержать различные объекты: вещественные и комплексные числа, векторные пространства, векторные решетки и т. д. Изложение должно быть таким, чтобы, если это необходимо, имелась возможность переписать его в терминах формального языка $L_{V(S)}$. На протяжении данной части термин «интерпретация» означает естественное представление в соответствующей суперструктуре.

4.0.2. Пусть S — множество, снабженное операциями и отношениями (которые не обязательно всюду определены). Тогда существуют расширение $^*S$ множества S и вложение $* : V(S) \hookrightarrow V(^*S)$ удовлетворяющие следующим условиям.

Принцип расширения. *Множество $^*S$ — собственное расширение S. Более того, $^*S$ имеет то же множество операций и отношений, что и S. Кроме того, $^*x = x$ для каждого $x \in S$.*

Принцип переноса. *Пусть $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — формула языка $L_{V(S)}$ и $A_1, A_2, \dots, A_n$ — элементы суперструктуры $V(S)$. Тогда утверждение*

$$\psi(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

об элементах из $V(S)$ истинно тогда и только тогда, когда утверждение

$$\psi(^*A_1, ^*A_2, \dots, ^*A_n)$$

об элементах из $V(^*S)$ истинно.

Построение расширения $^*S$ и вложения $* : V(S) \hookrightarrow V(^*S)$ с требуемыми свойствами можно найти, например, в [2]. Для удобства мы будем предполагать, что вложение $*$ является тождественным и тем самым $V(S) \subseteq V(^*S)$.

Определение. Суперструктуру $V(^*S)$ называют *нестандартным расширением* $V(S)$, если вложение $V(S) \subseteq V(^*S)$ удовлетворяет принципам переноса и расширения.

В дальнейшем, рассматривая некоторую суперструктуру, мы будем опускать основное множество. Это множество может быть выбрано в зависимости от контекста. Мы будем обозначать рассматриваемую суперструктуру через M.

Определение. Пусть $^*M$ — нестандартное расширение суперструктуры M. Элемент $x \in {}^*M$ называется

(1) *стандартным*, если $x = {}^*B$ для некоторого $B \in M$;
(2) *внутренним*, если $x \in {}^*B$ для некоторого $B \in M$;
(3) *внешним*, если $x \notin {}^*B$ для всех $B \in M$.

Заметим, что каждое стандартное множество является внутренним и каждый элемент внутреннего множества также внутренний. Следующее полезное утверждение вытекает из принципа переноса.

Внутренний принцип определения. *Пусть заданы формула $\psi(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$ языка L_M и некоторые внутренние множества*

$A, A_1, A_2, \dots, A_n$. Тогда множество $\big\{x \in A : \psi(x, A_1, A_2, \dots, A_n)\big\}$ также является внутренним.

Известно, что нестандартное расширение ${}^*M$ суперструктуры M можно выбрать так, чтобы были выполнены следующие принципы.

Общий принцип насыщения. *Для любого центрированного семейства $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ внутренних множеств, имеющего стандартную мощность $\big($т. е. $\mathrm{card}(\Gamma) < \mathrm{card}(M)\big)$, выполнено следующее условие: $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \neq \varnothing$.*

В дальнейшем мы будем иметь дело только с нестандартными расширениями, удовлетворяющими общему принципу насыщения. Такие нестандартные расширения называются *полинасыщенными*.

4.0.3. Пусть X — элемент суперструктуры M. Обозначим через $\mathscr{F}(X)$ семейство конечных подмножеств множества X. Напомним, что элементы ${}^*\mathscr{F}(X)$ это в точности подмножества $A \subseteq {}^*X$, для которых существуют внутренняя функция f и элемент $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ такие, что $\mathrm{dom}\, f = \{1, \dots, \nu\}$ и $\mathrm{im}\, f = A$. Такие подмножества ${}^*X$ называются *гиперконечными* и обозначаются аналогично конечным семействам, например, $\{x_n\}_{n=1}^{\nu}$.

Лемма. *Пусть $X \in M$ — бесконечное множество и $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Тогда существует внутренняя функция f такая, что $\mathrm{dom}\, f = \{1, \dots, \nu\}$ и $X \subseteq \mathrm{im}\, f \subseteq {}^*X$. Другими словами, существует гиперконечное множество $\{x_n\}_{n=1}^{\nu}$ такое, что $X \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\nu} \subseteq {}^*X$.*

$\lhd$ Пусть Ψ — множество всех функций ψ таких, что $\mathrm{dom}\, \psi \subseteq \mathbb{N}$ и $\mathrm{im}\, \psi \subseteq X$. Для произвольного $\pi \in \mathscr{F}(X)$ определим

$$A_\pi := \{\varphi \in {}^*\Psi : \mathrm{dom}\, \varphi = \{1, \dots, \nu\} \ \&\ \pi \subseteq \mathrm{im}\, \varphi\}.$$

Поскольку X бесконечно, каждое множество A_π непусто. В силу внутреннего принципа определения множества A_π являются внутренними. Они образуют центрированное семейство.

Кроме того, $\mathrm{card}\big(\mathscr{F}(X)\big) < \mathrm{card}(M)$. Следовательно, согласно общему принципу насыщения имеем $f \in \bigcap_{\pi\in\mathscr{F}(X)} A_\pi$ для некоторого $f \in {}^*\Psi$. Легко видеть, что f — внутренняя функция, $\mathrm{dom}\, f = \{1, \dots, \nu\}$ и $X \subseteq \mathrm{im}\, f \subseteq {}^*X$. $\rhd$

4.0.4. *Лемма.* *Пусть $X \in M$ и $X \subseteq M$. Тогда $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(\nu)$ для всех $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.*

$\lhd$ Рассмотрим множество $\mathscr{P}(X)$ всех подмножеств X. Поскольку $\mathscr{P}(X) \in M$ по предыдущей лемме, имеет место следующее включение $\mathscr{P}(X) \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\nu}$, где $\{x_n\}_{n=1}^{\nu}$ — гиперконечное подмножество ${}^*\mathscr{P}(X)$. Тогда $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}\big(\mathscr{P}(X)\big) \le \mathrm{card}(\nu)$. $\rhd$

4.0.5. Пусть Θ — направленное множество, которое является элементом базовой суперструктуры M. Обозначим множество $\big\{\xi \in {}^*\Theta : (\forall \tau \in \Theta)\ \xi \ge \tau\big\}$ через ${}^a\Theta$. Элементы множества ${}^a\Theta$ называются *бесконечно удаленными.*

Лемма. *Для любого направленного множества $\Theta \in M$ существует хотя бы один бесконечно удаленный элемент $\alpha \in {}^a\Theta$.*

$\lhd$ Если Θ конечно, то доказывать ничего не надо. Предположим, что Θ бесконечно. По лемме 4.0.3 существует гиперконечное множество A такое, что $\Theta \subseteq A \subseteq {}^*\Theta$. Так как ${}^*\Theta$ — внутреннее направленное множество, существует элемент $\alpha \in {}^*\Theta$, удовлетворяющий условию $\alpha \ge \tau$ для всех $\tau \in A$. Очевидно, что $\alpha \in {}^a\Theta$. $\rhd$

4.0.6. Основным средством применения нестандартного анализа к нормированным пространствам является следующая простая конструкция, разработанная В. А. Дж. Люксембургом [20]. Пусть X — нормированное пространство. Рассмотрим два внешних подпространства в ${}^*X$:

$$\mathrm{Fin}({}^*X) := \big\{\kappa \in {}^*X : (\exists r \in \mathbb{R})\|\kappa\| \le r\big\},$$
$$\mu({}^*X) := \big\{\kappa \in {}^*X : (\exists r \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ \|n\kappa\| \le r\big\}.$$

Элементы $\mathrm{Fin}({}^*X)$ называются *конечными* (*по норме*), а элементы $\mu({}^*X)$ называются *бесконечно малыми.* Очевидно, что $\mu({}^*X)$ — подпространство в $\mathrm{Fin}({}^*X)$. Тем самым мы можем рассмотреть фактор-пространство

$$\widetilde{X} := \mathrm{Fin}({}^*X)/\mu({}^*X)$$

с нормой $\|[\kappa]\| := \mathrm{st}(\|\kappa\|)$. Следуя Люксембургу, мы называем $\widetilde{X}$ *нестандартной оболочкой* X. Определим отображение $\widehat{\mu}_X : X \to \widetilde{X}$ по правилу

$$\widehat{\mu}_X(x) := [x] \quad (x \in X).$$

Легко видеть, что $\widehat{\mu}_X$ — вложение X в $\widetilde{X}$. Хорошо известно следующее

Предложение. *Для любого нормированного пространства X фактор-пространство $\widetilde{X}$ является банаховым. Отображение $\widehat{\mu}_X$ является сюръективным тогда и только тогда, когда X конечномерно.*

4.0.7. Очень близко к построению нестандартной оболочки примыкает нестандартное построение пополнения по норме нормированного пространства. Пусть X — нормированное пространство. Рассмотрим внешнее подпространство

$$\operatorname{pns}({}^*X) := \bigl\{\kappa \in {}^*X : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists y \in X)\ n \cdot \rho(\kappa - y) \leq 1\bigr\}$$

в ${}^*X$. Тогда выполнено следующее

Предложение. *Естественным образом нормированное фактор-пространство $\operatorname{pns}({}^*X)/\mu({}^*X)$ является пополнением по норме пространства X относительно вложения $\widehat{\mu}_X$.*

4.0.8. Пусть A — подмножество нормированного пространства X. Существует простой и удобный критерий ограниченности A.

Предложение. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *множество A ограничено по норме;*
(2) ${}^*A \subseteq \operatorname{Fin}({}^*X)$.

4.0.9. Пусть X и Y — нормированные пространства и $T : X \to Y$ — линейный оператор. Следующее хорошо известное утверждение немедленно следует из 4.0.8.

Предложение. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *T — ограниченный оператор;*
(2) ${}^*T\bigl(\operatorname{Fin}({}^*X)\bigr) \subseteq \operatorname{Fin}({}^*Y)$;
(3) ${}^*T\bigl(\mu({}^*X)\bigr) \subseteq \mu({}^*Y)$;
(4) ${}^*T\bigl(\mu({}^*X)\bigr) \subseteq \operatorname{Fin}({}^*Y)$.

Тем самым оператор $\widetilde{T} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ такой, что $\widetilde{T}([x]) := [Tx]$ для всех $x \in \operatorname{Fin}({}^*X)$, корректно определен и ограничен по норме так же, как и оператор T. Этот оператор называется *нестандартной оболочкой* оператора T.

Мы кратко остановимся на необходимых фактах из теории решеточно нормированных пространств и мажорируемых операторов. Наше изложение следует [13–16].

4.0.10. Решеточно нормированное пространство — это тройка (X, p, E), где X — векторное пространство, E — векторная решетка и p — отображение из X в E_+ такое, что

(1) $p(x) = 0 \ \leftrightarrow \ x = 0$;
(2) $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$ $(\lambda \in \mathbb{R}, \ x \in X)$;
(3) $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ $(x, y \in X)$.

Отображение p называется *E-значной нормой* на X. Норма p называется *разложимой* (*(d)-разложимой*), если для любых $e_1, e_2 \in E_+$ (любых дизъюнктных $e_1, e_2 \in E_+$) и любого $x \in X$ из $p(x) = e_1 + e_2$ следует существование таких $x_1, x_2 \in X$, что $x_1 + x_2 = x$ и $p(x_k) = e_k$ для $k = 1, 2$. Решеточно нормированное пространство с разложимой ((d)-разложимой) нормой называется *разложимым* (*(d)-разложимым*).

Последовательность (x_n) *(r)-сходится* к $x \in X$ в (X, p, E), если существуют последовательность $(\varepsilon_n) \subseteq \mathbb{R}$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, и элемент $u \in E$ такие, что $p(x_n - x) \le \varepsilon_n u$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По определению последовательность $(x_n) \subseteq X$ называется *(r)-последовательностью Коши*, если существует последовательность $(\varepsilon_n) \subseteq \mathbb{R}$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, такая, что $p(x_k - x_m) \le \varepsilon_n u$ для всех $k, m, n \in \mathbb{N}$ с условием $k, m \ge n$. Решеточно нормированное пространство X называется *(r)-полным*, если любая (r)-последовательность Коши в X (r)-сходится к некоторому элементу из X. Следующее утверждение является следствием [13, 1.1.3] и спектральной теоремы Фрейденталя.

Предложение. *Любое (d)-разложимое и (r)-полное решеточно нормированное пространство разложимо.*

4.0.11. Сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ в решеточно нормированном пространстве X называется *(o)-сходящейся* к $x \in X$, если существует убывающая сеть $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ в E такая, что $e_\gamma \downarrow 0$ и для любого $\gamma \in \Gamma$ существует индекс $\alpha(\gamma)$, для которого $a(x_\alpha - x) \le e_\gamma$ при всех $\alpha \ge \alpha(\gamma)$. Сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ называется *(o)-сетью Коши*, если сеть $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{A}}$ (o)-сходится к нулю. Решеточно нормированное пространство называется *(o)-полным*, если каждая (o)-сеть Коши в нем (o)-сходится к некоторому элементу этого пространства. Разложимое (o)-полное решеточно нормированное пространство называется *пространством Банаха — Канторовича.*

Рассмотрим разложимое решеточно нормированное пространство (X, p, E). Пусть $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — некоторое разбиение единицы в булевой алгебре $\mathscr{B}(E)$ и $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов из X. Если существует $x \in X$, удовлетворяющий условию

$$(\pi_\xi \circ p)(x - x_\xi) = 0 \quad (\xi \in \Xi),$$

то такой элемент x определен однозначно. Он называется *перемешиванием* семейства (x_ξ), соответствующим разбиению единицы (π_ξ), и обозначается через $\mathrm{mix}(\pi_\xi x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ или просто через $\mathrm{mix}(\pi_\xi x_\xi)$. Решеточно нормированное пространство (X, p, E) называется (d)*-полным*, если для каждого разбиения единицы $(\pi_\xi) \subseteq \mathscr{B}(E)$ и каждого семейства $(x_\xi) \subseteq X$, ограниченного по норме p, существует перемешивание $\mathrm{mix}(\pi_\xi x_\xi) \in X$.

Предложение (см. [13, теорема 1.3.2]). *Разложимое решеточно нормированное пространство (o)-полно тогда и только тогда, когда оно (r)- и (d)-полно.*

4.0.12. Пусть (X, p, E) — разложимое решеточно нормированное пространство, чья нормирующая векторная решетка E условно полна. Тогда существует, и притом единственное с точностью до изометрического изоморфизма, решеточно нормированное пространство (X', p', E) со следующими свойствами: (см. [13, теорема 1.3.8]).

(1) (X', p', E) — пространство Банаха — Канторовича;

(2) существует линейное вложение $\imath : X \to X'$, обладающее тем свойством, что $p'\big(\imath(x)\big) = p(x)$ для всех $x \in X$;

(3) X' — наименьшее (o)-полное решеточно нормированное подпространство пространства X', содержащее $\imath(X)$.

Пространство (X', p', E) называется (o)*-пополнением* решеточно нормированного пространства (X, p, E).

Рассмотрим некоторые свойства решеточно нормированных пространств, связанные с разложимостью и (r)-полнотой.

4.0.13. *Лемма.* *Пусть (X, p, E) — разложимое решеточно нормированное пространство и I — идеал в E. Тогда для произвольных элементов $x, y \in X$, $q \in E_+$ и $\eta \in I$, удовлетворяющих условию $p(x - y) \le q + \eta$, существует элемент $y' \in X$ такой, что*

(1) *$p(x - y') \le q$;*

(2) *$p(y - y') \in I$.*

$\lhd$ Очевидно, что $p(x-y) \le q + \eta_+$. По принципу Рисса о разложении существуют элементы $a_1, a_2 \in E$ такие, что

$$0 \le a_1 \le q,\ 0 \le a_2 \le \eta_+, a_1 + a_2 = p(x-y).$$

Так как норма p разложима, можно указать элементы $z_1, z_2 \in X$ такие, что

$$p(z_1) = a_1,\ p(z_2) = a_2, z_1 + z_2 = x - y.$$

Легко видеть, что элемент $y' := y - z_2$ удовлетворяет условиям (1) и (2). $\rhd$

4.0.14. Пусть (X, p, E) — произвольное решеточно нормированное пространство. Рассмотрим идеал I в E и фактор-пространство X' пространства X по подпространству $X(I) := \bigl\{x \in X : p(x) \in I\bigr\}$. Для каждого $x \in X$ (соответственно для каждого $e \in E$) положим $[x] := x + X(I)$ $\bigl($соответственно $[e] := e + I \in E/I\bigr)$. Определим отображение $p' : X' \to E/I$ по правилу

$$p'\bigl([x]\bigr) := \bigl[p(x)\bigr] \qquad (x \in X).$$

Легко видеть, что отображение p' определено корректно и является E/I-значной нормой пространства X'. Решеточно нормированное пространство $(X', p', E/I)$, полученное в результате такой процедуры, называется *фактор-пространством X по идеалу I нормирующей векторной решетки E.*

Предложение. *Пусть (X, p, E) — разложимое (r)-полное решеточно нормированное пространство и I — идеал в нормирующей векторной решетке E. Тогда фактор-пространство $(X', p', E/I)$ разложимо и (r)-полно.*

$\lhd$ Проверим, что норма p' разложима. Пусть $p'\bigl([x]\bigr) = [e_1] + [e_2]$, где $[e_1], [e_2] \in (E/I)_+$. Можно считать, что $e_1, e_2 \ge 0$. Существует элемент $\eta \in E$ такой, что $p(x) = e_1 + e_2 + \eta$. По лемме 4.0.13 существует $x' \in X$ такой, что $p(x - x') \le e_1 + e_2$ и $p(x') \in I$. В частности,

$$p(x - x') = e_1 + e_2 + \eta' \tag{1}$$

для некоторого $\eta' \in I$. Применяя принцип Рисса о разложении к неравенству $p(x - x') \le e_1 + e_2$, находим элементы $e_1', e_2' \in E$, для которых

$$p(x - x') = e_1' + e_2', \quad 0 \le e_k' \le e_k \quad (k = 1, 2). \tag{2}$$

Тогда $[e'_k] = [e_k]$ $(k = 1, 2)$. В самом деле, предположим, что, например, $[e_1 - e'_1] > 0$; тогда, учитывая (1) и (2), получаем противоречие:

$$0 \le [e_2 - e'_2] =$$

$$= \big[p(x - x') - e_1 - \eta' - e'_2\big] = [e'_1 - e_1 - \eta'] =$$

$$= [e'_1 - e_1] < 0.$$

Поскольку норма p предполагалась разложимой, из (2) следует, что существуют $y_1, y_2 \in X$ такие, что $x - x' = y_1 + y_2$ и $p(y_k) = e'_k$ $(k = 1, 2)$. Тогда $p'\big([y_k]\big) = \big[p(y_k)\big] = [e'_k] = [e_k]$ для $k = 1, 2$ и

$$[y_1] + [y_2] = [x - x'] = [x],$$

что и требовалось.

Проверим теперь, что X' (r)-полно. Выберем некоторую (r)-последовательность Коши $(x_i) \subseteq X'$. Существуют $e \in E$ и $\big(x_{i(n)}\big) \subseteq (x_i)$, для которых

$$p'\big(x_{i(k)} - x_{i(m)}\big) \le 2^{-n}[e] \tag{3}$$

при всех k, m, n таких, что $k, m \ge n$. Выберем элементы $\kappa_n \in X$ так, что $x_{i(n)} = [\kappa_n]$. Тогда в силу (3) существуют $\eta_{k,m} \in I$ со свойством

$$p(\kappa_k - \kappa_m) \le 2^{-n}e + \eta_{k,m} \tag{4}$$

для всех $k, m, n \in \mathbb{N}$ таких, что $k, m \ge n$. По индукции построим последовательность $(\kappa'_n) \subseteq X$, удовлетворяющую условиям

$$p(\kappa'_n - \kappa'_{n+1}) \le 2^{-n}e; \tag{5}$$

$$p(\kappa_{n+1} - \kappa'_{n+1}) \in I \tag{6}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $\kappa'_1 := \kappa_1$ и допустим, что элементы κ'_j уже определены для $j \le n$. Из отношения (4) следует, что

$$p(\kappa'_n - \kappa_{n+1}) \le p(\kappa_n - \kappa_{n+1}) - p(\kappa_n - \kappa'_{n+1}) \le$$

$$\le 2^{-n}e + \eta_{n,n+1} + p(\kappa_n - \kappa'_n).$$

По индукционному предположению $p(\kappa_n - \kappa_n') \in I$, и мы можем применить лемму 4.0.13 к элементам

$$\kappa_n', \kappa_{n+1} \in X, \quad 2^{-n}e \in E, \quad \eta := \eta_{n,n+1} + p(\kappa_n - \kappa_n').$$

В результате получаем элемент κ_{n+1}', удовлетворяющий условиям (5) и (6). Из (5) следует, что последовательность (κ_n') является (r)-последовательностью Коши в X. Следовательно, она (r)-сходится к некоторому элементу $\kappa_0 \in X$. Тогда, как легко видеть, последовательность $\big(x_{i(n)}\big) = \big([\kappa_n]\big)$ (r)-сходится по норме p' к $[\kappa_0] \in X'$. Поскольку исходная последовательность (x_i) является (r)-последовательностью Коши в норме p', получаем $x_i \xrightarrow{(r)} [\kappa_0]$. $\triangleright$

4.0.15. Пусть E и F — некоторые условно полные векторные решетки, в то время как (X, a, E) и (Y, b, F) — разложимые решеточно нормированные пространства. Линейный оператор $T : E \to F$ называется *мажорируемым*, если существует ограниченный линейный оператор $S : E \to F$ такой, что

$$|Tx| \leq S(|x|) \quad (x \in X).$$

Оператор S называется *мажорантой* оператора T. Наименьшая мажоранта оператора T обозначается символом $|T|$.

Через $M(X, Y)$ обозначим векторное пространство всех мажорируемых операторов из решеточно нормированного пространства X в решеточно нормированное пространство Y. Отображение $T \to |T|$, $T \in M(E, F)$ удовлетворяет всем аксиомам E-значной нормы (см. 4.0.10). Следовательно, $M(E, F)$ также является решеточно нормированным пространством с условно полной нормирующей векторной решеткой $L_b(E, F)$ (см., например, [28, теорема 83.4]) всех ограниченных линейных операторов из E в F.

4.1. Насыщенные множества неделимых элементов

Здесь мы рассмотрим решетки с нулем и установим некоторые элементарные стандартные и нестандартные факты о них. Докажем, что нестандартное расширение решетки с нулем содержит насыщенное семейство неделимых элементов.

4.1.1. Пусть L — упорядоченное множество с порядком $\geq$. Будем писать $x > y$, если $x \geq y$ и $x \neq y$. Множество L называется *решеткой*, если каждое двухэлементное подмножество $\{x, y\}$ в L имеет точную верхнюю грань $x \vee y := \sup\{x, y\}$ и точную нижнюю грань $x \wedge y := \inf\{x, y\}$. Если решетка содержит наименьший (наибольший) элемент, тогда он называется *нулем* (соответственно *единицей*) и обозначается через 0 (соответственно через 1). В дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые решетки содержат нуль. Элементы x и y решетки называются *дизъюнктными*, если $x \wedge y = 0$. Решетка называется *дистрибутивной*, если для любой тройки x, y, z выполнены условия $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ и $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Дистрибутивная решетка L с нулем 0 и единицей 1 называется *булевой алгеброй*, если для любого элемента $x \in L$ существует *дополнение*, т. е. существует элемент $x' \in L$ такой, что $x \wedge x' = 0$ и $x \vee x' = 1$.

Пусть L — решетка. Элемент $e \in L$ будем называть *слабой единицей*, если $e \wedge x > 0$ для каждого $x \in L$, $x > 0$. Назовем $y \in L$ *псевдодополнением* элемента $x \in L$, если $x \wedge y = 0$ и $x \vee y$ — слабая единица. Решетка L называется *решеткой с псевдодополнениями*, если для каждого $x \in L$ существует хотя бы одно псевдодополнение для x в L. Примером решетки с псевдодополнениями является булева алгебра. Менее тривиальным примером является решетка всех неотрицательных непрерывных функций на произвольном метрическом пространстве. Мы будем использовать следующую запись. Для каждого элемента κ в нестандартном расширении ${}^*L$ обозначим через $U(\kappa) := \{x \in E : x \geq \kappa\}$ множество стандартных верхних граней и через $L(\kappa) := \{y \in E : \kappa \geq y\}$ — множество стандартных нижних граней.

4.1.2. Пусть L — дистрибутивная решетка. *Идеалом* решетки L называется непустое множество $I \subseteq L$ такое, что из $x, y \in I$ следует $x \vee y \in I$, и $z \in I$, если $z \leq v$ для некоторого $v \in I$. Идеал P решетки L называется *простым*, если для любых $x, y \in L$ из $x \wedge y = 0$ следует $x \in P$ или $y \in P$. Простой идеал P называется *минимальным*, если для любого простого идеала $P_1 \subseteq L$ из $P_1 \subseteq P$ следует $P_1 = P$. Подмножество $S \subseteq L$ такое, что $0 \notin S$ и $x, y \in S \rightarrow x \wedge y \in S$, называется *нижней подрешеткой*. Нижняя подрешетка S называется *максимальной* или *ультрафильтром*, если для любой нижней подрешетки $S_1 \subseteq L$ из $S \subseteq S_1$ следует $S_1 = S$. Хорошо известно следующее утверждение [21, теорема 5.4].

Лемма. *Пусть L — дистрибутивная решетка и P — некоторый простой идеал в L. Тогда $L \setminus P$ — нижняя подрешетка в L. Более того, $L \setminus P$ — ультрафильтр тогда и только тогда, когда P — минимальный простой идеал.*

4.1.3. Рассмотрим нестандартное расширение ${}^*L$ решетки L. По принципу переноса ${}^*L$ содержит тот же нулевой элемент 0, что и исходная решетка L. Дадим два важных определения.

Определение. Элемент $\kappa \in {}^*L$ называется *неделимым*, если $\kappa > 0$ и для любого $x \in L$ либо $x \geq \kappa$, либо $x \wedge \kappa = 0$.

Определение. Подмножество Λ решетки ${}^*L$ называется *насыщенным*, если оно является внутренним и для каждого $x \in L$, $x > 0$, существует $a \in \Lambda$ такое, что $x \geq a > 0$.

Следующая простая лемма является основной для получения дальнейших результатов.

Лемма. *Нестандартное расширение произвольной решетки содержит гиперконечное насыщенное множество дизъюнктных неделимых элементов.*

$\lhd$ Пусть L — решетка. Через $\mathscr{F}$ обозначим семейство всех конечных подмножеств $L \setminus \{0\}$ и положим

$$\mathscr{L}_\pi := \Big\{ X \in {}^*\mathscr{F} : (\forall y \in \pi)(\forall x \in X)\big[y \geq x \text{ или } y \wedge x = 0\big] \ \& \\ \& \ (\forall y \in \pi)(\exists x \in X)\big[y \geq x\big] \ \& \\ \& \ (\forall x \in X)(\forall z \in X)\big[x \neq z \ \rightarrow \ x \wedge z = 0\big] \Big\}$$

для всех $\pi \in \mathscr{F}$. Покажем, что множества $\mathscr{L}_\pi$ непусты. Рассмотрим произвольное $\pi \in \mathscr{F}$. Для любого элемента $x \in \pi$ существует множество B_x такое, что $x \in B_x \subseteq \pi$, $\inf B_x > 0$ и $\inf\big(B_x \cup \{y\}\big) = 0$ для всех $y \in \pi \setminus B_x$. Легко проверяется, что множество $\{\inf B_x : x \in \pi\}$ принадлежит $\mathscr{L}_\pi$. Из непустоты множеств $\mathscr{L}_\pi$ и условия $\mathscr{L}_\pi \cap \mathscr{L}_\gamma = \mathscr{L}_{\pi\cup\gamma}$ следует, что семейство $\{\mathscr{L}_\pi\}_{\pi\in\mathscr{F}}$ является центрированным. По построению все элементы семейства являются внутренними множествами. Отсюда, используя общий принцип насыщения, получаем, что существует $\Lambda \in \bigcap_{\pi\in\mathscr{F}} \mathscr{L}_\pi$. Легко видеть, что Λ — искомое насыщенное семейство дизъюнктных неделимых элементов. $\rhd$

4.1.4. Пусть L — решетка. По лемме 4.1.3 существует насыщенное множество неделимых элементов решетки ${}^*L$. Пусть Λ — такое множество. Обозначим $\Lambda^x := \{\varkappa \in \Lambda : x \geq \varkappa\}$ для всех $x \in L$. Легко видеть, что если L имеет слабую единицу e, то семейство $\{\Lambda^x : x \in L\}$ является открытой базой топологии τ на Λ. Такая топология называется *канонической* на Λ.

Теорема. *Пусть Λ — насыщенное множество неделимых элементов в нестандартном расширении решетки L со слабой единицей и τ — каноническая топология на Λ. Тогда топологическое пространство (Λ, τ) — компактно.*

$\triangleleft$ Предположим, что (Λ, τ) не является компактным. В этом случае мы можем указать подмножество $\{\Lambda^x\}_{x\in X}$ из базы $\{\Lambda^x\}_{x\in L}$ топологии τ такое, что $\Lambda = \bigcup_{x\in X} \Lambda^x$ и для каждого конечного подмножества π множества X выполнено следующее условие:

$$A_\pi := \Lambda \setminus \bigcup_{x\in\pi} \Lambda^x \neq \varnothing.$$

Легко проверить, что $\big\{A_\pi : \pi \in \mathscr{F}(X)\big\}$ — центрированное семейство внутренних множеств. Согласно общему принципу насыщения существует элемент $\varkappa \in \cap\big\{A_\pi : \pi \in \mathscr{F}(X)\big\}$. Тогда $\varkappa \in \Lambda \setminus \bigcup_{x\in X} \Lambda^x$; это противоречит тому, что $\{\Lambda^x\}_{x\in X}$ — открытое покрытие Λ. Значит, пространство (Λ, τ) — компактно. $\triangleright$

4.1.5. В решетке ${}^*L$ введем отношение эквивалентности $\sim$, полагая $\varkappa_1 \sim \varkappa_2$, если неравенства $x \geq \varkappa_1$ и $x \geq \varkappa_2$ выполняются или не выполняются одновременно для всех $x \in L$. Предположим, что решетка L обладает слабой единицей e. Возьмем насыщенное множество Λ неделимых элементов в ${}^*L$ (это множество существует по лемме 4.1.3). Пусть τ — каноническая топология на Λ. Топологическое пространство (Λ, τ) компактно по теореме 4.1.4. Его фактор-пространство по отношению эквивалентности $\sim$ является компактным T_0-пространством. Обозначим это фактор-пространство через $\widetilde{\Lambda}$. Очевидно, что множества вида

$$\widetilde{\Lambda}^x := \big\{[\varkappa] \in \widetilde{\Lambda} : x \geq \varkappa\big\} \quad (x \in L)$$

образуют открытую базу фактор-топологии (в дальнейшем мы будем обозначать через $[\varkappa]$ класс эквивалентности, содержащий элемент $\varkappa \in \Lambda$).

Возьмем в качестве решетки L булеву алгебру B и рассмотрим насыщенное множество Υ неделимых элементов в ${}^*B$. Легко видеть, что $\widetilde{\Upsilon}$ — вполне несвязный компакт, где отображение, сопоставляющее каждому элементу $b \in B$ подмножество $\widetilde{\Upsilon}^b$ множества $\widetilde{\Upsilon}$, является булевым изоморфизмом B на алгебру $\mathrm{clop}(\widetilde{\Upsilon})$ открыто-замкнутых (открытых и замкнутых одновременно) подмножеств компакта $\widetilde{\Upsilon}$. Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема. *Пусть B — булева алгебра и Υ — насыщенное множество неделимых элементов нестандартного расширения B. Тогда соответствующее топологическое пространство $\widetilde{\Upsilon}$ является стоуновским пространством булевой алгебры B.*

4.1.6. Следующая теорема описывает связь между свойствами решетки и соответствующего топологического пространства.

Теорема. *Пусть L — дистрибутивная решетка со слабой единицей. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *L — решетка с псевдодополнениями;*

(2) *топологическое пространство $\widetilde{\Lambda}$ вполне несвязно для каждого насыщенного множества Λ неделимых элементов из ${}^*L$;*

(3) *топологическое пространство $\widetilde{\Lambda}$ удовлетворяет аксиоме T_1-отделимости для любого насыщенного множества Λ неделимых элементов из ${}^*L$;*

(4) *множество $\{x \in L : x \wedge \kappa = 0\}$ является минимальным простым идеалом в L для каждого неделимого элемента $\kappa \in {}^*L$.*

$\lhd$ (1)$\to$(2): Легко убедиться в том, что, если условие (1) выполнено, то база $\{\widetilde{\Lambda}^x\}_{x\in L}$ топологии для $\widetilde{\Lambda}$ состоит из открыто-замкнутых множеств. В самом деле, для данного $x \in L$ имеем $\widetilde{\Lambda}^x \cup \widetilde{\Lambda}^y = \widetilde{\Lambda}$ и $\widetilde{\Lambda}^x \cap \widetilde{\Lambda}^y = \varnothing$, где y — некоторое псевдодополнение элемента x.

(2)$\to$(3): Очевидно.

(3)$\to$(4): Пусть условие (3) выполнено. Возьмем некоторый неделимый элемент $\kappa \in {}^*L$ и рассмотрим множество $I_\kappa := \{x \in L : x \wedge \kappa = 0\}$. Легко видеть, что I_κ — простой идеал решетки L. В самом деле, ввиду дистрибутивности из $x, y \in I_\kappa$ вытекает, что $(x \vee y) \wedge \kappa = (x \wedge \kappa) \vee (x \wedge \kappa) = 0$ и, следовательно, $x \vee y \in I_\kappa$. Если $x \wedge y \in I_\kappa$, тогда либо $x \in I_\kappa$, либо $y \in I_\kappa$ (иначе, поскольку элемент κ

является неделимым, получаем $x \geq \kappa$ и $y \geq \kappa$). Остается проверить, что идеал I_κ минимален.

Рассмотрим произвольный простой идеал $P \subseteq I_\kappa$. Предположим, что $y \in I_\kappa \setminus P$ для некоторого $y \in L$. Тогда для каждого $x \in L \setminus I_\kappa$ выполнено $x \wedge y > 0$. Действительно, в противном случае будем иметь $x \wedge y = 0$ и, следовательно, или $x \in P$, или $y \in P$, что невозможно. По лемме 4.1.3 существует насыщенное множество неделимых элементов в решетке ${}^*L$. Обозначим его через Λ'. Положим $\Lambda := \Lambda' \cup \{\kappa\}$. Тогда Λ — также насыщенное множество неделимых элементов и $\kappa \in \Lambda$. Как мы отметили выше, $x \wedge y > 0$ для каждого $x \in L \setminus I_\kappa$. Пользуясь этим, легко заметить, что $\{\Lambda^{x\wedge y}\}_{x\in L\setminus I_\kappa}$ — центрированная система внутренних множеств. Используя общий принцип насыщения, находим элемент $\delta \in \Lambda$ такой, что

$$\delta \in \cap\{\Lambda^{x\wedge y} : x \in L \setminus I_\kappa\}.$$

Неделимый элемент δ удовлетворяет условию $\delta \leq y$. Вместе с тем $\kappa \wedge y = 0$, так как $y \in I_\kappa$. Следовательно, $\delta \not\sim \kappa$. Из условия (3) следует, что топологическое пространство $\widetilde{\Lambda}$ удовлетворяет аксиоме T_1-отделимости. Значит, существует $z \in L$, для которого $[\kappa] \in \widetilde{\Lambda}^z$ и $[\delta] \notin \widetilde{\Lambda}^z$. Тогда справедливы отношения $\kappa \leq z$ и $z \wedge \delta = 0$. Из первого отношения вытекает $z \in L \setminus I_\kappa$, что противоречит второму отношению. Полученное противоречие показывает, что $I_\kappa \setminus P = \varnothing$. Ввиду произвольности выбранного простого идеала P со свойством $P \subseteq I_\kappa$ идеал I_κ будет минимальным простым.

(4)$\to$(1): Предположим, что условие (4) выполнено. Покажем, что для каждого элемента решетки L существует псевдодополнение. Рассмотрим произвольный $a \in L$. По лемме 4.1.3 существует насыщенное множество Λ неделимых элементов в ${}^*L$. Рассмотрим топологическое пространство (Λ, τ), где τ — каноническая топология на Λ. Пусть $\kappa \in \Lambda \setminus \Lambda^a$. По предположению множество

$$I_\kappa := \{x \in L : x \wedge \kappa = 0\}$$

является минимальным простым идеалом в L. По выбору κ получаем, что $a \wedge \kappa = 0$ и, следовательно, $a \notin L \setminus I_\kappa$. Так как по лемме 4.1.2 $L \setminus I_\kappa$ — ультрафильтр в решетке L, то существует элемент $y(\kappa) \in L \setminus I_\kappa$ такой, что $y(\kappa) \wedge a = 0$. Другими словами, $\kappa \in \Lambda^{y(\kappa)}$ и $\Lambda^a \cap \Lambda^{y(\kappa)} = 0$. Семейство $\{\Lambda^{y(\kappa)}\}_{\kappa\in\Lambda\setminus\Lambda^a}$ — открытое покрытие замкнутого множества $\Lambda \setminus \Lambda^a$ в пространстве (Λ, τ). По теореме 4.1.4 оно содержит конечное подпокрытие $\{\Lambda^{y(\kappa_k)}\}_{k=1}^n$. Элемент $b := \bigvee_{k=1}^n y(\kappa_k)$ удовлетворяет условиям

$$\Lambda^b \cap \Lambda^a = \varnothing, \quad \Lambda^b \cup \Lambda^a = \Lambda$$

и, следовательно, является искомым псевдодополнением для a. $\rhd$

4.1.7. Пусть L — дистрибутивная решетка. Если L имеет псевдодополнения, то по теореме 4.1.6 для любого неделимого элемента $\kappa \in {}^*L$ существует соответствующий минимальный простой идеал $I_\kappa := \{x \in L : x \wedge \kappa = 0\}$. Обратное утверждение также верно в более общем случае.

Лемма. *Пусть I — минимальный простой идеал в дистрибутивной решетке L. Тогда существует неделимый элемент $\kappa \in {}^*L$ такой, что $I = \{x \in L : x \wedge \kappa = 0\}$.*

$\lhd$ Заметим, что подмножество $U := L \setminus I$ решетки L направлено вниз. По лемме 4.0.5 существует бесконечно удаленный элемент $\kappa \in {}^*U$. Простая проверка показывает, что κ — неделимый элемент в решетке ${}^*L$ и $I = \{x \in L : x \wedge \kappa = 0\}$. $\rhd$

4.1.8. Пусть L — дистрибутивная решетка. Обозначим через $\mathscr{M}$ множество всех минимальных простых идеалов в L. Множество $\mathscr{M}$ снабжено канонической топологией, порожденной открытой базой, образованной всеми множествами вида

$$\mathscr{M}^u := \{P \in \mathscr{M} : u \notin P\} \quad (u \in L)$$

(см., например, [21, Section 7]).

Теорема. *Пусть L — дистрибутивная решетка с псевдодополнениями. Тогда для любого насыщенного множества Λ неделимых элементов ${}^*L$ отображение φ_Λ, определенное по правилу*

$$\varphi_\Lambda\big([\kappa]\big) := \{x \in L : x \wedge \kappa = 0\} \quad \big([\kappa] \in \widetilde{\Lambda}\big),$$

является гомеоморфизмом топологического пространства $\widetilde{\Lambda}$ на $\mathscr{M}$.

$\lhd$ Пусть Λ — насыщенное множество неделимых элементов в решетке ${}^*L$. По теореме 4.1.6 отображение φ_Λ принимает значения в пространстве $\mathscr{M}$. Отображение φ_Λ инъективно. Действительно, возьмем произвольные элементы $\kappa_1, \kappa_2 \in \Lambda$ такие, что $\kappa_1 \not\sim \kappa_2$. Тогда

$$U(\kappa_1) \neq U(\kappa_2), \varphi_\Lambda\bigl([\kappa_1]\bigr) \neq \varphi_\Lambda\bigl([\kappa_2]\bigr),$$

поскольку

$$\varphi_\Lambda\bigl([\kappa_1]\bigr) = L \setminus U(\kappa)$$

для всех $\kappa \in \Lambda$. Покажем, что $\varphi_\Lambda(\widetilde{\Lambda}) = \mathscr{M}$. Рассмотрим произвольное $P \in \mathscr{M}$. Как легко проверить, $\{\Lambda^x\}_{x \in L \setminus P}$ — центрированная система внутренних множеств. Следовательно, согласно общему принципу насыщения существует $\kappa \in \bigcap_{x \in L \setminus P} \Lambda^x$. Тогда

$$\begin{gathered}\varphi_\Lambda\bigl([\kappa]\bigr) = \{x \in L : x \wedge \kappa = 0\} = \\ = \{x \in L : \kappa \notin \Lambda^x\} = L \setminus \{x \in L : \kappa \in \Lambda^x\} = \\ \subseteq L \setminus (L \setminus P) = P\end{gathered}$$

и тем самым $\varphi_\Lambda\bigl([\kappa]\bigr) = P$, поскольку идеал P минимален. Остается проверить, что φ_Λ является гомеоморфизмом. Это легко следует из того, что

$$\varphi_\Lambda(\widetilde{\Lambda}^x) = \bigl\{\varphi_\Lambda\bigl([\kappa]\bigr) : \kappa \leq x\bigr\} = \{P \in \mathscr{M} : x \notin P\} = \mathscr{M}^x. \ \rhd$$

4.1.9. Пусть Λ_1 и Λ_2 — насыщенные множества неделимых элементов дистрибутивной решетки L с псевдодополнениями. Тогда по предыдущей теореме отображение $\psi := \varphi_{\Lambda_2}^{-1} \circ \varphi_{\Lambda_1}$ является гомеоморфизмом топологического пространства $\widetilde{\Lambda}_1$ на $\widetilde{\Lambda}_2$. Заметим, что этот гомеоморфизм может быть указан в явном виде:

$$\psi\bigl([\kappa_1]\bigr) := \bigl\{\kappa_2 \in \Lambda_2 : U(\kappa_1) \geq \kappa_2\bigr\}$$

для любого элемента $\kappa_1 \in \Lambda_1$. Тем самым топологическое пространство $\widetilde{\Lambda}$ определяется однозначно (с точностью до гомеоморфизма) по дистрибутивной решетке L с псевдодополнениями и не зависит от выбора насыщенного множества Λ неделимых элементов.

4.2. Представление архимедовых векторных решеток

В этом параграфе мы докажем нестандартный вариант теоремы о представлении архимедовых векторных решеток, после чего дадим нестандартные доказательства теорем о представлении Какутани — Крейнов и Вулиха — Огасавары. На протяжении этого параграфа мы будем предполагать, что E — архимедова векторная решетка. Положительный конус E_+ решетки E является дистрибутивной решеткой с нулем. Тем самым по лемме 4.1.3 существует насыщенное множество неделимых элементов решетки ${}^*E_+$. Зафиксируем это множество и будем обозначать его через Λ до конца параграфа.

4.2.1. Пусть $e \in E$ и $\kappa \in \Lambda$ таковы, что $e \geq \kappa$. Для каждого $f \in E$ определим элемент $f^\wedge(\kappa)$ из $\overline{\mathbb{R}}$ следующим образом:

$$f^\wedge(\kappa) := \inf\bigl\{\lambda \in \mathbb{R} : (\lambda e - f)_+ \geq \kappa\bigr\}. \tag{1}$$

Для любого $f \in E$ обозначим через $\mathscr{D}(f)$ подмножество $\bigl\{\kappa \in \Lambda : |f^\wedge(\kappa)| < \infty\bigr\}$ множества Λ. Установим некоторые свойства отображения $f \to f^\wedge(\kappa)$.

Лемма. *Для любых $f, g \in E$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ имеют место утверждения:*

(1) $f^\wedge(\kappa) = \sup\bigl\{\lambda \in \mathbb{R} : (\lambda e - f)_- \geq \kappa\bigr\}$;

(2) $(\alpha f)^\wedge(\kappa) = \alpha f^\wedge(\kappa)$;

(3) $(f + g)^\wedge(\kappa) = f^\wedge(\kappa) + g^\wedge(\kappa)$ *для всех* $\kappa \in \mathscr{D}(f) \cap \mathscr{D}(g)$;

(4) $(f \wedge g)^\wedge(\kappa) = \min\bigl\{f^\wedge(\kappa), g^\wedge(\kappa)\bigr\}$ *и* $(f \vee g)^\wedge(\kappa) = \max\bigl\{f^\wedge(\kappa), g^\wedge(\kappa)\bigr\}$.

$\lhd$ Сначала установим (1). Обозначим правую часть равенства через $f^\sim(\kappa)$. Рассмотрим только случай, когда $f^\wedge(\kappa)$ и $f^\sim(\kappa)$ конечны. Пусть $\alpha > f^\wedge(\kappa)$. Тогда $(\alpha e - f)_+ \geq \kappa$ и тем самым $(\alpha e - f)_- \wedge \kappa = 0$. Следовательно, $\alpha \geq f^\sim(\kappa)$, откуда вытекает, что $f^\wedge(\kappa) \geq f^\sim(\kappa)$, ввиду произвольности выбора числа $\alpha > f^\wedge(\kappa)$. Наоборот, предположим, что $\alpha > f^\sim(\kappa)$. Тогда $(\alpha e - f)_- \ngeq \kappa$ и, следовательно, $(\alpha e - f)_- \wedge \kappa = 0$, так как κ — неделимый элемент. Вместе с тем, так как $e \geq \kappa$, мы имеем

$$\bigl((\alpha + 1/n)e - f\bigr)_+ + (\alpha e - f)_- \geq (1/n)e \geq \kappa$$

для всех натуральных n. Следовательно,

$$\bigl((\alpha + 1/n)e - f\bigr)_+ \geq \kappa \text{ и } \alpha + 1/n \geq f^\wedge(\kappa)$$

для любых $\alpha > f^{\sim}(\kappa)$ и $n \in \mathbb{N}$, что возможно только в том случае, если $f^{\sim}(\kappa) \geq f^{\wedge}(\kappa)$.

Докажем теперь (2).

Опуская простую проверку равенства $(\alpha f)^{\wedge}(\kappa) = \alpha f^{\wedge}(\kappa)$ для $0 \leq \alpha < \infty$, покажем только, что $(-f)^{\wedge}(\kappa) = -f^{\wedge}(\kappa)$. В самом деле, нужное условие вытекает из равенств

$$\begin{gathered}(-f)^{\wedge}(\kappa) = \inf\big\{\lambda : (\lambda e - f)_+ \geq \kappa\big\} = \\ = -\sup\big\{\beta : (-\beta e + f)_+ \geq \kappa\big\} = \\ = -\sup\big\{\beta : (\beta e - f)_- \geq \kappa\big\} = -f^{\wedge}(\kappa).\end{gathered}$$

Последнее равенство выполнено ввиду доказанного ранее утверждения (1).

Докажем (3). Пусть $\kappa \in \mathscr{D}(f) \cap \mathscr{D}(g)$. Заметим, что из условий $(\lambda e - f)_+ \geq \kappa$ и $(\beta e - g)_+ \geq \kappa$ следует, что

$$\begin{gathered}\big((\lambda + \beta)e - (f + g)\big)_+ = \big((\lambda e - f) + (\beta e - g)_+\big) \geq \\ \geq \big((\lambda e - f) \wedge (\beta e - g)\big)_+ = (\lambda e - f)_+ \wedge (\beta e - g)_+ \geq \kappa.\end{gathered}$$

Из этого замечания легко получается следующее неравенство:

$$\begin{gathered}f^{\wedge}(\kappa) + g^{\wedge}(\kappa) = \inf\big\{\lambda : (\lambda e - f)_+ \geq \kappa\big\} + \inf\big\{\beta : (\beta e - g)_+ \geq \kappa\big\} \geq \\ \geq \inf\big\{\gamma : \big(\gamma e - (f + g)\big)_+ \geq \kappa\big\} = (f + g)^{\wedge}(\kappa).\end{gathered}$$

Заменяя в этом неравенстве f на $-f$ и g на $-g$ и применяя утверждение (2), получаем обратное неравенство. Следовательно, имеем $f^{\wedge}(\kappa) + g^{\wedge}(\kappa) = (f + g)^{\wedge}(\kappa)$, что и требуется.

Установим теперь утверждение (4). Достаточно доказать, что $(f \wedge g)^{\wedge}(\kappa) = \min\big\{f^{\wedge}(\kappa), g^{\wedge}(\kappa)\big\}$. Так как

$$\begin{gathered}\big(\lambda e - (f \wedge g)\big)_- = \big((f \wedge g) - \lambda e\big)_+ = \big((f - \lambda e) \wedge (g - \lambda e)\big)_+ = \\ = (f - \lambda e)_+ \wedge (g - \lambda e)_+ = (\lambda e - f)_- \wedge (\lambda e - g)_-\,,\end{gathered}$$

условие $\big(\lambda e - (f \wedge g)\big)_- \geq \kappa$ выполнено тогда и только тогда, когда $(\lambda e - f)_- \geq \kappa$ и $(\lambda e - g)_- \geq \kappa$. Нужное утверждение вытекает из (1). $\triangleright$

4.2.2. Пусть $\kappa \in \Lambda$ и $e \in E$ таковы, что $e \geq \kappa$. Рассмотрим отображение $h_\kappa : E \to \overline{\mathbb{R}}$, сопоставляющее каждому $f \in E$ элемент $f^\wedge(\kappa)$, определенный с помощью (1). По предыдущей лемме ограничение отображения h_κ на векторную подрешетку $E_\kappa := \{x \in E : |h_\kappa(x)| < \infty\}$ решетки E будет $\mathbb{R}$-значным решеточным гомоморфизмом на E_κ.

Пусть h — произвольный $\mathbb{R}$-значный решеточный гомоморфизм на E. По общему принципу насыщения существует элемент $\kappa \in \Lambda$ такой, что $\kappa \leq x$ для любого $x \in E_+$, удовлетворяющего условию $h(x) > 0$. Рассмотрим произвольное $e \in E_+$, для которого $h(e) = 1$. Тогда, как легко проверить, $h = h_\kappa$. Иначе говоря, каждый вещественнозначный решеточный гомоморфизм на векторной решетке E может быть представлен как h_κ.

4.2.3. Возьмем некоторое максимальное семейство $(e_\sigma)_{\sigma \in S}$ попарно дизъюнктных элементов векторной решетки E. Обозначим

$$^0\Lambda := \big\{\kappa \in \Lambda :\ (\exists \sigma \in S)\ \kappa \leq e_\sigma\big\} \tag{2}$$

и рассмотрим семейство подмножеств

$$^0\Lambda^x := \{\kappa \in \Lambda :\ \kappa \leq x\} \quad (x \in E_S)$$

множества $^0\Lambda$, где E_S — объединение порядковых отрезков $I_\sigma = [0, e_\sigma]$ для всех $\sigma \in S$. Легко видеть, что $\{^0\Lambda^x\}_{x \in E_S}$ — база некоторой топологии τ на $^0\Lambda$. Всюду далее в этом разделе мы будем обозначать через $(^0\Lambda, \tau)$ соответствующее топологическое пространство. Легко проверяется, что условие

$$f^\wedge(\kappa) := \inf\big\{\lambda \in \mathbb{R} :\ \big(\lambda e_{\sigma(\kappa)} - f\big)_+ \geq \kappa\big\} \tag{3}$$

корректно определяет $\overline{\mathbb{R}}$-значную функцию на $(^0\Lambda, \tau)$. Установим теперь основной результат этого параграфа.

Теорема. *При сделанных выше предположениях функция $f^\wedge$ лежит в классе $C_\infty(^0\Lambda)$ для каждого $f \in E$. Более того, отображение, сопоставляющее каждому элементу $f \in E$ функцию $f^\wedge$, является решеточным изоморфизмом векторной решетки E на векторную подрешетку $f^\wedge(E)$ пространства $C_\infty(^0\Lambda)$.*

$\lhd$ Покажем, что функции, определенные в (3), непрерывны в топологии ${}^0\Lambda$. Возьмем произвольное $f \in E$. Достаточно установить непрерывность функции $f^\wedge$ на подпространствах ${}^0\Lambda^{e_\sigma}$ $(\sigma \in S)$ пространства ${}^0\Lambda$. Зафиксируем некоторое $\sigma \in S$ и положим $e := e_\sigma$. Рассмотрим множества

$$P_\lambda := \big\{\kappa \in {}^0\Lambda^e : (\lambda e - f)_+ \geq \kappa\big\},$$
$$N_\lambda := \big\{\kappa \in {}^0\Lambda^e : (\lambda e - f)_- \geq \kappa\big\}$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ — возрастающее семейство открытых подмножеств в ${}^0\Lambda^e$, в то время как $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ — убывающее семейство; более того, $P_\lambda \cap N_\lambda = \varnothing$ для всех λ. Поскольку, кроме этого,

$$(se - f)_+ + (te - f)_+ \geq (s - t)e$$

для всех $s, t \in \mathbb{R}$, $s > t$, имеем $P_s \cup N_t = {}^0\Lambda^e$. Следовательно,

$$\mathrm{cl}P_t \subseteq {}^0\Lambda^e \setminus N_t \subseteq P_s = \mathrm{int}P_s \qquad (s > t). \tag{4}$$

Из определения функции $f^\wedge$ вытекает, что для всех $\kappa \in {}^0\Lambda^e$

$$f^\wedge(\kappa) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \kappa \in P_\lambda\}. \tag{5}$$

Легко проверяется, что из условий (4) и (5) вытекает непрерывность $f^\wedge$ на ${}^0\Lambda^e$, что и требовалось.

Теперь покажем, что функции вида $f^\wedge$ конечны на плотных подмножествах пространства ${}^0\Lambda$. Как и при доказательстве непрерывности, мы ограничимся рассмотрением функций на подпространствах ${}^0\Lambda^e$, где e — элемент семейства $(e_\sigma)_{\sigma\in S}$. Таким образом, нам нужно доказать, что множество $\mathscr{D}(f)$ плотно в ${}^0\Lambda^e$ для каждого $f \in E$. Рассмотрим произвольное $f \in E$ (можно считать, что $f \geq 0$) и предположим, что элемент $u \in E$, $0 < u \leq e$, удовлетворяет условиям $f^\wedge(\kappa) = \infty$ $(\kappa \in {}^0\Lambda^u)$. Тогда $u = 0$. Действительно, условие $(\lambda e - f)_+ \geq \kappa$ нарушается для всех $\kappa \in {}^0\Lambda^e$ и $\kappa \leq u$. Поскольку элементы множества ${}^0\Lambda^e$ неразложимы,

$$\kappa \wedge (\lambda e - f)_+ = 0 \text{ для всех } \kappa \in {}^0\Lambda^u, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Множество Λ является насыщенным, и из (6) следует, что элементы u и $(\lambda e - f)_+$ решетки E дизъюнктны для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$u \wedge \bigl(e - (1/n)f\bigr)_+ = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Отсюда следует, что

$$u \wedge e = u \wedge \sup\nolimits_E \bigl\{\bigl(e - (1/n)f\bigr)_+ : \, n \in \mathbb{N}\bigr\} = 0,$$

так как решетка E архимедова. В то же время, $u \leq e$. Значит, $u = 0$. Поэтому множество $\{f^\wedge = \infty\}$ не содержит непустого открытого подмножества пространства Λ.

По лемме 4.2.1 отображение $f \to f^\wedge$ является решеточным гомоморфизмом векторной решетки E на векторную подрешетку $f^\wedge(E)$ пространства $C_\infty({}^0\Lambda)$.

Для завершения доказательства теоремы остается установить инъективность отображения. Для этого достаточно проверить, что из $f \in E_+$ и $f^\wedge = 0$ следует $f = 0$. Пусть элемент $f \in E_+$ удовлетворяет равенству $f^\wedge(\kappa) = 0$ для всех $\kappa \in {}^0\Lambda$. Выберем произвольное $\sigma \in S$. Тогда

$$\inf\bigl\{\lambda : \, (\lambda e_\sigma - f)_+ \geq \kappa\bigr\} = 0 \quad (\kappa \leq e_\sigma),$$

и, следовательно, $\bigl(f - (1/n)e_\sigma\bigr)_+ \wedge \kappa \; = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\kappa \leq e_\sigma$. Поскольку множество Λ насыщено,

$$\bigl(f - (1/n)e_\sigma\bigr)_+ \wedge e_\sigma = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Векторная решетка E архимедова. Тем самым из последнего отношения следует, что

$$\begin{gathered} e_\sigma \wedge f = e_\sigma \wedge \sup\bigl\{\bigl(f - (1/n)e_\sigma\bigr)_+ : \, n \in \mathbb{N}\bigr\} = \\ = \sup\bigl\{\bigl(f - (1/n)e_\sigma\bigr)_+ \wedge e_\sigma : \, n \in \mathbb{N}\bigr\} = 0. \end{gathered}$$

Отсюда ввиду произвольности выбора $\sigma \in S$ элемент f дизъюнктен любому элементу семейства $(e_\sigma)_{\sigma \in S}$, что возможно (ввиду максимальности семейства) только если $f = 0$. Значит, отображение $f \to f^\wedge$ является инъективным. Теорема полностью доказана. $\triangleright$

4.2.4. Определим отношение эквивалентности $\mathscr{R}$ на Λ следующим образом: $\varkappa_1 \mathscr{R} \varkappa_2$, когда $f^\wedge(\varkappa_1) = f^\wedge(\varkappa_2)$ для каждого $f \in E$. По теореме 4.1.4 Λ — компактное пространство. Отсюда сразу следует, что фактор-пространство $\Lambda_{\mathscr{R}}$ пространства Λ по отношению эквивалентности $\mathscr{R}$ также является компактным. Это фактор-пространство является хаусдорфовым по построению. Для каждого элемента $\varkappa \in \Lambda$ обозначим через $\langle\varkappa\rangle$ класс эквивалентности $\varkappa$ в пространстве $\Lambda_{\mathscr{R}}$. Легко заметить, что формула

$$\varphi(f)\big(\langle\varkappa\rangle\big) := f^\wedge(\varkappa) \quad (f \in E,\ \varkappa \in \Lambda) \tag{7}$$

корректно задает отображение $\varphi : E \to C_\infty(\Lambda_{\mathscr{R}})$, где $C_\infty(\Lambda_{\mathscr{R}})$ — пространство расширенных функций на компакте $\Lambda_{\mathscr{R}}$. Следующая лемма является следствием теоремы 4.2.3 и определения отображения φ.

Лемма. *Отображение φ является решеточным изоморфизмом векторной решетки E на векторную подрешетку $\varphi(E)$ в $C_\infty(\Lambda_{\mathscr{R}})$. Кроме того, $\varphi(E)$ разделяет точки $\Lambda_{\mathscr{R}}$ и φ переводит элемент e в функцию, тождественно равную* 1.

4.2.5. Пусть E — (r)-полная архимедова векторная решетка с сильной единицей e. Тогда по предыдущей лемме E решеточно изоморфна векторной подрешетке $\varphi(E)$ пространства $C(\Lambda_{\mathscr{R}})$ функций, непрерывных на компакте $\Lambda_{\mathscr{R}}$; более того, $\varphi(E)$ разделяет точки $\Lambda_{\mathscr{R}}$ и содержит все постоянные функции. Так как E (r)-полна, подрешетка $\varphi(E)$ (r)-замкнута в $C(\Lambda_{\mathscr{R}})$. Применяя хорошо известную лемму Крейна, получаем $\varphi(E) = C(\Lambda_{\mathscr{R}})$. Установлено следующее утверждение.

Теорема (С. Какутани, М. Г. Крейн, С. Г. Крейн). *Для любой (r)-полной архимедовой векторной решетки E с сильной единицей e существует компакт Q такой, что E решеточно изоморфна векторной решетке $C(Q)$. Более того, соответствующий изоморфизм можно построить так, чтобы он переводил элемент e в функцию, тождественно равную* 1.

4.2.6. Мы также дадим набросок нестандартного доказательства теоремы Вулиха — Огасавары.

Теорема (Б. З. Вулих, Т. Огасавара). *Для любой условно полной векторной решетки E с единицей e существует экстремально несвязный компакт Q такой, что E решеточно изоморфна порядково плотному идеалу E' условно полной векторной решетки $C_\infty(Q)$. Более того, соответствующий изоморфизм можно построить так, чтобы $C(Q) \subseteq E'$, и функция, тождественно равная 1, соответствовала бы e.*

$\lhd$ Пусть E — условно полная векторная решетка с единицей e. Возьмем $\Lambda_{\mathscr{R}}$ в качестве компакта Q. Сначала проверим, что пространство $\Lambda_{\mathscr{R}}$ экстремально несвязно. Достаточно показать, что замыкание объединения любого семейства множеств в некоторой базе топологии $\Lambda_{\mathscr{R}}$ является открытым. Рассмотрим базу $\{\Lambda_{\mathscr{R}}^x\}_{x\in E_+}$ топологии пространства $\Lambda_{\mathscr{R}}$, образованную множествами

$$\Lambda_{\mathscr{R}}^x := \big\{\langle\kappa\rangle \in \Lambda_{\mathscr{R}} : \kappa \leq x\big\}.$$

Возьмем произвольное семейство множеств $\big\{\Lambda_{\mathscr{R}}^x\big\}_{x\in A}$ в этой базе. Замыкание объединения $\bigcup_{x\in A}\Lambda_{\mathscr{R}}^x$ открыто, так как оно совпадает с множеством $\Lambda_{\mathscr{R}}^y$, где y — проекция e на полосу, порожденную множеством A. Пространство $C_\infty(\Lambda_{\mathscr{R}})$ расширенных непрерывных функций на экстремально несвязном компакте $\Lambda_{\mathscr{R}}$ является условно полной векторной решеткой (см. [21, теорема 47.4]). По лемме 4.2.1 отображение φ, определенное в (7), является решеточным изоморфизмом E на разделяющую точки векторную подрешетку $\varphi(E)$ в $C_\infty(\Lambda_{\mathscr{R}})$; кроме того,

$$\varphi(e)[x] = 1 \text{ для всех } x \in \Lambda_{\mathscr{R}}.$$

Для завершения доказательства остается установить, что $\varphi(E)$ — порядково плотный идеал в $C_\infty(\Lambda_{\mathscr{R}})$. Векторная решетка E условно полна; тем самым она (r)-полна. Согласно результату предыдущего раздела $\varphi(E_e) = C(\Lambda_{\mathscr{R}})$, где E_e — главный идеал в E, порожденный элементом e. Таким образом, векторная решетка $\varphi(E)$ содержит порядково плотный идеал $C(\Lambda_{\mathscr{R}})$ в $C_\infty(\Lambda_{\mathscr{R}})$. Следовательно, для того, чтобы множество $\varphi(E)$ было порядково плотным идеалом в $C_\infty(\Lambda_{\mathscr{R}})$ вместе с каждым элементом $\varphi(x) \geq 0$, надо, чтобы оно содержало все элементы $f \in C_\infty(\Lambda_{\mathscr{R}})$, где $0 \leq f \leq \varphi(x)$. Возьмем произвольное $x \in E_+$, и пусть функция $f \in C_\infty(\Lambda_{\mathscr{R}})$ такова, что $0 \leq f \leq \varphi(x)$. Рассмотрим элементы

$$f_n := f \wedge n\varphi(e) \quad (n \in \mathbb{N})$$

пространства $C_\infty(\Lambda_{\mathscr{R}})$. Очевидно, $f_n \in C(\Lambda_{\mathscr{R}})$. Следовательно, существуют $y_n \in E$ такие, что $f_n = \varphi(y_n)$. Поскольку φ является решеточным изоморфизмом, $y_n \uparrow \leq x$. Из условной полноты E следует существование $y = \sup_E\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Проводя простую проверку, получаем $f = \varphi(y)$. $\triangleright$

4.2.7. В заключение покажем, что в случае, когда E является решеткой с проекторами на главные полосы, отношение эквивалентности $\mathscr{R}$ можно описать более просто.

Лемма. *Пусть векторная решетка E обладает проекторами на главные полосы. Тогда для произвольных $\kappa_1, \kappa_2 \in \Lambda$ эквивалентность $\kappa_1 \mathscr{R} \kappa_2$ имеет место тогда и только тогда, когда κ_1 и κ_2 обладают одними и теми же стандартными верхними границами в E.*

$\triangleleft$ Предположим, что элементы κ_1 и κ_2 имеют совпадающие множества стандартных верхних границ. Тогда эквивалентность $\kappa_1 \mathscr{R} \kappa_2$ сразу следует из определения отношения $\mathscr{R}$. Наоборот, предположим, что множества $\{f \in E : f \geq \kappa_1\}$ и $\{f \in E : f \geq \kappa_2\}$ различны. Например, возьмем $x \in E_+$ таким, что $x \geq \kappa_1$ и $x \not\geq \kappa_2$. Тогда $x \wedge \kappa = 0$, поскольку элемент κ является неделимым. Рассмотрим проекцию $\mathrm{pr}_x(e)$ единицы e решетки E на главную полосу, порожденную x. Легко заметить, что $\widehat{y}(\kappa_1) = 1$ и $\widehat{y}(\kappa_2) = 0$. Следовательно, $(\kappa_1, \kappa_2) \notin \mathscr{R}$. $\triangleright$

4.3. Порядок, (r)-сходимость и принцип Архимеда

В нестандартном расширении векторной решетки мы определим некоторые типы инфинитезимальных элементов и используем их для нестандартного описания различных видов сходимости. Мы также получим нестандартное условие архимедовости векторной решетки.

4.3.1. Пусть E — векторная решетка. Для каждого элемента $\kappa \in {}^*E$ рассмотрим множества стандартных верхних и нижних границ: $U(\kappa) := \{x \in E : x \geq \kappa\}$, $L(\kappa) := \{y \in E : \kappa \geq y\}$. Определим следующие внутренние подмножества нестандартного расширения

${}^*E$ векторной решетки E:

$$\operatorname{fin}({}^*E) := \bigl\{\kappa \in {}^*E : U\bigl(|\kappa|\bigr) \neq \varnothing\bigr\},$$
$$o\text{-}\mathrm{pns}({}^*E) := \bigl\{\kappa \in {}^*E : \inf\nolimits_E\bigl(U(\kappa) - L(\kappa)\bigr) = 0\bigr\},$$
$$\eta({}^*E) := \bigl\{\kappa \in {}^*E : \inf\nolimits_E U\bigl(|\kappa|\bigr) = 0\bigr\},$$
$$\lambda({}^*E) := \bigl\{\kappa \in {}^*E : (\exists y \in E)(\forall n \in \mathbb{N})\ |n\kappa| \le y\bigr\}.$$

Легко видеть, что $\operatorname{fin}({}^*E)$, $o\text{-}\mathrm{pns}({}^*E)$, $\eta({}^*E)$ и $\lambda({}^*E)$ являются векторными решетками относительно решеточных операций, сложения и умножения на скаляры из поля $\mathbb{R}$, индуцированных из стандартной векторной решетки ${}^*E$. Элементы $\operatorname{fin}({}^*E)$ называются *конечными*; элементы $o\text{-}\mathrm{pns}({}^*E)$ называются (o)-*предоколостандартными*; элементы $\eta({}^*E)$ называются (o)-*бесконечно малыми*; элементы $\lambda({}^*E)$ называются (r)-*бесконечно малыми.* Элементы $E + \eta({}^*E)$ $\bigl(E + \lambda({}^*E)\bigr)$ называются (o)-*околостандартными* (соответственно (r)-*околостандартными*). Они обладают следующими простыми свойствами:

(1) E — векторная подрешетка в $o\text{-}\mathrm{pns}({}^*E)$, в свою очередь $o\text{-}\mathrm{pns}({}^*E)$ — векторная подрешетка в $\operatorname{fin}({}^*E)$;

(2) $\eta({}^*E)$ является идеалом одновременно и в $\operatorname{fin}({}^*E)$, и в $o\text{-}\mathrm{pns}({}^*E)$;

(3) $E \cap \eta({}^*E) = \{0\}$;

(4) $\lambda({}^*E)$ — идеал в $\operatorname{fin}({}^*E)$.

4.3.2. Существуют простые нестандартные критерии порядковой сходимости монотонной сети.

Пусть $(x_\alpha)_{\alpha\in\Xi}$ — убывающая или возрастающая сеть в векторной решетке E. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) *сеть (x_α) порядково сходится к нулю;*

(2) *$x_\beta \in \eta({}^*E)$ для всех $\beta \in {}^a\Xi$;*

(3) *$x_\beta \in \eta({}^*E)$ для некоторого $\beta \in {}^a\Xi$.*

$\triangleleft$ Рассмотрим только случай убывающей сети.

(1)→(2): Предположим, что $x_\alpha \downarrow 0$. Тогда каждый бесконечно удаленный элемент $\beta \in {}^a\Xi$ удовлетворяет неравенству $x_\alpha \ge x_\beta \ge 0$ для всех $\alpha \in \Xi$. Следовательно, $\inf_E U(|x_\beta|) = 0$ и $x_\beta \in \eta({}^*E)$.

(2)→(3): Сразу следует из леммы 4.0.5.

(3)→(1): Возьмем элемент $\beta \in {}^a\Xi$, для которого $x_\beta \in \eta({}^*E)$. Так как $x_\alpha\downarrow$, мы имеем $(x_\beta)_- \ge (x_\alpha)_- \ge 0$ для всех $\alpha \in \Xi$. В силу условия

$x_\beta \in \eta(^*E)$ справедливо $(x_\alpha)_- = 0$ для всех $\alpha \in \Xi$. Следовательно, $x_\alpha\downarrow \geq 0$. Пусть $y \in E_+$ — произвольный элемент такой, что $x_\alpha\downarrow \geq y$. По принципу переноса для любого $\alpha \in {}^*\Xi$ выполнено неравенство $x_\alpha \geq y$. В частности, $x_\beta \geq y$. Это возможно только лишь в том случае, если $y = 0$. Отсюда $x_\alpha \downarrow 0$. $\rhd$

Легко видеть, что импликации (1)→(2) и (2)→(3) выполнены для произвольной (не обязательно монотонной) сети $(x_\alpha)_{\alpha\in\Xi} \subseteq E$. Однако импликация (3)→(1) в общем случае неверна без условия монотонности. В самом деле, пусть $E := L_1[0,1]$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ подберем элементы $f_1^n, f_2^n, \dots, f_{2^n}^n \in E$ такие, что f_k^n — класс эквивалентности, содержащий характеристическую функцию интервала $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$. Образуем из этих элементов последовательность

$$f_1^1, f_2^1, \quad f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2, \quad \dots, \quad f_1^n, f_2^n, \dots, f_{2^n}^n, \quad \dots .$$

Очевидно, что для этой последовательности условия (2) и (3) выполнены, однако она не сходится ни к какому элементу из E.

4.3.3. Теперь мы установим нестандартные критерии (r)-сходимости монотонной последовательности.

Пусть (x_n) — убывающая или возрастающая последовательность элементов векторной решетки E. Следующие условия эквивалентны:

(1) $x_n \xrightarrow{(r)} 0$;
(2) $x_\nu \in \lambda(^*E)$ *для каждого* $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$;
(3) $x_\nu \in \lambda(^*E)$ *для некоторого* $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

$\lhd$ Проверим только импликацию (2)→(1) и рассмотрим лишь случай убывающей последовательности. Пусть $x_\nu \in \lambda(^*E)$ для некоторого $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Очевидно, что $x_n \geq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что условие $x_n \xrightarrow{(r)} 0$ не выполнено. Тогда для каждого $d \in E$ существует число $n(d) \in \mathbb{N}$ такое, что $n(d) \cdot x_k \not\leq d$ для всех $k \in \mathbb{N}$. По принципу перемещения $n(d) \cdot x_k \not\leq d$ для всех $k \in {}^*\mathbb{N}$. В частности, $n(d) \cdot x_\nu \not\leq d$. Это противоречит тому, что $x_\nu \in \lambda(^*E)$. Отсюда следует, что $x_n \xrightarrow{(r)} 0$. $\rhd$

Как и в 4.3.2, заметим, что импликации (1)→(2) и (2)→(3) имеют место для любой последовательности $(x_n) \subseteq E$. В то же самое время импликация (3)→(1) может нарушаться без свойства монотонности. В этом можно убедиться, рассмотрев пример в 4.3.2. В самом деле, легко видеть, что построенная последовательность удовлетворяет условиям (2) и (3), но не удовлетворяет условию (1).

4.3.4. Дадим нестандартные критерии архимедовости векторной решетки. Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть u — элемент векторной решетки E и $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Тогда либо $u = 0$, либо $\nu u \notin o\text{-}\mathrm{pns}({}^*E)$.*

$\triangleleft$ Пусть $u \neq 0$. Возьмем произвольные $x \in L\big(|\nu u|\big)$ и $y \in U\big(|\nu u|\big)$. Тогда $x \leq |\nu u| \leq y$. По принципу переноса найдется такой $m \in \mathbb{N}$, что $x \leq |mu| \leq y$. Сравнивая эту двойное неравенство с предыдущим, получаем, что $|u| \leq |\nu u| - |mu| \leq y - x$. Поскольку элементы $x \in L\big(|\nu u|\big)$ и $y \in U\big(|\nu u|\big)$ были выбраны произвольно, имеем $U\big(|\nu u|\big) - L\big(|\nu u|\big) \geq |u| > 0$. Тем самым $|\nu u|$, а, значит, и νu, не принадлежит $o\text{-}\mathrm{pns}({}^*E)$. $\triangleright$

4.3.5. *Теорема.* *Для любой векторной решетки E следующие условия эквивалентны:*

- **(1)** *E — архимедова векторная решетка;*
- **(2)** *$\lambda({}^*E) \cap E = \{0\}$;*
- **(3)** *$\lambda({}^*E) \subseteq \eta({}^*E)$;*
- **(4)** *$\lambda({}^*E) \subseteq o\text{-}\mathrm{pns}({}^*E)$;*
- **(5)** *$o\text{-}\mathrm{pns}({}^*E)$ — (r)-замкнутая векторная подрешетка в $\mathrm{fin}({}^*E)$;*
- **(6)** *$\eta({}^*E)$ — (r)-замкнутый идеал в $\mathrm{fin}({}^*E)$.*

$\triangleleft$ Будем доказывать теорему следующим способом:

$$(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to (1) \quad \text{и} \quad (1) \to (5) \to (6) \to (1).$$

(1)$\to$(2): Очевидно.

(2)$\to$(3): Пусть $\kappa \in \lambda({}^*E) \setminus \eta({}^*E)$. Тогда существует $y \in E$ такой, что $|n\kappa| \leq y$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $(1/n)y \in U\big(|\kappa|\big)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $\kappa \notin \eta({}^*E)$, существует $z \in E$, удовлетворяющий неравенству $0 < z \leq U\big(|\kappa|\big)$. В частности, $0 < z \leq (1/n)y$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $0 \neq z \in \lambda({}^*E) \cap E$, что противоречит условию (2).

(3)$\to$(4): Это справедливо ввиду $\eta({}^*E) \subseteq o\text{-}\mathrm{pns}({}^*E)$.

(4)$\to$(1): Возьмем произвольные элементы $u, v \in E$, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq nu \leq v$ $(n \in \mathbb{N})$, и предположим, что

$\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Тогда очевидно, что $\nu u \in \lambda({}^*E)$, и по предположению $\nu u \in o\text{-pns}({}^*E)$. Отсюда по лемме 4.3.4 имеем $u = 0$. Таким образом, решетка E является архимедовой.

(1)$\to$(5): Рассмотрим последовательность (κ_n) элементов в векторной решетке $o\text{-pns}({}^*E)$, которая (r)-сходится к некоторому элементу $\kappa \in \mathrm{fin}({}^*E)$. Покажем, что κ лежит в $o\text{-pns}({}^*E)$. Можно предполагать, что (κ_n) e-равномерно сходится к κ для некоторого $e \in E$. Тогда существует последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$ вещественных чисел такая, что $|\kappa_k - \kappa| \leq \varepsilon_n e$ для всех натуральных $k \geq n$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\kappa_n - \varepsilon_n e \leq \kappa \leq \kappa_n + \varepsilon_n e$ и тем самым

$$L(\kappa_n - \varepsilon_n e) \leq \kappa \leq U(\kappa_n + \varepsilon_n e). \tag{1}$$

Для данного $n \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\mathscr{E}_n := U(\kappa_n + \varepsilon_n e) - L(\kappa_n - \varepsilon_n e).$$

Из включения $(\kappa_n) \subseteq o\text{-pns}({}^*E)$ и (1) следует, что

$$\inf\nolimits_E \mathscr{E}_n = 2\varepsilon_n e \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Так как E архимедова, из (2) следует, что $\inf_E \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}_n = 0$, и тогда $\inf_E\bigl(U(\kappa) - L(\kappa)\bigr) = 0$. Здесь мы используем включение $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}_n \subseteq U(\kappa) - L(\kappa)$, полученное из (1). Отсюда $\kappa \in o\text{-pns}({}^*E)$. Следовательно, $o\text{-pns}({}^*E)$ (r)-замкнуто в $\mathrm{fin}({}^*E)$.

(5)$\to$(6): Пусть $\kappa_n \in \eta({}^*E)$ и $\kappa_n \xrightarrow{(r)} \kappa \in \mathrm{fin}({}^*E)$. Тогда по предположению $\kappa \in o\text{-pns}({}^*E)$. Проверим, что $\kappa \in \eta({}^*E)$. Мы можем считать, что $\kappa_n \xrightarrow{(r)} \kappa$ d-равномерно для некоторого $d \in E$. Это означает, что $|\kappa_n - \kappa| \leq \varepsilon_n d$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и некоторой подходящей последовательности $(\varepsilon_n) \subseteq \mathbb{R}$, $\varepsilon_n \downarrow 0$. Предположим, что $\kappa \notin \eta({}^*E)$. Возьмем произвольный элемент $a \in E$, удовлетворяющий неравенству $U\bigl(|\kappa|\bigr) \geq a \geq 0$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем произвольное $u_n \in U\bigl(|\kappa_n|\bigr)$. Очевидно, что $u_n + \varepsilon_n d \geq |\kappa_n| + \varepsilon_n d \geq |\kappa|$. Отсюда получаем

$$U\bigl(|\kappa_n|\bigr) + \varepsilon_n d \subseteq U\bigl(|\kappa|\bigr) \text{ и } U\bigl(|\kappa_n|\bigr) + \varepsilon_n d \geq a.$$

Из равенства $\inf_E U\bigl(|\kappa_n|\bigr) = 0$ следует, что $\varepsilon_n d \geq a$. Это неравенство выполнено для всех натуральных n, и убывающая последовательность (ε_n) стремится к нулю. Тем самым $d \geq ka$ для каждого

$k \in \mathbb{N}$. Применяя принцип переноса, получаем, что $d \geq ka$ для всех $k \in {}^*\mathbb{N}$. Рассмотрим некоторое $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Легко видеть, что последовательность $(ka)_{k=1}^{\infty}$ элементов E d-равномерно сходится к элементу νa векторной решетки $\mathrm{fin}({}^*E)$. Так как по предположению $o\text{-pns}({}^*E)$ — (r)-замкнутая векторная подрешетка в $\mathrm{fin}({}^*E)$, имеем $\nu a \in o\text{-pns}({}^*E)$. Ввиду 4.3.4, отсюда следует, что $a = 0$. Значит, $\inf_E U\big(|\kappa|\big) = 0$ и тем самым $\kappa \in \eta({}^*E)$, что и требовалось доказать.

(6)$\to$(1): Возьмем произвольные $u, v \in E$, удовлетворяющие $0 \leq nu \leq v$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $u = 0$. Пусть $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Легко видеть, что последовательность (x_n) с $x_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ v-равномерно сходится к элементу νu. По предположению идеал $\eta({}^*E)$ (r)-замкнут в $\mathrm{fin}({}^*E)$, откуда $\nu u \in \eta({}^*E)$. Следовательно, используя лемму 4.3.4, имеем $u = 0$. $\triangleright$

4.3.6. Теорема. *Для векторной решетки E следующие условия эквивалентны:*

(1) *E — порядково сепарабельная архимедова решетка, в которой для любой последовательности порядковая и (r)-сходимости совпадают;*

(2) $\eta({}^*E) = \lambda({}^*E)$.

$\triangleleft$ (1)$\to$(2): Включение $\lambda({}^*E) \subseteq \eta({}^*E)$ для E выполнено по теореме 4.3.5. Докажем обратное включение. Возьмем произвольное $\kappa \in \eta({}^*E)$. Тогда $\inf_E U\big(|\kappa|\big) = 0$. Кроме того, $U := U\big(|\kappa|\big)$ — направленное вниз множество такое, что $U \downarrow 0$, и, так как E — порядково сепарабельная векторная решетка, существует последовательность $(u_n) \subseteq U$, $u_n \downarrow 0$. Из условия (1) следует, что $u_n \xrightarrow{(r)} 0$. Тогда по 4.3.3 выполнено $u_\nu \in \lambda({}^*E)$ для всех $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Следовательно, $\kappa \in \lambda({}^*E)$, так как $|\kappa| \leq u_n$ для всех $n \in {}^*\mathbb{N}$.

(2)$\to$(1): Векторная решетка E архимедова по теореме 4.3.5. Покажем, что в E для любой последовательности порядковая и (r)-сходимости совпадают. Достаточно доказать, что каждая последовательность $u_n \downarrow 0$ удовлетворяет условию $u_n \xrightarrow{(r)} 0$. Возьмем произвольную последовательность $(u_n) \subseteq E$ такую, что $u_n \downarrow 0$. Тогда из 4.3.2 получаем, что, $u_\nu \in \eta({}^*E)$ для всех $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Отсюда $u_\nu \in \lambda({}^*E)$ для всех $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Из 4.3.3 получаем, что $u_n \xrightarrow{(r)} 0$.

Остается проверить, что векторная решетка E порядково сепарабельна. Возьмем произвольную сеть $(x_\xi)_{\xi \in \Xi} \subseteq E$ такую, что $x_\xi \downarrow 0$.

По лемме 1.1.5 существует бесконечно удаленный элемент τ в стандартном направленном множестве ${}^*\Xi$. Тогда из 4.3.2 получаем, что $x_\tau \in \eta({}^*E)$ и тем самым $x_\tau \in \lambda({}^*E)$. В этом случае существует $d \in E$, удовлетворяющий для всех $n \in \mathbb{N}$ неравенству $nx_\tau \leq d$. Предположим, что (x_ξ) не содержит (r)-сходящейся к нулю последовательности. Тогда существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $n_0 x_\xi \not\leq d$ для всех $\xi \in \Xi$. По принципу переноса $n_0 x_\xi \not\leq d$ для каждого $\xi \in {}^*\Xi$. Это противоречит тому, что неравенство $n_0 x_\tau \leq d$ обеспечивает существование последовательности $(x_{\xi_n}) \subseteq (x_\xi)$ такой, что $x_{\xi_n} \xrightarrow{(r)} 0$. Поскольку E архимедова, имеем $x_{\xi_n} \xrightarrow{(o)} 0$. Тем самым векторная решетка E порядково сепарабельна. $\triangleright$

4.4. Условное пополнение и атомность решеток

В этом параграфе мы проведем нестандартное построение условного пополнения архимедовой векторной решетки. Мы также предложим инфинитезимальную интерпретацию свойства атомности векторной решетки.

4.4.1. Пусть E — векторная решетка. Рассмотрим векторную фактор-решетку $\widehat{E} := o\text{-pns}({}^*E)/\eta({}^*E)$ и обозначим через $\widehat{\eta}$ отображение $x \to [x]$, где $x \in E$ и $[x] \in \widehat{E}$ — класс эквивалентности, содержащий x.

Теорема. *Для любой архимедовой векторной решетки E справедливы следующие утверждения:*

(1) *$\widehat{E}$ условно полна;*

(2) *$\widehat{\eta}$ — решеточный изоморфизм векторной решетки E в векторную решетку $\widehat{E}$;*

(3) *для каждого $x \in E$*

$$x = \sup\nolimits_{\widehat{E}} \big\{ y \in \widehat{\eta}(E) : \, y \leq x \big\} = \inf\nolimits_{\widehat{E}} \big\{ y \in \widehat{\eta}(E) : \, y \geq x \big\}.$$

Другими словами, векторная решетка $\widehat{E}$ является условным пополнением E.

$\triangleleft$ Доказательство этой теоремы разобьем на четыре шага.

Шаг 1. *Пусть E — произвольная векторная решетка. Тогда для каждого $0 < x \in \widehat{E}$ существует элемент $e \in E$ такой, что $0 < \widehat{\eta}(e) \leqslant x$.*

Возьмем элемент $x \in \widehat{E}$, $x > 0$. Пусть $\kappa \in o\text{-pns}({}^*E))$ таково, что $\kappa > 0$ и $x = [\kappa]$. Тогда существует $e \in E$, для которого $0 < e \leqslant \kappa$. В самом деле, в противном случае $\sup_E L(\kappa) = 0$. Следовательно, $\inf_E U(\kappa) = 0$, так как $\kappa \in o\text{-pns}({}^*E)$. Это противоречит тому, что $[\kappa] = x \neq 0$. Элемент e является искомым.

Шаг 2. *Для элемента $x \in \widehat{E}$ полагаем*

$$\widehat{\mathscr{U}}(x) := \{y \in \widehat{\eta}(E) : y \geqslant x\}; \quad \widehat{\mathscr{L}}(x) := \{z \in \widehat{\eta}(E) : x \geqslant z\}.$$

Тогда

$$x = \inf_{\widehat{E}} \widehat{\mathscr{U}}(x) = \sup_{\widehat{E}} \widehat{\mathscr{L}}(x).$$

Пусть $\kappa \in o\text{-pns}({}^*E)$ и $x = [\kappa]$. Для доказательства достаточно проверить, что любой элемент $y \in \widehat{E}$, удовлетворяющий $\widehat{\mathscr{L}}(x) \leqslant y \leqslant \widehat{\mathscr{U}}(x)$, совпадает с x. Возьмем произвольный $y \in \widehat{E}$ такой, что $\widehat{\mathscr{L}}(x) \leqslant y \leqslant \widehat{\mathscr{U}}(x)$. Предположим, что $|x - y| > 0$. Так как согласно шагу 1 векторная решетка $\widehat{\eta}(E)$ является минорантной в $\widehat{E}$, существует $e \in E$ такое, что

$$\widehat{\mathscr{U}}(x) - \widehat{\mathscr{L}}(x) \geqslant |x - y| \geqslant \widehat{\eta}(e) > 0. \tag{3}$$

Легко видеть, что

$$\widehat{\eta}(U(\kappa)) \subseteq \widehat{\mathscr{U}}(x) \text{ и } \widehat{\eta}(L(\kappa)) \subseteq \widehat{\mathscr{L}}(x).$$

Из неравенства (3) следует, что

$$\widehat{\eta}(U(\kappa) - L(\kappa)) \geqslant \widehat{\eta}(e) > 0,$$

и, следовательно, $U(\kappa) - L(\kappa) \geqslant e > 0$. Получили противоречие с $\kappa \in o\text{-pns}({}^*E)$. Значит, $|x - y| = 0$ и $y = x$.

Шаг 3. *Пусть E — архимедова векторная решетка. Тогда каждое непустое ограниченное сверху подмножество в $\widehat{\eta}(E)$ имеет точную верхнюю грань в $\widehat{E}$.*

$\lhd$ Пусть множество $D \subseteq \widehat{\eta}(E)$ непусто и ограничено сверху. Тогда подмножество $\mathscr{D} := \widehat{\eta}^{-1}(D)$ решетки E ограничено сверху в E. Обозначим через $U(\mathscr{D})$ множество всех его верхних границ в решетке E. Поскольку E архимедова,

$$\inf_E (U(\mathscr{D}) - \mathscr{D}) = 0. \tag{4}$$

Применяя общий принцип насыщения, находим элемент $\delta \in {}^*E$ такой, что

$$\mathscr{D} \leqslant \delta \leqslant U(\mathscr{D}). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $\inf_E(U(\delta) - L(\delta)) = 0$. Значит, $\delta \in o\text{-pns}({}^*E)$. Элемент $[\delta] \in \widehat{E}$ является верхней границей множества $D = \widehat{\eta}(\mathscr{D})$. Покажем, что $[\delta] = \sup_{\widehat{E}} D$. Пусть $y \in \widehat{E}$ — некоторая верхняя граница D, такая, что $[\delta] \geqslant y$. По (5) имеем

$$0 \leqslant [\delta] - y \leqslant \widehat{\eta}(U(\mathscr{D}) - \mathscr{D}). \tag{6}$$

Согласно шагу 1 векторная решетка $\widehat{\eta}(E)$ является минорантной в $\widehat{E}$. Отсюда по (4) и (6) получаем $y = [\delta]$. Таким образом, $[\delta] = \sup_{\widehat{E}} D$.

Шаг 4.

Завершим доказательство теоремы. Утверждение (2) очевидно. Утверждение (3) верно по шагу 2. Любопытно отметить, что (2) и (3) выполнены в произвольной векторной решетке. Проверим условие (1). Возьмем произвольное непустое ограниченное сверху подмножество A в $\widehat{E}$. Обозначим

$$\mathscr{A} := \{x \in E : (\exists a \in A)\widehat{\eta}(x) \leqslant a\}.$$

Согласно шагу 3 множество $\widehat{\eta}(\mathscr{A})$ имеет точную верхнюю грань в $\widehat{E}$. Положим $a := \sup_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(\mathscr{A})$. Легко видеть, что $a = \sup_{\widehat{E}} A$. Значит, каждое непустое ограниченное сверху подмножество в $\widehat{E}$ имеет точную верхнюю грань, что и требовалось доказать. $\rhd$

4.4.2. Сформулированное ниже утверждение легко получается из доказанной теоремы, однако мы приведем более простое и прямое доказательство этого утверждения.

Теорема. *Для любой архимедовой векторной решетки E следующие условия эквивалентны:*

(1) *Векторная решетка E условно полна;*

(2) $o\text{-pns}({}^*E) = E + \eta({}^*E)$.

$\lhd$ (1)$\to$(2): Очевидно, что $E + \eta({}^*E) \subseteq o\text{-pns}({}^*E)$. Установим обратное включение. Рассмотрим произвольное $\kappa \in o\text{-pns}({}^*E)$. Тогда $\kappa \in \operatorname{fin}({}^*E)$ и тем самым $U(\kappa)$ непусто. Отсюда следует, что $L(\kappa)$ ограничено сверху. Поскольку E условно полна, $L(\kappa)$ имеет точную верхнюю грань. Полагаем $a := \sup_E L(\kappa)$. Легко видеть, что $L(\kappa) \leq a \leq U(\kappa)$. Значит, $|\kappa - a| \leq U(\kappa) - L(\kappa)$. Так как $\kappa \in o\text{-pns}({}^*E)$, из последнего неравенства следует, что $\inf_E U\big(|\kappa - a|\big) = 0$. Имеем $\kappa = a + (\kappa - a)$, где $a \in E$ и $\kappa - a \in \eta({}^*E)$. Следовательно, $\kappa \in E + \eta({}^*E)$.

(2)→(1): Достаточно показать, что каждая сеть $(u_\xi)_{\xi\in\Xi} \subseteq E$ такая, что $u_\xi\!\uparrow\ \leq d \in E$, является порядково сходящейся. Предположим, что $u_\xi\!\uparrow\ \leq d \in E$. Хорошо известно (см., например, [21, теорема 22.5]), что в архимедовой решетке E выполнено следующее условие:

$$\inf_E\big\{y - u_\xi : \xi \in \Xi,\ y \in E,\ u_\xi\!\uparrow\ \leq y\big\} = 0. \tag{7}$$

Зафиксируем бесконечно удаленный элемент $\tau \in {}^a\Xi$. Легко видеть, что $\big\{y \in E : u_\xi\!\uparrow\ \leq y\big\} = U(u_\tau)$. Более того, $(u_\xi) \subseteq L(u_\tau)$. Отсюда по (7) получаем, что $\inf_E\big\{U(u_\tau) - L(u_\tau)\big\} = 0$ или, иными словами, $u_\tau \in o\text{-pns}({}^*E)$. Тогда $u_\tau \in E + \eta({}^*E)$ по свойству (2). Пусть $u \in E$ таково, что $u_\tau - u \in \eta({}^*E)$. Тогда по 4.3.2 получаем, что сеть (u_ξ) порядково сходится к u. $\rhd$

4.4.3. Теперь рассмотрим свойство атомности векторной решетки. Напомним, что векторная решетка E называется атомной, если E архимедова и для любого $0 < x \in E$ существует атом $a \in E$ такой, что $0 < a \leq x$. Напомним также, что для любого атома a в архимедовой решетке и любого элемента $0 \leq x \leq a$ существует вещественное число α такое, что $x = \alpha a$. Начнем со следующей леммы.

Лемма. *Пусть E — некоторая атомная векторная решетка. Тогда* $\mathrm{fin}({}^*E) = o\text{-pns}({}^*E)$.

$\lhd$ Достаточно проверить, что каждый элемент $\kappa \in \mathrm{fin}({}^*E)$, $\kappa \geq 0$, удовлетворяет условию $\kappa \in o\text{-pns}({}^*E)$. Пусть κ — произвольный положительный элемент $\mathrm{fin}({}^*E)$. Предположим, что $U(\kappa) - L(\kappa) \geq x > 0$. Тогда по предположению существует атом $a \in E$ такой, что $U(\kappa) - L(\kappa) \geq a > 0$. Возьмем элемент $u \in U(\kappa)$. Так как E — архимедова векторная решетка, существует число $n \in \mathbb{N}$, для которого $na \not\leq u$. Из того, что элемент a является атомом, следует $u \wedge na = \alpha a$ и $\kappa \wedge na = \beta a$ для подходящих $\alpha, \beta \in {}^*[0, n]$. Полагаем

$$l' := \mathrm{st}(\beta - 1/3) \cdot a \text{ и } u' := u - \mathrm{st}(\alpha - \beta - 1/3) \cdot a,$$

где st — стандартная часть действительного числа. Тогда $u' \in U(\kappa)$ и $l' \in L(\kappa)$, однако $u' - l' \not\geq a$; противоречие. Следовательно, $\inf_E\big(U(\kappa) - L(\kappa)\big) = 0$, откуда $\kappa \in o\text{-pns}({}^*E)$. $\triangleright$

4.4.4. Условие $\text{fin}({}^*E) = o\text{-pns}({}^*E)$ является достаточным, но не необходимым для атомности векторной решетки E. Для доказательства этого утверждения мы введем понятие компостера положительного элемента в векторной решетке.

Определение. Пусть E — векторная решетка и $e \in E_+$. Элемент κ нестандартного расширения ${}^*E$ решетки E называется *e-компостером*, если

(1) $0 \leq \kappa \leq e$;
(2) $\inf_E\{y \in E : y \geq \kappa\} = e$;
(3) $\sup_E\{z \in E : \kappa \geq z\} = 0$.

Напомним, что элемент e векторной решетки E называется безатомным, если $|e| \wedge a = 0$ для любого атома $a \in E$. В дальнейшем нам понадобится легко проверяемое замечание:

Замечание. Для любого неатомного элемента $e \in E$, $e > 0$ и натурального n существует семейство $\{e_k\}_{k=1}^n \subseteq E$ попарно дизъюнктных элементов, удовлетворяющее неравенству $0 < e_k \leq e$ для всех $k = 1, \dots, n$.

Лемма. *Пусть E — произвольная архимедова векторная решетка. Тогда для каждого $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ и неатомного элемента $e \in E$, $e \geq 0$ существует семейство $\{e_k\}_{k=1}^{\nu} \subseteq {}^*E$ попарно дизъюнктных e-компостеров.*

$\triangleleft$ Возьмем произвольное $\nu \in {}^*\mathbb{N}$, и пусть $e \geq 0$ — неатомный элемент в E. Поскольку утверждение леммы очевидно для $e = 0$, предположим, что $e > 0$. Через L обозначим множество положительных элементов в главном идеале E_e, порожденном e в E. Очевидно, что L — решетка с нулем. По лемме 1.1.3 существует гиперконечное насыщенное семейство $\{\kappa_n\}_{n=1}^{\omega}$ попарно дизъюнктных неделимых элементов в нестандартном расширении ${}^*L$ решетки L. Очевидно, что каждое $n = 1, \dots, \omega$ удовлетворяет $0 < \kappa_n \leq e$. Применяя принцип переноса и приведенное выше замечание, легко видеть, что для каждого $n = 1, \dots, \omega$ существует гиперконечное семейство $\{\gamma_n^k\}_{k=1}^{\nu+1} \subseteq {}^*E$ такое, что

$$0 < \gamma_n^k \leq \kappa_n \quad (k = 1, \dots, \nu + 1); \quad \gamma_n^k \wedge \gamma_n^p = 0 \quad (k \neq p).$$

Применяя принцип переноса еще раз и используя то, что векторная решетка E является архимедовой, находим гиперконечное семейство $\{\alpha_n^k\}_{n=1;\ k=1}^{\omega;\ \nu} \subseteq {}^*\mathbb{R}$ со следующими свойствами:

(1) $0 < \alpha_n^k \gamma_n^k \le \kappa_n$ для всех $n = 1, \dots, \omega$ и $k = 1, \dots, \nu$;

(2) из условия $\alpha > \alpha_n^k$ следует, что

$$\alpha\gamma_n^k \not\le \kappa_n \text{ для всех } n = 1, \dots, \omega, k = 1, \dots, \nu, \text{ и } \alpha \in {}^*\mathbb{R}.$$

Положим $e_k := \bigvee_{n=1}^{\omega} \alpha_n^k \gamma_n^k$ для всех $k = 1, \dots, \nu$. Легко проверяется, что $\{e_k\}_{k=1}^{\nu}$ — нужное семейство, содержащее ν попарно дизъюнктных e-компостеров. $\triangleright$

4.4.5. *Теорема.* *Для любой векторной решетки E следующие условия эквивалентны:*

(1) *E — атомная векторная решетка;*
(2) $\mathrm{fin}({}^*E) = o\text{-}\mathrm{pns}({}^*E)$.

$\triangleleft$ (1)$\to$(2): Это установлено в лемме 4.4.3.

(2)$\to$(1): Пусть $\mathrm{fin}({}^*E) = o\text{-}\mathrm{pns}({}^*E)$. В частности, $o\text{-}\mathrm{pns}({}^*E)$ — (r)-замкнутая векторная подрешетка в $\mathrm{fin}({}^*E)$. Тем самым E является архимедовой по теореме 4.3.5. Проверим, что она является атомной. Достаточно показать, что E не содержит ненулевых неатомных элементов. Рассмотрим произвольный неатомный элемент $e \in E$. Мы можем предполагать, что $e \ge 0$. По лемме 4.4.4 существует e-компостер $\kappa \in {}^*E$. Элемент κ удовлетворяет равенству $\inf_E\big(U(\kappa) - L(\kappa)\big) = e$. С другой стороны, κ конечно и по предположению является (o)-предоколостандартным элементом в ${}^*E$. Следовательно, $e = 0$. $\triangleright$

4.4.6. В качестве приложения последней теоремы установим полезный нестандартный критерий атомности и условной полноты векторной решетки.

Теорема. *Для любой векторной решетки E следующие условия эквивалентны:*

(1) *E — атомная условно полная векторная решетка;*
(2) $\mathrm{fin}({}^*E) = E + \eta({}^*E)$.

$\triangleleft$ Заметим, что $E + \eta({}^*E) \subseteq o\text{-}\mathrm{pns}({}^*E) \subseteq \mathrm{fin}({}^*E)$, и воспользуемся теоремами 4.4.5 и 4.4.2. $\triangleright$

Обратим внимание на то, что в доказательстве теоремы использовался только факт существования одного e-компостера для неатомного элемента $e \in E_+$. В полную силу лемма 4.4.4 понадобится в дальнейшем при доказательстве критерия изоморфности векторной решетки своей порядковой оболочке.

4.5. Нормированные векторные решетки

В этом параграфе мы рассмотрим нормированные векторные решетки и изучим их некоторые инфинитезимальные интерпретации. На протяжении всего параграфа будем предполагать, что (E, ρ) — нормированная векторная решетка.

4.5.1. Хорошо известно, что в нестандартном расширении решетки E наряду с $\mathrm{fin}({}^*E)$, o-$\mathrm{pns}({}^*E)$, $\eta({}^*E)$ и $\lambda({}^*E)$ можно рассматривать следующие подмножества:

$$\mathrm{Fin}({}^*E) := \big\{\kappa \in {}^*E : \rho(\kappa) \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\big\},$$
$$\mathrm{pns}({}^*E) := \big\{\kappa \in {}^*E : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists y \in E)\ n \cdot \rho(\kappa - y) \leq 1\big\},$$
$$\mu({}^*E) := \big\{\kappa \in {}^*E : \rho(\kappa) \approx 0\big\}.$$

Легко видеть, что эти множества являются векторными решетками над $\mathbb{R}$ с соответствующими операциями, наследуемыми из ${}^*E$. Более того, $\mathrm{pns}({}^*E)$ — векторная подрешетка $\mathrm{Fin}({}^*E)$, а $\mu({}^*E)$ — идеал как в $\mathrm{pns}({}^*E)$, так и в $\mathrm{Fin}({}^*E)$.

4.5.2. Пусть E — векторная решетка. Если существует сильная единица $e \in E$, то можно ввести норму Рисса $\|\cdot\|_e$ на E по хорошо известной формуле

$$\|x\|_e := \inf\big\{\lambda \in \mathbb{R} : |x| \leq \lambda e\big\} \quad (x \in E).$$

Верен следующий результат.

Теорема. *Пусть $\big(E, \|\cdot\|\big)$ — нормированная векторная решетка. Следующие условия эквивалентны.*

- **(1)** *E обладает сильной единицей e, и норма $\|\cdot\|_e$ эквивалентна $\|\cdot\|$;*
- **(2)** $\mathrm{Fin}({}^*E) = \mathrm{fin}({}^*E)$;
- **(3)** $\mu({}^*E) \subseteq \mathrm{fin}({}^*E)$;
- **(4)** $\mu({}^*E) = \lambda({}^*E)$;
- **(5)** $\mu({}^*E) \subseteq \eta({}^*E)$;
- **(6)** $\mathrm{Fin}({}^*E) = \mathrm{fin}({}^*E) + \mu({}^*E)$.

$\lhd$ Сначала установим эквивалентность условий (2)–(5). Для этого достаточно доказать, что (2) $\to$ (3) $\to$ (4) $\to$ (5) $\to$ (3) и (4)$\to$(2):

Импликации (2)→(3), (4)→(5) и (5)→(3) не нуждаются в доказательстве.

(3)→(4): Пусть $\mu({}^*E) \subseteq \mathrm{fin}({}^*E)$. Для доказательства импликации достаточно проверить включение $\mu({}^*E) \subseteq \lambda({}^*E)$. Возьмем произвольное $\varkappa \in \mu({}^*E)$. Тогда $\|\alpha\varkappa\| \approx 0$, где $\alpha = \|\varkappa\|^{-1/2}$, и, следовательно, $\alpha\varkappa \in \mu({}^*E) \subseteq \mathrm{fin}({}^*E)$. Тогда существует элемент $y \in E$, для которого $|\alpha\varkappa| \leq y$. Тогда $|n\varkappa| \leq |\alpha\varkappa| \leq y$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и тем самым $\varkappa \in \lambda({}^*E)$.

(4)→(2): Пусть $\mu({}^*E) = \lambda({}^*E)$. Очевидно, $\mathrm{fin}({}^*E) \subseteq \mathrm{Fin}({}^*E)$. Предположим, что включение является строгим. Тогда существует $\varkappa \in {}^*E$ такой, что $\|\varkappa\| = 1$ и $|\varkappa| \not\leq y$ для всех $y \in E$. Рассмотрим внутренние множества

$$A_y^n := \{r \in {}^*\mathbb{R}_+ : n \leq r \& |\varkappa| \not\leq ry\}$$

для $y \in E_+$, $n \in \mathbb{N}$. Так как $|\varkappa| \not\leq (n+1)y$ для любых $y \in E_+$ и $n \in \mathbb{N}$, имеем $n+1 \in A_y^n$, и все эти множества непусты. Семейство $\{A_y^n\}_{y \in E_+}^{n \in \mathbb{N}}$ является центрированным, поскольку

$$A_{y \vee z}^{\max\{n,m\}} \subseteq A_y^n \cap A_z^m.$$

По общему принципу насыщения существует $r \in {}^*\mathbb{R}$, удовлетворяющее

$$r \in \cap\{A_y^n : y \in E_+,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда r — бесконечно большое положительное число такое, что $|\varkappa| \not\leq ry$ для всех $y \in E_+$. Тем не менее, $(1/r) \cdot \varkappa \in \mu({}^*E)$, поскольку $\|(1/r)\varkappa\| = 1/r \approx 0$. По предположению $\mu({}^*E) = \lambda({}^*E)$, откуда $|(1/r)\varkappa| \leq z$ для некоторого $z \in E_+$ и, следовательно, $|\varkappa| \leq rz$, что противоречит включению $r \in A_z^1$. Тем самым эквивалентность условий (2)–(5) установлена.

Для завершения доказательства покажем, что (1) → (2) → (6) → (1). Импликации (1)→(2) и (2)→(6) очевидны.

(6)→(1): Пусть $\mathrm{Fin}({}^*E) = \mathrm{fin}({}^*E) + \mu({}^*E)$. Сначала мы покажем, что единичный шар $B := \big\{x \in E : \|x\| \leq 1\big\}$ в векторной решетке E порядково ограничен. Предположим противное. Рассмотрим произвольный $x \in E_+$. Существует $y \in E_+$ такой, что $\|y\| = 1$ и $y \not\leq x$. Рассмотрим $z = y - y \wedge x$. Тогда $0 < z \leq y$, откуда следует, что $0 < \|z\| \leq 1$. Установим, что

$$tz \wedge x \leq y \quad (t \in \mathbb{R}_+). \tag{8}$$

Пусть $t \in \mathbb{R}_+$. Представим x как $(x - x \wedge y) + (x \wedge y)$ и положим $u = tz$, $v = x - x \wedge y$ и $w = x \wedge y$. Очевидно, что $u, v, w \in E_+$ и $tz \wedge x = u \wedge (v + w)$. Из легко проверяемых соотношений

$$u \wedge (v + w) - u \wedge v \leq w,$$
$$u \wedge (v + w) - u \wedge v \leq u \wedge (v + w) \leq u$$

вытекает следующее неравенство:

$$u \wedge (v + w) \leq u \wedge v + u \wedge w. \tag{9}$$

Элементы $u = tz$ и $v = x - x \wedge y$ дизъюнктны, так как

$$z \wedge v = (y - x \wedge y) \wedge (x - x \wedge y) = y \wedge x - x \wedge y = 0.$$

Отсюда по (9) имеем

$$tz \wedge x = u \wedge (v + w) \leq w \wedge v = tz \wedge x \wedge y \leq y.$$

Неравенство (8) установлено. Рассмотрим элемент $s = \big(2/\|z\|\big)z$ векторной решетки E. Очевидно, что $\|s\| = 2$. Поскольку $s \wedge x \leq y$, имеем $\|s \wedge x\| \leq \|y\| = 1$. Следовательно, внутреннее множество

$$A_x := \{s \in {}^*E_+ : \|s\| = 2 \ \&\ s \wedge x \in B\}$$

непусто для всех $x \in E_+$. Поскольку $A_{x \vee y} \subseteq A_x \cap A_y$ $(x, y \in E_+)$, семейство $\{A_x\}_{x \in E_+}$ является центрированным. По общему принципу насыщения существует $y_0 \in {}^*E_+$ такой, что

$$y_0 \in \cap\{A_x : x \in E_+\}.$$

Очевидно, что $\|y_0\| = 2$. В частности, $y_0 \in \mathrm{Fin}({}^*E)$. По (6) имеем $y_0 \in \mathrm{fin}({}^*E) + \mu({}^*E)$. Следовательно, существуют элементы $x_0 \in X_+$, $h \in \mu({}^*E)$, для которых $y_0 \leq x_0 + h$. Очевидно, что $\|y_0 \wedge x_0\| \approx \|y_0\|$. Вместе с тем $\|y_0\| = 2$, $\|y_0 \wedge x_0\| \leq 1$, так как $y_0 \in A_{x_0}$. Полученное противоречие показывает, что единичный шар в E порядково ограничен.

Выберем $e \in E$ таким, что $|x| \leq e$ для всех $x \in B$. Тогда

$$|x| \leq \|x\|_e \cdot e \qquad (x \in E).$$

Отсюда следует, что e является сильной единицей в E. Более того, $\|x\|_e \leq \|x\|$ $(x \in E)$. Вместе с тем, $\|x\| \leq c\|x\|_e$ $(x \in E)$ для $c = \|e\|^{-1}$. Следовательно, нормы $\|\cdot\|_e$ и $\|\cdot\|$ эквивалентны. Импликация (6)→(1) доказана. Этим завершается доказательство теоремы. $\triangleright$

4.5.3. Приведем следующий нестандартный критерий порядковой непрерывности нормы.

Теорема. *Норма ρ в нормированной векторной решетке (E, ρ) является порядково непрерывной тогда и только тогда, когда выполняется включение $\eta({}^*E) \subseteq \mu({}^*E)$.*

$\lhd$ Допустим, что норма ρ порядково непрерывна. Выберем произвольное $\kappa \in \eta({}^*E)$. Поскольку $U\big(|\kappa|\big)$ направлено вниз и $\inf_E U\big(|\kappa|\big)$ равен 0, из порядковой непрерывности нормы ρ следует

$$\inf\big\{\rho(u) : u \in U\big(|\kappa|\big)\big\} = 0.$$

Тогда $\rho(\kappa) \approx 0$. Ввиду произвольности выбора $\kappa \in \eta({}^*E)$, получаем, что $\eta({}^*E) \subseteq \mu({}^*E)$.

Предположим теперь, что $\eta({}^*E) \subseteq \mu({}^*E)$. Пусть ρ не является порядково непрерывной. В этом случае найдутся сеть $(x_\xi)_{\xi \in \Theta} \subseteq E$, $x_\xi \downarrow 0$, и число $0 < a \in \mathbb{R}$ такие, что $\rho(x_\xi) \geq a$ для всех $\xi \in \Theta$. Возьмем некоторый бесконечно удаленный элемент $\beta \in {}^a\Theta$. По 4.3.2 имеем $x_\beta \in \eta({}^*E)$. Тогда $\rho(x_\beta) \approx 0$. С другой стороны, согласно принципу переноса $\rho(x_\xi) \geq a$ для всех $\xi \in {}^*\Theta$. Полученное противоречие показывает, что норма ρ порядково непрерывна. $\rhd$

В качестве примера применения теоремы 4.5.2 приведем нестандартное доказательство следующего хорошо известного утверждения.

Пусть банахова решетка E имеет порядково непрерывную норму. Тогда E порядково сепарабельна и условно полна. Более того, порядковая сходимость в E совпадает с (r)-сходимостью.

$\lhd$ Ввиду 4.4.2 и 4.3.6 достаточно проверить включения

$$o\text{-pns}({}^*E) \subseteq E + \eta({}^*E) \text{ и } \eta({}^*E) \subseteq \lambda({}^*E).$$

Пусть $\kappa \in o\text{-pns}({}^*E)$. Так как норма порядково непрерывна, легко видеть, что $\kappa \in \mathrm{pns}({}^*E)$. Согласно предложению 4.0.7 банахова решетка (E, ρ) удовлетворяет условию $\mathrm{pns}({}^*E) = E + \mu({}^*E)$. Следовательно, существует $x \in E$ такой, что $\kappa - x \in \mu({}^*E)$. Очевидно, что $L(\kappa) \leq x \leq U(\kappa)$. Так как $\kappa \in o\text{-pns}({}^*E)$, имеем $\kappa - x \in \eta({}^*E)$. Отсюда $\kappa \in E + \eta({}^*E)$.

Проверим, что $\eta({}^*E) \subseteq \lambda({}^*E)$. Пусть $\kappa \in \eta({}^*E)$. Тогда $U(|\kappa|) \downarrow 0$. Ввиду порядковой непрерывности ρ для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется

$u_n \in U(|\varkappa|)$ со свойством $\rho(u_n) \leq 2^{-n}$. Сумма $u := \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ существует в банаховой решетке E. Очевидно, что $|n\varkappa| \leq u$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $\varkappa \in \lambda({}^*E)$. $\triangleright$

4.5.4. В заключение этого параграфа установим нестандартный критерий конечномерности нормированной векторной решетки.

Теорема. *Размерность произвольной нормированной векторной решетки (E, ρ) конечна тогда и только тогда, когда $\eta({}^*E) = \mu({}^*E)$.*

$\triangleleft$ Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $\eta({}^*E) = \mu({}^*E)$. По теореме 4.5.2 решетка E имеет сильную единицу e. Более того, норма $\|\cdot\|_e$ эквивалентна исходной норме ρ. Из теоремы 4.5.3 следует, что ρ порядково непрерывна. Следовательно, $\|\cdot\|_e$ также порядково непрерывна. По теореме 4.5.2 $\eta({}^*E) = \lambda({}^*E)$. Применив теорему 4.3.6, получим, что E порядково сепарабельна.

Предположим, что $\dim E = \infty$. Легко видеть, что в этом случае существует бесконечный дизъюнктный порядковый базис $A \subseteq E_+$ такой, что из $a \in A$ следует $\|a\|_e = 1$. Поскольку E порядково сепарабельна, множество A не более чем счетно, так как оно порядково ограничено в E некоторым элементом e. Поэтому мы можем считать, что $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для каждого натурального n определим элемент

$$u_n := e - \left(n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \wedge e.$$

Легко видеть, что $u_n \downarrow 0$. Поскольку норма $\|\cdot\|_e$ порядково непрерывна, $\|u_n\|_e \to 0$. С другой стороны, из построения последовательности (u_n) заключаем, что

$$\|u_n\|_e \geq \|a_{n+1}\|_e = 1$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие показывает, что размерность E конечна. $\triangleright$

4.6. Линейные операторы на векторных решетках

В этом параграфе мы установим нестандартные критерии непрерывности и порядковой ограниченности линейных операторов на векторных решетках. Эти критерии близки к описанным в 4.0.9. Всюду ниже символы E и F обозначают векторные решетки и $T : E \to F$ — линейный оператор.

4.6.1. Сначала мы докажем одну полезную вспомогательную лемму (см. также 4.0.8).

Лемма. *Для каждого непустого подмножества D векторной решетки E следующие условия эквивалентны:*

(1) *множество D порядково ограничено;*

(2) ${}^*D \subseteq \operatorname{fin}({}^*E)$.

$\lhd$ Нам необходимо установить только импликацию (2)→(1). Допустим ${}^*D \subseteq \operatorname{fin}({}^*E)$. Предположим, что D не содержится ни в каком порядковом интервале. Тогда для каждого $u \in E_+$ существует $d_u \in D$ такое, что $(d_u - u)_+ > 0$. По общему принципу насыщения существует $d \in {}^*D$ такое, что $(d - u)_+ > 0$ для всех $u \in E_+$. Тогда d удовлетворяет условию $d \in {}^*D \setminus \operatorname{fin}({}^*E)$, что противоречит включению ${}^*D \subseteq \operatorname{fin}({}^*E)$; значит, D порядково ограничено. $\rhd$

4.6.2. *Теорема.* *Пусть E, F — векторные решетки и $T : E \to F$ — линейный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *T — порядково ограниченный оператор;*

(2) ${}^*T\big(\operatorname{fin}({}^*E)\big) \subseteq \operatorname{fin}({}^*F)$;

(3) ${}^*T\big(\lambda({}^*E)\big) \subseteq \lambda({}^*F)$;

(4) ${}^*T\big(\lambda({}^*E)\big) \subseteq \operatorname{fin}({}^*F)$.

$\lhd$ (1)→(2): Очевидно.

(2)→(3): Пусть ${}^*T\big(\operatorname{fin}({}^*E)\big) \subseteq \operatorname{fin}({}^*F)$. Рассмотрим произвольное $\kappa \in \lambda({}^*E)$. Тогда для некоторого $d \in E$ условие $|n\kappa| \le d$ выполнено для всех $n \in \mathbb{N}$ одновременно. Легко видеть, что в этом случае существует $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ такое, что $|\nu\kappa| \le d$. Следовательно, $\nu\kappa \in \operatorname{fin}({}^*E)$ и согласно предположению $\nu \cdot {}^*T(\kappa) = {}^*T(\nu\kappa) \in \operatorname{fin}({}^*F)$. Отсюда вытекает, что ${}^*T\kappa \in \lambda({}^*F)$. Ввиду произвольности выбора элемента $\kappa \in \lambda({}^*E)$ это означает, что условие (3) справедливо.

(3)→(4): Очевидно.

(4)→(2): Предположим, что ${}^*T\kappa \notin \operatorname{fin}({}^*F)$ для некоторого $\kappa \in \operatorname{fin}({}^*E)$. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $f \in F$ положим

$$A_{n,f} := \Big\{k \in {}^*\mathbb{N} :\ k \ge n \ \&\ \big(|{}^*T(k^{-1}\kappa)| - f\big)_+ > 0\Big\}.$$

Множества $A_{n,f}$ непусты по выбору κ. Они являются внутренними по построению и образуют центрированную систему, поскольку

$$A_{\max(n,p),\sup(f,g)} \subseteq A_{n,f} \cap A_{p,g}$$

для произвольных $n, p \in \mathbb{N}$ и $f, g \in F$. Применяя общий принцип насыщения, находим $\nu \in \bigcap_{n,f} A_{n,f}$. Очевидно, что $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, и тогда $|\nu^{-1}\kappa| \in \lambda({}^*E)$. По предположению ${}^*T\big(\lambda({}^*E)\big) \subseteq \mathrm{fin}({}^*F)$. Тогда существует $y \in F$, удовлетворяющий равенству $\big(|{}^*T(\nu^{-1}\kappa)| - y\big)_+ = 0$, что невозможно ввиду $\nu \in A_{1,y}$. Полученное противоречие означает, что ${}^*T\big(\mathrm{fin}({}^*E)\big) \subseteq \mathrm{fin}({}^*F)$.

(2)→(1): Возьмем произвольное $u \in E_+$. По условию (2)

$$^*\Big(T\big([-u, u]\big)\Big) = {}^*T\big({}^*[-u, u]\big) \subseteq \mathrm{fin}({}^*F).$$

Отсюда по лемме 4.6.1 получаем, что множество $T\big([-u, u]\big)$ порядково ограничено. ▷

4.6.3. Перед тем, как доказывать нестандартный критерий порядковой непрерывности линейного оператора, установим взаимосвязь между (o)-бесконечно малыми элементами архимедовой векторной решетки и свойствами этих элементов в условном пополнении рассматриваемой решетки.

Лемма. *Пусть F — архимедова векторная решетка и F_1 — условное пополнение F. Тогда $\eta({}^*F) = {}^*F \cap \eta({}^*F_1)$.*

◁ Для $\kappa \in {}^*F_1$ положим

$$U_F(\kappa) := \{x \in F : x \geq \kappa\}, U_{F_1}(\kappa) := \{x \in F_1 : x \geq \kappa\}.$$

Пусть $\kappa \in \eta({}^*F)$. Тогда $\inf_F U_F\big(|\kappa|\big) = 0$ и, так как F_1 — условное пополнение F, имеем $\inf_{F_1} U_F\big(|\kappa|\big) = 0$. Кроме того, $U_F\big(|\kappa|\big) \subseteq U_{F_1}\big(|\kappa|\big)$, откуда следует, что $\inf_{F_1} U_{F_1}\big(|\kappa|\big) = 0$. Значит, $\kappa \in \eta({}^*F_1)$. В то же время $\kappa \in {}^*F$. Следовательно, $\kappa \in {}^*F \cap \eta({}^*F_1)$. Наоборот, пусть $\kappa \in {}^*F \cap \eta({}^*F_1)$. Тогда $\inf_{F_1} U_{F_1}\big(|\kappa|\big) = 0$. Поскольку F_1 — условное пополнение F, легко проверяется, что $\inf_{F_1} U_F\big(|\kappa|\big) = 0$. Отсюда сразу вытекает, что $\inf_F U_F\big(|\kappa|\big) = 0$. Итак, $\kappa \in \eta({}^*F)$. ▷

4.6.4. ***Теорема.*** *Пусть E, F — архимедовы векторные решетки, F_1 — условное пополнение F и $T : E \to F$ — линейный оператор. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *T — порядково непрерывный оператор;*
(2) ${}^*T\big(\eta({}^*E)\big) \subseteq \eta({}^*F_1)$;
(3) ${}^*T\big(\eta({}^*E)\big) \subseteq \eta({}^*F)$.

◁ (1)→(2): Пусть T — порядково непрерывный оператор из $L(E,F)$. Легко проверяется, что T — порядково непрерывный оператор из $L(E,F_1)$. Так как F_1 условно полна, модуль $|T|$ определен и является порядково непрерывным оператором из E в F_1. Ввиду $|Tx| \leq |T|\big(|x|\big)$ $(x \in E)$ для проверки требуемой импликации достаточно показать, что

$$^*|T|\big(\eta(^*E)\big) \subseteq \eta(^*F_1).$$

Рассмотрим произвольное $\kappa \in \eta(^*E)$. Тогда ввиду порядковой непрерывности $|T|$ получаем, что из $\inf_E U\big(|\kappa|\big) = 0$ вытекает равенство $\inf_{F_1} |T|\big(U\big(|\kappa|\big)\big) = 0$. С другой стороны,

$$|T|\big(U\big(|\kappa|\big)\big) \subseteq U\big(|^*T(\kappa)|\big),$$

откуда $\inf_{F_1} U\big(|^*T\kappa|\big) = 0$ и, стало быть, $^*T\kappa \in \eta(^*F_1)$.

(2)→(3): Сразу следует из леммы 4.6.3 и $^*T(^*E) \subseteq {}^*F$.

(3)→(1): Пусть $^*T\big(\eta(^*E)\big) \subseteq \eta(^*F)$. Из архимедовости E и теоремы 4.3.5 следует, что $\lambda(^*E) \subseteq \eta(^*E)$. Следовательно,

$$^*T\big(\lambda(^*E)\big) \subseteq \eta(^*F) \subseteq \operatorname{fin}(^*F).$$

Согласно теореме 4.6.2 отсюда следует, что $T \in L_r(E,F)$. Для проверки порядковой непрерывности остается доказать, что $\inf_F |Tx_\xi| = 0$ для любой сети $x_\xi \downarrow 0$ в E. Возьмем произвольную сеть $(x_\xi)_{\xi\in\Xi} \subseteq E$ такую, что $x_\xi \downarrow 0$. Предположим, что для некоторого $f \in F$, $f > 0$, условие $|Tx_\xi| \geq f$ выполнено для всех $\xi \in \Xi$ одновременно. Тогда по принципу переноса $|Tx_\xi| \geq f$ для всех $\xi \in {}^*\Xi$. Пусть β — некоторый бесконечно удаленный элемент направленного множества $^*\Xi$ (такой элемент существует по лемме 4.0.5). Используя критерий, установленный в 4.3.2, имеем $x_\beta \in \eta(^*F)$. Тогда $^*Tx_\beta \in \eta(^*F)$ по условию (3), что противоречит неравенству $|^*Tx_\beta| \geq f$. Итак, $\inf |Tx_\xi| = 0$ для каждой убывающей к нулю сети (x_ξ), и оператор T является порядково непрерывным. ▷

4.7. $*$-Инвариантные гомоморфизмы нестандартных расширений

Важным фактом нестандартного анализа является утверждение о том, что всякому внутреннему вещественному числу $\alpha \in \operatorname{fin}(^*\mathbb{R})$ соответствует некоторое бесконечно близкое к нему стандартное действительное число $\mathrm{st}(\alpha)$, называемое стандартной частью α. Операция st выделения стандартной части действительного числа, очевидно, является линейным и решеточным гомоморфизмом внешнего векторного пространства $\mathrm{fin}(^*\mathbb{R})$ в поле $\mathbb{R}$ таким, что $\mathrm{st}(1) = a$ для всех $a \in \mathbb{R}$ и $\mathrm{st}(\alpha_1) = \mathrm{st}(\alpha_2)$ для любых $\alpha_1 \approx \alpha_2$. Отмеченное свойство приводит к постановке вопроса о выделении *стандартной части* у элементов булевых алгебр и векторных решеток: при каких условиях существует решеточный гомоморфизм (булев гомоморфизм), оставляющий на месте стандартные элементы и не различающий бесконечно близкие элементы? В этом параграфе этот вопрос изучается для нестандартных расширений векторных решеток и булевых алгебр и устанавливается, что существование такого *инвариантного* гомоморфизма равносильно условной полноте рассматриваемой векторной решетки (соответственно полноте булевой алгебры). В заключение рассмотрим строение инвариантных гомоморфизмов на нестандартных расширениях полных нормированных булевых алгебр и установим, что для безатомных полных нормированных булевых алгебр каждый инвариантный гомоморфизм является почти сингулярным по отношению к мере в том смысле, что его носитель содержится во внешнем множестве сколь угодно малой ненулевой меры. Изложение базируется на [10].

4.7.1. Пусть E — векторная решетка и $^*E$ — ее нестандартное расширение. Можем считать, что E — векторная подрешетка в $^*E$.

Определение. Отображение $\psi : \mathrm{fin}(^*E) \to E$ называется $*$-*инвариантным решеточным гомоморфизмом*, если ψ — решеточный гомоморфизм, удовлетворяющий условию $\psi(x) = x$ для любого $x \in E$.

Далее $*$-нестандартные решеточные гомоморфизмы будут кратко именоваться $*$-ИРГ. Легко проверяется, что неравенства

$$\sup_E\{x \in E : x \leq \chi\} \leq \psi(\chi) \leq \inf_E\{y \in E : y \geq \chi\} \tag{10}$$

справедливы для любого $*$-ИРГ ψ и любого $\chi \in \mathrm{fin}(^*E)$ при условии, что супремум в левой части и инфимум в правой существуют. В частности, отсюда следует, что

$$(x - \chi) \in \eta(^*E) \to \psi(\chi) = x \quad (x \in E,\ \chi \in \mathrm{fin}(^*E)). \tag{11}$$

Теорема. *Пусть E — векторная решетка. Тогда существование $*$-инвариантного решеточного гомоморфизма ψ на $\operatorname{fin}({}^*E)$ эквивалентно условной полноте векторной решетки E. Если E атомна и условно полна, то $*$-ИРГ на $\operatorname{fin}({}^*E)$ определен однозначно следующим соотношением:*

$$\psi(\chi) = \sup_E\{x \in E : x \leq \chi\} = \inf_E\{y \in E : y \geq \chi\} \quad (\chi \in \operatorname{fin}({}^*E)). \quad (12)$$

$\lhd$ Пусть E — условно полная векторная решетка. Применим теорему продолжения Бернау — Липецкого — Люксембурга — Шепа (см., например, [3, теорема 2.1]) к тройке $(E, \operatorname{fin}({}^*E), E)$ и тождественному решеточному гомоморфизму $i : E \to E$. Получим решеточный гомоморфизм $\psi : \operatorname{fin}({}^*E) \to E$, расширяющий i. Очевидно, что ψ — $*$-ИРГ на $\operatorname{fin}({}^*E)$.

Предположим, что существует $*$-ИРГ $\psi : \operatorname{fin}({}^*E) \to E$. Выберем порядково ограниченное, направленное вверх непустое множество $\mathscr{D} \subseteq E$. Согласно общему принципу насыщения, в ${}^*\mathscr{D}$ существует элемент $\delta \in \operatorname{fin}({}^*E)$, удовлетворяющий неравенству $\delta \geq d$ для всех $d \in \mathscr{D}$. Легко видеть, что $\psi(\delta) = \sup_E \mathscr{D}$. Ввиду произвольности выбора $\mathscr{D} \subseteq E$ получаем, что E является условно полной.

Предположим теперь, что E атомна и условно полна. Рассмотрим $*$-ИРГ $\psi : \operatorname{fin}({}^*E) \to E$ и $\chi \in \operatorname{fin}({}^*E)$. По теореме 4.4.6 получаем, что $\operatorname{fin}({}^*E) = E + \eta({}^*E)$. Следовательно, существует единственный $x \in E$ с условием $x - \chi \in \eta({}^*E)$. Из (11) получаем равенство $\psi(\chi) = x$. Отсюда $*$-ИРГ ψ определен однозначно и удовлетворяет формуле (12). $\rhd$

Заметим, что единственность $*$-ИРГ на условно полной векторной решетке E влечет ее атомность. Доказательство этого утверждения можно найти в [10, теорема 2.1].

4.7.2. Рассмотрим ту же задачу для булевых алгебр. Пусть B — булева алгебра и ${}^*B$ — ее нестандартное расширение. Можно считать, что B является подалгеброй ${}^*B$.

Определение. Отображение $h : {}^*B \to B$ назовем *$*$-инвариантным булевым гомоморфизмом*, если h — булев гомоморфизм такой, что $h(2) = b$ для всех $b \in B$.

Всюду для краткости $*$-инвариантные булевы гомоморфизмы будем именовать $*$-ИБГ. Легко видеть, что любой $*$-ИБГ h удовлетворяет неравенствам

$$\sup_B\{x \in B : x \leq \beta\} \leq h(\beta) \leq \inf_B\{y \in B : y \geq \beta\} \qquad (13)$$

для всех $\beta \in {}^*B$ при условии, что супремум в левой части и инфимум в правой существуют. Отсюда в частности следует, что $h(\beta) = 0$ для любого элемента $\beta \in {}^*B$, который удовлетворяет соотношению $\inf_B\{b \in B : b \geq \beta\} = 0$.

Теорема. *Для булевой алгебры B существует $*$-инвариантный булев гомоморфизм ${}^*B \to B$ тогда и только тогда, когда булева алгебра B является полной. Более того, $*$-ИБГ $h : {}^*B \to B$ определен однозначно, если полная булева алгебра B атомна. В этом случае*

$$h(\beta) = \sup_B\{x \in B : x \leq \beta\} = \inf_B\{y \in B : y \geq \beta\}$$

для всех $\beta \in {}^*B$.

Прежде чем мы докажем эту теорему, напомним нестандартную характеризацию атомных полных булевых алгебр, полученную Х. Коншором. Для этого нам потребуется ввести некоторые понятия. Пусть B — булева алгебра. Для каждого $\alpha \in {}^*B$ рассмотрим множества стандартных верхних и нижних границ: $U(\kappa) := \{x \in B : x \geq \alpha\}$, $L(\kappa) := \{y \in B : \alpha \geq y\}$. Определим следующие внешние подмножества ${}^*B$:

$$o\text{-pns}({}^*B) := \bigl\{\alpha \in {}^*B : \inf_B\bigl(U(\kappa) - L(\kappa)\bigr) = 0\bigr\},$$
$$\eta({}^*B) := \bigl\{\kappa \in {}^*B : \inf_B U\bigl(|\kappa|\bigr) = 0\bigr\}.$$

Можно показать, что o-pns$({}^*B)$ — булева подалгебра в ${}^*B$ и $\eta({}^*B)$ — идеал в o-pns$({}^*B)$, фактор-алгебра o-pns$({}^*B)/\eta({}^*B)$ булево изоморфна B (см. [4, теорема 4.1]). Отсюда и из [4, теорема 4.3] сразу получаем следующую лемму.

Лемма (Х. Коншор). *Для любой булевой алгебры B следующие условия эквивалентны:*

(1) *B — атомная полная булева алгебра;*

(2) *${}^*B = B + \eta({}^*B)$.*

Доказательство теоремы. Пусть B — полная булева алгебра. Применим теорему Сикорского о продолжении (см., например, [25, теорема 33.1]) к тройке $(B, {}^*B, B)$ и к тождественному булевому гомоморфизму $i : B \to B$. Получим булев гомоморфизм $h : {}^*B \to B$, расширяющий i. Очевидно, что h — $*$-ИБГ на ${}^*B$.

Покажем, что из существования $*$-ИБГ $h : {}^*B \to B$ следует полнота B. Пусть $h : {}^*B \to B$ — $*$-ИБГ. Рассмотрим направленное вверх непустое множество $\mathscr{D} \subseteq B$. По общему принципу насыщения в ${}^*\mathscr{D}$ существует элемент δ такой, что $\delta \geq d$ для всех $d \in \mathscr{D}$. Отсюда, как легко проверить, $h(\delta) = \sup_B \mathscr{D}$. Ввиду произвольности выбора $\mathscr{D} \subseteq B$ получаем, что B — полная булева алгебра.

Пусть булева алгебра B атомна и полна. Тогда доказательство единственности $*$-ИБГ $h : {}^*B \to B$ близко к доказательству единственности $*$-ИРГ в 4.7.1. Нужно только вместо теоремы 4.4.6 использовать предыдущую лемму. $\triangleright$

Заметим, что из единственности $*$-ИБГ на полной булевой алгебре B следует атомность B. Доказательство этого также можно найти в [10, теорема 1.1].

4.7.3. Пусть B — полная булева алгебра. Для семейства $(a_\tau) \subseteq B$ будем обозначать $\sup_\tau a_\tau$ через $\bigoplus_\tau a_\tau$, если элементы a_τ попарно дизъюнктны. *Разбиением* элемента $b \in B$ назовем семейство $(b_\tau) \subseteq B$ такое, что $b = \bigoplus_\tau b_\tau$. Пусть $\mu : B \to \mathbb{R}_+$ — отображение на B, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\mu(2) > 0 \leftrightarrow b > 0$;

(2) равенство $\mu(\bigoplus_{n=1}^\infty a_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(a_n)$ справедливо для любой последовательности $a_1, a_2, \ldots$ попарно дизъюнктных элементов B.

Напомним, что указанное выше отображение μ называется *σ-аддитивной мерой*, а пара (B, μ) — *полной нормированной булевой алгеброй.*

Пусть (B, μ) — полная нормированная булева алгебра и $h : {}^*B \to B$ — $*$-ИБГ. Представим B в виде прямой суммы алгебр атомных и безатомных элементов: $B = B_a \bigoplus B_c$. Тогда (B_a, μ) и (B_c, μ) — полные нормированные булевы алгебры. Ограничение отображения h на ${}^*B_a$ является $*$-инвариантным булевым гомоморфизмом, сохраняющим меру μ в том смысле, что $\mu(h(\alpha)) = \mathrm{st}({}^*\mu(\alpha))$ для всех $\alpha \in {}^*B_a$. Ограничение h на ${}^*B_c$ относительно меры μ ведет себя иначе; а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* (B, μ) *— безатомная полная нормированная булева алгебра и* $h : {}^*B \to B$ *— $*$-инвариантный булев гомоморфизм. Тогда для каждого вещественного числа* $\varepsilon > 0$ *существует* $\chi_\varepsilon \in {}^*B$, ${}^*\mu(\chi_\varepsilon) < \varepsilon$, *удовлетворяющее условиям* $h(2) = h(b \wedge \chi_\varepsilon)$ *для всех* $b \in {}^*B$.

Прежде чем доказывать теорему, установим одно простое свойство безатомных полных нормированных булевых алгебр.

Лемма. *Для любой безатомной полной нормированной булевой алгебры* (B, μ) *и натурального* n *существует разбиение* $(\chi_i)_{i=1}^n \subseteq B$ *единицы* $\mathbb{1}_{{}^*B}$ *такое, что* ${}^*\mu(\chi_i \wedge d) = \frac{1}{n}\mu(d)$ *для всех* $d \in B$, $i = 1, \ldots, n$.

$\lhd$ Возьмем произвольное гиперконечное разбиение $(e_k)_{k=1}^\nu$ единицы $\mathbb{1}_{{}^*B}$ булевой алгебры ${}^*B$, вписанное во все конечные стандартные разбиения. Существование такого разбиения легко устанавливается с помощью общего принципа насыщения. Так как B безатомна и мера μ является σ-аддитивной, существует разбиение $e_k = \bigoplus_{i=1}^n e_i^k$ такое, что

$$
{}^*\mu(e_i^k) = \frac{1}{n}{}^*\mu(e_k)
$$

для всех $k = 1, \ldots, \nu$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $\chi_i := \bigoplus_{k=1}^\nu e_i^k$. Семейство $(\chi_i)_{i=1}^n \subseteq {}^*B$ и является нужным разбиением единицы. $\rhd$

$\lhd$ Докажем теорему. Рассмотрим такое $n \in \mathbb{N}$, для которого $\frac{1}{n}\mu(\mathbb{1}) < \varepsilon$. По предыдущей лемме существует разбиение $(\chi_i)_{i=1}^n \subseteq {}^*B$ единицы $\mathbb{1}_{{}^*B}$, удовлетворяющее условию

$$
{}^*\mu(\chi_i \wedge d) = \frac{1}{n}\mu(d)
$$

для произвольного $d \in B$, $i = 1, \ldots, n$. В частности,

$$
{}^*\mu(\chi_k \wedge h(\chi_m)) = \frac{1}{n}\mu(h(\chi_m))
$$

для $k, m \in 1, \ldots, n$. Рассмотрим элемент

$$
\chi_\varepsilon := \bigoplus_{k=1}^n \chi_k \wedge h(\chi_k).
$$

Тогда

$$ {}^*\mu(\chi_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} {}^*\mu(\chi_k \wedge h(\chi_k)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\mu(h(\chi_k)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu(h(\chi_k)) = $$

$$ = \frac{1}{n}\mu\biggl(\bigoplus_{k=1}^{n} h(\chi_k)\biggr) = \frac{1}{n}\mu\biggl(h\biggl(\bigoplus_{k=1}^{n}\chi_k\biggr)\biggr) = \frac{1}{n}\mu(h(\mathbb{1}_{{}^*B})) = \frac{1}{n}\mu(\mathbb{1}_B) < \varepsilon. $$

В то же время

$$ h(\mathbb{1}_{{}^*B} \setminus \chi_\varepsilon) = h\biggl(\bigoplus_{m=1}^{n}\bigoplus_{k\neq m}\chi_k \wedge h(\chi_m)\biggr) = \bigoplus_{m=1}^{n}\bigoplus_{k\neq m} h(\chi_k \wedge h(\chi_m)) = 0, $$

поскольку

$$ h(\chi_k \wedge h(\chi_m)) = h(\chi_k) \wedge h^2(\chi_m) = $$
$$ = h(\chi_k) \wedge h(\chi_m) = h(\chi_k \wedge \chi_m) = h(0) = 0 $$

для $k \neq m$. Отсюда

$$ h(2) = h(b \wedge \mathbb{1}_{{}^*B}) = h((b \wedge \chi_\varepsilon) \oplus (b \wedge (\mathbb{1}_{{}^*B} \setminus \chi_\varepsilon))) = $$
$$ = h(b \wedge \chi_\varepsilon) \oplus (h(2) \wedge h(\mathbb{1}_{{}^*B} \setminus \chi_\varepsilon)) = h(b \wedge \chi_\varepsilon) $$

для всех $b \in {}^*B$. $\triangleright$

4.7.4. Рассмотрим вещественнозначные функции $\mathrm{st} \circ {}^*\mu$, $\mu \circ h$, определенные на булевой алгебре ${}^*B$, где h — $*$-ИБГ. Отображения $\mathrm{st} \circ {}^*\mu$ и $\mu \circ h$, очевидно, являются конечными аддитивными мерами на ${}^*B$. Более того, они σ-аддитивны, поскольку условие $b = \bigoplus_{n=1}^{\infty} b_n$ на элементы ${}^*B$ влечет $b = \bigoplus_{n=1}^{m} b_n$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Таким образом $\mathrm{st} \circ {}^*\mu$ и $\mu \circ h$ продолжаются до σ-аддитивных мер $\widetilde{\mu}$, $\widetilde{\mu}_h$ на σ-пополнении ${}^*B_\sigma$ булевой алгебры ${}^*B$. Отметим, что $\widetilde{\mu}$ является мерой Лёба, соответствующей исходной мере μ.

Теорема. *Пусть (B, μ) — безатомная полная нормированная булева алгебра и $h : {}^*B \to B$ — $*$-инвариантный булев гомоморфизм. Тогда*

- **(1)** *существует элемент $\chi_h \in {}^*B_\sigma$, $\widetilde{\mu}(\chi_h) = 0$ такой, что равенство $h(2) = 0$ справедливо для всех $b \in {}^*B$, удовлетворяющих условию $b \wedge \chi_h = 0$;*
- **(2)** *меры $\widetilde{\mu}$, $\widetilde{\mu}_h$ имеют дизъюнктные носители.*

$\lhd$ Докажем (1). Согласно теореме 4.7.3 для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется элемент $\chi_n \in {}^*B$ такой, что $\widetilde{\mu}(\chi_n) \leq \frac{1}{n}$ и $h(2) = 0$ для всех $b \in {}^*B$, $b \wedge \chi_n = 0$. Положим $\chi_h = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \chi_n$. Очевидно, что $\chi_h \in {}^*B_\sigma$, $\widetilde{\mu}(\chi_h) = 0$. Возьмем произвольно $b \in {}^*B$, $b \wedge \chi_h = 0$. Тогда найдется $n \in \mathbb{N}$, для которого $b \wedge \chi_n = 0$. Тем самым $h(2) = 0$, что и требовалось показать.

Утверждение (2) вытекает из (1). В самом деле, носителями мер $\widetilde{\mu}$, $\widetilde{\mu}_h$ являются, например, дизъюнктные элементы χ_h и $\mathbb{1} \setminus \chi_h$ булевой алгебры ${}^*B_\sigma$. $\rhd$

4.8. Порядковые оболочки векторных решеток

В этом параграфе мы определим порядковую оболочку векторной решетки, установим некоторые свойства этой оболочки и, в частности, частично рассмотрим вопрос о ее (r)-полноте и (o)-полноте. Мы также приведем условия изоморфности порядковой оболочки и исходной векторной решетки и (в случае нормированной решетки) изоморфности порядковой оболочки и нестандартной оболочки исходной решетки, рассматриваемой в качестве нормированного векторного пространства.

4.8.1. Пусть E — векторная решетка. Как уже упоминалось в 4.3.1, множество $\mathrm{fin}({}^*E)$ конечных элементов ${}^*E$ также является векторной решеткой, а множество $\eta({}^*E)$ (o)-бесконечно малых элементов в ${}^*E$ — идеалом в $\mathrm{fin}({}^*E)$. Рассмотрим фактор-решетку

$$(o)\text{-}E := \mathrm{fin}({}^*E)/\eta({}^*E).$$

Эту решетку мы называем *порядковой оболочкой* E и обозначаем через $[\kappa]$ класс эквивалентности $\kappa + \eta({}^*E) \in (o)\text{-}E$, содержащий $\kappa \in \mathrm{fin}({}^*E)$. Определим отображение $\widehat{\eta}_E : E \to (o)\text{-}E$ по правилу

$$\widehat{\eta}_E(x) := [x] \quad (x \in E).$$

Легко видеть, что $\widehat{\eta}_E : E \to (o)\text{-}E$ является решеточным гомоморфизмом. Будем обозначать его через $\widehat{\eta}$, когда это не приводит к недоразумению.

4.8.2. *Теорема.* *Множество $\widehat{\eta}(E)$ является правильной векторной подрешеткой в (o)-E.*

Прежде чем доказывать теорему, дадим некоторые пояснения. Пусть L — векторная подрешетка решетки M. Напомним, что L называется *правильной векторной подрешеткой* M, если для любого непустого $D \subseteq L$ и любого $a \in L$ из условия $\inf_L D = a$ вытекает равенство $\inf_M D = a$. Легко видеть, что L является правильной векторной подрешеткой M тогда и только тогда, когда для каждого непустого $D \subseteq L$ из условия $\inf_L D = 0$ следует $\inf_M D = 0$.

$\lhd$ Пусть $D \subseteq E$ удовлетворяет условию $\inf_E D = 0$. Покажем, что $\inf_{(o)\text{-}E} \widehat{\eta}(D) = 0$. Предположим противное. Тогда для некоторого $\kappa \in \operatorname{fin}({}^*E)$ имеем

$$\widehat{\eta}(D) \geq [\kappa] > 0.$$

Поскольку $\kappa \notin \eta({}^*E)$, существует $a \in E$ такой, что

$$U(\kappa) \geq a > 0.$$

Возьмем произвольно $d \in D$. Тогда $\widehat{\eta}(d) \geq [\kappa]$ и, следовательно, $(\kappa - d)_+ \in \eta({}^*E)$. Значит, $\inf_E \mathscr{U} = 0$, где $\mathscr{U} := U\big((\kappa - d)_+\big)$. Заметим, что для всех $u \in \mathscr{U}$ имеют место неравенства

$$d + u \geq d + (\kappa - d)_+ \geq \kappa.$$

Отсюда $d + \mathscr{U} \subseteq U(\kappa)$ и поэтому $d + \mathscr{U} \geq a$. Итак, получаем

$$d = \inf_E (d + \mathscr{U}) \geq a.$$

Последнее неравенство справедливо для всех $d \in D$ и $\inf_E D = 0$. Следовательно, $a = 0$. Полученное противоречие показывает, что $\inf_{(o)\text{-}E} \widehat{\eta}(D) = 0$. $\rhd$

4.8.3. *Теорема.* *Порядковая оболочка векторной решетки E является архимедовой тогда и только тогда, когда E сама архимедова.*

$\lhd$ Необходимость следует из того, что каждая векторная решетка может быть вложена как векторная подрешетка в свою порядковую оболочку. Для доказательства достаточности рассмотрим архимедову векторную решетку E. По теореме 4.3.5 множество $\eta({}^*E)$ является (r)-замкнутым идеалом в $\operatorname{fin}({}^*E)$. Отсюда, используя хорошо известную теорему А. И. Векслера [26] (см. также [21, теорема 60.2]), получаем, что фактор (o)-E архимедов. $\rhd$

4.8.4. Теорема. *Порядковая оболочка векторной решетки является* (r)*-полной.*

$\lhd$ Пусть E — векторная решетка. Поскольку любая векторная фактор-решетка (r)-полной векторной решетки также (r)-полна (см., например, [21, теорема 59.4]), достаточно установить (r)-полноту $\operatorname{fin}({}^*E)$. Возьмем (r)-последовательность Коши $(\kappa_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \operatorname{fin}({}^*E)$. Тогда найдутся последовательность $(\varepsilon_n) \subseteq \mathbb{R}$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, и элемент $\delta \in \operatorname{fin}({}^*E)$ такие, что

$$|\kappa_m - \kappa_k| \leq \varepsilon_n \delta \text{ для всех } m, k, n \in \mathbb{N}$$

для $m, k \geq n$. Расширим $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ до внутренней последовательности $(\kappa_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}} \subseteq {}^*E$ и отождествим с каждым натуральным k внутреннее множество

$$I_k := \bigl\{ m \in {}^*\mathbb{N} : |\kappa_m - \kappa_k| \leq \varepsilon_m \delta \bigr\}.$$

Легко видеть, что семейство $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ является центрированным. Согласно общему принципу насыщения существует $\nu \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$. Тогда любой $k \in \mathbb{N}$ удовлетворяет неравенству $|\kappa_k - \kappa_\nu| \leq \varepsilon_k \delta$. Отсюда получаем, что $\kappa_\nu \in \operatorname{fin}({}^*E)$ и $\kappa_n \xrightarrow{(r)} \kappa_\nu$. $\rhd$

4.8.5. В отличие от (r)-полноты, в случае условной полноты порядковой оболочки имеет место иная ситуация. Покажем, что порядковая оболочка условно полной векторной решетки, содержащей неатомные элементы, не обязательно является условно полной (нижеследующая теорема 4.8.7 устанавливает, что порядковая оболочка атомной условно полной векторной решетки условно полна).

Напомним, что условно полная векторная решетка E называется *регулярной* (см., например, [29]), если выполнены следующие условия:

- **(1)** порядковая и (r)-сходимость для любой последовательности в E совпадают;
- **(2)** любой идеал со счетным порядковым базисом в E содержится в некотором главном идеале;
- **(3)** E порядково сепарабельна.

Примерами регулярных векторных решеток являются банаховы решетки с порядково непрерывной нормой, а также $L_p\bigl([0,1]\bigr)$ для любого $0 < p < 1$.

Теорема. *Порядковая оболочка неатомной регулярной векторной решетки не является условно полной.*

$\lhd$ Пусть E — неатомная регулярная векторная решетка. Тогда найдется неатомный элемент $e \in E$, $e > 0$. Пусть $\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ — некоторое бесконечно большое натуральное число. По лемме 4.4.4 найдется семейство $\{e_n\}_{n=1}^{\nu}$ дизъюнктных e-компостеров. Положим $D := \big\{[e_n]\big\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда D — непустое и ограниченное сверху (например, элементом $[e]$) подмножество (o)-E. Покажем, что это подмножество не имеет точной верхней грани в (o)-E. Предположив противное, допустим, что

$$[\kappa] = \sup_{(o)\text{-}E} D \text{ для некоторого } \kappa \in \mathrm{fin}({}^*E).$$

Тогда для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$(e_k - \kappa)_+ \in \eta({}^*E).$$

По теореме 4.3.6 векторная решетка E обладает свойством $\eta({}^*E) = \lambda({}^*E)$ (используются свойства (1) и (3) из определения регулярной векторной решетки). Значит, $(e_k - \kappa)_+ \in \lambda({}^*E)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Ввиду (2) легко видеть, что существует $d \in E$, для которого

$$(e_k - \kappa)_+ \leq m^{-1}d \qquad (k, m \in \mathbb{N}).$$

Используя общий принцип насыщения, находим $\omega, \gamma \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, для которых

$$\omega \leq \nu \text{ и } (e_\omega - \kappa)_+ \leq \gamma^{-1}d.$$

Тогда

$$(e_\omega - \kappa)_+ \in \lambda({}^*E) = \eta({}^*E)$$

и, следовательно, $[e_\omega] \leq [\kappa]$. Одновременно с этим, $[e_\omega] > 0$ (так как $\omega \leq \nu$, и e_ω — e-компостер) и $[e_\omega] \wedge [e_k] = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ (e_ω и e_k дизъюнктны). Отсюда

$$[\kappa] > [\kappa] - [e_\omega] > [e_k] \text{ для любого } k \in \mathbb{N},$$

что противоречит предположению $[\kappa] = \sup_{(o)\text{-}E} D$. Значит, порядковая оболочка (o)-E решетки E не является условно полной. $\rhd$

4.8.6. Установим еще одно свойство порядковых оболочек, относящееся к мощности. Через $\mathrm{card}(A)$ будем обозначать мощность множества A.

Лемма. *Пусть векторная решетка E неархимедова и не атомна. Тогда*

$$\mathrm{card}(E) \; < \; \mathrm{card}\big((o)\text{-}E\big).$$

$\lhd$ Возьмем произвольное $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. По лемме 4.0.4 $\mathrm{card}(E) < \mathrm{card}(\nu)$. Значит, достаточно установить, что порядковая оболочка решетки E содержит не менее ν различных элементов.

Предположим сначала, что E неархимедова. Тогда существуют элементы $u, v \in E$ такие, что $0 < nu \leq v$ для всех натуральных n. По принципу переноса неравенство $0 < nu \leq v$ справедливо для всех $n \in {}^*\mathbb{N}$. В частности, $nu \in \mathrm{fin}({}^*E)$ для всех $n \in {}^*\mathbb{N}$. Неравенство

$$0 < u \leq |nu - mu|$$

справедливо для всех $n, m \in {}^*\mathbb{N}$, для которых $n \neq m$. Отсюда $[nu] \neq [mu]$ для $n, m \in {}^*\mathbb{N}$, $n \neq m$. Значит, $\big\{[nu]\big\}_{n=1}^{\nu}$ — семейство, состоящее из ν различных элементов (o)-E.

Остается рассмотреть случай архимедовой, но не атомной векторной решетки E. В этом случае существует неатомный элемент $e \in E$, $e > 0$. По лемме 4.4.4 найдется семейство $\{e_k\}_{k=1}^{\nu}$ дизъюнктных e-компостеров в $\mathrm{fin}({}^*E)$. Отсюда сразу же следует, что элементы $[e_k]$ порядковой оболочки (o)-E попарно различны для $k = 1, 2, \ldots, \nu$. $\rhd$

В конце этого параграфа изучим условия, при которых порядковая оболочка совпадает либо с исходной векторной решеткой, либо с ее нестандартной оболочкой (если решетка предполагается нормированной и рассматривается как нормированное векторное пространство).

4.8.7. ***Теорема.*** *Для любой векторной решетки E следующие условия эквивалентны:*

(1) *E решеточно изоморфна (o)-E;*

(2) *векторная решетка E атомна и условно полна;*

(3) *$\widehat{\eta}_E$ — решеточный гомоморфизма решетки E на ее порядковую оболочку.*

$\lhd$ (1)$\to$(2): По лемме 4.8.6 векторная решетка E является архимедовой и атомной. Значит, $\operatorname{fin}({}^*E) = o\text{-}\operatorname{pns}({}^*E)$ по теореме 4.4.5. Тогда $(o)\text{-}E = o\text{-}\operatorname{pns}({}^*E)/\eta({}^*E)$ и из 4.4.1(1) получаем, что векторная решетка (o)-E, а следовательно, и E, условно полна.

(2)$\to$(3): Так как $\operatorname{fin}({}^*E) = E + \eta({}^*E)$ по теореме 4.4.6, для каждого $u \in (o)\text{-}E$ существует $x \in E$ такой, что $u = x + \eta({}^*E)$. В частности, образ решеточного гомоморфизма $\widehat{\eta} : E \to (o)\text{-}E$ совпадает с (o)-E. Значит, гомоморфизм $\widehat{\eta}$ является решеточным.

Импликация (3)$\to$(1) очевидна. $\rhd$

Последнюю теорему интересно сравнить с предложением 4.0.6.

4.8.8. Пусть (E, ρ) — нормированная векторная решетка. Напомним, что согласно 4.0.6 мы можем рассмотреть векторную фактор-решетку

$$\widetilde{E} := \operatorname{Fin}({}^*E)/\mu({}^*E)$$

с фактор-нормой. Эта фактор-решетка называется *нестандартной оболочкой* (E, ρ). Очевидно, что $\widetilde{E}$ — банахова решетка. Заметим, что $\widetilde{E}$ зависит не только от E, но также и от выбора нормы ρ. Обозначим класс эквивалентности элемента $\kappa \in \operatorname{Fin}({}^*E)$ в векторной фактор-решетке $\widetilde{E}$ через $\langle\!\langle \kappa \rangle\!\rangle$ и рассмотрим отображение $\widehat{\mu} : E \to \widetilde{E}$ (см. также 4.0.6) такое, что $\widehat{\mu}(x) := \langle\!\langle \kappa \rangle\!\rangle$ для всех $x \in E$. Легко видеть, что $\widehat{\mu}$ — решеточный мономорфизм.

Теорема. *Пусть (E, ρ) — нормированная векторная решетка. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *существует решеточный изоморфизм π из (o)-E на $\widetilde{E}$, для которого $\pi \circ \widehat{\eta} = \widehat{\mu}$;*

(2) *E конечномерна.*

$\lhd$ (1)$\to$(2): Пусть $\pi : (o)\text{-}E \to \widetilde{E}$ — решеточный изоморфизм такой, что $\pi \circ \widehat{\eta} = \widehat{\mu}$. Идеал, порожденный $\widehat{\eta}(E)$, совпадает с (o)-E и, кроме того, $\widehat{\mu}(E) = \pi\big(\widehat{\eta}(E)\big)$; тем самым идеал, порожденный $\widehat{\mu}(E)$, совпадает с $\widetilde{E}$. Следовательно,

$$\operatorname{Fin}({}^*E) = \operatorname{fin}({}^*E) + \mu({}^*E),$$

откуда по теореме 4.5.2 следует $\mu({}^*E) \subseteq \eta({}^*E)$. По теореме 4.5.4 достаточно доказать обратное включение. Пусть $\kappa \in \eta({}^*E)$. Тогда множество $U := U\big(|\kappa|\big)$ направлено вниз и $U \downarrow 0$. В этом случае

$\widehat{\eta}(U)\downarrow 0$ в (o)-E по теореме 4.8.2. Отсюда $\pi\circ\widehat{\eta}(U)\downarrow 0$ в векторной решетке $\widetilde{E}$. Другими словами,

$$\inf_{\widetilde{E}}\widehat{\mu}(U)=\inf_{\widetilde{E}}\pi\circ\widehat{\eta}(U)=0.$$

Так как $\widehat{\mu}(U)\geq\langle\!\langle\kappa\rangle\!\rangle\geq 0$, имеем $\langle\!\langle\kappa\rangle\!\rangle=0$ и, следовательно, $\kappa\in\mu({}^*E)$. Отсюда $\mu({}^*E)=\eta({}^*E)$ и, значит, векторная решетка E конечномерна ввиду 4.5.4.

(2)$\to$(1): Очевидно. $\rhd$

4.9. Регулярные оболочки векторных решеток

Займемся изучением регулярных оболочек векторных решеток. Получим критерий изоморфности векторной решетки и ее регулярной оболочки. Также обсудим некоторые близкие вопросы, касающиеся регулярных оболочек.

4.9.1. Пусть E — векторная решетка. Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим фактор-решетку (r)-$E:=\mathrm{fin}({}^*E)/\lambda({}^*E)$ и назовем ее *регулярной оболочкой* для E. Через $\langle\kappa\rangle$ обозначим класс эквивалентности $\kappa+\lambda({}^*E)$, где $\kappa\in\mathrm{fin}({}^*E)$, и определим отображение $\widehat{\lambda}_E:E\to(r)$-$E$ следующим образом:

$$\widehat{\lambda}_E(x):=\langle x\rangle\quad(x\in E).$$

Очевидно, $\widehat{\lambda}_E$ является решеточным гомоморфизмом. Будем записывать его в виде $\widehat{\lambda}$, если это не приводит к недоразумению.

Укажем критерий совпадения векторной решетки и ее регулярной оболочки. Напомним, что векторная решетка E называется *почти регулярной*, если E условно полна, порядково сепарабельна, и для любой последовательности порядковая сходимость и (r)-сходимость в решетке E совпадают.

Теорема. *Для любой векторной решетки E следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\widehat{\lambda}:E\to(r)$-$E$ *— решеточный изоморфизм E на (r)-E;*

(2) *E атомна и почти регулярна.*

$\lhd$ (1)$\to$(2): Предположим, что $\widehat{\lambda}$ является решеточным изоморфизмом E на (r)-E. В частности, отображение $\widehat{\lambda}$ инъективно. Отсюда очевидно, что E является архимедовой и, значит, по теореме 4.3.5, $\lambda({}^*E) \subseteq \eta({}^*E)$. Из равенства $\operatorname{fin}({}^*E) = E + \lambda({}^*E)$ имеем

$$\operatorname{fin}({}^*E) = E + \eta({}^*E). \tag{1}$$

Следовательно, по теореме 4.4.6 векторная решетка E атомна и условно полна. Согласно теореме 4.3.6 для завершения доказательства импликации (1)$\to$(2) достаточно проверить включение $\eta({}^*E) \subseteq \lambda({}^*E)$. Рассмотрим произвольный элемент $\kappa \in \eta({}^*E)$. Так как ввиду (1) справедливо включение $\eta({}^*E) \subseteq E + \lambda({}^*E)$, элемент κ можно записать в виде $\kappa = e + \kappa_1$, где $e \in E$ и $\kappa_1 \in \lambda({}^*E)$. Тогда

$$e = \kappa - \kappa_1 \in \eta({}^*E) - \lambda({}^*E) \subseteq \eta({}^*E).$$

Следовательно, $e \in E \cap \eta({}^*E) = \{0\}$, откуда $e = 0$. Наконец, $\kappa = \kappa_1 \in \lambda({}^*E)$.

(2)$\to$(1): Пусть E — почти регулярная векторная решетка. По теоремам 4.4.6 и 4.3.6 имеем

$$\operatorname{fin}({}^*E) = E + \eta({}^*E) = E + \lambda({}^*E),$$

откуда немедленно следует, что отображение $\widehat{\lambda}$ сюръективно. Более того, так как E архимедова, отображение $\widehat{\lambda}$ инъективно. Значит, $\widehat{\lambda}$ — решеточный изоморфизм E на (r)-E. $\rhd$

4.9.2. Согласно теореме 4.3.6 регулярная оболочка (r)-E архимедовой порядково сепарабельной векторной решетки E, в которой для любой последовательности порядковая сходимость и (r)-сходимость эквивалентны, совпадает с порядковой оболочкой (o)-E. Покажем, что нет других типов векторных решеток с таким свойством.

Теорема. *Для векторной решетки E следующие условия эквивалентны:*

- **(1)** *существует решеточный изоморфизм π из (o)-E на (r)-E, для которого $\pi \circ \widehat{\eta} = \widehat{\lambda}$;*
- **(1)** *$\eta({}^*E) = \lambda({}^*E)$;*
- **(2)** *E — порядково сепарабельная архимедова векторная решетка, в которой для любой последовательности порядковая сходимость и (r)-сходимость совпадают.*

$\lhd$ Ввиду теоремы 4.3.6 достаточно проверить, что (1)$\to$(2).

Пусть $\pi : (o)\text{-}E \to (r)\text{-}E$ — решеточный изоморфизм, для которого $\pi \circ \widehat{\eta} = \widehat{\lambda}$. Рассмотрим элементы $u, v \in E$, удовлетворяющие условию $0 \leq nu \leq v$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Как легко видеть, $\pi \circ \widehat{\eta}(u) = \widehat{\lambda}(u)$ и, следовательно, $\widehat{\eta}(u) = 0$. Поскольку отображение $\widehat{\eta}$ инъективно, справедливо равенство $u = 0$. Значит, решетка E является архимедовой. Включение $\lambda({}^*E) \subseteq \eta({}^*E)$ установлено.

Для завершения доказательства остается проверить обратное включение $\eta({}^*E) \subseteq \lambda({}^*E)$. Предположим, что существует элемент κ в $\in \eta({}^*E) \setminus \lambda({}^*E)$. Можем предполагать, что $\kappa \geq 0$. Тогда $\langle\kappa\rangle > 0$. С другой стороны, из условия $\kappa \in \eta({}^*E)$ следует, что $\inf_E U(\kappa) = 0$. Отсюда и из теоремы 4.8.2 вытекает равенство $\inf_{(o)\text{-}E} \widehat{\eta}\big(U(\kappa)\big) = 0$. Поскольку π — изоморфизм из (o)-E на (r)-E, имеем

$$\inf_{(r)\text{-}E} \widehat{\lambda}\big(U(\kappa)\big) = \inf_{(o)\text{-}E} \pi \circ \widehat{\eta}\big(U(\kappa)\big) = 0,$$

что противоречит условию $\widehat{\lambda}\big(U(\kappa)\big) \geq \langle\kappa\rangle > 0$. Итак, $\eta({}^*E) \subseteq \lambda({}^*E)$. Теорема полностью доказана. $\rhd$

4.9.3. Обсудим связь между регулярной оболочкой (r)-E и нестандартной оболочкой $\widetilde{E}$ нормированной векторной решетки E; а именно, найдем условия совпадения (r)-E и $\widetilde{E}$. Будем использовать обозначения и термины из 4.4.2, 4.8.8.

Теорема. *Пусть (E, ρ) — нормированная векторная решетка. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- **(1)** *E содержит сильную единицу e такую, что нормы ρ и $\|\cdot\|_e$ эквивалентны;*
- **(2)** $(r)\text{-}E = \widetilde{E}$;
- **(3)** *существует решеточный изоморфизм φ из (r)-E на $\widetilde{E}$, для которого $\varphi \circ \widehat{\lambda} = \widehat{\mu}$.*

$\lhd$ (1)$\to$(2): Прямое следствие теоремы 4.5.2.

(2)$\to$(3): Очевидно.

(3)$\to$(1): Пусть $\varphi : (r)\text{-}E \to \widetilde{E}$ — решеточный изоморфизм, для которого $\varphi \circ \widehat{\lambda} = \widehat{\mu}$. По теореме 4.5.2 нужно установить, что $\mathrm{Fin}({}^*E) = \mathrm{fin}({}^*E) + \mu({}^*E)$. Включение $\mathrm{fin}({}^*E) + \mu({}^*E) \subseteq \mathrm{Fin}({}^*E)$ очевидно. Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольное

$\kappa \in \mathrm{Fin}(^*E)$. Тогда $\langle\!\langle \kappa \rangle\!\rangle = \varphi(\langle \kappa_1 \rangle)$ для некоторого $\kappa_1 \in \mathrm{fin}(^*E)$. Пусть $x \in E_+$ удовлетворяет $|\kappa_1| \leq x$. Отсюда

$$|\langle\!\langle \kappa \rangle\!\rangle| = |\varphi\bigl(\langle \kappa_1 \rangle\bigr)| = \varphi\bigl(\langle |\kappa_1| \rangle\bigr) \leq \varphi(x) = \varphi \circ \widehat{\lambda}(x) = \widehat{\mu}(x) = \langle\!\langle x \rangle\!\rangle.$$

Из неравенства $|\langle\!\langle \kappa \rangle\!\rangle| \leq \langle\!\langle x \rangle\!\rangle$ следует, что элемент κ можно записать в виде $\kappa = \xi_1 + \xi_2$, где $|\xi_1| \leq x$ и $\xi_2 \in \mu(^*E)$. Значит, $\kappa \in \mathrm{fin}(^*E) + \mu(^*E)$. $\triangleright$

4.9.4. В отличие от 4.8.2, образ векторной решетки E под действием $\widehat{\lambda}$ не обязательно является правильной векторной подрешеткой в (r)-E. В самом деле, рассмотрим векторную решетку $E = l_\infty$ всех ограниченных последовательностей в $\mathbb{R}$ и предположим, что D — подмножество l_∞, состоящее из тех последовательностей, чьи координаты равны 1 за исключением конечного числа элементов. Тогда $\inf_E D = 0$, однако $\widehat{\lambda}(D) \geq [e_\nu] > 0$ для всех $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, где e_ν — внутренняя последовательность в $^*\mathbb{R}$, в которой координата с номером ν равна 1, а все остальные координаты равны нулю.

4.9.5. Точно так же, как и в доказательстве теоремы 4.8.4, в которой устанавливалась (r)-полнота порядковых оболочек, можно показать, что регулярная оболочка произвольной векторной решетки (r)-полна. С другой стороны, по теореме 4.3.6 регулярная оболочка регулярной векторной решетки совпадает с ее порядковой оболочкой. Теорема 4.8.5 показывает, что регулярная оболочка неатомной регулярной векторной решетки не является условно полной.

4.9.6. Из теорем 4.3.6 и 4.3.3 следует, что регулярная оболочка порядково сепарабельной архимедовой векторной решетки, в которой для любой последовательности порядковая сходимость и (r)-сходимость совпадают, также является архимедовой. Другой случай описывается в следующем утверждении.

Теорема. *Пусть E — векторная решетка, в которой для любой последовательности $(x_n) \subseteq E_+$ существует последовательность (λ_n) строго положительных вещественных чисел, для которой $\{\lambda_n x_n\}$ порядково ограничено. Тогда (r)-E является архимедовой.*

$\triangleleft$ Ввиду теоремы 4.3.5 нам нужно показать, что $\lambda(^*E)$ — (r)-замкнутый идеал в $\mathrm{fin}(^*E)$. Для этого рассмотрим $0 \leq v_n \uparrow$ и $v_n \xrightarrow{(r)} v$, где $v_n \in \lambda(^*E)$. Достаточно доказать, что $v \in \lambda(^*E)$.

Так как $v_n \xrightarrow{(r)} v$, существуют последовательность $(\varepsilon_n) \subseteq \mathbb{R}_+$, сходящаяся к 0, и элемент $d \in E_+$, для которых $|v_n - v| \leq \varepsilon_n d$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $v_n \in \lambda({}^*E)$, найдется элемент $w_n \in E$ такой, что $0 \leq kv_n \leq w_n$ одновременно для всех $k \in \mathbb{N}$. Пользуясь предположением, возьмем $0 < \lambda_n \in \mathbb{R}$ и $w \in E$ такие, что $\lambda_n w_n \leq w$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$|v| \leq |v_n - v| + |v| \leq \varepsilon_n d + \max\{\varepsilon_n, 1/n\}\lambda_n w_n \leq \max\{\varepsilon_n, 1/n\}(d + w)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Пользуясь тем, что $\varepsilon_n \to 0$, имеем $v \in \lambda({}^*E)$. $\triangleright$

Следствие. *Регулярная оболочка банаховой решетки является архимедовой.*

Существуют неархимедовы векторные решетки, чьи регулярные оболочки также не являются архимедовыми. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример векторной решетки L, описанной Т. Накаямой (см. [21, пример 62.2]). Идеал

$$I_0(L) := \big\{x \in L : (\exists y \in L)(\forall n \in \mathbb{N})\ |nx| \leq y\big\}$$

не является (r)-замкнутым в L. Следовательно, существуют последовательность $(x_n) \subseteq I_0(L)$, $0 \leq x_n \uparrow$, и элемент $x \in L$ такие, что

$$x_n \xrightarrow{(r)} x \notin I_0(L).$$

Поскольку $I_0(L) = \lambda({}^*L) \cap L$, идеал $\lambda({}^*L)$ не является (r)-замкнутым в $\mathrm{fin}({}^*L)$. Отсюда по теореме Векслера (см. [21, теорема 60.2]), (r)-L неархимедова. Вопрос об архимедовости регулярной оболочки произвольной архимедовой векторной решетки остается открытым.

4.10. Порядковые и регулярные оболочки решеточно нормированных пространств

В этом параграфе определяются и изучаются порядковые и регулярные оболочки решеточно нормированных пространств.

4.10.1. Пусть $(\mathscr{X}, \alpha, {}^*E)$ — внутреннее РНП, нормированное стандартной решеткой ${}^*E$. Рассмотрим следующие внешние подпространства внутреннего векторного пространства $\mathscr{X}$:

$$\mathrm{fin}(\mathscr{X}) := \big\{x \in \mathscr{X} : \alpha(x) \in \mathrm{fin}({}^*E)\big\},$$
$$\eta(\mathscr{X}) := \big\{x \in \mathscr{X} : \alpha(x) \in \eta({}^*E)\big\},$$
$$\lambda(\mathscr{X}) := \big\{x \in \mathscr{X} : \alpha(x) \in \lambda({}^*E)\big\}.$$

Векторные пространства $\eta(\mathscr{X})$ и $\lambda(\mathscr{X})$ являются подпространствами в $\operatorname{fin}(\mathscr{X})$. Стало быть, можно рассматривать следующие фактор-пространства:

$$(o)\text{-}\overline{\mathscr{X}} := \operatorname{fin}(\mathscr{X})/\eta(\mathscr{X}),$$
$$(r)\text{-}\overline{\mathscr{X}} := \operatorname{fin}(\mathscr{X})/\lambda(\mathscr{X}).$$

Обозначим через $[x]$ класс эквивалентности $x+\eta(\mathscr{X})$ в (o)-$\overline{\mathscr{X}}$ и через $\langle x\rangle$ — класс эквивалентности $x+\lambda(\mathscr{X})$ в (r)-$\overline{\mathscr{X}}$, где $x\in\operatorname{fin}(\mathscr{X})$. Для $x\in\operatorname{fin}(\mathscr{X})$ положим

$$\overline{\alpha}\big([x]\big) := \alpha(x)+\eta({}^*E),$$
$$\overline{\alpha}_{(r)}\big(\langle x\rangle\big) := \alpha(x)+\lambda({}^*E).$$

Легко видеть, что отображения $\overline{\alpha} : (o)\text{-}\overline{\mathscr{X}} \to (o)\text{-}E$ и $\overline{\alpha}_{(r)} : (r)\text{-}\overline{\mathscr{X}} \to (r)\text{-}E$ определены корректно.

Определение. Назовем РНП $\big((o)\text{-}\overline{\mathscr{X}},\overline{\alpha},(o)\text{-}E\,\big)$ $\Big($ соответственно $\big((r)\text{-}\overline{\mathscr{X}},\overline{\alpha}_{(r)},(r)\text{-}E\,\big)\Big)$ *порядковой оболочкой* (соответственно *регулярной оболочкой*) внутреннего РНП $(\mathscr{X},\alpha,{}^*E)$.

4.10.2. *Теорема.* *Пусть $(\mathscr{X},\alpha,{}^*E)$ — внутреннее разложимое РНП со стандартной нормирующей векторной решеткой ${}^*E$. Тогда его порядковая и регулярная оболочки являются разложимыми и (r)-полными РНП.*

$\triangleleft$ Рассмотрим внешнее РНП $\big(\operatorname{fin}(\mathscr{X}),\alpha,\operatorname{fin}({}^*E)\big)$. Доказательство (r)-полноты $\big(\operatorname{fin}(\mathscr{X}),\alpha,\operatorname{fin}({}^*E)\big)$ почти такое же, как и доказательство (r)-полноты векторной решетки $\operatorname{fin}({}^*E)$ в разделе 4.8.4 $\big($достаточно заменить $\operatorname{fin}({}^*E)$ на $\operatorname{fin}(\mathscr{X})$ и вести рассмотрение относительно нормы $\alpha\big)$. Легко видеть, что норма α является разложимой в $\operatorname{fin}(\mathscr{X})$. Поскольку порядковая оболочка (соответственно регулярная оболочка) $(\mathscr{X},\alpha,{}^*E)$ является фактор-пространством РНП $\big(\operatorname{fin}(\mathscr{X}),\alpha,\operatorname{fin}({}^*E)\big)$ по идеалу $\eta({}^*E)$ $\big($соответственно по идеалу $\lambda({}^*E)\big)$ в $\operatorname{fin}({}^*E)$, использование предложения 4.0.14 завершает доказательство. $\triangleright$

4.10.3. Пусть $(E,\|\cdot\|)$ — нормированная векторная решетка. Условное пополнение $\widehat{E}=\widehat{\eta}(E)$ для E является нормированной векторной решеткой с нормой

$$\|x\| := \inf\{\|e\| : e\in E \ \&\ \widehat{\eta}(e)\geqslant |x|\}. \tag{2}$$

РНП (o)-$\overline{E}$ является нормированной векторной решеткой с нормой

$$\lvert x\rvert := \inf\{\|e\| : e \in E \ \&\ \widehat{\eta}(e) \geqslant |x|\} \quad (x \in (o)\text{-}\overline{E}),$$

которая продолжает норму (2) из $\widehat{E}$ до (o)-$\overline{E}$. Заметим, что вложения $\widehat{\eta} : (E, \|\cdot\|) \hookrightarrow (\widehat{E}, \|\cdot\|)$ и $(\widehat{E}, \|\cdot\|) \subseteq ((o)\text{-}\overline{E}, \lvert\cdot\rvert)$ являются изометрическими.

Напомним, что нормированная векторная решетка $(E, \|\cdot\|)$ удовлетворяет *слабому условию Рисса — Фишера*, если каждая последовательность $(v_n) \subseteq E$, обладающая свойством $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < \infty$, порядково ограничена.

Теорема. *Нормированная решетка $((o)\text{-}\overline{E}, \lvert\cdot\rvert)$ является банаховой тогда и только тогда, когда $(E, \|\cdot\|)$ удовлетворяет слабому условию Рисса — Фишера.*

$\lhd$ Допустим, что $(E, \|\cdot\|)$ удовлетворяет слабому условию Рисса — Фишера. Тогда $\widehat{E}$ — банахова решетка с нормой (7) из [28, теорема 101.6]. Применяя результат [16, теорема 4.1.2], из (r)-полноты РНП $((o)\text{-}\overline{E}, p, \widehat{E})$, где

$$p(x) = \inf_{\widehat{E}}\{\widehat{\eta}(e) : e \in E \ \&\ \widehat{\eta}(e) \geqslant |x|\},$$

получаем, что $((o)\text{-}\overline{E}, \lvert\cdot\rvert)$ является банаховой решеткой.

Наоборот, предположим, что $((o)\text{-}\overline{E}, \lvert\cdot\rvert)$ — банахова решетка, и рассмотрим произвольную последовательность $(v_n) \subseteq E$, для которой $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < \infty$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert\widehat{\eta}(|v_n|)\rvert = \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < \infty.$$

Следовательно, существует $u \in (o)$-$\overline{E}$,

$$u = (o)\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\eta}(|v_n|) \in (o)\text{-}\overline{E}.$$

Поскольку $\widehat{\eta}(E)$ является конфинальным в (o)-$\overline{E}$, существует элемент $v \in E$ такой, что $\widehat{\eta}(v) \geqslant u$. Очевидно, $(v_n) \subseteq [-v, v]$. Отсюда получаем, что для $(E, \|\cdot\|)$ выполнено слабое условие Рисса — Фишера. $\rhd$

4.10.4. Далее всюду в этом параграфе предполагаем, что решетка E архимедова. Рассмотрим фактор-решетку

$$\widehat{E} := o\text{-pns}({}^*E)/\eta({}^*E)$$

и напомним, что по теореме 4.4.1 векторная решетка $\widehat{E}$ является условным пополнением E. Сначала установим несколько лемм.

Лемма. *Пусть $y \in o$-pns$({}^*E)$. Тогда*

$$[y] = \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U(y)).$$

$\lhd$ Поскольку $L(y) \leqslant y \leqslant U(y)$ и $\widehat{E}$ условно полна, выполнены следующие неравенства:

$$\sup_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(L(y)) \leqslant [y] \leqslant \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U(y)).$$

Следовательно,

$$0 \leqslant \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U(y)) - [y] \leqslant \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U(y)) - \sup_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(L(y)) \leqslant \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U(y) - L(y)).$$

Поскольку $y \in o$-pns$({}^*E)$, имеем $\inf_E(U(y) - L(y)) = 0$. Отсюда

$$\inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U(y) - L(y)) = 0,$$

так как решетка $\widehat{E}$ является условным пополнением ее подрешетки $\widehat{\eta}(E)$. Тем самым из установленного выше неравенства получаем $[y] = \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U(y))$. $\rhd$

4.10.5. *Лемма.* *Каждое непустое порядково ограниченное подмножество $\mathscr{D} \subseteq \widehat{E}$ имеет супремум и инфимум в (o)-$\overline{E}$. Более того,*

(1) $\inf_{(o)\text{-}\overline{E}} \mathscr{D} = \inf_{\widehat{E}} \mathscr{D}$;

(2) $\sup_{(o)\text{-}\overline{E}} \mathscr{D} = \sup_{\widehat{E}} \mathscr{D}$.

$\lhd$ (1) Допустим, что $\mathscr{D} \subseteq \widehat{E}$ и $\mathscr{D} \neq \varnothing$. Достаточно показать, что из $\inf_{\widehat{E}} \mathscr{D} = 0$ вытекает равенство $\inf_{(o)\text{-}\overline{E}} \mathscr{D} = 0$. Возьмем $\kappa \in \operatorname{fin}({}^*E)$, для которого $0 \leqslant \kappa$ и $[\kappa] \leqslant \mathscr{D}$. Для завершения доказательства остается установить, что $[\kappa] = 0$, или, другими словами, нужно проверить условие $\inf_E U(\kappa) = 0$. Предположим, что элемент $a \in E$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant a \leqslant U(\kappa), \tag{3}$$

и возьмем какое-нибудь $d \in \mathscr{D}$. Тогда $d = [\delta]$ для некоторого $\delta \in o\text{-pns}({}^*E)$. Очевидно, что

$$\kappa = \kappa \wedge \delta + (\kappa - \delta)_+ \leqslant U(\delta) + U((\kappa - \delta)_+).$$

Следовательно,

$$U(\delta) + U((\kappa - \delta)_+) \subseteq U(\kappa). \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) вытекает, что

$$0 \leqslant a \leqslant U(\delta) + U((\kappa - \delta)_+). \tag{5}$$

Используя лемму 4.1.2 и условную полноту $\widehat{E}$, из (5) получаем, что

$$0 \leqslant \widehat{\eta}(1) \leqslant \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U(\delta)) + \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U((\kappa - \delta)_+)) = [\delta] + \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U((\kappa - \delta)_+)). \tag{6}$$

В то же самое время $[(\kappa - \delta)_+] = ([\kappa] - d)_+ = 0$. Значит, $\inf_E U((\kappa - \delta)_+) = 0$. Следовательно, получаем $\inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U((\kappa - \delta)_+)) = 0$. Теперь из (6) следует, что

$$0 \leqslant \widehat{\eta}(1) \leqslant [\delta] = d. \tag{7}$$

Ввиду произвольности $d \in \mathscr{D}$, из $\inf_{\widehat{E}} \mathscr{D} = 0$ и формулы (7) получаем $a = 0$, что и требовалось.

Утверждение (2) сразу получается из (1). $\rhd$

4.10.6. Пусть $x \in (o)\text{-}\overline{E}$. Положим

$$\mathscr{U}(x) := \{e \in E : \widehat{\eta}(e) \geqslant x\},$$

$$\widehat{\mathscr{U}}(x) := \{y \in \widehat{E} : y \geqslant x\}.$$

Очевидно, что $\mathscr{U}(x)$, $\widehat{\mathscr{U}}(x)$ — непустые порядково ограниченные подмножества в E и $\widehat{E}$ соответственно.

Лемма. *Для любого* $x \in (o)\text{-}\overline{E}$ *имеем:*

(1) $\inf_{\widehat{E}} \widehat{\mathscr{U}}(x) \in \widehat{\mathscr{U}}(x)$;

(2) $\inf_{\widehat{E}} \widehat{\mathscr{U}}(x) = \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(\mathscr{U}(x))$;

(3) *если* $\kappa \in \operatorname{fin}({}^*E)$ *удовлетворяет условию* $x = [\kappa]$, *то*

$$\inf_{\widehat{E}} \widehat{\mathscr{U}}(x) = \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(\mathscr{U}(x)) = \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U(\kappa)).$$

$\triangleleft$ (1) Из леммы 4.10.5 следует, что $\widehat{\mathscr{U}}(x)$ имеет инфимум в $(o)\text{-}\overline{E}$, и $\inf_{(o)\text{-}\overline{E}} \widehat{\mathscr{U}}(x) = \inf_{\widehat{E}} \widehat{\mathscr{U}}(x)$. Значит, из $\widehat{\mathscr{U}}(x) \geqslant x$ следует, что $\inf_{(o)\text{-}\overline{E}} \widehat{\mathscr{U}}(x) \geqslant x$. Тогда $\inf_{\widehat{E}} \widehat{\mathscr{U}}(x) \geqslant x$, что и требовалось.

(2) Положим $x_0 := \inf_{\widehat{E}} \widehat{\mathscr{U}}(x)$. Из условия (1) следует, что $\mathscr{U}(x_0) \subseteq \mathscr{U}(x)$. Установим обратное включение. Пусть $z \in \mathscr{U}(x)$. Тогда $\widehat{\eta}(z) \geqslant x$ и, следовательно, $\widehat{\eta}(z) \in \widehat{\mathscr{U}}(x)$. Значит, $\widehat{\eta}(z) \geqslant x_0$, что эквивалентно условию $z \in \mathscr{U}(x_0)$. Для завершения доказательства остается проверить равенство $x_0 = \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(\mathscr{U}(x_0))$, которое справедливо, так как $\widehat{E}$ является порядковым пополнением $\widehat{\eta}(E)$.

(3) Пусть $\kappa \in \operatorname{fin}({}^*E)$ и $x = [\kappa]$. Положим $x_0 := \inf_{\widehat{E}} \widehat{\mathscr{U}}(x)$. По условию (1) имеем $x_0 \geqslant x$. Выберем $y \in \operatorname{fin}({}^*E)$, для которого $x_0 = [y]$ и $y \geqslant \kappa$. По лемме 4.10.4 имеем

$$x_0 = [y] = \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U(y)) \geqslant \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U(\kappa)). \tag{8}$$

Из очевидного включения $\widehat{\eta}(U(\kappa)) \subseteq \widehat{\mathscr{U}}([\kappa])$ следует, что

$$\inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U(\kappa)) \geqslant \inf_{\widehat{E}} \widehat{\mathscr{U}}([\kappa]) = x_0. \tag{9}$$

Из (8), (9) и (2) получаем требуемый результат. $\triangleright$

4.10.7. Определим отображение $p : (o)\text{-}\overline{E} \to \widehat{E}$ следующим образом:

$$p(x) := \inf_{\widehat{E}} \widehat{\mathscr{U}}(|x|) \quad (x \in (o)\text{-}\overline{E}). \tag{10}$$

Установим некоторые его свойства.

Теорема. *Отображение p является $\widehat{E}$-значной нормой на (o)-$\overline{E}$ такой, что для всех $x, y \in (o)$-$\overline{E}$ имеет место следующее:*

(1) $p(x) = \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(\mathscr{U}(|x|))$;

(2) $p(x) \geqslant |x|$;

(3) *из $|x| \geqslant |y|$ следует $p(x) \geqslant p(y)$.*

Более того, произвольная последовательность $(x_n) \subseteq (o)$-$\overline{E}$ является (r)-сходящейся по норме p к некоторому элементу $x_0 \in (o)$-$\overline{E}$ (является (r)-последовательностью Коши по норме p) тогда и только тогда, когда эта последовательность (r)-сходится к x_0 в векторной решетке (o)-$\overline{E}$ (является (r)-последовательностью Коши в (o)-$\overline{E}$). Решеточно нормированное пространство $((o)$-$\overline{E}, p, \widehat{E})$ является разложимым и (r)-полным.

$\lhd$ Ввиду определения (10) доказательство сразу получается из того, что отображение p удовлетворяет условиям 4.0.10(2), 4.0.10(3) и пункту (3) теоремы. Пункт (2) вытекает из 4.10.6(1). Условия 4.0.10(1) получаются из (2). Следовательно, p является $\widehat{E}$-значной нормой на (o)-$\overline{E}$. Условие (1) — частный случай 4.10.6(2).

Если $x_n \xrightarrow{(r)} x_0$ в норме p с регулятором $e \in \widehat{E}$, то ввиду пункта (2) теоремы $x_n \xrightarrow{(r)} x_0$ в (o)-$\overline{E}$ с тем же самым регулятором. Наоборот, если $x_n \xrightarrow{(r)} x_0$ в (o)-$\overline{E}$ с регулятором $d \in (o)$-$\overline{E}$, то $x_n \xrightarrow{(r)} x_0$ в норме p с регулятором $p(d)$ в соответствии с пунктом (3) теоремы. Для (r)-последовательностей Коши доказательство аналогично.

По теореме 4.8.4 фактор-решетка (o)-$\overline{E}$ (r)-полна. Таким образом, как мы показали, $((o)$-$\overline{E}, p, \widehat{E})$ является (r)-полной. Проверим разложимость p. Для этого ввиду предложения 4.0.10 достаточно установить (d)-разложимость p. Пусть $x \in (o)$-$\overline{E}$ и $e_1, e_2 \in \widehat{E}$ таковы, что $p(x) = e_1 + e_2$ и $e_1 \wedge e_2 = 0$. Положим

$$x_1 := x_+ \wedge e_1 - x_- \wedge e_1; \quad x_2 := x_+ \wedge e_2 - x_- \wedge e_2.$$

Легко видеть, что $p(x_1) = e_1$, $p(x_2) = e_2$ и $x = x_1 + x_2$. $\rhd$

4.10.8. Рассмотрим отображение $p \circ \overline{\alpha} : (o)$-$\overline{\mathscr{X}} \to \widehat{E}$, где $\overline{\alpha} : (o)$-$\overline{\mathscr{X}} \to (o)$-$E$ — (o)-E-значная норма, определенная в 4.10.1.

Теорема. *Тройка $((o)$-$\overline{\mathscr{X}}, p \circ \overline{\alpha}, \widehat{E})$ — разложимое (r)-полное РНП.*

$\lhd$ Легко видеть, что $p \circ \overline{\alpha}$ — $\widehat{E}$-значная норма в (o)-$\overline{\mathscr{X}}$. Рассмотрим произвольную последовательность $(x_n) \subseteq (o)$-$\overline{\mathscr{X}}$, являющуюся (r)-последовательностью Коши в норме $p \circ \overline{\alpha}$ с регулятором $e \in \widehat{E}$. По теореме 4.10.7(2) наша последовательность также является (r)-последовательностью Коши в норме $\overline{\alpha}$ с тем же самым регулятором. Отсюда по теореме 4.10.2 следует существование элемента $x_0 \in (o)$-$\overline{\mathscr{X}}$ такого, что $x_n \xrightarrow{(r)} x_0$ в норме $\overline{\alpha}$ с регулятором e. Из теоремы 4.10.7(3) следует, что $x_n \xrightarrow{(r)} x_0$ в норме $p \circ \overline{\alpha}$ с регулятором $p(e) = e$. Значит, каждая последовательность $(x_n) \subseteq (o)$-$\overline{\mathscr{X}}$, являющаяся (r)-последовательностью Коши в норме $p \circ \overline{\alpha}$, является (r)-сходящейся в (o)-$\overline{\mathscr{X}}$ с тем же самым регулятором. Отсюда (o)-$\overline{\mathscr{X}}$ (r)-полна в норме $p \circ \overline{\alpha}$.

Ввиду (r)-полноты и по предложению 0.10 для доказательства разложимости в норме $p \circ \overline{\alpha}$ достаточно проверить условие (d)-разложимости. Пусть $x \in (o)$-$\overline{\mathscr{X}}$ и $e_1, e_2 \in \widehat{E}$ таковы, что $p \circ \overline{\alpha}(x) = e_1 + e_2$ и $e_1 \wedge e_2 = 0$. Из разложимости в норме p следует существование $\alpha_1, \alpha_2 \in (o)$-$\overline{E}$ таких, что $\overline{\alpha}(x) = \alpha_1 + \alpha_2$, $p(\alpha_1) = e_1$ и $p(\alpha_2) = e_2$. По теореме 4.10.7(2) имеем $\alpha_1 \leqslant e_1$, $\alpha_2 \leqslant e_2$. Из условий $\alpha_1 + \alpha_2 = \overline{\alpha}(x) \geqslant 0$, $e_1 \wedge e_2 = 0$ получаем, что $\alpha_1 \geqslant 0$ и $\alpha_2 \geqslant 0$. Остается воспользоваться разложимостью в норме $\overline{\alpha}$ для нахождения элементов $x_1, x_2 \in (o)$-$\overline{\mathscr{X}}$ таких, что $x_1 + x_2 = x$, $\alpha(x_1) = \alpha_1$ и $\alpha(x_2) = \alpha_2$. Очевидно, $p \circ \overline{\alpha}(x_1) = e_1$ и $p \circ \overline{\alpha}(x_2) = e_2$. $\rhd$

4.11. Ассоциированные пространства Банаха — Канторовича

Дадим нестандартное построение порядкового пополнения разложимого РНП. Схема построения основана на вложении РНП в ассоциированное пространство Банаха — Канторовича (ПБК). Изучим продолжения внутренних мажорируемых операторов, имеющих стандартные (o)-непрерывные мажоранты, на ассоциированные ПБК. Всюду на протяжении этого параграфа будем предполагать, что $(\mathscr{X}, a, E)$ и $(\mathscr{Y}, b, F)$ — разложимые РНП, в которых векторные решетки E, F являются условно полными.

4.11.1. Определенное в 4.10.8 решеточно нормированное пространство $((o)$-$\overline{\mathscr{X}}, p \circ \overline{\alpha}, \widehat{E})$, называется *ассоциированным* с порядковой оболочкой $\big((o)$-$\overline{\mathscr{X}}, \overline{\alpha}, (o)$-$E\big)$ решеточно нормированного пространства (X, a, E). Покажем, что такое РНП является пространством Банаха — Канторовича.

Поскольку векторная решетка $\widehat{E}$ является условным пополнением E, имеем $\widehat{E} \cong E$. Более точно, отображение $\widehat{\eta} : E \to \widehat{E}$ — решеточный изоморфизм E на $\widehat{E}$. Рассмотрим отображение $\rho_E : (o)\text{-}\overline{E} \to E$, определенное правилом

$$\rho_E(x) := \inf_E \{e \in E : \widehat{\eta}(e) \geqslant |x|\} \quad (x \in (o)\text{-}\overline{E}).$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Отображение ρ_E связано с нормой $p : (o)\text{-}\overline{E} \to \widehat{E}$ отношением $\rho_E = \widehat{\eta}^{-1} \circ p$. Более того, для каждого $x \in \operatorname{fin}({}^*E)$ имеем*

$$\rho_E([\kappa]) = \inf_E \{e \in E : e \geqslant |\kappa|\}.$$

$\lhd$ Первая часть леммы следует из определений p и ρ_E, вторая — из соотношения

$$\rho_E([\kappa]) = \inf_E \mathscr{U}(|[\kappa]|) =$$
$$= \widehat{\eta}^{-1} \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(\mathscr{U}(|[\kappa]|)) = \widehat{\eta}^{-1} \inf_{\widehat{E}} \widehat{\eta}(U(|\kappa|)) =$$
$$= \inf_E U(|\kappa|) = \inf_E \{e \in E : e \geqslant |\kappa|\},$$

в котором второе и четвертое равенства справедливы ввиду того, что $\widehat{\eta}$ — решеточный изоморфизм, а третье — в силу леммы 4.10.6(3). $\rhd$

Из теоремы 4.10.8 и леммы 4.11.1 получаем.

Следствие. *Тройка $((o)\text{-}\overline{\mathscr{X}}, \rho_E \circ \overline{\alpha}, E)$ является разложимым (r)-полным решеточно нормированным пространством. Более того, для любого $x \in \operatorname{fin}({}^*E)$ имеем*

$$\rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle\kappa\rangle) = \inf_E \{e \in E : e \geqslant \alpha(\kappa)\}. \tag{11}$$

4.11.2. Обозначим через $\mathscr{B}(E)$ семейство всех порядковых проекторов в E. Заметим, что для каждого внутреннего порядкового проектора $\tau \in {}^*\mathscr{B}(E)$ существует единственный порядковый проектор $h(\tau)$ в $\mathscr{X}$, удовлетворяющий условию

$$\alpha(h(\tau)\kappa) = \tau\alpha(\kappa) \quad (\kappa \in \mathscr{X}).$$

Это свойство легко получается из разложимости во внутренней норме $\alpha : \mathscr{X} \to {}^*E$.

Лемма. *Для всех* $\pi \in \mathscr{B}(E)$, $\kappa \in \operatorname{fin}(\mathscr{X})$ *имеем*

$$\pi \circ \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle \kappa \rangle) = \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle h({}^*\pi)\kappa \rangle).$$

$\lhd$ Пусть $x \in \operatorname{fin}(\mathscr{X})$. Покажем, что для каждого $\pi \in \mathscr{B}(E)$ справедливо неравенство

$$\pi \circ \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle \kappa \rangle) \geqslant \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle h({}^*\pi)\kappa \rangle). \tag{12}$$

Для этого рассмотрим $e \in E$, $e \geqslant \alpha(\kappa)$. Тогда $\pi e \geqslant {}^*\pi(\alpha(\kappa)) = \alpha(h({}^*\pi)\kappa)$. Применив формулу (11), получаем, что

$$\pi(e) \geqslant \inf_E \{f \in E : f \geqslant \alpha(h({}^*\pi)\kappa)\} = \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle h({}^*\pi)\kappa \rangle).$$

Ввиду произвольности выбора $e \in E$, $e \geqslant \alpha(\kappa)$, свойства порядковой непрерывности π и формулы (11) получаем, что

$$\pi \circ \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle \kappa \rangle) = \pi \inf_E \{e \in E : e \geqslant \alpha(\kappa)\} =$$

$$= \inf_E \{\pi e : e \in E \ \& \ e \geqslant \alpha(\kappa)\} \geqslant \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle h({}^*\pi)\kappa \rangle).$$

Неравенство (12) установлено.

Рассмотрим некоторый порядковый проектор $\pi \in \mathscr{B}(E)$ и обозначим через π^d дополнительный проектор к π. Тогда, применяя неравенство (12) к π и π^d, имеем

$$\rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle \kappa \rangle) = \pi \circ \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle \kappa \rangle) + \pi^d \circ \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle \kappa \rangle) \geqslant$$

$$\geqslant \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle h({}^*\pi)\kappa \rangle) + \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle h({}^*\pi^d)\kappa \rangle) \geqslant$$

$$\geqslant \rho_E([{}^*\pi \circ \alpha(\kappa) + {}^*\pi^d \circ \alpha(\kappa)]) = \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle \kappa \rangle).$$

Значит,

$$\pi \circ \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle \kappa \rangle) + \pi^d \circ \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle \kappa \rangle) =$$

$$= \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle h({}^*\pi)\kappa \rangle) + \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle h({}^*\pi^d)\kappa \rangle).$$

Следовательно по неравенству (12) имеем $\pi \circ \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle \kappa \rangle) = \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle h({}^*\pi)\kappa \rangle)$, что и требовалось. $\rhd$

4.11.3. *Лемма.* *Ассоциированное РНП* $((o)\text{-}\overline{\mathscr{X}}, \rho_E \circ \overline{\alpha}, E)$ *является дизъюнктно полным.*

$\lhd$ Возьмем произвольное разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi} \subseteq \mathscr{B}(E)$ и ограниченное по норме $\rho_E \circ \overline{\alpha}$ семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi} \subseteq (o)\text{-}\overline{\mathscr{X}}$. Предположим, что для $e \in E$ выполнено

$$\rho_E \circ \overline{\alpha}(x_\xi) \leqslant e \quad (\xi \in \Xi). \tag{13}$$

Выберем $\kappa_\xi \in \mathscr{X}$ таким, что $\langle \kappa_\xi \rangle = x_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$. Используя определение нормы $\overline{\alpha}$, соотношение $\rho_E = \widehat{\eta}^{-1} \circ p$ и пункт (2) теоремы 4.10.7, перепишем неравенство (13) в виде $[\alpha(\kappa_\xi)] \leqslant \widehat{\eta}(e)$. Следовательно, для подходящего $\eta_\xi \in \eta({}^*E)$ справедливо неравенство $\alpha(\kappa_\xi) \leqslant e + \eta_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Отсюда по лемме 4.0.13 найдутся элементы $\kappa'_\xi \in \operatorname{fin}(\mathscr{X})$, для которых

$$\alpha(\kappa_\xi - \kappa'_\xi) \in \eta({}^*E), \quad \alpha(\kappa'_\xi) \leqslant e \quad (\xi \in \Xi). \tag{14}$$

Зафиксируем некоторое $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ и обозначим через $\mathscr{F}$ множество всех внутренних отображений из ${}^*\Xi$ в $\mathscr{X}$. Пусть Card — внутренняя мощность. Определим для каждого $\xi \in \Xi$ внутреннее подмножество A_ξ множества $\mathscr{F}$ следующим образом:

$$A_\xi := \{\varphi \in \mathscr{F} : \alpha \circ \varphi({}^*\Xi) \subseteq [-e, e] \;\&$$

$$\&\; \varphi(\xi) = \kappa'_\xi \;\&$$

$$\&\; \operatorname{Card}(\{\xi \in {}^*\Xi : \varphi(\xi) \neq 0\}) \leqslant \nu\}.$$

Легко видеть, что семейство $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ является центрированным. Следовательно, по общему принципу насыщения существует элемент $\varphi_0 \in \cap\{A_\xi : \xi \in \Xi\}$. Обозначим

$$\Theta := \{\xi \in {}^*\Xi : \varphi_0(\xi) \neq 0\}.$$

Поскольку $\operatorname{Card}(\Theta) \leqslant \nu$, множество Θ является гиперконечным. Кроме того, очевидно, что

$$\Xi \subseteq \Theta \subseteq {}^*\Xi \quad \text{и} \quad \alpha(\varphi_0(\xi)) \leqslant e \quad (\xi \in \Theta).$$

Для удобства положим $\varkappa'_\xi := \varphi_0(\xi)$ для $\xi \in \Theta$. Это не приводит к недоразумению, поскольку $\varphi_0(\xi) = \varkappa'_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$ ввиду выбора φ_0.

Значит, семейство $(\varkappa'_\xi)_{\xi\in\Xi}$ расширяется до гиперконечного семейства $(\varkappa'_\xi)_{\xi\in\Theta} \subseteq \mathscr{X}$ такого, что

$$\alpha(\varkappa'_\xi) \leqslant e \quad (\xi \in \Theta). \tag{15}$$

Пусть $(\tau_\xi)_{\xi\in{}^*\Xi} := {}^*((\pi_\xi)_{\xi\in\Xi})$ — нестандартное расширение разбиения единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Тогда $(\tau_\xi)_{\xi\in{}^*\Xi}$ — внутреннее разбиение единицы в ${}^*\mathscr{B}(E)$. Кроме того, $\tau_\xi = {}^*\pi_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$. Гиперконечная сумма $\varkappa := \sum_{\xi\in\Theta} h(\tau_\xi)\varkappa'_\xi$ является элементом внутреннего векторного пространства $\mathscr{X}$, где $h(\tau_\xi)$ — проекторы, определенные в 4.11.2. Из того, что проекторы τ_ξ попарно дизъюнктны, и неравенства (15) следует, что $|\varkappa| \leqslant e$. В частности, $\varkappa \in \mathrm{fin}(\mathscr{X})$.

Для любого $\xi_0 \in \Xi$ рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$\pi_{\xi_0} \circ \rho_E \circ \overline{\alpha}(x_{\xi_0} - \langle\varkappa\rangle) = \pi_{\xi_0} \circ \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle\varkappa'_{\xi_0} - \varkappa\rangle) =$$

$$= \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle h({}^*\pi_{\xi_0})(\varkappa'_{\xi_0} - \varkappa)\rangle) =$$

$$= \rho_E \circ \overline{\alpha}\Big(\Big\langle h(\tau_{\xi_0})\Big(\sum_{\xi\in\Theta\setminus\{\xi_0\}} h(\tau_\xi)\varkappa'_\xi\Big)\Big\rangle\Big) = 0.$$

Первое равенство выполнено ввиду выбора элементов $\varkappa_\xi$ и формулы (14). Справедливость второго обеспечивает лемма 4.11.2. Третье выполнено ввиду выбора $\varkappa$ и равенства $\tau_{\xi_0} = {}^*\pi_{\xi_0}$, упомянутого выше. Последнее равенство следует из попарной дизъюнктности элементов τ_ξ. Следовательно, $\pi_\xi \circ \rho_E \circ \overline{\alpha}(x_\xi - \langle\varkappa\rangle) = 0$ для каждого $\xi \in \Xi$ и $\langle\varkappa\rangle = \mathrm{mix}(\pi_\xi x_\xi)_{\xi\in\Xi}$.

Отсюда следует, что для каждого разбиения единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi} \subseteq \mathscr{B}(E)$ и каждого ограниченного по норме $\rho_E \circ \overline{\alpha}$ семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ существует перемешивание $\mathrm{mix}(\pi_\xi x_\xi) \in (o)\text{-}\overline{\mathscr{X}}$. Лемма доказана. $\triangleright$

4.11.4. Теперь мы готовы доказать основной результат этого параграфа.

Теорема. *Ассоциированное РНП*

$$((o)\text{-}\overline{\mathscr{X}}, \rho_E \circ \overline{\alpha}, E)$$

является пространством Банаха — Канторовича.

$\lhd$ Немедленно следует из следствия 4.11.1 и леммы 4.11.3 с использованием предложения 4.0.11. $\rhd$

Напомним, что, когда мы берем внутреннее нормированное пространство $\mathscr{X}$ в качестве внутреннего разложимого РНП, ассоциированное пространство совпадает с классической нестандартной оболочкой $\widetilde{\mathscr{X}}$. Следовательно, по уже установленной выше теореме получаем хорошо известное утверждение о том, что нестандартная оболочка внутреннего нормированного пространства является банаховым пространством.

Рассматривая внутреннее решеточно нормированное пространство $({}^*E, |\cdot|, {}^*E)$ получаем, что соответствующее ассоциированное пространство $((o)\text{-}\overline{E}, \rho_E, E)$ является решеточно нормированным. Из определения отображения $\rho_E : (o)\text{-}\overline{E} \to E$ очевидно, что для всех $x, y \in (o)\text{-}\overline{E}$ из условия $|x| \leqslant |y|$ следует неравенство $\rho_E(x) \leqslant \rho_E(y)$. Отсюда получаем, что ассоциированное РНП $((o)\text{-}\overline{E}, \rho_E, E)$ является пространством Банаха — Канторовича.

4.11.5. Известно, что пополнение по норме нормированного пространства можно получить в виде замыкания этого пространства в его нестандартной оболочке. Аналогично, как будет указано ниже, (o)-пополнение разложимого РНП можно построить, используя вложение в ассоциированное ПБК.

Для простоты обозначим через $((o)\text{-}\overline{X}, \rho_E \circ \overline{a}, E)$ ПБК, ассоциированное с порядковой оболочкой (X, a, E). Рассмотрим отображение $\widehat{\eta} : X \to (o)\text{-}\overline{X}$ такое, что

$$\widehat{\eta}(x) := \langle x \rangle \quad (x \in X). \tag{16}$$

Легко видеть, что $\widehat{\eta}$ является изометрическим изоморфизмом РНП (X, a, E) в $((o)\text{-}\overline{X}, \rho_E \circ \overline{a}, E)$. Обозначим через $\widehat{X}$ множество пределов всех сходящихся по норме $\rho_E \circ \overline{a}$ сетей, состоящих из элементов $\widehat{\eta}(X)$.

Лемма. *Для каждого элемента $x \in (o)\text{-}\overline{X}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $x \in \widehat{X}$;

(2) $\inf\limits_{y \in X} \rho_E \circ \overline{a}(x - \widehat{\eta}(y)) = 0$.

$\lhd$ (1)$\to$(2): Сразу получается из определения $\widehat{X}$.

(2)$\to$(1): Пусть элемент $x \in (o)\text{-}\overline{X}$ удовлетворяет условию (2). Покажем, что $x \in \widehat{X}$. Определим на X отношение $\prec$ следующим образом:

$$y \prec z \leftrightarrow \rho_E \circ \overline{a}(x - \widehat{\eta}(y)) \geqslant \rho_E \circ \overline{a}(x - \widehat{\eta}(z)).$$

Множество X направлено вниз относительно $\prec$. В самом деле, для всех $y, z \in X$ имеем $y, z \leqslant h(\pi)y + h(\pi^d)z$, где $\pi \in \mathscr{B}(E)$ — проектор, удовлетворяющий условию

$$\pi \circ \rho_E \circ \overline{a}(x - \widehat{\eta}(y)) + \pi^d \circ \rho_E \circ \overline{a}(x - \widehat{\eta}(z)) =$$

$$= \rho_E \circ \overline{a}(x - \widehat{\eta}(y)) \wedge \rho_E \circ \overline{a}(x - \widehat{\eta}(z)),$$

и $h(\pi)$, $h(\pi^d)$ — соответствующие проекторы в (X, a, E). Рассмотрим сеть $(\widehat{\eta}(y))_{y \in (X, \prec)}$. Из определения $(X, \prec)$ и условия $\inf\limits_{g \in X} \rho_E \circ \overline{a}(x - \widehat{\eta}(y)) = 0$ следует, что сеть $(\widehat{\eta}(y))_{y \in (X, \prec)}$ сходится к x в (o)-$\overline{X}$. Поскольку сеть состоит из элементов $\widehat{\eta}(X)$, имеем $x \in \widehat{X}$. $\rhd$

4.11.6. *Теорема.* *Тройка $(\widehat{X}, \rho_E \circ \overline{a}, E)$ является (o)-пополнением разложимого РНП (X, a, E).*

$\lhd$ Достаточно проверить свойства 4.0.12 (1)–(3). Легко видеть, что $(\widehat{X}, \rho_E \circ \overline{a}, E)$ — РНП. Покажем, что оно является (o)-полным. Рассмотрим произвольную (o)-сеть Коши (x_ξ). Тогда из (o)-полноты ассоциированного РНП следует существование элемента $x \in (o)$-$\overline{X}$ такого, что $x = (o)\text{-}\lim(x_\xi)$. Покажем, что $x \in \widehat{X}$. Из условий $x_\xi \in \widehat{X}$, $x = (o)\text{-}\lim(x_\xi)$ следует, что

$$\inf_{y \in X} \rho_E \circ \overline{a}(x_\xi - \widehat{\eta}(y)) = 0, \quad \inf_{\xi} \rho_E \circ \overline{a}(x - x_\xi) = 0. \qquad (17)$$

Из (17) получаем

$$0 \leqslant \inf_{y \in X} \rho_E \circ \overline{a}(x - \widehat{\eta}(y)) \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\xi} \inf_{y \in X} (\rho_E \circ \overline{a}(x - x_\xi) + \rho_E \circ \overline{a}(x_\xi - \widehat{\eta}(y))) \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\xi} \rho_E \circ \overline{a}(x - x_\xi) + \inf_{\xi} \inf_{y \in X} \rho_E \circ \overline{a}(x_\xi - \widehat{\eta}(y)) = 0.$$

Отсюда $\inf\limits_{y \in X} \rho_E \circ \overline{a}(x - \widehat{\eta}(y)) = 0$, и по лемме 4.11.5 имеем $x \in \widehat{X}$. Значит, каждая (o)-сеть Коши $(x_\xi) \subseteq \widehat{X}$ является (o)-сходящейся. Следовательно, $\widehat{X}$ (o)-полно в норме $\rho_E \circ \overline{a}$. Легко проверить, что норма

$\rho_E \circ \overline{a}$ является (d)-разложимой на $\widehat{X}$. Следовательно, используя доказанную (o)-полноту и учитывая предложение 4.0.10, получаем разложимость нормы $\rho_E \circ \overline{a}$ в $\widehat{X}$. Свойство 4.0.12 (1) установлено. Свойство 4.0.12 (2) очевидно для вложения $\widehat{\eta} : X \to \widehat{X}$.

Для проверки свойства 4.0.12(3) рассмотрим произвольные $x' \in \widehat{X}$ и $e \in E_+$. Положим

$$\mathscr{E} := \{\pi \in \mathscr{B}(E) : \pi \circ \rho_E \circ \overline{a}(x' - \widehat{\eta}(y)) \leqslant e \text{ для некоторого } x \in X\}.$$

Так как $x' \in \widehat{X}$, имеем

$$\inf_{x \in X} \rho_E \circ \overline{a}(x' - \widehat{\eta}(x)) = 0.$$

Следовательно, множество $\mathscr{E}$ плотно в полосе $\mathscr{B}_e(E)$, порожденной проектором pr_e. Согласно принципу исчерпывания существует разбиение $(\sigma_\gamma)_{\gamma \in \Omega} \subseteq \mathscr{E}$ проектора pr_e. В соответствии с определением множества $\mathscr{E}$ существует семейство $(x'_\gamma)_{\gamma \in \Omega} \subseteq X$, для которого

$$\sigma_\gamma \circ \rho_E \circ \overline{a}(x' - \widehat{\eta}(x'_\gamma)) \leqslant e \quad (\gamma \in \Omega). \tag{18}$$

Выберем $\gamma_0 \notin \Omega$ и положим $\Gamma := \Omega \cup \{\gamma_0\}$, $\sigma_{\gamma_0} := \mathrm{pr}_e^d$ и $x'_{\gamma_0} := 0$. Для каждого $\gamma \in \Gamma$ в силу разложимости пространства (X, a, E) существует единственный проектор τ_γ в пространстве X, удовлетворяющий $a \circ \tau_\gamma = \delta_\gamma \circ a$. Определим семейство $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \subseteq X$ так, чтобы $x_\gamma := \tau_\gamma x'_\gamma$ при всяком $\gamma \in \Gamma$. Из (18) следует, что

$$a(x_\gamma) = a(\tau_\gamma x'_\gamma) = \sigma_\gamma \circ a(x'_\gamma) = \sigma_\gamma \circ \rho_E \circ \overline{a}\ (\widehat{\eta}(x'_\gamma)) \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_\gamma \circ \rho_E \circ \overline{a}\ (x') + \sigma_\gamma \circ \rho_E \circ \overline{a}\ (x' - \widehat{\eta}(x'_\gamma)) \leqslant 2\rho_E \circ \overline{a}\ (x') + e$$

для любого $\gamma \in \Gamma$. Таким образом, семейство $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ограничено по норме a. В силу (o)-полноты пространства $(\widehat{X}, \rho_E \circ \overline{a}, E)$ существует перемешивание $\mathrm{mix}(\delta_\gamma, \widehat{\eta}(x_\gamma))_{\gamma \in \Gamma} \in \widehat{X}$. Снова привлекая (18), нетрудно показать, что

$$\mathrm{pr}_e \circ \rho_E \circ \overline{a}(x' - \mathrm{mix}(\sigma_\gamma, \widehat{\eta}(x_\gamma))) \leqslant e.$$

Ввиду произвольности выбора элементов $x' \in \widehat{X}$ и $e \in E_+$ свойство 4.0.12(3) установлено. Теорема доказана. $\triangleright$

4.11.7. Обозначим пространство регулярных (соответственно порядково непрерывных) операторов из E в F через $L_r(E,F)$ (соответственно через $L_n(E,F)$) и обозначим через $\mathscr{M}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ множество всех внутренних линейных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, имеющих стандартную мажоранту ${}^*Q$, $Q \in L_r(E,F)$ (см. 4.0.15). Пусть $\mathscr{M}_n(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ — множество всех операторов в $\mathscr{M}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, имеющих мажоранту вида ${}^*S$, где $S \in L_n(E,F)$.

Лемма. *Для каждого внутреннего линейного оператора T, действующего из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, выполнены следующие условия:*

(1) $T \in \mathscr{M}(\mathscr{X},\mathscr{Y}) \to T(\operatorname{fin}(\mathscr{X})) \subseteq \operatorname{fin}(\mathscr{Y})$;

(2) $T \in \mathscr{M}_n(\mathscr{X},\mathscr{Y}) \to T(\eta(\mathscr{X})) \subseteq \eta(\mathscr{Y})$.

$\triangleleft$ Проверим только условие (1). Условие (2) устанавливается аналогично. Поскольку $T \in \mathscr{M}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, существует оператор $Q \in L_r(E,F)$, для которого

$$\beta(T\kappa) \leqslant {}^*Q\alpha(\kappa) \quad (\kappa \in \mathscr{X}). \tag{19}$$

Рассмотрим произвольное $\kappa \in \operatorname{fin}(\mathscr{X})$. Тогда $\alpha(\kappa) \leqslant e$ для некоторого $e \in E$. Из (19) имеем $\beta(T\kappa) \leqslant Q(e)$ и, следовательно, $T\kappa \in \operatorname{fin}(\mathscr{Y})$. $\triangleright$

Всюду в дальнейшем векторная решетка $L_n(E,F)$ будет обозначаться через L.

4.11.8. Предположим, что $T \in \mathscr{M}_n(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. По лемме 4.11.7 корректно определено отображение $\overline{T} : (o)\text{-}\overline{\mathscr{X}} \to (o)\text{-}\overline{\mathscr{Y}}$ такое, что

$$\overline{T}(\langle\kappa\rangle) := \langle T\kappa\rangle \quad (\kappa \in \operatorname{fin}(\mathscr{X})). \tag{20}$$

Теорема. *Отображение $\overline{T}$ — мажорируемый линейный оператор, действующий из ассоциированного ПБК $((o)\text{-}\overline{\mathscr{X}}, \rho_E \circ \overline{\alpha}, E)$ в ассоциированное ПБК $((o)\text{-}\overline{\mathscr{Y}}, \rho_F \circ \overline{\beta}, F)$. Кроме того, выполняется $\langle\!\langle\!\langle \overline{T} \rangle\!\rangle\!\rangle \leqslant \rho_L([\langle\!\langle\!\langle T \rangle\!\rangle\!\rangle])$.*

Прежде чем приступать к доказательству, сделаем некоторые пояснения. Через $\langle\!\langle\!\langle \overline{T} \rangle\!\rangle\!\rangle$ (соответственно $\langle\!\langle\!\langle T \rangle\!\rangle\!\rangle$) обозначена наименьшая (соответственно внутренняя наименьшая) мажоранта оператора $\overline{T}$ (соответственно оператора T). Через ρ_L обозначена L-значная норма в РНП $((o)\text{-}\overline{L}, \rho_L, L)$.

$\lhd$ Достаточно установить, что оператор $\rho_L([\langle\!\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\!\rangle]) \in L_n(E,F)$ является мажорантой оператора $\overline{T}$. Возьмем произвольный оператор $S \in L$, удовлетворяющий условию ${}^*S \geqslant \langle\!\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\!\rangle$. Тогда, используя соотношение (19), для любого $\kappa \in \operatorname{fin}(\mathscr{X})$ получаем

$$\rho_F \circ \overline{\beta}(\overline{T}\langle\kappa\rangle) = \inf_F\{f \in F : f \geqslant \beta(T\kappa)\} \leqslant$$

$$\leqslant \inf_F\{f \in F : f \geqslant \langle\!\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\!\rangle\alpha(\kappa)\} \leqslant \inf_F\{Se : e \in E : e \geqslant \alpha(\kappa)\} =$$

$$= S\inf_F\{e \in E : e \geqslant \alpha(\kappa)\} = S \circ \rho_E \circ \overline{\alpha}(\langle\kappa\rangle).$$

Следовательно, $S \geqslant \langle\!\langle\!\langle \overline{T}\rangle\!\rangle\!\rangle$. Привлекая лемму 4.11.1, получаем

$$\rho_L([\langle\!\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\!\rangle]) = \inf_L\{S \in L : {}^*S \geqslant \langle\!\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\!\rangle\} \geqslant \langle\!\langle\!\langle \overline{T}\rangle\!\rangle\!\rangle,$$

что и требовалось. $\rhd$

4.11.9. Обозначим через $M_n(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ множество всех линейных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ имеющих (o)-непрерывные мажоранты. Ясно, что условия $T \in M_n(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ и ${}^*T \in M_n({}^*\mathscr{X},{}^*\mathscr{Y})$ эквивалентны. Возьмем произвольный $T \in M_n(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. Тогда согласно формуле (20) существует отображение $\overline{T} : (o)\text{-}\overline{\mathscr{X}} \to (o)\text{-}\overline{\mathscr{Y}}$ такое, что

$$\overline{T}(\langle\kappa\rangle) = \langle{}^*T\kappa\rangle \quad (\kappa \in \operatorname{fin}({}^*\mathscr{X})).$$

Теорема. *Для всякого* $T \in M_n(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ *отображение* $\overline{T}$ *является мажорируемым линейным оператором из* ПБК $((o)\text{-}\overline{\mathscr{X}},\overline{a},E)$ *в* ПБК $((o)\text{-}\overline{\mathscr{Y}},\overline{b},F)$. *Кроме того,*

(1) $\overline{T}(\widehat{\eta}_{\mathscr{X}}(x)) = \widehat{\eta}_{\mathscr{Y}}(Tx)$ $(x \in \mathscr{X})$;

(2) $\langle\!\langle\!\langle \overline{T}\rangle\!\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\!\rangle$,

где $\widehat{\eta}_{\mathscr{X}} : \mathscr{X} \to (o)\text{-}\overline{\mathscr{X}}$ *и* $\widehat{\eta}_{\mathscr{Y}} : \mathscr{Y} \to (o)\text{-}\overline{\mathscr{Y}}$ — *канонические вложения, определенные в* (16).

$\lhd$ Отображение $\overline{T}$ линейно по построению. Равенство (1) непосредственно вытекает из определений отображений $\widehat{\eta}_{\mathscr{X}}$, $\widehat{\eta}_{\mathscr{Y}}$, $\overline{T}$. Мажорируемость оператора $\overline{T}$ и неравенство $\langle\!\langle\!\langle \overline{T}\rangle\!\rangle\!\rangle \leqslant \langle\!\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\!\rangle$ установлены в теореме 5.2. Остается проверить обратное неравенство.

Пусть $x \in \mathscr{X}$. Учитывая (1), а также тот факт, что $\widehat{\eta}_{\mathscr{X}}$ и $\widehat{\eta}_{\mathscr{Y}}$ — изометрически изоморфные вложения, получаем

$$b(T(x)) = \rho_F \circ \overline{b}(\widehat{\eta}_{\mathscr{Y}}(Tx)) = \rho_F \circ \overline{b}(\overline{T}(\widehat{\eta}_{\mathscr{X}}(x))) \leqslant$$

$$\leqslant \langle\!\langle\!\langle \overline{T} \rangle\!\rangle\!\rangle(\rho_E \circ \overline{a}(\widehat{\eta}_{\mathscr{X}}(x))) = \langle\!\langle\!\langle \overline{T} \rangle\!\rangle\!\rangle a(x).$$

Отсюда в силу произвольности элемента $x \in \mathscr{X}$ вытекает требуемое неравенство $\langle\!\langle\!\langle T \rangle\!\rangle\!\rangle \leqslant \langle\!\langle\!\langle \overline{T} \rangle\!\rangle\!\rangle$. $\triangleright$

Пусть $\widehat{\mathscr{X}}$ и $\widehat{\mathscr{Y}}$ — (o)-пополнения пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, построенные в теореме 4.11.6. Из предыдущей теоремы получаем следующее утверждение [19, 14, теорема 2.3.3].

Следствие (А. Г. Кусраев, В. З. Стрижевский). *Для любого оператора $T \in M_n(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ существует единственный оператор $\widehat{T} \in M_n(\widehat{\mathscr{X}}, \widehat{\mathscr{Y}})$, продолжающий T в том смысле, что $\widehat{T}(\widehat{\eta}_E(x)) = \widehat{\eta}_F(Tx)$ для всех $x \in \mathscr{X}$. При этом $\langle\!\langle\!\langle \widehat{T} \rangle\!\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\!\langle T \rangle\!\rangle\!\rangle$.*

$\triangleleft$ Достаточно в качестве $\widehat{T}$ взять ограничение оператора $\overline{T}$ на пространство $\widehat{\mathscr{X}}$. Единственность продолжения вытекает из требования $\widehat{T} \in M_n(\widehat{\mathscr{X}}, \widehat{\mathscr{Y}})$ и построения $\widehat{\mathscr{X}}$. $\triangleright$

Литература

1. Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Positive Operators. — New York and London: Academic Press, 1985.

2. Альбеверио С., Фенстад Дж., Хеэг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике.—М.: Мир, 1990.

3. Bernau S. J. Sums and extensions of vector lattice homomorphisms // Acta Appl. Math.—1992.—V. 27.—P. 33–45.

4. Conshor H. Enlargements contain various kinds of completions // Victoria Symposium of Nonstandard Analysis.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—P. 60–79.—(Lecture Notes in Math., **369**.)

5. Cozart D and Moore L. C. The nonstandard hull of a normed Riesz space // Duke Math. J.—1974.—No. 41.—P. 263–275.

6. Емельянов Э. Ю. Порядковые и регулярные оболочки векторных решеток // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 6.—С. 1243–1252.

7. Емельянов Э. Ю. Пространства Банаха—Канторовича, ассоциированные с порядковыми оболочками разложимых решеточно нормированных пространств // Сиб. мат. журн.—1995. —Т. 36, № 1.—С. 72–85.

8. Емельянов Э. Ю. Инфинитезимальный подход к представлению векторных решеток пространствами непрерывных функций на компакте // Докл. РАН.—1995.—Т. 344, № 1.—С. 9–11.

9. Emel′yanov È. Yu. Infinitesimal analysis and vector lattices // Siberian Adv. Math.—1996.—V. 6, No. 1.—P. 19–70.

10. Емельянов Э. Ю. Инвариантные гомоморфизмы нестандартных расширений булевых алгебр и векторных решеток // Сиб. мат. журн.—1997. —Т. 38, № 2.—С. 286–296.

11. Henson C. W. and Moore L. C. Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces // Nonstandard Analysis: Recent Developments.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1983.—P. 27–112.—(Lecture Notes in Math., **983**.)

12. Hurd A. E. and Loeb P. A. An Introduction to Nonstandard Real Analysis.—Orlando etc.: Academic Press, 1985.

13. Kusraev A. G. Dominated operators. I // Siberian Adv. Math.—1994.—V. 4, No. 3.—P. 51–82.

14. Kusraev A. G. Dominated operators. II // Siberian Adv. Math. —1994.—V. 4, No. 4.—P. 24–59.

15. Kusraev A. G. Dominated operators. III // Siberian Adv. Math. —1995.—V. 5, No. 1.—P. 49–76.

16. Kusraev A. G. Dominated operators. IV // Siberian Adv. Math. —1995.—V. 5, No. 2.—P. 99–121.

17. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.— Новосибирск: Наука, 1990.

18. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Nonstandard methods for Kantorovich spaces // Siberian Adv. Math.—1992.—V. 2, No. 2. —P. 114–152.

19. Кусраев А. Г., Стрижевский В. З. Решеточно нормированные пространства и мажорируемые операторы // Исследования по геометрии и функциональному анализу.—Новосибирск: Наука, 1987.—С. 132–158.

20. Luxemburg W. A. J. A general theory of monads // Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability.—New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1969.—P. 18–86.

21. Luxemburg W. A. J. and A. C. Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol 1.— Amsterdam and London: North-Holland, 1971.

22. Meyer-Nieberg P. Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1991.

23. Robinson A. Non-standard analysis // Proc. Roy. Acad. Amsterdam Ser. A.—1961.—No. 64.—P. 432–440.

24. Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.

25. Сикорский Р. Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.

26. Векслер А. И. Принцип Архимеда в гомоморфных образах l-групп и векторных решеток // Изв. вузов. Математика.—1966.—№ 5 (53).—С. 33–38.

27. Wolff M. P. H. An introduction to nonstandard functional analysis. Nonstandard analysis (Edinburgh, 1996) // NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci., **493**—Dordrecht: Kluwer Academic Publishing, 1997.—P. 121–151.

28. Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. 2. —Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.

Глава 5

Векторные меры и мажорируемые отображения

А. Г. Кусраев, С. А. Малюгин

В современной теории векторных мер можно выделить два направления, слабо связанных друг с другом.

Первое направление — изучение мер со значениями в нормированных или в локально-выпуклых пространствах — начиная с классических работ С. Бохнера, И. М. Гельфанда, Н. Данфорда и Б. Петтиса второй половины 1930-х годов. В настоящее время оно представляет собой красивую теорию с богатыми приложениями и хорошо освещено в монографической литературе, см. книги Н. Динкуляну [1], Дж. Дистеля и Дж. Улья [2] о векторных мерах, а также соответствующий том из трактата Н. Бурбаки.

Второе направление — изучение мер, принимающих значения из упорядоченного векторного пространства. Здесь вместо топологии используется сходимость, связанная с порядком, а роль топологической полноты играет порядковая полнота. Такие меры как самостоятельный объект исследования возникли, по-видимому, в связи с вопросом об аналитическом представлении линейных операторов в полуупорядоченных пространствах, см. монографию Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера [3]. Разумеется, меры со значениями в векторных решетках неявно появлялись гораздо раньше как, например, гомоморфизмы абстрактных булевых алгебр и спектральные характеристики самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Именно, изучение самосопряженных операторов с позиций порядкового анализа приводит к понятиям меры и интеграла со значениями в упорядоченном векторном пространстве, см. монографии А. И. Плеснера [7], Б. З. Вулиха [8].

Начиная с 1950-х годов под влиянием теории упорядоченных векторных пространств для булевых мер стали рассматриваться вопросы, характерные для классической теории меры (В. И. Соболев, Б. З. Вулих, Д. А. Владимиров и др.). Меры со значениями в векторных решетках с тех же позиций интенсивно изучал М. Райт в серии публикаций с конца 1960-х годов. После этих работ интерес к мерам в упорядоченных пространствах резко возрос. За истекший период в этом направлении накоплен весьма богатый материал, однако до сих пор нет ни одного обстоятельного обзора.

В настоящей работе предлагается единый подход к указанным выше двум направлениям в теории меры на основе фундаментальной концепции решеточно нормированного пространства (РНП). Дело в том, что специальными случаями решеточно нормированного пространства являются как нормированные и локально-выпуклые пространства, так и векторные решетки. Поэтому все встречающиеся в математической литературе векторные меры являются мерами со значениями в РНП.

Стоит подчеркнуть особо, что новая теория векторных мер возникает отнюдь не механическим соединением ранее известных разнородных фактов. Наоборот, существенно различные идеи и методы, обслуживающие топологический и порядковый подходы к векторным мерам, переплетаясь в тесных взаимосвязях, приводят к новым аналитическим средствам и новым результатам. Пока еще рано говорить о сформировавшейся теории, но в некоторых вопросах уже достигнуто существенное продвижение.

В параграфе 5.1 дается определение меры ограниченной векторной вариации и определяется интеграл типа Лебега по такой мере.

В параграфе 5.2 изучаются квазирадоновы меры, которые, в случае, когда нормирующее K-пространство не обладает свойством слабой σ-дистрибутивности, являются наиболее адекватным аналогом скалярных радоновых мер. Доказывается, что свойство квазирадоновости меры эквивалентно свойству квазирадоновости ее векторной вариации.

В параграфе 5.3 получен критерий интегральной представимости мажорируемого оператора квазирадоновой мерой. Рассмотрена задача о продолжении квазирадоновой меры с плотной подалгебры (векторный аналог теоремы Прохорова).

В параграфе 5.4 для произведения векторных мер получен один вариант теоремы Фубини.

В параграфе 5.5 для мажорированной последовательности векторов из решеточно нормированного пространства решается аналог проблемы моментов Хаусдорфа. В параграфах 5.6 и 5.7 рассмотрена векторная постановка проблемы моментов Гамбургера.

В параграфе 5.8 на локально-компактной абелевой группе дается понятие мажорируемого отображения, являющееся векторным аналогом положительно определенного отображения. Для таких отображений в параграфе 5.9 доказывается векторная теорема Бохнера о представимости мажорируемого отображения квазирадоновой мерой, определенной на борелевской σ-алгебре двойственной группы. В параграфе 5.10 по заданному билинейному отображению определяется свертка квазирадоновых мер. В этом же параграфе получены теорема о представлении гомоморфизма локально-компактной абелевой группы в K-пространство и векторный аналог теоремы Бохнера для положительно определенных отображений, принимающих значения в монотонно полном частично упорядоченном векторном пространстве. В параграфе 5.11 дается булевозначная интерпретация леммы Винера.

5.1. Векторные меры

Пусть $\mathfrak{X}$ — вполне регулярное топологическое пространство; $\mathscr{T}$ (соответственно $\mathscr{F}$) — семейство всех открытых (замкнутых) подмножеств $\mathfrak{X}$; $\mathscr{T}_0$ (соответственно $\mathscr{F}_0$) — семейство всех функционально-открытых (функционально-замкнутых) подмножеств из $\mathfrak{X}$; $\mathscr{B} := \mathscr{B}(\mathfrak{X}) := \mathscr{B}_{\mathfrak{X}}$ (соответственно $\mathscr{K}$) — семейство всех борелевских (компактных) множеств из $\mathfrak{X}$; $\mathscr{M}(\mathfrak{X})$ — пространство всех борелевских функций на $\mathfrak{X}$; $\mathscr{M}_b(\mathfrak{X})$ (соответственно $C_b(\mathfrak{X})$) — пространство всех ограниченных борелевских (непрерывных) функций на $\mathfrak{X}$. Символом $C_{00}(\mathfrak{X})$ (соответственно $C_0(\mathfrak{X})$) обозначаем пространство всех непрерывных функций $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ с компактными носителями (соответственно таких, что $\inf\{\sup\{|f(x)| : x \in \mathfrak{X} \setminus K\} : K \in \mathscr{K}\} = 0$). Если $\mathfrak{C}$ — семейство подмножеств из $\mathfrak{X}$, то символом $\mathscr{A}(\mathfrak{C})$ (соответственно $\Sigma(\mathfrak{C})$) обозначается наименьшая алгебра (σ-алгебра), порожденная семейством $\mathfrak{C}$. Все стандартные понятия, относящиеся к K-пространствам, решеточно нормированным пространствам и мажорируемым операторам, имеются в [8–10].

Говорим, что на K_σ-пространстве F (на σ-полной булевой алгебре $\mathbb{B}$) выполняется закон слабой σ-дистрибутивности, если для любой ограниченной двойной последовательности $\{x_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$ элементов из F (из $\mathbb{B}$) такой, что для любого $i \in \mathbb{N}$ последовательность x_{ij} убывает к нулю при $j \to \infty$, выполняется равенство

$$\bigwedge\left\{ \bigvee_{i=1}^{\infty} x_{i\varphi(i)} : \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \right\} = 0.$$

Говорим, что на K-пространстве F (на полной булевой алгебре $\mathbb{B}$) выполняется закон слабой (σ, ∞)-дистрибутивности, если для любой ограниченной последовательности убывающих к нулю направленностей $\{x_{i,\xi} : \xi \in \Xi_i\}$ $(i \in \mathbb{N})$ элементов из F (из $\mathbb{B}$) справедливо равенство

$$\bigwedge \left\{ \bigvee_{i=1}^{\infty} x_{i,\varphi(i)} : \varphi \in \prod_{i=1}^{\infty} \Xi_i \right\} = 0.$$

Через Y всегда будем обозначать o-полное решеточно нормированное пространство с нормирующим K-пространством F. Векторная F-норма элемента $y \in Y$ обозначается символом $|y|$. Через $\mathfrak{G}(e)$ обозначается булева алгебра всех осколков положительного элемента $e \in F$.

Пусть задана алгебра $\mathscr{A}_0$ подмножеств из $\mathfrak{X}$. *Мерой* $\mu : \mathscr{A}_0 \to Y$ называется аддитивное отображение из $\mathscr{A}_0$ в Y. Говорят, что *мера μ имеет ограниченную векторную вариацию,* если существует положительная мера $\nu : \mathscr{A}_0 \to F$ такая, что $|\mu(A)| \leqslant \nu(A)$ $(A \in \mathscr{A}_0)$. В K-пространстве $\mathrm{ba}(\mathscr{A}_0, F)$ всех ограниченных мер из $\mathscr{A}_0$ в F существует наименьшая ν, удовлетворяющая вышеприведенному неравенству. Она называется *векторной вариацией меры* μ и обозначается через $|\mu|$. Пространство всех мер из $\mathscr{A}_0$ в Y, имеющих ограниченную векторную вариацию, будем обозначать через $F-\mathrm{ba}(\mathscr{A}_0, Y)$. Векторную вариацию $|\mu|$ можно вычислять по следующей формуле:

$$|\mu|(A) = \bigvee \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| : (A_i)_{i=1}^{n} \subseteq \mathscr{A}_0, \right.$$

$$\left. A_i \cap A_j = \varnothing \ (i \neq j), \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A \right\} \quad (A \in \mathscr{A}_0).$$

Пространство всех σ-аддитивных мер из $\mathscr{A}_0$ в Y обозначается через $F - \mathrm{bca}(\mathscr{A}_0, Y)$.

Пусть $S(\mathscr{A}_0)$ — пространство всех $\mathscr{A}_0$-простых функций на $\mathfrak{X}$, т. е. $g \in S(\mathscr{A}_0)$ означает, что $g = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$ для некоторых $(c_i)_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{R}$ и $(A_i)_{i=1}^{n} \subseteq \mathscr{A}_0$. Рассмотрим меру $\mu \in F-\mathrm{ba}(\mathscr{A}_0, Y)$. Для $g \in S(\mathscr{A}_0)$ полагаем по определению

$$\int g d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i).$$

По равномерной непрерывности интеграл распространяется на равномерное замыкание $\overline{S(\mathscr{A}_0)}$ пространства $S(\mathscr{A}_0)$. В случае $\mathscr{A}_0 = \mathfrak{B}$ и $\mu \in F-\mathrm{bca}(\mathscr{A}_0, Y)$ этот интеграл можно продолжить на гораздо более широкий класс функций. Функцию $f \in \mathscr{M}(\mathfrak{X})$ будем называть *μ-интегрируемой*, если множество $\{\int g d|\mu| : g \in S(\mathscr{A}_0),\ 0 \leqslant g \leqslant |f|\}$ ограничено в F. Пространство всех μ-интегрируемых функций обозначим через $L_1(\mu)$. Пусть $f \in L_1(\mu), f \geqslant 0$, и последовательность функций $(g_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq S(\mathscr{A}_0)$ возрастая сходится поточечно к f. Тогда последовательность интегралов от функций g_n будет o-фундаментальной, и мы полагаем

$$\int f d\mu = o\text{-}\lim_n \int g_n d\mu.$$

По аддитивности интеграл распространяется на все пространство $L_1(\mu)$. Построенный интеграл обладает всеми основными свойствами классического интеграла Лебега. В частности, справедлива теорема о предельном переходе.

Теорема Лебега. *Пусть $f_n, g \in L_1(\mu)$, $|f_n| \leqslant g$ $(n \in \mathbb{N})$ и f_n сходится к f поточечно. Тогда $f \in L_1(\mu)$ и*

$$\int f d\mu = o\text{-}\lim_n \int f_n d\mu.$$

Отметим, что в случае положительной меры, принимающей значения в пространстве Стоуна, такой интеграл рассматривался в [14].

5.2. Квазирадоновы и квазирегулярные меры

Пусть $E \in \mathscr{A}_0$. Рассмотрим два направленных множества $\mathscr{K}_E = \{K : K \in \mathscr{K} \cap \mathscr{A}_0, K \subseteq E\}$ и $\mathscr{F}_E = \{F : F \in \mathscr{F} \cap \mathscr{A}_0, F \subseteq E\}$, элементы которых считаются упорядоченными по включению.

5.2.1. Определение. Мера $\mu : \mathscr{A}_0 \to Y$ называется *радоновой (квазирадоновой)*, если для любого $E \in \mathscr{A}_0$ (для любого $E \in \mathscr{T} \cap \mathscr{A}_0$) справедливо равенство $\mu(E) = o\text{-}\lim\{\mu(K) : K \in \mathscr{K}_E\}$.

5.2.2. Определение. Мера $\mu : \mathscr{A}_0 \to Y$ называется *регулярной (квазирегулярной)*, если для любого $E \in \mathscr{A}_0$ (для любого $E \in \mathscr{T} \cap \mathscr{A}_0$) выполняется равенство $\mu(E) = o\text{-}\lim\{\mu(F) : F \in \mathscr{F}_E\}$.

Если пространство $\mathfrak{X}$ компактно, то определения 5.2.1 и 5.2.2 эквивалентны. Кроме того, стандартными рассуждениями устанавливается следующий факт.

5.2.3. *Теорема.* *Мера $\mu \in F - \mathrm{ba}(\mathscr{A}_0, Y)$ является радоновой (регулярной) тогда и только тогда, когда ее векторная вариация радонова (регулярна).*

Целью этого параграфа является доказательство аналогичной теоремы для квазирадоновых мер.

5.2.4. *Теорема.* *Пусть мера $\mu \in F - \mathrm{ba}(\mathscr{A}_0, Y)$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:*

(1) $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}(\mathscr{F} \cap \mathscr{A}_0)$;

(2) $\mathscr{A}_0 = \sum(\mathscr{F} \cap \mathscr{A}_0)$ *и* $\mu \in F - \mathrm{bca}(\mathscr{A}_0, Y)$.

В этом случае мера μ является квазирадоновой (квазирегулярной) тогда и только тогда, когда векторная вариация $|\mu|$ квазирадонова (квазирегулярна).

$\lhd$ Мы рассмотрим здесь только доказательство квазирадоновости при выполнении условия (2). Случай (1) рассматривается аналогично. Допустим, что μ квазирадонова, а векторная вариация $|\mu|$ не квазирадонова. Тогда существует множество $U \in \mathscr{T} \cap \mathscr{A}_0$ такое, что $|\mu|(U) - \bigvee\{|\mu|(K) : \ K \in \mathscr{K} \cap \mathscr{A}_0, \ K \subseteq U\} > 0$. Пусть $K \in \mathscr{K} \cap \mathscr{A}_0, K \subseteq U$ и $e = |\mu|(U)$. Существуют $\varepsilon_0 > 0$, $0 < e_0 \in \mathfrak{G}(e)$ и конечное семейство $(E_i)_{i=1}^n \subseteq \mathscr{A}_0$ такие, что

$$\bigcup_{i=1}^n E_i = U \backslash K, \ E_i \cap E_j = \varnothing \ (i \neq j), \quad \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| \geqslant \varepsilon_0 e_0.$$

Пусть ω_1 — первый несчетный ординал. Для некоторого счетного ординала $\alpha_0 < \omega_1$ все E_i $(i = 1, \ldots, n)$ принадлежат бэровскому классу $\mathfrak{B}_{\alpha_0}(\mathscr{A}(\mathscr{F} \cap \mathscr{A}_0))$, построенному из алгебры $\mathscr{A}(\mathscr{F} \cap \mathscr{A}_0)$ (см. [6]). Можно считать α_0 непредельным ординалом. Любое множество из бэровского класса $\mathfrak{B}_\alpha = \mathfrak{B}_\alpha(\mathscr{A}(\mathscr{F} \cap \mathscr{A}_0))$ есть либо счетное объединение, либо счетное пересечение множеств из предыдущих бэровских классов. Поэтому существуют $\alpha_1 < \alpha_0$ и последовательности $(E_{i,k})_{k=1}^\infty \subseteq \mathfrak{B}_{\alpha_1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ такие, что при каждом i последовательность $(E_{i,k})_{k=1}^\infty$ монотонно сходится к E_i. Кроме того, можно считать, что для всех i, k имеет место включение $E_{i,k} \subseteq U \backslash K$. Для любого $\delta > 0$ существуют $e_1 \in \mathfrak{G}(e)$, $0 < e_1 \leqslant e_0$, и номер k_1, для которых

$$\sum_{i=1}^n \left|\mu\left(E_{i,k_1} \backslash \bigcup_{j<i} E_{j,k_1}\right)\right| \geqslant \left(\varepsilon_0 - \frac{\delta}{4}\right) e_1.$$

Это следует из σ-аддитивности меры μ. Обозначим $E_i^1 = E_{i,k_1}$ $(i = 1,\ldots,n)$. Повторяя вышеописанную процедуру достаточное число раз, мы получим убывающую последовательность ординалов $\alpha_m < \alpha_{m-1} < \cdots < \alpha_0$, последовательность элементов $(e_k)_{k=1}^m \subseteq \mathfrak{G}(e)$ и последовательности $(E_i^n)_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{B}_{\alpha_k}$ $(k = 0,1,\ldots,m)$ такие, что $0 < e_m \leqslant e_{m-1} \leqslant \ldots \leqslant e_1$ и

$$\sum_{i=0}^{n}\Big|\mu\Big(E_i^k\backslash\bigcup_{j<i}E_j^k\Big)\Big| \geqslant \Big(\varepsilon_0 - \frac{\delta}{4} - \cdots - \frac{\delta}{2^{k+1}}\Big)e_k \quad (k = 0,1,\ldots,m).$$

Из полной упорядоченности ординалов следует, что этот процесс не может продолжаться до бесконечности. Поэтому можно считать, что $\alpha_m = 0$. Полагая

$$F_i = E_i^m\backslash\bigcup_{j<i}E_j^m \ \ (i = 1,\ldots,n), \quad F_0 = (U\backslash K)\backslash\bigcup_{i=1}^{n}F_i, \quad g = e_m,$$

мы будем иметь $0 < g \leqslant e$, $g \in \mathfrak{G}(e)$ и $\sum_{i=0}^n|\mu(F_i)| \geqslant (\varepsilon_0 - \frac{\delta}{2})g$, при этом $(F_i)_{i=0}^n \subseteq \mathscr{A}(\mathscr{F}\cap\mathscr{A}_0)$, $F_i \cap F_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ и $\bigcup_{i=0}^n F_i = U\backslash K$. Без ограничения общности можно считать, что каждый элемент F_i имеет вид $F_i = U_i\backslash V_i$, где $U_i, V_i \in \mathscr{T}\cap\mathscr{A}_0, U_i \cup V_i \subseteq U\backslash K$ $(i = 0,1,\ldots,n)$, поскольку любой элемент из алгебры $\mathscr{A}(\mathscr{F}\cap\mathscr{A}_0)$ представляется в виде конечного дизъюнктного объединения элементов вида $U_i\backslash V_i$, где $U_i, V_i \in \mathscr{T}\cap\mathscr{A}_0$.

Занумеруем все U_i и V_i в одну последовательность $(W_i)_{i=1}^m$. Обозначим $M = \{1,\ldots,m\}$. Для любого $J \subseteq M$ полагаем $H_J = \bigcap\{W_i : i \in M\backslash J\}$. Очевидно, $H_J \cap H_{J'} = H_{J\cap J'}$. Из квазирадоновости μ следует для любого $\varepsilon' > 0$ существование компакта $K_\varnothing \in \mathscr{K}\cap\mathscr{A}_0$, $K_\varnothing \subseteq H_\varnothing$ и элемента $g_0 \in \mathfrak{G}(e)$, $0 < g_0 \leqslant g$, таких, что при любом $K' \in \mathscr{K}\cap\mathscr{A}_0$, $K_\varnothing \subseteq K' \subseteq H_\varnothing$, справедливы соотношения

$$g_0|\mu(K'\backslash K_\varnothing)| \leqslant \varepsilon' e, \quad g_0|\mu(H_\varnothing\backslash K_\varnothing)| \leqslant \varepsilon' e$$

(здесь подразумеваем умножение в идеале $F(e)$, в котором e считается кольцевой единицей, см. [8]). Для любого $i \in M$ существуют $K_{\{i\}} \in \mathscr{K}\cap\mathscr{A}_0$, $g_i \in \mathfrak{G}(e)$ такие, что $K_{\{i\}} \subseteq H_{\{i\}}\backslash K_\varnothing$, $0 < g_i \leqslant g_0$, и при любом $K' \in \mathscr{K}\cap\mathscr{A}_0$, для которого $K_{\{i\}} \subseteq K' \subseteq H_{\{i\}}\backslash K_\varnothing$, выполняются соотношения

$$g_i|\mu(K'\backslash K_{\{i\}})| \leqslant \varepsilon' e, \quad g_i|\mu((H_{\{i\}}\backslash K_\varnothing)\backslash K_{\{i\}})| \leqslant \varepsilon' e.$$

Можно считать все g_i упорядоченными, например, следующим образом: $g_m \leqslant g_{m-1} \leqslant \ldots \leqslant g_1$. При $i \neq j$ будем иметь $K_{\{i\}} \cap K_{\{j\}} = H_{\varnothing}$, поэтому $g_0|\mu(K_{\{i\}} \cap K_{\{j\}})| \leqslant \varepsilon' e$. Далее делаем индуктивный шаг. Допустим, что при некотором $k \leqslant m$ такое построение проведено для всех $J \subset M$, у которых мощность $\mathrm{card} J < k$. В частности, для любого $J \subset M$, $\mathrm{card} J < k$, построено $K_J \in \mathscr{K} \cap \mathscr{A}_0$. Пусть $J \subset M$ и $\mathrm{card} J = k$. Возьмем $K_J \in \mathscr{K} \cap \mathscr{A}_0$, $g_J \in \mathfrak{G}(e)$ такими, чтобы $K_J \subseteq H_J \backslash \cup \{K_{J'} : J' \subset J\}$, $0 < g_J \leqslant \bigwedge\{g_{J'} :\ \mathrm{card} J' < k\}$ и для любого $K' \in \mathscr{K} \cap \mathscr{A}_0$ такого, что $K_J \subseteq K' \subseteq H_J \backslash \cup \{K_{J'} : J' \subset J\}$, выполнялись соотношения $g_J|\mu(K' < K_J)| \leqslant \varepsilon' e$, $g_J|\mu((H_J \backslash \bigcup\{K_{J'} : J' \subseteq J\}) \backslash K_J)| \leqslant \varepsilon' e$. Можно считать все g_J с $\mathrm{card} J \leqslant k$ линейно упорядоченными. Кроме того, для двух подмножеств $J \subset M,\ J' \subset M,\ J \ni J'$, таких, что либо $\mathrm{card} J = k$, $\mathrm{card} J' \leqslant k$, либо $\mathrm{card} J \leqslant k$, $\mathrm{card} J' = k$, будем иметь $K_J \cap K_{J'} \subseteq H_J \cap H_{J'} = H_{J \cap J'}$. Если $J'' \subseteq J \cap J'$, то по построению либо $K_J \cap K_{J''} = \varnothing$, либо $K_{J'} \cap K_{J''} = \varnothing$. Это означает, что для любого $K' \in \mathscr{K} \cap \mathscr{A}_0$, $K' \subseteq K_J \cap K_{J'}$ справедливо $\overline{g}|\mu(K')| \leqslant \varepsilon' e$, где $\overline{g} = \bigwedge\{g_{J'} :\ \mathrm{card} J' \leqslant k\}$. Вышеописанное индуктивное построение заканчивается при $k = m - 1$. В итоге получаем следующие факты.

Для любой функции $\sigma : M \to \{0,1\}$ обозначим $W^\sigma = \bigcup_{i=1}^m W_i^{\sigma(i)}$, где $W_i^0 = (U \backslash K) \backslash W_i,\ W_i^1 = W_i\ (i \in M)$. Мы доказали, что при любом $\varepsilon' > 0$ существуют $\overline{g} \in \mathfrak{G}(e),\ 0 < \overline{g} \leqslant q$ и $K^\sigma \in \mathscr{K} \cap \mathscr{A}_0$ $(\sigma \in \{0,1\}^M)$ такие, что $K^\sigma \subseteq U \backslash K$ и

$$\overline{g}|\mu(W^\sigma) - \mu(K^\sigma)| \leqslant \varepsilon' \overline{g},\ \overline{g}|\mu(K')| \leqslant \varepsilon' \overline{g} \tag{2.1}$$

$$(K' \in \mathscr{K} \cap \mathscr{A}_0,\ K' \subseteq K^\sigma \cap K^{\sigma'},\ \sigma, \sigma' \in \{0,1\}^M,\ \sigma \neq \sigma').$$

Это означает, что для $K_1 = \cup\{K^\sigma : \sigma \in \{0,1\}^M\}$ будем иметь

$$\overline{g}|\mu|(K_1) \geqslant \overline{g} \sum \left\{ \left| \mu\left(K^\sigma \backslash \bigcap_{\sigma' \neq \sigma} K^{\sigma'} \right) \right| : \sigma \in \{0,1\}^M \right\} +$$

$$+ \overline{g}|\mu(\cup\{K^\sigma \cap K^{\sigma'} : \sigma, \sigma' \in \{0,1\}^M,\ \sigma \neq \sigma'\})|\ \geqslant \overline{g} \sum_\sigma |\mu(K^\sigma)| -$$

$$- \overline{g} \sum_\sigma \left| \mu\left(\bigcup_{\sigma' \neq \sigma} K^\sigma \bigcup K^{\sigma'} \right) \right|.$$

Оценим для каждого $\sigma \in \{0,1\}^M$ величину $\overline{g}|\mu|\big(\bigcup_{\sigma'\neq\sigma} K^\sigma \bigcap K^{\sigma'}\big)|$. Для этого обозначим $\mathscr{M}_\sigma = \{0,1\}^M \backslash \{\sigma\}$, $L_{\sigma'} = K^\sigma \cap K^{\sigma'}$ и рассмотрим тождество

$$\mu\bigg(\bigcup_{\sigma'} L_{\sigma'}\bigg) = \sum_{k=1}^{l}(-1)^{k+1}\bigg(\sum_{\sigma_1<\cdots<\sigma_k}\mu(L_{\sigma_1}\cap\cdots\cap L_{\sigma_k})\bigg).$$

Здесь $\sigma', \sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \mathscr{M}_\sigma$, $l = 2^m - 1$ и, кроме того, считается, что элементы множества $\mathscr{M}_\sigma$ каким-либо образом линейно упорядочены. Количество членов в правой части суммы равно $2^l - 1$, причем каждый член этой суммы можно оценить по формулам (2.1). Тогда

$$\overline{g}|\mu|(K_1) \geqslant \overline{g}\sum_{\sigma}|\mu(W^\sigma)| - 2^{l+m}\varepsilon'\overline{g} \geqslant \overline{g}\sum_{i=0}^{n}|\mu(F_i)| - 2^{l+m}\varepsilon'\overline{g} \geqslant (\varepsilon_0-\delta)\overline{g}.$$

Последнее неравенство будет справедливым, если взять ε' достаточно малым.

Итак, доказан следующий факт. Для любых $e_1 \in \mathfrak{G}(e)$, $K \in \mathscr{K} \cap \mathscr{A}_0, \delta > 0$ таких, что $0 < e_1 \leqslant e_0$, $K \subseteq U$, существуют $e_2 \in \mathfrak{G}(e)$, $K_1 \in \mathscr{K} \cap \mathscr{A}_0$, для которых $0 < e_2 \leqslant e_1$, $K_1 \subseteq U \backslash K$ и $|\mu|(K_1) \geqslant (\varepsilon_0 - \delta)e_2$. Полагаем сначала $K = \varnothing$. Находим K_1 с вышеописанными свойствами. Далее, полагаем $K = K_1$ и находим $K_2 \in \mathscr{K} \cap \mathscr{A}_0$, $e_3 \in \mathfrak{G}(e)$, для которых $K_2 \subseteq U \backslash K_1, 0 < e_3 \leqslant e_2$ и $|\mu|(K_2) \geqslant (\varepsilon_0 - \delta - \delta/2)e_3$. Продолжая далее этот процесс, мы получим последовательности $(K_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{K} \cap \mathbb{A}_0$ и $(e_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{G}(e)$, для которых выполняются свойства

$$K_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} K_1, \quad 0 < e_{n+1} \leqslant e_n,$$

$$|\mu|(K_n) \geqslant (\varepsilon_0 - \delta - \cdots - \delta/2^{n-1})e_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Это означает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$|\mu|(U) \geqslant n(\varepsilon_0 - 2\delta)e_{n+1}.$$

Пришли к противоречию с тем, что для $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $e_{n+1} \leqslant e = |\mu|(U)$.

Обратно, если теперь предположить, что векторная вариация $|\mu|$ квазирадонова, то квазирадоновость μ сразу получается из неравенства

$$|\mu(E) - \mu(F)| \leqslant |\mu|(E \backslash F) \quad (E, F \in \mathscr{A}_0, F \subseteq E). \ \triangleright$$

5.2.5. *Следствие.* *Пусть мера $\mu \in F - \mathrm{ba}(\mathscr{A}_0, Y)$ удовлетворяет одному из двух условий (1), (2) теоремы 5.2.4. Следующие определения квазирадоновости μ эквивалентны:*

(1) *равенство $\mu(E) = o\text{-}\lim\{\mu(K) : K \in \mathscr{K}_E\}$ справедливо при любом $E \in \mathscr{T} \cap \mathscr{A}_0$;*

(2) *равенство из условия (1) справедливо при любом $E \in \mathscr{A}(\mathscr{F} \cap \mathscr{A}_0)$;*

(3) *равенство $|\mu|(E) = \bigvee\{|\mu|(K) : \ K \in \mathscr{K}_E\}$ справедливо при любом $E \in \mathscr{T} \cap \mathscr{A}_0$;*

(4) *равенство из условия (3) справедливо при любом $E \in \mathscr{A}(\mathscr{F} \cap \mathscr{A}_0)$.*

5.2.6. *Следствие.* *Если в 5.2.5 заменить направленное множество $\mathscr{K}_E$ на $\mathscr{F}_E$, то условия (1)–(4) будут равносильными определениями квазирегулярности меры μ.*

5.2.7. *Следствие.* *Если мера $\mu \in F - \mathrm{ba}(\mathscr{A}_0, Y)$ квазирадонова и удовлетворяет одному из двух условий (1), (2) теоремы 5.2.4, то она квазирегулярна.*

В связи с этим отметим очевидный факт: если мера $\mu : \mathscr{A}_0 \to F$ положительна и квазирадонова, то она квазирегулярна. Кроме того, имеет место

5.2.8. *Лемма.* *Пусть для меры $\mu \in F - \mathrm{ba}(\mathscr{A}_0, Y)$ ее векторная вариация $|\mu|$ квазирегулярна и справедливо равенство*

$$|\mu|(\mathfrak{X}) = \bigvee \{|\mu|(K) : \ K \in \mathscr{K} \cap \mathscr{A}_0\}. \tag{2.2}$$

Тогда μ и $|\mu|$ квазирадоновы.

5.2.9. *Теорема.* *Если мера $\mu \in F - \mathrm{ba}(\mathscr{A}_0, Y)$ квазирадонова, то ограничение μ на алгебру $\mathscr{A}(\mathscr{F} \cap \mathscr{A}_0)$ является σ-аддитивной мерой.*

$\lhd$ Будем обозначать ограничение μ на алгебру $\mathscr{A}(\mathscr{F}\cap\mathscr{A}_0)$ той же буквой. Векторная вариация μ относительно этой алгебры будет уже другой, и мы ее обозначим через $|\mu|_0$. Докажем σ-аддитивность $|\mu|_0$ (тогда σ-аддитивность μ на алгебру $\mathscr{A}(\mathscr{F}\cap\mathscr{A}_0)$ будет следовать из σ-аддитивности $|\mu|_0$). Пусть последовательность $(A_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}(\mathscr{F}\cap\mathscr{A}_0)$ убывает к пустому множеству. Полагаем $e = |\mu|_0(\mathfrak{X})$. Допустим, что $\bigwedge_{n=1}^{\infty}|\mu|_0(A_n) > 0$. Тогда для некоторых $\varepsilon_0 > 0$ и $0 < e_0 \in \mathfrak{G}(e)$ будем иметь $|\mu|_0(A_n) \geqslant \varepsilon_0 e_0$ $(n \in \mathbb{N})$. По теореме 5.2.5 мера $|\mu|_0$ квазирадонова. Значит, существуют $K_1 \in \mathscr{K}\cap\mathscr{A}_0$, $e_1 \in \mathfrak{G}(e_0)$ такие, что $K_1 \subseteq A_1$, $0 < e_1 \leqslant e_0$ и $e_1|\mu|_0(A_1\backslash K_1) \leqslant (\varepsilon_0/4)e_0$. Продолжая далее индуктивно этот процесс, получим последовательности $(K_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{K}\cap\mathscr{A}_0$ и $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{G}(e)$ такие, что $0 \leqslant e_{n+1} \leqslant e_n$, $K_n \subseteq A_n$ и $e_n|\mu|_0(A_n\backslash K_n') \leqslant (\varepsilon_0/2^{n+1})e_0$ $(n \in \mathbb{N})$. Полагая $K_n' = \bigcap_{i=1}^{n} K_i$, находим, что $e_n|\mu|_0(A_n\backslash K_n') \leqslant (\varepsilon_0/2)e_0$ $(n \in \mathbb{N})$. Отсюда следует неравенство $|\mu|_0(K_n') = |\mu|_0(A_n) - |\mu|_0(A_n\backslash K_n') \geqslant (\varepsilon_0/2)e_n$. Так как $K_n' \searrow \varnothing$, то при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ будет $K_{n_0}' = \varnothing$. Это противоречие доказывает теорему. $\rhd$

Аналогичный факт для радоновых мер справедлив без всяких ограничений.

5.2.10. *Теорема.* *Если мера $\mu \in F - \mathrm{ba}(\mathscr{A}_0, Y)$ является радоновой, то она σ-аддитивна.*

Следующий пример показывает, что даже в случае вещественных мер требование σ-аддитивности меры μ в условии (2) теоремы 5.2.4 является существенным.

5.2.11. Пример. Пусть $\mathscr{Q}$ — множество всех рациональных чисел. Рассмотрим на $\mathscr{Q}$ топологию $\mathscr{T}_{\mathscr{Q}}$, индуцированную естественной топологией $\mathscr{T}$ на $\mathbb{R}$. Рассмотрим на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ прямой $\mathbb{R}$ вероятностную меру λ, нулями которой являются все борелевские множества первой категории (см. [12]). Эта мера индуцирует на алгебре $\mathscr{A}(\mathscr{T}_{\mathscr{Q}})$ меру ρ следующим образом. Пусть $A \in \mathscr{A}(\mathscr{T}_{\mathscr{Q}})$. Тогда существует $B \in \mathscr{A}(\mathscr{T})$ такое, что $A \in B \cap Q$. Полагаем $\rho(A) = \lambda(B)$. Можно проверить корректность такого определения. Если компактное множество K входит в Q, то оно первой категории в $\mathbb{R}$. Поэтому $\rho(K) = 0$ и мера ρ не квазирадонова. Разобьем Q на два плотных в $\mathbb{R}$ множества Q_1 и Q_2. По теореме Лося — Марчевского меру ρ можно продолжить на алгебру 2^Q всех подмножеств Q (см. [13]). Рассмотрим два таких продолжения ρ_1, ρ_2, удовлетворяющих равенствам $\rho_1(Q_1) = 1 = \rho_2(Q_2)$. Это возможно в силу того, что если $A \in \mathscr{A}(\mathscr{T}_Q)$ и $A \supseteq Q_1$ ($A \supseteq Q_2$), то замыкание A совпадает с $\mathbb{R}$, и поэтому $\rho(A) = 1$. Рассмотрим на σ-алгебре $\sum(\mathscr{T}_Q) = 2^Q$ меру $\mu = \rho_1 - \rho_2$. Так как ограничение μ на алгебру $\mathscr{A}(\mathscr{T}_Q)$ равно нулю, то μ — квазирадонова мера. Однако вариация μ, равная $\rho_1 + \rho_2$, не является квазирадоновой мерой.

5.3. Интегральные представления и продолжение мер

На вполне регулярном топологическом пространстве $\mathfrak{X}$ рассмотрим векторную решетку функций $\mathfrak{L} \subseteq C_b(\mathfrak{X})$. Слабейшую топологию, в которой непрерывны все функции из $\mathfrak{L}$, будем обозначать через $\mathscr{T}(\mathfrak{L})$. Если $\mathscr{T}(\mathfrak{L})$ совпадает с исходной топологией $\mathscr{T}$ на $\mathfrak{X}$, то говорят, что $\mathfrak{L}$ *порождает* $\mathscr{T}$.

Линейный оператор $T : \mathfrak{L} \to Y$ называем *мажорируемым,* если существует положительный оператор $S : \mathfrak{L} \to F$ такой, что $Tf \leqslant S|f|$ ($f \in \mathfrak{L}$). Наименьший из таких операторов S называется *мажорантной нормой* оператора T и обозначается через $\lvert T \rvert$.

5.3.1. *Теорема.* *Пусть векторная решетка $\mathfrak{L} \subseteq C_b(\mathfrak{X})$ содержит единичную функцию $1_{\mathfrak{X}}$ и порождает топологию $\mathscr{T}$. Для мажорируемого оператора $T : \mathfrak{L} \to Y$ существует единственная квазирадонова мера $\mu \in F - \mathrm{bca}(\mathscr{B}, Y)$, удовлетворяющая условию*

$$Tf = \int f d\mu \quad (f \in \mathfrak{L}), \tag{3.1}$$

тогда и только тогда, когда

$$\lvert T \rvert(1) = \bigvee \Big\{ \bigwedge \{\lvert T \rvert g : \ g \in \mathfrak{L}, g \geqslant \chi_K\} : \ K \in \mathscr{K} \Big\}. \tag{3.2}$$

$\lhd$ Допустим, выполняется (3.2) и направленность $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ функций из $\mathfrak{L}$ убывает поточечно к нулю. Фиксируем $\alpha_0 \in \mathrm{A}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда при некотором $M > 0$ и любом $\alpha \geqslant \alpha_0$ будем иметь $0 \leqslant x_\alpha \leqslant M1_{\mathfrak{X}}$. Пусть $K \in \mathscr{K}$. Существует $\alpha_1 \geqslant \alpha_0$ такое, что при всех $\alpha \geqslant \alpha_1$ будет

$$0 \leqslant \lvert T \rvert f_\alpha \leqslant \varepsilon \lvert T \rvert(1_{\mathfrak{X}}) + Ma_K. \tag{3.3}$$

Здесь мы обозначили $a_K = |T|(1_{\mathfrak{X}}) - \bigwedge\{|T|f : f \in \mathfrak{L}, f \geqslant \chi_K\}$. По условию (3.2) направленность $\{a_K : K \in \mathscr{K}\}$ убывает к нулю. По реализационной теореме компонента $[|T|(1_{\mathfrak{X}})]$ K-пространства F изоморфна фундаменту в пространстве $C_\infty(Q)$, где Q — экстремально несвязный компакт. Можно считать, что $|T|(1_{\mathfrak{X}})$ при этом изоморфизме переходит в единичную функцию на Q. Так как a_K порядково убывает к нулю, то существует котощее множество $Q_0 \subseteq Q$ такое, что числовая направленность $a_K(q)$ сходится к нулю для всех $q \in Q_0$. Из оценки (3.3) следует, что если направленность $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}} \subseteq \mathfrak{L}$ убывает к нулю, то для любого $q \in Q_0$ направленность $\omega_q(f_\alpha) = (|T|f_\alpha)(q)$ сходится к нулю. По известной теореме Даниеля — Стоуна положительный функционал ω_q продолжается до положительного секвенциально o-непрерывного функционала $\widetilde{\omega}_q : \mathscr{M}_b(\mathfrak{X}) \to \mathbb{R}$ (K-пространственные варианты этой теоремы изучались в [3–5]). Рассмотрим отображение $V : \mathscr{M}_b(\mathfrak{X}) \to \mathbb{R}^Q$, определяемое формулами

$$(Vf)(q) = \begin{cases} \widetilde{w}_q(f), \ q \in Q_0, \\ 0, \ q \notin Q_0 \quad (f \in \mathscr{M}_b(\mathfrak{X})). \end{cases}$$

Ясно, что $Vf \in \mathscr{M}_b(Q)$ для любого $f \in \mathfrak{L}$. Кроме этого, из секвенциальной o-непрерывности функционала $\widetilde{\omega}_q$ следует, что если $Vf_n \in \mathscr{M}_b(Q)$ для некоторой последовательности $f_n \in \mathscr{M}_b(\mathfrak{X})$, o-сходящейся к f, то $Vf \in \mathscr{M}_b(Q)$. Отсюда можно заключить, что $Vf \in \mathscr{M}_b(Q)$ для любой функции $f \in \mathscr{M}_b(\mathfrak{X})$. Полагаем $W = \jmath \circ V$, где $\jmath : \mathscr{M}_b(Q) \to F$ — гомоморфизм Биркгофа — Улама. Тогда $W : \mathscr{M}_b(\mathfrak{X}) \to F$ будет секвенциально o-непрерывным продолжением оператора. Продолжение самого оператора T осуществляется по следующей схеме. Допустим, $f \in \mathscr{M}_b(\mathfrak{X})$ и существует ограниченная направленность $(g_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}} \subseteq \mathfrak{L}$, поточечно возрастающая к f. Из оценки $|Tg_\alpha - Tg_\beta| \leqslant W(|g_\alpha - g_\beta|)$ $(\alpha, \beta \in \mathrm{A})$ следует o-фундаментальность направленности Tg_α. Теперь полагаем $T_0 f = o\text{-}\lim Tg_\alpha$. Если обозначим через $C_b^\uparrow$ конус всех ограниченных полунепрерывных снизу функций на $\mathfrak{X}$, то T можно продолжить до мажорируемого оператора $T_0 : \mathscr{M}_0 \to Y$, где $\mathscr{M}_0 = C_b^\uparrow - C_b^\uparrow$. Дальнейшее продолжение оператора T_0 осуществляется с помощью трансфинитной индукции до первого несчетного ординала ω_1.

Оценка нормы при этом сохраняется:

$$|T_0 f| \leqslant W(|f|) \quad (f \in \mathscr{M}_0).$$

Предположим, что для всех ординалов $\beta < \alpha < \omega_1$ мы уже определили линейные подрешетки $\mathscr{M}_\beta \subset \mathscr{M}_b(\mathfrak{X})$ и линейные операторы $T_\beta : \mathscr{M}_\beta \to Y$, удовлетворяющие оценкам

$$|T_\beta f| \leqslant W(|f|) \quad (f \in \mathscr{M}_\beta)$$

и такие, что $\mathscr{M}_\beta \subset \mathscr{M}_\gamma$, $T_\gamma|_{\mathscr{M}_\beta} = T_\beta$ при $\beta < \gamma < \alpha$. Если α – предельный ординал, то полагаем $\mathscr{M}_\alpha := \cup\{\mathscr{M}_\beta : \beta < \alpha\}$ и определяем линейный оператор $T_\alpha : \mathscr{M}_\alpha \to Y$ так, чтобы $T_\alpha|_{\mathscr{M}_\beta} = T_\beta$ $(\beta < \alpha)$. Если α — непредельный ординал, то рассматриваем множество $\mathscr{M}^\sigma_{\alpha-1}$ всех $x \in \mathscr{M}_b(\mathfrak{X})$, являющихся супремумами ограниченных счетных подмножеств из $\mathscr{M}_{\alpha-1}$. Если возрастающая последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ содержится в $\mathscr{M}_{\alpha-1}$ и $\sup_n f_n = f \in \mathscr{M}^\sigma_{\alpha-1}$, то из соображений, аналогичных вышеприведенным, следует o-фундаментальность последовательности $(T_{\alpha-1}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Значит, можно будет положить $T^\sigma_{\alpha-1}f := o\text{-}\lim T_{\alpha-1}f_n$. Из секвенциальной o-непрерывности оператора W видно, что таким способом корректно определяется оператор $T^\sigma_{\alpha-1} : \mathscr{M}^\sigma_{\alpha-1} \to Y$, удовлетворяющий неравенствам

$$|T^\sigma_{\alpha-1}f| \leqslant Wf \quad (0 \leqslant f \in \mathscr{M}^\sigma_{\alpha-1}).$$

Из соображений, аналогичных вышеприведенным, следует, что $T^\sigma_{\alpha-1}$ можно продолжить по аддитивности до линейного оператора T_α : $\mathscr{M}_\alpha \to Y$, где $\mathscr{M}_\alpha := \mathscr{M}^\sigma_{\alpha-1} - \mathscr{M}^\sigma_{\alpha-1}$ — линейная подрешетка в $\mathscr{M}_b(\mathfrak{X})$. Теперь легко понять, что $\mathscr{M}_b(\mathfrak{X}) = \mathscr{M}_{\omega_1}$ и оператор $T_1 := T_{\omega_1}$ является секвенциально o-непрерывным продолжением оператора T на пространство $\mathscr{M}_b(\mathfrak{X})$. Мажорированность оператора вытекает из оценки

$$|T_1 f| \leqslant W(|f|) \quad (f \in \mathscr{M}_b(\mathfrak{X})).$$

Мера μ теперь определяется из равенств $\mu(E) = T_1(\chi_E)$ $(E \in \mathscr{B})$. Докажем, что она квазирегулярна. Пусть $U \in \mathscr{T}$. Тогда функция χ_U полунепрерывна снизу и по построению $|\mu|(U) = |T|(\chi_U) = \bigvee\{|T|f : f \in \mathfrak{L}^+, f \leqslant \chi_U\}$. Для фиксированных $\varepsilon > 0$ и $f \leqslant \chi_U$, $f \in \mathfrak{L}$, положим $F = \{x \in \mathfrak{X} : f(x) \geqslant \varepsilon\}$. Тогда $f \leqslant \chi_F + \varepsilon 1_{\mathfrak{X}}$ и $|T|f \leqslant |\mu|(F) + \varepsilon|\mu|(U)$. Это означает, что $|\mu|(U) = \bigvee\{|\mu|(F) : F \in \mathscr{F}, F \subseteq U\}$. Аналогичным образом из условия (3.1) доказывается, что $|\mu|(\mathfrak{X}) = \bigvee\{|\mu|(K) : K \in \mathscr{K}\}$. В силу леммы 5.2.8 меры $|\mu|$ и μ квазирадоновы.

Наоборот, допустим, что T имеет интегральное представление (3.1) с квазирадоновой мерой $\mu \in F - \mathrm{bca}(\mathscr{B}, Y)$. Если $K \in \mathscr{K}$, то $|\mu|(\mathfrak{X} \backslash K) = \bigvee\{|\mu|(K') : \ K' \in \mathscr{K}, K' \subseteq U \backslash K\}$. Так как для любого $K' \subseteq U \backslash K$ существует функция $f \in \mathfrak{L}$ такая, что $0 \leqslant f \leqslant 1_{\mathfrak{X}}$ и $f[K'] = \{0\}, f[K] = \{1\}$, то $|\mu|(K) = \bigvee\{|T|f : f \in \mathfrak{L}, f \geqslant \chi_K\}$. Следовательно, будет выполняться равенство (3.2). $\triangleright$

В качестве первого применения этой теоремы рассмотрим задачу о продолжении квазирадоновой меры, являющуюся одним из вариантов известной теоремы Прохорова.

5.3.2. Определение. Алгебра $\mathscr{A}_0 \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$ называется *плотной*, если выполняются условия:

(1) для любого $V \in \mathscr{A}_0 \cap \mathscr{T}_0$ существует функция $\varphi \in \overline{S(\mathscr{A}_0)} \cap C_b(\mathfrak{X})$ такая, что $V = \{x \in \mathfrak{X} : \varphi(x) > 0\}$;

(2) векторная решетка $\mathfrak{L} = \overline{S(\mathscr{A}_0)} \cap C_b(\mathfrak{X})$ порождает $\mathscr{T}$.

5.3.3. *Теорема.* *Пусть квазирадонова мера $\mu_0 \in F - \mathrm{ba}(\mathscr{A}_0, Y)$ определена на плотной алгебре $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}(\mathscr{F}_0 \cap \mathscr{A}_0)$. Тогда существует единственная квазирадонова мера $\mu \in F - \mathrm{bca}(\mathscr{B}, Y)$, продолжающая μ_0.*

$\triangleleft$ На векторной решетке $\mathfrak{L} = \overline{S(\mathscr{A}_0)} \cap C_b(\mathfrak{X})$ рассмотрим мажорируемый оператор $T : \ \mathfrak{L} \to Y$, определяемый равенствами $Tf = \int f d\mu_0$ $(f \in \mathfrak{L})$. Так как $\mathfrak{L}$ разделяет компактные множества из $\mathfrak{X}$, то мажорантная норма $|T|$ удовлетворяет условию (3.2). Поэтому существует единственная квазирадонова мера $\mu \in F - \mathrm{bca}(\mathscr{B}, Y)$, для которой справедливо интегральное представление (3.1). Покажем, что μ продолжает μ_0. Для этого достаточно доказать, что если $U \in \mathscr{T}_0 \backslash \mathscr{A}_0$, то $\mu_0(U) = \mu(U)$. Из условия плотности алгебры $\mathscr{A}_0$ следует существование функции $\varphi \in \mathfrak{L}$ такой, что $U = \{x \in \mathfrak{X} : \varphi(x) > 0\}$. Полагаем $\varphi_n = (n\varphi) \bigwedge 1_{\mathfrak{X}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда $\varphi_n \nearrow \chi_U$ и из σ-аддитивности мер μ, μ_0 получаем $\mu_0(U) = o\text{-}\lim \int \varphi_n d\mu_0 = o\text{-}\lim \int \varphi_n d\mu = \mu(U)$. $\triangleright$

В известных в литературе теоремах о продолжении σ-аддитивных мер со значениями в упорядоченном пространстве предполагается выполнение в пространстве образов закона слабой (σ, ∞)-дистрибутивности (см. [14–16]). Из теоремы 5.3.1 следует, что этот результат справедлив и для некоторых классов некомпактных пространств.

5.3.4. *Следствие.* *Пусть $\mathfrak{X}$ — локально-компактное σ-компактное топологическое пространство и дана алгебра $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}(\mathscr{F}_0 \cap \mathscr{A}_0)$. Тогда любая мера $\mu_0 \in F - \mathrm{bca}(\mathscr{A}_0, Y)$ продолжается единственным образом до квазирадоновой меры $\mu \in F - \mathrm{bca}(\mathscr{B}, Y)$.*

Отметим, что требование локальной компактности пространства $\mathfrak{X}$ в следствии 5.3.4 является существенным. Более того, справедлива

5.3.5. *Лемма.* *Пусть σ-полная булева алгебра $\mathbb{B}$ не обладает свойством слабой σ-дистрибутивности. Тогда существует F_σ-подмножество $\mathfrak{X}$ в канторовом дисконтинууме $\{0,1\}^\omega$ и существует σ-гомоморфизм $\mu_0 : \mathscr{U}(\mathfrak{X}) \to \mathbb{B}$, заданный на алгебре $\mathscr{U}(\mathfrak{X})$ всех открыто-замкнутых подмножеств $\mathfrak{X}$, который не продолжается до σ-гомоморфизма борелевской σ-алгебры пространства $\mathfrak{X}$ в $\mathbb{B}$.*

$\lhd$ Так как на $\mathbb{B}$ не выполняется свойство слабой σ-дистрибутивности, то существуют ненулевые элементы $e \in \mathbb{B}, e_{i,j} \in \mathbb{B}$ $(i, j \in \mathbb{N})$ такие, что $e_{i,j} \searrow 0$ при $j \to \infty$ $(i \in \mathbb{N})$ и для любой функции $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ имеет место $\bigvee_{i=1}^{\infty} e_{i,\varphi(i)} = e$. По теореме Стоуна реализуем $\mathbb{B}$ алгеброй всех открыто-замкнутых подмножеств $\mathrm{Clop}(Q)$ в квазиэкстремальном компакте Q. Пусть h — стоуновский изоморфизм $\mathbb{B}$ на $\mathrm{Clop}(Q)$. Пусть

$$E = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} h(e_{i,j}) \right) \cup (Q \backslash h(e)).$$

Рассмотрим в E счетную алгебру $\mathscr{E}$, порожденную множествами $Q \backslash h(e)$, $h(e_{i,j}) \cap E$ $(i, j \in \mathbb{N})$. Рассмотрим $\mathscr{E}$ в качестве базы новой топологии на E. Полученное топологическое пространство $(E, \mathscr{T})$ регулярно. Пусть $\widehat{E}$ — фактор-пространство пространства E по разбиению замыканий одноточечных множеств. Пространство $\widehat{E}$ с фактор-топологией $\widehat{\mathscr{T}}$ является отделимым, регулярным, σ-компактным, вполне несвязным и имеет счетную базу. По теореме Александрова оно гомеоморфно F_σ-подмножеству $\mathfrak{X}$ в канторовом дисконтинууме $\{0,1\}^\omega$. Пусть α — гомеоморфизм $\widehat{E}$ на $\mathfrak{X}$ и p — каноническая проекция E на $\widehat{E}$. Рассмотрим любое открыто-замкнутое подмножество U в $\mathfrak{X}$. Тогда множество $(\alpha \circ p)^{-1}(U)$ открыто-замкнуто в E. Существует открытое множество $V \subseteq Q$ такое, что $V \cap E = (\alpha \circ p)^{-1}(U)$. Если $x \in U$, то $(\alpha \circ p)^{-1}(x)$ является пересечением счетной последовательности элементов $h(e)$, $h(e_{i,j})$ и их дополнений. Следовательно, существует открыто-замкнутое V_x такое, что $(\alpha\circ p)^{-1}(x) \subseteq V_x \subseteq V$. Так как каждое V_x является конечным пересечением элементов из счетного семейства $Q\backslash h(e)$, $h(e_{i,j})$, $h(e)\backslash h(e_{i,j})$, то существует открытое F_σ-множество $V_1 \subseteq V$, для которого $V\cap E = V_1 \cap E$. В силу квазиэкстремальности замыкание $W = c1(V_1)$ будет открыто-замкнутым в Q, и для него тоже выполняется равенство $W \cap E = (\alpha \circ p)^{-1}(U)$. Теперь полагаем $\mu_0(U) = h^{-1}(W)$. Построенный σ-гомоморфизм $\mu_0 : \mathscr{U}(\mathfrak{X}) \to \mathbb{B}$ алгебры $\mathscr{U}(\mathfrak{X})$ открыто-замкнутых подмножеств $\mathfrak{X}$ в $\mathbb{B}$ не продолжается на борелевскую σ-алгебру $\mathscr{B}$ пространства $\mathfrak{X}$. Допустим, существует такое продолжение $\mu : \mathscr{B} \to \mathbb{B}$. Тогда для множеств $E_{i,j} = h(e_{i,j} \cap E)$ будем иметь

$$e = \mu\bigg(\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty} \alpha \circ p(E_{i,j})\bigg) = \bigvee_{i=1}^{\infty}\bigwedge_{j=1}^{\infty} e_{i,j} = 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму. $\triangleright$

Аналогичным образом устанавливается

5.3.6. *Лемма.* *Пусть на полной булевой алгебре $\mathbb{B}$ не выполняется закон слабой $(\sigma,\ \infty)$-дистрибутивности. Тогда существуют F_σ-подмножество $\mathfrak{X}$ в обобщенном канторовом дисконтинууме и σ-гомоморфизм $\mu_0 : \mathscr{U}(\mathfrak{X}) \to \mathbb{B}$, который не продолжается до квазирадонового σ-гомоморфизма борелевской σ-алгебры пространства $\mathfrak{X}$ в $\mathbb{B}$.*

От требования σ-компактности $\mathfrak{X}$ в следствии 5.3.4 тоже нельзя отказываться. В этом легко можно убедиться, взяв в качестве $\mathfrak{X}$ несчетное дискретное пространство.

Рассмотрим теорему о представлении мажорируемого оператора, заданного на векторной решетке, не содержащей единицу.

Линейный оператор $\Phi : C_0(\mathfrak{X}) \to Y$ назовем *мажорируемым*, если существует положительный оператор $\Psi : C_0(\mathfrak{X}) \to F$ такой, что

$$|\Phi(f)| \leqslant \Psi(|f|) \quad (f \in C_0(\mathfrak{X})). \tag{3.4}$$

При этом существует наименьший положительный оператор Ψ с указанным свойством, который обозначают через $|\Phi|$.

5.3.7. Теорема. *Пусть мажорируемый оператор* $\Phi : C_0(\mathfrak{X}) \to Y$ *удовлетворяет неравенству*

$$|\Phi|(f) \leqslant b\|f\|_\infty \quad (f \in C_0(\mathfrak{X})^+)$$

при некотором $b \in F^+$. *Тогда существует единственная мера* μ *из* $\mathrm{qca}(\mathfrak{X}, Y)$ *такая, что*

$$\Phi(f) = \int\limits_{\mathfrak{X}} f(\chi)\mu(d\chi) \quad (f \in C_0(\mathfrak{X})).$$

$\lhd$ Пусть Ψ — ограничение оператора $|\Phi|$ на $C_{00}(\mathfrak{X})$. По теореме Райта (см. [17, теорема 1]) существует единственная квазирегулярная мера $\nu : \mathscr{B}(\mathfrak{X}) \to F^+ \cup \{\infty\}$, порядково ограниченная на компактах из $\mathfrak{X}$, для которой

$$\Psi(f) = \int\limits_{\mathfrak{X}} f(\chi)\nu(d\chi) \quad (f \in C_{00}(\mathfrak{X})).$$

Представляющая мера в нашем случае порядково ограничена, так как из неравенства

$$\Psi(f) \leqslant b\|f\|_\infty \quad (f \in C_{00}(\mathfrak{X})^+)$$

следует оценка

$$\nu(\mathfrak{X}) = \sup\{\Psi(f) : f \in C_{00}(\mathfrak{X}),\ 0 \leqslant f \leqslant 1_{\mathfrak{X}}\} \leqslant b.$$

Тем самым $\nu \in \mathrm{qca}(\mathfrak{X}, F)^+$. Пусть направленность $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ из $C_{00}(\mathfrak{X})$ возрастая сходится поточечно к $1_{\mathfrak{X}}$. Из оценки

$$|\Phi(f_\alpha) - \Phi(f_\beta)| \leqslant \Psi(|f_\alpha - f_\beta|) = \int\limits_{\mathfrak{X}} |f_\alpha(\chi) - f_\beta(\chi)|\nu(d\chi)$$

следует o-фундаментальность направленности $\{\Phi(f_\alpha) : \alpha \in \mathrm{A}\}$.

Если $f = f_0 + a1_{\mathfrak{X}}$, где $f \in C_{00}(\mathfrak{X})$, $a \in \mathbb{R}$, то полагаем

$$\widetilde{\Phi}(f) = o\text{-}\lim_{\alpha \in \mathrm{A}} \Phi(f_0 + af_\alpha).$$

Ясно, что такое определение корректно. Мы исключаем из рассмотрения случай, когда само пространство $\mathfrak{X}$ компактно. Таким образом, определено продолжение Φ до линейного оператора $\widetilde{\Phi}$, определенного на векторной решетке функций $\mathscr{L} = C_{00}(\mathfrak{X}) \oplus \mathbb{R} \cdot 1_{\mathfrak{X}}$, имеющей порядковую единицу. Докажем мажорируемость оператора $\widetilde{\Phi}$. Пусть $f \in \mathscr{L}^{+}$ и $f = f_0 + a1_{\mathfrak{X}}$ $\ (f_0 \in C_{00}(\mathfrak{X}),\ a \in \mathbb{R})$. Тогда будем иметь $a \geqslant 0$ и $f_0^{-} := (-f_0) \bigvee 0 \leqslant a1_{\mathfrak{X}}$. При $a > 0$ направленность $g_\alpha = f_\alpha \vee \big(f_0^{-}/a\big)$ также возрастает к $1_{\mathfrak{X}}$. Поэтому в силу мажорантной оценки (3.4) получаем

$$
\begin{gathered}
|\widetilde{\Phi}(f)| = o\text{-}\lim_{\alpha \in \mathrm{A}} |\Phi(f_0) - a\Phi(g_\alpha)| \leqslant \\
\leqslant \Psi\big(f_0^{+}\big) + o\text{-}\lim_{\alpha \in \mathrm{A}} \Psi\big(ag_\alpha - f_0^{-}\big) = \widetilde{\Psi}(f).
\end{gathered}
$$

Следовательно, оператор $\widetilde{\Phi}$ мажорируемый и определен на векторной решетке функций, удовлетворяющей всем условиям теоремы 5.3.1. В силу этой теоремы существует единственная мера $\mu \in \operatorname{qca}(\mathfrak{X}, Y)$ такая, что

$$
\widetilde{\Phi}(f) = \int\limits_{\mathfrak{X}} f(\chi)\mu(d\chi) \quad (f \in \mathscr{L}).
$$

Так как оператор $\widetilde{\Phi}$ является продолжением оператора Φ, то

$$
\Phi(f) = \int\limits_{\mathfrak{X}} f(\chi)\mu(d\chi) \quad (f \in C_{00}(\mathfrak{X})).
$$

Из квазирадоновости меры μ следует справедливость этого представления для всех f из $C_0(\mathfrak{X})$. $\triangleright$

5.4. Теорема Фубини

Рассмотрим o-полные K-нормированные пространства Y, Y' и Z с нормирующими K-пространствами F, F' и G соответственно. Пусть задано билинейное отображение $\times :\ Y \times Y' \to Z$, которое мажорируется положительным o-непрерывным билинейным отображением $\circ :\ F \times F' \to G$, т. е.

$$
|y \times y'| \leqslant |y| \circ |y'| \quad (y \in Y,\ y' \in Y').
$$

Кроме этого, пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}'$ — два полных по Чеху топологических пространства. Рассмотрим две борелевские меры $\mu : \mathscr{B}_{\mathfrak{X}} \to Y$ и $\mu' : \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'} \to Y'$. Обозначаем $\mathfrak{C} := \mathscr{B}_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}'}$. Через $\mathscr{A}\square\mathscr{A}'$ будем обозначать алгебру подмножеств, порожденную всеми «прямоугольниками» $A\times A'$, где $A \in \mathscr{A}'$, $A' \in \mathscr{A}$. Задача состоит в построении борелевской меры $\mu\otimes\mu' :\ \mathfrak{C} \to Z$ такой, что

$$(\mu\otimes\mu')(B\times B') = \mu(B)\times\mu'(B') \quad (B \in \mathscr{B}_{\mathfrak{X}},\ B' \in \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'}).$$

Будем называть меру $\mu\otimes\mu'$ *произведением мер* μ и μ'.

Рассмотрим несколько примеров.

Примеры. **(1)** Пусть $Y := F$ и $Y' := F'$, где F и F' — фундаменты одного и того же расширенного K-пространства $mF = mF'$, в котором фиксирована единица $\mathbf{1}$. Тогда в пространстве mF однозначно определено умножение, превращающее его в решеточно упорядоченное кольцо с единицей $\mathbf{1}$. Возьмем еще один фундамент $G \subset mF$ такой, что $F\cdot F' \subset G$. В этом случае для любой пары элементов $x \in F$ и $x' \in F'$ определено их произведение $x\cdot x' \in G$; o-непрерывность такого произведения и равенство $|x\cdot x'| = |x|\cdot|x'|$ $(x \in F, x' \in F')$ хорошо известны, и мы можем говорить о произведении двух борелевских мер $\mu : \mathscr{B}_{\mathfrak{X}} \to F$ и $\mu' : \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'} \to F'$. Если $F = F' = G$, то F будет упорядоченным кольцом, и все меры μ, μ', $\mu\otimes\mu'$ будут принимать значения в одном и том же K-пространстве F.

(2) Пусть $Y = F = \mathrm{Orth}(F')$ и векторная норма пространства Y' разложима (см. [9]). Известно [9], что в этом случае на Y' можно определить структуру F-модуля, т. е. задать билинейное отображение из $F\times Y'$ в Y' такое, что $\lvert a\cdot y\rvert = |a|\cdot\lvert y\rvert$ $(a \in F,\ y \in Y')$. Если даны борелевские меры $\mu : \mathscr{B}_{\mathfrak{X}} \to F$ и $\mu' : \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'} \to Y'$, то можно говорить об их произведении $\mu\otimes\mu' : \mathfrak{C} \to Y'$. При $F = \mathbb{R}$ имеем дело с обычным умножением скалярной меры на векторную.

(3) Будем считать, что F и F' являются фундаментами одного расширенного K-пространства $mF = mF'$, в котором фиксирована порядковая единица, определяющая умножение в mF. Пусть $G := \mathrm{Orth}(F)\cap\mathrm{Orth}(F')$ и для любых $a \in F$, $a \in F'$ определено произведение $a\cdot a' \in mF$. Кроме этого, считаем, что векторные нормы пространств Y и Y' разложимы. Тогда по [9] на Y и Y' можно определить структуру G-модуля. Пусть $Y\otimes_G Y'$ — алгебраическое тензорное произведение G-модулей Y и Y', см. [18]. Рассмотрим векторную полунорму на $Y \otimes_G Y'$ со значениями в mF, определяемую формулой

$$|z| := \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} |y_k| \cdot |y'|\right\},$$

где inf в K-пространстве mF берется по всевозможным представлениям элемента z в виде $\sum_{k=1}^{n} y_k \otimes y'_k$, $y_k \in Y$, $y'_k \in Y'$ $(k := 1, \dots, n)$. Так как G — коммутативное кольцо, то пространства Y и Y' наделены структурой бимодуля. Поэтому их тензорное произведение $Y \otimes_G Y'$ тоже является G-модулем (см. [18, п. 10.2.2]). Значит, выполняется равенство

$$|g \cdot z| = |g||Z| \quad (g \in G,\ z \in Y \otimes_G Y').$$

В частности, полунорма разложима.

Выделим в $Y \otimes_G Y'$ подпространство $Z := \{z \in Y \otimes_G Y' : |z| = 0\}$. Следуя [9], можно построить o-пополнение фактор-пространства $(Y \otimes_G Y')/Z$ по норме.

Это пополнение естественно называть *проективным тензорным произведением K-нормированных пространств Y и Y'*, которое будем обозначать через $Y \widehat{\otimes}_G Y'$. Обозначаем через $y \otimes y'$ тензорное произведение двух элементов $y \in Y$, $y' \in Y'$. Очевидно, $|y \otimes y'| = |y| \cdot |y'|$ $(y \in Y, y' \in Y')$ (мы сохраняем за фактор-нормой на $Y \widehat{\otimes}_G Y'$ прежнее обозначение $|\cdot|$); o-непрерывность билинейного отображения $\otimes : Y \times Y' \to Y \widehat{\otimes} Y'$ очевидна. Следовательно, мы можем ввести в рассмотрение тензорное произведение $\mu \otimes \mu' : \mathfrak{C} \to Y \widehat{\otimes}_G Y'$ двух борелевских мер $\mu : \mathscr{B}_{\mathfrak{X}} \to Y$ и $\mu' : \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'} \to Y'$. Аналогично можно определить индуктивное тензорное произведение. Существует также другой способ построения тензорного произведения K-нормированных пространств с привлечением методов булевозначного анализа, см. [9].

Будем говорить, что *умножения* $\times : Y \times Y' \to Z$ *и* $\circ : F \times F' \to G$ *связаны кросс-равенством, если*

$$|y \times y'| = |y| \circ |y'| \quad (y \in Y, y' \in Y').$$

В примерах **(1)**, **(2)** и **(3)** рассмотрены умножения как раз такого сорта.

5.4.1. Лемма. *Если для двух борелевских мер $\mu : \mathscr{B}_{\mathfrak{X}} \to Y$ и $\mu' : \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'} \to Y'$ существует произведение $\mu \otimes \mu' : \mathfrak{C} \to Z$, являющееся квазирадоновой мерой, то оно единственно.*

$\lhd$ Возьмем открытое множество $U \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$ и компактное подмножество $K \subset U$. Тогда существуют конечные наборы открытых подмножеств $U_k \subset \mathfrak{X}, U'_k \subset \mathfrak{X}'$ $(k := 1, \dots, n)$ такие, что $K \subset \bigcup_{k=1}^n (U_k \times U'_k) \subset U$. Ввиду квазирадоновости $\mu \otimes \mu'$ будет

$$|\mu \otimes \mu'|(U) = \sup\{|\mu \otimes \mu'|(K) : K \subset U, K \in \mathscr{K}_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'}\} =$$

$$= \sup\{|\mu \otimes \mu'|(V) : V \subset U, V \in \mathscr{B}_{\mathfrak{X}} \Box \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'}\}.$$

Значит,

$$\mu \otimes \mu'(U) = o\text{-}\lim\{\mu \otimes \mu'(V) : V \subset U, V \in \mathscr{B}_{\mathfrak{X}} \Box \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'}\}.$$

Но мера $\mu \otimes \mu'$ на алгебре $\mathscr{B}_{\mathfrak{X}} \Box \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'}$ определяется однозначно по значениям $\mu \otimes \mu'(B \times B')$ $(B \in \mathscr{B}_{\mathfrak{X}},\ B' \in \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'})$. Тогда и $\mu \times \mu'(U)$ определяется однозначно. Из σ-аддитивности сразу следует однозначная определенность всех значений $\mu \otimes \mu'(C)$ $(C \in \mathfrak{C})$. $\rhd$

5.4.2. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}'$ — полные по Чеху топологические пространства и $\mu : \mathscr{B}_{\mathfrak{X}} \to Y$, $\mu' : \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'} \to Y'$ — квазирадоновы меры. Тогда существует их произведение $\mu \otimes \mu' : \mathfrak{C} \to Z$, являющееся квазирадоновой мерой. Для векторных вариаций справедливо неравенство $|\mu \otimes \mu'| \leqslant |\mu| \otimes |\mu'|$. Если умножения $\times$ и $\circ$ связаны кросс-равенством, то $|\mu \otimes \mu'| = |\mu| \otimes |\mu'|$.*

$\lhd$ Обозначим через $\beta\mathfrak{X}$, $\beta\mathfrak{X}'$ — компактификации Стоуна — Чеха пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}'$. Рассмотрим меры $\overline{\mu} : \mathscr{B}_{\beta\mathfrak{X}} \to Y$, $\overline{\mu}' : \mathscr{B}_{\beta\mathfrak{X}'} \to Y'$, определяемые равенствами $\overline{\mu}(B) = \mu(B \cap \mathfrak{X})$, $\overline{\mu}'(B') = \mu'(B' \cap \mathfrak{X}')$ $(B \in \mathscr{B}_{\beta\mathfrak{X}},\ B' \in \mathscr{B}_{\beta\mathfrak{X}'})$. Существует единственная мера $\lambda : \mathscr{B}_{\beta\mathfrak{X}} \Box \mathscr{B}_{\beta\mathfrak{X}'} \to Z$, для которой $\lambda(A \times A') = \overline{\mu}(A) \times \overline{\mu}'(A')$ $(A \in \mathscr{B}_{\beta\mathfrak{X}},\ A' \in \mathscr{B}_{\beta\mathfrak{X}'})$. Легко проверяется, что мера λ имеет ограниченную векторную вариацию, при этом $|\lambda| \leqslant |\mu| \otimes |\mu'|$. Покажем, что λ удовлетворяет условиям плотности из определения 5.3.2. Условие (1) очевидно. Условие (2) достаточно проверить на произвольном множестве $A \times A'$, где $A \in \mathscr{B}_{\beta\mathfrak{X}}$, $A' \in \mathscr{B}_{\beta\mathfrak{X}'}$. Пусть последовательности $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{B}_{\beta\mathfrak{X}}$ и $(A'_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathscr{B}_{\beta\mathfrak{X}'}$ такие, что $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A' = \cup_{k=1}^{\infty} A'_k$, $\mathrm{cl}(A_k) \subset A, \mathrm{cl}(A'_k) \subset A'$ $(k \in \mathbb{N})$. Тогда $\mathrm{cl}(A_k \times A'_k) \subset A \times A'$ и

$$\inf_k\{|\lambda|(A \times A' \backslash A_k \times A'_k)\} \leqslant \inf\{|\overline{\mu}|(A \backslash A_k) \circ |\overline{\mu}'|(A' \triangle A'_k)\} = 0.$$

Из теоремы 5.3.3 следует существование квазирегулярной меры $\overline{\mu} \otimes \overline{\mu}' : \mathscr{B}_{\beta\mathfrak{X} \times \beta\mathfrak{X}'} \to Z$, продолжающей λ. По определению $\overline{\mu}(A) \times \overline{\mu}'(A') = \overline{\mu} \otimes \overline{\mu}'(A \times A')$. Из квазирегулярности мер μ, μ', $\mu \otimes \mu'$ и o-непрерывности умножения $\times$ вытекает справедливость этого равенства для любых $A \in \mathscr{T}$ и $A' \in \mathscr{T}'$. Из σ-аддитивности и леммы о монотонном классе следует, что это равенство справедливо для любых $A \in \mathscr{B}_{\beta\mathfrak{X}}, A' \in \mathscr{B}_{\beta\mathfrak{X}'}$. Отсюда видно, что мера $\overline{\mu} \otimes \overline{\mu}'$ действительно является произведением мер $\overline{\mu}$ и μ'. Так как значения $\overline{\mu} \otimes \overline{\mu}'$ на всех борелевских подмножествах множества $(\beta\mathfrak{X} \times (\beta\mathfrak{X}' \backslash \mathfrak{X}')) \cup ((\beta\mathfrak{X} \backslash \mathfrak{X}) \times \beta\mathfrak{X}')$ равны нулю, то, рассматривая ограничение $\overline{\mu} \otimes \overline{\mu}'$ на борелевские подмножества пространства $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}' \subset \beta\mathfrak{X} \times \beta\mathfrak{X}'$, мы получим требуемое произведение $\mu \times \mu'$ мер μ и μ', являющееся квазирегулярной борелевской мерой. Векторные вариации $|\mu|$ и $|\mu'|$ тоже удовлетворяют условию этой теоремы, поэтому существует их произведение $|\mu| \otimes |\mu'| : \mathfrak{C} \to G$. Кроме этого, как легко видеть, $|\mu \otimes \mu'| \leqslant |\mu| \otimes |\mu'|$. Квазирадоновость меры $\mu \otimes \mu'$ выводится из этого неравенства, из квазирегулярности $\mu \otimes \mu'$ и того, что

$$\inf\{|\mu \otimes \mu'|(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}' \backslash K \times K') : K \in \mathscr{K}_{\mathfrak{X}}, K' \in \mathscr{K}_{\mathfrak{X}'}\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf\{|\mu|(\mathfrak{X}) \circ |\mu'|(\mathfrak{X}' \backslash K') + |\mu|(\mathfrak{X} \backslash K) \circ |\mu'|(\mathfrak{X}')\} = 0.$$

Допустим, что умножения $\times$ и $\circ$ связаны кросс-равенством. Пусть $(C_k)_{k=1}^n \subset \mathscr{B}_{\mathfrak{X}}$ и $(C'_l)_{l=1}^m \subset \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'}$ — произвольные разбиения множеств $C \subset \mathscr{B}_{\mathfrak{X}} C' \in \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'}$ соответственно. Тогда $(C_k \times C'_l)_{k=1,l=1}^{n\ \ m}$ является разбиением для $C \times C'$ и мы имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |\mu(C_k)| \circ \sum_{l=1}^{m} |\mu'(C'_l)| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} |\mu \otimes \mu'((C_k \times C'_l)| \leqslant |\mu \otimes \mu'|(C \times C').$$

Это влечет неравенство

$$|\mu| \otimes |\mu'|(C \times C') \leqslant |\mu \otimes \mu'|(C \times C'),$$

которое по аддитивности распространяется на произвольные конечные объединения множеств вида $C \times C'$ $(C \in \mathscr{B}_{\mathfrak{X}},\ C' \in \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'})$, т. е. оно справедливо для множеств из $\mathscr{B}_{\mathfrak{X}} \square \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'}$. Квазирадоновость и σ-аддитивность $|\mu \otimes \mu'|$ позволяют распространить это неравенство на произвольные множества из $\mathfrak{C}$. Значит, $|\mu| \otimes |\mu'| \leqslant |\mu \otimes \mu'|$. Как уже отмечалось, обратное неравенство выполняется всегда. Отсюда $|\mu \otimes \mu'| = |\mu| \otimes |\mu'|$. $\triangleright$

5.4.3. Замечание. На самом деле теорема 5.4.2 справедлива, если считать $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}'$ произвольными вполне регулярными пространствами, образующими борелевские подмножества в каких-нибудь из своих компактификаций.

5.4.4. Замечание. Произведение борелевских мер на локально-компактных пространствах, принимающих значения в монотонно полном упорядоченном векторном пространстве, построено в [19]. Для K-пространств этот результат содержится в теореме 5.4.2. С другой стороны, если в примере 3 взять $F = F' = \mathbb{R}$, то теорема 5.4.2 дает существование тензорного произведения банаховозначных мер (см. [20–22]).

Теперь мы переходим к изложению вопросов, связанных с теоремой Фубини. Для этого необходимо определить новый интеграл от векторной функции по векторной мере. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}'$ — полные по Чеху топологические пространства. Обозначим через $\mathscr{M}(\mathfrak{X}', Y)$ пространство всех функций $f : \mathfrak{X}' \to Y$, представимых в виде $f = y_1 g_1 + \dots + y_n g_n$, где $y_k \in Y$ и $g_k : \mathfrak{X}' \to \mathbb{R}$ — ограниченные измеримые по Борелю функции. Пусть также $\mu : \mathscr{B}_{\mathfrak{X}} \to Y$ и $\mu' : \mathscr{B}_{\mathfrak{X}'} \to Y'$, — квазирадоновы меры. Для любой функции $f \in \mathscr{M}(\mathfrak{X}', Y)$, имеющей вышеприведенное представление, полагаем по определению

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^{n} y_i \times \int g_k d\mu'.$$

Стандартным образом проверяется корректность такого определения интеграла. Легко устанавливается также оценка

$$\left| \int f d\mu \right| \leqslant |f|_\infty \circ |\mu'|(\mathfrak{X}'),$$

где $|f|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in \mathfrak{X}'\}$. Пусть $\overline{\mathscr{M}}(\mathfrak{X}', Y)$ — r-замыкание пространства $\mathscr{M}(\mathfrak{X}', Y)$ по норме $|\cdot|_\infty$, т. е. $f \in \overline{\mathscr{M}}(\mathfrak{X}', Y)$ тогда и только тогда, когда существуют последовательность функций $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{M}(\mathfrak{X}', Y)$ и регулятор $b \in F^+$ такие, что $|f - f_n|_\infty \leqslant n^{-1} b$. Теперь по непрерывности в такой норме мы можем определить интеграл по мере μ' от любой функции $f \in \overline{\mathscr{M}}(\mathfrak{X}', Y)$ с сохранением вышеприведенной нормативной оценки.

Обозначим через $\overline{\mathscr{M}}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}')$ пространство вещественных функций на $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$, являющихся равномерными пределами функций h

на $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$, представимых в виде $h = \sum_{i=1}^n g_i g_i'$, где $g_i : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ и $g_i' : \mathfrak{X}' \to \mathbb{R}$ — ограниченные измеримые по Борелю функции. Для любого $t' \in \mathfrak{X}'$ функция $h(\cdot, t')$ измерима по Борелю, и поэтому существует интеграл

$$\int h(\cdot, t') d\mu = f(t') = \sum_{i=1}^n y_i g_i'(t'),$$

где $y_i = \int g_i d\mu$ $(i = 1, \dots, n)$. Значит, $\int h d\mu \in \mathscr{M}(\mathfrak{X}', Y)$ и

$$\int \left(\int h d\mu \right) \times d\mu' = \sum_{i=1}^n \left(\int g_i d\mu \right) \times \left(\int g_i' d\mu' \right) = \int h d(\mu \otimes \mu').$$

Переходя в этих равенствах к соответствующим r-пределам, мы получаем следующую теорему Фубини.

5.4.5. Теорема. *Пусть* $h \in \overline{\mathscr{M}}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}')$. *Тогда*

$$\int h d\mu \in \overline{\mathscr{M}}(\mathfrak{X}, Y), \ \int h d\mu' \in \overline{\mathscr{M}}(\mathfrak{X}, Y')$$

и

$$\int \left(\int h d\mu \right) \times d\mu' = \int h d(\mu \otimes \mu') = \int d\mu \times \left(\int h d\mu' \right).$$

Класс функций $\overline{\mathscr{M}}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}')$ не очень широк, но когда пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}'$ компактны, имеет место включение $C(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}') \subset \mathscr{M}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}')$. Оказывается, что в общем виде для произвольных ограниченных измеримых на $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$ функций теорема Фубини просто не верна.

Пример. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}' = [0, 1]$, а $Y = F = Y' = F' = M[0, 1]$ — пространство всех классов эквивалентности по лебеговой мере борелевских ограниченных функций на $[0, 1]$. Для любого борелевского $A \subset [0, 1]$ полагаем $\mu(A) = [\chi_A]$ — класс эквивалентности, содержащий характеристическую функцию χ_A. В качестве операции умножения в $M[0, 1]$ рассмотрим обычное умножение функций. Тогда, очевидно,

$$\mu \otimes \mu(A \otimes B) = [\chi_{A \cap B}] \quad (A, B \in \mathscr{B}_{[0,1]}).$$

Пусть Δ — диагональ квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$, $\Delta := \{(t, t) : t \in [0, 1]\}$. Полагаем $P(t, u) = t$. Теперь можно в явном виде выписать меру $\mu \otimes \mu$, а именно:

$$(\mu \otimes \mu)(C) = \mu(P(\Delta \cap C)) = [\chi_{P(\Delta \cap C)}]$$

для любого борелевского $C \subset [0,1] \times [0,1]$. Тогда

$$(\mu \otimes \mu)(\Delta) = \mathbb{1} = \int \chi_\Delta \mathbb{d}(\mu \otimes \mu).$$

Но для любого фиксированного выполнено $t' \in [0,1]$

$$\int \chi_\Delta(\cdot, t') d\mu = \mu(\{t'\}) = 0.$$

Значит, при любом разумном определении интеграла от функций $f : [0,1] \to M[0,1]$ мы должны будем иметь

$$\int \left(\int \chi_\Delta d\mu \right) d\mu = 0 \neq \int \chi_\Delta d(\mu \otimes \mu).$$

Этот пример показывает, что теорема Фубини для функции χ_Δ в принципе не может выполняться.

Интеграл от вектор-функции $\varphi : G \to Y$ по радоновой мере $\lambda : \mathscr{B}(G) \to \mathbb{R}$ строится по типу интеграла Бохнера. Для простых функций вида

$$s = \sum_{j=1}^{n} y_j 1_{B_j} \quad (y_1, \dots, y_n \in Y,\ B_1, \dots, B_n \in \mathscr{B}(G))$$

полагаем, как обычно,

$$\int_G s(g) \lambda(dg) = \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda(B_j).$$

Далее определяем пространство интегрируемых функций $L^\infty(G, Y)$, полагая $\varphi \in L^\infty(G, Y)$ в том и только в том случае, когда имеется направленность простых функций $(s_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$, для которой

$$\sup\{|s_\alpha(g)| : \alpha \in \mathrm{A},\ g \in G\} \leqslant b \in F^+,$$

$$\inf_{\alpha \in \mathrm{A}} \sup\{|\varphi(g) - s_\beta(g)| : \beta \geqslant \alpha,\ g \in K\} = 0 \quad (K \in \mathscr{K}(G)).$$

После этого считаем, что

$$\int\limits_G \varphi(g)\lambda(dg) = o\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}} \int\limits_G s_\alpha(g)\lambda(dg).$$

Вектор-функция $\varphi : G \to Y$ называется *равномерно о-непрерывной на множестве* K, если

$$\inf_{U\in\mathscr{U}_0} \sup\{|\varphi(g_1) - \varphi(g_2)| : g_1, g_2 \in K,\ g_1 - g_2 \in U\} = 0.$$

Понятно, что порядково ограниченные и равномерно o-непрерывные на компактах $K \subseteq \mathfrak{X}$ отображения входят в $L^\infty(G, Y)$.

Пусть $\lambda_1 : \mathscr{B}(G_1) \to \mathbb{C}$, $\lambda_2 : \mathscr{B}(G_2) \to \mathbb{C}$ — две радоновы меры, определенные на борелевских σ-алгебрах локально-компактных групп G_1 и G_2. Их прямое произведение $\lambda = \lambda_1 \times \lambda_2 : \mathscr{B}(G_1 \times G_2) \to \mathbb{C}$ также является радоновой мерой.

5.4.6. Теорема. *Пусть $\varphi : G_1 \times G_2 \to Y$ является равномерно о-непрерывным на компактах порядково ограниченным отображением и*

$$\varphi_1(g_1) = \int\limits_{G_2} \varphi(g_1, g_2)\,\lambda_2(dg_2), \quad \varphi_2(g_2) = \int\limits_{G_1} \varphi(g_1, g_2)\,\lambda_1(dg_1).$$

Тогда отображения $\varphi_1 : G_1 \to Y$, $\varphi_2 : G_2 \to Y$ равномерно о-непрерывны на компактах и порядково ограничены, причем

$$\int\limits_{G_1\times G_2} \varphi(g)\lambda(dg) = \int\limits_{G_1} \varphi_1(g_1)\lambda_1(dg_1) = \int\limits_{G_2} \varphi_2(g_2)\lambda_2(dg_2).$$

$\triangleleft$ Порядковая ограниченность отображений φ_1, φ_2 очевидна. Возьмем $K_1 \in \mathscr{K}(G_1)$ и докажем равномерную o-непрерывность отображения φ_1 на K_1. Обозначим

$$b = \sup\{|\varphi(g)| : g \in G_1 \times G_2\}.$$

Пусть $U = U_1 \times U_2$, где U_1 и U_2 — любые окрестности нуля в группах G_1 и G_2 соответственно. Для любого $K_2 \in \mathscr{K}(G_2)$ полагаем

$$b_U = \sup\{|\varphi(g) - \varphi(h)| : g, h \in K_1 \times K_2,\ g - h \in U\}.$$

По условию направленность b_U убывает к нулю. Справедлива оценка

$$\bigl|\varphi_1(g_1) - \varphi_1(h_1)\bigr| \leqslant |\lambda_2|(G_2)b_U + |\lambda_2|(G_2 \setminus K_2)b.$$

Отсюда следует, что

$$\inf_{U_1} \sup\{\bigl|\varphi_1(g_1) - \varphi_1(h_1)\bigr| : g_1, h_1 \in K_1,\ g_1 - h_1 \in U_1\} \leqslant |\lambda_2|(G_2 \setminus K_2)b.$$

Так как $K_2 \in \mathscr{K}(G_2)$ произвольно, а мера λ_2 радонова, из этой оценки видна равномерная o-непрерывность отображения φ_1 на любом компакте $K_1 \in \mathscr{K}(G_1)$. То же самое верно для φ_2.

Возьмем теперь любые окрестности нуля U_1 и U_2 в группах G_1 и G_2 и произвольные $K_1 \in \mathscr{K}(G_1)$, $K_2 \in \mathscr{K}(G_2)$. Рассмотрим два разбиения единицы (для K_1 и K_2 соответственно):

$$\{u_j\}_{j=1}^n \subset C_{00}(G_1)^+, \quad \{v_k\}_{k=1}^m \subset C_{00}(G_2)^+$$

такие, что из $g_1, h_1 \in \operatorname{supp} u_j$, $g_2, h_2 \in \operatorname{supp} v_k$ следует

$$g_1 - h_1 \in U_1, \quad g_2 - h_2 \in U_2 \quad (j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m).$$

Выберем по элементу $g_{1,j} \in \operatorname{supp} u_j$, $g_{2,k} \in \operatorname{supp} v_k$ $(j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m)$. Справедливы оценки

$$\Biggl|\int\limits_{K_1 \times K_2} \varphi(g)\lambda(dg) - \sum_{j,k} \int\limits_{K_1 \times K_2} \varphi(g_{1,j}, g_{2,k}) u_j(g_1) v_k(g_2) \lambda(dg)\Biggr| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|(G_1 \times G_2) b_U, \quad \Biggl|\int\limits_{K_1} \varphi_1(g_1)\lambda_1(dg_1) -$$

$$- \sum_j \int\limits_{K_1 \times K_2} \varphi(g_{1,j}, g_{2,k}) u_j(g_1) v_k(g_2) \lambda_1(dg_1)\lambda_2(dg_2)\Biggr| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j,k} \int\limits_{K_1} \Biggl(\int\limits_{K_2} \bigl|\varphi(g_1, g_2) - \varphi(g_{1,j}, g_{2,k})\bigr| v_k(g_2) |\lambda_2|(dg_2) \Biggr) u_j(g_1) |\lambda_1|(dg_1) +$$

$$+ \int\limits_{K_1} \Biggl(\int\limits_{G_2 \setminus K_2} \bigl|\varphi(g_1, g_2)\bigr| |\lambda_2|(dg_2) \Biggr) |\lambda_1|(dg_1) \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda_1|(G_1)|\lambda_2|(G_2) b_U + |\lambda_1|(G_1)|\lambda_2|(G_2 \setminus K_2) b.$$

Здесь $g = (g_1, g_2)$, $U = U_1 \times U_2$, а b и b_U те же, что и выше. Кроме того,

$$\left|\int\limits_{G_1\times G_2} \varphi(g)\lambda(dg) - \int\limits_{K_1\times K_2} \varphi(g)\lambda(dg)\right| \leqslant |\lambda|(G_1 \times G_2 \setminus K_1 \times K_2)b,$$

$$\left|\int\limits_{G_1} \varphi_1(g_1)\lambda_1(dg_1) - \int\limits_{K_1} \varphi_1(g_1)\lambda_1(dg_1)\right| \leqslant |\lambda_1|(G_1 \setminus K_1)|\lambda_2|(G_2)b.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{G_1\times G_2} \varphi(g)\lambda(dg) - \int\limits_{G_1} \varphi_1(g_1)\lambda_1(dg_1)\right| \leqslant 2|\lambda|(G_1 \times G_2)b_U +$$
$$+2(|\lambda_1|(G_1 \setminus K_1)|\lambda_2|(G_2) + |\lambda_1|(G_1)|\lambda_2|(G_2 \setminus K_2))b.$$

После перехода к o-пределу по убывающей направленности b_U и по возрастающим направленностям $K_1 \in \mathscr{K}(G_1)$, $K_2 \in \mathscr{K}(G_2)$ получаем требуемое равенство

$$\int\limits_{G_1\times G_2} \varphi(g)\lambda(dg) = \int\limits_{G_1} \varphi_1(g_1)\lambda_1(dg_1).$$

Аналогичным образом получается второе равенство

$$\int\limits_{G_1\times G_2} \varphi(g)\lambda(dg) = \int\limits_{G_2} \varphi_2(g_2)\lambda_2(dg_2). \ \rhd$$

5.5. Проблема моментов Хаусдорфа

Классическая задача о нахождении борелевской меры по известной моментной последовательности (именуемая проблемой моментов, см., например, [3, 23, 24]) продолжает привлекать внимание и в настоящее время. Об этом свидетельствуют недавние публикации [25–27]. Одно из интересных обобщений указанной задачи связано с рассмотрением векторной или операторной моментной последовательности [28–32]. Здесь рассматривается следующая векторная постановка: по заданной последовательности $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ из решеточно нормированного пространства Y требуется найти Y-значную борелевскую меру на отрезке $[0,1]$, для которой k-й момент совпадает с a_k $(k \in \omega = \{0,1,2,\dots\})$. Стоит особо выделить два частных случая векторной проблемы моментов, в которых Y — пространство Канторовича.

Пусть T — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве (не обязательно ограниченный). Требуется отыскать спектральную меру μ, для которой

$$T^k = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^k d\mu \quad (k \in \omega).$$

Как видно, это переформулировка задачи о спектральном разложении. Близкие постановки рассматривались в [28–31].

Пусть теперь $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ — последовательность случайных величин на вероятностном пространстве (Q, Σ, P). Требуется найти случайную меру $(\mu_t)_{t \in Q}$ на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ такую, что равенства

$$a_k(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^k d\mu_t(\lambda) \quad (k \in \omega)$$

выполняются для почти всех $t \in Q$. Под случайной мерой понимается семейство счетно-аддитивных мер $(\mu_t)_{t \in Q}$, для которого отображение

$$\mu_{(\cdot)}(B) \cdot t \mapsto \mu_t(B) \quad (t \in Q)$$

измеримо для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Случайной мере $(\mu_t)_{t \in Q}$ однозначно соответствует векторная мера μ, определяемая тем условием, что $\mu(E)$ — класс эквивалентности измеримой функции $\mu_{(\cdot)}(E)$.

5.5.1. Определение. Называем последовательность векторов $(a_k)_{k=0}^{\infty} \subseteq F$ *позитивной* (по Хаусдорфу), если справедливы неравенства

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a_{k+l} \geqslant 0 \quad (n, l \in \omega).$$

5.5.2. Определение. Последовательность векторов $(y_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq Y$ называется *мажорируемой* (по Хаусдорфу), если существует последовательность $(a_k)_{k=0}^{\infty} \subseteq F$ такая, что

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k y_{k+l} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a_{k+l} \quad (n, l \in \omega).$$

5.5.3. Теорема. *Для данной последовательности* $(y_k)_{k=0}^{\infty} \subseteq Y$ *существует единственная борелевская мера* $\mu : \mathscr{B}([0,1]) \to Y$ *ограниченной векторной вариации, удовлетворяющая равенствам*

$$y_k = \int \lambda^k d\mu \quad (k \in \omega),$$

тогда и только тогда, когда последовательность $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ *мажорируема (по Хаусдорфу).*

$\lhd$ Определим линейный оператор $\mathscr{U}$ на пространстве полиномов $\mathscr{P}[0,1]$ со значениями в F следующим образом:

$$\mathscr{U}(p) = \sum_{k=0}^{n} p_k a_k, \text{где } p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} p_k \lambda^k.$$

Из позитивности последовательности $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ следует, что для полиномов $p_{n,l}(\lambda) = \lambda^l (1-\lambda)^n$ выполняются неравенства $\mathscr{U}(p_{n,l}) \geqslant 0$ $(n, l \in \omega)$. Если полином $p \in \mathscr{P}[0,1]$ неотрицателен на $[0,1]$, то по теореме Бернштейна он равномерно приближается полиномами вида

$$\sum_{k=0}^{m} p\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k P_{m-k,k}(\lambda),$$

степень которых не превышает n. Отсюда следует, что $\mathscr{U}(p) \geqslant 0$. Далее, по r-непрерывности, $\mathscr{U}$ продолжается до положительного оператора $\overline{\mathscr{U}} : C[0,1] \to F$.

Теперь займемся построением меры μ. Аналогично определяем оператор $T : \mathscr{P}[0,1] \to Y$ по формулам

$$T(p) = \sum_{k=0}^{n} p_k y_k, \text{ где } p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} p_k \lambda^k.$$

По условию $\lvert T(P_{n,l}) \rvert \leqslant \mathscr{U}(P_{n,l})$ $(n, l \in \omega)$. Аналогичные рассуждения показывают, что для любого $p \in \mathscr{P}[0,1], p(\lambda) \geqslant 0$ $(\lambda \in [0,1])$ выполняется $\lvert T(p) \rvert \leqslant \mathscr{U}(p)$.

Пусть теперь $p \in \mathscr{P}[0,1]$ — произвольный полином. Для любого $\varepsilon > 0$ существует полином q_ε такой, что

$$|p(\lambda)| \leqslant q_\varepsilon(\lambda) \leqslant |p(\lambda)| + \varepsilon \quad (\lambda \in [0,1]).$$

Тогда

$$\begin{aligned}|T(p)| = |T(p+q_\varepsilon - q_\varepsilon)| \leqslant \mathscr{U}(p+q_\varepsilon) + \mathscr{U}(q_\varepsilon) \leqslant \\ \leqslant \overline{\mathscr{U}}(3|p|+2\varepsilon) = 3\overline{\mathscr{U}}(|p|) + 2\varepsilon a_0.\end{aligned}$$

Из произвольности ε получаем неравенство

$$|T(p)| \leqslant 3\,\overline{\mathscr{U}}(|p|) \quad (p \in \mathscr{P}[0,1]).$$

По r-непрерывности, T продолжается до мажорируемого оператора $T_1 : C[0,1] \to Y$. По теореме 5.3.1 существует борелевская мера $\mu : \mathscr{B}([0,1]) \to Y$ ограниченной векторной вариации, для которой

$$T(p) = \int p(\lambda) d\mu \quad (p \in \mathscr{P}[0,1]).$$

Вспоминая определение T, получаем справедливость требуемых равенств. $\triangleright$

Следует отметить, что в случае, когда $Y = F = \mathbb{R}$, условие мажорируемости последовательности $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ эквивалентно стандартному условию Хаусдорфа (см. [3, 23]):

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left| \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i y_{i+k} \right| \leqslant \mathrm{const} \quad (n \in \omega).$$

В векторной ситуации это не так даже в случае, когда Y — банахово пространство. Точнее, если последовательность в банаховом пространстве удовлетворяет этому условию Хаусдорфа, то решением такой проблемы моментов может быть мера неограниченной вариации. Она будет иметь только ограниченную полувариацию.

Было отмечено, что спектральное разложение самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве может быть получено как решение векторной проблемы моментов. Для этого необходим следующий факт.

5.5.4. *Теорема.* *Пусть F — монотонно полное частично упорядоченное векторное пространство. Для данной последовательности $(a_k)_{k=0}^{\infty} \subseteq F$ существует единственная положительная борелевская мера $\mu : \mathscr{B}([0,1]) \to F$, удовлетворяющая равенствам*

$$a_k = \int \lambda^k d\mu(\lambda) \quad (k \in \omega), \tag{5.1}$$

тогда и только тогда, когда последовательность $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ позитивна (по Хаусдорфу).

$\lhd$ Пусть F — дедекиндово пополнение идеала $F(a_0)$. Оно является K-пространством. Применяя теорему 5.5.3 в случае, когда $Y = \widehat{F}$ и $y_k = a_k$ $(k \in \omega)$, мы получим единственную положительную борелевскую меру $\mu : \mathscr{B}([0,1]) \to F$, удовлетворяющую равенствам (5.1). Осталось лишь показать, что значения меры μ лежат в исходном пространстве. Это делается стандартно с помощью леммы о монотонном классе (см. [33]). $\rhd$

Пусть $\mathscr{A}(\mathscr{H})$ — векторное пространство всех ограниченных самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. На $\mathscr{A}(\mathscr{H})$ вводится следующий стандартный частичный порядок. Для $S, T \in \mathscr{A}(\mathscr{H})$ неравенство $S \leqslant T$ означает, что $(Sx, x) \leqslant (Tx, x)$ $(x \in \mathscr{H})$. Хорошо известно, что $(\mathscr{A}(\mathscr{H}), \leqslant)$ является монотонно полным частично упорядоченным векторным пространством (см., например, [28]). Пусть $T \in \mathscr{A}(\mathscr{H})$. Без ограничения общности можно считать, что $0 \leqslant T \leqslant I$ (I-тождественный оператор). Докажем позитивность по Хаусдорфу последовательности $(T_k)_{k=0}^{\infty}$. Для этого нужно установить, что

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k T^{k+l} = T^l (I - T)^n \geqslant 0 \quad (n, l \in \omega).$$

Выделяя в этом неравенстве множитель четной степени, мы его сведем к следующим трем неравенствам:

$$T \geqslant 0; \ I - T \geqslant 0; \ T(I - T) \geqslant 0.$$

Первые два случая справедливы по определению. Третий случай легко получается из следующей цепочки неравенств:

$$(T^2 x, x)^2 \leqslant (Tx, Tx)_T (x, x)_T \leqslant (T^2 x, x)(Tx, x),$$

здесь полагается $(x, y)_T := (Tx, y)$. Следует отметить, что лемма о существовании квадратного корня из положительного оператора здесь не применяется. Теперь из теоремы 5.5.3 получаем

5.5.5. *Следствие.* *Для любого оператора $T \in \mathscr{A}(\mathscr{H})$ существует единственная проекторнозначная мера μ такая, что*

$$T^k = \int\limits_{[0,1]} \lambda^k d\mu \quad (k \in \omega).$$

5.6. Векторная проблема моментов Гамбургера

В этой главе решается задача Гамбургера о моментах для последовательности векторов $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ из K_σ-пространства F (все определения, относящиеся к упорядоченным пространствам, см. в [2, 8]). В [30] такая же задача рассматривалась в случае, когда F является K-пространством, и для ее решения использовалась теорема Канторовича о продолжении положительного оператора, в которой необходима порядковая полнота пространства образов этого оператора (см. [8, теорема X.3.1]). Стремление избавиться от порядковой полноты вызвано следующими причинами. Во-первых, аналогичная задача о моментах в постановке Хаусдорфа (случай ограниченного интервала), как легко видеть, имеет решение в произвольном K_σ-пространстве F (см. теорему 5.5.3). Во-вторых, желательно было бы иметь решение проблемы Гамбургера о моментах в следующей постановке.

Пусть на пространстве с мерой $\langle \Omega, \mathscr{B}, \nu \rangle$ задана позитивная последовательность измеримых функций $s_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n \geqslant 0)$. Требуется найти отображение $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ с такими свойствами:

1) для любого $\omega \in \Omega$ функция $\mu(\,\cdot, \omega)$ является борелевской мерой и

$$s_n(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} u^n \mu(du, \omega) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

2) для любого борелевского множества $A \subseteq \mathbb{R}$ функция $\mu(A, \cdot\,)$ является $\mathscr{B}$-измеримой.

В случае, когда свойства 1) выполняются для ν-почти всех $\omega \in \Omega$, отображение μ обычно называют *случайной мерой.* Поскольку скалярная задача Гамбургера может иметь не единственное решение, вопрос, по существу, состоит в том, как при каждом $\omega \in \Omega$ выбирать решения скалярных задач с тем, чтобы в совокупности они образовывали измеримое по переменной ω решение векторной задачи. Если требовать выполнения условий 1), 2) только с точностью до ν-нулевой меры, то такая задача частично решена в [34]. В противном случае ввиду того, что пространство $\mathscr{B}$-измеримых функций является только K_σ-пространством и пространство полиномов $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ может не быть плотным в $L_1(\mu)$, для получения решения такой проблемы моментов необходимы другие приемы. Отметим также, что векторные постановки задачи о моментах рассматривались, например, в [36–38].

Всюду в дальнейшем:

F — это произвольное K_σ-пространство;

$\mathscr{P}(\mathbb{R})$ — пространство всех полиномов на $\mathbb{R}$;

$\mathscr{P}_Q(\mathbb{R})$ — множество всех полиномов на $\mathbb{R}$ с рациональными коэффициентами, $C_b(\mathbb{R})$ — пространство всех ограниченных непрерывных на $\mathbb{R}$ функций;

$C_{\mathscr{P}}(\mathbb{R})$ — пространство всех полиномиально ограниченных непрерывных на $\mathbb{R}$ функций (т. е. $\varphi \in C_{\mathscr{P}}(\mathbb{R})$ означает, что $\varphi \in C(\mathbb{R})$ и для некоторого полинома $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ будет $|\varphi| \leqslant p$).

Положительной борелевской мерой будем называть σ-аддитивное отображение $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to F^+$. *Спектральной мерой* называем любой порядковый σ-непрерывный гомоморфизм из $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ в F. Нам потребуется также векторный интеграл Лебега по F-значной мере (см. первый параграф).

5.6.1. Определение. Последовательность $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ из F называется *позитивной*, если

$$\sum_{k,l=0}^{n} s_{k+l}\sigma_k\sigma_l \geqslant 0 \quad \bigl(\{\sigma_k\}_{k=0}^n \subset \mathbb{R},\ n = 0, 1, 2, \dots\bigr).$$

5.6.2. *Теорема.* *Для данной последовательности $\{s_k\}_{k=0}^\infty \subset F$ существует положительная борелевская мера $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to F^+$ такая, что*

$$s_k = \int\limits_{\mathbb{R}} u^k \mu(du) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \tag{6.1}$$

тогда и только тогда, когда последовательность $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ позитивна.

Для более детального описания ситуации введем положительный линейный оператор $U : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to F$ по формулам

$$U(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k s_k, \qquad \text{где } p(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k. \tag{6.2}$$

Для любой функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обозначим

$$U^{\vee}(\varphi) = \sup\{U(p) : p \in \mathscr{P}(\mathbb{R}),\ p \leqslant \varphi\},$$
$$U^{\wedge}(\varphi) = \inf\{U(p) : p \in \mathscr{P}(\mathbb{R}),\ p \geqslant \varphi\}. \tag{6.3}$$

Фиксируем любое комплексное число $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Рассмотрим функции

$$R_\lambda(u) = \operatorname{Re}\frac{1}{u-\lambda}, \quad I_\lambda(u) = \operatorname{Im}\frac{1}{u-\lambda}. \tag{6.4}$$

Определим в F векторы:

$$a^+ = U^{\wedge}(R_\lambda),\ a^- = U^{\vee}(R_\lambda), \quad b^+ = U^{\wedge}(I_\lambda),\ b^- = U^{\vee}(I_\lambda). \tag{6.5}$$

В комплексификации $F_{\mathbb{C}}$ пространства F рассмотрим вектор

$$C = \frac{a^+ + a^-}{2} + i\,\frac{b^+ + b^-}{2}. \tag{6.6}$$

Полагаем

$$R = \frac{a^+ - a^-}{2} = \frac{b^+ - b^-}{2}. \tag{6.7}$$

В $F_{\mathbb{C}}$ можно ввести решеточную норму $|w| = \{(\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2\}^{1/2}$, а затем определить векторный круг Вейля — Гамбургера (см. [39])

$$K_\infty(\lambda) = \{w \in F_{\mathbb{C}} : |w - C| \leqslant R\}, \tag{6.8}$$

где C — центр этого круга, R — его радиус.

Обозначим через s_k^H проекцию последовательности s_k на компоненту $\{R\}^{dd}$, а через s_k^O — на дополнительную компоненту $\{R\}^d$. Заметим, что для позитивной последовательности $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ все ее элементы лежат в компоненте $\{s_0\}^{dd}$ (см. [35, лемма 2]). В $\{s_0\}^{dd}$ можно однозначно ввести частичную операцию умножения, взяв s_0 в качестве единицы. Рассмотрим миноры

$$\mathscr{D}_{-1} = 0, \quad \mathscr{D}_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{vmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Легко видеть, что $\mathscr{D}_n \in F$ и $\{\mathscr{D}_{n-1}\}^{dd} \supseteq \{\mathscr{D}_n\}^{dd}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Обозначим через π_n оператор проектирования на компоненту $\{\mathscr{D}_{n-1}\}^{dd} \cap \{\mathscr{D}_n\}^{d}$. Компоненты $\{\mathscr{D}_n\}^{dd}$ можно определить без применения операции умножения, положив

$$E(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = \left\{ \sum_{k,l=0}^{n} s_{k+l}\sigma_k\sigma_l \right\}^{dd} \quad \big(\{\sigma_k\}_{k=0}^{n} \subset \mathbb{R}\big),$$

тогда

$$\{\mathscr{D}_n\}^{dd} = \cap \big\{E(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n) : \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 > 0\big\}.$$

5.6.3. *Теорема.* *Для позитивной последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ и комплексного числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ определим по формулам (6.2)–(6.8) оператор U, векторы C, R и круг $K_\infty(\lambda)$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(1) *Для любого $w \in K_\infty(\lambda)$ существует положительная мера $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to F^+$, являющаяся решением проблемы моментов для $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ (удовлетворяющая равенствам (6.1)), такая что*

$$w = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{u - \lambda}\, \mu(du). \tag{6.9}$$

Обратно, для любого решения $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to F^+$ этой проблемы моментов вектор w, определяемый по формуле (6.9), принадлежит $K_\infty(\lambda)$.

(2) *В любой ненулевой главной компоненте $E \subseteq \{R\}^{dd}$ решение проблемы моментов для проекций s_k^H на E не единственно.*

(3) *Проблема моментов для проекций $\{s_k^O\}_{k=0}^{\infty}$ в $\{R\}^d$ имеет единственное решение $\mu_0 : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to F^+$.*

(4) *Справедливо равенство $\pi_0 \circ \mu = 0$ и для любого $n \geqslant 1$ выполняется $\{\mathscr{D}_{n-1}\}^{dd} \cap \{\mathscr{D}_n\}^d \subseteq \{R\}^d$, при этом мера $\pi_n \circ \mu_0$ представляется суммой n дизъюнктных спектральных мер. Если имеются два различных представления*

$$\pi_n \circ \mu_0 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} \nu_j^{(m)}$$

в виде суммы дизъюнктных спектральных мер $\{\mu_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ *и* $\{\nu_j^{(m)}\}_{j=1}^m$*, то* $m = n$ *и существует матрица порядковых проекторов* $\{\pi_{ij}\}_{i,j=1}^n$ *такая, что*

$$\pi_{ij} \circ \pi_{ik} = 0, \quad \pi_{ji} \circ \pi_{ki} = 0 \quad (j \neq k),$$

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \pi_{ji} = \pi_n, \quad \nu_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} \circ \mu_j^{(n)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательства основных утверждений.

Важную роль играет следующая интерполяционная лемма. 6=6

5.6.4. Лемма. *Пусть* $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ *и полином* $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ *при некотором* $\varepsilon > 0$ *удовлетворяет неравенству* $p(u) \geqslant \varphi(u) + \varepsilon$ $(u \in \mathbb{R})$*. Тогда существует другой полином* $q \in \mathscr{P}_Q(\mathbb{R})$ *той же степени, для которого выполняются неравенства* $p(u) > q(u) > \varphi(u)$ $(u \in \mathbb{R})$*.*

$\lhd$ Доказательство совершенно элементарно, поэтому оно не приводится. $\rhd$

5.6.5. Лемма. *Пусть* $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ *— позитивная последовательность вещественных чисел. Для комплексного числа* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ *построим по этой последовательности круг* $K_\infty(\lambda)$ *с центром* C *и радиусом* R*. Тогда для любого* $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ *имеет место равенство*

$$\operatorname{Re}(\overline{\alpha}C) + R = U^\wedge(\varphi_\alpha), \tag{6.10}$$

где U, $U^\wedge$ *определяются по формулам (6.2), (6.3) и*

$$\varphi_\alpha(u) = \operatorname{Re} \frac{\overline{\alpha}}{u - \lambda} \quad (u \in \mathbb{R}).$$

$\lhd$ Существует мера $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$, являющаяся решением проблемы моментов для последовательности $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ такая, что

$$C + \alpha R = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{u - \lambda} \, \mu(du)$$

(см. [23, теорема 2.2.4]). Продолжим функционал U до положительного функционала $V : C_{\mathscr{P}}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ так, чтобы выполнялось равенство

$$V(\varphi_\alpha) = U^\wedge(\varphi_\alpha) \tag{6.11}$$

(см. [8, теорема X.3.1]). Существует мера $\nu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$, являющаяся решением проблемы моментов для $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ и удовлетворяющая равенству

$$V(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(u)\,\nu(du) \quad (\varphi \in C_{\mathscr{P}}(\mathbb{R})).$$

Здесь применима, например, теорема 1 из [35] в случае $Y = \mathbb{R}$. По теореме 2.2.4 из [23] имеем

$$w = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{u-\lambda}\,\nu(du) \in K_\infty(\lambda).$$

Значит,

$$\operatorname{Re}(\overline{\alpha}w) = V(\varphi_\alpha) \leqslant \operatorname{Re}(\overline{\alpha}C) + R = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_\alpha(u)\,\nu(du) \leqslant U^\wedge(\varphi_\alpha).$$

Сопоставляя последнее соотношение с равенством (6.11), получаем формулу (6.10). Лемма доказана. $\triangleright$

Из леммы 5.6.5, в частности, следует обоснование формул (6.3)–(6.8) в случае $F = \mathbb{R}$, из леммы 5.6.4 — корректность определений (6.3)–(6.8) в векторном случае.

5.6.6. *Лемма.* *Для любой позитивной последовательности векторов $\{s_k\}_{k=0}^{\infty} \subset F$ вектор a^+, определяемый по формуле (6.5), существует и может быть вычислен по формуле*

$$a^+ = \inf\{U(q) : q \in \mathscr{P}_Q(\mathbb{R}),\ q \geqslant R_\lambda\}.$$

То же самое относится и к векторам a^-, b^+, b^-.

$\triangleleft$ Пусть $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ и $p \geqslant R_\lambda$. По лемме 5.6.4 для любого $\varepsilon > 0$ существует полином $q \in \mathscr{P}_Q(\mathbb{R})$, для которого $p(u) + \varepsilon > q(u) > R_\lambda(u)$ $(u \in \mathbb{R})$. Тогда $U(p) \geqslant U(q) - \varepsilon U(\mathbb{1})$. Положим $a^+ = \inf\{U(q) : q \in \mathscr{P}_Q(\mathbb{R}),\ q \geqslant R_\lambda\}$. Очевидно, что $U(p) \geqslant a^+ - \varepsilon U(\mathbb{1})$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $U(p) \geqslant a^+$ для любого $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $p \geqslant R_\lambda$. Значит, $U^\wedge(R_\lambda)$ существует и равно a^+. То же самое аналогичным образом устанавливается для векторов a^-, b^+, b^-. Лемма доказана. $\triangleright$

5.6.7. Лемма. *Если последовательность $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ позитивна, то все ее элементы лежат в компоненте $\{s_0\}^{dd}$.*

$\lhd$ По теореме 2 из [35] существует решение $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to F^+$ этой проблемы моментов со значениями в дедекиндовом пополнении $\widehat{F}$ K_σ-пространства F. Утверждение леммы теперь сразу следует из равенства

$$s_0 = \int\limits_{\mathbb{R}} \mu(du) = \mu(\mathbb{R}). \ \rhd$$

5.6.8. Следствие. *Для того чтобы скалярная проблема моментов Гамбургера была определенной, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ выполнялось одно из равенств*

$$U^{\wedge}(R_\lambda) = U^{\vee}(R_\lambda), \quad U^{\wedge}(I_\lambda) = U^{\vee}(I_\lambda).$$

Теорема 5.6.2 является сокращенным вариантом более развернутой теоремы 5.6.3, поэтому мы приведем доказательство только теоремы 5.6.3. Уместно отметить, что теорема 5.6.2 имеет самостоятельный интерес, потому что в ней устанавливается только существование решения, строить которое проще, чем строить решения для теоремы 5.6.3.

Доказательство теоремы 5.6.3. Докажем обратное утверждение п. 1. Пусть имеется любое решение $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to F^+$ проблемы моментов для позитивной последовательности векторов $\{s_k\}_{k=0}^{\infty} \subset F$. Реализуем компоненту $\{s_0\}^{dd}$ как фундамент в пространстве $C_\infty(Q)$, где Q — квазиэкстремальный компакт, так, чтобы элемент s_0 перешел в функцию, равную единице. В силу леммы 5.6.7 все элементы s_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ тоже реализуются непрерывными функциями на Q. Из лемм 5.6.5 и 5.6.6 следует существование бэровского множества $E_0 \subset Q$ первой категории такого, что для любого $q \in Q \setminus E_0$ числа $C(q)$ и $R(q)$ являются центром и радиусом скалярного круга Вейля — Гамбургера для позитивной числовой последовательности $\{s_n(q)\}_{n=0}^{\infty}$. При фиксированном $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ все интегралы

$$w = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{u - \lambda}\, \mu(du), \quad s_n = \int\limits_{\mathbb{R}} u^n \mu(du) \quad (n \geqslant 0)$$

можно вычислять как (r)-предел стилтьесовских сумм по фиксированной последовательности счетных разбиений $\mathbb{R}$. Поэтому множество E_0 можно считать таким, что для любого $q \in Q \setminus E_0$

$$w(q) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{u-\lambda}\, d\sigma_q(u), \quad s_n(q) = \int\limits_{\mathbb{R}} u^n\, d\sigma_q(u) \quad (n \geqslant 0),$$

где $\sigma_q(u) = \mu((-\infty, u))(q)$ $(u \in \mathbb{R})$ — функции распределения, построенные по мере μ. В силу теоремы 2.2.4 из [23] для таких q имеем $|w(q) - C(q)| \leqslant R(q)$. Из непрерывности функций w, C, R вытекает выполнение этих неравенств для всех $q \in Q$. Следовательно, справедливо векторное неравенство $|w - C| \leqslant R$.

Для данной позитивной последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty} \subset F$ и некоторого числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ определим по формулам (6.2)–(6.7) оператор U и векторы C, R. Рассмотрим любой вектор $w \in F_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющий неравенству $|w - C| \leqslant R$. Ввиду леммы 5.6.7 можно ограничиться компонентой $\{s_0\}^{dd}$ и ввести в ней частичную операцию умножения, взяв s_0 в качестве единицы. Тогда существуют два вектора w_1, $w_2 \in \{s_0\}^{dd}$ такие, что $|w_1 - C| = |w_2 - C| = R$ и $w = c_1 w_1 + c_2 w_2$ при некоторых c_1, $c_2 \in F$, $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, $c_1 + c_2 = s_0$. Достаточно решить задачу для каждого w_1, w_2. Существует $\alpha \in F_{\mathbb{C}}$, $|\alpha| = s_0$ такое, что $w_1 = C + \alpha R$, $w_2 = C - \alpha R$. Пусть $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, где α_1, $\alpha_2 \in \{s_0\}^{dd}$. Рассмотрим спектральные характеристики $\{e_u^{(1)} : u \in \mathbb{R}\}$ и $\{e_u^{(2)} : u \in \mathbb{R}\}$ элементов α_1, α_2 соответственно (относительно единицы s_0). Пусть $\mathscr{A}$ — алгебра единичных элементов (относительно s_0), порожденная счетной системой $\{e_u^{(1)}, e_u^{(2)} : u \in Q\}$. Обозначим через $\mathscr{P}_{-1}(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ пространство всех функций из $\mathbb{R}$ в $\{s_0\}^{dd}$ вида

$$\psi(u) = \sum_{j=1}^{n} e_j p_j(u) \quad \big(\{e_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathscr{A},\ \{p_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})\big). \tag{6.12}$$

Введем пространство $S(\mathscr{A})$ всех простых элементов вида

$$a = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \quad \big(\{\beta_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathbb{R},\ \{e_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathscr{A}\big).$$

Рассмотрим оператор $U_{-1} : \mathscr{P}_{-1}(\mathbb{R}, \mathscr{A}) \to F$, который на функции вида (6.12) принимает значение

$$U_{-1}(\psi) = \sum_{j=1}^{n} e_j U(p_j).$$

Если ввести на $\mathscr{P}_{-1}(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ поточечный порядок, то U_{-1} будет положительным оператором со свойством $S(\mathscr{A})$-линейности, т. е.

$$U_{-1}(a\psi) = aU_{-1}(\psi) \quad (a \in S(\mathscr{A}),\ \psi \in \mathscr{P}_{-1}(\mathbb{R}, \mathscr{A})).$$

Выделим в пространстве $C_0(\mathbb{R})$ счетное плотное в равномерной норме множество функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$. Множество $F(\mathbb{R})$ всех функций из $\mathbb{R}$ в $\{s_0\}^{dd}$, снабженное поточечными операциями, является K_σ-пространством. Сделаем его $S(\mathscr{A})$-модулем, определив поточечное умножение на элементы $a \in S(\mathscr{A})$. Теперь все готово для продолжения оператора U_{-1}, которое будем проводить по индукции. Допустим, что для некоторого n на пространстве $\mathscr{P}_n(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ всех функций из $\mathbb{R}$ в $\{s_0\}^{dd}$ вида

$$\psi_n = \psi + \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j, \quad \psi \in \mathscr{P}(\mathbb{R}, \mathscr{A}),\ \{a_j\}_{j=1}^{n} \subset S(\mathscr{A}),$$

$$\varphi_0(u) = \operatorname{Re} \frac{\overline{\alpha}}{u - \lambda} \quad (u \in \mathbb{R})$$

построен положительный оператор $U_n : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}, \mathscr{A}) \to F$, являющийся продолжением U_{-1} и обладающий свойством $S(\mathscr{A})$-линейности:

$$U_n(a\psi_n) = aU_n(\psi_n) \quad (a \in S(\mathscr{A}),\ \psi_n \in \mathscr{P}(\mathbb{R}, \mathscr{A})).$$

Если $\varphi_{n+1}s_0 \notin \mathscr{P}_n(\mathbb{R}, \mathscr{A})$, то полагаем

$$U_{n+1}(\varphi_{n+1}s_0) = \inf\{U_n(\psi_n) : \psi_n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}, \mathscr{A}),\ \psi_n \geqslant \varphi_{n+1}s_0\}. \quad (6.13)$$

Установим существование точной нижней грани в формуле (6.13). Для этого докажем аналог интерполяционной леммы 5.6.4. Возьмем любое рациональное $\varepsilon > 0$. Если $\psi_n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ и $\psi_n \geqslant \varphi_{n+1}s_0$, то существует такое разбиение единицы s_0 на дизъюнктные единичные элементы $\{e_k\}_{k=1}^m \subset \mathscr{A}$, что

$$e_k\psi_n = e_k\left(p_k + \sum_{j=0}^{n}\beta_{kj}\varphi_j\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

для некоторых $p_k \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $\beta_{kj} \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, m;\ j = 0, 1, \ldots, n)$. При необходимости измельчая разбиение $\{e_k\}_{k=1}^m$, можно считать, что при $\beta_{k0} \neq 0$ имеют место оценки

$$\left|\alpha_1 e_k - \lambda_k^{(1)} e_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon|\operatorname{Im}\lambda|}{2|\beta_{k0}|}s_0, \quad \left|\alpha_2 e_k - \lambda_k^{(2)} e_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon|\operatorname{Im}\lambda|}{2|\beta_{k0}|}s_0 \tag{6.14}$$

для некоторых вещественных $\left|\lambda_k^{(1)}\right| \leqslant 1$, $\left|\lambda_k^{(2)}\right| \leqslant 1$ $(k = 1, \ldots, m)$. В результате получаем систему числовых неравенств

$$p_k(u) + \beta_{k0}\Big(\lambda_k^{(1)} R_\lambda(u) + \lambda_k^{(2)} I_\lambda(u)\Big) + \sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}\varphi_j(u) + \varepsilon \geqslant \varphi_{n+1}(u)$$
$$(k = 1, \ldots, m;\ u \in \mathbb{R}).$$

В случае $n = 0$ эти неравенства имеют вид

$$p_k(u) + \varepsilon \geqslant \lambda_k^{(1)} R_\lambda(u) + \lambda_k^{(2)} I_\lambda(u) \quad (k = 1, \ldots, m;\ u \in \mathbb{R}),$$

где функции R_λ и I_λ определяются из (6.4). По интерполяционной лемме 5 существуют полиномы $q_k \in \mathscr{P}_Q(\mathbb{R})$, для которых

$$p_k(u) > q_k(u) > \varphi_{n+1}(u) - \beta_{k0}\lambda_k^{(1)} R_\lambda(u) - \beta_{k0}\lambda_k^{(2)} I_\lambda(u) -$$
$$- \sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}\varphi_j(u) - 2\varepsilon$$
$$(k = 1, \ldots, m;\ u \in \mathbb{R}). \tag{6.15}$$

Существуют рациональные числа $\gamma_{kj} \in \mathbb{Q}$ такие, что если в (6.1) заменить все β_{kj} на γ_{kj}, то неравенства сохраняются; при этом можно считать, что

$$\frac{2|\beta_{k0} - \gamma_{k0}|}{|\operatorname{Im}\lambda|} + \left|\sum_{j=1}^{n}(\beta_{kj} - \gamma_{kj})\varphi_j(u)\right| < \varepsilon \quad (u \in \mathbb{R}).$$

В результате получаем

$$p_k + \beta_{k0}(\lambda_k R_\lambda + \mu_k I_\lambda) + \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj}\varphi_j + 3\varepsilon \geqslant$$

$$\geqslant q_k + \gamma_{k0}(\lambda_k R_\lambda + \mu_k I_\lambda) + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj}\varphi_j + 2\varepsilon \geqslant \varphi_{n+1} \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Используя еще раз оценки (6.14), приходим к оценке

$$\psi_n + 6\varepsilon s_0 \geqslant \sum_{k=1}^{m} \biggl(e_k q_k + e_k \sum_{j=0}^{n} \gamma_{kj}\varphi_j \biggr) + 3\varepsilon s_0 \geqslant \varphi_{n+1} s_0.$$

Определим множество $\mathscr{P}_n(\mathbb{R}, \mathscr{A}, \mathbb{Q})$ всех функций из $\mathbb{R}$ в $\{s_0\}^{dd}$ вида

$$\chi_n = \sum_{k=1}^{m} e_k \biggl(q_k + \sum_{j=0}^{n} \gamma_{kj}\varphi_j \biggr),$$

где $e_k \in \mathscr{A}$, $q_k \in \mathscr{P}_Q(\mathbb{R})$, $\gamma_{kj} \in \mathbb{Q}$ $(j = 0, 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m)$. Очевидно, множество $\mathscr{P}_n(\mathbb{R}, \mathscr{A}, \mathbb{Q})$ счетное. Мы доказали, что для любого $\psi_n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}, \mathscr{A})$, $\psi_n \geqslant \varphi_{n+1} s_0$, и любого $\varepsilon > 0$ существует $\chi_n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}, \mathscr{A}, \mathbb{Q})$ такое, что

$$\psi_n + \varepsilon s_0 \geqslant \chi_n \geqslant \varphi_{n+1} s_0. \tag{6.16}$$

Определим

$$f_{n+1} = \inf\{U_n(\chi_n) : \chi_n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}, \mathscr{A}, \mathbb{Q}),\ \chi_n \geqslant \varphi_{n+1} s_0\}. \tag{6.17}$$

Тогда из (6.16) получаем $U_n(\psi_n) \geqslant f_n - \varepsilon s_0$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ следует неравенство $U_n(\psi_n) \geqslant f_{n+1}$ для любого $\psi_n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ такого, что $\psi_n \geqslant \varphi_{n+1} s_0$. Мы доказали, что инфимум в формуле (6.13) существует и равен f_{n+1}. Теперь для $\psi_n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ и $a \in S(\mathscr{A})$ полагаем

$$U_{n+1}(\psi_n + a\varphi_{n+1}) = U_n(\psi_n) + a f_n. \tag{6.18}$$

Оператор $U_{n+1} : \mathscr{P}_{n+1}(\mathbb{R}, \mathscr{A}) \to F$, определяемый по формуле (6.18), продолжает U_n и является $S(\mathscr{A})$-линейным. Докажем его положительность. Пусть $\psi_n + a\varphi_{n+1} \geqslant 0$. Обозначим через $e_\pm \in \mathscr{A}$ носители элементов $a_\pm \in S(\mathscr{A})$. Имеем

$$\psi_n(s_0 - e_+ - e_-) \geqslant 0, \quad -a_+^{-1} \cdot \psi_n \leqslant \varphi_{n+1}, \quad a_-^{-1} \cdot \psi_n \geqslant \varphi_{n+1}.$$

Из определения U_{n+1} и положительности U_n получаем

$$-a_+^{-1}U_n(\psi_n) \leqslant U_{n+1}(\varphi_{n+1}), \quad a_-^{-1}U_n(\psi_n) \geqslant U_{n+1}(\varphi_{n+1}),$$

$$(s_0 - e_+ - e_-)U_n(\psi_n) \geqslant 0.$$

Домножая обе части первого неравенства на a_+, второго на a_- и складывая все три неравенства вместе, будем иметь

$$U_{n+1}(\psi_n + a\varphi_{n+1}) \geqslant 0.$$

Обозначим $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{R}, \mathscr{A}) = \bigcup_{n=0}^\infty \mathscr{P}_n(\mathbb{R}, \mathscr{A})$. Мы построили положительный $S(\mathscr{A})$-линейный оператор $U_\infty : \mathscr{P}_\infty(\mathbb{R}, \mathscr{A}) \to F$, продолжающий U_{-1}, для которого выполняются равенства (6.13). По (r)-непрерывности в равномерной норме оператор U_∞ продолжается до положительного $\overline{S(\mathscr{A})}$-линейного оператора $\overline{U}_\infty$ на равномерное замыкание $\overline{\mathscr{P}}_\infty$ пространства $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{R}, \mathscr{A})$, где $\overline{S(\mathscr{A})}$ — равномерное замыкание (с регулятором s_0) пространства $S(\mathscr{A})$. В частности, α_1, $\alpha_2 \in \overline{S(\mathscr{A})}$. Для любого $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ полагаем $V(\varphi) = \overline{U}_\infty(\varphi s_0)$. Получим положительный оператор $V : C_0(\mathbb{R}) \to F$. Векторная решетка функций $C_0(\mathbb{R})$ порождает обычную топологию на $\mathbb{R}$ (в том смысле, что слабейшая из топологий, в которых непрерывны все функции из $C_0(\mathbb{R})$, совпадает с обычной топологией на $\mathbb{R}$). Покажем, что выполняется также условие *квазирадоновости* (3.2) в теореме 5.3.1 Для этого следует проверить, что

$$\sup_n \inf\{V(\varphi) : \varphi \in C_0(\mathbb{R}),\ \varphi \geqslant \chi_{[-n,n]}\} = s_0. \qquad (6.19)$$

Мы не будем останавливаться на доказательстве существования инфимумов в формуле (6.19). Это делается в точности так же, как в теореме 8 из [34], только теперь вместо пространства $C_b(\mathbb{R})$ используется пространство $C_0(\mathbb{R})$. По теореме 5.3.1 существует мера $\mu_1 : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to F^+$, удовлетворяющая условию

$$V(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(u)\, \mu_1(du) \quad (\varphi \in C_0(\mathbb{R})).$$

Немного модифицируя доказательство теоремы 8 из [34], легко показать, что мера μ_1 является решением проблемы моментов для последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$. Проверим равенство

$$w_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{u-\lambda}\ \mu_1(du).$$

Формулы (6.13), (6.17) при $n=-1$ дают

$$\begin{gathered}\alpha_1 V(R_\lambda) + \alpha_2 V(I_\lambda) = \\ = \inf\{U_{-1}(\psi) : \psi \in \mathscr{P}(\mathbb{R}, \mathscr{A}, \mathbb{Q}), \psi \geqslant \alpha_1 R_\lambda + \alpha_2 I_\lambda\}.\end{gathered} \tag{6.20}$$

Реализуем $\{s_0\}^{dd}$ как компоненту непрерывных функций на квазиэкстремальном компакте Q, в которой s_0 представляется функцией, равной единице на всем Q. Существует множество $E_0 \subset Q$ первой категории такое, что на $Q \setminus E_0$ инфимум в (6.20) вычисляется поточечно. Можно считать, что все интегралы по мере μ_1 от функций $R_\lambda(u)$, $I_\lambda(u)$, u^k $(k=0,1,2,\ldots)$ как пределы стилтьесовских сумм тоже вычисляются поточечно и равны соответственно величинам $V(R_\lambda)(q)$, $V(I_\lambda)(q)$, $s_k(q)$ $(k=0,1,2,\ldots;\ q \in Q\setminus E_0)$. Кроме того, считаем, что для любого $q \in Q \setminus E_0$ числа $C(q)$ и $R(q)$ являются параметрами круга Вейля — Гамбургера для моментной последовательности $\{s_k(q)\}_{k=0}^{\infty}$. Для любых $q \in Q\setminus E_0$ и $\varepsilon > 0$ существует $\psi \in \mathscr{P}(\mathbb{R}, \mathscr{A}, \mathbb{Q})$ такое, что $\psi \geqslant \alpha_1 R_\lambda + \alpha_2 I_\lambda$ и

$$U_{-1}(\psi)(q) < \alpha_1(q) \int\limits_{\mathbb{R}} R_\lambda(u)\ d\sigma_q(u) + \alpha_2(q) \int\limits_{\mathbb{R}} I_\lambda(u)\ d\sigma_q(u) + \varepsilon,$$

где $\sigma_q(u) = \mu_1((-\infty, u))(q)$ $(u \in \mathbb{R})$. Из $\psi(q) \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ и $U_{-1}(\psi)(q) = U(\psi(q))$ и из леммы 5.6.5 получаем

$$\overline{\alpha(q)} w_1(q) = \overline{\alpha(q)} C(q) + R(q) < \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} \frac{\overline{\alpha(q)}}{u-\lambda}\ d\sigma_q(u) + \varepsilon.$$

Так как ε произвольно и $w_1(q)$ лежит на границе круга $K_\infty(\lambda)(q)$, то должно быть

$$\operatorname{Re}\{\overline{\alpha(q)} w_1(q)\} = \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} \frac{\overline{\alpha(q)}}{u-\lambda}\ d\sigma_q(u).$$

В силу теоремы 2.2.4 из [23] получаем равенство

$$w_1(q) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{u-\lambda}\, d\sigma_q(u) \quad (q \in Q \setminus E_0).$$

Оно сохраняется и в векторном виде, т. е.

$$w_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{u-\lambda}\, \mu_1(du).$$

Аналогичное построение для вектора $w_2 = C - \alpha R$ позволяет найти другое решение μ_2 проблемы моментов, для которого

$$w_2 = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{u-\lambda}\, \mu_2(du).$$

Тогда для вектора $w = c_1 w_1 + c_2 w_2$ будем иметь решение $\mu = c_1\mu_1 + c_2\mu_2$, удовлетворяющее равенству (6.9).

Пункты 2 и 3 теоремы 5.6.3 сразу следуют из только что доказанного п. 1. Приведем схему доказательства п. 4. В вышеописанной стоуновской реализации компоненте $\{\mathscr{D}_{n-1}\}^{dd} \cap \{\mathscr{D}_n\}^d$ соответствуют непрерывные функции на Q, равные нулю вне некоторого открыто-замкнутого подмножества Q_n. При этом существует множество $E_0 \subset Q_n$ первой категории такое, что $\mathscr{D}_{n-1}(q) > 0$ для всех $q \in Q_n \setminus E_0$. Кроме того, $\mathscr{D}_n(q) > 0$ $(q \in Q_n)$. Поэтому существует единственный набор непрерывных на $Q_n \setminus E_0$ функций $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$, для которого

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i s_{i+k} = 0, \quad \xi_n = 1 \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Из элементарных соображений следует, что полином $\xi_0(q) + \xi_1(q)\lambda + \cdots + \xi_n(q)\lambda^n = 0$ $(q \in Q_n \setminus E_0)$ имеет n различных вещественных корней $\lambda_1(q) < \lambda_2(q) < \cdots < \lambda_n(q)$. Легко доказывается с помощью известной в комплексном анализе теоремы Руше непрерывность функций $\{\lambda_i(q)\}_{i=1}^{n}$ $(q \in Q_n \setminus E_0)$. Поэтому каждая функция $\lambda_i(q)$

реализует некоторый вектор λ_i из максимального расширения компоненты $\pi_n F = \{\mathscr{D}_{n-1}\}^{dd} \cap \{\mathscr{D}_n\}^d$ $(i = 1, \ldots, n)$. Решение моментов для проекций $\{\pi_n(s_k)\}_{k=1}^{\infty}$ на эту компоненту вырождается и представляет собой систему равенств

$$\pi_n(s_k) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(n)} \lambda_i^k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

при некоторых $c_i^{(n)} \geqslant 0$ из максимального расширения пространства $\pi_n F$. Рассмотрим спектральные меры $\nu_i^{(n)}$ для элементов λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ (относительно порядковой единицы $\pi_n(s_0)$). В силу единственности решения проблемы моментов в этой компоненте получаем равенство

$$\pi_n \circ \mu_0 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{(n)}, \tag{6.21}$$

где $\mu_i^{(n)} = c_i^{(n)} \nu_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ тоже спектральные меры в смысле нашего определения, значения которых лежат в исходном пространстве F. Дизъюнктность $\{\mu_i^{(n)}\}_{i=1}^{n}$ следует из того, что все корни $\{\lambda_i(q)\}_{i=1}^{n}$ $(q \in Q_n \setminus E_0)$ различные. Единственность представления (6.21) (в смысле п. 4 теоремы 5.6.3) вытекает из того, что корни $\{\lambda_i(q)\}_{i=1}^{n}$ определяются единственным образом с точностью до их перенумерации на открыто-замкнутых подмножествах Q_n. Теорема 5.6.3 полностью доказана.

5.7. Проблема моментов Гамбургера для мажорантных моментных последовательностей

Решение задачи Гамбургера в o-полном решеточно нормированном пространстве $(Y, |\cdot|, F)$ в случае, когда оно разложимо по Канторовичу, по существу сводится к теореме 5.6.2. Совсем иная ситуация возникает в общем случае, когда разложимость Y не предполагается. Здесь появляются технические трудности, в связи с чем в формулировке теоремы 5.7.1 требуется дополнительное условие (7.2), которое в скалярном случае соответствует известному условию Харди (см. [23]).

5.7.1. Теорема. *Пусть в о-полном решеточно нормированном пространстве Y дана последовательность $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$. Допустим, что последовательность $\{s_k\}_{k=0}^{\infty} \subset F$ удовлетворяет условиям*

$$\Bigl|\sum_{k,l=0}^{n} y_{k+l}\sigma_k\sigma_l\Bigr| \leqslant \sum_{k,l=0}^{n} s_{k+l}\sigma_k\sigma_l \tag{7.1}$$

$$\bigl(\{\sigma_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}, n = 0, 1, 2 \dots\bigr)$$

и при некотором $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, в K-пространстве F сходится положительный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} s_{2k}}{(2k)}. \tag{7.2}$$

Тогда существует единственная борелевская мера $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to Y$ ограниченной векторной вариации такая, что

$$y_k = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^k \mu(d\lambda) \quad (k = 0, 1, 2 \dots). \tag{7.3}$$

$\lhd$ Позитивность последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ следует из (7.1).

Кроме того, по теореме 5.6.2 существует борелевская положительная мера $\nu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to F$, для которой

$$s_k = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^k \nu(d\lambda) \quad (k = 0, 1, 2 \dots).$$

Из сходимости ряда (7.2) следует, что при некотором $a > 0$ функция $e^{a|\lambda|}$ принадлежит $\mathscr{L}_1(\nu)$. Определим оператор $T : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to P$ по формулам

$$Tp = \sum_{k=0}^{n} c_k y_k, \text{ где } p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Из (7.1) видно, что при $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $p \geqslant 0$, выполняется оценка $|Tp| \leqslant Up$, где мажоранта U есть интеграл

$$U f = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\lambda)\nu(d\lambda) \quad (f \in \mathscr{L}_1(\nu)).$$

Пусть $q \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $0 < \beta < a$, и последовательность полиномов $\{p_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся поточечно к функции $\cos(\beta\lambda/2)$, удовлетворяет оценкам $|p_k(\lambda)| \leqslant e^{\beta|\lambda|/2}$ $(k \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{R})$. (Этим условиям удовлетворяет, например, последовательность частичных сумм ряда Тейлора для функции $\cos(\beta\lambda/2)$.) Для любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{R}$ существует $m \in \mathbb{R}$ такое, что

$$|q(\lambda)[p_k(\lambda))^2 - (p_l(\lambda))^2]| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \frac{\lambda^2}{n^2}[(q(\lambda))^2 + 1] \cdot [(p_k(\lambda))^2 + (p_l(\lambda))^2] = r_{k,l}(\lambda)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, $k, l \in \mathbb{N}$, $k \geqslant m$, $l \geqslant m$. Полиномы

$$q_{k,l}(\lambda) = r_{k,l}(\lambda) - q(\lambda) \cdot [(p_k(\lambda))^2 - (p_l(\lambda))^2]$$

неотрицательны на $\mathbb{R}$. Следовательно,

$$\mathbf{|}T(qp_k^2) - T(qp_l^2)\mathbf{|} \leqslant \int (q_{k,l} + r_{k,l})d\nu \leqslant 3 \int r_{k,l} d\nu =$$
$$= 3\,\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}} \nu(d\lambda) + \frac{6}{n}^2 \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^2[(q(\lambda))^2 + 1]e^{\beta|\lambda|}\nu(d\lambda).$$

Это доказывает, что последовательность $\{T(q\,p_k^2)\}_{k=1}^{\infty}$ o-фундаментальна. Предыдущие рассуждения также показывают наличие свойства o-фундаментальности у последовательности $\{T(q\,q_k^2)\}_{k=1}^{\infty}$, где $q_k(\lambda) = p_k(\frac{\pi}{1\beta} - \lambda)$ $(k \in \mathbb{N})$. Теперь для функции

$$g(\lambda) = p(\lambda) + q(\lambda)\cos\beta\lambda + r(\lambda)\sin\beta\lambda \quad (p,\, q,\, r \in \mathscr{P}(\mathbb{R}))$$

полагаем по определению

$$T_1 g = Tp + o\text{-}\lim_k \{T(q(2p_k^2 - 1)) + T(r(2q_k^2 - 1))\}.$$

Таким образом, получим линейный оператор $T_1 : \mathscr{P}_1(\mathbb{R}) \to Y$, определенный на пространстве $\mathscr{P}_1(\mathbb{R})$ всех функций вида

$$g(\lambda) = p(\lambda) + q(\lambda)\cos\beta\lambda + r(\lambda)\sin\beta\lambda \quad (p, q, r \in \mathscr{P}(\mathbb{R})).$$

Пусть функция g, имеющая такое представление, неотрицательна. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$, для которого

$$-\varepsilon - \frac{\lambda^2}{n^2}\{[p(\lambda))^2 + 1] + [(q(\lambda)^2 + 1] \cdot [2(p_k(\lambda))^2 + 1] +$$
$$+[(r(\lambda))^2 + 1] \cdot [2(q_k(\lambda))^2 + 1]\} \leqslant$$
$$\leqslant p(\lambda) + q(\lambda)[2(p_k(\lambda))^2 - 1] + r(\lambda)[2(q_k(\lambda))^2 - 1]$$

при всех $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant m$. Аналогичные рассуждения показывают, что

$$|T_1 g| \leqslant \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\nu(d\lambda) + 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \nu(d\lambda) +$$
$$+\frac{2}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \lambda^2\{(p(\lambda))^2 + 1 + [(q(\lambda))^2 + 1](2e^{\beta|\lambda|} + 1) +$$
$$+ [(r(\lambda))^2 + 1](2e^{\frac{\pi}{2} + \beta|\lambda|} + 1)\}\nu(d\lambda).$$

Отсюда следует оценка

$$|T_1 g| \leqslant \int_{\mathbb{R}} g d\nu \quad (g \in \mathscr{P}_1(\mathbb{R}),\ g \geqslant 0).$$

Зафиксировав $p, q, r, s, t \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, положим

$$g_k(\lambda) = p(\lambda) \ + \ q(\lambda)\cos\beta\lambda \ + \ r(\lambda)\sin\beta\lambda +$$
$$+s(\lambda)\{2[(p_k(\lambda))^2 - 1]\cos\beta\lambda - [2(q_k(\lambda))^2 - 1]\sin\beta\lambda\} +$$
$$+t(\lambda)\{4[(p_k(\lambda))^2 - 2]\sin\beta\lambda\}.$$

Теперь без особого труда можно видеть, что последовательность $\{T_1 g_k\}_{k-1}^{\infty}$ является o-фундаментальной. После чего для функции

$$g(\lambda) = p(\lambda) + q(\lambda)\cos\beta\lambda + r(\lambda)\sin\beta\lambda +$$

$$+s(\lambda)\cos 2\beta\lambda + t(\lambda)\sin 2\beta\lambda$$

определяем

$$T_2 g := o\text{-}\lim_k T_1 g_k.$$

Продолжая индуктивно такие построения, получим линейный оператор $T_\beta : \mathscr{P}_\beta(\mathbb{R}) \to Y$, определенный на пространстве $\mathscr{P}_\beta(\mathbb{R})$ всех функций вида

$$s(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} [c_k(\lambda) \cos k\beta\lambda + d_k(\lambda) \sin k\beta\lambda]$$
$$\big(\{c_k\}_{k=1}^n,\ \{d_k\}_{k=1}^n \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N}\big)$$

и продолжающий оператор T, причем справедлива оценка

$$|T_\beta s| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} s d\nu \quad (s \in \mathscr{P}_\beta(\mathbb{R}),\ s \geqslant 0). \tag{7.4}$$

Рассмотрим теперь при некотором $0 < \beta < a$ последовательность $\beta_n = \beta/2^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Полагаем $T_n = T_{\beta_n}$, $\mathscr{P}_n = \mathscr{P}_{\beta_n}(\mathbb{R})$. Очевидно, что $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Можно доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ оператор T_{n+1} является продолжением оператора T_n.

Доказательство не приводим, так как в нем используется точно такая же техника. Существует единственный линейный оператор $T_\infty : \mathscr{P}_\infty \to Y$, определенный на пространстве $\mathscr{P}_\infty = \bigcup_{n+1} \mathscr{P}_n$, такой, что при любом $n \in \mathbb{N}$ ограничение T_∞ на $\mathscr{P}_n$ совпадает с T_n. Рассмотрим в $\mathscr{P}_\infty$ линейное подпространство $\mathscr{P}_0$ всех тригонометрических полиномов вида

$$s(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} \left\{ c_k \cos\left(\frac{k\lambda}{2^{n-1}}\right) + d_k \sin\left(\frac{k\lambda}{2^{n-1}}\right) \right\}$$

$$\big(\{c_k\}_{k=1}^m,\ \{d_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{N}\big).$$

Ограничение T_∞ на $\mathscr{P}_0$ обозначим через T_0. По равномерной непрерывности оператор T_0 единственным образом продолжается до линейного оператора $\overline{T}_0 : \overline{\mathscr{P}}_0 \to Y$ на равномерное замыкание $\overline{\mathscr{P}}_0$ пространства $\mathscr{P}_0$. Очевидно, $\overline{\mathscr{P}}_0$ содержит подпространство $\mathscr{P}_*$ всех непрерывных периодических функций, периодами которых являются числа $2^n\pi/\beta$ $(n \in \mathbb{N})$. Основной результат всех предыдущих длинных построений состоит в том, что $\mathscr{P}_*$ является векторной решеткой функций. Пусть T_* — ограничение $\overline{T}_0$ на пространство $\mathscr{P}_*$.

Из оценки (7.4) сразу следует, что оператор T_* мажорируемый. Его секвенциальная o-непрерывность сразу следует из секвенциальной o-непрерывности мажоранты U. Существует единственная борелевская мера $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to Y$ такая, что

$$T_* s = \int\limits_{\mathbb{R}} s d\mu \quad (s \in \mathscr{P}_*).$$

При этом векторная вариация $|\mu|$ не превосходит ν. Покажем, что для μ справедливы равенства (7.3). Для любого счетного $k \in \mathbb{N}$ и любого натурального n полагаем

$$s_{k,n}(\lambda) = \left(\lambda - \frac{\pi \cdot m \cdot 2^n}{\beta}\right)^k,$$

если

$$\left|\lambda - \frac{\pi \cdot 2^{n-1}}{\beta}\right| \leqslant \frac{\pi \cdot 2^{n-1}}{\beta} \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Для нечетного $k \in \mathbb{N}$ и натурального n положим

$$s_{k,n}(\lambda) = (-1)^m \left(\lambda - \frac{\pi \cdot m \cdot 2^n}{\beta}\right)^k$$

при λ, удовлетворяющих предыдущему неравенству. Все функции $s_{k,n}$ $(k, n \in \mathbb{N})$ непрерывные периодические с периодом $\pi \cdot 2^n/\beta$. Для любых $k, n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический полином $t_{k,n} \in \mathscr{P}_0$, для которого

$$|s_{k,n}(\lambda) - t_{k,n}(\lambda)| < \varepsilon \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Это значит, что

$$|\lambda^k - t_{k,n}(\lambda)| \leqslant \varepsilon + \frac{\lambda^2 \beta^2}{\pi^2 \cdot 2^{2n}} \ (\lambda^{2n} + 1).$$

Отсюда следует неравенство

$$|T_\infty(f_k) - T_\infty(t_{k,n})| \leqslant 3\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}} \nu(d\lambda) +$$

$$+\frac{3\beta^2}{\pi^2\cdot 2^{2n-2}}\int\limits_{\mathbb{R}}\lambda^2(\lambda^2k+1)\nu(d\lambda),$$

где $f_k(\lambda)=\lambda^k$ $(\lambda\in\mathbb{R})$. Так как $T_\infty(f_k)=y_k$, то

$$\begin{gathered}|y_k-\int\lambda^k\mu(d\lambda)|\leqslant\\ \leqslant|y_k-T_\infty(t_{k,n})|+\left|\int(t_{k,n}-f_k)d\nu\right|\leqslant\\ \leqslant 4\varepsilon U(1)+\frac{4\beta^2}{\pi^2\cdot 2^{2n}}\int\limits_{\mathbb{R}}\lambda^2(\lambda^{2k}+1)\nu(d\lambda).\end{gathered}$$

Из произвольности $\varepsilon>0$ и $n\in\mathbb{N}$ сразу следует формула (7.3). Доказательство единственности меры μ во многих деталях повторяет предыдущие построения, поэтому его опускаем. $\rhd$

Примерами решеточно нормированных пространств с неразложимой нормой являются счетно-нормированные пространства, а также произвольные локально-выпуклые векторные пространства. В качестве нормы векторов рассматриваются числовые семейства их полунорм. В этом случае o-сходимость будет эквивалентна топологической сходимости ограниченных направленностей. Еще одним примером может служить частично упорядоченное векторное пространство, имеющее сильную единицу. Здесь в качестве нормирующего K-пространства выступает его собственное дедекиндово пополнение.

5.7.2. *Теорема.* *Пусть Y — монотонно полное частично упорядоченное векторное пространство. Пусть дана позитивная последовательность $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}\subset Y$, для которой при некотором $a>0$ сходится ряд (7.2). Тогда существует единственная положительная борелевская мера $\nu:\mathscr{B}(\mathbb{R})\to F$ такая, что*

$$s_k=\int\limits_{\mathbb{R}}\lambda^k\nu(d\lambda)\quad(k=0,1,2\dots).$$

$\lhd$ Пусть F — дедекиндово пополнение порядкового идеала $Y(s)$, где s является суммой ряда (7.2). Хорошо известно, что F является

K-пространством. Существует единственная борелевская мера $\nu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to F$, решающая эту проблему моментов (здесь применяется теорема 5.6.2 в случае $Y = F$). Наша цель — показать, что $\nu[\mathscr{B}(\mathbb{R})] \subset Y$. По условию, для любого $s \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ будет

$$\int\limits_{\mathbb{R}} s(\lambda)\nu(d\lambda) \in Y.$$

Покажем, что это включение сохраняется для любого тригонометрического полинома $s \in \mathscr{P}_0$. Убедимся в этом на примере функции $\sin \beta\lambda$ $(0 < \beta < a)$. Ряд Тейлора для $\cos(\beta\lambda/2)$ есть разность двух положительных рядов. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \sin \beta\lambda\nu(d\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left\{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta\lambda}{2}\right) - 1\right\}\nu(d\lambda) \in Y.$$

Так как любую непрерывную периодическую на $\mathbb{R}$ функцию можно представить монотонным равномерным пределом тригонометрических полиномов, требуемое включение сохраняется и для этого класса функций. Теперь, пользуясь только монотонными пределами, легко можно получить любую характеристическую функцию χ_B $(B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Поэтому $\nu(B) \in Y$ $(B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. $\rhd$

Известно, что пространство всех ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве относительно естественного упорядочения монотонно полно. Поэтому мы получаем (см. [40])

5.7.3. *Следствие.* *Проблема моментов Гамбургера разрешима единственным образом для позитивной последовательности ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, для которой сходится ряд (7.2) (при некотором $a > 0$) в слабой операторной топологии.*

5.8. Мажорируемые отображения

Пусть F — расширенное K-пространство с фиксированной порядковой единицей $\mathbb{1}$. На F определим порядковое умножение, относительно которого $\mathbb{1}$ становится кольцевой единицей (см. [8]). Комплексификацию пространства F обозначаем через $F_{\mathbb{C}}$. Пусть Y —

векторное пространство над $\mathbb{C}$. *Векторной нормой* (F-нормой) называется отображение $|\cdot| : Y \to F$, удовлетворяющее аксиомам $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, $|cx| = |c||x|$ ($x, y \in Y$, $c \in \mathbb{C}$). Тройку $(Y, |\cdot|, F)$ называем *комплексным* решеточно нормированным пространством (см. [9]). Пространство $F_{\mathbb{C}}$ считаем решеточно нормированным с нормой $|a + ib| = (a^2 + b^2)^{1/2}$ ($a, b \in F$). Кроме этого, обозначаем $C_0(\mathfrak{X}, \mathbb{C}) := C_0(\mathfrak{X})_{\mathbb{C}}$, $C_{00}(\mathfrak{X}, \mathbb{C}) := C_{00}(\mathfrak{X})_{\mathbb{C}}$.

5.8.1. Замечание. Можно было бы нормировать пространство Y произвольной архимедовой векторной решеткой, но такая решетка естественным образом вкладывается в расширенное K-пространство.

Пусть G — произвольная группа.

5.8.2. Определение. Отображение $\psi : G \to F_{\mathbb{C}}$ называется *положительно определенным*, если все элементы вида

$$\sum_{j,k=1}^{n} \overline{c}_j c_k \psi\big(g_j^{-1} g_k\big)$$

принадлежат F^+ для любых $n \in \mathbb{N}$, $g_1, \dots, g_n \in G$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.

5.8.3. Определение. Отображение $\varphi : G \to Y$ называется *мажорируемым*, если существует положительно определенное отображение $\psi : G \to F_{\mathbb{C}}$ такое, что

$$\Bigg|\sum_{j,k=1}^{n} \overline{c}_j c_k \varphi\big(g_j^{-1} g_k\big)\Bigg| \leqslant \sum_{j,k=1}^{n} \overline{c}_j c_k \psi\big(g_j^{-1} g_k\big)$$

для любых $n \in \mathbb{N}$, $g_1, \dots, g_n \in G$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. В этом случае говорим, что ψ является мажорантой для φ.

5.8.4. *Теорема.* *Пусть отображение $\varphi : G \to Y$ имеет мажоранту $\psi : G \to F_{\mathbb{C}}$. Справедливо следующее неравенство:*

$$\Bigg|\sum_{j,k=1}^{n} \overline{c}_j d_k \varphi\big(g_j^{-1} g_k\big)\Bigg|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4\Bigg(\sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j} c_k \psi\big(g_j^{-1} g_k\big)\Bigg)\Bigg(\sum_{j,k=1}^{n} \overline{d_j} d_k \psi\big(g_j^{-1} g_k\big)\Bigg)$$

при любых $n \in \mathbb{N}$, $g_1, \ldots, g_n \in G$, $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{C}$. *Если* G — *неабелева локально-компактная группа, то существуют отображение* $\varphi : G \to \mathbb{C}$ *и его непрерывная мажоранта* $\psi : G \to \mathbb{C}$ *такие, что для любого* $\varepsilon > 0$ *имеет место обратное неравенство*

$$\Big| \sum_{j,k=1}^{n} \overline{c}_j d_k \varphi\big(g_j^{-1} g_k\big) \Big|^2 >$$
$$> (4 - \varepsilon) \Big(\sum_{j,k=1}^{n} \overline{c}_j c_k \psi\big(g_j^{-1} g_k\big) \Big) \Big(\sum_{j,k=1}^{n} \overline{d}_j d_k \psi\big(g_j^{-1} g_k\big) \Big)$$

при некоторых $n \in \mathbb{N}$, $g_1, \ldots, g_n \in G$, $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{C}$.

$\lhd$ Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и элементы $g_1, \ldots, g_n \in G$. Рассмотрим полуторалинейную форму $\Phi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to Y$, порождаемую отображением φ по следующему правилу:

$$\Phi(c, d) = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{c}_j d_k \varphi\big(g_j^{-1} g_k\big),$$

где $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$, $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{C}^n$. Аналогичным образом отображение $\psi : G \to F_{\mathbb{C}}$ порождает полуторалинейную форму $\Psi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to F_{\mathbb{C}}$. Из определения мажорируемости следует неравенство $\boldsymbol{|}\Phi(c, c)\boldsymbol{|} \leqslant \Psi(c, c)$ $(c \in \mathbb{C}^n)$. Отсюда для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ вытекает, что

$$\boldsymbol{|}\Phi(c, c) \pm (\alpha\Phi(c, d) + \overline{\alpha}\Phi(d, c) + |\alpha|^2\Phi(d, d)\boldsymbol{|} \leqslant$$
$$\leqslant \Psi(c, c) \pm (\alpha\Psi(c, d) + \overline{\alpha}\Psi(d, c)) + |\alpha|^2\Psi(d, d).$$

Сложив эти неравенства со знаком плюс и знаком минус, будем иметь

$$\boldsymbol{|}\alpha\Phi(c, d) + \overline{\alpha}\Phi(d, c)\boldsymbol{|} \leqslant \Psi(c, c) + |\alpha|^2\Psi(d, d).$$

Полагая сначала $c = t$, затем $c = it$ $(t \in \mathbb{R})$ и снова складывая полученные неравенства, выводим, что

$$t\boldsymbol{|}\Phi(c, d)\boldsymbol{|} \leqslant \Psi(c, c) + t^2\Psi(d, d).$$

Решая в F это неравенство относительно t, получаем

$$|\Phi(c,d)|^2 - 4\Psi(c,c)\Psi(d,d) \leqslant 0 \quad (c,d \in \mathbb{C}^n).$$

В других обозначениях это и есть требуемое соотношение.

Пусть теперь G — неабелева локально-компактная группа. Докажем неулучшаемость константы 4 в последнем неравенстве. Возьмем два некоммутирующих элемента $a, b \in G$, а также симметричную компактную окрестность единицы U такую, что $ab \notin Uba$. В G существует σ-компактная открыто-замкнутая подгруппа G_1, содержащая окрестность U и элементы a, b (см. [41, теорема 5.14]). В G_1 существует компактная нормальная подгруппа H_1 такая, что $H_1 \subseteq U$ и фактор-группа $\widehat{G}_1 = G_1/H_1$ метризуема и сепарабельна (см. [41, теорема 8.7]). Обозначим через p канонический гомоморфизм G_1 на $\widehat{G}_1$. Рассмотрим гильбертово пространство $L^2(\widehat{G}_1, \lambda)$, где λ — левая мера Хаара группы $\widehat{G}_1$. Левое регулярное представление π_r, действующее в $L^2(\widehat{G}_1, \lambda)$, разлагается в прямой интеграл по неприводимым унитарным представлениям относительно некоторого измеримого пространства (Ω, Σ, μ), т. е.

$$\pi_r = \int_{\Omega}^{\oplus} \pi_\omega \mu(d\omega)$$

(см. [42, гл. 8, теорема 3]). Так как группа $\widehat{G}_1$ неабелева, то хотя бы для одного $\omega \in \Omega$ размерность представления π_ω будет больше единицы. Пусть такое представление π_ω действует в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_\omega$. Рассмотрим алгебру Неймана $\mathscr{A}$, порожденную множеством операторов $\pi_\omega(\widehat{G}_1)$. Из неприводимости следует, что на самом деле $\mathscr{A}$ — фактор Неймана.

Теперь установим следующий факт: существуют два ортонормированных вектора $e_1, e_2 \in \mathscr{H}_\omega$ и два оператора $Q, P \in \mathscr{A}$ такие, что

$$Qe_1 = e_2, \quad Qe_2 = 0, \quad Pe_1 = 0, \quad Pe_2 = e_2.$$

Возможны следующие случаи.

(1) $\mathscr{A}$ — фактор типа I. Так как $\dim \mathscr{H}_\omega > 1$, то существуют два минимальных ненулевых подпространства $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, которые ортогональны друг другу и присоединены к $\mathscr{A}$ (см. [42]). Они эквивалентны относительно $\mathscr{A}$, поэтому существует частичная изометрия

Q подпространства $\mathscr{H}_1$ на $\mathscr{H}_2$. Теперь возьмем любой единичный вектор $e_1 \in \mathscr{H}_1$ и положим $e_2 = Qe_1$. В качестве P возьмем ортогональный проектор на подпространство $\mathscr{H}_2$.

(2) $\mathscr{A}$ — фактор типа II либо фактор типа III (такие ситуации имеют место в случае «диких» групп). В этих случаях также можно найти два ненулевых ортогональных подпространства $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, присоединенных к $\mathscr{A}$ и имеющих одинаковую относительную размерность. Далее, выбираем e_1, e_2, Q, P точно так же, как в случае 1.

Операторы Q, P принадлежат замыканию линейной оболочки множества $\pi_\omega(\widehat{G}_1)$ в сильной операторной топологии. Следовательно, для любого $\delta > 0$ найдутся элементы $g_1, \ldots, g_n \in G$, $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\left\| Qe_1 - \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_\omega(g_j) e_1 \right\| < \delta, \quad \left\| \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_\omega(g_j) e_2 \right\| < \delta,$$
$$\left\| Pe_2 - \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_\omega(g_j) e_2 \right\| < \delta, \quad \left\| \sum_{j=1}^{n} d_j \pi_\omega(g_j) e_1 \right\| < \delta.$$

Положим $\widehat{\varphi}(g) = (\pi_\omega(g)e_1, e_2)$ $(g \in \widehat{G}_1)$. Из соотношений

$$\begin{aligned}
\Big| \sum_{j,k=1}^{n} \bar{c}_j c_k \varphi\big(g_j^{-1} g_k\big) \Big| &= \Big| \Big(\sum_{j,k=1}^{n} \bar{c}_j c_k \pi_\omega\big(g_j^{-1}\big) \pi_\omega(g_k) e_1, e_2 \Big) \Big| = \\
&= \Big| \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \pi_\omega(g_k) e_1, \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_\omega(g_j) e_2 \Big) \Big| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \bar{c}_j c_k [(\pi_\omega(g_k)e_1, \pi_\omega(g_j)e_1) + (\pi_\omega(g_k)e_2, \pi_\omega(g_j)e_2)]
\end{aligned}$$

следует, что функция

$$\widehat{\psi}(g) = \frac{1}{2}[(\pi_\omega(g)e_1, e_1) + (\pi_\omega(g)e_2, e_2)] \quad (g \in \widehat{G}_1)$$

является мажорантой для $\widehat{\varphi}$. Из неравенств

$$\Big|\sum_{j,k=1}^{n}\overline{c}_j d_k\big(\pi_\omega\big(g_j^{-1}g_k\big)e_1,e_2\big)\Big| \geqslant (Qe_1,Pe_2)-2\delta-\delta^2,$$

$$\Big|\sum_{j,k=1}^{n}\overline{c}_j c_k\widehat{\psi}\big(g_j^{-1}g_k\big)\Big| \leqslant \frac{1}{2}[(Qe_1,Qe_1)+2\delta+\delta^2],$$

$$\Big|\sum_{j,k=1}^{n}\overline{d}_j d_k\widehat{\psi}\big(g_j^{-1}g_k\big)\Big| \leqslant \frac{1}{2}[(Pe_2,Pe_2)+2\delta+2\delta^2]$$

сразу следует утверждение теоремы для метризуемой сепарабельной группы $\widehat{G}_1$, если взять δ достаточно малым. Чтобы убедиться в справедливости теоремы для исходной группы G, достаточно положить

$$\varphi(g)=\begin{cases}\widehat{\varphi}\circ p(g) & (g\in G_1),\\ 0 & (g\in G\setminus G_1),\end{cases}\qquad \psi(g)=\begin{cases}\widehat{\psi}\circ p(g) & (g\in G_1),\\ 0 & (g\in G\setminus G_1).\ \rhd\end{cases}$$

Пользуясь леммой Шура, легко получить

5.8.5. *Следствие.* *Если группа G имеет конечномерное неприводимое унитарное представление размерности больше единицы (например, если G — неабелева локально-компактная почти периодическая группа, см. [43]), то существуют непрерывная функция $\varphi : G \to \mathbb{C}$ и ее непрерывная мажоранта $\psi : G \to \mathbb{C}$ такие, что*

$$\left(\sum_{j,k=1}^{n}\overline{c}_j d_k\varphi\big(g_j^{-1}g_k\big)\right) = \\ = 4\left(\sum_{j,k=1}^{n}\overline{c}_j c_k\psi\big(g_j^{-1}g_k\big)\right)\left(\sum_{j,k=1}^{n}\overline{d}_j d_k\psi\big(g_j^{-1}g_k\big)\right) > 0$$

при некоторых $n\in\mathbb{N}$, $g_1,\dots,g_n\in G$, $c_1,\dots,c_n,d_1,\dots,d_n\in\mathbb{C}$.

Для абелевых групп ситуация совершенно другая. Именно, четверку в последнем неравенстве можно заменить единицей, и в результате получится мажорантный аналог неравенства Коши — Буняковского — Шварца.

5.8.6. *Теорема.* *Пусть G — абелева группа и отображение $\varphi : G \to Y$ имеет мажоранту $\psi : G \to F_{\mathbb{C}}$. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $g_1, \dots, g_n \in G$, $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{C}$ справедливо неравенство*

$$\Bigl| \sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j} d_k \varphi(g_k - g_j) \Bigr|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \Bigl(\sum_{j,k=1}^{n} \overline{c_j} c_k \psi(g_k - g_j) \Bigr) \Bigl(\sum_{j,k=1}^{n} \overline{d_j} d_k \psi(g_k - g_j) \Bigr).$$

$\lhd$ Фиксируем элементы $g_1, \dots, g_n \in G$ и рассмотрим в G подгруппу H, порожденную этими элементами. Пусть p — гомоморфизм свободной группы $\mathbb{Z}^n$ на H. Очевидно, что отображение $\psi \circ p$ является мажорантой для $\varphi \circ p$. Если теорема будет доказана для отображений $\varphi \circ p$ и $\psi \circ p$, то для исходных отображений φ и ψ она получается в качестве следствия. Поэтому без ограничения общности можно с самого начала полагать, что $G = \mathbb{Z}^n$.

Далее, можно решить тригонометрическую проблему моментов для отображений φ и ψ на компактной группе, двойственной к $\mathbb{Z}^n$. Но на этом пути потребуется порядковая полнота пространства Y. Поэтому мы приведем здесь другое доказательство.

Обозначим через $\mathscr{P}^n$ пространство всех тригонометрических полиномов вида

$$p(x) = \sum_{k=1}^{l} c_k e^{i\langle g_k, x\rangle},$$

где $c_1, \dots, c_l \in \mathbb{C}$, $g_1, \dots, g_l \in \mathbb{Z}^n$ и $\langle \cdot \rangle$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Степень такого полинома равна

$$\deg p = \max_{1 \leqslant k \leqslant l} \sum_{j=1}^{n} |g_k(j)|.$$

Рассмотрим n-кратное ядро Фейера

$$\Delta_m^{(n)}(x) = \frac{1}{[2m(m+1)]^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin^2(m x_j/2)}{\sin^2(x_j/2)}.$$

Для $p \in \mathscr{P}^n$ положим

$$p_{(m)}(x) = \sum_{k_1=-(m+1)}^{m} \cdots \sum_{k_n=-(m+1)}^{m} p\left(\frac{\pi k}{m+1}\right) \Delta_m^{(n)} \left(x - \frac{\pi k}{m+1}\right),$$

здесь $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, m нечетное. Легко видеть, что если

$$p(x) = \sum_{k=1} c_k e^{i\langle g_k, x\rangle},$$

то при $m > \deg p$ справедливо равенство

$$p_{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{l} c_k e^{i\langle g_k, x\rangle} \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{|g_k(j)|}{m}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

т. е. $\deg p_{(m)} = \deg p$. Если $p \in \mathscr{P}^n$ имеет вышеприведенное представление, то полагаем

$$T_\varphi(p) = \sum_{k=1}^{l} c_k \varphi(g_k), \quad T_\psi(p) = \sum_{k=1}^{l} c_k \psi(g_k).$$

Таким образом, определены два линейных оператора $T_\varphi : \mathscr{P}^n \to Y$ и $T_\psi : \mathscr{P}^n \to F_{\mathbb{C}}$. Имеем

$$|T_\varphi(p - p_{(m)})| \leqslant \sum_{k=1}^{l} |c_k| \left[1 - \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{|g_k(j)|}{m}\right)\right] |\varphi(g_k)|.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует нечетное m такое, что

$$|T_\varphi(p - p_{(m)})| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{l} |\varphi(g_k)|. \tag{8.1}$$

Аналогичное неравенство справедливо для оператора T_ψ. Так как $\Delta_m^{(n)}$ является квадратом тригонометрического полинома, из определения мажорируемости следует неравенство

$$\left|T_\varphi\big(\Delta_m^{(n)}\big)\right| \leqslant T_\psi\big(\Delta_m^{(n)}\big).$$

Рассмотрим еще один тригонометрический полином:

$$q(x)=\sum_{k=1}^{l} d_k e^{i\langle g_k,x\rangle}.$$

Имеем следующие неравенства:

$$\begin{aligned}|T_\varphi(\overline{p}q)_{(m)}|^2 \leqslant \left|\sum_{k=(k_1,\dots,k_n)}\left|\overline{p}\left(\frac{\pi k}{m+1}\right)q\left(\frac{\pi k}{m+1}\right)\right|T_\psi\big(\Delta_m^{(n)}\big)\right|^2 \leqslant\\ \leqslant\left(\sum_{k=(k_1,\dots,k_n)}\left|p\left(\frac{\pi k}{m+1}\right)\right|^2 T_\psi\big(\Delta_m^{(n)}\big)\right)\times\\ \times\left(\sum_{k=(k_1,\dots,k_n)}\left|q\left(\frac{\pi k}{m+1}\right)\right|^2 T_\psi\big(\Delta_m^{(n)}\big)\right)=T_\psi\big(|p|^2_{(m)}\big)\cdot T_\psi\big(|q|^2_{(m)}\big).\end{aligned}\tag{8.2}$$

Так как для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать m такое, что неравенство (8.1) будет справедливо, если в нем заменить p на $\overline{p}q$, $|p|^2$, $|q|^2$, то после перехода в (8.2) к (r)-пределу получим требуемое неравенство

$$|T_\varphi(\overline{p}q)|^2\leqslant T_\psi(|p|^2)\cdot T_\psi(|q|^2).\ \triangleright$$

5.8.7. Замечание. Теорема 5.8.6 будет справедливой также для мажорируемых отображений, определенных на блок-алгебре Крейна.

5.8.8. *Следствие.* *Если $\varphi: G\to Y$ имеет o-непрерывную в нуле мажоранту $\psi: G\to F_{\mathbb{C}}$, то φ является порядково ограниченным и равномерно o-непрерывным отображением.*

$\triangleleft$ Второе неравенство из теоремы 5.8.6 при $n=1$ и $c_1=1$ влечет $|\varphi(g)|\leqslant 2\psi(0)$ $(g\in G)$. То же неравенство при $n=2$, $c_1=-c_2=1$ дает оценку

$$|\varphi(g_1)-\varphi(g_2)|^2\leqslant 8\psi(0)(\psi(0)-\operatorname{Re}\psi(g_1-g_2))\quad(g_1,g_2\in G),$$

из которой сразу следует равномерная o-непрерывность φ. $\triangleright$

Пусть $\lambda:\mathscr{B}(G)\to\overline{\mathbb{R}}^+$ — положительная мера, конечная на компактах из G.

5.8.9. *Теорема.* *Если отображение $\varphi : G \to Y$ допускает мажоранту $\psi : G \to F_{\mathbb{C}}$, являющуюся o-непрерывной в нуле, то имеют место интегральные неравенства*

$$\Bigl|\int\limits_{G_1\times G_2} \varphi(g-h)u(g)\overline{v(h)}\lambda(dg)\lambda(dh)\Bigr|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \Bigl(\int\limits_{G\times G} \psi(g-h)u(g)\overline{u(h)}\lambda(dg)\lambda(dh)\Bigr)\times$$
$$\times\Bigl(\int\limits_{G\times G} \psi(g-h)v(g)\overline{v(h)}\lambda(dg)\lambda(dh)\Bigr),$$

$$\Bigl|\int\limits_{G} \varphi(g)u(g)\lambda(dg)\Bigr|^2 \leqslant \psi(0)\Bigl(\int\limits_{G\times G} \psi(g-h)u(g)\overline{u(h)}\lambda(dg)\lambda(dh)\Bigr).$$

$\lhd$ Прежде всего, заметим, что отображения φ и ψ равномерно o-непрерывны. Поэтому все интегралы здесь имеют смысл (они понимаются как интегралы по любому компакту, содержащему носители функций u и v).

Для любой окрестности $U \in \mathscr{U}_0$ положим

$$h_U = \sup\{8\psi(0)(\psi(0)-\psi(g_1-g_2)) : g_1, g_2 \in G,\ g_1 - g_2 \in U\}.$$

Пусть $V \in \mathscr{U}_0$ — симметричная окрестность такая, что $V + V \subseteq U$. Для компактного множества $K = (\operatorname{supp} u)\cup(\operatorname{supp} v)$ рассмотрим разбиение единицы $f_1, \dots, f_n \in C_{00}(G)^+$ такое, что $\operatorname{supp} f_k - \operatorname{supp} f_k \subseteq V$ при любых $k = 1, \dots, n$. Выберем по элементу g_k из $\operatorname{supp} f_k$ ($k = 1, \dots, n$). Если обозначить

$$c_k = \int\limits_G u(g)f_k(g)\lambda(dg), \quad d_k = \int\limits_G v(g)f_k(g)\lambda(dg),$$

то можно написать следующее неравенство:

$$\Bigl|\int\limits_{G_1\times G_2} \varphi(g-h)u(g)\overline{v(h)}\lambda(dg)\lambda(dh)\Bigr| \leqslant$$
$$\leqslant \Bigl|\sum_{j,k=1}^{n} \varphi(g_j-g_k)c_j\overline{d}_k\Bigr| + h_U^{1/2}\|u\|_1\|v\|_1,$$

где L_1-норма $\|\cdot\|_1$ определяется относительно меры λ. Аналогичная оценка справедлива для отображения ψ. Поэтому из первого неравенства теоремы 5.8.6 получается оценка

$$\Bigg|\int\limits_{G\times G}\varphi(g-h)u(g)\overline{v(h)}\lambda(dg)\lambda(dh)\Bigg|^2\leqslant$$
$$\leqslant\Bigg(\int\limits_{G\times G}\psi(g-h)u(g)\overline{u(h)}\lambda(dg)\lambda(dh)\Bigg)\times$$
$$\times\Bigg(\int\limits_{G\times G}\psi(g-h)v(g)\overline{v(h)}\lambda(dg)\lambda(dh)\Bigg)+$$
$$+(\|u\|_1+\|v\|_1)\big(2\psi(0)h_U^{1/2}+h_U\big).$$

Так как направленность $\{h_U : U\in\mathscr{U}_0\}$ порядково убывает к нулю, отсюда в пределе по $U\in\mathscr{U}_0$ получается первое из требуемых неравенств. Второе доказывается точно так же. $\rhd$

5.9. Теорема Бохнера для мажорируемых отображений

5.9.1. Пусть G — локально-компактная абелева группа, $\mathfrak{X}$ — группа, двойственная к G.

Теорема. *Для отображения $\varphi : G\to Y$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *φ имеет o-непрерывную в нуле мажоранту,*

(2) *существует единственная мера $\mu\in\operatorname{qca}(\mathfrak{X},Y)$ такая, что*
$$\varphi(g)=\int\limits_{\mathfrak{X}}\chi(g)\mu(d\chi)\quad(g\in G).$$

$\lhd$ (2)$\to$(1): Пусть отображение $\varphi : G\to Y$ представляется мерой $\mu\in\operatorname{qca}(\mathfrak{X},Y)$, указанной в (2). Положим

$$\psi(g)=\int\limits_{\mathfrak{X}}\chi(g)|\mu|(d\chi)\quad(g\in G).$$

Отображение ψ является мажорантой для φ, это проверяется с помощью стандартных интегральных неравенств (см. [41]). Докажем, что ψ o-непрерывно в нуле. Пусть $\varepsilon > 0$. Для любого компакта $K \in \mathscr{K}(\mathfrak{X})$ существует окрестность нуля U в группе G такая, что $|1-\chi(g)| < \varepsilon$ $(\chi \in K,\ g \in U)$. Значит, при $g \in U$ имеет место оценка

$$|\psi(0)-\psi(g)| \leqslant \varepsilon\psi(0) + 2|\mu|(\mathfrak{X}\setminus K).$$

Из этой оценки и квазирадоновости ν следует равенство

$$\inf_{U\in\mathscr{U}_0} \sup\{|\psi(0)-\psi(g)| : g \in U\} = 0.$$

(1)$\to$(2): Пусть $\psi : G \to F_{\mathbb{C}}$ является o-непрерывной в нуле мажорантой для φ. В дальнейшем $\lambda : \mathscr{B}(G) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ обозначает инвариантную меру Хаара на группе G. Для $u, v \in C_{00}(G,\mathbb{C})$ свертка $u * v$ относительно меры Хаара λ тоже принадлежит $C_{00}(G,\mathbb{C})$. Для любых $u, v \in C_{00}(G,\mathbb{C})$ имеет место равенство

$$\int\limits_{G\times G} \varphi(g-h)u(g)\overline{v(h)}\lambda(dg)\lambda(dh) = \int\limits_{G} \varphi(g)(u*\widetilde{v})(g)\lambda(dg),$$

где $\widetilde{v}(g) = \overline{v(-g)}$ $(g \in G)$ — операция инволюции. Это легко выводится из возможности менять порядок интегрирования (теорема 5.4.6) и из формулы

$$\int\limits_{G} \varphi(g-h)\overline{v(h)}\lambda(dh) = \int\limits_{G} \varphi(h)\overline{v(g-h)}\lambda(dh),$$

справедливой в силу инвариантности λ относительно сдвигов. Полагая $Y = F_{\mathbb{C}}$ и $\varphi = \psi$, получим такое же равенство для отображения ψ. Рассмотрим два линейных оператора

$$\Phi(u) = \int\limits_{G} \varphi(g)u(g)\lambda(dg), \quad \Psi(u) = \int\limits_{G} \psi(g)u(g)\lambda(dg) \quad (u \in C_{00}(G,\mathbb{C})).$$

Из только что указанных равенств и теоремы 5.8.9 следуют оценки

$$|\Phi(u*\widetilde{u})| \leqslant \Psi(u*\widetilde{u}), \quad |\Phi(u)|^2 \leqslant 4\psi(0)\Psi(u*\widetilde{u}) \quad (u \in C_{00}(G,\mathbb{C})).$$

Рассмотрим Фурье-образы этих операторов Φ, Ψ: $\widehat{\Phi}(f) := \Phi(\widehat{f})$, $\widehat{\Psi}(f) = \Psi(\widehat{f})$ $(\widehat{f} \in C_{00}(G, \mathbb{C}))$. Здесь $\widehat{f}$ означает преобразование Фурье на двойственной группе $\mathfrak{X}$ от функции $f \in C_0(\mathfrak{X}, \mathbb{C})$. Операторы $\widehat{\Phi}$ и $\widehat{\Psi}$ определены на подпространстве $\mathscr{L} \subset C_0(\mathfrak{X}, \mathbb{C})$, которое является Фурье-прообразом пространства $C_{00}(G, \mathbb{C})$. Поэтому $\mathscr{L}$ равномерно плотно в $C_0(\mathfrak{X}, \mathbb{C})$. Из предыдущих неравенств получаем

$$|\widehat{\Phi}(|f|^2)| \leqslant \Psi(|f|^2), \quad |\widehat{\Phi}(f)|^2 \leqslant 4\psi(0)\widehat{\Psi}(|f|^2) \quad (f \in \mathscr{L}).$$

Доказательство теперь можно завершить по стандартной схеме. Так же, как и в [41, следствие 21.21], при любых $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{L}$ выводятся оценки

$$|\widehat{\Phi}(f)| \leqslant 4\psi(0)\|(|f|^{2^n})^\wedge\|_1^{2^{-n}}, \quad |\widehat{\Psi}(f)| \leqslant 4\psi(0)\|(|f|^{2^n})^\wedge\|_1^{2^{-n}}$$

(здесь $\|\cdot\|_1$ означает L^1-норму по мере Хаара λ). Переходя в этих оценках к (r)-пределу при $n \to \infty$ и пользуясь известной теоремой Гельфанда, будем иметь

$$|\widehat{\Phi}(f)| \leqslant 4\psi(0)\|f\|_\infty, \quad |\widehat{\Psi}(f)| \leqslant 4\psi(0)\|f\|_\infty \quad (f \in \mathscr{L}).$$

Следовательно, по (r)-непрерывности (с регулятором $\psi(0)$) операторы $\widehat{\Phi}$ и $\widehat{\Psi}$ продолжаются на все пространство $C_0(\mathfrak{X}, \mathbb{C})$. Будем сохранять для этих продолжений прежние обозначения. Модифицируя доказательство теоремы 33.2 из [41], легко получить неравенство

$$|\widehat{\Phi}(f)| \leqslant \widehat{\Psi}(f) \quad (f \in C_0(\mathfrak{X})^+).$$

Теперь можно воспользоваться теоремой 5.3.7, согласно которой существует единственная мера $\mu \in \mathrm{qca}(\mathfrak{X}, Y)$ такая, что

$$\widehat{\Phi}(f) = \int\limits_{\mathfrak{X}} f(\chi)\mu(d\chi) \quad (f \in C_0(\mathfrak{X})).$$

Если $f \in \mathscr{L}$, то $\widehat{f} = u$ при некотором $u \in C_{00}(G, \mathbb{C})$. Учитывая полученное интегральное представление $\widehat{\Phi}$, напишем цепочку равенств

$$\Phi(\widehat{f}) = \int\limits_G u(g)\varphi(g)\lambda(dg) = \widehat{\Psi}(f) = \int\limits_{\mathfrak{X}} f(\chi)\mu(d\chi) =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{X}} \Big(\int\limits_{G} \chi(g) u(g) \lambda(dg) \Big) \mu(d\chi) =$$

$$= o\text{-}\lim_{K \in \mathscr{K}(\mathfrak{X})} \int\limits_{K} \Big(\int\limits_{G} \chi(g) u(g) \lambda(dg) \Big) \mu(d\chi) =$$

$$= o\text{-}\lim_{K \in \mathscr{K}(\mathfrak{X})} \int\limits_{G} \Big(\int\limits_{K} \chi(g) \mu(d\chi) \Big) u(g) \lambda(dg).$$

Последнее равенство справедливо в силу векторной теоремы Фубини (теорема 5.4.5). Итак,

$$\int\limits_{G} u(g)\varphi(g)\lambda(dg) = \int\limits_{G} \Big(\int\limits_{\mathfrak{X}} \chi(g)\mu(d\chi) \Big) u(g)\lambda(dg)$$

для всех $u \in C_{00}(G, \mathbb{C})$. Обозначим через ρ отображение из G в Y, задаваемое формулой

$$\rho(g) = \varphi(g) - \int\limits_{\mathfrak{X}} \chi(g)\mu(d\chi) \quad (g \in G).$$

Из определения видно, что ρ является равномерно o-непрерывным и порядково ограниченным отображением, причем

$$\int\limits_{G} \rho(g) u(g) \lambda(dg) = 0$$

для всех $u \in C_{00}(G)$. Покажем, что $\rho \equiv 0$. Для этого любому элементу $g \in G$ и любой окрестности $U \in \mathscr{U}_0$ сопоставим функцию $\omega_{U,g} \in C_{00}(G)^+$, носитель которой лежит в $U + g$ и

$$\int\limits_{G} \omega_{U,g}(h)\lambda(dh) = 1.$$

Справедливо равенство

$$\rho(g) = \int\limits_{G} \omega_{U,g}(h)(\rho(g) - \rho(h))\lambda(dh),$$

поэтому

$$|\rho(g)| \leqslant \sup\{|\rho(g) - \rho(h))| : h \in G,\ h - g \in U\}.$$

После перехода в этом неравенстве к o-пределу по направлению $U \in \mathscr{U}_0$ получим $\rho(g) = 0$ $(g \in G)$. Следовательно, справедливо требуемое интегральное представление для отображения φ.

Докажем единственность. Пусть $\mu \in \mathrm{qca}(\mathfrak{X}, Y)$ еще одна мера, представляющая φ. Обозначим через $\mathrm{Lin}(G)$ линейную оболочку непрерывных характеров двойственной группы. По условию

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} f(\chi)\mu(d\chi) = \int\limits_{\mathfrak{X}} f(\chi)\mu_1(d\chi) \quad (f \in \mathrm{Lin}(G)).$$

Пусть u-$\mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(G)$ обозначает равномерное замыкание пространства всех вещественных функций из $\mathrm{Lin}(G)$. Как легко видеть, u-$\mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(G)$ является векторной решеткой функций, и предыдущее равенство будет справедливым для всех $f \in u$-$\mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(G)$. Пусть K принадлежит $\mathscr{K}(\mathfrak{X})$ и направленность функций $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ из u-$\mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(G)$ убывая стремится к 1_K. Из квазирадоновости мер μ_1 и μ следует

$$\mu(K) = o\text{-}\lim_{\alpha \in \mathrm{A}} \int\limits_{\mathfrak{X}} f_\alpha(\chi)\mu(d\chi) = o\text{-}\lim_{\alpha \in \mathrm{A}} \int\limits_{\mathfrak{X}} f_\alpha(\chi)\mu_1(d\chi) = \mu_1(K).$$

Далее, по σ-аддитивности это равенство продолжается на все множества из $\mathscr{B}(\mathfrak{X})$. $\triangleright$

Единственную меру $\mu \in \mathrm{qca}(\mathfrak{X}, Y)$, представляющую φ по теореме 5.9.1, будем называть *преобразованием Фурье* отображения φ и обозначать символом $\widehat{\varphi}$.

5.9.2. Теорема. *Для отображения $\psi : G \to F_{\mathbb{C}}$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *ψ положительно определено и o-непрерывно в нуле;*

(2) *существует единственная мера $\nu \in \mathrm{qca}(\mathfrak{X}, F)^+$ такая, что*

$$\psi(g) = \int\limits_{\mathfrak{X}} \chi(g)\nu(d\chi) \quad (g \in G).$$

$\triangleleft$ Доказательство следует из теоремы 5.9.1. $\triangleright$

Из теорем 5.9.1 и 5.9.2 непосредственно вытекают следующие результаты об изоморфизме.

5.9.3. Теорема. *Преобразование Фурье осуществляет линейный и порядковый изоморфизм пространства* $\mathrm{qca}(\mathfrak{X}, F_{\mathbb{C}})$ *и пространства* $\mathscr{M}_0(G, F_{\mathbb{C}})$ *(с упорядочивающим конусом* $\mathscr{M}_0(G, F_{\mathbb{C}})^+$*). В частности,* $\mathscr{M}_0(G, F_{\mathbb{C}})$ *является комплексным* K*-пространством.*

Из теоремы 5.9.3 следует, что для любого отображения $\varphi \in \mathscr{M}(G, Y)$ существует его наименьшая мажоранта $\psi \in \mathscr{M}_0(G, F_{\mathbb{C}})^+$, которую будем называть *нормой* φ и обозначать через $|\varphi|$.

5.9.4. Теорема. *Преобразование Фурье осуществляет изометрию пространств* $\mathrm{qca}(\mathfrak{X}, Y)$ *и* $\mathscr{M}_0(G, Y)$.

В частности, $\mathscr{M}_0(G, Y)$ *является o-полным решеточно нормированным пространством и* $|\varphi|^{\wedge} = |\widehat{\varphi}|$.

Отметим также, что если Y — пространство Банаха — Канторовича (см. [9]), то $\mathscr{M}_0(G, Y)$ тоже пространство Банаха — Канторовича.

5.9.5. Замечание. Установленная выше теорема отличается от аналогичного результата из [44] в следующих отношениях. Во-первых, в [44] идет речь о специальном K-пространстве самосопряженных коммутирующих операторов. Во-вторых, в [44] определение положительной определенности дано с операторными коэффициентами c_j. В-третьих, представляющие меры из $\mathrm{qca}(\mathfrak{X}, F)$ устроены проще, чем меры $M^{(m)}(\mathfrak{X})$ из [44]. В самом деле, для $\mu \in \mathrm{qca}(\mathfrak{X}, F)^+$ интеграл I_μ будет положительным мажорируемым оператором из $C_0(\mathfrak{X})$ в F. Этот оператор можно распространить на вектор-функции $F \otimes C_0(\mathfrak{X})$, полагая $\otimes I_\mu = \mathrm{id}_F \otimes I_\mu$. Далее, пользуясь o-плотностью подпространства $F \otimes C_0(\mathfrak{X})$ в пространстве $C_0^{(m)}(\mathfrak{X})$, интеграл можно распространить до положительного оператора $\otimes\mu : C_0^{(m)}(\mathfrak{X}) \to F_{\mathbb{C}}$. При этом $\otimes\mu$ принадлежит $M^{(m)}(\mathfrak{X})$ и соответствие $\mu \mapsto \otimes\mu$ дает биекцию $\mathrm{qca}(\mathfrak{X}, F_{\mathbb{C}})$ и $M^{(m)}(\mathfrak{X})$.

5.10. Некоторые следствия

Основной результат предыдущего параграфа — теорема 5.9.1 — позволяет ввести свертку в пространстве квазирадоновых векторных мер и получить спектральное разложение унитарных представлений локально-компактной абелевой группы в комплексном K-пространстве. При этом теорема 5.9.2 допускает распространение на случай монотонно полных упорядоченных пространств.

Пусть на Y задано билинейное отображение $\odot : Y \times Y \to Y$, удовлетворяющее условию мажорируемости $|y_1 \odot y_2| \leqslant |y_1| \cdot |y_2|$ $(y_1, y_2 \in Y)$. Рассмотрим две меры $\mu_j \in \mathrm{qca}(\mathfrak{X}, Y)$ $(j = 1, 2)$. Их тензорное произведение $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, определенное по билинейному отображению $\odot$, тоже будет квазирадоновой σ-аддитивной мерой (см. теорему 5.4.2). Определим линейный оператор $T_\mu : C_0(\mathfrak{X}) \to Y$ по формуле

$$T_\mu(f) = \int\limits_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}} f(\chi_1 \cdot \chi_2)\mu(d\chi_1 d\chi_2).$$

Как видно, этот оператор мажорируемый и $|T_\mu| \leqslant T_{|\mu|}$. Кроме того, имеем неравенство $|T_\mu(f)| \leqslant |\mu|(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})\|f\|_\infty$. По теореме 5.3.7 существует единственная мера $\mu_1 * \mu_2 \in \mathrm{qca}(\mathfrak{X}, Y)$, для которой

$$T_\mu(f) = \int\limits_{\mathfrak{X}} f(\chi)(\mu_1 * \mu_2)(d\chi).$$

Представляющую меру $\mu_1 * \mu_2$ естественно назвать *сверткой* двух мер μ_1 и μ_2. Так как $|\mu_1 \times \mu_2| \leqslant |\mu_1| \times |\mu_2|$ (см. теорему 5.4.2), то очевидно, что $|\mu_1 * \mu_2| \leqslant |\mu_1| * |\mu_2|$.

Решеточно нормированное пространство $\mathrm{qca}(\mathfrak{X}, Y)$ с операцией свертки $*$ становится решеточно нормированной алгеброй. Отметим, что для скалярных радоновых мер на локально-компактной группе свертка определена, например, в [41].

Символом $\varphi_1 \odot \varphi_2$ обозначаем произведение отображений $\varphi_j : G \to Y$ $(j = 1, 2)$, т. е. $(\varphi_1 \odot \varphi_2)(g) = \varphi_1(g) \odot \varphi_2(g)$ $(g \in G)$.

5.10.1. Теорема. *Если $\varphi_j \in \mathscr{M}_0(G, Y)$ $(j = 1, 2)$, то $\varphi_1 \odot \varphi_2 \in \mathscr{M}_0(G, Y)$ и отображение $|\varphi_1| \cdot |\varphi_2|$ является о-непрерывной мажорантой для $\varphi_1 \odot \varphi_2$, при этом справедливо равенство*

$$(\varphi_1 \odot \varphi_2)^\wedge = \widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2.$$

$\lhd$ По теореме 5.9.1 существуют, и притом единственные, меры $\mu_j \in \mathrm{qca}(\mathfrak{X}, Y)$ $(j = 1, 2)$, для которых

$$\varphi_j(g) = \int\limits_{\mathfrak{X}} \chi(g)\mu_j(d\chi) \quad (j = 1, 2,\ g \in G).$$

В силу векторной теоремы Фубини (теорема 5.4.5) будем иметь

$$\varphi_1(g)\odot\varphi_2(g) = \int\limits_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}} (\chi_1\cdot\chi_2)(g)(\mu_1\times\mu_2)(d\chi_1 d\chi_2) = \int\limits_{\mathfrak{X}} \chi(g)(\mu_1*\mu_2)(d\chi).$$

Следовательно, $\varphi_1 \odot \varphi_2 \in \mathscr{M}_0(G, Y)$ и $(\varphi_1 \odot \varphi_2)^\wedge = \widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2$. По определению

$$|\varphi_1 \odot \varphi_2|^\wedge = |\widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2| \leqslant |\widehat{\varphi}_1| * |\widehat{\varphi}_2| = |\varphi_1|^\wedge * |\varphi_2|^\wedge = (|\varphi_1| \cdot |\varphi_2|)^\wedge.$$

Значит, $|\varphi_1| \cdot |\varphi_2| - |\varphi_1 \odot \varphi_2| \in \mathscr{M}_0(G, F_{\mathbb{C}})^+$. $\triangleright$

5.10.2. *Следствие.* *Решеточно нормированное пространство $\mathscr{M}_0(G, Y)$ с операцией умножения $\varphi_1 \odot \varphi_2$ является решеточно нормированной алгеброй, а преобразование Фурье $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ осуществляет изоморфизм алгебр $\mathscr{M}_0(G, Y)$ и* $\operatorname{qca}(\mathfrak{X}, Y)$.

5.10.3. Замечание. Можно рассмотреть более общую ситуацию. Пусть Y, Y_1, Y_2 — три комплексных решеточно нормированных пространства с нормирующим K-пространством F и задано билинейное отображение $\odot : Y_1 \times Y_2 \to Y$ со свойством $|y_1 \odot y_2| \leqslant |y_1| \cdot |y_2|$. Свертка в этом случае будет билинейным отображением из $\operatorname{qca}(\mathfrak{X}, Y_1) \times \operatorname{qca}(\mathfrak{X}, Y_2)$ в $\operatorname{qca}(\mathfrak{X}, Y)$. Остаются справедливыми также формулы

$$(\varphi_1 \odot \varphi_2)^\wedge = \widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2, \quad |\varphi_1| \cdot |\varphi_2| - |\varphi_1 \odot \varphi_2| \in \mathscr{M}_0(G, F_{\mathbb{C}})^+.$$

Рассмотрим задачу о спектральном разложении представлений группы G. Пусть в F имеется порядковая единица $\mathbb{1}$. Элемент $u + iv$ из $F_{\mathbb{C}}$ будем называть *унитарным*, если $u^2 + v^2 = |u + iv|^2 = \mathbb{1}$. Множество $\mathscr{U}(\mathbb{1})$ всех унитарных элементов образует группу относительно порядкового умножения в $F_{\mathbb{C}}$ с кольцевой единицей $\mathbb{1}$.

Гомоморфизм $\pi : G \to \mathscr{U}(\mathbb{1})$ называется *унитарным представлением группы* G. Легко видеть, что представление является положительно определенным отображением.

Через $\mathscr{B}(\mathbb{1})$ обозначим булеву алгебру всех осколков единицы $\mathbb{1}$. Мера $\nu : \mathscr{B}(\mathfrak{X}) \to F$, образ которой лежит в $\mathscr{B}(\mathbb{1})$, называется *спектральной*.

5.10.4. *Теорема.* *Для любого o-непрерывного унитарного представления $\pi : G \to \mathscr{U}(\mathbb{1}) \subset \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ существует единственная спектральная мера $e : \mathscr{B}(\mathfrak{X}) \to \mathscr{B}(\mathbb{1}) \subset \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ такая, что*

$$\pi(g) = \int\limits_{\mathfrak{X}} \chi(g) e(d\chi) \quad (g \in G).$$

$\lhd$ По теореме 5.9.2 существует, и притом единственная, мера $e \in \operatorname{qca}(\mathfrak{X}, F)^{+}$, представляющая π. Обозначим через $\operatorname{Lin}(G)$ линейную оболочку всех характеров группы $\mathfrak{X}$. Пусть K принадлежит $\mathscr{K}(\mathfrak{X})$ и ограниченная направленность функций $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset \operatorname{Lin}(G)$ сходится поточечно к 1_K. Если

$$f_\alpha(\chi) = \sum_{j=1}^{n_\alpha} c_{\alpha,j} \chi(g_{\alpha,j})$$

при некоторых $c_{\alpha,j} \in \mathbb{C}$, $g_{\alpha,j} \in G$ ($\alpha \in \mathrm{A}$, $j = 1, \dots, n_\alpha$), то

$$\begin{aligned} e(K)^2 &= o\text{-}\lim_{\alpha \in \mathrm{A}} \Bigg(\int\limits_{\mathfrak{X}} f_\alpha(\chi) e(d\chi) \Bigg) \Bigg(\int\limits_{\mathfrak{X}} \overline{f_\alpha(\chi)} e(d\chi) \Bigg) = \\ &= o\text{-}\lim_{\alpha \in \mathrm{A}} \sum_{j,k=1}^{n_\alpha} c_{\alpha,j} \overline{c_{\alpha,k}} \pi(g_{\alpha,j}) \overline{\pi(g_{\alpha,k})} = \\ &= o\text{-}\lim_{\alpha \in \mathrm{A}} \sum_{j,k=1}^{n_\alpha} \int\limits_{\mathfrak{X}} \chi(g_{\alpha,j} - g_{\alpha,k}) c_{\alpha,j} \overline{c_{\alpha,k}} e(d\chi) = \\ &= o\text{-}\lim_{\alpha \in \mathrm{A}} \int\limits_{\mathfrak{X}} |f_\alpha(\chi)|^2 e(d\chi) = e(K). \end{aligned}$$

Из σ-аддитивности получаем $e(B)^2 = e(B)$ ($B \in \mathscr{B}(\mathfrak{X})$). Следовательно, $e[\mathscr{B}(\mathfrak{X})] \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{1})$. $\rhd$

5.10.5. Замечание. Частным случаем теоремы 5.10.4 является теорема Стоуна об унитарном представлении локально-компактной абелевой группы [45]. В самом деле, если $\mathscr{H}$ — комплексное гильбертово пространство, а $B(\mathscr{H})$ — пространство всех ограниченных линейных операторов, то в качестве $F_{\mathbb{C}}$ нужно взять коммутативную алгебру фон Неймана, порожденную множеством $\pi[G]$.

Пусть теперь E — монотонно полное упорядоченное векторное пространство. Определение положительной определенности для отображения $\psi : G \to E_{\mathbb{C}}$ остается прежним (см. определение 5.8.2). Отображение $\omega : G \to E$ называем *o-непрерывным в точке* $g_0 \in G$, если существует направленность $\{h_U : U \in \mathscr{U}_0\} \subset E^+$, убывающая порядково к нулю и такая, что $-h_U \leqslant \omega(g) - \omega(g_0) \leqslant h_U$ для всех $g \in U$ ($U \in \mathscr{U}_0$). Отображение $\psi : G \to E_{\mathbb{C}}$ называем *o-непрерывным в точке* $g_0 \in G$, если $\operatorname{Re}\psi$ и $\operatorname{Im}\psi$ o-непрерывны в точке g_0. Равномерная o-непрерывность для E- и $E_{\mathbb{C}}$-значных отображений определяется аналогично.

Для положительно определенного отображения $\psi : G \to E_{\mathbb{C}}$ отображения $\operatorname{Re}\psi$ и $\operatorname{Im}\psi$ порядково ограничены и принимают значения в идеале, порожденном элементом $\psi(0)$. Множество всех σ-аддитивных квазирадоновых мер $\nu : \mathscr{B}(\mathfrak{X}) \to E^+$ обозначаем через $\operatorname{qca}(\mathfrak{X}, E)^+$ (определение квазирадоновости остается прежним, так как в нем используются только монотонные направленности).

5.10.6. *Теорема.* *Для отображения $\psi : G \to E_{\mathbb{C}}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *ψ положительно определено и o-непрерывно в нуле,*

(2) *существует единственная мера $\nu \in \operatorname{qca}(\mathfrak{X}, E)^+$ такая, что*

$$\psi(g) = \int\limits_{\mathfrak{X}} \chi(g)\nu(d\chi) \quad (g \in G).$$

$\lhd$ (1)$\to$(2): Пусть o-непрерывность отображения ψ в нуле определяется с помощью направленности $\{h_U : U \in \mathscr{U}_0\}$. Фиксируем $U_0 \in \mathscr{U}_0$ и $h_0 = h_{U_0}$. Рассмотрим в E идеал $E(\mathbb{1})$, порожденный элементом $\mathbb{1} = \psi(\mathbb{0}) + \mathbb{h}_{\mathbb{0}}$. Следуя [33], рассмотрим дедекиндово пополнение F этого идеала. Из предыдущего следует, что $\psi(g) \in E(\mathbb{1})_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ ($g \in G$). Так как $h_0 \in F$, для отображения $\psi : G \to E_{\mathbb{C}}$ сохранится o-непрерывность в нуле. По теореме 5.9.2 существует единственная мера $\nu \in \operatorname{qca}(\mathfrak{X}, E)^+$ такая, что

$$\psi(g) = \int\limits_{\mathfrak{X}} \chi(g)\nu(d\chi) \quad (g \in G).$$

Осталось проверить только то, что значения меры ν лежат в исходном пространстве E. Пусть $K \in \mathscr{K}(\mathfrak{X})$. Существует направленность $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ из $\mathrm{Lin}(G)$, убывающая поточечно к 1_K. Будем иметь

$$\nu(K) = \inf_{\alpha\in\mathrm{A}} \int\limits_{\mathfrak{X}} f_\alpha(\chi)\nu(d\chi) \in E^+.$$

Из σ-аддитивности ν следует, что $\nu(B) \in E^+$ $(B \in \mathscr{B}(\mathfrak{X}))$. $\triangleright$

5.10.7. Замечание. Монотонно полными упорядоченными векторными пространствами являются O^*-алгебры [46]. Нетривиальным примером O^*-алгебры служит алгебра всех операторов, локально измеримых относительно некоторой алгебры фон Неймана (см. [46]). Теорема Бохнера для положительно определенных операторнозначных отображений рассматривалась также в работе М. Кристенсена [47].

5.11. Булевозначная интерпретация леммы Винера

Обратимся теперь к случаю компактной группы G. Двойственная к ней группа $\mathfrak{X}$ дискретна, и теорема 5.9.1 в этой ситуации утверждает, что отображение $\varphi : G \to Y$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье по характерам группы G в том и только в том случае, когда φ имеет o-непрерывную мажоранту $\psi : G \to F_{\mathbb{C}}$. Коэффициенты Фурье можно выписать явно по формуле обращения

$$y_\chi = \int\limits_G \varphi(g)\overline{\chi(g)}dg = \widehat{\varphi}(\{\chi\}),$$

где dg — нормированная мера Хаара на группе G.

Следующее утверждение для группы S^n (где S — окружность единичного радиуса) известно как лемма Винера (см. [48, лемма 11.6; 41, т. 2, теорема 39.31]).

5.11.1. *Теорема.* *Пусть $\varphi \in \mathscr{M}_0(G,\mathbb{C})$ и φ не обращается в нуль на G. Тогда $1/\varphi \in \mathscr{M}_0(G,\mathbb{C})$.*

$\triangleleft$ Для любого элемента $\psi \in \mathscr{M}_0(G,\mathbb{C})$ определим скалярную норму $\|\psi\|_\wedge = |\psi|(0) = |\widehat{\psi}|(\mathfrak{X})$. Пространство $\mathscr{M}_0(G,\mathbb{C})$ с такой нормой и операцией поточечного умножения будет банаховой алгеброй.

Если $\varphi \in \mathscr{M}_0(G,\mathbb{C})$, то также $\overline{\varphi} \in \mathscr{M}_0(G,\mathbb{C})$, и по теореме 5.10.1 при $Y = \mathbb{C} = F_{\mathbb{C}}$ получаем $|\varphi|^2 = \varphi \cdot \overline{\varphi} \in \mathscr{M}_0(G,\mathbb{C})$. Положим

$$M = \sup\{|\varphi(g)|^2 : g \in G\}, \quad m = \inf\{|\varphi(g)|^2 : g \in G\}.$$

Для функции $\psi = M \cdot 1_G - |\varphi|^2$ очевидно имеем оценку равномерной нормы $\|\psi\|_\infty = M - m$. Следовательно, спектральный радиус элемента ψ в банаховой алгебре $\mathscr{M}_0(G,\mathbb{C})$ равен $M - m$ (см. теорему C.24, а также доказательство теоремы 23.13 из [41, т. 1]). Поэтому элемент $M \cdot 1_G - \psi = |\varphi|^2$ обратим в алгебре $\mathscr{M}_0(G,\mathbb{C})$. Опять из теоремы 5.10.1 следует, что элемент $\varphi^{-1} = \overline{\varphi} \cdot (|\varphi|^2)^{-1}$ принадлежит алгебре $\mathscr{M}_0(G,\mathbb{C})$. $\rhd$

Для любой локально-компактной абелевой группы G рассмотрим в банаховой алгебре $\mathscr{M}_0(G,\mathbb{C})$ банахову подалгебру $\mathscr{M}_{ad}(G,\mathbb{C})$, состоящую из всех функций $\varphi \in \mathscr{M}_0(G,\mathbb{C})$, для которых мера $\widehat{\varphi} \in \mathrm{qca}(\mathfrak{X},\mathbb{C})$ не имеет сингулярной составляющей, т. е. лебегово разложение для $\widehat{\varphi}$ имеет вид $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_a + \widehat{\varphi}_d$, где $\widehat{\varphi}_a$ — абсолютно непрерывная составляющая меры $\widehat{\varphi}$, а $\widehat{\varphi}_d$ — дискретная составляющая относительно меры Хаара на $\mathfrak{X}$.

5.11.2. Теорема. *Спектр любого элемента φ из банаховой алгебры $\mathscr{M}_{ad}(G,\mathbb{C})$ представляет собой замыкание в $\mathbb{C}$ образа $\varphi[G]$. В частности, спектральный радиус элемента $\varphi \in \mathscr{M}_{ad}(G,\mathbb{C})$ равен $\|\varphi\|_\infty$.*

$\lhd$ Пусть λ принадлежит $\mathbb{C}$ и не принадлежит замыканию $\varphi[G]$. Рассмотрим функцию $\psi = \lambda 1_G - \varphi$. Она имеет следующее представление: $\psi(g) = \psi_a(g) + \psi_d(g)$ $(g \in G)$, где мера $\widehat{\psi}_a$ абсолютно непрерывна относительно меры Хаара на группе $\mathfrak{X}$, а ψ_d имеет вид

$$\psi_d(g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(g) \quad (g \in G)$$

при некоторых $\chi_n \in \mathfrak{X}$, $c_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$. По условию $|\psi(g)| \geqslant \varepsilon_0$ $(g \in G)$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$. Так как

$$\lim\{\sup\{|\psi_a(g)| : g \notin K\} : K \in \mathscr{K}(G)\} = 0,$$

существует компакт $K_0 \in \mathscr{K}(G)$, для которого $|\psi_d(g)| \geqslant \varepsilon_0/2$ $(g \in G \setminus K_0)$. Функция ψ_d равномерно почти-периодическая, поэтому существует ее непрерывное продолжение ψ_d^* на бэровскую компактификацию G^* группы G. Допустим, что $\psi_d(g_0) = 0$ при некотором

$g_0 \in G$. Множество $U^* = \{g \in G^* : |\psi_d(g)| < \varepsilon_0/2\}$ открыто в группе G^*. Мы рассматриваем нетривиальный случай, когда G некомпактна. Тогда существуют элемент $g^* \in U^* \setminus G$ и направленность $\{g_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$, лежащая в U и сходящаяся к g^*. Очевидно, что вся эта направленность не может лежать в компакте K_0. Значит, при некотором $\alpha \in \mathrm{A}$ будем иметь $g_\alpha \in U \setminus K_0$. Получили противоречие с тем, что $|\psi_d(g_\alpha)| \geqslant \varepsilon_0/2$. Из этого доказательства следует неравенство

$$\inf\{|\psi_d(g)| : g \in G\} > 0.$$

Значит, ψ_d^* не обращается в нуль на G^*, и по теореме 5.11.1 функция ψ_d^{*-1} разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье по характерам группы $\mathfrak{X}$. То же самое верно и для функции ψ_d^{-1}. Следовательно, функция $\tau = \psi\psi_d^{-1} - 1_G$ принадлежит $\mathscr{M}_0(G, \mathbb{C})$, и мера $\widehat{\tau}$ абсолютно непрерывна относительно меры Хаара. Функция $(\mathbb{1}_\mathbb{G} + \tau)^{-\mathbb{1}}$ тоже принадлежит $\mathscr{M}_0(G, \mathbb{C})$. Это доказывается так же, как и в теореме 5.11.1. Мы получили обратимость элемента ψ в алгебре $\mathscr{M}_{ad}(G, \mathbb{C})$, поэтому λ не принадлежит спектру элемента φ. $\triangleright$

5.11.3. *Теорема.* *Пусть F — расширенное K-пространство с порядковой и кольцевой единицей $\mathbb{1}$. Если отображения $\varphi : G \to F_\mathbb{C}$, $\psi : G \to F_\mathbb{C}$ удовлетворяют условиям $\varphi(g)\psi(g) = \mathbb{1}$ $(g \in G)$ и $\varphi \in \mathscr{M}_0(G, F_\mathbb{C})$, то $\psi \in \mathscr{M}_0(G, F_\mathbb{C})$.*

$\triangleleft$ Приведем схему доказательства, основанного на булевозначной интерпретации теоремы 5.11.1. Пусть $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — булевозначный универсум, где $\mathbb{B}$ — булева алгебра порядковых проекторов в F. Пусть $\mathscr{G}$ — пополнение топологической группы $G^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тогда $[\![\mathscr{G}$ — компактная группа$]\!] = \mathbb{1}$. Далее, если $\mathscr{C}$ — поле комплексных чисел внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, то $\mathscr{C}{\downarrow}$ — комплексное K–пространство, изоморфное $F_\mathbb{C}$. Поэтому без ограничения общности можем считать, что $\mathscr{C}{\downarrow} = F_\mathbb{C}$. Предположим, что φ и ψ удовлетворяют условиям теоремы. Функция $\varphi^\wedge : G^\wedge \to \mathscr{C}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, определяемая равенствами $[\![\varphi^\wedge(x^\wedge) = \varphi(x)]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in G)$, равномерно непрерывна, так как φ равномерно o-непрерывно. Это утверждение сводится к несложным вычислениям булевых оценок. Обозначим через $\widetilde{\varphi}$ продолжение по непрерывности φ с $G^\wedge$ на пополнение $\mathscr{G}$. Тогда $[\![\widetilde{\varphi}$ — мажорируемая функция, имеющая непрерывную в нуле мажоранту$]\!] = \mathbb{1}$. В самом деле, если φ_0 является мажорантой φ и o-непрерывна в нуле, то существует $\widetilde{\varphi}_0 : \mathscr{G} \to \mathscr{C}$ и $[\![\widetilde{\varphi}_0$ — мажоранта $\widetilde{\varphi}]\!] = \mathbb{1}$. Применим к функции $\widetilde{\varphi}$ теорему 5.11.1. Внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ существует функция

$\omega : \mathscr{G} \to \mathscr{C}$, имеющая непрерывную в нуле мажоранту, такая, что $[\![\widetilde{\varphi}(g)\omega(g) = \mathbb{1} \ (\mathbb{g} \in \mathbb{G})]\!] = \mathbb{1}$. Тогда ограничение ψ_0 отображения $\omega{\downarrow} : \mathscr{G}{\downarrow} \to F_{\mathbb{C}}$ на $G \subset \mathscr{G}{\downarrow}$ удовлетворяет условиям $\psi_0 \in \mathscr{M}_0(G, F_{\mathbb{C}})$ и $\varphi(g)\psi_0(g) = \mathbb{1}$ $(g \in G)$. Из последнего видно, что $\psi = \psi_0$. $\triangleright$

Литература

1. Dinculeanu N. Vector Measures.—Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.

2. Diestel J. and Uhl J. J. Vector Measures.—Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1977.—322 pp. (Math. Surveys; **15**).

3. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

4. Fremlin D. M. A direct proof of the Matthes–Wright integral extension theorem // J. London Math. Soc. (2).—1975.—V. 11, No. 3.—P. 276–284.

5. Riečan B. A simplified proof of the Daniell integral extension theorem in ordered spaces // Math. Slovaca.—1982.—V. 32, No. 1.—P. 75–79.

6. Хаусдорф Ф. Теория множеств.—М.-Л.: ГТТИ, 1937.

7. Плеснер А. И. Спектральная теория линейных операторов.—М.: Наука, 1965.

8. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.

9. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.

10. Кусраев А. Г., Стрижевский В. З. Решеточно нормированные пространства и мажорированные операторы // Исследования по геометрии и математическому анализу.—Новосибирск: Наука, 1987.—С. 132–157.

11. Wright J. D. M. Stone-algebra-valued measures and integrals // Proc. London Math. Soc.—1969.—V. 19, No. 1.—P. 107–122.

12. Horn A. and Tarski A. Measures in Boolean algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1948.—V. 64, No. 3.—P. 467–497.

13. Łoś J. and Marczewski E. Extensions of measure// Fund. Math.—1949.— V. 36.—P. 267–276.

14. Wright J. D. M. The measure extension procedure for vector lattices // Ann. Inst. Fourier Grenoble.—1971.—V. 21, No. 4.—P. 65–85.

15. Panchapagesan T. V. and Palled Sh. V. On vector lattice-valued measures. I // Math. Slovaca.—1983.—V. 33, No. 3.—P. 269–292.

16. Riečan J. On the Kolmogorov consistency theorem for Riesz space valued measures // Acta Math. Univ. Comen.—1986.—V. 48/49. —P. 173–180.

17. Wright J. D. M. Vector lattice measures on locally compact spaces // Math. Z.—1971.—V. 120, No. 3.—P. 193–203.

18. Каш Ф. Модули и кольца.—М.: Наука, 1981.

19. Wright J. D. M. Products of positive vector measures // Quart. J. Math.—1973.—V. 24, No. 94.—P. 189–206.

20. Duchoň M. and Kluvanek I. Inductive tensor product of vector-valued measures // Mat. Casop.—1967.—V. 17, No. 2.—P. 108–112.

21. Duchoň M. On the projective tensor product of vector-valued measures // Mat. Casop.—1967.—V. 17, No. 2.—P. 113–120.

22. Kluvanek I. On the product of vector measures // J. Austral. Math. Soc.— 1973.—V. 15, No. 1.—P. 22–26.

23. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов.—М.: Физматгиз, 1961.

24. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.—М.: Наука, 1973.

25. Niåstad O. Unique solvability of an extended Hamburger moment problem // J. Math. Anal. Appl.—1987.—V. 124, No. 2.—P. 502–519.

26. Alden E. On indeterminacy of strong moment problems // Sweden, 1988. (Preprint/Univ. Umea; No. 2).

27. Shonkwiler R. On the solution of moment problems by reproducing kernel methods // J. Math. Anal. Appl.—1988.—V. 130, No. 1.—P. 271–299.

28. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу.—М.: Мир, 1979.

29. Воробьёв Ю. В. Операторные ортогональные многочлены и приближенные методы определения спектра линейных ограниченных операторов // Успехи мат. наук.—1954.—Т. 9, вып. 1. —С. 83–90.

30. Березанский Ю. М. Обобщенная степенная проблема моментов // Тр. Моск. мат. об-ва.—1970.—Т. 21.—С. 47–102.

31. Sebestyen Z. Moment theorems for operators on Hilbert spaces // Acta Sci. Math. Szegel.—1984.—V. 47, No. 1–2.—P. 101–106.

32. Schmüdgen K. On a generalization of the classical moment problem // J. Math. Anal. Appl.—1987.—V. 125, No. 2.—P. 461–470.

33. Khurana S. S. Lattice-valued Borel measures // Rocky Mount. J. Math.— 1976.—V. 6, No. 2.—P. 377–382.

34. Малюгин С. А. Квазирадоновы меры // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 5.—С. 103–111.

35. Малюгин С. А. О векторной проблеме моментов Гамбургера // Оптимизация.—1990.— Вып. 48.—С. 124–141.

36. Березанский Ю. М. Обобщенная степенная проблема моментов // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1970.—Т. 21.—С. 47–102.

37. Schmüdgen K. On a generalization of the classical moment problem // J. Math. Anal. Appl.—1987.—V. 125, No. 2.—P. 461–470.

38. Крейн М. Г. Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов // Докл. АН СССР.—1949.— Т. 69, № 2.—С. 125–128.

39. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.—Киев: Наук. думка, 1965.

40. Sz.-Nagy B. A moment problem for self-adjoint operators // Acta Math. Acad. Sci. Hung.—1952.—V. 3.—P. 285–293.

41. Хьюит Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ.—М.: Наука, 1975. Т. 1, 2.

42. Наймарк М. А. Нормированные кольца.—М.: Наука, 1968.

43. Хейер Х. Вероятностные меры на локально компактных группах. —М.: Мир, 1981.

44. Takeuti G. A transfer principle in harmonic analysis // J. Symbolic Logic.—1979.— V. 44, No. 3.—P. 417–440.

45. Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ.—М.: Изд-во иност. лит., 1956.

46. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И. Упорядоченные алгебры.—Ташкент: Фан, 1983.

47. Christensen M. J. Extension theorems for operator-valued measures // J. Math. Phys.—1979.—V. 20, No. 3.—P. 385–389.

48. Рудин У. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1975.

Указатель обозначений

ZFC, 6
$\mathbb{V}$, 7
Z, 7
$[\![\cdot]\!]$, 8
$\models$, 9
$\mathbb{V}^{(B)}$, 10
$X\!\downarrow$, 11
$X\!\uparrow$, 12
IST, 14
$\mathrm{St}(\cdot)$, 14
$\mathbb{V}^{\mathrm{st}}$, 15
$\forall^{\mathrm{st}}$, 15
$\exists^{\mathrm{st}}$, 15
${}^{\circ}x$, 15
NST, 16
$\mathbb{V}^{I}$, 16
Int, 16
$*$, 19
UNST, 20
$a[N]$, 21
$\mathrm{Su}(\cdot)$, 22
$x\,\mathrm{st}\,y$, 22
RIST, 25
E_{+}, 28
$\perp$, 28
$B(E)$, 28
$[K]$, 29
$P(E)$, 29
$E(E)$, 29
$M(\Omega,\Sigma,\mu)$, 29
$C_{\infty}(Q)$, 30
$\mathrm{Bor}(Q)$, 30
$L^{\sim}(E,F)$, 30
$L^{\sim}_{n}(E,F)$, 30
$L^{\sim}_{\sigma}(E,F)$, 30
$\mathscr{R}$, 33
e^{x}_{λ}, 34
$E\oplus iE$, 36
$A^{\vee}$, 74
$A^{\uparrow}$, 75
$A^{\uparrow\downarrow}$, 75
$A^{\uparrow\downarrow\uparrow}$, 75
$\approx$, 75
$\rightleftharpoons$, 76
E_{T}, 79
$V(S)$, 207
$V_{n}(S)$, 207
$\mathbb{R}$, 207
$L_{V(S)}$, 208
$*$, 209
$V({}^{*}S)$, 209
card, 210
$\mathscr{F}(X)$, 210
${}^{*}\mathscr{F}(X)$, 210
$\{x_{n}\}^{\nu}_{n=1}$, 210
$\mathscr{P}(X)$, 211
${}^{a}\Theta$, 211
$\mathrm{Fin}({}^{*}X)$, 211
$\mu({}^{*}X)$, 211
$[\kappa]$, 211

$\widetilde{X}$, 211
$\widehat{\mu}_X$, 211
$\mathrm{pns}({}^*X)$, 212
$\mathscr{B}(E)$, 214
$\mathrm{mix}(\pi_\xi x_\xi)_{\xi\in\Xi}$, 214
(X',p',E), 214
X', 214
$(X',p',E/I)$, 215
$\xrightarrow{(r)}$, 217
$|T|$, 217
$M(X,Y)$, 217
$L_b(E,F)$, 217
$U(\kappa)$, 218
$L(\kappa)$, 218
Λ^x, 220
e, 220
τ, 220
(Λ,τ), 220
$\sim$, 220
$\widetilde{\Lambda}$, 220
$\widetilde{\Lambda}^x$, 220
clop, 221
$\mathscr{M}$, 223
$\mathscr{M}^u$, 223
φ_Λ, 223
E_+, 225
${}^*E_+$, 225
Λ, 225
$f\widehat{\ }$, 225
$\mathscr{D}$, 225
h_κ, 227
E_κ, 227
$(e_\sigma)_{\sigma\in S}$, 227
${}^0\Lambda$, 227
${}^0\Lambda^x$, 227
E_S, 227
I_σ, 227
$[0,e_\sigma]$, 227
C_∞, 227
$\mathscr{R}$, 229
$\Lambda_{\mathscr{R}}$, 229
$\langle\kappa\rangle$, 230
$C_\infty(\Lambda_{\mathscr{R}})$, 230
φ, 230
$C(\Lambda_{\mathscr{R}})$, 230
$\mathrm{pr}_x(e)$, 232
$\mathrm{fin}({}^*E)$, 232
o-$\mathrm{pns}({}^*E)$, 232
$\eta({}^*E)$, 232
$\lambda({}^*E)$, 232
$\widehat{E}$, 238
$\widehat{\eta}$, 238
st, 241
(E,ρ), 244
$\mathrm{pns}({}^*E)$, 244
$\mathrm{Fin}({}^*E)$, 244
$\mu({}^*E)$, 244
$\|\cdot\|_e$, 244
$\big(E,\|\cdot\|\big)$, 244
$|T|$, 251
$\mathrm{st}(\alpha)$, 252
ψ, 252
h, 253
o-$\mathrm{pns}({}^*B)$, 254
$\eta({}^*B)$, 254
$\bigoplus_\tau a_\tau$, 255
(B,μ), 255
(B_a,μ), 255
(B_c,μ), 255
$\mathbb{1}_{{}^*B}$, 256
$\widetilde{\mu}$, 257
$\widetilde{\mu}_h$, 257
${}^*B_\sigma$, 257
(o)-E, 258
$\widehat{\eta}_E$, 258
$\widehat{\eta}$, 258
$\widetilde{E}$, 263
$\langle\!\langle\kappa\rangle\!\rangle$, 263
$\langle\kappa\rangle$, 264
$\widehat{\lambda}_E$, 264
$\widehat{\lambda}$, 264
$(\mathscr{X},\alpha,{}^*E)$, 268
$\mathscr{X}$, 268
$\eta(\mathscr{X})$, 269
$\lambda(\mathscr{X})$, 269
$\mathrm{fin}(\mathscr{X})$, 269

(o)- $\overline{\mathscr{X}}$, 269
(r)- $\overline{\mathscr{X}}$, 269
$\overline{\alpha}$, 269
$\overline{\alpha}_{(r)}$, 269
$|\cdot|$, 270
$((o)$-$\overline{E}, |\cdot|)$, 270
$\mathscr{U}(x)$, 272
$\widehat{\mathscr{U}}(x)$, 272
p, 273
$p \circ \overline{\alpha}$, 274
$((o)$-$\overline{\mathscr{X}}, p \circ \overline{\alpha}, \widehat{E})$, 274
$(\mathscr{Y}, b, F)$, 275
ρ_E, 276
$\mathscr{B}(E)$, 276
π^d, 277
Card, 278
$\prec$, 280
$\mathscr{E}$, 282
$\mathscr{B}_e(E)$, 282
pr_e, 282
$L_r(E, F)$, 283
$L_n(E, F)$, 283
$\mathscr{M}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 283
$^*Q$, 283
$\mathscr{M}_n(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 283
$^*S$, 283
L, 283
$\langle\!\langle\!\langle \overline{T} \rangle\!\rangle\!\rangle$, 283
$\langle\!\langle\!\langle T \rangle\!\rangle\!\rangle$, 283
ρ_L, 283
$M_n(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 284
$\mathfrak{x}$, 293
$\mathscr{T}$, 293
$\mathscr{F}$, 293
$\mathscr{T}_0(\mathscr{F}_0)$, 293
$\mathfrak{B}(\mathscr{K})$, 293
$\mathscr{M}(\mathfrak{x})$, 293
$\mathscr{M}_b(\mathfrak{x})$, 293
$C_b(\mathfrak{x})$, 293
$C_{00}(\mathfrak{x})$, 293
$C_0(\mathfrak{x})$, 293
$\mathscr{A}(\mathfrak{e})$, 293
$\Sigma(\mathfrak{e})$, 293
$\mathfrak{S}(e)$, 294
$|\mu|$, 294
$F - \mathrm{ba}(\mathscr{A}_0, Y)$, 294
$|\mu|(A)$, 294
$F - \mathrm{bca}(\mathscr{A}_0, Y)$, 294
$S(\mathscr{A}_0)$, 294
$L_1(\mu)$, 295
$\mathscr{K}_E$, 295
$\mathscr{F}_E$, 295
ω_1, 296
$\mathscr{T}(\mathfrak{x})$, 302
$C_b^{\uparrow}$, 303
$mF = mF'$, 310
$Y \otimes_G Y'$, 310
$\mathscr{M}(\mathfrak{x}', Y)$, 314
$|f|_\infty$, 314
$L^\infty(G, Y)$, 316
$K_\infty(\lambda)$, 326
$\mathscr{D}_n$, 327
$\{\mathscr{D}_n\}^{dd}$, 327
$L^2(\widehat{G}_1, \lambda)$, 348
$\mathscr{P}^n$, 351
$\deg p$, 351

Предметный указатель

(d)-полное РНП, 214
(d)-разложимая норма, 213
(d)-разложимое РНП, 213

(o)-бесконечно малый элемент, 233
(o)-околостандартный элемент, 233
(o)-полное РНП, 213
(o)-пополнение, 214
(o)-сеть Коши, 213
(o)-сходимость, 213

(r)-бесконечно малый элемент, 233
(r)-околостандартный элемент, 233
(r)-полное РНП, 213
(r)-последовательность Коши, 213
(r)-сходимость, 213

$*$-инвариантный булев гомоморфизм ($*$-ИБГ), 253
$*$-инвариантный решеточный гомоморфизм ($*$-ИРГ), 252

A-значное скалярное произведение, 47
AW^*-модуль, 47

B-альтернатива Фредгольма, 86
B-значная алгебраическая система, 101
B-значная оценка истинности, 102
B-значный универсум, 107
B-изоморфизм, 102
B-изоморфные системы, 102
B-рефлексивное пространство, 85
B-сопряженное пространство, 46
B-структура, 12
B-циклическое нормированное пространство, 45

E-значная норма, 42, 213
E-формула, 17

F-дискретный оператор, 69
F-модуль, 310

I-формула, 17

K-пространство, 28
K_σ-пространство, 28

P-точка, 140

S-формула, 17
$S(\mathscr{A})$-линейность, 332
$S(\mathscr{A})$-модуль, 332

mix-полное множество, 83

σ-аддитивная мера, 255
σ-замкнутое множество, 139
σ-изолированная точка, 140
σ-компактное топологическое пространство, 305
σ-открытое множество, 139

bo-полное решеточно нормированное пространство, 43
bo-фундаментальная сеть, 43

e-компостер, 242

n-кратное ядро Фейера, 351

o^*-алгебра, 365

r-замыкание пространства, 314

w-w^*-сходящаяся последовательность, 137

аксиома приемлемости, 17
алгебра Неймана, 348
алфавит языка, 6
аппроксимативно выполненная формула, 52
ассоциированное РНП, 275
атомная решетка, 241
атомная формула, 208

база, 28
банахова алгебра, 365
банахово расслоение с постоянной размерностью, 151
безатомный элемент, 242
бесконечно малый элемент, 49, 211
бесконечно удаленный элемент, 211
борелевская σ-алгебра, 307
булева алгебра, 218
булевозначная алгебраическая система, 101
булевозначная модель, 10
булевозначная оценка истинности, 102
булевозначная реализация, 44
булевозначная реализация модуля Капланского — Гильберта, 47
булевозначная реализация решеточно нормированного пространства, 44
булевозначный анализ, vii
булевозначный универсум, 10, 107, 367
бэровский класс, 296

векторная норма, 42, 346
векторная норма пространства, 310
векторная решетка, 28
векторный круг Вейля — Гамбургера, 326
векторный порядок, 27
вероятностное пространство, 320
внешнее множество, 15
внешний класс, 15
внешний элемент, 209
внешняя формула ZFC, 15
внутренний класс, 15
внутренний принцип определения, 209
внутренний элемент, 209
внутренняя формула ZFC, 14
второе B-сопряженное пространство, 85
второе сопряженное расслоение, 183

гиперконечное множество, 210
гиперконечномерное пространство, 49
глобальное сечение, 108
гомоморфизм Биркгофа — Улама, 303

дедекиндово пополнение, 330
дедекиндово пополнение идеала, 323
дизъюнктное дополнение, 28
дизъюнктные элементы, 28, 218
дискретная монадная оболочка, 60
дистрибутивная решетка, 218
дополнение, 218

единица, 218
единичный элемент, 29

закон слабой σ-дистрибутивности, 293
закон слабой (σ, ∞)-дистрибутивности, 293
замкнутое отображение, 100
замыкание сечения, 115

идеал, 218
измеримость по Лёбу, 54
изоморфизм булевозначных алгебраических систем, 102
изоморфные булевозначные системы, 102
интеграл Бохнера, 316
инфинитезимальный анализ, vi
истинная формула, 103

каноническая проекция эквивалентности, 121
каноническая топология, 220
каноническое вложение, 11, 85
каноническое пространство Лёба, 55
канторов дисконтинуум $\{0,1\}^\omega$, 306
квазирадоновая мера, 295
квазирегулярная мера, 295
квазиэкстремальный компакт, 306
класс, 15
класс-топология, 100
комплексификация, 36
комплексификация пространства, 345
комплексная векторная решетка, 36
комплексное K-пространство, 36
компонента, 28, 327
конечный элемент, 49, 233
конечный (по норме) элемент, 211
кросс-равенство, 311

левое регулярное представление, 348
лемма Винера, 365
лемма Коншора, 254
лемма о монотонном классе, 323
лифтинг, 55
локально линейно независимое множество, 86

мажоранта, 217, 346
мажорантная норма, 302
мажорируемая (по Хаусдорфу) последовательность векторов, 320
мажорируемое отображение, 346
мажорируемый линейный оператор, 302, 307
мажорируемый оператор, 217, 305
максимальная подрешетка, 218
максимальное расширение, 43
массивное подпространство, 70
мера, 294
мера Лёба, 54
мера Хаара, 356
микронепрерывность, 22
микропредел последовательности, 21
минимальный идеал, 218

минорантная подрешетка, 34
мнимая единица, 36
модуль, 36
модуль Капланского — Гильберта, 47
монада, 59
монадология, 59

насыщенное множество, 219
неделимый элемент, 219
непредельный ординал, 296
непрерывное расслоение, 108
непрерывное сечение, 108
непрерывный поливерсум, 111
неравенство Коши — Буняковского — Шварца, 350
нестандартная оболочка, 49, 50, 263
нестандартная оболочка оператора, 212
нестандартное расширение, 209
нестандартный анализ, vi
нижняя подрешетка, 218
норма Канторовича, 42
норма Рисса, 244
нормальная подгруппа, 348
нормированное B-пространство, 44
носитель оператора, 79
носитель сечения, 112
нуль, 218

общий принцип насыщения, 210
ограниченная вариация, 294
ограниченная позитивная формула, 52
ограниченный спуск, 46
означивание списка переменных, 102
околостандартная точка, 67
околостандартная часть, 63
оператор Магарам, 79
операторное расслоение, 159
операция инволюции, 356
осколок единицы, 29
осколок положительного элемента, 294
ослабленное свойство Шура, 137
отделимая булевозначная система, 102
открытое отображение, 100
относительно циклически компактное множество, 84
отображение двойного штрихования, 185

первая категория, 336
первый несчетный ординал, 296
перемешивание, 11, 45, 214
перемешивание семейства, 104
плотная алгебра, 305
подъем множества, 12, 104
подъем множества сечений, 120
подъем семейства, 103
подъем фильтра, 60
позитивная последовательность, 325
позитивная (по Хаусдорфу) последовательность векторов, 320
полинасыщенное нестандартное расширение, 210
полная нормированная булева алгебра, 255
положительно определенное отображение, 346
положительный конус, 28
положительный оператор, 30
полоса, 28
порождающее множество, 74
порядковая оболочка РНП, 258, 269
порядково непрерывный оператор, 30
порядково ограниченный оператор, 30

порядковый проектор, 29
почти периодическая группа, 350
почти регулярная решетка, 264
правильная векторная подрешетка, 259
предельный ординал, 304
предоколостандартный элемент, 233
принцип Лейбница, 19
принцип переноса, 209
принцип расширения, 209
проблема Гамбургера о моментах, 324
проблема моментов, 319
проекция множества, 108
проекция элемента, 108
произведение мер, 310
прокомпактное пространство, 62
прополная ограниченность, 62
простой идеал, 218
пространство Банаха — Канторовича (ПБК), 43, 213
пространство Гротендика, 139
пространство Канторовича, 28, 320
пространство Канторовича — Пинскера, 31
пространство Лёба, 54
пространство Фреше — Урысона, 154
пространство со смешанной нормой, 43
проультрафильтр, 60
прямое произведение, 317
прямой интеграл, 348
псевдодополнение, 218

равномерная мера Лёба, 55
равномерно o-непрерывная вектор-функция, 317
радоновая мера, 295
разбиение, 255
разделяющее подмножество, 135
разложимая векторная норма пространства, 310
разложимая норма, 42, 213
разложимое РНП, 213
размерность банахова расслоения, 151
распаковка сечения, 111
расслоение, 108
расширенное K-пространство, 29, 63
расширенное пространство Банаха — Канторовича, 43
регулярная мера, 295
регулярная оболочка РНП, 264, 269
регулярная решетка, 260
регулярный оператор, 30
регулятор, 314
релятивизация, 17
решетка, 218
решетка с псевдодополнениями, 218
решеточно нормированная алгебра, 362
решеточно нормированное пространство (РНП), 42, 213

свертка, 361
свойство DP*, 138
свойство WS, 137
свойство Данфорда — Петтиса, 138
сечение расслоения, 108
сильная единица, 344
слабая единица, 218
слабая порядковая единица, 29
слабо компактно порожденное пространство, 138
слабо непрерывное сечение, 188
слабо фундаментальная последовательность, 133

слабое условие Рисса — Фишера, 270
след, 34
слой расслоения, 108
случайная мера, 56, 320, 324
совершенно нормальное топологическое пространство, 142
сопряженное банахово расслоение, 171
спектральная мера, 37, 320, 325
спектральная мера элемента, 39
спектральная теорема Фрейденталя, 39
спектральная функция элемента, 34
спектральное разложение, 322
спектральный интеграл, 38
спектральный радиус, 366
спуск банахова пространства, 44
спуск сечения, 113
спуск фильтра, 60
спуск элемента, 11, 103
спуск-монада, 66
спуск-околостандартная точка, 67
спуск-стандартизация, 65
стандартизация, 18, 20
стандартная часть, 63, 252
стандартное множество, 14, 20
стандартное ядро, 15
стандартный элемент, 209
стилтьесовские суммы, 336
структура бимодуля, 311
суперструктура, 207
существенно положительный оператор, 79
существенная точка, 61
счетно компактное топологическое пространство, 142

тензорное произведение, 311
тензорное произведение двух борелевских мер, 311
теорема Александрова, 306
теорема Бернштейна, 321
теорема Вулиха — Огасавары, 230
теорема Даниеля — Стоуна, 303
теорема Канторовича , 324
теорема Крейнов — Какутани, 230
теорема Лебега, 295
теорема Лося — Марчевского, 301
теорема Прохорова, 305
теорема Руше, 337
теорема Стоуна, 306
теорема Фубини, 315
теория множеств Цермело, 7
топологическое пространство-класс, 100
тотальное подмножество, 135
точность формулы, 76
тригонометрические полиномы, 351

ультрафильтр, 218
универсум стандартных множеств, 16
унитарное представление группы, 362
унитарный элемент, 362
упаковка множества, 114
упорядоченное векторное пространство, 27
условие Магарам, 79
условие Харди, 338
условие Хаусдорфа, 322

фактор Неймана, 348
фактор-группа, 348
фактор-пространство по идеалу нормирующей векторной решетки, 215
формальный язык, 208
формулы языка, 6
фундамент, 310

функционально дискретное топологическое пространство, 140
функция, измеримая по Борелю, 315
Фурье-образ, 357

характеристика элемента, 34

циклическая компактность, 83
циклическая монада, 60
циклическая монадная оболочка, 60
циклическая оболочка, 60
циклическая подпоследователь-ность, 84
циклическая подсеть, 84
циклически компактное множество, 84
циклически компактное пространство, 62
циклически компактный оператор, 85
циклический фильтр, 60
циклическое множество, 11

эвристический принцип переноса, 31
экстенсиональное соответствие, 12
экстенсиональный базис фильтра, 60
экстремально несвязная топология, 101

Гутман Александр Ефимович
Емельянов Эдуард Юрьевич
Кусраев Анатолий Георгиевич
Кутателадзе Семён Самсонович

Нестандартный анализ и векторные решетки
Серия [[Нестандартные методы анализа]]

Ответственный редактор и редактор серии
С. С. Кутателадзе

Редактор издательства *И. И. Кожанова*

Издание подготовлено с использованием макро-пакета $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX,
the American Mathematical Society'sTEX macro system.

Подписано в печать 14.12.99. Формат $60 \times 84\,{}^1\!/_{16}$. Печать офсетная.
Усл.-печ. л. 23. Уч.-изд. л. 28. Тираж 200 экз. Заказ № 74.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики.
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

Лицензия ПЛД № 57–43 от 22 апреля 1998 г.
Отпечатано на полиграфическом участке ИМ СО РАН.
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.