чтобы R' было подкольцом кольца R (ассоциативность, коммутативность и законы дистрибутивности автоматически выполняются в R', так как они выполняются в R).

Если R содержит единицу 1 и если элемент 1 принадлежит также R', то 1 будет, конечно, единицей кольца R'. В этом случае мы будем называть R' *унитарным подкольцом* кольца R (или R — *унитарным надкольцом* кольца R'). Однако вполне может случиться, что в то время как R содержит единицу, R' ее не имеет (например: R — кольцо целых чисел, R'— кольцо четных чисел). Менее тривиальными возможностями будут следующие: (а) R и R' оба имеют единицу, но единица кольца R не принадлежит R'; (б) R' имеет единицу, а R нет (см. ниже пример 2). *В обоих случаях* (а) *и* (б) *единица кольца R' необходимо является делителем нуля в R.* В самом деле, пусть $1'$— единица кольца R', и пусть нам известно, что $1'$ не является единицей кольца R. Тогда в R существует такой элемент a, что $1'a = b \neq a$. Мы имеем $1'b = (1' \cdot 1')\, a = 1'a = b$, т. е. $1'a = 1'b$, или $1'(a - b) = 0$. Так как $a \neq b$, то отсюда следует, что $1'$ является делителем нуля в R.

Подполем некоторого поля F мы называем любое подмножество F' множества F, которое является полем относительно данных операций поля ($+$ и $\cdot$) в F. Из только что сделанного замечания относительно колец с единицей следует, что элемент 1 поля F необходимо будет единицей поля F'. Это следует также из того, что мультипликативная группа поля F' должна быть подгруппой мультипликативной группы поля F. Последнее условие вместе с условием, что F'— подгруппа аддитивной группы поля F, является характеристическим для понятия подполя. Поэтому (§ 3) F' будет подполем поля F тогда и только тогда, когда выполняются условия:

(а) если $a,\ b \in F'$, то $a - b \in F'$;

(б) если $a,\ b \in F'$ и $b \neq 0$, то $ab^{-1} \in F'$.

Примеры. (1) Если a и b — различные элементы поля F, то мы можем определить новое сложение $\oplus$ и новое умножение $\odot$ в F следующим образом:

$$x \oplus y = x + y - a, \quad x \odot y = a + (x - a)(y - a)/(b - a).$$

(В геометрических терминах: мы меняем начало координат и масштаб.) Легко видеть, что элементы множества F образуют также поле и относительно этих новых операций. Мы обозначаем это новое поле через F'. Ясно, что подмножество поля F, которое является подкольцом поля F', не будет, вообще говоря, подкольцом поля F. Отметим, что a и b будут соответственно нулем и единицей поля F'.

(2) Пусть A и B — два кольца и R — множество всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$. Если мы определим в R сложение и умножение, положив $(a,\ b) + (a',\ b') = (a + a',\ b + b')$ и