

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ISSN 0134-3998

МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ
ЭКОНОМИКИ

О П Т И М И З А Ц И Я 33 (50)

НОВОСИБИРСК, 1983

УДК 517.982+510.644+512.58

О ТЕХНИКЕ СПУСКОВ И ПОДЪЕМОВ

С.С.Кутателадзе

В последние годы выпуклый анализ интенсивно обогащается аппаратом соседних разделов математики. В свою очередь, аппарат выпуклого анализа и прежде всего субдифференциальное исчисление интенсивно проникает в теорию и численные методы программирования, в математическую экономику, в теорию принятия решений и т.п. [1]. В самое последнее время в выпуклом анализе нашли существенные применения булевозначные модели теории множеств [2-7]. С их помощью, в частности, были решены долго стоявшие проблемы дезинтегрирования [8] и внутреннего описания субдифференциалов [9]. Приложения булевозначных моделей к анализу или, как еще говорят, приложения булевозначного анализа основаны на изучении способа изображения исследуемых объектов в "нестандартном универсуме" - в булевозначной модели - с помощью обычных множеств. Указанное изучение связано с естественными функториальными процедурами - спуском и подъемом. При спуске булевозначного объекта описывается набор составляющих его множеств. При подъеме решается обратная задача: ищутся условия, при которых исходный объект порождает булевозначное множество с заданной структурой. Основной результат при этом состоит в реализации программы спуск-подъем, т.е. в обнаружении критериев систем, изоморфных спускам аналогичных образований в булевозначной модели. В настоящее время спуск-подъем осуществлен для ряда систем, важных в анализе и в его приложениях, в частности для K -пространств [6-14]. Особо выделим работу [14], наметившую категорный подход к программе

спуск-подъем. Однако говорить о полной ясности в очерченном круге вопросов, конечно же, преждевременно. В то же время уже сейчас перспективность булевозначного анализа в приложениях к субдифференциальному исчислению и к близким разделам теории экстремальных задач бесспорна. В этой связи хочется надеяться, что достижение конкретной цели статьи — детализация программы спуск-подъем для общих алгебраических систем — будет полезно и для решения актуальной задачи популяризации булевозначного анализа.

§1. Вспомогательные сведения о булевозначных моделях

I.0. Дадим очерк основных фактов о построении и правилах работы с булевозначными моделями, оттенив необходимые нам подробности. Детали в [2-7].

I.1. Пусть B — полная булева алгебра. Для ординала α положим

$$V_{\alpha}^{(B)} := \{x : (\exists \beta \in \alpha) \text{dom}(x) \in V_{\beta}^{(B)} \wedge x : \text{dom}(x) \rightarrow B\}.$$

В более подробной записи это рекурсивное определение означает

$$V_0^{(B)} := \emptyset, \quad V_{\alpha+1}^{(B)} := \{x : \text{dom}(x) \subset V_{\alpha}^{(B)} \wedge x : \text{dom}(x) \rightarrow B\},$$

$V_{\alpha}^{(B)} := \bigcup_{\beta < \alpha} V_{\beta}^{(B)}$ при $\alpha = \sup[0, \alpha)$.
Булевозначный универсум $V^{(B)}$ определяют соотношением

$$V^{(B)} := \bigcup_{\alpha \in O_n} V_{\alpha}^{(B)},$$

где O_n — класс всех ординалов. Элементы класса $V^{(B)}$ называют B -значными множествами. Стоит подчеркнуть, что $V^{(B)}$ состоит только из функций.

I.2. Используя способ построения $V^{(B)}$, определяют две функции:

$$x, y \in V^{(B)} \mapsto [x \in y] \in B;$$

$$x, y \in V^{(B)} \mapsto [x = y] \in B.$$

При этом элемент $[x \in y]$ называют оценкой или оценкой истинности принадлежности B -значного множества x — элемента булевозначного универсума — B -значному множеству y . Аналогично, элемент $[x = y]$ называют оценкой равенства x и y в $V^{(B)}$. Указанные функции определены схемой совместной рекурсии:

$$[x \in y] := \bigvee_{z \in \text{dom}(y)} y(z) \wedge [z = x];$$

$$[x = y] := \bigwedge_{z \in \text{dom}(x)} x(z) \Rightarrow [z \in y] \wedge \bigwedge_{z \in \text{dom}(y)} y(z) \Rightarrow [z \in x].$$

I.3. Имея оценки истинности атомарных формул, нетрудно приписать такую оценку каждой формуле формальной теории множеств. В самом деле, такие формулы представляют собой конечные тексты, полученные из атомарных формул применениями пропозициональных связей $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftarrow$, кванторов \forall, \exists и разумной расстановкой скобок. Таким образом, если φ и ψ — оцененные формулы и $[\varphi], [\psi] \in B$ — их оценки, то полагают

$$[\varphi \wedge \psi] := [\varphi] \wedge [\psi]; [\varphi \vee \psi] := [\varphi] \vee [\psi];$$

$$[\varphi \Rightarrow \psi] := [\varphi] \Rightarrow [\psi]; [\neg \varphi] := \neg [\varphi];$$

$$[\forall x \varphi(x)] := \bigwedge_{x \in V^{(B)}} [\varphi(x)]; [\exists x \varphi(x)] := \bigvee_{x \in V^{(B)}} [\varphi(x)].$$

Здесь $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg$ означают также соответствующие операции в алгебре B . Указанные определения обеспечивают единичную оценку для классических тавтологий.

I.4. Универсум $V^{(B)}$ с указанным правилом оценивания формул является моделью теории множеств в том смысле, что для любой теоремы φ теории ZFC (теории множеств Цермело — Френкеля с аксиомой выбора) выполнено $[\varphi] = 1$ или, как говорят, φ истинно внутри $V^{(B)}$. Приведенный факт часто называют принципом переноса.

Стоит отметить здесь же, что для формулы $\varphi(\cdot)$ теории ZFC и элемента $x \in V^{(B)}$ фраза " $\varphi(x)$ внутри $V^{(B)}$ " или, более полно, " x удовлетворяет φ внутри $V^{(B)}$ " означает равенство $[\varphi(x)] = 1$.

Для элемента $x \in V^{(b)}$ и произвольного $b \in B$ определена функция

$$bx: x \mapsto bx(x) \quad (x \in \text{dom}(x)).$$

Эта запись подразумевает, что $b\emptyset := \emptyset$ для $b \in B$.

1.5. Для B -значных множеств x и y и элемента $b \in B$ выполнено:

$$\llbracket x \in by \rrbracket = b \llbracket x \in y \rrbracket;$$

$$\llbracket bx = by \rrbracket = b \Rightarrow \llbracket x = y \rrbracket;$$

$$\llbracket x = bx \rrbracket = \llbracket b'x = \emptyset \rrbracket = b' \Rightarrow \llbracket x = \emptyset \rrbracket.$$

◁ В самом деле, привлекая определения, имеем

$$\begin{aligned} \llbracket x \in by \rrbracket &= \bigvee_{z \in \text{dom}(y)} (by)(z) \wedge \llbracket x = z \rrbracket = \\ &= \bigvee_{z \in \text{dom}(y)} b \wedge y(z) \wedge \llbracket x = z \rrbracket = b \llbracket x \in y \rrbracket. \end{aligned}$$

Отсюда последовательно выводим:

$$\begin{aligned} \llbracket bx = by \rrbracket &= \bigwedge_{z \in \text{dom}(y)} \neg by(z) \vee \llbracket x \in bx \rrbracket \wedge \bigwedge_{z \in \text{dom}(y)} \neg bx(z) \vee \\ &\vee \llbracket x \in by \rrbracket = \bigwedge_{z \in \text{dom}(y)} (\neg b \vee \neg y(z) \vee b \llbracket x \in x \rrbracket) \wedge \bigwedge_{z \in \text{dom}(x)} (\neg b \vee \neg x(z) \vee b \llbracket x \in y \rrbracket) = \\ &= \bigwedge_{z \in \text{dom}(y)} (\neg b \vee \neg y(z) \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg y(z) \vee \llbracket x \in x \rrbracket) \wedge \\ &\wedge \bigwedge_{z \in \text{dom}(x)} (\neg b \vee \neg x(z) \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg x(z) \vee \llbracket x \in y \rrbracket) = \neg b \vee \llbracket x = y \rrbracket. \end{aligned}$$

Из принципа переноса и аксиомы экстенциональности

$$\llbracket x = bx \rrbracket = \llbracket \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in bx) \rrbracket.$$

Кроме того, $\llbracket x \in bx \rrbracket = b \llbracket x \in x \rrbracket \leq \llbracket x \in x \rrbracket$, т.е. $\llbracket x \in bx \rrbracket \rightarrow \llbracket x \in x \rrbracket = 1$. Отсюда выводим:

$$\llbracket x = bx \rrbracket = \bigwedge_z \llbracket x \in x \rrbracket \Rightarrow \llbracket x \in bx \rrbracket =$$

$$= \bigwedge_x (\neg \llbracket x \in x \rrbracket \vee (b \wedge \llbracket x \in x \rrbracket)) = \bigwedge_x (\neg \llbracket x \in x \rrbracket \vee b) \wedge (\neg \llbracket x \in x \rrbracket \vee \llbracket x \in x \rrbracket) =$$

$$= \bigwedge_x \neg \llbracket x \in x \rrbracket \vee b = b \vee \bigwedge_x \neg \llbracket x \in x \rrbracket = b \vee \llbracket \forall x \neg \llbracket x \in x \rrbracket \rrbracket =$$

$$= b \vee \llbracket x = \emptyset \rrbracket = b' \Rightarrow \llbracket x = \emptyset \rrbracket = \llbracket bx = b'\emptyset \rrbracket = \llbracket b'x = \emptyset \rrbracket. \triangleright$$

1.6. В булевозначном универсуме $V^{(b)}$ соотношение

$\llbracket x = y \rrbracket = 1$ совсем не означает, что функции x и y совпадают. Например, нулевая функция на любом слое $V^{(b)}$ играет роль пустого множества внутри $V^{(b)}$. В этой связи осуществляют переход к отдельному булевозначному универсуму $\bar{V}^{(b)}$. Для определения $\bar{V}^{(b)}$ в классе $V^{(b)}$ рассматривают отношение $x \sim y := \llbracket x = y \rrbracket = 1$, которое, бесспорно, является эквивалентностью. Выбирая в каждом классе эквивалентных функций элемент представителя наименьшего ранга ("прием Фреге - Рассела - Скотта"), приходят к отдельному универсуму $\bar{V}^{(b)}$. Очевидно, что для формулы \mathcal{U} теории ZFC будет $\llbracket x = y \rrbracket = 1 \rightarrow \neg \llbracket \mathcal{U}(x) \rrbracket = \llbracket \mathcal{U}(y) \rrbracket$. Таким образом в отдельном универсуме можно вычислять оценки формул, не задумываясь о способе выбора представителя класса эквивалентности. В этой связи в дальнейшем без оговорок осуществляют отождествление $V^{(b)} := \bar{V}^{(b)}$. Подчеркнем, что в $V^{(b)}$ корректно определен элемент bx для $x \in V^{(b)}$ и $b \in B$. В самом деле, в силу 1.5

$$\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket = 1 \Rightarrow \llbracket bx_1 = bx_2 \rrbracket = b \Rightarrow \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket = 1.$$

Это обстоятельство позволяет, в частности, использовать запись $0 = \emptyset$, имея в виду, что $0\emptyset = \emptyset = 0x$ для $x \in V^{(b)}$.

1.7. В $V^{(b)}$ справедлив следующий принцип максимума.

Для каждой формулы \mathcal{U} теории ZFC имеется B -значное множество x , для которого

$$\llbracket \exists x \mathcal{U}(x) \rrbracket = \llbracket \mathcal{U}(x) \rrbracket.$$

В частности, для элементов $x, y \in V^{(b)}$ определены элементы $\{x\}^b, \{y\}^b, \{x, y\}^b, \langle x, y \rangle^b$, играющие соответственно роли множеств $\{x\}, \{y\}, \{x, y\}$ и $\langle x, y \rangle$ внутри $V^{(b)}$.

1.8. В $V^{(b)}$ справедлив следующий принцип перемешивания.

Пусть $(b_{\mathbb{F}})_{\mathbb{F} \in \Sigma}$ - разбиение единицы в B , т.е. $b_{\mathbb{F}_1} \neq b_{\mathbb{F}_2} \Rightarrow b_{\mathbb{F}_1} \wedge b_{\mathbb{F}_2} = 0 \wedge \bigvee_{\mathbb{F} \in \Sigma} b_{\mathbb{F}} = 1$. Для любого семейства

$(x_f)_{f \in \Sigma}$ элементов универсума $V^{(B)}$ существует, и притом единственное, перемешивание $(x_f)_{f \in \Sigma}$ с вероятностями $(b_f)_{f \in \Sigma}$, т.е. элемент x отделимого универсума, обозначаемый $\sum_{f \in \Sigma} b_f x_f$, такой, что $\llbracket x = x_f \rrbracket \geq b_f$ для всех $f \in \Sigma$. При этом выполнено

$$x = \sum_{f \in \Sigma} b_f x_f \iff (\forall f \in \Sigma) \quad b_f x = b_f x_f.$$

1.9. Для любых двух элементов $x, y \in V^{(B)}$ внутри $V^{(B)}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} b \langle x, y \rangle^B &= b \langle bx, by \rangle^B. \\ \triangle \llbracket b \langle x, y \rangle^B = b \langle bx, by \rangle^B \rrbracket &= b \Rightarrow \llbracket \langle x, y \rangle^B = \langle bx, by \rangle^B \rrbracket = \\ &= b \Rightarrow (\llbracket x = bx \rrbracket \wedge \llbracket y = by \rrbracket) = b \Rightarrow (b' \Rightarrow \llbracket x = \emptyset \rrbracket \wedge b' \Rightarrow \llbracket y = \emptyset \rrbracket) = \\ &= b' \vee ((b \vee \llbracket x = \emptyset \rrbracket) \wedge (b \vee \llbracket y = \emptyset \rrbracket)) = \\ &= (b' \vee b \vee \llbracket x = \emptyset \rrbracket) \wedge (b' \vee b \vee \llbracket y = \emptyset \rrbracket) = 1. \triangleright \end{aligned}$$

1.10. Пусть $(b_f)_{f \in \Sigma}$ — разложение единицы, $(x_f)_{f \in \Sigma}$ и $(y_f)_{f \in \Sigma}$ — семейства элементов $V^{(B)}$, тогда

$$\sum_{f \in \Sigma} b_f \langle x_f, y_f \rangle^B = \langle \sum_{f \in \Sigma} b_f x_f, \sum_{f \in \Sigma} b_f y_f \rangle^B.$$

\triangle Положим

$$x := \sum_{f \in \Sigma} b_f x_f; \quad y := \sum_{f \in \Sigma} b_f y_f.$$

Тогда, привлекая 1.8 и 1.9, имеем

$$b_f \langle x, y \rangle^B = b_f \langle b_f x, b_f y \rangle^B = b_f \langle b_f x_f, b_f y_f \rangle^B = b_f \langle x_f, y_f \rangle^B. \triangleright$$

1.11. Схема рекурсии

$$V_\alpha := \{x : (\exists \beta \in \alpha) x \in \mathcal{P}(V_\beta)\} \quad (\alpha \in \mathcal{O}_n);$$

$$V := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}_n} V_\alpha,$$

где $\mathcal{P}(V_\beta)$ — совокупность подмножеств V_β , определяет класс всех множеств V или, как еще говорят, универсум фон Неймана.

Для множества x определяют элемент x^\wedge булевозначного универсума как выделенный представитель класса, определенного схемой рекурсии

$$\emptyset^\wedge := \emptyset; \quad \text{dom}(x^\wedge) := \{y^\wedge : y \in x\}; \quad \text{im}(x^\wedge) := \{1\}.$$

Элемент x^\wedge называют стандартным именем x .

Для $x \in V$ полагаем $\hat{x} := \{x^\wedge : x \in x\}$. Множество \hat{x} часто называют стандартной областью определения x^\wedge . Происхождение этого названия ясно — "характеристическая функция \hat{x} и есть x^\wedge в отделимом универсуме".

Стоит отметить, что

$$\llbracket y \in x^\wedge \rrbracket = \bigvee_{z \in x} \llbracket y = z^\wedge \rrbracket.$$

Кроме того, если φ — ограниченная формула теории ZFC, т.е. если связанные переменные входят в нее под знаком кванторов, распространенных на какие-либо множества, то для произвольных множеств x_1, \dots, x_n будет

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \iff \llbracket \varphi(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge) \rrbracket = 1.$$

1.12. Тот факт, что B — это булева алгебра, записывается ограниченной формулой. Значит, в силу 1.11 можно утверждать, что B^\wedge — булева алгебра внутри $V^{(B)}$. Ниже используется описание ультрафильтров в B^\wedge в $V^{(B)}$. Для иллюстрации техники вычислений они будут приведены с избыточной подробностью.

1.13. Пусть ψ — элемент в $V^{(B)}$, являющийся ультрафильтром в B^\wedge внутри $V^{(B)}$. Для $b \in B$ положим $\pi_\psi(b) := \llbracket b^\wedge \in \psi \rrbracket$. Тогда π_ψ — эндоморфизм булевой алгебры B . В свою очередь, если π — произвольный эндоморфизм B , то элемент ψ_π , порожденный правилом

$$\text{dom}(\psi_\pi) := \hat{B}; \quad \psi_\pi(b^\wedge) := \pi(b) \quad (b \in B),$$

таков, что ψ_π — ультрафильтр в B^\wedge внутри $V^{(B)}$. При этом справедливы соотношения:

$$\pi_{\psi_{\mathcal{F}}} = \pi; \quad \llbracket \psi_{\mathcal{F}} \rrbracket = \psi \rrbracket = 1.$$

△ Пусть сначала ψ — ультрафильтр в B^1 внутри $V^{(B)}$ и $b_1, b_2 \in B$. Несомненно, что

$$\begin{aligned} \pi_{\psi}(b_1) \wedge \pi_{\psi}(b_2) &= \llbracket b_1' \in \psi \rrbracket \wedge \llbracket b_2' \in \psi \rrbracket \leq \\ &\leq \llbracket b_1' \wedge b_2' \in \psi \rrbracket = \llbracket (b_1 \wedge b_2)' \in \psi \rrbracket = \pi_{\psi}(b_1 \wedge b_2). \end{aligned}$$

Кроме того, если $c \geq b$, то $\llbracket c' \geq b' \rrbracket = 1$ и, значит,

$$\pi_{\psi}(b) = \llbracket b' \in \psi \rrbracket = \llbracket b' \in \psi \rrbracket \wedge \llbracket c' \geq b' \rrbracket \leq \llbracket c' \in \psi \rrbracket = \pi_{\psi}(c).$$

Раз $\llbracket \psi \rrbracket$ — ультрафильтр в $B^1 \rrbracket = 1$, то $\llbracket b' \in \psi \leftrightarrow \neg b' \notin \psi \rrbracket = 1$, т.е.

$$\pi_{\psi}(b) = \llbracket \neg b' \notin \psi \rrbracket = \neg \llbracket b' \in \psi \rrbracket = \neg \llbracket (b')' \in \psi \rrbracket = \neg \pi_{\psi}(b').$$

Если теперь $\pi: B \rightarrow B$ — произвольный эндоморфизм, то заметим для начала, что

$$\llbracket x \in \psi_{\pi} \rrbracket = \bigvee_{b \in B} \pi(b) \wedge \llbracket b' = x \rrbracket \leq \bigvee_{b \in B} \llbracket b' = x \rrbracket = \llbracket x \in B^1 \rrbracket,$$

т.е. $\psi_{\pi} \in B^1$ внутри $V^{(B)}$. При этом

$$\llbracket b' \in \psi_{\pi} \rrbracket = \pi(b) \quad (b \in B).$$

Отсюда видим, что $0 \notin \psi_{\pi}$ в $V^{(B)}$ и, кроме того,

$$\begin{aligned} \llbracket (\forall c \in \psi_{\pi}) (\forall b \in B^1) b \geq c \rightarrow b \in \psi_{\pi} \rrbracket &= \\ &= \bigwedge_{c \in B} \bigwedge_{b \in B} (\pi(c) \wedge \llbracket b' \geq c' \rrbracket) \Rightarrow \llbracket b' \in \psi_{\pi} \rrbracket = \\ &= \bigwedge_{c \in B} \bigwedge_{b \in B} \pi(c) \wedge \llbracket b' c' = c' \rrbracket \Rightarrow \pi(b) = \bigwedge_{c \in B} \bigwedge_{b \in B} \pi(c) \Rightarrow \pi(b) = 1. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что

$$\llbracket (\forall b_1 \in \psi_{\pi}) (\forall b_2 \in \psi_{\pi}) b_1 \wedge b_2 \in \psi_{\pi} \rrbracket = 1,$$

$$\llbracket (\forall b \in B^1) b \in \psi_{\pi} \vee \neg b \in \psi_{\pi} \rrbracket = 1.$$

Для завершения доказательства проведем следующие выкладки:

$$\llbracket \psi_{\pi} = \psi \rrbracket = \bigwedge_x \llbracket x \in \psi_{\pi} \leftrightarrow x \in \psi \rrbracket = \bigwedge_x \bigvee_{b \in B} \pi(b) \wedge \llbracket b' = x \rrbracket \leftrightarrow \llbracket x \in \psi \rrbracket =$$

$$= \bigwedge_x \bigvee_{b \in B} \llbracket b' \in \psi \wedge b' = x \rrbracket \leftrightarrow \llbracket x \in \psi \rrbracket =$$

$$= \bigwedge_x \llbracket (\exists b \in B^1) b \in \psi \wedge b = x \rrbracket \leftrightarrow x \in \psi \rrbracket = 1,$$

ибо по условию $\psi = \psi \cap B^1$ внутри $V^{(B)}$. ▽

I.14. Как видно, следует предпринять усилия, направленные на автоматизацию подобного рода скучных вычислений. Такую автоматизацию и осуществляет программа спуск-подъем, излагаемая ниже.

§2. Простейшие спуски

2.0. Здесь собраны необходимые факты об изображении классов, множеств и соответствий в булевозначных моделях. Полезно с самого начала подчеркнуть политику в терминологии. Слово спуск используется для обозначения результата и способа изображения элемента из $V^{(B)}$ в V .

2.1. Пусть ψ — некоторая формула ZFC и фиксирован набор \mathcal{U} элементов булевозначного универсума. Пусть далее, $A_{\psi} := A_{\psi}(\cdot, \mathcal{U})$ — класс множеств, определяемых посредством ψ . Спуск $A_{\psi} \downarrow$ класса A_{ψ} определяют соотношением

$$A_{\psi} \downarrow := \{t \in V^{(B)} : \llbracket \psi(t, \mathcal{U}) \rrbracket = 1\}.$$

Если $t \in A_{\psi} \downarrow$, то говорят, что t удовлетворяет $\psi(\cdot, \mathcal{U})$ внутри $V^{(B)}$.

2.2. Спуск любого класса сильно цикличен, т.е. выдерживает всевозможные перемешивания семейств своих элементов.

2.3. Пусть φ, ψ — формулы ZFC, причем $A_{\varphi} \downarrow \neq \emptyset$. Тогда

$$\llbracket A_{\varphi} \subset A_{\psi} \rrbracket = \bigwedge_{x \in A_{\varphi} \downarrow} \llbracket \psi(x) \rrbracket.$$

2.4. Для элемента x отдельного булевозначного универсума $V^{(B)}$ его спуск $x \downarrow$ задан правилом

$$x \downarrow := \{t \in V^{(B)} : \llbracket t \in x \rrbracket = 1\},$$

т.е. $x \downarrow = A_{x \downarrow}$. Спуск $x \downarrow$ является множеством. При этом $x \downarrow \subset \text{succ}(\text{dom}(x \downarrow))$, где succ — символ перехода к сильно

цилической оболочке. Полезно подчеркнуть, что для непустого внутри $V^{(B)}$ множества x и формулы y теории ZFC верно

$$(\exists x \in x) \llbracket (\exists x \in x) y(x) \rrbracket = \llbracket y(x) \rrbracket.$$

2.5. Для непустых внутри $V^{(B)}$ множеств x и y выполнено

$$\begin{aligned} \llbracket x \subset y \rrbracket &= 1 \leftrightarrow x \uparrow \subset y \uparrow; (x \cap y) \uparrow = x \uparrow \cap y \uparrow; \\ (x \cup y) \uparrow &= \text{scyc}(x \uparrow \cup y \uparrow); \{x\} \uparrow = \{x\}^B \uparrow = \{x\}; \\ \{x, y\} \uparrow &= \{x, y\}^B \uparrow = \text{scyc}(\{x, y\}); \\ \langle x, y \rangle \uparrow &= \langle x, y \rangle^B \uparrow = \text{scyc}(\{x\}^B, \{x, y\}^B); \\ (x \times y) \uparrow &= \{\langle a, b \rangle^B : a \in x \uparrow, b \in y \uparrow\}. \end{aligned}$$

2.6. Напомним, что для соответствия F из X в Y , т.е. для подмножества F в $X \times Y$ и для любого подмножества A в X поляра $\mathcal{T}_F(A)$ определена правилом

$$\mathcal{T}_F(A) := \{y \in Y : F^{-1}(y) \supset A\} = \{y \in Y : (\forall a \in A) \langle a, y \rangle \in F\}.$$

2.7. Пусть F — соответствие из X в Y внутри $V^{(B)}$. Существует, и притом единственное, соответствие $F \uparrow$ из $X \uparrow$ в $Y \uparrow$ такое, что для любого непустого подмножества A в X внутри $V^{(B)}$ выполнено $F(A) \uparrow = F \uparrow(A \uparrow)$. При этом $\mathcal{T}_F(A) \uparrow = \mathcal{T}_{F \uparrow}(A \uparrow)$ и, кроме того,

$$\llbracket \langle x, y \rangle^B \in F \rrbracket = 1 \leftrightarrow \langle x, y \rangle \in F \uparrow.$$

Δ Если $\llbracket F \neq \emptyset \rrbracket < 1$, то полагаем $F \uparrow := \emptyset$. Если же $\llbracket F \neq \emptyset \rrbracket < 1$, то $\llbracket (\exists x \in X) (\exists y \in Y) \langle x, y \rangle \in F \rrbracket = 1$, т.е. $(\exists x \in X \uparrow) (\exists y \in Y \uparrow) \langle x, y \rangle^B \in F \uparrow$. Для каждого такого $x \in X \uparrow$ полагаем

$$F \uparrow(x) := F(x) \uparrow = \{y \in Y \uparrow : \langle x, y \rangle^B \in F \uparrow\}.$$

Ясно, что тем самым возникает соответствие $F \uparrow \subset X \uparrow \times Y \uparrow$. При этом для A такого, что $A \subset X$ внутри $V^{(B)}$ и A непусто в $V^{(B)}$, будет

$$y \in F(A) \uparrow \leftrightarrow \llbracket y \in F(A) \rrbracket = 1 \leftrightarrow \llbracket (\exists a \in A) \langle a, y \rangle \in F \rrbracket = 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists a \in A \uparrow) \langle a, y \rangle^B \in F \uparrow \leftrightarrow (\exists a \in A \uparrow) y \in F \uparrow(a) \leftrightarrow y \in F \uparrow(A \uparrow).$$

Аналогично,

$$x \in \mathcal{T}_{F \uparrow}(A \uparrow) \leftrightarrow (\forall a \in A \uparrow) x \in F \uparrow(a) \leftrightarrow \bigwedge_{a \in A \uparrow} \llbracket \langle a, x \rangle^B \in F \rrbracket = 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \llbracket (\forall a \in A) \langle a, x \rangle^B \in F \rrbracket = 1 \leftrightarrow \llbracket x \in \mathcal{T}_F(A) \rrbracket = 1 \leftrightarrow x \in \mathcal{T}_F(A) \uparrow.$$

Утверждение об единственности $F \uparrow$ не вызывает сомнений. ▽

2.8. Соответствие $F \uparrow \subset X \uparrow \times Y \uparrow$ называют спуском F из X в Y внутри $V^{(B)}$. Отметим, что $(G \circ F) \uparrow = G \uparrow \circ F \uparrow$; $F^{-1} \uparrow = F \uparrow^{-1}$; $I_A \uparrow = I_A$ для тождественного отношения I_A на A внутри $V^{(B)}$. Таким образом, в частности, спуск является ковариантным функтором на категории соответствий внутри $V^{(B)}$ в обычную категорию соответствий.

§3. Простейшие подъемы

3.0. Здесь собраны необходимые факты о переходе от подмножеств $V^{(B)}$ к элементам $V^{(B)}$, т.е. к процедуре подъема множеств и соответствий.

3.1. Пусть $X \in \mathcal{P}(V^{(B)})$, т.е. X — это множество, составленное из B -значных множеств. Положим $\emptyset \uparrow := \emptyset$ и

$$\text{dom}(X \uparrow) := X; \text{im}(X \uparrow) := \{1\}$$

при $X \neq \emptyset$. Элемент $X \uparrow$ отдельного универсума $V^{(B)}$, т.е. выделенный представитель предъявленного класса, называют подъемом X . Отметим, что

$$\llbracket x \in X \uparrow \rrbracket = \bigvee_{t \in X} \llbracket t = x \rrbracket.$$

И, кроме того, $\widehat{x} \uparrow = x^\wedge$, т.е. стандартное имя x^\wedge множества x есть подъем его стандартной области определения \widehat{x} .

3.2. Для непустых в $V^{(B)}$ элементов x и y будет

$$\{x\}^B = \{x\} \uparrow; \{x, y\}^B = \{x, y\} \uparrow; \langle x, y \rangle^B = \{\{x\}^B, \{x, y\}^B\} \uparrow;$$

$$x \times y = \{\langle a, b \rangle^B : \langle a, b \rangle \in x \uparrow \times y \uparrow\} \uparrow;$$

$$x \uparrow \cap y \uparrow = (x \cap y) \uparrow.$$

$$x \uparrow \cup y \uparrow = (x \cup y) \uparrow$$

3.3. Пусть $X, Y \in \mathcal{P}(V^{(3)})$ и F - соответствие из X в Y . Существует, и притом единственное, соответствие $F\uparrow$ из $X\uparrow$ в $Y\uparrow$ внутри $V^{(8)}$ такое, что для каждого подмножества A множества X выполнено $F\uparrow(A\uparrow) = F(A)\uparrow$ в том и только в том случае, если F экстенционально. Последнее означает, что

$$y_1 \in F(x_1) \rightarrow \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \leq \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket.$$

При этом $F\uparrow = F'\uparrow$, где $F' := \{ \langle x, y \rangle^b : \langle x, y \rangle \in F \}$.

△ Установим прежде всего необходимость условия экстенциональности. Отметим для этого, что при $y \in F(x_1)$ будет $\llbracket y \in F(x_1)\uparrow \rrbracket = 1$. Значит, $\llbracket y_1 \in F\uparrow(x_1) \rrbracket = 1$. Помимо этого, по принципу переноса

$$\llbracket x_1 = x_2 \wedge y_1 \in F\uparrow(x_1) \rightarrow y_1 \in F\uparrow(x_2) \rrbracket = 1.$$

Иными словами, учитывая правила оценивания и 3.1,

$$\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket = \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \wedge \llbracket y_1 \in F\uparrow(x_1) \rrbracket \leq \llbracket y_1 \in F\uparrow(x_2) \rrbracket = \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket.$$

Единственность $F\uparrow$ (но не его существование!) обеспечивает принцип переноса в связи с тем, что соответствие определяется своими значениями. Итак, осталось предъявить $F\uparrow$. Для этого возьмем $F'\uparrow$. С учетом 2.5, поскольку $F \subset X \times Y \subset X\uparrow \times Y\uparrow$, видим, что $F'\uparrow \subset (X\uparrow \times Y\uparrow)\uparrow$. Стало быть, $F'\uparrow \subset X\uparrow \times Y\uparrow$ внутри $V^{(8)}$.

Для доказательства требуемых равенств разберем сначала случай одноэлементного множества. Иначе говоря, возьмем $x_1 \in \text{dom}(F)$. Тогда, привлекая условие экстенциональности, последовательно получаем

$$\begin{aligned} \llbracket y_1 \in F\uparrow(x_1) \rrbracket &= \llbracket \langle x_1, y_1 \rangle^b \in F\uparrow \rrbracket = \bigvee_{z \in F'} \llbracket z = \langle x_1, y_1 \rangle^b \rrbracket = \\ &= \bigvee_{\langle x_2, y_2 \rangle \in F} \llbracket \langle x_1, y_1 \rangle^b = \langle x_2, y_2 \rangle^b \rrbracket = \bigvee_{\langle x_2, y_2 \rangle \in F} \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \wedge \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket \leq \\ &\leq \bigvee_{\langle x_2, y_2 \rangle \in F} \llbracket y_2 \in F(x_1)\uparrow \rrbracket \wedge \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket \leq \llbracket y_1 \in F(x_1)\uparrow \rrbracket = \\ &= \bigvee_{y_2 \in F(x_1)} \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket = \bigvee_{y_2 \in F(x_1)} \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket \wedge \llbracket x_1 = x_1 \rrbracket = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \bigvee_{x_2 \in \text{dom}(F)} \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket \wedge \llbracket x_2 = x_1 \rrbracket = \\ &= \bigvee_{\langle x_2, y_2 \rangle \in F} \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket \wedge \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket = \llbracket y_1 \in F\uparrow(x_1) \rrbracket. \end{aligned}$$

Окончательно, выводим равенство оценок

$$\llbracket y_1 \in F\uparrow(x_1) \rrbracket = \llbracket y_1 \in F(x_2)\uparrow \rrbracket.$$

Пусть теперь A - произвольное подмножество X . Имеем в силу уже установленного и принципа переноса:

$$\begin{aligned} \llbracket y \in F(A)\uparrow \rrbracket &= \bigvee_{z \in F(A)} \llbracket y = z \rrbracket = \bigvee_{a \in A} \bigvee_{z \in F(a)} \llbracket y = z \rrbracket = \\ &= \bigvee_{a \in A} \llbracket y \in F(a)\uparrow \rrbracket = \bigvee_{a \in A} \llbracket y \in F\uparrow(a) \rrbracket = \\ &= \llbracket (\exists a \in A) y \in F\uparrow(a) \rrbracket = \llbracket y \in F\uparrow(A\uparrow) \rrbracket. \quad \triangleright \end{aligned}$$

3.4. Элемент $F\uparrow$ в $V^{(8)}$, отвечающий экстенциональному соответствию F , называют подъемом F .

Суперпозиция экстенциональных соответствий G и F экстенциональна. При этом $G \circ F\uparrow = G\uparrow \circ F\uparrow$. Отметим здесь же, что в случае одновременной экстенциональности F и F^{-1} будет $F\uparrow^{-1} = F^{-1}\uparrow$. Однако экстенциональность F не обеспечивает, вообще говоря, экстенциональности F^{-1} . Подчеркнем здесь же, что если экстенциональное соответствие F - это функция из X в Y , то подъем $F\uparrow$ - также функция из $X\uparrow$ в $Y\uparrow$ внутри $V^{(8)}$. При этом экстенциональность F выглядит так:

$$x_1, x_2 \in X \rightarrow \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \leq \llbracket F(x_1) = F(x_2) \rrbracket.$$

3.5. Соответствие $F \subset X \times Y$ экстенционально в том и только в том случае, если

$$\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \leq \llbracket F(x_1)\uparrow = F(x_2)\uparrow \rrbracket$$

для $x_1, x_2 \in \text{dom}(F)$, т.е. при условии экстенциональности отображения $x \rightarrow F(x)\uparrow$, действующего из X в $\mathcal{P}(Y\uparrow)\uparrow$.

△ Если F экстенционально, то

$$1 = \llbracket x_1 = x_2 \rightarrow F\uparrow(x_1) = F\uparrow(x_2) \rrbracket \rightarrow \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \leq \llbracket F(x_1)\uparrow = F(x_2)\uparrow \rrbracket.$$

В свою очередь, при выполнении последнего условия будет

$$\begin{aligned} \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket &\leq \llbracket \forall y (y \in F(x_1) \leftrightarrow y \in F(x_2)) \rrbracket = \\ &= \bigwedge_{y_1 \in F(x_1)} \llbracket y_1 \in F(x_2) \rrbracket \wedge \bigwedge_{y_2 \in F(x_2)} \llbracket y_2 \in F(x_1) \rrbracket \leq \\ &\leq \llbracket y_1 \in F(x_2) \rrbracket = \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket, \\ \text{т.е. } F &\text{ экстенционально. } \triangleright \end{aligned}$$

§4. Спуск-подъем и подъем-спуск для соответствий

4.0. Здесь приводятся сведения о последовательном применении процедур спуска и подъема.

4.1. Для непустого внутри $V^{(B)}$ множества X выполнено $X \uparrow \downarrow = X$. Для подмножества X в $V^{(B)}$ выполнено $X \uparrow \downarrow = \text{сук}(X)$.

4.2. Для непустого внутри $V^{(B)}$ соответствия F выполнено $F \uparrow \downarrow = F$.

△ Пусть $\llbracket F \subset X \times Y \wedge F \neq \emptyset \rrbracket = 1$. Несомненно, что $F \uparrow \subset X \uparrow \times Y \uparrow$ и $F \uparrow \downarrow \subset X \uparrow \downarrow \times Y \uparrow \downarrow$ внутри $V^{(B)}$, т.е. $F \uparrow \downarrow \subset X \times Y$ в силу 4.1. Помимо этого для $x \in X \uparrow$ выполнено

$$F \uparrow \downarrow (x) = F \uparrow \downarrow (x \uparrow \downarrow) = F \uparrow (x \uparrow) \downarrow = F(x) \uparrow \downarrow = F(x).$$

Осталось сослаться на принцип переноса. ▽

4.3. Для каждого экстенционального соответствия $F \subset X \times Y$, где $X, Y \in \mathcal{P}(V^{(B)})$, выполнено

$$F \uparrow \downarrow (x) = F(x) \uparrow \downarrow \quad (x \in X).$$

При этом для произвольного непустого подмножества A в X будет

$$\mathcal{T}_{F \uparrow \downarrow}(A) = \mathcal{T}_{F \downarrow}(A \uparrow) \uparrow; \mathcal{T}_{F \uparrow \downarrow}(A) \downarrow = \mathcal{T}_{F \downarrow}(A \downarrow).$$

△ Прежде всего, для $x \in X$ очевидно $x \in X \uparrow \downarrow$. Отсюда заключаем, что $F \uparrow \downarrow (x) = F \downarrow (x \downarrow) \uparrow = F(x) \uparrow \downarrow$. Теперь для произвольного непустого A в X получаем

$$z \in \mathcal{T}_{F \downarrow}(A \uparrow) \uparrow \leftrightarrow \llbracket (\forall a \in A \uparrow) z \in \mathcal{T}_{F \downarrow}(a) \rrbracket = 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \bigwedge_{a \in A} \llbracket z \in F \downarrow(a) \rrbracket = 1 \leftrightarrow (\forall a \in A) z \in F \downarrow(a) \uparrow \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall a \in A) z \in F \uparrow \downarrow(a) \leftrightarrow z \in \mathcal{T}_{F \uparrow \downarrow}(A).$$

Наконец, ввиду сильной цикличности множества $\mathcal{T}_{F \uparrow \downarrow}(A)$ из уже доказанного заключаем:

$$\mathcal{T}_{F \uparrow \downarrow}(A) \uparrow \downarrow = \mathcal{T}_{F \uparrow \downarrow}(A) = \mathcal{T}_{F \downarrow}(A \uparrow) \uparrow.$$

Остается сослаться на 2.3. ▽

4.4. Пусть F — соответствие из $X \uparrow$ в $Y \uparrow$, где $X, Y \in V^{(B)}$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) F экстенционально и $F \uparrow \downarrow = F$;
- (2) имеет место равенство $F' = F' \uparrow \downarrow$;
- (3) F' — сильно циклическое множество;
- (4) для любых $x \in X \uparrow$ и $b \in B$ выполнено

$$F(x) = F(x) \uparrow \downarrow; F \circ \sigma_{X \uparrow}(b) \subset \sigma_{Y \uparrow}(b) \circ F,$$

где $\sigma_Z(b) := \{ \langle z_1, z_2 \rangle \in Z^2 : \llbracket z_1 = z_2 \rrbracket \geq b \}$.

△ (1) \Rightarrow (2). Включение $F' \subset F' \uparrow \downarrow$ очевидно. В свою очередь,

$$\langle x, y \rangle \in F' \uparrow \downarrow \rightarrow \llbracket \langle x, y \rangle \in F \rrbracket = 1 \rightarrow \llbracket \langle x, y \rangle \in F \uparrow \downarrow \rrbracket = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \langle x, y \rangle \in F \uparrow \downarrow \rightarrow \langle x, y \rangle \in F \rightarrow \langle x, y \rangle^b \in F!$$

(2) \Rightarrow (3) очевидно.

(3) \Rightarrow (4). Пусть $(b_\beta)_{\beta \in \Sigma}$ — разбиение единицы и $(y_\beta)_{\beta \in \Sigma}$ — семейство элементов $F(x)$. Ясно, что $\langle x, y_\beta \rangle^b \in F'$ и, стало быть, привлекая 1.10, выводим

$$\langle x, \sum_{\beta \in \Sigma} b_\beta y_\beta \rangle^b = \langle \sum_{\beta \in \Sigma} b_\beta x, \sum_{\beta \in \Sigma} b_\beta y_\beta \rangle^b = \sum_{\beta \in \Sigma} b_\beta \langle x, y_\beta \rangle^b \in F'.$$

Отсюда $\sum_{\beta \in \Sigma} b_\beta y_\beta \in F(x)$. На основании 4.1 заключаем:

$$F(x) = F(x) \uparrow \downarrow.$$

Заметим теперь, что

$$\langle x, y \rangle \in F \leftrightarrow \langle x, y \rangle^b \in F' \leftrightarrow \langle x, y \rangle^b \in F' \uparrow \downarrow \leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (F' \uparrow \downarrow),$$

т.е. F — это спуск соответствия $F' \uparrow \downarrow$ из X в Y внутри

$V^{(b)}$ и, стало быть, F экстенционально. Отсюда для $y_1 \in F(x_1)$ верно

$$\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \leq \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} \llbracket y_2 = y_1 \rrbracket = \llbracket \bar{y}_2 = y_1 \rrbracket$$

для некоторого $\bar{y} \in F(x_2)$ в силу сильной цикличности $F(x_2)$. Итак, для $x_2 \in X \uparrow$ и $y_1 \in F \circ \sigma_{X \uparrow}(b)(x_2)$ для некоторого x_1 такого, что $\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \geq b$, найдется \bar{y}_2 , для которого $y_1 \in \sigma_{Y \uparrow}(\bar{y}_2)$ и $y_2 \in F(x_2)$. Последнее означает, что $\langle x_2, y_1 \rangle \in \sigma_{Y \uparrow}(b) \circ F$.

(4) \Rightarrow (I). Для $y_1 \in F(x_1)$ и $x_2 \in X \uparrow$ имеем

$$\langle x_2, y_1 \rangle \in F \circ \sigma_{X \uparrow}(\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket)(x_2) \subset \sigma_{Y \uparrow}(b) \circ F(x_2)$$

по условию. Иначе говоря, найдется $y_2 \in F(x_2)$, для которого

$$\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \leq \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket \leq \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket.$$

Следовательно, F экстенционально. При этом для каждого $x \in X \uparrow$ с учетом 4.3 и условия будет $F(x) = F(x) \uparrow \uparrow = F \uparrow \uparrow(x)$, т.е. $F = F \uparrow \uparrow$. Δ

4.5. Отметим, что конструкции, изложенные в §§2-4, естественным и очевидным образом переносятся на случай многоместных соответствий. В дальнейшем мы будем использовать соответствующие обобщения без особых разъяснений.

§5. Спуски и подъемы алгебраических систем

5.0. В этом параграфе детализируются процедуры спуска и подъема общих алгебраических систем, изученные впервые Соловьевым и Тененбаумом при исследовании изображений булевых алгебр [7].

5.1. Пусть $\Sigma := \langle F, \mu \rangle$ - некоторая сигнатура и $\mathcal{X} := \langle X, \nu^{\mathcal{X}} \rangle$ - (универсальная) алгебра сигнатуры Σ с носителем X и интерпретацией $\nu^{\mathcal{X}}$. Иными словами, F - множество символов операций, а $\mu: F \rightarrow \omega$ - отображение, указывающее целое число - ариность $\mu(f)$ - операции $\nu^{\mathcal{X}}(f)$ в множестве X для каждого $f \in F$. Алгебру \mathcal{X} называют экстенциональной, если X - подмножество отделимого булевозначного универсума $V^{(b)}$ и, кроме того, для каждого $f \in F$ отображение $\nu^{\mathcal{X}}(f): X^{\mu(f)} \rightarrow X$ экстенционально.

5.2. Алгебра \mathcal{X} с носителем X является экстенциональной в том и только в том случае, если отображение $\rho_{\mathcal{X}}: b \rightarrow \sigma_{\mathcal{X}}(b)$ действует из B в множество $\text{Cong}(\mathcal{X})$ конгруэнций \mathcal{X} . При этом $\rho_{\mathcal{X}}$ сохраняет произвольные непустые пересечения:

$$\emptyset \neq B_0 \subset B \rightarrow \rho_{\mathcal{X}}(\inf B_0) = \bigcap \{ \rho_{\mathcal{X}}(b_i) : b_i \in B_0 \}$$

и множество $\rho_{\mathcal{X}}(0)$ совпадает с тождественным отношением I_X .

Δ Пусть \mathcal{X} - экстенциональная алгебра и $f \in F$. Считаем для удобства, что $\mu(f) = 1$. Тогда

$$\langle x_1, x_2 \rangle \in \rho_{\mathcal{X}}(b) \leftrightarrow b'x_1 = b'x_2 \leftrightarrow \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \geq b' \rightarrow$$

$$\rightarrow \llbracket \nu^{\mathcal{X}}(f)(x_1) = \nu^{\mathcal{X}}(f)(x_2) \rrbracket \geq \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \geq b' \rightarrow \langle \nu^{\mathcal{X}}(f)(x_1), \nu^{\mathcal{X}}(f)(x_2) \rangle \in \rho_{\mathcal{X}}(b).$$

В свою очередь, если $\rho_{\mathcal{X}}(\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket')$ - конгруэнция, то

$$\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket = \bigvee \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket' \leq \llbracket \nu^{\mathcal{X}}(f)(x_1) = \nu^{\mathcal{X}}(f)(x_2) \rrbracket,$$

т.е. $\nu^{\mathcal{X}}(f)$ - экстенциональная функция.

Наконец, для $\emptyset \neq B_0 \subset B$ выполнено

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{X}}(\inf B_0) &= \{ \langle x_1, x_2 \rangle : \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \geq \bigwedge B_0 \} = \\ &= \{ \langle x_1, x_2 \rangle : \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \geq \sup \{ b' : b \in B_0 \} \} = \bigcap \{ \langle x_1, x_2 \rangle : \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket \geq b' \} = \bigcap \{ \rho_{\mathcal{X}}(b) : b \in B_0 \}. \end{aligned}$$

5.3. Пусть $\Sigma := \langle R, F, \mu \rangle$ - некоторая сигнатура и \mathcal{X} представляет собой алгебраическую систему сигнатуры Σ^1 внутри $V^{(b)}$. Иначе говоря, \mathcal{X} - это объект булевозначного универсума, являющийся B -парой: $\mathcal{X} := \langle X, \nu^{\mathcal{X}} \rangle^b$, где элементы X , $\nu^{\mathcal{X}} \in V^{(b)}$ играют, соответственно, роли носителя \mathcal{X} и интерпретации Σ^1 в X внутри $V^{(b)}$. Для $r \in R$ и $f \in F$ ясно, что

$$\llbracket \nu^{\mathcal{X}}(r) \rrbracket - \text{это } \mu^1(r^1) - \text{местное отношение в } X \rrbracket = 1;$$

$$\llbracket \nu^{\mathcal{X}}(f) \rrbracket - \text{это } \mu^1(f^1) - \text{местная операция на } X \rrbracket = 1.$$

Определяем теперь отображение $\nu \downarrow$, полагая

$$\nu \downarrow(r) := \nu^{\mathcal{X}}(r^1) \downarrow; \quad \nu \downarrow(f) := \nu^{\mathcal{X}}(f^1) \downarrow,$$

где $\nu^{\mathcal{X}}(r^1) \downarrow$ и $\nu^{\mathcal{X}}(f^1) \downarrow$ - спуски отношения $\nu^{\mathcal{X}}(r^1)$ и функции $\nu^{\mathcal{X}}(f^1)$ внутри $V^{(b)}$ соответственно. Возникающая алгебраическая система сигнатуры Σ с носителем $X \downarrow$ и интерпретацией $\nu \downarrow$ называется спуском исходной системы и обозначается $\mathcal{X} \downarrow$. Таким образом, $\mathcal{X} \downarrow = \langle X \downarrow, \nu \downarrow \rangle$.

Стоит подчеркнуть, что спуск алгебры сигнатуры Σ^1 - безусловно экстенциональная алгебра сигнатуры Σ .

5.4. Пусть \mathcal{M} - некоторая алгебра сигнатуры Σ с носителем Y . Пусть, далее, задано отображение $f: B \rightarrow \text{Con}(\mathcal{M})$, сохраняющее произвольные непустые пересечения и такое, что $f(0) = I_Y$. Тогда существует алгебра \mathcal{K} сигнатуры Σ^1 внутри $V^{(B)}$ и эндоморфизм χ из \mathcal{M}^1 на \mathcal{K} внутри $V^{(B)}$ такие, что $\chi \upharpoonright \mathcal{M}$ осуществляет мономорфизм \mathcal{M} в экстенциональную алгебру \mathcal{K} сигнатуры Σ и при этом

$$\langle y_1, y_2 \rangle \in f(b) \iff \langle \chi \upharpoonright \mathcal{M}(y_1), \chi \upharpoonright \mathcal{M}(y_2) \rangle \in f_{\mathcal{K}}(b)$$

при каждом $b \in B$ и произвольных $y_1, y_2 \in Y$.

Рассмотрим стандартное имя $\mathcal{M}^1 = \langle Y^1, \mathcal{M}^1 \rangle^B$ алгебры $\mathcal{M}^1 := \langle Y, \mathcal{M} \rangle^B$. Ясно, что внутри $V^{(B)}$ элемент $\mathcal{M}^1 = \langle Y^1, \mathcal{M}^1 \rangle^B$ - универсальная алгебра сигнатуры $\Sigma^1 := \langle F^1, M^1 \rangle^B$. Пусть, далее, Ψ - ультрафильтр в B^1 , порожденный тождественным эндоморфизмом B в соответствии с I.13. Определим, наконец, элемент τ в универсуме $V^{(B)}$ соотношением

$$\langle u, v \rangle^B \in \tau \iff u \in Y^1 \wedge v \in Y^1 \wedge (\exists b \in \Psi) \langle u, v \rangle^B \in \rho^1(b').$$

Полезно с самого начала отметить, что

$$\llbracket \langle u, v \rangle \in \tau \rrbracket = \bigvee_{b \in B} \llbracket \langle u, v \rangle \in \rho^1(b') \rrbracket = \bigvee \{ b \in B : \langle u, v \rangle \in f(b') \}.$$

При этом из представления

$$f(\llbracket \langle u, v \rangle \in \tau \rrbracket) = f(\bigwedge \{ b' : \langle u, v \rangle \in f(b') \}) = \bigwedge \{ f(b') : \langle u, v \rangle \in f(b') \}$$

вытекает: $\langle u, v \rangle \in f(\llbracket \langle u, v \rangle \in \tau \rrbracket)$.

Бесспорно, что τ - это рефлексивное и симметричное отношение в Y^1 внутри $V^{(B)}$. Проверим транзитивность τ . Имеем

$$\begin{aligned} & \llbracket \langle x, y \rangle \in \tau \rrbracket \wedge \llbracket \langle y, z \rangle \in \tau \rrbracket = \\ & = \left(\bigvee_{\langle u, v \rangle \in Y^2} \llbracket x = u^1 \wedge y = v^1 \wedge \llbracket \langle u, v \rangle \in \tau \rrbracket \right) \wedge \\ & \wedge \left(\bigvee_{\langle z, w \rangle \in Y^2} \llbracket y = z^1 \wedge z = w^1 \wedge \llbracket \langle z, w \rangle \in \tau \rrbracket \right) = \\ & = \bigvee_{\substack{\langle u, v \rangle \in Y^2 \\ \langle z, w \rangle \in Y^2}} \llbracket x = u^1 \wedge y = v^1 \wedge y = z^1 \wedge z = w^1 \wedge \llbracket \langle u, v \rangle \in \tau \rrbracket \wedge \llbracket \langle z, w \rangle \in \tau \rrbracket \end{aligned}$$

$$\llbracket \langle z, w \rangle \in \tau \rrbracket \leq \bigvee_{\substack{\langle u, v \rangle \in Y^2 \\ \langle z, w \rangle \in Y^2}} \llbracket x = u^1 \wedge y = v^1 \wedge \llbracket \langle u, v \rangle \in \tau \rrbracket, \llbracket z = w^1 \wedge \llbracket \langle z, w \rangle \in \tau \rrbracket \rrbracket,$$

поскольку справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \llbracket \langle u, v \rangle \in \tau \rrbracket \wedge \llbracket v = z^1 \wedge \llbracket \langle z, w \rangle \in \tau \rrbracket \leq \\ & \leq \bigvee \{ b_1 : \langle u, v \rangle \in f(b_1) \} \wedge \bigvee \{ b_2 : \langle v, w \rangle \in f(b_2) \} \leq \\ & \leq \bigvee \{ b_1 \wedge b_2 : \langle u, v \rangle \in f(b_1 \wedge b_2) \wedge \langle v, w \rangle \in f(b_1 \wedge b_2) \} \leq \\ & \leq \bigvee \{ b : \langle u, w \rangle \in f(b') \} = \llbracket \langle u, w \rangle \in \tau \rrbracket. \end{aligned}$$

Таким образом, действительно, $\llbracket \langle x, y \rangle \in \tau \wedge \langle y, z \rangle \in \tau \rrbracket = \llbracket \langle x, z \rangle \in \tau \rrbracket$.

Установим теперь, что τ - это конгруэнция. Для этого возьмем $f \in F$ и проведем необходимые вычисления (в упрощаемом предположении одноместности f):

$$\begin{aligned} & \llbracket (\bigvee \langle y_1, y_2 \rangle \in Y^{12}) \langle y_1, y_2 \rangle \in \tau \rrbracket = \llbracket (\bigvee \mathcal{M}^1(f)(y_1), \bigvee \mathcal{M}^1(f)(y_2)) \in \tau \rrbracket = \\ & = \bigwedge_{\langle u, v \rangle \in Y^2} \llbracket \langle u, v \rangle \in \tau \rrbracket \rightarrow \llbracket (\bigvee \mathcal{M}^1(f)(u), \bigvee \mathcal{M}^1(f)(v)) \in \tau \rrbracket = \\ & = \bigwedge_{\langle u, v \rangle \in Y^2} \llbracket \langle u, v \rangle \in \tau \rrbracket \rightarrow \llbracket \bigvee \mathcal{M}^1(f)(u), \bigvee \mathcal{M}^1(f)(v) \in \tau \rrbracket = 1. \end{aligned}$$

Последнее равенство основано на том, что $\langle u, v \rangle \in f(\llbracket \langle u, v \rangle \in \tau \rrbracket)$, и с учетом конгруэнтности $f(\llbracket \langle u, v \rangle \in \tau \rrbracket)$ будет

$$\llbracket \langle u, v \rangle \in \tau \rrbracket \leq \llbracket \bigvee \mathcal{M}^1(f)(u), \bigvee \mathcal{M}^1(f)(v) \in \tau \rrbracket.$$

Рассмотрим теперь фактор-алгебру $\mathcal{K} := \mathcal{M}^1 / \tau$ внутри $V^{(B)}$ каноническое отображение $\chi: Y^1 \rightarrow \mathcal{K}$ внутри $V^{(B)}$.

Проверим, что алгебра \mathcal{K} и отображение χ искомы. Для того при $y_1, y_2 \in Y$ и $b \in B$ проведем следующую выкладку:

$$\begin{aligned} & \llbracket \chi \upharpoonright \mathcal{M}(y_1) = \chi \upharpoonright \mathcal{M}(y_2) \rrbracket \geq b' \iff \llbracket \chi(y_1^1) = \chi(y_2^1) \rrbracket \geq b' \iff \\ & \iff b' \leq \llbracket \langle y_1^1, y_2^1 \rangle \in \tau \rrbracket \iff b' \leq \bigvee \{ c : \langle y_1, y_2 \rangle \in f(c') \} \iff \\ & \iff b' \geq \bigwedge \{ c : \langle y_1, y_2 \rangle \in f(c') \} \iff \langle y_1, y_2 \rangle \in f(b). \quad \triangleright \end{aligned}$$

5.5. В [14] для описания спусков и подъёмов использовано понятие B -метрики. Отображение $d: X^2 \rightarrow B$ называют B -метри-

кой на X , если $d(x_1, x_2) = 0 \leftrightarrow x_1 = x_2$, $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ и $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) \vee d(x_3, x_2)$ для любых $x_1, x_2, x_3 \in X$. Из предложения 5.4 вытекает следующее простое описание множеств с B -метрикой.

5.6. Для произвольного множества X с B -метрикой d существует множество \mathcal{X} из $\mathcal{P}(V^{(B)})$ и взаимно-однозначное отображение $\chi: X \rightarrow \mathcal{X}$ такое, что

$$d(x_1, x_2) = \llbracket \chi(x_1) \neq \chi(x_2) \rrbracket$$

для всех $x_1, x_2 \in X$.

◁ Положим $f(b) := \{ \langle x_1, x_2 \rangle \in X^2 : d(x_1, x_2) \leq b \}$. Ясно, что $f(b)$ — отношение эквивалентности в X , причем $f(0) = I_X$ и, кроме того, ρ сохраняет произвольные непустые пересечения. Отсюда по 5.4 выводим, что для некоторых $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(V^{(B)})$ и взаимно-однозначного отображения χ будет

$$\langle x_1, x_2 \rangle \in f(b) \leftrightarrow \llbracket \chi(x_1) = \chi(x_2) \rrbracket \geq b'$$

при $b \in B$. Иными словами, $d(x_1, x_2) \leq b \leftrightarrow \llbracket \chi(x_1) = \chi(x_2) \rrbracket \leq b$, что и требовалось. ▽

5.7. Алгебраическую систему $\mathcal{M} := \langle Y, \mathcal{V} \rangle$ сигнатуры $\Sigma := \langle R, F, \mu \rangle$ называют расширенной с помощью полной булевой алгебры B и отображения ρ или, короче, B -расширенной (посредством ρ), если ρ действует из B в множество конгруэнций $\text{Cong}(\mathcal{M})$ (универсальной алгебры, ассоциированной с \mathcal{M}) и при этом выполнены следующие условия:

(1) отображение f сохраняет произвольные непустые пересечения и, кроме того, $\rho(0) = I_Y$;

(2) \mathcal{M} является \mathcal{J} -сильно циклической алгеброй, т.е. для любого разбиения единицы $(y_f)_{f \in E}$ алгебры B и произвольного семейства $(y_f)_{f \in E}$ носителя Y существует, и притом единственный, элемент $y \in Y$, для которого $\langle y, y_f \rangle \in f(b'_f)$ для $f \in E$. Этот элемент называют ρ -перемешиванием $(y_f)_{f \in E}$ с вероятностями $(b_f)_{f \in E}$;

(3) для каждого $x \in R$ отношение $\mathcal{V}(x)$ является \mathcal{J} -сильно циклическим, т.е. устойчивым относительно всевозможных покоординатных ρ -перемешиваний, т.е. если $\langle y_f, \dots, x_f \rangle \in \mathcal{V}(x)$ и y, \dots, x — это \mathcal{J} -перемешивания $(y_f)_{f \in E}, \dots, (x_f)_{f \in E}$ с вероятностями $(b_f)_{f \in E}$, то $\langle y, \dots, x \rangle \in \mathcal{V}(x)$.

5.8. ТЕОРЕМА. Пусть \mathcal{M} — некоторая

B -расширенная посредством ρ алгебраическая система сигнатуры Σ . Существуют алгебраическая система \mathcal{X} сигнатуры Σ^1 внутри $V^{(B)}$ и изоморфизм γ системы \mathcal{M} на спуск \mathcal{X}^\downarrow такие, что выполнено условие согласования

$$\langle y_1, y_2 \rangle \in f(b) \leftrightarrow \langle \gamma(y_1), \gamma(y_2) \rangle \in f_{\mathcal{X}^\downarrow}(b)$$

для произвольного $b \in B$ и любых y_1, y_2 из носителя \mathcal{M} . Система \mathcal{X} единственна с точностью до изоморфизма внутри $V^{(B)}$, т.е. алгебраическая система \mathcal{X}' сигнатуры Σ^1 внутри $V^{(B)}$, для которой имеется изоморфизм η на спуск \mathcal{X}'^\downarrow , удовлетворяющий условию согласования, обладает изоморфизмом на \mathcal{X} внутри $V^{(B)}$.

◁ Рассмотрим \mathcal{M} как алгебру сигнатуры $\bar{\Sigma} := \langle F, \mu \rangle$, где $\Sigma := \langle R, F, \mu \rangle$. Привлекая 5.4, найдем алгебру \mathcal{X} сигнатуры Σ^1 внутри $V^{(B)}$ и эпиморфизм χ из \mathcal{M}^1 на \mathcal{X} внутри $V^{(B)}$, для которых

$$\langle y_1, y_2 \rangle \in f(b) \leftrightarrow \langle \chi(y_1), \chi(y_2) \rangle \in f_{\mathcal{X}^\downarrow}(b),$$

где $\chi := \chi_b, b \in B$ и $y_1, y_2 \in Y$. По условию $x \in \mathcal{X}^\downarrow$, где X — носитель \mathcal{X} , верно

$$1 = \llbracket (\exists y \in Y^1) \chi(x) = x \rrbracket = \bigvee_{y \in Y} \llbracket \chi(y) = x \rrbracket.$$

Таким образом, существуют разбиение единицы $(b_f)_{f \in E}$ и семейство $(y_f)_{f \in E}$ элементов Y , для которых $\llbracket \chi(y_f) = x \rrbracket \geq b_f$ при $f \in E$. По условию имеется f -перемешивание y , т.е.

$$\langle y, y_f \rangle \in f(b'_f) \leftrightarrow \llbracket \chi(y) = \chi(y_f) \rrbracket \geq b_f \quad (f \in E).$$

Отсюда выводим, что $\llbracket x = \chi(y) \rrbracket \geq \bigvee_{f \in E} b_f = 1$, т.е. $\chi(y) = x$. Окончательно, χ — это изоморфизм \mathcal{M} и \mathcal{X}^\downarrow как универсальных алгебр.

Для $\gamma \in R$ рассмотрим соответствие $\gamma \mapsto \gamma^M(\gamma)$ в $\gamma^M(\gamma)$. Перенесем $\gamma^M(\gamma)$ в $(X\gamma)^M(\gamma)$ посредством отображения γ . Привлекая 4.4, 4.5 и условия, видим, что возникающее соответствие $G(\gamma)$ экстенционально и при этом $G(\gamma) = G(\gamma) \wedge \gamma$. Положим $\gamma(\gamma') := G(\gamma) \wedge \gamma$. Тем самым на R определено экстенциональное отображение. Поднимем его в $V^{(B)}$ и пусть $\gamma^{\mathcal{E}}/R := \gamma \wedge \gamma$ внутри $V^{(B)}$. Ясно, что возникающая система $\mathcal{E} := \langle X, \gamma^{\mathcal{E}} \rangle$ сигнатуры Σ^1 искома. Установим теперь утверждение об единственности. Пусть \mathcal{E}' — еще одна система с нужным свойством и γ' — связанный с ней изоморфизм Y и $X \wedge \gamma'$. Положим $\gamma' := \gamma \gamma'^{-1}$. Ясно, что γ' — экстенциональное отображение $X \wedge \gamma'$ в $X \wedge \gamma$, поскольку для $x_1, x_2 \in X \wedge \gamma'$ будет

$$\langle x_1, x_2 \rangle \in \gamma^{\mathcal{E}'} \wedge (x_1 = x_2) \rightarrow \langle \gamma'^{-1}(x_1), \gamma'^{-1}(x_2) \rangle \in \gamma \wedge (x_1 = x_2) \rightarrow \\ \rightarrow \langle \gamma \gamma'^{-1}(x_1), \gamma \gamma'^{-1}(x_2) \rangle \in \gamma^{\mathcal{E}} \wedge (x_1 = x_2).$$

Рассмотрим подъем $\gamma' \wedge \gamma$. Видно, что $\gamma' \wedge \gamma$ — требуемый изоморфизм \mathcal{E} и \mathcal{E}' внутри $V^{(B)}$. Убедимся, например, в том, что $\gamma' \wedge \gamma$ сохраняет (двуместные) отношения внутри $V^{(B)}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \llbracket (\forall \gamma \in R) \gamma' \wedge \gamma \circ \gamma^{\mathcal{E}}(\gamma) \circ \gamma' \wedge \gamma^{-1} = \gamma^{\mathcal{E}}(\gamma) \rrbracket &= \\ = \bigwedge_{\gamma \in R} \llbracket \gamma' \wedge \gamma \circ \gamma^{\mathcal{E}}(\gamma) \circ \gamma' \wedge \gamma^{-1} = \gamma^{\mathcal{E}}(\gamma) \rrbracket &= \\ = \bigwedge_{\gamma \in R} \llbracket \gamma' \wedge \gamma \circ (\gamma' \circ \gamma^{\mathcal{E}}(\gamma) \circ \gamma'^{-1}) \circ \gamma' \wedge \gamma^{-1} = \gamma^{\mathcal{E}}(\gamma) \rrbracket &= \\ = \bigwedge_{\gamma \in R} \llbracket (\gamma' \circ \gamma' \circ \gamma^{\mathcal{E}}(\gamma) \circ \gamma'^{-1}) \wedge \gamma = \gamma^{\mathcal{E}}(\gamma) \rrbracket &= \\ = \bigwedge_{\gamma \in R} \llbracket \gamma' \circ \gamma^{\mathcal{E}}(\gamma) \circ \gamma'^{-1} \wedge \gamma = \gamma^{\mathcal{E}}(\gamma) \rrbracket &= 1 \end{aligned}$$

в силу определения $\gamma^{\mathcal{E}}(\gamma)$.

5.9. Категорный вариант 5.8, основанный на использовании множеств с B -метрикой, приведен в [14].

5.10. В заключение стоит отметить, что изложенные выше результаты частично анонсированы в [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Современные проблемы математики, т.19. — М.: ВИНТИ, 1982.
2. ИЕХ Т. Теория множеств и метод форсинга. — М.: Мир, 1973.
3. МАНИН Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. — М.: Советское радио, 1979.
4. BELL J.L. Boolean-valued models and independence proofs in set theory. — Oxford: Clarendon Press, 1979.
5. TAKEUTI G., ZARING W. Axiomatic set theory. — Berlin a.o.: Springer, 1975.
6. TAKEUTI G. Two applications of logic to mathematics. — Tokyo: Iwanami, 1978.
7. SOLOVAY R., TENNENBAUM S. Iterated Cohen extensions and Suslin's problem. — Ann. Math., 1973, v.94, N2, p.201-245.
8. КУСРАЕВ А.Г. Некоторые применения теории булевозначных моделей в функциональном анализе. — Новосибирск, 1982. — 42 с. (Препринт №5/ Институт математики СО АН СССР).
9. КУСРАЕВ А.Г., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Субдифференциалы в булевозначных моделях теории множеств. — Сиб. мат. журн., 1983, т.29, №5, с.109-133.
10. ГОРДОН Е.И. К теоремам о сохранении соотношений в K -пространствах. — Сиб. мат. журн., 1982, т.23, №5, с.55-65.
11. ГОРДОН Е.И. K -пространства в булевозначных моделях теории множеств. — ДАН СССР, 1981, т.158, №4, с.777-780.
12. ГОРДОН Е.И., ЛЮБЕНКИЙ В.А. Некоторые применения нестандартного анализа в теории булевозначных мер. — ДАН СССР, 1981, т.256, №5, с.1037-1041.
13. КУСРАЕВ А.Г. Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей. — ДАН СССР, 1982, т.267, №5, с.1049-1052.
14. КУСРАЕВ А.Г. О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа. — ДАН СССР, 1983, т.271, №2, с.283-286.
15. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Спуски и подъемы. — ДАН СССР, 1983, т.272, №3, с.521-524.

Поступила в ред.-изд. отдел

01.12.1983 г.