РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

А. Г. КУСРАЕВ
С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ВВЕДЕНИЕ В БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ АНАЛИЗ

МОСКВА «НАУКА»
2005

УДК 517.98
ББК 22.162
К 94

Ответственный редактор
академик *Ю. Г. РЕШЕТНЯК*

Рецензенты:

Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.—??? с.

Булевозначный анализ — один из наиболее разработанных разделов, представляющих современные нестандартные методы анализа. В монографии детально излагается техника спусков и подъемов для булевозначных моделей теории множеств, позволяющая существенно расширить объем и область применимости математических утверждений. Основное внимание уделено изучению булевозначных изображений классических функционально-аналитических объектов: банаховых пространств и алгебр. Вскрывается имманентная связь последних с решеточно нормированными векторными пространствами, введенными Л. В. Канторовичем.

Книга ориентирована на студентов старших курсов, аспирантов и научных работников, интересующихся нестандартным анализом и его приложениями.

Kusraev A. G., Kutateladze S. S. ....—M.: Nauka, 2005.—??? p.

ISBN

Введение

Как следует из названия, настоящая книга посвящена *булевозначному анализу.* Так называют аппарат исследования произвольных математических объектов, основанный на сравнительном изучении их вида в двух моделях теории множеств, конструкции которых основаны на принципиально различных булевых алгебрах. В качестве этих моделей фигурируют классический канторов рай в форме универсума фон Неймана и специально построенный булевозначный универсум, в котором теоретико-множественные понятия и утверждения получают весьма нетрадиционные толкования. Одновременное использование двух моделей для изучения одного объекта — фамильная черта так называемых нестандартных методов современной математики. В этой связи булевозначный анализ принято относить к разновидностям нестандартного анализа.

Своим возникновением булевозначный анализ обязан выдающемуся достижению П. Дж. Коэна, установившему в начале 1960-х годов непротиворечивость добавления отрицания гипотезы континуума CH к аксиомам теории множеств Цермело — Френкеля ZFC. Вместе с более ранним результатом К. Гёделя о совместимости CH с ZFC, установленный П. Дж. Коэном факт означает независимость CH от обычных аксиом ZFC. Шаг, совершенный П. Дж. Коэном, связан с преодолением им принципиальной трудности, отмеченной Дж. Шепердсоном и отсутствующей в случае, разобранном К. Гёделем. Доказательство непротиворечивости $(\mathrm{ZFC}) + (\neg\,\mathrm{CH})$ невозможно с помощью стандартных моделей. Точнее говоря, выбрав какую-либо реализацию универсума фон Неймана, мы не можем указать в ней подкласс, служащий моделью $(\mathrm{ZFC}) + (\neg\,\mathrm{CH})$, если применять уже имеющуюся у нас интерпретацию предиката принадлежности. П. Дж. Коэну удалось предложить новый мощный способ построения невнутренних — нестандартных — моделей ZFC, названный им *методом форсинга* (см. [204]). Термин «форсинг» часто переводят как «вынуждение». Возможно, точнее говорить в этом контексте о методе принуждения. Использованные П. Дж. Коэном приемы — применение аксиомы существования стандартной транзитивной модели ZFC и насильственное превращение последней в принципиально нестандартную модель методом принуждения — вступают в противоречие с обычной математической интуицией, исходящей, по словам самого П. Дж. Коэна, «из нашей веры в естественную почти физическую модель математического мира» [84].

Трудности в восприятии результатов П. Дж. Коэна задолго до их появления прекрасно выразил Н. Н. Лузин в знаменитом докладе «Современное состояние теории функций действительного переменного», сделанном им на Всероссийском съезде математиков в 1927 г.: «Первое, что приходит на ум, это то, что установление мощности continuum'а есть дело свободной аксиомы, вроде аксиомы о параллелях для геометрии. Но в то же время, как при инвариантности всех прочих аксиом геометрии Евклида и при варьировании аксиомы о параллельных меняется самый смысл произнесенных или написанных слов: „точка“, „прямая“, etc. — смысл каких слов должен меняться, если мы делаем мощность continuum'а подвижной на алефической шкале, все время доказывая непротиворечивость этого движения? Мощность continuum'а, если только мыслить его как множество точек, есть единая некая реальность и она должна находиться на алефической шкале там, где она на ней есть; нужды нет, если определение этого места затруднительно или, как прибавил бы J. Hadamard, „даже невозможно для нас, людей“» [136].

Весьма характерный взгляд сформулировал П. С. Новиков: «...возможно (я сам придерживаюсь этого мнения), что результат Коэна имеет чисто отрицательное значение и обнаруживает конец развития „наивной“ теории множеств в духе Кантора» [152].

Стремление облегчить указанные трудности в восприятии результатов и методов П. Дж. Коэна привело Д. Скотта и Р. Соловея к построению булевозначных моделей ZFC, обладающих привлекательной наглядностью с точки зрения классических математиков и в то же время приспособленных для получения теорем о независимости. Аналогичные модели были построены в тот же период П. Вопенкой.

Из уже сказанного видно, что булевозначные модели, приводящие к тем же целям, что и построенные П. Дж. Коэном с помощью форсинга, должны быть в каком-то смысле нестандартными, обязаны обладать чертами, отсутствующими у общепринятых моделей.

Качественно говоря, *в понятии булевозначной модели присутствует новая концепция моделирования*, которую можно назвать заочным моделированием или моделированием по телефону. Поясним суть этой концепции ее сравнением с традиционными подходами. В классическом смысле, сталкиваясь с двумя моделями одной теории, мы пытаемся установить взаимно однозначное соответствие между фигурирующими в них универсумами. Если такую биекцию удается подобрать, переводя предикаты и операции одной модели в их аналоги в другой, мы говорим об изоморфности моделей. Таким образом, описанное представление об изоморфизме подразумевает очное сопоставление моделей — предъявление биекции универсумов.

Представим себе, что мы лишены возможности одновременного физического поэлементного сравнения моделей, однако можем обмениваться информацией с обладателем другой модели, например, по телефону. В процессе общения легко установить, что собеседник с помощью своей модели изучает объекты, которые он именует знакомыми нам словами, говоря о множествах, их сравнении и принадлежности. Поскольку нас интересует ZFC, мы спрашиваем у него — истинны ли аксиомы ZFC? Поработав в своей модели, он сообщает «да, истинны». Убедившись также, что он использует те же правила вывода, что приняты нами, мы должны признать, что имеющаяся у него модель — это модель интересующей нас теории. Полезно подчеркнуть, что сделав такой вывод, мы ничего не узнали ни об объектах, составляющих его модель, ни о процедурах, с помощью которых он отличает истинные утверждения от ложных[1].

Итак, *новая концепция моделирования связана как с отказом от отождествления предметных областей, так и с допуском новых процедур верификации утверждений.*

При построении булевозначной модели мы начинаем с выбора некоторой пол-

[1] “*E*, *Eir* и *Em*” из знаменитого Personal Pronoun Pronouncement представляются существенно более лучшим набором местоимений для данного абзаца (см. [380]).

ной булевой алгебры, краеугольного камня булевозначного универсума и области прибытия оценки истинности, сопоставляющей формуле ZFC некоторый элемент алгебры B. Точнее говоря, задав B, мы строим универсум $\mathbb{V}^{(B)}$, призванный служить универсумом рассмотрения теории ZFC. Каждой формуле φ, переменные которой теперь пробегают $\mathbb{V}^{(B)}$, сопоставляется элемент $[\![\varphi]\!]$, лежащий в исходной булевой алгебре B. Величину $[\![\varphi]\!]$ называют *оценкой истинности* формулы φ. Оценки истинности позволяют анализировать формулы ZFC. При этом оказывается, что теоремы ZFC получают наибольшую возможную оценку $\mathbb{1}_B$, и мы объявляем их верными внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Детальное изложение упомянутых конструкций занимает главы 1–6, составляющие первую часть этой книги. Мы начинаем с изложения необходимых нам сведений из теории множеств и булевых алгебр. Этому посвящены главы 1 и 2. Понятно, что подробности из названных разделов математики совершенно неизбежны для раскрытия выбранной нами темы. Глава 3 занимает несколько особое место. Она посвящена элементам теории категорий. Помимо изложения минимума сведений о категориях и функторах, мы отвели значительное место основам теории топосов. Нам представляется, что в связи с топосами читателю станет яснее место, которое занимают булевозначные модели в современных воззрениях на основания математики.

В главах 4–6 представлен инструментарий булевозначного анализа. Приводимые конструкции и, прежде всего, процедуры спуска и подъема, осуществляющие функторные связи между универсумом фон Неймана $\mathbb{V}$ и булевозначным универсумом $\mathbb{V}^{(B)}$, составляют техническую основу применений булевозначных моделей к задачам анализа.

Главы 7–12, составляющие вторую часть книги, посвящены демонстрации замечательных возможностей, которые булевозначный анализ предлагает для исследования разнообразных математических объектов. Здесь широко представлены способы превращений функциональных пространств в числовые множества, операторов — в функционалы, вектор-функций — в обычные отображения и т. п. Разумеется, отбор объектов анализа и круга приложений к функциональному анализу во многом обусловлен нашими личными научными интересами.

Мы начинаем с детального изучения булевозначных реализаций общих алгебраических систем, которому посвящена глава 7. Теория алгебраических систем, заложенная в трудах А. И. Мальцева и А. Тарского, относится к числу важнейших общематематических достижений. В этой связи ясно, что сведения о булевозначном изображении таких систем необходимы для приложений к любому содержательному разделу математики. Некоторые из таких приложений к анализу изображений групп, колец и полей в булевозначном универсуме собраны в главе 8.

Глава 9 посвящена анализу кардинальных чисел в булевозначных моделях. Особое место уделено так называемому эффекту «смещения кардиналов», обнаружение которого и позволило П. Дж. Коэну доказать непротиворечивость $(\mathrm{ZFC}) + (\neg\,\mathrm{CH})$.

Исключительно универсальное значение имеют конструкции, представленные в главе 10. Математика, понимаемая как наука о бесконечном, немыслима без вещественных чисел. Булевозначный анализ вскрыл имманентную связь поля вещественных чисел и расширенных пространств Канторовича. Обнаружилось, что каждое из таких пространств служит равноправной моделью поля вещественных чисел. Напомним, что условно полные векторные решетки, называемые также K*-пространствами* или *пространствами Канторовича*, были введены в 1930-е годы Л. В. Канторовичем как полезная абстракция поля вещественных чисел. Для новых объектов Л. В. Канторович выдвинул *эвристический принцип*, состоящий в том, что элементы K-пространства аналогичны вещественным числам, а утверждениям о функционалах отвечают теоремы об операторах со значениями в K-пространствах. Время позволило вложить точный смысл в принцип Канторовича. Соответствующий аппарат и, в первую очередь, основополагающая теорема Е. И. Гордона составляют ядро главы 10.

Глава 11 посвящена проблеме булевозначной реализации центрального объекта классического функционального анализа — банахова пространства. Оказывается, что изображениями традиционных нормированных пространств служат так называемые решеточно нормированные векторные пространства, также открытые при зарождении теории K-пространств. Здесь речь идет о нормировании элементов векторного пространства не с помощью чисел, как это традиционно делается, а с привлечением в качестве эталонов положительных векторов из какого-нибудь пространства Канторовича.

Глава 12 посвящена теории операторных алгебр. Булевозначный анализ таких алгебр — направление исследований, инициированное пионерскими работами Г. Такеути, — интенсивно развивается в последние десятилетия. Изложение строится на основе булевозначной реализации решеточно нормированных пространств. На этом пути возникает единый метод исследования таких аналитических объектов, как инволютивные банаховы алгебры, банаховы модули, алгебры Йордана — Банаха, алгебры неограниченных операторов и т. п.

Настоящая книга — плод наших размышлений и исследований в области булевозначного анализа, появившийся в результате длительной эволюции из учебного пособия «Записки по булевозначному анализу», написанного нами для студентов Новосибирского государственного университета в далеком 1984 году. Непосредственным предшественником данного издания послужила книга «Булевозначный анализ», выпущенная двумя изданиями Институтом математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН в 1999 и 2003 годах. Издание 1999 года было одновременно воспроизведено Kluwer Academic Publishers на английском языке. Лежащая перед читателем книга полностью переработана и столь существенно расширена новыми материалами, что мы сочли возможным дать этому варианту новое более обязывающее название.

Монография ориентирована на широкий круг читателей, интересующихся современными теоретико-модельными методами в их приложении к функциональному анализу. Мы старались сделать книгу возможно более независимой, хотя полностью осуществить замысел не удалось ввиду большого количества математических идей и объектов, вовлеченных в изложение. Надеемся, что читатель поймет наши проблемы и простит пробелы и неточности.

Выполняя приятный долг, мы выражаем благодарность за помощь в подготовке книги своим коллегам по Институту математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН и Институту прикладной математики и информатики Владикавказского научного центра РАН и Правительства Республики Северная Осетия-Алания.

А. Кусраев
С. Кутателадзе

Оглавление

Введение **3**

ЧАСТЬ I. ОСНОВЫ **7**

Глава 1. Элементы теории множеств **9**
1.1. Формальные системы 9
1.2. Язык теории множеств 14
1.3. Аксиоматика Цермело — Френкеля 19
1.4. Теория фон Неймана — Гёделя — Бернайса 22
1.5. Ординалы 29
1.6. Иерархии множеств 35
1.7. Комментарии 39

Глава 2. Элементы теории булевых алгебр **45**
2.1. Основные понятия 46
2.2. Операции на булевых алгебрах 51
2.3. Примеры булевых алгебр 55
2.4. Реализация булевых алгебр 60
2.5. Свойства стоунова представления 65
2.6. Гейтинговы алгебры 70
2.7. Комментарии 76

Глава 3. Элементы теории категорий **82**
3.1. Категории 83
3.2. Универсальные конструкции 88
3.3. Функторы 95
3.4. Топосы 101
3.5. Логика топоса 109
3.6. Булевы топосы 118
3.7. Комментарии 126

Глава 4. Булевозначный универсум **130**
4.1. Универсум над булевой алгеброй 130
4.2. Преобразования булевозначных универсумов 137
4.3. Перемешивание и принцип максимума 144
4.4. Принцип переноса 148
4.5. Отделимый булевозначный универсум 156
4.6. Классы в булевозначном универсуме 160
4.7. Комментарии 166

Глава 5. Аппарат булевозначного анализа **170**
5.1. Каноническое вложение . . . 171
5.2. Спуск множеств . . . 176
5.3. Спуск соответствий . . . 180
5.4. Подъем множеств . . . 185
5.5. Подъем соответствий . . . 189
5.6. Булевы множества . . . 193
5.7. Погружение булевых множеств . . . 197
5.8. Основные категории и функторы . . . 203
5.9. Взаимосвязи основных функторов . . . 208
5.10. Комментарии . . . 213

Глава 6. Функциональное представление булевозначного универсума **217**
6.1. Аксиоматика булевозначного универсума . . . 217
6.2. Понятие непрерывного расслоения . . . 222
6.3. Непрерывный поливерсум . . . 225
6.4. Поливерсум и универсум . . . 232
6.5. Комментарии . . . 234

ЧАСТЬ II. ПРИМЕНЕНИЯ **236**

Глава 7. Анализ алгебраических систем **238**
7.1. Булевозначные интерпретации . . . 239
7.2. Булевы алгебры конгруэнций . . . 244
7.3. Спуски алгебраических систем . . . 249
7.4. Погружение алгебраических B-систем . . . 254
7.5. Теорема Йеха . . . 258
7.6. Комментарии . . . 261

Глава 8. Анализ групп, колец и полей **264**
8.1. Группы и кольца с проекциями . . . 264
8.2. Коммутативные полупервичные кольца . . . 270
8.3. Спуски полей . . . 273
8.4. Упорядоченные группы и кольца . . . 277
8.5. Спуски упорядоченных групп и колец . . . 284
8.6. Комментарии . . . 288

Глава 9. Анализ кардиналов **291**
9.1. Булевозначные кардиналы . . . 291
9.2. Дистрибутивные законы и кардиналы . . . 295
9.3. Смещение кардинальных чисел . . . 300
9.4. Приложение к булевым алгебрам . . . 304
9.5. Независимость гипотезы континуума . . . 308
9.6. Комментарии . . . 312

Глава 10. Анализ векторных решеток 316
10.1. Векторные решетки 317
10.2. Порядково ограниченные операторы 322
10.3. Теорема Гордона 328
10.4. Булевозначная реализация векторных решеток 333
10.5. Функциональные представления векторных решеток 340
10.6. Измеримое функциональное исчисление 345
10.7. Нерасширяющие операторы 351
10.8. Комментарии 357

Глава 11. Анализ решеточно нормированных пространств 363
11.1. Основные определения 363
11.2. Примеры 368
11.3. Спуски банаховых пространств 373
11.4. Операторы Магарам 380
11.5. Пространства со смешанной нормой 386
11.6. Модули Капланского — Гильберта 392
11.7. Комментарии 397

Глава 12. Анализ банаховых алгебр 404
12.1. Спуски банаховых алгебр 405
12.2. AW^*-алгебры 410
12.3. Булева размерность модуля Капланского — Гильберта 414
12.4. Функциональное представление модулей Капланского — Гильберта 418
12.5. Функциональное представление AW^*-алгебр типа I 421
12.6. Вложимые C^*-алгебры 425
12.7. JB-алгебры 429
12.8. Предсопряженные JB-алгебры 434
12.9. Комментарии 439

Литература 444

Именной указатель 462

Предметный указатель 467

Указатель символов 481